UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

LUIGI FANTAPPIÈ:

INFLUÊNCIAS NA MATEMÁTICA BRASILEIRA.

UM ESTUDO DE HISTÓRIA COMO CONTRIBUIÇÃO PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.

Plínio Zornoff Táboas

Orientador: Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio

Tese de Doutorado elaborada junto ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática – Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosóficos e Científicos para obtenção do Título de Doutor em Educação Matemática.

Rio Claro – SP
2005

À Marisa, minha inspiração e companheira incansável.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Ubiratan D'Ambrosio, pelo carinho no meu acolhimento como seu orientado, pelo incentivo nas horas mais difíceis, pela liberdade proporcionada na condução do trabalho e, acima de tudo, pela lição de vida que ofereceu e oferece através da sua dedicação e disposição para o trabalho.

À minha mãe, Cleuza Zornoff Táboas, pela educação recebida, pelo apoio moral e pelo auxílio no trato com a língua italiana.

A meu pai, Celso Zoega Táboas, que não sai da lembrança.

Ao Prof. Dr. Claudio Possani, grande amigo e irmão, que mais uma vez acompanhou e compartilhou as venturas e desventuras que envolveram o desenrolar desse trabalho.

Ao Mestre Historiador Waldir Paganotto, pela amizade e dedicação em orientar-me a respeito de questões de História do Brasil.

À Juliana de Souza Moraes, Responsável pela Seção de Tratamento da Informação da Biblioteca Achille Bassi do ICMC-SC-USP, extensivo a todos os funcionários e monitores, pela presteza e gentileza em auxiliar-me no acesso ao acervo da referida biblioteca.

À Meire Thomazi Yatin, Coordenadora do Ensino Médio do Colégio Leonardo Da Vinci de Jundiaí, que, juntamente com os funcionários e direção deste colégio, me deu apoio logístico inestimável para a realização desse trabalho.

Aos funcionários, aos meus colegas professores, aos meus coordenadores, à direção da UNIFAE – São João da Boa Vista – SP, pela compreensão nos momentos difíceis, pelo respeito e pelo apoio para continuar na batalha.

Aos amigos da UNIARARAS – Araras – SP, especialmente a Profª. Drª. Miriam de M. O. Levada, o Prof. Dr. José Antonio Mendes, o Prof. Dr. Olavo Raymundo Junior, a Profª. Maura M. M. de O. Bolfer, o Prof. Carlos Roberto de Moraes e o Prof. Huemerson Maceti, pela calorosa torcida.

Ao Prof. Dr. John Fossa, pelo apoio e pela amizade.

A todos os colegas, funcionários e professores da Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro, pela carinhosa acolhida.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

História da Matemática e Educação Matemática: questões preliminares

‘Para que serve?’ e ‘Como funciona?’, juntamente com suas variações, são questões naturais que, a todo momento, o ser humano se coloca, mesmo sem verbalizá-las, em face das suas relações interpessoais e com o meio ambiente, em geral, e das suas inquietações cotidianas. Aqui, as coisas não serão diferentes. Provavelmente, elas não terão a ingenuidade e a despreocupação comuns da infância, mas com certeza estarão imbuídas da pureza necessária para que se possa atingir inexoravelmente uma compreensão o mais profunda possível do tema tratado. Um trabalho em História da Matemática inserido no âmbito da Educação Matemática deve, então, explicar-se como contribuição ao desenvolvimento desta última e, certamente, isto é feito com o desvelar dos seus mecanismos e, também, através de exemplificação metódica. O que se propõe no trabalho ora apresentado é uma possibilidade de intervenção educacional em nível superior a partir de textos históricos comprovadamente relevantes para o desenvolvimento da matemática, tomada do conhecimento humano como uma disciplina com características individuais próprias e independentes, em suas mais diversas áreas, cuja principal intenção é a discussão de temas avançados da própria matemática vistos como subprodutos da análise crítica da história, e no caso específico deste projeto, da história brasileira. Em síntese, a questão essencial deste projeto faz parte do que é considerado História da Matemática no Brasil.

Antes mesmo de focar o cerne da problemática lançada aqui, que é a já declarada História da Matemática no Brasil, três problemas surgem imediatamente após a leitura deste primeiro parágrafo e não devem de forma alguma ser negligenciados, ainda que uma análise mais refinada possa ser realizada por investigações mais específicas.

O primeiro problema é gerado pela seguinte questão: se um texto matemático é comprovadamente relevante, há, realmente, a necessidade de tomá-lo como subproduto da análise histórica? A opção aqui é responder afirmativamente, já que, pura e simplesmente, ele é parte constituinte da evolução da história e porque a análise do contexto que o enreda, em sua forma mais abrangente possível, pode revelar elos desconhecidos das cadeias causais, elas mesmas fontes de informações preciosas para melhor compreensão dos conteúdos técnicos abordados, bem como da dinâmica evolutiva da própria matemática. A negação desse procedimento traria à luz mais um exemplo de abordagem histórica convencional, no sentido de um mergulho internalista de análise de obra. Porém, a intenção da opção feita é não de apenas se contrapor ao convencional por uma determinação pós-modernista, mas é sim a de preservar a causalidade e também fugir das armadilhas do anacronismo, muito comuns em estudos de corte transversal. Em suma, pretende-se num movimento dialético uma desconstrução crítica do que é tido por convencional para melhor aproveitamento de suas potencialidades técnicas, quando existirem, ou para (re)construir algo novo que seja dotado de melhores perspectivas de desenvolvimento elucidativo acerca do conhecimento do mundo.

O segundo problema é o da determinação do critério a ser utilizado para se classificar o ‘matematicamente relevante’. A sua solução é totalmente dependente da sensibilidade com que é tratado o tema em questão e passa pelo julgamento do coletivo humano que, afora banalidades, encontra paulatinamente uma acomodação no desconfortável bombardeio das mais diversas formas de percepção do mundo que se acumulam com o passar do tempo. Portanto, não há a possibilidade de um critério absoluto, tanto por conta do tipo de olhar que paira sobre a fonte estudada, que pode querer, dentre outras coisas, apreender detalhes técnicos de uma ferramenta ali desenvolvida ou entender a influência desta sobre uma certa área do conhecimento ou saber se ela traduz alguma coisa que é imediatamente relevante para as relações interpessoais do cotidiano, como por conta da inexorabilidade do tempo, que não permite a estagnação da curiosidade humana, ou ainda, que apresenta a infindável busca do ser humano em responder aos 'Como?', 'Por quê?' e 'Para que?' surgidos através de atos reflexivos de sua interação com o meio. Apenas como tentativa de clarear a discussão sobre esta questão, é interessante observar o quão pródiga a matemática tem sido em produzir, através de esforços diários de seus pesquisadores, pequenas revoluções certamente invisíveis ao olhar comum e muitas vezes incompreendidas como tais até mesmo por especialistas, e em conseqüência talvez desse, por assim dizer, caráter obscuro ela tenha inúmeras vezes se comportado como vanguardista ao propiciar, como suporte lingüístico, uma interpretação diferenciada do mundo (a título de exemplificação poderiam ser lembradas a importância das geometrias não euclidianas para o desenvolvimento da concepção de espaço na Teoria da Relatividade[1], a importância dos trabalhos do matemático John Nash para a Economia[2] ou a importância dos trabalhos de Fermat sobre Teoria dos Números para a Criptografia RSA[3]).

---

[1] EINSTEIN, p. 70-80 e 87-94.
[2] Tese de JOHN FORBES NASH JR., *Non-Coperative Games (1951)*, que lhe valeu indicação para o prêmio Nobel conquistado em 1994.
[3] Ver COUTINHO.

Há, por fim, o terceiro problema, que é talvez o problema de fundo nas discussões a respeito das contribuições que a Educação Matemática dá ao desenvolvimento da Matemática, que sequer foi explicitado diretamente aqui, mas que se faz presente quando se pleiteia uma ação qualquer em Educação Matemática. Assim, ainda que possa parecer simplista, a intervenção oferecida neste trabalho almeja constituir-se um meio de ligação, uma motivação através da história para a superação das dificuldades em trilhar caminhos tão áridos quanto os da matemática avançada – quem dera fossem apenas os da avançada! –, que nem por isto são menos instigantes do que quaisquer outros trilhados na conquista de conhecimentos diversos. Não se conhecem dados que informem categoricamente a eficácia de tal proposta, dado que estes só podem ser observados subjetivamente e de forma qualitativa, pois dizem respeito às alterações produzidas na formação cultural do ser humano, nem tampouco se pretende aqui uma pesquisa de tal envergadura, porém, existem indícios de que esta prática metódica traz bons frutos para quem se vale da matemática como base de sustentação para sua atuação profissional, seja como educador ou como pesquisador, em função da apreensão do domínio do processo de criação envolvido no desenvolvimento do ferramental técnico sob análise. Esta falta de informação sobre eficácia gera insegurança e dificuldades para se assumir uma prática mais ousada em História da Matemática e, conseqüentemente, de se confeccionar estatísticas que representem o nível de eficácia de tal proposta, por pura e simples carência de engajamento didático/pedagógico. Porém, nenhuma argumentação justifica a não aceitação da proposta que nada mais é do que a defesa de uma cultura humanista verdadeira e universal, cuja missão é formar seres capazes de se reconhecerem integrados aos seus semelhantes nos conflitos que operam no contínuo espaço-temporal o desenvolvimento de todo o conjunto social através de cadeias causais que evoluem às vezes paralelamente, às vezes entrelaçadas, às vezes interpenetradas, às vezes incorporadas, possivelmente em detrimento de uma delas, umas às outras[4]. Afora mesmo estas inflexões e detalhamentos teóricos diversos oriundos da discussão acerca das vantagens de tal estratégia educacional[5], ainda mais uma questão, agora de ordem institucional, não cala: para o seu sucesso, a intervenção deve permear toda a grade curricular de um curso de matemática e uma carreira de História (da Matemática?!)[6] deve ser adotada em praticamente toda a duração do curso a fim de subsidiar as demais disciplinas. O consenso a respeito de uma proposta como esta parece longe de ser alcançado em função, principalmente, das dificuldades advindas de processos de planejamentos curricular e de ementários disciplinares e das dificuldades de integração nacional através de uma base curricular mínima. Não é demais observar que estas dificuldades afligem Instituições de Ensino Superior, obviamente interessadas neste debate, naquilo que diz respeito tanto aos currículos de Bacharelado quanto aos de Licenciatura em Matemática. Porém, tanto num como na outra, a superação do problema pode se dar com a observância de que se trata apenas de uma prática metodológica que deve ser assimilada nas disciplinas da grade curricular em maior ou menor grau, dadas as especificidades técnicas inerentes a cada uma delas, e de que a acomodação do ‘pacote histórico’ pode ser feita em poucas horas de estudos semanais e deve englobar títulos ou conteúdos, que talvez já existam em certos currículos, como História da Ciência, História da

[4] Ver TÁBOAS, p. 5-6.
[5] Uma defesa contundente de uma História da Ciência, universalizada e integrada mesmo numa História Universal, que está bem ao sabor das pretensões deste trabalho, é apresentada no Prefácio de J. L. Rodrigues Martins à Edição Portuguesa do texto de Niels Bohr, *Sobre a constituição de átomos e moléculas* (1913), especialmente as páginas de números 7 até 13 (Ver BOHR).
[6] Aqui já repousa subliminarmente uma tese de insubordinação da Matemática às Ciências que é de capital importância para a crítica do modo convencional de se fazer História da Matemática.

Matemática, Filosofia da Ciência, Lógica, Pensamento Ocidental, História do Pensamento, Práticas Educacionais, etc., permeados por tópicos de História Geral e Brasileira e organizados sob um novo prisma da história universal em consonância com as necessidades temáticas demandadas pelas outras disciplinas de conteúdos técnicos pertencentes ao currículo do curso. Uma iniciativa, que não pode deixar de ser notada aqui, também de extrema relevância é a incorporação do hábito de se apresentar, sempre que possível, os contextos em que as técnicas matemáticas avançadas, tratadas em todas as disciplinas, foram disseminadas no Brasil, a fim de se criar uma identidade nacional. A partir do instante em que estas idéias forem adotadas como estratégia para construção de cursos e disciplinas, o grande problema a ser enfrentado reside numa única palavra: planejamento. As atividades de planejamento e de preparação de aulas serão retomadas a cada ciclo, instigarão a reflexão contínua dos educadores sobre a correta inserção de suas disciplinas na estrutura do atual desenvolvimento da matemática e gerarão, conseqüentemente, o desgaste e o deleite que só a prática poderá nomear corretamente.

Retomando o foco deste trabalho, o desenvolvimento pretendido é o da análise de texto histórico como um suporte para a discussão de temas avançados do ensino superior nos mais diversos currículos nacionais de Cursos de Graduação em Matemática. Na verdade, a própria configuração final deste trabalho é fruto de uma investigação que teve como princípios norteadores o resgate da História da Matemática no Brasil, uma orientação do Grupo de Estudos de História da Matemática associado ao Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (PPGEM) do Instituto de Geociências e Ciências Matemáticas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista (UNESP) em Rio Claro, Estado de São Paulo, e o trabalho que envolve a crítica histórica de conceitos e conteúdos da matemática superior moderna[7] como estrutura de suporte para o processo de ensino/aprendizagem, uma escolha ao sabor do gosto pessoal. Dentre as diversas possibilidades de integração destes dois princípios, uma das sínteses é a dada pela investigação sobre o matemático italiano Luigi Fantappiè e as suas influências na matemática brasileira, enredo desta tese. É claro que a escolha feita não é o resultado de sorteio aleatório realizado com as combinações existentes entre temas, pessoas, datas, instituições, etc.[8], ela é sim o produto da observação apurada de um período extremamente rico para a consolidação de pensamento e de identidade nacionais brasileiros, expressos através de manifestações e transformações sociais, culturais, políticas e econômicas, cujos ápices podem ser datados entre as décadas de 1.920 e 1.930. Mas, antes de detalhar o cenário em que se desenrolam os acontecimentos que são objetos deste estudo, serão traçadas as linhas de conduta geralmente utilizadas para o desenvolvimento de uma investigação em História da Matemática, primeiro, no sentido convencional e, segundo, tomando-se como referencial de partida o matemático italiano Luigi Fantappiè, incrustado num contexto histórico brasileiro como peça motivadora de transformação cultural.

A abordagem convencional tem um tratamento padrão para toda a História da Ciência, padrão este desenvolvido a partir do seguinte encadeamento lógico: a existência de um método científico que preconiza a observação de fenômenos, a formulação de teorias sobre suas causas e efeitos, a experimentação destas em condições laboratoriais com dados tomados preferencialmente da natureza, a

[7] Entenda-se, aqui, por moderna a matemática resultante dos esforços realizados, principalmente, durante o século XIX e início do XX em produzir um corpo axiomático formal rigoroso para ela.
[8] Ver linhas de pesquisa e formas de atuação em história da matemática em WUSSING e MAY, p. 1-34.

comparação dos resultados obtidos em laboratório com a observação sistemática, porém desprovida de preconceitos, da realidade e, por fim, a aceitação teórica ou sua não aceitação e conseqüente reformulação para uma nova investida no ciclo que acaba de ser descrito[9], consolidado a partir de concepções filosóficas e técnicas do fazer ciência e interpretar o mundo, que são, por sua vez, resultado de elaborações mentais feitas desde pelo menos a Revolução Copernicana no início do Renascimento na Itália do Século XVI e se estendeu até os dias de hoje em trabalhos organizados e sintetizados em obras como *Discurso sobre duas Novas Ciências* (1632) de Galileu Galilei, *Principia* (1686) de Isaac Newton, *Novum Organum* (1620) de Francis Bacon, *Discurso do Método* (1637) de René Descartes, *Crítica da Razão Pura* (1787) de Immanuel Kant, *A Origem das Espécies* (1859) de Charles Darwin, o *Positivismo* do século XIX encabeçado por Auguste Comte, *Teoria da Relatividade* de Albert Einstein e da *Mecânica Quântica*, com os seus *Princípios da Incerteza* de Heisenberg e *da Complementaridade* de Bohr, na abertura do século XX, *Sobre as Proposições Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos* (1931) de Kurt Gödel, a resolução do *Problema das Quatro Cores* (1976) por Kenneth Appel e Wolfgang Haken, o *Projeto GENOMA* de sequenciamento genético da célula de DNA, dentre outras, que se contrapõem e se entrelaçam num balé dialético e rompem paradigmas quase que numa cadeia interminável. Este procedimento determina um crivo camaleônico que classifica[10] o que deve ser considerado relevante e, inclusive, com que grau de importância isto deve ser tomado, em função das suas possibilidades de desenvolvimento ou, mesmo, das suas

[9] Os procedimentos preconizados por este método são, também, muito familiares na Modelagem Matemática. Ver prática de modelagem em BASSANEZI&FERREIRA.

[10] Esta pode se tornar uma grande armadilha – o anacronismo – e levar à subestimação de fatos relevantes por conta de que certas ferramentas perderam a utilidade ou foram superadas por novas descobertas.

aplicações. Ainda que, por alguns poucos pensadores como Roger Bacon, a matemática não tenha sido percebida como estrutura que permeia e dá suporte ao desenvolvimento científico, e embora outros como Descartes a tenham tomado como fonte de inspiração, na medida em que ela apresenta um formalismo axiomático lógico/dedutivo que dá a idéia de poder tudo explicar racionalmente, ela, a matemática, é tomada, ao final da elaboração de tal método científico, como conhecimento universalmente apreendido em consonância com os progressos da própria ciência[11], em conseqüência disto, a discussão filosófica a respeito do seu caráter científico ou lingüístico axiomático é completamente superada. Assim, nesta trilha do convencional, importam tão somente as descobertas ou criações[12] de conteúdos/resultados que se legitimam como relevantes por conta das suas utilizações ou aplicações posteriores. Quando certos conteúdos/resultados passam por este crivo é chegada a hora de buscar a fonte de suas descobertas e, conseqüentemente, os criadores envolvidos nestes atos[13]. Ao perscrutar estes desbravadores das ciências, duas questões são focadas, a saber, as motivações que os levaram a desvelar tais conteúdos/resultados e quão prolíficos são em gerar conteúdos/resultados relevantes. Se algum destes desbravadores tiver as suas motivações (re)conhecidas ou descobertas pelas investigações históricas e, além disso, estas investigações revelarem um ser suficientemente prolífico em padrões convencionais, quer dizer, ou alguém que tenha mais de uma contribuição relevante, não necessariamente numa mesma área do conhecimento, ou alguém

[11] O problema, já antecipado na Nota 5, de certa sutileza ainda, se reapresenta e questiona a subordinação da investigação histórica da matemática à da ciência. Porém, ele deverá ser retomado e analisado detalhadamente mais adiante.

[12] Há uma discussão filosófica interessante na matemática sobre se ela é fruto da criação ou da descoberta do ser humano, porém, ela parece infindável e, portanto, aqui, *descoberta* e *criação* serão tratadas quase como sinônimas, embora haja uma inclinação em considerá-la como descoberta, adotada uma perspectiva fenomenológica.

[13] Importante observar o caráter discriminatório desta metodologia, por não revelar ou não informar claramente os tropeços da ciência no seu caminho de amadurecimento e conseqüente conquista de sucesso.

cuja contribuição tenha possibilitado um sem número de outras contribuições relevantes, então este ser ganhará os holofotes da ciência e toda sua vida será objeto de investigação. A este último procedimento será dado o nome de Iluminismo Ilustrado.

Como, então, Luigi Fantappiè seria abordado por este método convencional? Bem, quatro questões seqüenciais que têm o papel de crivo de exclusão são analisadas na sua ordem de apresentação e a relevância do personagem para a história cresce na medida em que as questões vão sendo respondidas positivamente. As questões são:

1. Quais são as descobertas ou criações de conteúdos/resultados sob estudo? São eles relevantes? Em que medida e por quê?
2. Há influências a partir destes conteúdos/resultados? Quais são elas? E quão importantes elas são?
3. Quais foram as motivações para se chegar a estas descobertas ou criações? E quais foram as influências recebidas para a conclusão de tal feito?
4. Quem é o personagem? Qual a sua história?

Eis as respostas em formatos extremamente simplificados, nem por isso omissos em relação à essência das questões:

1. Funcionais Analíticos são tidos como peças relevantes da Análise Funcional, que por si é altamente versada em aplicações, principalmente, da Física moderna, como por exemplo a Mecânica Quântica. São, os Funcionais Analíticos, relevantes na medida em que se aplicam na resolução de problemas que envolvem equações integrais, integração pela quadratura de sistemas e equações a

derivadas parciais, teoria dos Grupos Infinitos, Integrais Abelianas sobre Variedades Algébricas, questões e reestruturação do Cálculo Variacional, entre outros.

2. Os estudos desenvolvidos com Funcionais Analíticos, pertencentes a uma Escola Italiana de Análise do início do século XX, em franca interação com a Escola dos Bourbaki, renderam novas possibilidades na área da Topologia bem como na da Análise Matemática, como atestam, por exemplo, os trabalhos do Prof. Cândido Lima da Silva Dias (assistente de Fantappiè na USP), a partir, especialmente, da sua tese de doutoramento sob o nome de 'Espaços vetoriais topológicos e sua aplicação na teoria dos espaços funcionais analíticos'[14]. O Teorema de Arzelá-Ascoli, análogo ao Teorema de Bolzano-Weierstrass, foi desenvolvido a partir do estudo de função como elemento de acumulação num conjunto de funções e tem como base de inspiração os trabalhos sobre Teoria de Funcionais. Fréchet generaliza métodos anteriormente estudados: substitui a integral de Riemann pela de Stieltjes em expressões de funcionais estudados por Volterra, expande os resultados de Arzelá e cria conceitos amplos de pontos de acumulação e de limite, que aplica não só a funcionais bem como a quaisquer conjuntos abstratos. Há também uma abordagem hilbertiana dada por Von Neumann à Teoria dos Quanta como aplicação de funcionais[15].

3. Pioneiro na área e um dos primeiros a definir um funcional foi o matemático italiano Vito Volterra, em função de seus interesses na

[14] Ver DIAS.
[15] FANTAPPIÈ, editado em 1943, p. 11-17.

teoria de equações integrais. Alguns dos desenvolvimentos mais pungentes, na esteira das mesmas necessidades e motivações do seu criador, foram conquistados com os *funcionais analíticos*, construção de um dos seus discípulos mais brilhantes, Luigi Fantappiè, na visão geral de matemáticos contemporâneos a ele, como atesta, por exemplo, André Weil[16].

4. Luigi Fantappiè nasceu em 15 de setembro de 1901, na cidade de Viterbo. Formou-se em Pisa no ano de 1922 e foi certamente influenciado por uma geração de matemáticos italianos como Giuseppe Peano, Ulisses Dini, Francesco Severi e Vito Volterra, de quem foi aluno e discípulo, por assim dizer. Entre os anos de 1925 e 1927 foi assistente de Severi na Universidade de Roma; aprovado em concurso no ano de 1927, tornou-se professor de Análise na Universidade de Cagliari; no ano seguinte transferiu-se para Palermo, onde ficou até 1932; daí foi para Bolonha; entre 1934 e 1939, esteve, por indicação de Severi a Theodoro Ramos, no Brasil trabalhando na Universidade de São Paulo (USP), numa parceria que envolveu o Governo do Estado de São Paulo e o Governo Italiano. Como era militante fascista, retornou para a Itália, por orientação do seu Governo. Assumiu, neste retorno, um cargo no Instituto de Matemática da Universidade de Roma. Nos últimos anos de sua vida dedicou-se a questões filosóficas e na busca de unificação da interpretação dos problemas da natureza baseada em raciocínios de modelagem matemática. Morreu em Bagnaia (Viterbo) a 28 de julho de 1954.

[16] WEIL, p. 48.

Sob este ponto de vista convencional, não se faz em absoluto História da Matemática Brasileira. O Iluminismo Ilustrado de Fantappiè pode e deve ser aprofundado com o detalhamento de sua história pessoal, o que trará obviamente uma contribuição valiosa para a História – porque é das pessoas enredadas nos problemas de seus tempos que ela se alimenta –, no entanto, a menos de uma menção à sua passagem pelo Brasil – que poderá ser vasculhada pormenorizadamente e revelar (neste caso, com certeza, como será visto adiante!) importantes contribuições à matemática brasileira, além de trazer à tona as atividades deste italiano que são completamente ignoradas também pelos seus conterrâneos, que hoje se organizam em Viterbo para recuperação de sua memória[17]–, não poderá ser tomado como História da Matemática no Brasil. Para que isto possa ocorrer, são necessários, primeiro, criticar este fazer História da Matemática convencional, que de saída é equivocado ao subordinar a Matemática à Ciência, já que, na verdade, a Matemática se organiza a muito mais tempo do que a Ciência, tomando-se por base o que estes nomes representam atualmente, e acaba mesmo por se confundir com a própria História do Pensamento, e que, este fazer, deve, antes de tudo, ser reavaliado em função do que é relevante e, também, inerente à Matemática, e, segundo, atentar com cuidado para o período em que Fantappiè esteve no Brasil, que não é de forma alguma uma coincidência, ao contrário, está intimamente ligado ao corte histórico, à inflexão havida na sorte do direcionamento da matemática brasileira, que categoricamente foi identificada e classificada pelo Prof. Leopoldo Nachbin na sua conferência ‘Prêmio Moinho Santista de Matemática’[18]: “A semente do verdadeiro espírito matemático foi lançada entre nós e germinou. Em breves palavras, podemos dizer que a atual

[17] Gisella Quaranta,que trabalha junto a associação PROVITERBO pela organização da Fundação Luigi Fantappiè, tem sido um contato especial em Viterbo, para troca de experiências.
[18] NACHBIN, p. 75.

matemática brasileira data de 1930, aproximadamente, tendo apenas cerca de 30 anos. O que logramos fazer nesse período foi fruto do trabalho iniciado em 1934, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, que é berço da atual escola matemática brasileira e que, ainda hoje, é a melhor instituição de ensino universitário no país, no setor matemático”.

Além do mais, ao insistir neste ponto de vista convencional, a História da Matemática no Brasil praticamente começaria em meados do século XX com a análise de nomes como os de Maurício Matos Peixoto, em função de seus trabalhos sobre *Estabilidade Estrutural*, ou mesmo de Cândido Lima da Silva Dias, ou ainda de Leopoldo Nachbin, dentre outros poucos, que marcam definitivamente a entrada da Matemática Brasileira no cenário mundial como produtora de conhecimento e não apenas consumidora como até então ela havia sido.

Capítulo 2

História da Matemática: uma concepção

Talvez uma solução interessante para a organização e a orientação correta das argumentações que visam uma análise crítica do modelo de se fazer História da Matemática no sentido convencional, descrito na introdução, seja, esquecer-se, primeira e momentaneamente, de tudo que já foi dito acerca de *História da Matemática* como um corpo estruturado de técnicas que servem para algum tipo de investigação dos fatos da realidade, com a conseqüente busca de suas verdades, ainda que estas não sejam absolutas e possam ter um caráter mutante, pois são frutos da interpretação humana indissoluvelmente embebida das inquietações que tem no seu próprio tempo de vivenciamento[1]. É oportuno dizer, também, que a suspensão proposta pretende trazer à tona alguma limitação que o rótulo convencional confere à história da matemática, que de forma alguma desabona sua prática, porém a autentica não como forma única nem totalizante, mas como parte integrante de um fazer História da Matemática com possibilidades mais amplas, que abarca dentre outras a História da Matemática no Brasil e esta, por sua vez, não prescinde do toque convencional e necessita de um diálogo mais abrangente sobre o que se entende por fazer e desenvolver ciência. Assim, há na desconstrução, preconizada também na introdução, na verdade, nem tanto uma ruptura com o conhecimento que de alguma forma estava estabelecido, nem mesmo uma espécie de mudança de paradigma, há sim a compreensão de que o modelo exauriu, após a análise que esmiuçou toda a sua estrutura de aplicação – essa estrutura que provê o fazer história da matemática – na busca de entendê-la,

[1] BLOCH, p.51-6 e 75; FONTANA, editado em 1998, p.9-10 e 268; HOBSBAWM, editado em 1998, p.173, 220 e 250; MERLEAU-PONTY, editado em 1999, p.43.

de certa forma as possibilidades explicativas dos fenômenos da história da matemática e, no entanto, há ainda vivências a serem experenciadas para que se dê um novo conhecimento, uma nova construção ou a continuação mesma da construção desse fazer história da matemática inesgotável. Portanto, esta construção tomará caminho com a consciência ou intuição de que existiu ou ainda existe um outro caminho, e é por conta deste ser consciente que o termo *desconstrução* ganha significado, ou seja, na medida em que se efetua a *construção* tem-se sempre presente um parâmetro de comparação que afirma os passos, de qualquer forma, numa ou noutra direção[2]. Posto isso, tem início a nova aventura do conhecimento.

História da Matemática é história de alguma coisa tanto quanto o é a *História da Matemática no Brasil*, pois ambas são especificadas por intenções que apenas endereçam caminhos a serem trilhados por perspectivas diferentes na consolidação de conhecimento, mas, dado que a intenção endereça a partir da adjetivação de *História*, deve-se buscar, antes de tudo, a compreensão do significado da própria *História*, pois o fazer história já indica alguma intenção. Assim, seja qual for a concepção adotada, o pressuposto será sempre o de que o campo de atuação da história existe e, portanto, deverá ser especificado. Aqui, aceita-se uma concepção de que *tudo é história*, tudo o que o ser humano percebe abstrata ou concretamente pertence ao campo da história, mas tudo isto é concebido sob uma perspectiva sutil e refinada que está guardada, ou melhor, ancorada numa visão existencialista, fenomenológica, ou seja, *tudo é história* é a expressão de que a percepção é o próprio mundo que a precede, pois já existe e se

[2] FEYERABEND, p. 38, faz uma crítica à condição de consistência do método científico convencional e aponta para a necessidade de se construir novos caminhos para a ampliação das perspectivas da própria ciência, o que certamente influencia o modo de ver a ciência. Esta sua linha de pensamento dá segurança para se ousar, como diria o Prof. Ubiratan D'Ambrosio, novos passos no trabalho que ora se desenvolve.

coloca como o palco onde todo ato toma forma e a essência do ser humano, através da consciência oferecida pela sua existência, torna, conseqüentemente, esse palco passível de reflexão[3], na qual reside o verdadeiro *fazer história*[4]. Então, um conjunto de fatos que se quer compreender pode ser tomado à semelhança de um *objeto* que se quer perceber da forma mais sensível, refinada e ampla possível através da observação/experimentação direta ou da análise de testemunhos de qualquer natureza, que estruturam algum tipo de conhecimento acerca dos fatos, e torna-se, por isso, um ato de representação da realidade. Essa representação é, portanto, acúmulo de sensações temporais não só primeiras, de projeções de recordações, enfim, de tudo que não pode prescindir da percepção e que a compõe[5], mas também de processamento reflexivo, que preserva, inclusive e obviamente, na constituição da compreensão das diversas impressões e informações que se tem do *objeto*, os cuidados com as questões relativas à alteridade, ou seja, relativas ao *sentir diferente em épocas diferentes*[6]. O fluxo temporal que acumula toda a percepção já estruturada em ato reflexivo e que está organizado dentro de algum princípio de causalidade, fornece uma dimensão histórica do conjunto de fatos e, portanto, ele é o *fazer história* fenomenológico. A utilização deste processo na análise das questões concernentes às relações interpessoais e das pessoas com o meio ambiente é que se constitui no *fazer história* de forma essencial, e a nomeação consistente dos atos de reflexão mais a sua organização no fluxo temporal através de uma estrutura de causalidade é *a história*. A causalidade tem um papel de suma importância nesta concepção, pois

---

[3] MERLEAU-PONTY, editado em 1999, p. 3-6, 13-4, 16-8.
[4] HOBSBAWM, editado em 1998, p. 174-5.
[5] Ver percepção e recordação em MERLEAU-PONTY, editado em 1999, p. 47-8.
[6] FONTANA, p. 157; HOBSBAWN, editado em 1998, p. 198-9 e 248. Também parece singular uma interpretação de alteridade que está contida implícita no provérbio árabe *"Os homens se parecem mais com sua época do que com seus pais"*, citado por BLOCH, p. 60.

através dela é possível assegurar que a prática não se enverede pelas armadilhas do anacronismo ao apreender os fatos sob observação e, além disso, que é o mais importante, revelar como e por que se alteram ou não se alteram, consolidando neste último caso, as relações sociais e a própria sociedade, bem como compreender as diferenciações ou semelhanças entre grupos sociais[7].

Já a *matemática*, assim como a *educação*, pertence à *história* não apenas como significação ou simples adjetivação que endereça o foco da experiência para determinada perspectiva histórica, mas como pura experiência vivenciada no mundo, e, portanto, desde que se queira compreender uma dessas experiências, ela própria assumirá o papel da *história*, por conta da intenção contida neste compreender, que dá à experiência um sentido totalizante, na medida em que o objeto focado catalisa todas as relações que a percepção, acompanhada das suas sensações resultantes, puder desenvolver. Isto tudo se explica através de um movimento que não privilegia coisa alguma e que ocupa, preenche, se confunde com, ou mesmo determina, a existência do ser através das percepções que se apresentam ao perscrutar certo *objeto*. Portanto, da mesma maneira como a história tem seu campo de atuação, a *matemática* e a *educação* também possuem seus próprios espaços de definição, esboçados previamente pela própria intenção do indivíduo ao optar por um certo assunto como *objeto* a ser compreendido, que poderão ter uma dimensão total, mas nunca completa e absoluta, já que a história caminha em direção à compreensão da existência e, em conseqüência, é parte dessa mesma existência e não pode abarcá-la.

Nesta linha de raciocínio, um esboço esquemático poderia ser confeccionado assim: U, H, M e E são conjuntos que representam o mundo (local

---

[7] HOBSBAWN, editado em 1998, p. 164.

de toda a ‘experienciação’ do ser), a história, a matemática e a educação, respectivamente. H é subconjunto de U assim como M e E o são de H, porém não disjuntos. H deve ser tomado como subconjunto próprio de U, que é ilimitado, para que não se conclua que o mundo é fruto de concepção idealista e para que se possa vislumbrar sempre uma janela aberta para as novas percepções da existência, na medida em que se caminha indefinidamente na direção da realidade. O diagrama da figura 1 apresenta um instantâneo fotográfico tirado do fluxo das configurações dinâmicas que esta nova concepção pode assumir a partir da intencionalidade do ser ao relacionar-se com o mundo e, portanto, descobrir-se vivo. Certamente que outros *objetos* poderiam tomar os lugares de matemática (M) ou educação (E) no esquema apresentado, por conta das alterações na intenção ou simplesmente por conta de intenções diferentes, e isto apresentaria apenas mais uma das infindáveis possibilidades do modelo. Além desta troca simples de objetos/subconjuntos, que aqui não vem ao caso, pois apreender significados a partir de matemática e de educação é o foco de interesse deste trabalho, há mobilidade, plasticidade, elasticidade e viscosidade no esquema que permitem reestruturá-lo segundo as necessidades da interpretação escolhida; assim, a matemática pode abarcar a educação tanto quanto o contrário, educação e matemática podem se confundir ou se identificar completamente, e, em cada uma das situações descritas anteriormente, o maior subconjunto pode igualar-se ao todo *história* (H). A única configuração que não se viabiliza é a de exclusão mútua, ou seja, aquela em que os subconjuntos são disjuntos, dado que a educação, numa síntese generalista, como atividade que visa a integração do indivíduo com o outro e com o mundo numa busca de melhores condições de existência, permeia toda matéria do conhecimento.

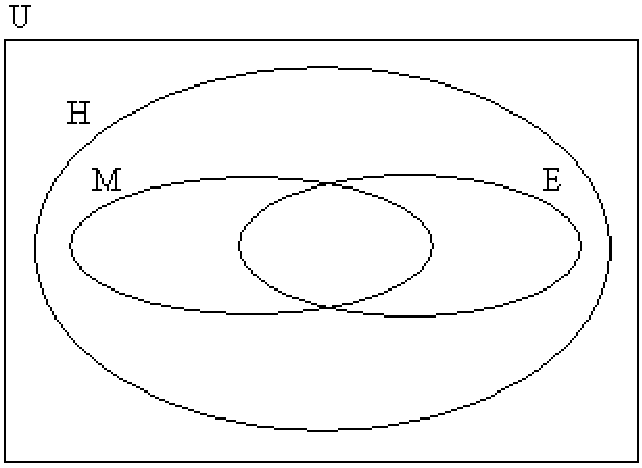


Figura 1

No jogo instável de configurações plásticas em que as deformações ou transformações dos conjuntos seguem não a ótica do contínuo temporal da causalidade histórica convencional, que superpõe, e muitas vezes sobrepõe[8], fatos seqüencialmente de maneira determinista, e sim as necessidades, as vontades ou mesmo os desejos do ser humano na busca de uma compreensão profunda da matéria observada, a *Educação Matemática* é tomada como a interseção $E \cap M$, que em absoluto é estática como no instantâneo da figura 1 e sim dinâmica e metamórfica a ponto de, como já visto, poder transformar-se na própria história (H) em função da intencionalidade despendida à análise. E acrescenta-se a isto, o que é mais importante ainda neste modelo, o fato da causalidade ser privilegiada apenas e tão somente na medida em que ela não carrega, através de um caminho único fatalista de apreensão da realidade, um valor absoluto de verdade para a interpretação, ao contrário, permite a visualização de uma realidade composta de interferências múltiplas, mais complexa do que a dada por um corte transversal numa linha de tempo que carrega consigo e homogeneíza um espaço para as ações e, conseqüentemente, o limita para a análise dos fatos.

[8] Houaiss, p.2593, sobrepor - 2 *bit. fig. colocar por cima, esconder* e superpor – *colocar acima*. A superposição dos fatos é entendida como a impressão simultânea de negativos que contêm imagens fotografadas separadamente e a sobreposição como a regravação de um CD que continha alguma informação e que acaba por se perder neste ato.

O mais marcante e, provavelmente, inovador de toda esta (des)construção, que ora se leva a cabo, é a sublimação da insubordinação entre as matérias a serem apreendidas. Nunca é demais observar que o próprio instantâneo registrado na figura 1, tomado por modelo de investigação histórica, mesmo que considere migrações de elementos nos interiores dos subconjuntos M e E, e dentro do próprio conjunto H, leva a uma análise parcial da realidade que isola elementos e paralisa cenários a cada vez e gera conflitos na ordem da subordinação, que são inexistentes, já que o meio em que se dão as percepções e os próprios elementos/objetos têm, acima de tudo, um caráter viscoso e, portanto, na dinâmica das migrações interferem nas formas dos conjuntos. A história, então, nesta nova concepção, ganha em complexidade e, também, em realidade, pois ao se colocar como ato de reflexão e de análise crítica das percepções acerca dos fatos, converge inexoravelmente para a apreensão do mundo próprio, ainda que jamais o atinja na totalidade de suas múltiplas faces dado que se constrói e se reafirma na existência do ser em busca desta sua própria realidade.

Em síntese, além do pressuposto da causalidade e do caráter permeável de toda matéria ou objeto de análise à ação da educação – como já visto –, é essencial para a nova concepção de história o gosto em apreender os fatos, ao sabor da fenomenologia, pela ruptura da teia de acontecimentos que preenche o espaço histórico, causada pelas tensões intrínsecas no campo da existência ou pela manutenção da estabilidade das relações na evolução dos fatos do mundo.[9]

Uma das boas soluções no tratamento da história é a investigação a partir de temas, abordados como pertencentes a um conjunto universal de temas que se entrelaçam e interpenetram, ou ainda, que se comportam “como um feixe de

[9] HOBSBAWM, editado em 1998, p. 164.

trajetórias diversas que se combinam e se contrapõem".[10] Dois estágios da evolução[11] histórica dessas trajetórias devem ser tratados aqui com bastante cuidado: o passado e o futuro. O presente é fugidio, evanescente no contínuo temporal, porém ele comporta os elementos do passado, na medida em que é o resultado de uma das possíveis alternativas, em conflito com as demais, que se configuraram em algum tempo, e comporta, também a gênese do futuro, não necessariamente como um elemento deflagrador de desenvolvimento progressivo ou contínuo da estrutura atual, mas como uma economia política que o engendra num movimento reflexivo e dialético[12]. "O passado é, por definição, um dado que nada mais modificará. Mas o conhecimento do passado é uma coisa em progresso, que incessantemente se transforma e aperfeiçoa[13]". É inquirindo o presente que se faz necessário compreender o passado e que se força uma análise deste último moldada às feições das intenções, que sempre são distintas, ainda que as perguntas sejam as mesmas. Neste ato de esmiuçar, de vasculhar ou até mesmo de triturar o passado, no sentido de reposicionar dialeticamente as impressões que se tem dele e, conseqüentemente, de refinar sua percepção, é que se buscam os elementos para a construção do futuro. O futuro, diferentemente do passado, é certo ainda que se ignore a sua cara, e é exatamente por isso, por essa possibilidade de fazer, que a educação está indissociavelmente ligada à história. Assim, qualquer tentativa de se pautar uma agenda educacional para a transformação do indivíduo e, em conseqüência, de toda a sociedade, baseada somente nas impressões do presente – o que já é por si uma contradição com a compreensão fenomenológica adotada –,

[10] FONTANA, editado em 1998. Ver aplicação do método em FONTANA, editado em 2000,*"Introdução ao estudo da história geral"*.
[11] Como em TÁBOAS, p. 13-4, *evolução* será tratada como desenrolar de fatos ao longo do tempo, diferentemente de *desenvolvimento* que trará sempre uma conotação com *acréscimo*, nunca com *ruptura*, *quebra*.
[12] FONTANA, editado em 1998, p. 9-10; HOBSBAWM, editado em 1998, p. 49-50 e 229-30. Ver, também, discussão tangencial em BLOCH, p. 128-35.
[13] BLOCH, p. 75.

apenas o corrobora; pois esse esforço é coroado simplesmente com a conclusão e consolidação do presente evanescente na linha do tempo: o ser humano atua apenas para se ajustar à realidade presente e para remediar alguma distorção detectada na estrutura vigente de forma mecânica, não refletida, ou seja, o ser humano atua pela manutenção de um *status* e nega a possibilidade de desenvolvimento, já que a manutenção sequer pode ser considerada como a consolidação de um caminho assumido por ato reflexivo – não há permanência sob reflexão. É por isso que todo o perscrutar do presente, permeado (ou não!) pela educação, impõe um natural mergulho no passado que renasce e é modificado por este ato e semeia o futuro como porvir incerto ainda que desejado de alguma forma específica intencionalmente diferenciada de formas já experimentadas no mundo e fixadas por alguma outra história.

Em algumas vezes, a análise do passado pode ser realizada pelas motivações do presente entendido como a única concretização possível daquele passado, mas essa racionalização excessiva da *única via* leva, em geral, a conclusões de que há uma evolução mecânica e determinista do presente ao futuro e até mesmo, como conseqüência, de que não há mais espaço para uma análise histórica[14]. Ora, o presente é a concretização evolutiva do passado pelo simples fato de que outra alternativa não se viabilizou, dentre várias possíveis, portanto o futuro não está determinado e a análise criteriosa do presente em conjunto com o próprio passado por ele evocado, através das intenções do observador/ator, poderá efetivamente subsidiar a condução desse presente a um futuro quiçá melhor.

Até aqui, as análises preliminares sobre *passado* e *futuro* apontam duas conclusões razoavelmente fundamentadas, a saber: primeiro, a reflexão, ato

[14] Ver antíteses argumentativas em FUKUYAMA, *O fim da História e o último homem*, e em HOBSBAWM, editado em 1996, *A era dos extremos.*

essencial da consciência do ser, não permite a constância/manutenção de estruturas e, segundo, a própria consciência do ser, em conflito permanente com os outros e com o meio ambiente em atos reflexivos, permite inúmeras alternativas para a evolução histórica dos fatos. Resta ainda uma terceira questão, que talvez contemple a tese pretendida por Fukuyama: há uma lei que diga que o caminho seguido pela evolução dos fatos é o que maximiza o bem comum, aquele que realiza *o desenvolvimento* sempre? O problema não é simples. A questão contempla as teses de *não constância/manutenção de estruturas* e de *múltiplas alternativas para evolução* e não se responde negativamente a ela apenas apontando exemplos de retrocessos no bem estar comum ao longo do tempo, pois o desenvolvimento pode estar associado a uma escala temporal diferenciada e estes retrocessos podem perfeitamente pertencer à estrada da maximização do desenvolvimento. Assim, a tese da existência de tal lei parece fortalecida e a única argumentação que pode derrubá-la por completo está estruturada num raciocínio lógico indutivo. Se a seqüência evolutiva dos fatos pertence ao caminho maximizado do desenvolvimento, então o ser pode apreender o futuro não na determinação da configuração exata, mas sim na certeza do estabelecimento do melhor mundo. Este *apreender*, ora destacado, é um produto idealista – o ser retém no seu pensamento o mundo –, portanto incompatível com uma concepção fenomenológica – o ser percebe num certo momento o mundo como o seu próprio mundo, mas que é só uma parte do mundo no qual ele vive e o (re)conhece a partir das suas experiências.

Com isso, os *feixes de trajetórias* se orientam no tempo de forma a indicarem a cada instante múltiplas possibilidades para a percepção e compreensão dos fatos e a manterem a incerteza como norte. Nem mesmo sequer a própria ciência, que tenta a partir da análise e da observação dar conta de um mundo exterior e objetivo através das sensações que estão além da percepção, consegue gerar previsões deterministas sobre fenômenos da natureza[15], quanto mais a história que se propõe a compreender o próprio ser humano em suas relações com o outro e com o mundo. Conclusão: o futuro é cientificamente incerto e a história como técnica de análise das transformações sociais se vê renovada, o que quer dizer, em síntese, que resta ao ser humano tomar para si, por meio do conhecimento e da avaliação histórica, ou seja, da sua consciência, a condução do presente que, ao se realizar, já é futuro.

De volta à matemática. É certo que ela interage com a ciência não só no que diz respeito à representação do mundo físico, mas principalmente na construção de uma estrutura do pensamento, totalmente abstrata, que pode ajudar a revelar a existência desse mundo, já que em algumas vezes, sem o seu auxílio, ainda que se trate do mundo objetivo, ele acaba por fugir à intuição e às percepções humanas mais aguçadas[16], então ela – a matemática – pode ser considerada uma das principais disciplinas que compõem o conhecimento humano[17]; e mais profunda ainda é essa imbricação entre matemática e conhecimento, a ponto de que, contrariamente, certas propriedades experimentadas no mundo revelam-se como desenvolvimentos realizados em conceitos matemáticos com tal força que acabam por ser consideradas contemporâneas da própria conceituação[18]. Sendo assim, a matemática não passa

[15] *"Tanto na dinâmica clássica como na física quântica, as leis fundamentais expressam hoje possibilidades e já não certezas. Não só temos leis, como também acontecimentos que não podem deduzir-se das leis"* - Ilya Prigogine, Prêmio Nobel de Química, citado por FONTANA, editado em 1998, p. 273.
[16] Note-se a importância das geometrias não-euclidianas para a posterior compreensão das possíveis configurações do universo físico em que vivemos. Ver uma abordagem geométrica simplificada dos *modelos cosmológicos* em SILK, p. 83-101.
[17] Ver as idéias expostas por HARDY, p. 114-133.
[18] MERLEAU-PONTY, editado em 1974, p. 124.

ao largo das investidas educacionais de transformação do ser humano, já que é peça fundamental do conhecimento na interpretação filosófica do mundo. Isso tudo só reafirma a matemática como objeto de conhecimento e, obviamente, passível de análise histórica. Agora, toda investigação do passado não pode prescindir de uma objetivação clara dos componentes da estrutura sob análise, pois ela está imbuída de intenções. No caso da matemática, é primordial traçar os contornos que enquadram sua filosofia, já que ela não é mais pura linguagem para representação do concreto e sim uma estrutura lógica/abstrata e axiomática, construto do mundo interior, que agora não só é mais parte e objeto, mas também está a serviço do conhecimento. Além disso, sua interação com as ciências aplicadas determina que esta maneira de concebê-la – esta filosofia – esteja de alguma forma associada ou mesmo até subordinada, por conta da intenção promulgada, à própria filosofia da ciência, o que impõe uma delimitação primeira desta última. Assim, é importante re-nomear, re-classificar ou re-categorizar a ciência como parte integrante de um conhecimento que leva em consideração todas as interações com o objeto analisado e que não apenas se interessa pelo domínio de técnicas laboratoriais eficazes em representar o desenvolvimento de certos fenômenos da natureza. Desta forma, a ciência passa por uma ampliação conceitual e sua realização é agora medida como a capacidade de produzir, transmitir e adaptar conhecimentos e técnicas pelas interações entre indivíduos para melhoria das condições sociais no contexto cultural, cenário das relações humanas[19]. Esta concepção vai além de uma, por assim dizer, burocrática e, de

[19] HAMBURGUER et al., p. 16:*"Consideramos que as possibilidades de análise historiográfica se ampliam se conceituarmos a ciência como uma prática de produção de conhecimentos e aplicação de resultados que estabelece, através de indivíduos que a realizam, como síntese de suas tradições formadoras, com características locais, em determinados meios sociais"*. VARGAS, editado em 1994, na sua *Introdução* ao *História da Técnica e da Tecnologia no Brasil*, p. 17, considera que tecnologia é cultura e não 'mercadoria que se compra' quando é necessário.

certa forma, já tradicional idéia – podendo com certeza complementá-la – de que a ciência é medida somente pela produção que aparece ou é referenciada em publicações especializadas, tornando-se por isso sinônimo de originalidade, ainda que questionável seja classificar algo como original, e pretende claramente quebrar o invólucro que mantém a ciência como uma atividade alheia às interações sociais e que, de quando em quando, agrega benefícios materiais a essas interações. Então, ao quebrar este invólucro, a ciência escapa de uma armadilha da razão ocidental e deixa de lado a crença de que pode dizer melhor do mundo do que ele próprio e volta a ele para reaprender-se ciência. Por sua vez, então, a filosofia da ciência deve ser renovada e concebida não como um modo que o ser humano tem de ver e compreender o mundo e, a partir disso, ditar normas de conduta geral ou, pelo menos, científica, mas como síntese dinâmica e dialética entre as visões de mundo, que o ser humano constrói com auxílio do fazer ciência e do fazer matemática, e as interferências dos resultados das ciências e das matemáticas nessa compreensão de mundo. Dada a óbvia complexidade a que essa renovação dos fundamentos da filosofia coloca a intelecção do mundo, agregada ainda das dificuldades advindas da quase ininteligibilidade dos princípios da física ou da matemática contemporâneas, analisados em suspensão ou internamente, *"o remédio só pode ser inventar uma nova maneira de compreender"*.[20] Os avanços das ciências em geral, e principalmente da física moderna em franco diálogo com a matemática avançada[21], ao invés de determinarem verdades acerca do mundo, têm demandado, isto sim, o rompimento do senso comum na consolidação do conhecimento. Um dos grandes dramas da

---

Como expansão desta idéia – por considerarmos que ciência envolve os desenvolvimentos da tecnologia bem como da técnica, o desenvolvimento da ciência não pode deixar de ser considerado também como aquisição cultural de um povo.

[20] OMNÈS, p. 104.

[21] Por exemplo: Mecânica Quântica, Análise Funcional e Sistemas Dinâmicos.

civilização de fins do século XX e início do século XXI é que a dificuldade de se compreender o ser está estendido inexoravelmente à compreensão da sua própria criação tecnológica[22] e o deslocamento do problema da compreensão traz à cena elementos novos, que devem ser tratados com um mergulho destemido em águas desconhecidas, pois não há como desvendá-las com as percepções limitadas da antiga forma de vivenciar problemas. Esta atitude tem a missão de enfrentar as resistências que ainda minam as possibilidades de melhor aproveitar os desenvolvimentos científicos em prol de uma compreensão universal mais essencial do mundo, ainda que de harmonia desajeitada a olhares atônitos frente à utilização das novas formas matemáticas desenvolvidas durante o século XX, em comparação com o determinismo mecanicista do século XVIII. Na matemática, especificamente, ela convida a enfrentar com coragem a aridez da sua estrutura lógica/lingüística – na qual reside sua própria beleza, uma vez que a matemática, ao incumbir-se de associar um único significado a cada conceito nomeado, cumpre eficazmente uma de suas atribuições mais freqüentes, qual seja a de representar através de modelos sintéticos os fenômenos da natureza (inclusive humana!), os quais inevitavelmente, e ainda que de forma incerta, encontram um único fim – para não limitá-la a simples aplicações e a representações de contextos previamente fixados[23], pois até esse prévio estabelecimento de contexto passa por reflexão e conseqüente abstração; ora, matemática é primordialmente abstração e pode, portanto, gerar alguma representação de mundo ou algum contexto em que será aplicada, suscitando no ser humano a necessidade de superação dos desafios que essa dicotomia real/imaginário (ou concreto/abstrato)

[22] Exemplo: o rastreamento de possíveis problemas no motor de um carro novo é feito eletronicamente por aplicativos matemáticos e computacionais que envolvem uma quantidade de conhecimento que, em geral, foge à capacidade de apreensão individual.
[23] Contra uma visão simplesmente utilitarista da função da hitória, ver BLOCH, p. 45.

interpõe à sua compreensão integral[24]. Esta superação só se dará a partir do enfrentamento das dificuldades da análise de conteúdo matemático puramente abstrato, já que hoje uma reflexão sobre a matemática busca o entendimento de um mundo próprio que se revela muito mais por um pensamento abstrato do que pela apreensão do concreto. Porém, ainda que se deva aprofundar ao máximo a análise de conteúdo puramente abstrato para o seu entendimento, a matemática – parte integrante do conhecimento humano evoluído e desenvolvido no transcorrer do tempo ou, simplesmente, parte da cultura humana – necessita também de um olhar histórico, mas não deve negligenciar o passado aproximando-o do presente, sob pena de incorrer em anacronismo ou interferir em fato já ocorrido exportando elementos estranhos ao cenário observado e supervalorizando determinados contornos. A atividade em história toma o pensamento matemático de hoje a título de comparação para a detecção de possíveis diferenças evolutivas, mas não como referência para julgamento da qualidade do conhecimento desenvolvido pelo pensamento de outra época[25]. Ou seja, esta atividade deve encontrar no passado e mostrar tudo o que há de relevante na evolução do pensamento matemático, para sua transformação e seu desenvolvimento[26]. É de suma importância, ainda, notar que determinados pensamentos não aceitos ou não praticados hoje podem ter sido vistos como altamente revolucionários, pois suscitaram uma linha de pensamento

---

[24] Ver POINCARÉ, p. 20, ao comentar na discussão sobre as dificuldades de se compreender a matemática no seu formato dicotômico analítico-geométrico, lógico-intuitivo: *“... ao se tornar rigorosa, a ciência matemática assume um caráter artificial que surpreenderá a todos; esquece suas origens históricas; vê-se como as questões podem resolver-se, não se vê mais como e por que elas surgem”.*

[25] BLOCH, p. 65-6; HOBSBAWM, editado em 1998, p. 165.

[26] Duas discussões importantes são realizadas por D’AMBROSIO em *A interface entre História e Matemática: uma visão histórico-pedagógica* (ver FOSSA, editado em 2000, p. 241) e por SILVA DA SILVA em *Matemática no Brasil: história e relações políticas* (ver FOSSA, editado em 2001, p. 14). Ver também como a História da Matemática é tida como uma atividade de pesquisa no contexto da Educação Matemática nas *Considerações sobre o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP – Rio Claro*, artigo de BICUDO, M. A. V., VIANA, C. C. de S. e PENTEADO, M. G., no BOLEMA nº 15 (BORBA, p. 113).

muitas vezes completamente antagônica a estes últimos[27]. Agora, como a história do real é algo inatingível ou apenas potencialmente atingível, a história é realizável como atividade e esforço de compreensão, de reflexão e de interpretação de fatos do passado e de consolidação de conhecimento que age no futuro[28] – presente consolidado, portanto, toda esta percepção da realidade passada deve apresentar duas características básicas: aproximar o objeto de análise o máximo possível do contexto espaço/temporal em que estava/está inserido e afastar a análise de modelos preestabelecidos ou gerados fora dos seus contextos formativos e culturais. Um tema que a todo momento é visitado na estruturação deste fazer história da matemática é o da cultura que se consolida na medida em que se tem experiências vivenciadas com os elementos definidos, ou que se definem a partir da prática, como pertencentes à matemática. Dois caminhos para analisar questões da investigação em história da matemática, que está a serviço de uma história universal[29], parecem bem definidos: o de lidar com objetos históricos da matemática[30] e o da Etnomatemática.

A investigação através da Etnomatemática[31] está calcada no seguinte roteiro:

1º) Reflexão sobre a interação do indivíduo com o meio;

---

[27] Um bom exercício – ainda que taxado de positivista, o que parece pouco relevante neste momento – de apresentar os contornos sociais que obrigaram o ser humano a desenvolver o conhecimento matemático é apresentado por CARAÇA, p.101-117.
[28] FONTANA, editado em 1998, p. 265.
[29] BLOCH, p. 67-8; HOBSBAWN, editado em 1998, p. 292.
[30] ARBOLEDA, p. 16, considera que: *"Para nossa concepção do trabalho histórico, o restabelecimento da constituição das idéias matemáticas deve comportar um estudo complexo do processo integral que as originou. Conseqüentemente terá que dar conta da intervenção que, no campo do pensamento, exerceram tanto as condições econômicas como o estado de desenvolvimento das técnicas (no caso da matemática: a física e a mecânica) e, muito especificamente, a incidência que certas ideologias filosóficas exerceram (como oposição ou portadoras de mudança) no surgimento de novas noções"*.
[31] Ver o seminal D'AMBROSIO, *"Etnomatemática"*.

2º) Observação da síntese que otimiza as práticas mais freqüentes de um certo grupo em contato com o mundo;

3º) Observação de que a síntese apreende o essencial do ser humano e, portanto, contém o que é universal;

4º) Análise do que há de matemática nesta essência universal do ser humano.

Já o outro caminho pode focar quaisquer dos elementos ligados tradicionalmente à matemática – um conteúdo específico, uma área de pesquisa, um personagem, uma instituição, um texto, etc. – e segue esse roteiro:

1º) O modo ocidental dominante é tomado como padrão de comparação para o fazer matemática;

2º) Observação dos estágios de desenvolvimento local e global da disciplina e comparação dos níveis alcançados entre as duas esferas de atuação;

3º) Análise das interferências recíprocas do fazer matemática local e global.

O diálogo entre estes dois fazeres é altamente proveitoso como aplicação à História da Matemática, pois na medida em que avançam as duas frentes de estudos vai-se consolidando o conhecimento matemático e reconhecendo-se o nível de desenvolvimento dessa atividade cultural local, através da etnomatemática, e, também, em comparação com uma realidade mais global, através das interferências vivenciadas por interseções culturais de povos[32] – o que pode incluir, certa e obviamente, trocas de conhecimentos matemáticos.

O caso do Brasil é exemplar e nunca é demais relembrar: tomando-se o corte apresentado por Nachbin no final da Introdução e lançando-se mão apenas do fazer História da Matemática no sentido convencional, a História da Matemática – como corpo teórico ou disciplina autônoma – no Brasil terá início

[32] Não seria correto aqui *intercâmbio cultural*, pois desta forma haveria uma conotação de certo voluntarismo entre as partes, o que limitaria a situação a apenas um tipo de inter-relação cultural.

apenas após a década de 1930 por conta de trabalhos como os de Maurício Peixoto sobre *Estabilidade Estrutural* e do próprio Leopoldo Nachbin sobre *Topologia* e *Análise Funcional*, dentre alguns poucos mais. Em termos convencionais, antes da década de 1930 a matemática brasileira era apenas consumidora, seus desenvolvimentos eram realizados em função apenas de necessidades das ciências aplicadas, mais especificamente das engenharias[33], e já no século XX estava ainda desconectada dos avanços alcançados pelo rigor formal do XIX como corpo axiomático e longe também das conseqüentes questões que efervesciam nos âmbitos da lógica e da filosofia da matemática[34]. Então, somente a partir dos trabalhos indicados acima é que ela passa a ser, também, produtora. As duas observações seguintes refletem a importância do diálogo descrito anteriormente: primeira, é sob o abrigo da Etnomatemática e do fazer História da Matemática, preconizado em todo este capítulo, que a produção científica matemática brasileira ganha sentido independentemente do corte indicado por Nachbin e, segunda, é na busca das respostas que possam explicar as causas das alterações ocorridas na década de 1930 e, também, como conseqüência e subproduto dela, o porquê do nome de Luigi Fantappiè entrar para a matemática brasileira. O toque convencional irá reaparecer aqui, o Iluminismo Ilustrado de Luigi Fantappiè não é dispensável, ao contrário, ele será importante na medida em que contribuir com informações para a compreensão do contexto geral que envolveu a matemática brasileira daquele período. No entanto, a criação da Universidade de São Paulo – USP e da sua Faculdade de Filosofia, Ciências e

[33] Ver o desenvolvimento da técnica e da tecnologia no Brasil em VARGAS, principalmente as Partes I e II, das p. 38 a 279.

[34] São exemplares as questões lógicas/filosóficas a respeito do caráter axiomático da matemática, envolvendo no seu formalismo os problemas da consistência e da hipótese do contínuo e gerando as principais correntes filosóficas – *logicismo, intuicionismo e formalismo* – que foram, de certa forma, iniciadas e discutidas por Giuseppe Peano, David Hilbert, Ernest Zermelo, Alfred North Whitehead, Bertrand Russel, L. E. J. Brouwer, Kurt Göedel, dentre outros. Ver EVES, p. 655-84 e KATZ, p. 797-814.

Letras – FFCL, cenário local para as investigações históricas pretendidas, não é apenas um ato isolado na História do Brasil que por si faz uma revolução em determinada área do conhecimento[35], ele faz parte de uma paisagem muito mais complexa na qual se discutiu, após o amadurecimento advindo de diversos movimentos surgidos em fins da década de 1910 e início da de 1920 – em geral no meio intelectual, atuantes nas esferas político e cultural – e que culminaram com a busca e a consolidação do sentido de nação para o povo brasileiro.

[35] D'AMBROSIO notou que a própria ciência, para se desenvolver como canal aberto e globalizado de troca de experiências, necessita de guarita institucional, em *A Influência Italiana nas Atividades Científicas Brasileiras*, *In* DE BONI.

Capítulo 3

Cenário da década de 1930

Voltar o olhar para a década de trinta, é vislumbrar um período marcante para o mundo e, em especial, para o Brasil.

A década que se inicia em outubro de 1929 com a quebra da bolsa de valores de Nova York, pintando com cores vivas (ou negras, mas nítidas) o colapso do liberalismo. Estava aberto o caminho para formas políticas de inspiração pouco racional, estruturadas num discurso nacionalista exacerbado elevado às últimas conseqüências: as políticas nazi-fascistas. Tábua de salvação e últimas esperanças para o livramento do mundo da ameaça socialista. Pelo menos é o que parte da Alemanha e Itália pensavam ao permitirem a ascensão ao poder dessas formas totalitárias.

No Brasil, que também não ficara imune a esses acontecimentos, o que se observa é o ensaio dos primeiros passos na busca de sua identidade enquanto nação moderna, numa tentativa de se livrar da frustração que ainda minava a estima das classes dirigentes, visto que a esperada modernidade não ocorreu na transição da monarquia para o modelo republicano.

Em 1930, pode-se afirmar, inaugura-se o chamado Brasil moderno. Mas como a modernidade se inscrevia em terras brasileiras? Com uma revolução, assinalava-se o fim de um modelo político pouco representativo diante das novas forças sociais e econômicas emergentes. Partindo do Rio Grande, as fileiras rebeladas lideradas por Getúlio Vargas, chegaria ao Rio de Janeiro em outubro deste ano, expulsando o presidente Washington Luís para o exílio.

A *Revolução de 30* é considerada pela historiografia como um momento de mudança. Mesmo que o termo revolução muitas vezes encontre resistência para seu emprego como definição deste movimento, é certo que transformações ocorreram no cenário brasileiro, colocando assim, logo de saída, um primeiro problema: definir o caráter do movimento que pôs fim à primeira fase do período republicano brasileiro, se é que é possível optar por uma definição sem estabelecer vínculos com quaisquer dos projetos políticos-ideológicos associados a ele.

Bem, é inegável que 1930 traga no seu bojo a construção de um novo panorama político para o país, mas por outro lado, ainda constituem fonte de intensa discussão as reais dimensões atingidas por esta data, ou melhor, por este movimento, que a historiografia brasileira convencionou chamar de *Revolução de 30*.

Em primeiro lugar, o próprio conceito de revolução necessitaria, neste caso, de uma melhor definição. São variados os usos que o termo abriga e, dependendo da fonte teórica utilizada, seu significado pode encampar sentidos contraditórios, no entanto, todos acabam encontrando justificativas para seu emprego[1]. Para uma história cujo papel é legitimar os atos daqueles que ocupam o poder – prática muito comum nas mais diversas sociedades e culturas[2], o emprego do termo quase sempre significa o início de um novo regime; a revolução expulsa o velho e inaugura o novo, servindo então para alimentar de glórias o mito da origem[3]. E assim é, desde de que o termo adquiriu sentido político, ao que parece em 1789 na França.

[1] Para uma discussão mais elaborada sobre o termo revolução ver *On revolution* de Hannah Arendt (ARENDT).
[2] Ver inspiração para essas idéias em FONTANA, editado em 1998..
[3] BLOCH, p. 56-60.

Mas, a amplitude do conceito e suas várias definições possibilitam vê-lo, também, possuidor de outros significados, que embora procurem percorrer caminhos distintos, acabam se encontrando. É o caso dos marxistas, por exemplo. A interpretação, de que se valeram os teóricos do Partido Comunista Brasileiro, sobre o ocorrido em 1930 é que o movimento ia ao encontro das teses da *III Internacional*, afirmando a idéia de revolução burguesa. Por muito tempo a *Revolução de 30* foi tida como uma revolução burguesa pelos olhares teóricos do *Partido*, como uma etapa necessária a ser cumprida na criação das reais condições para a verdadeira revolução socialista. Embora os marxistas tenham se valido de uma argumentação do tipo científica, o uso do conceito era de serventia política, já que o *Partido*, em sua desenhada *caminhada para o poder*, procurava debelar outras facções do movimento operário, particularmente os anarquistas. Nestas condições, o movimento liderado por Getúlio Vargas atendia aos interesses do *Partido*, já que no seu entender ele era composto pelas forças progressistas que caminhavam rumo à revolução democrático-burguesa e que criariam, desta maneira, as condições necessárias para a futura revolução emancipadora do proletariado, mesclando ciência e ideologia num jogo de justificação das vontades idealizadas!

O trabalho mais acurado dos historiadores, principalmente a partir da década de 1960, começou a trazer à tona uma análise mais isenta na tentativa de procurar entender melhor os acontecidos de 1930. Merece destaque a interpretação elaborada por Francisco Weffort em seu estudo sobre as origens d'*o populismo na política brasileira*[4] e o trabalho *'Revolução de 1930: historiografia e história'*,[5] desenvolvido por Boris Fausto, que tornou-se um clássico sobre o

[4] WEFFORT.
[5] FAUSTO.

tema. Tais obras, que permitiram uma visão mais atenta dos fatos ocorridos, procuraram desmontar as interpretações que até então existiam. Segundo Fausto, duas dessas interpretações são as mais marcantes: a primeira, utilizada pelos preconizadores da análise embasada no materialismo histórico, alegava haver uma disputa entre o setor agrário-exportador e a nascente burguesia industrial – a chamada ‘tese dualista’; a segunda insistia que o movimento gerador da revolução era fruto dos interesses classistas representados pelos tenentes, que, devido às suas origens sociais, representavam as classes médias urbanas que discursavam em prol da moralização do processo eleitoral, e em sua profundidade pouco alterava a estrutura socioeconômica. Fausto procura então desmontar estas interpretações apoiando-se na tese defendida por Weffort de que o movimento originara um vazio de poder, não existindo qualquer classe capaz de exercê-lo com hegemonia, e que encontrara como solução uma fórmula peculiar aos brasileiros conhecida como solução de compromisso. Esta visão destitui de veracidade tanto a idéia de disputas intersetoriais dentro da elite – a famosa tese da razão dualista, como também descarta a hipótese de que a *Revolução de 30* teria sido resultado de articulações da classe média representada na política pelos tenentes.

Existe também uma outra vertente nascida com a retomada, em finais da década de 1970, dos estudos sobre a formação da classe operária brasileira, que classifica o fenômeno como uma ação contra-revolucionária. Neste sentido, o termo *contra-revolução* significa que os reais agentes da revolução social teriam sido impedidos de realizá-la devido a uma atitude deliberada dos comunistas brasileiros. Segundo este olhar, o Partido Comunista, na ânsia de tornar-se hegemônico junto à classe trabalhadora, procurou afastar outras forças atuantes no seu seio, principalmente os anarcossindicalistas, criando assim uma situação de inatividade para as organizações de trabalhadores, de maneira que não fosse possível a atuação dessa classe no desenlace da trama que levou à derrubada das oligarquias do poder. Seguindo uma lógica de ocultação do papel dos trabalhadores, a historiografia brasileira teria construído uma visão sobre a *Revolução de 30* baseada na eliminação dos vestígios de atuação e, até mesmo, da existência dessa classe num delicado momento da História do país.

Se não é possível estabelecer uma única versão para o episódio, tanto melhor, pois isto demonstra apenas que o trabalho do historiador ainda não se fez por terminar. Aqui aparece mais uma vez a corroboração da impossibilidade de se construir uma verdade absoluta, o que não significa que a busca por ela não deva continuar a permear os trabalhos em história.

Retomando a década de 1930, e agora, direcionando nossa atenção para as conseqüências imediatas da *Revolução de 30*, iremos nos deparar com a ação mais contundente, no sentido contrário a esse movimento, que foi a guerra civil detonada por São Paulo em 1932. Essa nova mobilização também reivindicou para si o título de *revolução*, mas não parece traduzir de forma adequada o termo. Se, ainda assim, essa interpretação é feita em um sentido entendido como uma forma de depuração da sociedade na busca de uma formulação mais racional e preocupada com a melhoria das relações sociais, não é bem isso o pretendido pelas lideranças do ato de rebeldia deflagrado a partir de São Paulo, tanto é verdade que o crescente operariado paulista acabou por se opor à atitude tomada pelas lideranças políticas dirigentes do Estado. Na melhor das hipóteses, este movimento teria contado com o apoio entusiasta da classe média paulista e teria sido articulado junto ao Partido Democrata, agremiação política cujos quadros eram oriundos dos industriais de São Paulo.

Mesmo derrotados nos campos de batalha, os paulistas acabaram conseguindo dar tônus ao projeto constitucional que reivindicavam. Se a ruptura da ordem política em 1930 pode ser encarada como revolucionária, o estabelecimento da nova ordem através do projeto constitucional nem tanto. Antes deve ser vista como fruto da própria contra-revolução, como observa Ângela de Castro Gomes[6]: "Desta forma poderíamos caracterizar a Constituinte de 1934 não como fruto da revolução e sim como exigência da contra-revolução".

Assim, eram consagrados, em nome da democracia, princípios do liberalismo, atendendo diretamente aos interesses de setores economicamente dominantes na sociedade. Os trabalhadores, cuja representatividade ficara muito aquém de seu potencial, acabavam se submetendo a uma ordem que minava continuamente sua autonomia, até a chegada do Estado Novo, que definitivamente selaria o destino da classe trabalhadora sob a tutela estatal.

O interregno de convivência relativamente democrática vai até o final de 1935, mesmo assim fortemente marcado pela aguda disputa ideológica entre direita e esquerda, ou entre, fascistas brasileiros aglutinados na Ação Integralista Brasileira e anti-fascistas, que formavam um grande leque que englobava desde liberais, democratas, até mesmo, mais à esquerda, os comunistas que estavam abrigados sob o signo da Aliança Nacional Libertadora. A polarização ideológica que cada vez mais se acentuava na Europa atravessava o Atlântico e vinha assinalar sua presença no território brasileiro. À medida que cresciam as forças do nazi-fascismo na Alemanha e na Itália, também se tornava mais acirrado o enfrentamento entre os integralistas e a frente que lhe era contrária no Brasil, que em cada momento ficava ainda mais sob o controle dos comunistas.

---

[6] GOMES.

Em 1935, alguns integrantes da ANL, inflamados pelos discursos de seu líder maior, o já membro do PCB, Luís Carlos Prestes e alimentados por análises, um tanto precipitado (para não dizer equivocadas), promoveram uma insurreição nos quartéis do Rio de Janeiro, Natal e Recife, com o intuito de levar a cabo um projeto de revolução socialista, pois, além do mais, para os integrantes dessa empreitada, o Brasil corria sérios riscos de caminhar rumo ao fascismo com o governo Vargas. Este movimento, debelado pelas forças legalistas, ficou conhecido pejorativamente como 'intentona comunista'. Sua ocorrência serviu para disseminar junto aos militares um ódio ao comunismo, nem tanto pelo seu projeto político, mas pelo fato de semear a insubordinação e, principalmente, o sentimento de traição dentro da corporação. Sentimento que irá marcar profundamente a formação dos militares brasileiros, mais tarde, servirá de desculpa para que as instituições militares desfiram um golpe que colocaria fim a prática política getulista.

A tentativa de tomada dos quartéis, como forma de desencadear a revolução social, por parte dos membros da ANL, acabou servindo como pretexto para o governo Vargas colocar em andamento seu plano de continuar no poder, desrespeitando o que ditava a constituição aprovada em 1934. Promovendo a perseguição aos comunistas, como a todos os demais integrantes da ANL, o governo passou a anular um segmento político bastante importante numa eventual luta pelo não cumprimento da Carta Magna. Mais tarde, o pretexto para esse não cumprimento seria forjado através de um documento elaborado dentro do próprio exército, o famoso *Plano Cohen,* sobre a existência de um complô comunista, o que justificativa então a implantação do Estado Novo, ou seja, a ditadura varguista.

Em meio a este cenário de incertezas políticas, mudanças na sociedade e na economia, interpretar o Brasil, entender a formação da sociedade, de suas instituições políticas e os caminhos econômicos percorridos por essa nação, apresenta-se como uma necessidade. Como lidar com a nova realidade urbana, onde as cidades a cada dia crescem mais? Como desenvolver um programa de industrialização consistente e ao mesmo tempo lidar com as reivindicações dos trabalhadores deste setor? Como prover um ensino básico e técnico que atenda às demandas de uma sociedade que se moderniza? Como conciliar a necessidade de crescimento econômico com a crise econômico-financeira sustentada para manutenção de perdas reduzidas para os produtores agrícolas (cafeicultores, principalmente)? Como construir autonomia industrial? Como criar a tão desejada identidade como nação moderna?

Essas e outras questões passam, direta ou indiretamente, para se resolverem, pela discussão de como dominar e desenvolver ciência e tecnologia. Portanto, é preciso saber! Diante dessa realidade, a criação de instituições voltadas para a produção de conhecimento torna-se prioridade. Até então, os estabelecimentos de ensino superior existentes no país estavam voltados para uma formação bacharelesca em instituições isoladas, onde estudos sistematizados eram poucos e os debates acadêmicos entre áreas eram quase insignificantes, dada a insipiência dos canais de discussão, quando havia.

São Paulo, o estado em estágio mais avançado de desenvolvimento econômico, no qual se localizava o parque industrial mais promissor – prioritariamente comandado por imigrantes italianos –, preocupado com esta situação e imbuído da idéia de – e também embebidos pelo ideal dos intelectuais brasileiros formados na Europa, principalmente na França – de se consolidar como síntese da almejada identidade moderna para o país e, conseqüentemente, de se colocar como seu carro chefe e condutor político, econômico, científico e cultural[7], procurou sanar as adversidades com a criação de uma universidade capaz de aglutinar o pensamento científico de todas áreas. É neste contexto que nasce a Universidade de São Paulo[8], reunindo a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras e a Escola de Sociologia e Política, recém criadas, às já existentes Escola Politécnica, Faculdade de Medicina e Faculdade de Direito. Nascia, assim, a primeira universidade paulista. Para que sua produção estivesse em um nível comparável às instituições mais antigas existentes na Europa, os responsáveis pela criação dessa universidade brasileira foram buscar nas principais escolas de pensamento européias os acadêmicos que proporcionariam aos alunos brasileiros uma formação sólida e atualizada. Porém, motivada ideologicamente, num período propício para isto como visto anteriormente, a elite paulista, organizada principalmente em torno de Julio de Mesquita Filho, envia Theodoro Ramos, um dos pilares de sustentação dessa empresa dada a dimensão de sua inserção no cenário científico nacional[9], como representante dos interesses do Governo Paulista a Europa para *"estudar o funcionamento das universidades e contratar professores".*[10] A lista de contratação, previamente estipulada após exaustivas

[7] A tese de que a criação de uma universidade atenderia aos propósitos de Armando de Salles Oliveira, governador do Estado de São Paulo e idealizador do projeto, seria uma resposta à derrota militar infligida por Getúlio Vargas ao Estado durante 1932 e um meio de garantir a subida ao poder central é um pouco controversa. Além disso, há que se observar o processo de amadurecimento científico e cultural pelo qual o país passou durante a década de 1920, acentuando assim a idéia de fortalecer a identidade nacional. Para tanto, ver comentário inicial em SILVA, p. 211-2.

[8] Em HAMBURGUER, p. 261, Patrick Petitjean comenta em *As missões universitárias francesas na criação da USP*: *"Quando o decreto da fundação da USP foi publicado, em janeiro de 1934, já havia portanto uma herança de cooperação entre a França e o Brasil. A USP era o vetor de um triplo projeto: político liberal (formar elites paulistas para modernizar a nação brasileira), educativo (uma universidade, moderna, à imagem dos países europeus) e científico (uma forte demanda de ciência para o ensino, sobretudo para a formação de pesquisadores)."*

[9] Ver SILVA, p. 200-10: uma resenha sobre a formação acadêmica de Theodoro Ramos.

[10] Patrick Petitjean em *As missões universitárias francesas na criação da USP*, HAMBURGUER, p. 263.

negociações para conciliação dos interesses da comunidade de descendentes italianos, principalmente, que lutaram por uma representação significativa de intelectuais da Itália, determinava que Theodoro Ramos fosse buscar inicialmente na França intelectuais ligados às carreiras de humanidades, na Itália, físicos e matemáticos, na Alemanha, químicos, zoólogos e botânicos e na Inglaterra, literatura inglesa. A investida na Europa e as conseqüentes primeiras contratações geraram as primeiras *Missões Estrangeiras* na USP. Estas *Missões*, ainda que fossem periodicamente renovadas, tinham um papel fundamental para a formação dos primeiros quadros de docentes e pesquisadores, que viriam posteriormente ocupar as cátedras da universidade para tocá-la avante. A *Missão Italiana* foi constituída inicialmente por três professores: Piccolo para a Literatura Italiana, Gleb Wataghin para a Física e Luigi Fantapiè para a Matemática. É aqui que se iniciam as buscas por entender a ligação do personagem principal – Luigi Fantappiè – desse trabalho com a matemática brasileira, e o legado que a partir desta relação foi gerado para a nossa *História da Matemática no Brasil*.

Capítulo 4

Luigi Fantappiè

O anticlímax de toda essa novela, por assim dizer, tem início no seguinte fato: em 1934 chega a São Paulo o personagem principal, o matemático italiano Luigi Fantappiè para assumir a Cátedra de Geometria Superior na então recém fundada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo – USP.

Em princípio, nesta história, o personagem não ganha vida pelos seus feitos, mas pelo momento histórico, pelo contexto, e por isso os holofotes são acesos sobre ele, porque há uma missão a ser desempenhada e deve ser levada a cabo por alguém, qual seja, a de se constituir um curso de matemática com autonomia para desenvolver pesquisas avançadas e com capacidade de formar professores para atuação na escola média. Fantappiè, por ser um matemático promissor e um discípulo de Volterra, foi indicado a Theodoro Ramos por Francesco Severi: indicação aceita de ambas as partes.

Duas linhas de estudos, baseadas em duas das inquietações do presente, podem ser levantadas aqui, porém, é certo que de alguma forma elas venham a se interdependerem ou interpenetrarem durante os procedimentos de investigação, pois este envolve a busca por entender atividades do ser humano, que é complexo e o seu conhecimento não se dá de forma segmentada. Pois bem, as duas possibilidades são as seguintes:

1. Perscrutar a vida de Luigi Fantappiè e seus relacionamentos com a comunidade italiana local durante a sua passagem por São Paulo (1934-1939);

2. Rastrear as atividades de pesquisa científica, numa perspectiva ampliada, como a proposta no Capítulo 2, que deixaram marcas no desenvolvimento da matemática brasileira.

A investigação do primeiro problema proposto é de difícil execução – e até mesmo por isso extremamente instigante – dado que, de saída, se colocam algumas questões preliminares de cunho altamente subjetivo e de caráter pessoal, como por exemplo: quais são as reais necessidades que fizeram Fantappiè empreender uma viagem ao Brasil? Se não as necessidades, então quais as intenções, ou melhor, os desejos que o moveram até São Paulo? O máximo que parece possível é observar o cenário que o cercava no momento da sua decisão. O quadro econômico mundial, no início da década de 1930, era recessivo[1], portanto, dificuldades de emprego tornaram-se evidentes – nas grandes economias americana e européias, inclusive e obviamente, por serem já altamente interdependentes –, mesmo para pessoas diferenciadas por qualidades inerentes ou advindas de boa formação profissional (que, num quadro econômico oposto, em função destas qualidades, não se sujeitariam a toda e qualquer oferta). Fantappiè era um jovem matemático de muita habilidade em sua área e talvez tencionasse posição de maior destaque na sua comunidade acadêmica[2], o que poderia (na sua visão!?) ser inviável naquele momento[3]. Assim, aceitar uma posição importante e quase central num projeto que redundaria na criação da Universidade de São Paulo poderia colocá-lo em situação de permanente estima junto a sua

[1] Ver cenário refletido especificamente no Brasil, por conta da crise da bolsa de valores de Nova Iorque em 1929, no trabalho *Formação Econômica do Brasil* de Celso Furtado (FURTADO).
[2] Essa será chamada de 'tese de ambição'.
[3] Gleb Wataghin, em HAMBURGUER, p. 263, indicado por Enrico Fermi a Theodoro Ramos para ocupar cadeira de física na USP, ponderou após uma primeira negativa ao convite para vir ao Brasil: *"era o facismo, e eu não podia ficar. Eles me fizeram também compreender que seria difícil, para mim, obter um posto de titular na Itália. Que eu faria melhor em aceitar a proposta que era uma proposta generosa"*. É claro que a situação de Fantappiè era muito mais confortável em termos ideológicos na Itália, porém, esse tipo de postura serve também como alerta aos que pretendem se mostrar fiéis à ordem estabelecida.

comunidade de origem e, dado o sucesso possível e até inevitável do projeto aliado ao seu pioneirismo voluntário, levá-lo a posições inicialmente desejadas, quando um cenário econômico mais favorável assim o permitisse. Uma outra possibilidade de entender Fantappiè é a aceitação – mais simplista no analisar pessoas, pois trabalha com estereótipos – de que suas motivações são apenas as de uma devotada militância política[4]: Fantappiè, dada a sua filiação ao *Partido Fascista* italiano, colocou-se como instrumento de propaganda e influência para cativar outros povos à sua causa; atitude bastante comum num período em que países como França, Inglaterra, Alemanha – e não só Itália – tentavam, através de políticas institucionais, recuperar ou aumentar a participação em mercados através da influência intelectual sobre os formadores de opinião e dirigentes de países periféricos que começavam a esboçar organização política autônoma[5].

Além do exposto até aqui – e independente de qual desses dois caminhos foram adotados para desvendar Fantappiè, caminhos que podem inclusive se completar – o que ainda parece objeto de análise é a assunção de que o próprio Fantappiè não acreditava na possibilidade, ou mesmo não a tinha, de ocupar cargo de proeminência em alguma Universidade italiana de seu interesse. Bem, Fantappiè era um dos discípulos, por assim dizer, favoritos de Vito Volterra (1860-1940). Sob sua influência, ao se aprofundar nos estudos sobre teoria dos funcionais – que teve no próprio Volterra um dos pioneiros –, introduziu, no final da década de 1920[6], o conceito de funcionais analíticos e foi um dos maiores expoentes no seu desenvolvimento[7]. Mas isso não foi suficiente para a sua imediata ascensão acadêmica. Apesar de toda sua capacidade, não chegou a

[4] Essa será chamada de 'tese de militância política'.
[5] Ver HAMBURGUER: livro que explora o tema.
[6] Ver *Opere Scelte*, FANTAPPIÈ, editado em 1973.
[7] Ver em LEVY, p. 357-60, as considerações iniciais de FRANCO PELLEGRINO ao seu complemento sobre funcionais analíticos.

superar de forma contundente – em verdade, de forma alguma – a grandeza de um Vito Volterra, por exemplo. Portanto, como grandes matemáticos italianos ainda estavam ativos, a oferta das melhores vagas estava naturalmente limitada e a saída mais vantajosa seria aventurar-se noutros mercados. Esta análise acaba por fortalecer a tese oferecida anteriormente para interpretar a estratégia de Fantappiè em relação à sua vinda ao Brasil. Aliás, não *a tese*, mas sim a composição das teses *de ambição* e *de militância política* é que se fortalece como resposta à primeira das duas possibilidades investigativas surgidas das inquietações do presente.

Depois de esboçado algum contorno do que poderá ser a motivação para a discussão acerca da vida de Fantappiè em São Paulo, que, diga-se, não é a opção deste trabalho, o que se pleiteia agora é uma investigação sobre as atividades científicas prioritariamente – e não o rastreamento das atividades docentes já registradas nos documentos oficiais –, portanto, o acompanhamento da evolução dos fatos relativos à sua chegada a São Paulo serão agora relevantes senão para a compreensão ou desvelamento total destas atividades, pelo menos para entender o enredo que as envolve e assim descobrir alguma linha de raciocínio que leve ao pretendido.

Assim, retomando *o andar da carruagem*, Theodoro A. Ramos[8] é quem foi incumbido de viajar para a Europa e contratar professores que iriam ocupar as principais cátedras de uma nova universidade, a Universidade de São Paulo – USP, criada em 25 de janeiro de 1934, através de decreto governamental do então

---

[8] CASTRO, p. 61, faz comentário sobre a criação da FFCL-USP: *"Em São Paulo, Theodoro Ramos, que reunia todos os requisitos para reger uma das cadeiras de matemática criadas com a faculdade, declinou de um convite que lhe foi feito para isso e aconselhou o Governo do Estado a contratar professores estrangeiros, não só para a matemática, mas para outras cadeiras científicas. Encarregado ele próprio de contratá-los na Europa, convidou o matemático Luigi Fantappiè para professor de análise"*. Ver, também, a *Palestra inaugural* do 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, proferida pelo Prof. Elon Lages Lima, em VOLOCH, p. 3-4.

interventor federal em São Paulo, Armando de Salles Oliveira, nomeado por Getúlio Vargas em agosto de 1933[9]. É claro que era preciso para a formação dessa Universidade, já que ela deveria abranger universalmente todas as áreas do conhecimento, a criação de uma Faculdade de Filosofia Ciências e Letras, que teria sob sua guarda cursos ligados às Ciências Puras (Matemática, Física), às Ciências Naturais (Biologia, Química) e às Ciências Sociais (Geografia, História, Sociologia). Com isso, a junção da FFCL com a Escola Politécnica e a Faculdade de Direito atingiriam (como efetivamente atingiu) o universo desejado para a constituição de uma Universidade – no caso, a USP. Houve toda uma estratégica para a contratação de professores; na verdade, houve uma prévia associação das vagas a serem preenchidas com escolas acadêmicas européias: Ciências Humanas – França; Matemática e Física – Itália; Química e/ou Biologia – Alemanha e/ou Inglaterra[10]. As *Missões Estrangeiras,* referenciadas através da origem de seus professores e, obviamente, das suas respectivas áreas de atuação, deveriam, como de fato foram, renovadas até que se formassem as condições ideais para que os próprios pesquisadores e docentes aqui treinados pudessem assumir a gestão integral da universidade.

Então, as cátedras a serem preenchidas em São Paulo eram as da FFCL. Agora, com o surgimento de um Curso de Matemática – somente para focar a área de interesse deste trabalho – que viria, num primeiro momento, suprir deficiências

---

[9] Apesar de parecer completamente descabida a hipótese *de resposta de São Paulo à ditadura varguista*, Nota 7, Capítulo 3, por conta de que Armando de Salles Oliveira foi interventor de Vargas em São Paulo, ela não pode ser desacreditada somente por este fato, já que, em contraposição, Armando de Salles Oliveira foi a solução caseira que Getúlio Vargas encontrou para diminuir os problemas com a administração local, e ponha-se caseira nisso, pois o Governador tinha vínculos com o PD e era cunhado de Julio de Mesquita Filho, diretor do jornal *O Estado de São Paulo*. Ver FAUSTO, editado em 2003, p. 336-51.

[10] Ver artigo *A influência italiana nas atividades científicas brasileiras* de UBIRATAN D'AMBROSIO em DE BONI, p. 508 ss. Ver um panorama bastante completo, que inclui observações sobre as várias missões estrangeiras na USP, das relações entre Brasil e França em HAMBURGUER.

crônicas na formação de professores para ensino básico (o equivalente aos atuais ensinos fundamental e médio, principalmente) e responder às demandas por disciplinas matemáticas tradicionalmente oferecidas à Escola Politécnica, haveria uma reestruturação das funções atribuídas às faculdades. Fatalmente, com a criação da Universidade, disciplinas como o Cálculo não mais ficariam sob a guarda da Escola Politécnica e, portanto, como reação a esta possibilidade iminente, foi feito um claro esforço para manutenção e consolidação de sua soberania acadêmica e não subordinação a novas estruturas: optou-se, assim, pela realização de um concurso para o preenchimento da Cátedra de Cálculo Infinitesimal. O concurso precipitou-se, ainda mais em função da vinda das já denominadas *Missões Estrangeiras*, e fora realizado com a participação de dois jovens engenheiros de forte inclinação matemática: Otávio Monteiro Camargo e Omar Catunda. O primeiro foi o vencedor[11]. Mais tarde, quando as funções desta Cátedra se tornaram parte integrante das funções da Cátedra de Geometria Superior, naquele momento já ocupada pelo Prof. Luigi Fantappiè – vindo da Itália pelas *mãos* de Theodoro Ramos –, coube ao vencido no referido concurso o cargo de assistente do italiano. No entanto, o nome do Prof. Camargo parecia, por assim dizer, o mais natural para essa assistência, mas ao que tudo indica, ele não se satisfez com o resultado final do processo que envolvia a cátedra de Cálculo Infinitesimal e continuou vinculado à Escola Politécnica. O Prof. Milton Vargas, emérito da USP, comenta: *"... Monteiro Camargo, que tinha ganho o concurso para matemática na Politécnica e que anularam para a vinda do Fantappiè [...] Camargo fez um grande erro, na vida, de brigar com o Fantappiè; se ele não tivesse brigado com Fantappiè, se ele tivesse aceito aquela coisa toda, talvez ele*

[11] Esse concurso foi suspenso por ação judicial, ainda que a posse tenha sido dada ao vencedor. Ver a tese de doutorado de Adriana Marafon, que trata do assunto segundo a ótica da *vocação* (MARAFON, p. 65-75).

fosse um dos grandes matemáticos brasileiros. Em vez dele, quem foi assistente do Fantappiè foi o Catunda, que era muito inferior ao Camargo.... Mas essa briga do Camargo com o Fantappiè, para mim foi uma perda, um drama para a matemática brasileira. Camargo, em primeiro lugar, o Camargo era muito mais inteligente do que o Catunda."[12]

O clima de tensão e de rancor instalado nas relações entre a FFCL e a Escola Politécnica era tão intenso naquela época que ainda reverbera nos dias de hoje! São inegáveis os serviços prestados pelo Prof. Omar Catunda à matemática brasileira, tanto no ensino como na pesquisa, e para ficar apenas no escopo desta última, basta ver as referências feitas a ele por Franco Pellegrino ao discorrer sobre *"A teoria dos funcionais analíticos e suas aplicações"*.[13] Mesmo assim, e ainda que pese, a crítica do Prof. Milton Vargas não pode ser desqualificada, haja visto discursar com conhecimento de causa e por ter-se consagrado historiador de ciência brasileira e atingido certa liderança na área[14].

É importante salientar que nem de longe parece ter sido Fantappiè agente ou arquiteto da história que envolve a Cátedra de Cálculo Infinitesimal e o seu desfecho, nem mesmo parece central neste trabalho compreendê-la profundamente, ainda que se queira construir os contornos históricos de forma a preservar um cenário mais complexo das relações constituídas no e para o mundo. Mas é interessante notar que sua vinda, e também a de outros pesquisadores estrangeiros, não foi envolta em tranqüilidade. Um jogo elaborado de interesses fora desenvolvido e, portanto, se constitui matéria de investigação. Possíveis questões a serem analisadas inicialmente são: será relevante o papel do Prof.

---

[12] Entrevista concedida a mim e ao Prof. Claudio Possani – IME/USP, em 5 de julho de 2000, na sede da THEMAG, empresa do ramo da construção civil, de propriedade do próprio Prof. Milton Vargas, a qual ele ainda dirigia.
[13] PELLEGRINO, p. 473-7.
[14] A seguinte publicação atesta isso: VARGAS, *História da técnica e da tecnologia no Brasil*.

Monteiro Camargo no desenvolvimento da matemática brasileira? Sua contribuição científica é mais fortemente percebida na produção de conteúdos ou na transmissão e construção de conhecimentos? Isto inclui a matemática?

É igualmente interessante observar que quem conta este capítulo da história da matemática brasileira parece assumi-la numa versão oficial, se assim pudermos classificar, ou, equivalentemente, numa versão *chapa branca*, para usar o jargão do jornalismo. Apenas a título de exemplificação dessa espécie de *acusação*, o Prof. Cândido Lima da Silva Dias, na entrevista à revista *"Estudos Avançados"*[15], não se preocupa com a disputa analisada ou apenas visualizada anteriormente, mesmo que de forma superficial, como algo que seja relevante para o desenvolvimento da matemática brasileira, nem o Prof. Clóvis Pereira da Silva, em *A Matemática no Brasil – Uma história do seu desenvolvimento*[16], obra que organiza fontes documentais pertinentes ao tema História da Matemática no Brasil, e nem mesmo Francisco Mendes de Oliveira Castro, em sua *Matemática no Brasil*[17], que aliás sequer tratam do assunto.

Mas, será mesmo que ainda existe alguma coisa de relevante nesta discussão? Parece improvável, porém, o que ela traz, inegavelmente, à tona são as cores, os cheiros, os sabores, enfim, as efervecências de uma época, o que a torna viva ainda hoje.

Antes de retomar o foco das investigações, que diz respeito à segunda linha de estudos, aqui proposta, sobre Luigi Fantappiè, ainda mais uma rápida olhada no cenário que abrange toda esta história e do qual a criação da USP parece ser a tela de fundo, interessa para a organização das idéias. Do ponto de vista histórico, obvia e simplesmente por constituir-se num fato, tal interesse já se

---

[15] Ver *Estudos Avançados,* 8(22).
[16] SILVA, p. 213.
[17] CASTRO, p.61-75.

justifica. Mas, mais sutil e profundo do que apenas destacar o fato e tentar observar o alcance das conquistas – nesse caso da USP, conquistas educacionais e científicas – que daí advêm, é buscar as razões motivadoras que permitiram a concretização do fato e, principalmente, identificar os fundamentos que sustentam a sua sobrevivência ou mesmo a sua atual inexistência, o que não é o caso, diga-se de passagem. Ubiratan D'Ambrosio[18] notou que a própria ciência, para se desenvolver como canal aberto e globalizado de troca de experiências, necessita de guarita institucional, e ainda que não seja o centro das atenções do presente trabalho, talvez este seja um dos pontos nevrálgicos para se debater o interesse pela criação da USP. O Prof. Cândido Lima da Silva Dias (1914-1998) foi categórico ao dizer, em 1994[19], *"que esse fato foi importantíssimo e não existe outro mais significativo na evolução científica brasileira. Está relacionado com a grande figura de seu criador..."*. Figura que foi homenageada muitos anos depois pelos alunos da Escola de Engenharia de São Carlos – EESC, então embrião do que hoje é o primeiro dos dois Campi Universitários da USP em São Carlos – SP, emprestando seu nome ao Centro Acadêmico Armando de Salles Oliveira – CAASO; do qual curiosamente um grande amigo, meu professor de matemática e meu pai, Celso Zoega Táboas (1933-1990), foi seu tesoureiro, logo após sua fundação, em 1952.

Agora, uma recapitulação sintética de algumas cenas marcantes que compuseram toda a paisagem observada e que podem direcionar os raciocínios daqui para frente: nas articulações políticas que engendraram a criação da USP ficou definido que a contratação de professores que ocupariam as cátedras da FFCL estariam a cargo de Júlio de Mesquita Filho (então exilado na Europa),

[18] Em *A Influência Italiana nas Atividades Científicas Brasileiras* (DE BONI).
[19] Entrevista para a revista *Estudos Avançados*, 8(22).

Armando de Salles Oliveira e Theodoro Augusto Ramos. Assim, Theodoro Ramos convidou para a Física um jovem discípulo de Enrico Fermi, Gleb Wataghin (1899-1986), que é apontado por muitos como o pai dessa ciência no Brasil e cujo nome fora emprestado ao Instituto de Física da UNICAMP, numa homenagem idealizada e organizada pelo primeiro físico formado em solo brasileiro, o Prof. Marcelo Dami de Souza Santos, e para a matemática o nosso personagem principal Luigi Fantappiè, discípulo de Vito Volterra.

Enfim, o ataque à questão da contribuição de Fantappiè ao desenvolvimento da matemática no Brasil. Credenciais é que não lhe faltam: Fantappiè foi influenciado por uma geração de matemáticos italianos, que tem os nomes de Giuseppe Peano, Ulisses Dini, Francesco Severi, Vito Volterra como alguns de seus representantes; foi aluno e discípulo, por assim dizer, de Volterra; reconhecido grande matemático por André Weil[20]; foi colega de Enrico Fermi – a ponto de que este o convidara para assumir um cargo no Instituto de Matemática da Universidade de Roma após seu retorno (em resposta à conclamação para repatriação, feita por Mussolini aos italianos que viviam no estrangeiro, no momento em que a Itália se aliara à Alemanha na 2ª Guerra). E certamente fez uso de tais credenciais em São Paulo, pois Fantappiè modernizou a matemática no Brasil, mudou o ensino do cálculo, trocou uma orientação ainda um tanto calcada na intuição pelo rigor formal dos *épsilons* e *deltas*[21], apresentou a análise matemática aos jovens universitários de São Paulo, estudantes de engenharia na

---

[20] WEIL 2, p. 48.

[21] Chega a ser até divertido o comentário, na introdução de *Curso de análise matemática*, no qual Omar Catunda chama atenção para o fato de que seu livro teria uma forma de apresentação ou um ritmo mais agradável, por ser menos rígido do que texto de Fantappiè, já que este último tinha uma maneira de apresentar extremamente formal (CATUNDA). O divertido fica por conta, primeiro, de que é até natural um texto de Análise Matemática primar por formalismo e, segundo, de que hoje, em comparação com textos como *Cácluo e Aplicações* e *Cálculo de Várias Variáveis* (ver HUGHES-HALLET), que buscam uma revitalização do ensino do Cálculo numa tentativa de afastá-lo de formalismo exacerbado, o texto de Catunda, ainda que de Análise, é extremamente carregado do formalismo que ele próprio ataca em Fantappiè.

Escola Politécnica e dos então novos cursos de Física e de Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, instituiu seminários regulares de estudo e pesquisa em matemática, nos quais apresentou os *seus* funcionais analíticos, criou uma revista científica de pesquisa matemática, influenciou de certa maneira e até sobremaneira, direta ou indiretamente a carreira de uma primeira geração de cientistas brasileiros atuantes nas áreas de exatas, tais como os já citados Prof. Cândido Lima da Silva Dias[22], Prof. Omar Catunda – esses dois foram seus assistentes junto ao departamento de matemática –, Prof. Marcelo Dami de Souza Santos e Prof. Milton Vargas[23], além do Prof. Mário Schemberg[24], dentre vários outros. Somente essa pequena lista de nomes já justifica uma investigação tão detalhada quanto possível do nosso personagem, pois a lista se desdobrou pungentemente sob a proteção institucional, não apenas da USP, mas de toda uma estrutura de universidades e de centros de pesquisas que se formou e se firmou consistente e continuamente no país a partir da década de 1930, por conta de um esforço político direcionado para a conquista de identidade cultural e independência acadêmica – até mesmo auto-suficiência, em algumas áreas. Mesmo que a investigação empreendida até aqui deixe transparecer que a existência humana passe a ter significado histórico somente depois dela ter alcançado algum sucesso – coisa que não se constitui num padrão uniforme, absoluto, supremo de medida e comparação em qualquer sociedade – é o que nos resta neste trabalho, pois as particularidades de uma investigação que se desenvolve nas entranhas de instituições científicas acabam por coroar tal prática,

[22] DIAS, C. L. da S., *Espaços Vetoriais Topológicos e sua Aplicação na Teoria dos Espaços Funcionais Analíticos.* São Paulo, 1951. Tese, 66p.
[23] VARGAS, editado em 1947.
[24] Ver NACHBIN, p. 47.

pois estas instituições agregam, em princípio, pessoas que, de alguma forma, se destacaram na sociedade ou serviram de referência para a comunidade científica[25].

Por conta de todo o exposto aqui, duas observações relativas ao caráter do nosso personagem principal, Luigi Fantappiè, serão feitas; elas trazem impressões sobre suas opções ideológicas e conduta profissional e, portanto, resvalam em questões sobre moral, que merece um tratamento sociológico pormenorizado, já que as mudanças havidas no mundo, desde antes da Segunda Guerra, passando pela queda do *comunismo*, até a revolução da informática e a era das comunicações, foram determinantes para alterar profundamente o conceito de ética e suas significações[26]. Porém, ainda que pese a falta de detalhamento sobre o tema, André Weil[27], comenta não sem espanto e até com certo humor, que nos idos de 1925, quando travara conhecimento com Fantappiè, lhe pareceu incompatível ou no mínimo estranho que ele fosse militante fascista e que tivesse um trato cordial e tão profundo nas suas atividades profissionais. Parece que a incompatibilidade é, na verdade, fruto de bloqueios que nossas visões dos horrores causados pelo fascismo e nazismo mundo afora impõem: todos que se afiliam a estas causas são transformados em caricaturas de gente cujas ações mais banais e cotidianas são parte integrante de todo um emaranhado que leva ao mau e, portanto, essencialmente indissociáveis deste fim. No entanto, este era Luigi Fantappiè, imbuído das contradições que subjazem à razão estruturada em cada ser humano, a respeito de quem, juntamente com os outros integrantes da *Missão*

---

[25] Ver em MARAFON, p. 40-51, uma discussão pormenorizada sobre vocação e os reflexos na escolha do material humano para a constituição de instituições acadêmicas.
[26] Ver discussões sobre ética em CHAUÍ, p. 340, *Convite à Filosofia*, e VALLS, p. 7, *O que é ética*.
[27] WEIL, p. 49.

Italiana, Patrick Petitjean[28] comenta o seguinte: *"O primeiro curso de Piccolo suscita diversos embaraços: ele faz a apologia do fascismo e de Mussolini. Paulus Aulus Pompéia conta também que Fantappiè 'chegava da rua, levantava a mão direita e fazia a saudação fascista'. Mesmo Wataghin faz a saudação fascista durante o primeiro curso, mas não a repete mais. Fantappiè era o responsável pelo grupo fascista, e somente Wataghin e Occhiliani não assistem às reuniões do grupo. Os alunos de Fantappiè respondem à sua saudação através de ruídos e algazarra, sobretudo batimentos de mãos sobre as mesas, fazendo Fantappiè acreditar que se tratava de uma saudação brasileira"*.

Esta descrição quase jocosa não combina com as lembranças de Milton Vargas, Marcelo Dami de Souza Santos e Cândido Lima da Silva Dias. E aqui se apresenta a segunda observação sobre Fantappiè. Todos falam com alegria sobre a mania que se formou, entre os alunos de Fantappiè e Wataghin, de tentarem se comunicar em italiano. Contam também as confusões causadas por problemas de tradução, como as duas histórias a mim relatadas pelo Prof. Marcelo Dami. Na primeira, Fantappiè teria dito provavelmente a Catunda ao lhe entregar um livro, antes do início das férias de fim de ano – período que Fantappiè passaria na Itália –, que ficasse com ele durante as férias, pois o tomaria na sua volta. Catunda agiu com a maior presteza e o colocou no cofre da direção da Escola Politécnica durante todo o recesso. No retorno das férias, Fantappiè perguntou-lhe sobre o livro, que fora prontamente devolvido. Na primeira semana de aula o livro foi o tema de uma prova oral e o assistente se viu em situação difícil. Na segunda, é relatada a necessidade de os alunos terem uma cadeira sempre por perto da mesa do Prof. Fantappiè quando solicitavam alguma explicação. Invariavelmente, o

[28] *As missões Universitárias Francesas na Criação da Universidade de São Paulo (1934-1940). In* HAMBURGER, A. I.; DANTES, M. A. M.; PATY, M.; PETITJEAN, P. (organizadores), 1996.

Fantappiè começava sua preleção com um *'Senta!'*. O Prof. Milton Vargas fala[29] das aulas de Fantappiè e Wataghin, ao lembrar que elas eram dadas em italiano: *"[...] E eram tão bons professores que a gente entendia melhor as aulas em italiano do que as aulas em português dos outros brasileiros." E mais adiante, "[...] a gente pegou uma mania de falar italiano, entre nós, não é!? [risos] A gente, por causa da perfeição que eram aquelas aulas, a gente não estava acostumado com aulas tão boas.... Até hoje eu tenho idéia de que essas aulas de física e de matemática para engenheiros têm que ser dadas por grandes físicos e grandes matemáticos, não por assistentes. Porque são esses mais motivantes, sabem perfeitamente despertar o interesse, não é!? Para o engenheiro, se você mete um assistente para dar aula, ele não tem interesse nenhum."*

Estas observações só reafirmam as contradições carregadas pelo personagem desta história, contradições que nenhum julgamento poderá resolver, apenas apreender como mais um sinal característico de um tempo que se quer entender.

Agora, é chegada a vez da produção científica, porém, no sentido mais amplo concebido nesse trabalho, que inclui a prática de produção de conhecimentos e aplicação de resultados (ver citação de HAMBURGER, p. 16). Inicialmente, três peças serão destacadas para comprovação inequívoca da influência direta do trabalho desenvolvido por Fantappiè à frente de cursos de Análise Matemática e de seminários e grupos de estudos sobre os funcionais analíticos na FFCL: o curso de análise matemática do Prof. Omar Catunda (CATUNDA), a tese de doutoramento do Prof. Cândido Lima da Silva Dias ('Espaços Vetoriais Topológicos e sua aplicação na Teoria dos Funcionais

[29] Na entrevista concedida a mim e ao Prof. Claudio Possani (IME/USP), no dia 05 de julho de 2000 em São Paulo, na sede da THEMAG, empresa do ramo da construção civil, de propriedade do Prof. Milton Vargas.

Analíticos' – USP, 1951) (DIAS) e o artigo do Prof. Milton Vargas ('Teoria dos drenos artificiais de areia' – Revista Politécnica, edição de 1947) (VARGAS 2). Na entrevista concedida a mim e ao Prof. Claudio Possani (IME/USP) – ver Nota 29 –, o Prof. Milton Vargas forneceu seu testemunho da força transformadora das idéias matemáticas de Fantappiè, veiculadas através de seus cursos de Análise Matemática e dos seminários efetuados na USP e que redundaram, no seu caso particular, no artigo anteriormente citado. A *'Teoria ...'* tratada nesse artigo foi construída com suporte matemático mais ou menos equivalente aos conteúdos programáticos de cursos que hoje versam sobre o Cálculo Integral de Várias Variáveis e Equações Diferenciais e Aplicações. O Prof. Milton Vargas disse que o trabalho *"foi fruto, foi baseado no curso de Fantappiè e daquele círculo"*. Mais adiante, ele comentou que a as suas conclusões analíticas foram comprovadas na prática, inclusive, através da comparação com um artigo rival de mesmo teor, escrito de forma totalmente independente por um pesquisador americano, mas estruturado a partir de procedimentos empíricos. Assim, premissas diferentes levaram ao mesmo fim, completando-se, portanto, e fortalecendo a teoria. O Prof. Milton Vargas só não considera seu artigo totalmente original em função de uma precedência de alguns meses na publicação do artigo americano, embora ele tenha feito uma palestra, no Rio de Janeiro, divulgando de maneira oficial suas conclusões com dois meses de antecedência relativa à publicação de um artigo rival.

O que se observa da produção científica de Fantappiè é que ela parece estar restrita à formação de quadros de estudos e pesquisas e desdobramentos através dos trabalhos de terceiros[30]. Parece que o seu afastamento de um centro de

[30] NACHBIN, p. 45-6.

pesquisas efervescente e seu empenho em formar um ambiente de pesquisas diminuiu sua produção pessoal. Ao serem observadas as obras escolhidas de Fantappiè[31], vê-se claramente uma lacuna temporal que coincide com o período de sua estada no Brasil. No entanto, uma visita à Biblioteca "Prof. Achille Bassi"[32], feita em 13 de setembro de 2002, revelou-se extremamente promissora: um caderno brochura de capa dura, cor verde com pintas marrons, contém as notas de um curso sobre Funcionais Analíticos dado por Fantappiè em São Paulo e denuncia o esforço de melhorar a sua própria compreensão da matéria através de leituras oferecidas não de forma regular, aliás, nem sequer foram encontrados registros desse curso na FFCL. Há uma menção a apostilas na Escola Politécnica, compiladas por Omar Catunda, e cursos proferidos por Fantappiè[33], no entanto a descoberta das anotações de Cândido Lima da Silva Dias corrobora de forma documental mais uma vez a existência dos esforços de Fantappiè em preparar quadros para atuação em pesquisas matemáticas. As memórias *'I funzionali delle funzioni di piu variabili'* de Luigi Fantappiè encontram-se num estágio intermediário de desenvolvimento entre os textos de 1930 (Funzionali analitici)[34], 1931 (Funzionali delle funzioni di due variabilli)[35] e o texto de 1943 (Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones)[36]. A sua análise revela a profundidade em que Fantappiè mergulhara no estudo e revela mais, revela a alta qualidade de pesquisas matemáticas debatidas em solo brasileiro. É certo que o

[31] FANTAPPIÈ, 1973.
[32] Inaugurada em 12 de setembro de 1974, com o nome de "Prof. Achille Bassi", em homenagem ao primeiro Professor Titular do Departamento de Matemática e primeiro Diretor do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação de São Carlos. Com um acervo atual de mais de 24.000 volumes de livros, 670 títulos de periódicos e mais de 1.500 teses e dissertações, está entre as três maiores bibliotecas do país especializadas nas áreas de Computação, Matemática e ciências afins. Possui ainda uma importante coleção de obras clássicas e um pequeno Museu com Instrumentos de Cálculo Numérico.
[33] CASTRO, p. 62.
[34] FANTAPPIÈ, editado em 1930.
[35] FANTAPPIÈ, editado em 1931.
[36] FANTAPPIÈ, editado em 1943.

estudo dos funcionais analíticos em profundidade faz parte do desenvolvimento de apenas mais uma área de pesquisa matemática das várias já consolidadas no mundo afora[37], mas mostra uma contribuição relevante para a matemática brasileira que, com isso, começou a ganhar autonomia e a se transformar numa disciplina moderna. A partir desta transformação, pode-se pensar que a matemática brasileira se preparou para uma inserção crescente e cada vez mais ampla no cenário mundial de pesquisa matemática, como notou Leopoldo Nachbin (ver Nota 18, Capítulo 1). Portanto, é inegável a importância de Fantappiè na matemática brasileira, como um dos seus agentes transformadores.

Assim, a partir da análise da *Memória de Fantappiè*, compilada por Cândido Lima da Silva Dias, é que se tem mais uma vez a garantia de que Luigi Fantappiè deixara marcas profundas na matemática brasileira, que acabam por se desdobrar inicialmente e de maneira significativa através das carreiras de docentes como Omar Catunda e Cândido Lima da Silva Dias, como atestam as referências de Franco Pellegrino[38], em 1949/1951, a trabalhos científicos elaborados por eles sobre funcionais analíticos.

---

[37] Ver EVES, p. 690-6.
[38] LEVY, p. 473-7, já citado.

Capítulo 5

Relevância Matemática e Relevância Histórica

A relevância matemática do texto *'Funcionais de Funções de Várias Variáveis – Memória de Luigi Fantappiè'*, anotado por Cândido Lima da Silva Dias e traduzido no Apêndice 1 do trabalho ora apresentado, às páginas 113-73, pode ser desmerecida ao avaliá-lo segundo a ótica da história convencional de uma matemática que deve apresentar resultados pujantes em termos internalistas, pois o que se apresenta ali não é mais do que a sistematização inicial de uma ferramenta passível de aplicações ainda não exemplificadas nele próprio; sistematização, aliás, que se mostra inconclusa nessa peça brasileira e que já havia ganhado mundo com *'I Funzionali Analiciti'* (1928) e *'I Funzionali delle Funzione di due Variabili'* (1930), dentre outros[1]. Além disso, a utilização desta ferramenta, num formato desenvolvido, já é observada em outros trabalhos como, por exemplo, *'Integrazione con Quadrature dei Sistemi a Derivate Parziali Lineari e a Coefficienti Costanti in Due Variabili, Mediante il Calcolo Degli Operatori Lineari'*, texto de 1932 do próprio Luigi Fantappiè, portanto, antes da sua estada no Brasil. Pelo fato de que o texto *'Funcionais…'*, apresentado no Brasil, tenha chegado a apenas caracterizar rigorosamente as regiões funcionais lineares R através de seus conjuntos característicos A na variedade de Segre V_{2n} e o que se observa em *'Integrazione…'*, de 1932, é a utilização de funcionais analíticos, identificados pelas suas *indicatrizes*, como ferramenta básica da

[1] A bibliografia sobre trabalhos de Luigi Fantappiè apresentada por Franco Pellegrino ao final de seu *'Complément sur les fonctionnelles analytiques'* do livro *'Problèmes Concrets D'Analyse Fonctionnelle'* de Paul Lévy, às páginas 471-2, e o *'Opere Scelte – Vol. 1'*, Reprint, Roma: Unione Matematica Italiana, 1973, são os melhores parâmetros para se dimensionar esta afirmação, no entanto, o trabalho *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940), também do próprio Fantappiè, alega na sua introdução que a formalização da teoria foi realizada primeiramente nos dois trabalhos de 1928 e de 1930.

aplicação pretendida, é que se declara anteriormente *formato desenvolvido da ferramenta* como uma alusão à discrepância existente entre o minguado, por assim dizer, trabalho brasileiro e este último, para ficar em apenas um exemplo até aqui. A continuar o comentário com base num corte transversal do tempo histórico feito exatamente no contorno que enquadra a cena em que se concebe o texto brasileiro *'Funcionais...'*, de Luigi Fantappiè, nem será preciso uma análise pormenorizada para desqualificá-lo como matematicamente relevante. Neste caso específico, principalmente, o trabalho de corte transversal, por apoiar-se demasiadamente na análise internalista, acaba se tornando ainda mais nocivo à compreensão histórica, pois trata o tema à luz do tempo presente do corte e, como conseqüência, mostra que o texto brasileiro de Fantappiè nada traz de novo em termos científicos convencionais. No entanto, ao restabelecer a investigação sob os moldes da história tratada como um *feixe de trajetórias* à Josep Fontana, o que se conclui é uma *relevância histórica* deste texto para a matemática brasileira e também mundial. Ainda que o texto compilado por Dias seja inconcluso em relação ao que o próprio Fantappiè diz logo na apresentação: *"Nessa memória me proponho a retomar e complementar numa linha de maior simplicidade a minha pesquisa sobre funcionais analíticos, exposta num trabalho anterior já citado, e a desenvolvê-la posteriormente em vista das aplicações à teoria 'dos quanta', à integração pela quadratura de sistemas e equações a derivadas parciais lineares com coeficientes constantes, à teoria dos grupos contínuos infinitos, como também em vista de interessantes ligações que venham se apresentar a partir de alguma de tais aplicações e da teoria de integrais abelianas sobre uma variedade algébrica"* (ver FT1, p.113, Apêndice 1 desta tese), já que nele apenas estão bem caracterizadas as regiões funcionais lineares do espaço funcional, como atestam o

“*Teorema II – A uma região funcional linear R do espaço* $\wp^{(n)}$ *está sempre associado um conjunto fechado A da variedade de Segre* V_{2n} *(que se chama ‘característica da região funcional linear’) tal que a região R é formada unicamente por todas as funções* $y(t_1, t_2, \mathrm{K}\ , t_n)$ *regulares em A*” (ver FT62-3, p.167, Apêndice 1) e a frase que de certa forma conclui o texto: *“Vemos, assim, no que se refere àqueles particulares conjuntos do espaço funcional* $\wp^{(n)}$ *dados pelas regiões funcionais lineares R, que se estabelece uma correspondência biunívoca sem exceção entre tais regiões R e seus conjuntos fechados A (característicos) da variedade de Segre* V_{2n} *que não esgotam a própria variedade e, portanto, o estudo das regiões funcionais lineares que são conjuntos do espaço funcional* $\wp^{(n)}$ *poderá, de agora em diante, ser feito através do estudo destes conjuntos fechados A, que são, ao contrário, conjuntos da variedade de Segre* V_{2n}*, a um número finito de dimensões*” (ver FT68-9, p.171-2, Apêndice 1), e não está nele contido o desenvolvimento do conceito de funcional analítico e muito menos são apresentados exemplos de suas aplicações, há indícios concretos de que este texto deva ter sido desdobrado e desenvolvido através de seminários, cursos ou mesmo pesquisas[2], ainda que pese aqui a falta de documentos que comprovem de forma direta esta suposição, porém há aqueles que a asseguram indiretamente, pois a produção científica de assistentes de Fantappiè, como Catunda e Dias[3], não foi possível sem uma orientação e um estudo mais profundo

---

[2] Os desdobramentos são entendidos não necessariamente como atividades que tiveram a presença ou mesmo a orientação direta de Fantappiè, pois é curioso notar que o caderno em que o Prof. Dias compilou a intervenção de Fantappiè tem espaço para a continuação esperada pela própria introdução; duas possibilidades devem ser aventadas aqui para futuras discussões: ou a continuação está perdida em outras anotações – ou mesmo Dias não as fez – ou Fantappiè pode não ter dado prosseguimento, motivado, por exemplo, pelo seu retorno à Itália.

[3] Apenas como garantia de qualidade da produção científica, vale observar citações [69], [70], [71], [72] e [73] de Omar Catunda e [76] e [111] de Cândido Lima da Silva Dias, referenciadas em LÉVY, p. 474 e 476, por Franco Pellegrino, a saber: *CATUNDA, O. ‘Sobre as funções de funções*

sobre a teoria dos funcionais analíticos. Além disso, e o que irá garantir a importância universal dos esforços empreendidos por Fantappiè em elevar, no Brasil, as discussões matemáticas ao nível mais avançado na sua área de atuação, e por conta de que o mais interessante dessa abordagem histórica, que prescinde do corte transversal, mas que de forma alguma dispensa a observação da paisagem presente, é o fato da dimensão temporal da análise correr nos dois sentidos, para o passado e para o futuro, indo além dos contornos de análise do presente e, como conseqüência, haver não somente a identificação de uma relevância histórica, mas também um resgate da importância matemática do texto, pois o seu conteúdo parece conter a essência de todo o desenvolvimento dessa área de pesquisa da Análise Funcional que é o estudo dos Funcionais Analíticos. Interessante observar, mesmo que pareça contraditório em relação à linha de raciocínio que vem sendo empregada aqui, é o fato de que o texto '*Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940) segue os mesmos passos no seu Capítulo I que os dados no capítulo de mesmo número no trabalho brasileiro, diferenciando-se, apenas a partir daí, de forma sutil e gradativa com a incorporação de nomeação mais moderna – nessa época – para alguns conceitos, tais como *função bi-regular*. Essa observação chama a atenção para o fato de que certas estruturas, que versam sobre representação de $n\frac{uplas}{}$ complexas sobre uma Variedade de Segre V_{2n}, se apresentam consolidadas no texto brasileiro, mas que não haviam aparecido em trabalhos anteriores como os já citados de 1928 e de 1930. O próprio Luigi

de matrizes' (Jornal Mat. Pura e Apl. São Paulo, vol.I, fasc. 2, 1937), 'Un teorema sugl'insieme, che si reconnette alla teoria dei funzionali analitici' (Rend. Lincei, vol XXIX, serie 6ª, 1º sem. 1939, p.17), 'Sobre os sistemas de equações de variações totais em mais de um funcional incógnito' (Anais da Acad. Brasileira de Ciências, t. XIV, n. 2, 30 de junho de 1942), 'Sui sistemi di equazioni alle variazioni totali in piu funzionali incogniti' (En préparation) (sic.), *'Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos' (Tese para a cadeira de Análise Matemática); DIAS, C. L. da S. 'Sobre o conceito de funcional analítico' (Anais da Acad. Brasileira de Ciências, t. XV, n. 1, 31 de Março de 1943) e DIAS, C. L. da S. 'Aplicação dos grupos contínuos finitos a equações diferenciais ordinárias' (En préparation)* (sic.).

Fantappìe declara através de comunicado, feito na seção que deu publicidade para o ‘Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo’ dentro do ‘Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo – Volume 1º – Fascículo 1º – Junho de 1936’, que a sua conferência ‘Origem e desenvolvimento da teoria dos Funcionais’ *“servirá como capítulo introdutório ao tratado sobre a teoria dos funcionais, que deverá aparecer brevemente”* (ver Apêndice 2) e, portanto, há razões evidentes para acreditar que o texto *‘Funcionais ...’*, compilado por Dias, seja o fruto das divulgações que Fantappiè fez na Academia de Ciências, no Rio de Janeiro, através de sua palestra ‘O desenvolvimento da Matemática dos últimos cinqüenta anos e no futuro próximo’, e no ‘Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo’, durante o ano de 1935[4]. Antes mesmo de enveredar por um caminho de citações que possa – e que certamente fará isso – atestar os raciocínios desenvolvidos até aqui, uma discussão técnica sobre o que é efetivamente essencial para o estudo dos funcionais analíticos lineares e sobre as condições matemáticas às quais se submete o seu potencial aplicativo será apresentada sob um ponto de vista moderno e bastante simplificado, que tem o intuito apenas de trazer uma contribuição o mais didática possível para um melhor acompanhamento do contexto que emoldura a cena de tais citações.

Serão dois os momentos dessa discussão técnica: um em que se tentará clarear/exemplificar, através de uma interpretação bastante pessoal e deslocada para o futuro, as indicações sobre possíveis aplicações dos funcionais analíticos às ciências físicas em geral, que são feitas introdutoriamente nos diversos trabalhos

[4] O fato de a publicação do ‘Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo’ ser datada de Junho de 1936 reforça a suspeita de que o texto *‘Funcionais ...’* tenha sido produzido, na melhor das hipóteses, ainda naquele ano ou então no ano seguinte, e conseqüentemente outra suspeita que é a de que o referido texto não tenha sido concluído (ver nota 2 acima).

sobre funcionais analíticos, e outro em que se tentará elucidar os conceitos matemáticos, propriamente ditos, que compõem o desenvolvimento da teoria dos tais funcionais e, aí sim, aparecerão as citações que evocam as comparações entre trabalhos que suportarão a tese de que há principalmente uma relevância histórica do trabalho brasileiro com uma subjacente relevância matemática.

As questões relativas às aplicações da matemática ao mundo físico são extremamente instigantes e motivadoras por determinarem reflexões sobre as limitações de certos conceitos matemáticos e a conseqüente necessidade de renová-los ou, pelo menos, de ampliá-los. É comum para a interpretação matemática do mundo físico recorrer-se a noções abstratas do tipo ‘ponto material’ ou ‘força instantânea’, porém essas abstrações não são dotadas de rigor, ao contrário, são contraditórias com a realidade física, pois todo corpo, por minúsculo que seja, possui massa e ocupa algum volume no espaço e toda força que se aplica a um corpo tem a duração de algum intervalo de tempo, ainda que infinitamente pequeno. Além disso, as contradições se apresentam também na própria estrutura matemática, o que impõe certamente a consideração de novos conceitos. A título de exemplo, tome-se a ação de uma força ‘instantânea’. Suponha, então, que um corpo de massa $m \neq 0$, em repouso, seja submetido a uma força, no instante $t = 0$, que tenha, portanto, dado a ele uma velocidade $v \neq 0$ e que tenha cessado imediatamente após este ocorrido. Ao designar por $F(t)$ a força que atua sobre o corpo no instante *t*, é natural associar $F(t) = 0$ para $t \neq 0$. Lançando mão agora da Segunda Lei de Newton, pode-se tentar valorar $F(t)$ em $t = 0$ já que

$$F(t) = \frac{d(mv)}{dt}$$

e, conseqüentemente, para qualquer tempo $0 < \tau < +\infty$, tem-se

$$\int_{-\infty}^{\tau} F(t)dt = mv, \tag{5.1}$$

sendo que o limite inferior $-\infty$ não contribui em nada para a aferição da quantidade de movimento por conta de que o corpo estava em repouso até o instante $t = 0$ e, assim, a utilização de qualquer número $a < 0$ pode ser feita em seu lugar. De um ponto de vista clássico da matemática a igualdade (5.1) está desprovida de sentido uma vez que seu primeiro membro, dado que a função $F(t)$ é nula salvo em $t = 0$, é zero, ao contrário do que ocorre no segundo. Por razões físicas, é de se esperar que esta igualdade tenha sentido e, portanto, a contradição descrita deve levar a cabo uma ampliação conceitual na estrutura lingüística da matemática. Para isto, suponha, por simplicidade, que a quantidade de movimento adquirido pelo corpo seja igual a unidade, ou seja, $mv = 1$. Neste caso, a força $F(t)$ que atua sobre o corpo será designada por $\delta(t)$ e assim a fórmula (5.1) tomará a forma

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)dt = 1, \tag{5.2}$$

com $\tau > 0$[5]. Suponha agora que a força dita 'instantânea' seja, na verdade, uma força constante que atua sobre o corpo durante um pequeno intervalo $[-\varepsilon, 0]$, com $\varepsilon > 0$, denotada por $\delta_\varepsilon(t)$, e que comunica ao corpo a mesma quantidade de movimento $mv = 1$. Pelo princípio da quantidade de movimento, para todo $\tau \geq 0$ tem-se

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t)dt = 1.$$

Como $\delta_\varepsilon(t)$ é constante no intervalo $[-\varepsilon, 0]$ e nula fora dele, então

[5] A função $\delta(t)$ aqui apresentada é a função δ de Dirac (Paul Dirac, 1902-1984, físico inglês).

$$1 = \int_{-\infty}^{\tau} \delta_{\varepsilon}(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{0} \delta_{\varepsilon}(t)dt = \varepsilon\delta_{\varepsilon}(t),$$

para todo $-\varepsilon \leq t \leq 0$. Assim,

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & se \ \ -\varepsilon \leq t \leq 0, \\ 0, & se \ \ \ \ t < -\varepsilon \ \ \ \ ou \ \ t > 0. \end{cases} \tag{5.3}$$

Agora é natural supor que a força instantânea seja obtida pelo limite

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{\varepsilon}(t),$$

e que, portanto,

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & se \ \ t = 0, \\ 0, & se \ \ t \neq 0. \end{cases}$$

Utilizando a definição e o procedimento clássicos de integração, daqui não se obtém a identidade (5.2), ao contrário, obtém-se uma contradição que leva à conclusão de que há a necessidade de uma nova conceituação, de se redefinir a 'integral' (5.2). Considerando que a quantidade de movimento comunicada ao corpo pela força instantânea $\delta(t)$ é o limite de forças $\delta_{\varepsilon}(t)$ cujo intervalo de tempo de ação ε se aproxima inexoravelmente de 0, então pode-se adotar a seguinte definição:

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_{\varepsilon}(t)dt,$$

para $\tau > 0$. Em virtude da igualdade $\int_{-\infty}^{\tau} \delta_{\varepsilon}(t)dt = 1$, para $\tau > 0$ e todo $\varepsilon > 0$, segue precisamente a igualdade (5.2). O procedimento descrito até aqui pode ser expandido para 'integrais' mais gerais como

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t)dt, \tag{5.4}$$

para $-\infty < \tau < +\infty$ e $f(t)$ contínua, mediante a definição dada pela igualdade

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt. \tag{5.5}$$

No entanto, isto deverá passar por uma verificação de rigor formal, que nada mais é do que a demonstração de que o limite (5.5) sempre existe. Basta, então provar que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt = \begin{cases} f(0) & para\ \tau \geq 0, \\ 0 & para\ \tau < 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Seja primeiro $\tau \geq 0$. Ao empregar (5.3) obtém-se

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt - f(0) \right| = \left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} f(t) dt - \frac{f(0)}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} dt \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} \left| f(t) - f(0) \right| dt. \tag{5.7}$$

Como $f(t)$ é contínua em $t = 0$, para qualquer $\eta > 0$, existe um $\varepsilon_\eta > 0$ tal que para todo *t* que satisfaça a condição $|t| < \varepsilon_\eta$, tem-se a igualdade

$$\left| f(t) - f(0) \right| < \eta.$$

Por isso, para qualquer $\varepsilon < \varepsilon_\eta$, de (5.7) segue

$$\left| \int_{-\infty}^{\tau} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt - f(0) \right| < \frac{\eta}{\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{0} dt = \eta,$$

o que demonstra (5.6). Para $\tau < 0$, basta observar que ambos os membros de (5.5) são iguais a zero por conta de que seus integrandos são nulos para todo $t < 0$. Assim, (5.5) e (5.6) geram uma nova conceituação para integrais mais gerais:

$$\int_{-\infty}^{\tau} \delta(t) f(t) dt = \begin{cases} f(0) & para\ \tau \geq 0, \\ 0 & para\ \tau < 0. \end{cases}$$

Esta nova idéia de integração pode ser amplamente explorada para modelar problemas físicos, que em suas interpretações requerem cálculos de integrais sobre produto de funções, com uma delas fixa. Não é exatamente isto que é feito nos trabalhos sob análise nesta tese, porém, ao se definir de uma nova forma a integral (5.4), observa-se uma propriedade interessante da função $\delta(t)$, que é a de fazer corresponder a toda função contínua $f(t)$ o número $f(0)$, ou seja, $\delta(t)$ pode ser considerada uma função real definida sobre o conjunto de todas as funções contínuas, mais ainda, ela é, por conta dessa correspondência, um caso particular do que se define por *funcional*. Outro aspecto interessante desta motivação introdutória é que a forma de apresentação deste particular funcional (5.4), ainda que simbolicamente, fornece uma expressão similar àquela que é a *fórmula fundamental dos funcionais lineares*

$$F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C u(t)y(t)dt\,,$$

sendo $u(t)$ a *indicatriz* do funcional.

A partir daqui, inicia-se então o segundo momento das discussões técnicas. Como já visto anteriormente, um funcional é uma função que associa um valor numérico a uma ou mais funções, da qual ou das quais a função inicial depende[6]. Há razões essenciais na análise matemática, e que em grande medida abrem o mundo da matemática para uma compreensão mais ampla do seu potencial de aplicações, para se estudar como argumentos de funcionais as funções de variável ou de variáveis complexas. A mais óbvia dessas razões é que o corpo dos reais está contido no corpo dos complexos, no entanto, com um pouco mais de propriedade a Teoria Analítica dos Números revela que a abordagem dos complexos é de trato mais “tranqüilo”, em comparação à dos reais, e de resultados mais promissores, pelo menos em sua área. Ainda assim, não se deve discorrer,

[6] Podendo, ainda, este funcional, não somente depender da(s) funções como também do(s) argumento(s) desta(s), sendo então chamado de *funcional misto*.

nesse momento, sobre questões que possam desfocar o objetivo traçado e, nem tampouco, por outro lado, perder de vista a importância que tanto os números complexos como as funções de variáveis complexas têm no auxílio à busca de soluções de equações matemáticas que possam ou não modelar problemas físicos. Retomando, portanto, e lembrando que o texto brasileiro de Fantappiè *'Funcionais de Funções de Várias Variáveis'* não se desdobra de forma a apresentar os funcionais analíticos, os raciocínios ora apresentados serão efetuados com base em funcionais de funções de uma só variável complexa, que é uma tendência nos textos mais amadurecidos, como, por exemplo, o de Franco Pellegrino[7] sobre *'A teoria dos funcionais analíticos e suas aplicações'* que consta como complemento do livro de Paul Lévy, às páginas 357-477 [LÉVY ou PELLEGRINO]. E é um mergulho na compreensão do que se entende por números complexos e suas representações que será feito agora. Quando se disse anteriormente que o texto *'Funcionais ...'* é minguado, apenas se teve a intenção de destacar o fato de que ele apresenta somente uma introdução ao tema, não que essa introdução seja desprovida de conteúdo matemático profundo, muito ao contrário, ele se presta exatamente a discutir[8] os ajustes que tornaram possível a associação entre os números complexos $z = x + i \cdot y$ e os pontos de um espaço real linear manter-se biunívoca quando se passa a considerar coordenadas de pontos no infinito. No caso em que as coordenadas de z formam um par ordenado de números finitos, a projeção do espaço complexo S_1 se dá sobre aquele que é conhecido como plano de Argand-Gauss, ou seja, o espaço real linear S_2. No

[7] PELLEGRINO, p.357-477.
[8] A discussão efetuada por Fantappiè no trabalho *'Funcionais ...'* é uma extensão natural, do que se faz nesta discussão preliminar em espaço complexo S_1 de dimensão 1, para a um espaço complexo S_n de dimensão *n*.

outro caso, quando tomam-se pontos no infinito do espaço complexo S_1, a associação com o espaço real S_2 carece mesmo de sentido. Dessa forma, entender-se-á por ponto no infinito aquele que pode ser tomado como limite de uma seqüência $z_n = x_n + i \cdot y_n$ que varia continuamente no parâmetro *n*, que tem coordenadas x_n e y_n finitas e que possui $\lim_{n \to n_0} x_n = \infty$ ou $\lim_{n \to n_0} y_n = \infty$. A partir dessas considerações o sentido de ponto infinito passa a ter sentido, porém a associação entre S_1 e o espaço euclidiano S_2 deixa de ser biunívoca, a menos que se lance mão de uma variedade V_2 imersa num adequado espaço linear real. Uma tal variedade V_2 pode ser construída através de um modelo métrico finito e será chamada Variedade de Segre. Inicialmente, todos os pontos do espaço projetivo S_1, reais ou complexos, finitos ou infinitos, podem ser individualizados por duas coordenadas (z_0, z_1) finitas e não ambas nulas, a menos de um fator de proporcionalidade que explicitaria a escolha de um referencial para o sistema. Em correspondência ao sistema de coordenadas complexas são definidas as seguintes quantidades reais:

$$
\begin{cases}
X_{00} = |z_0|^2 = x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} \\
X_{11} = |z_1|^2 = x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} \\
X_{01} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(z_0 \overline{z_1}) = \sqrt{2}(x_0 x_1 + y_0 y_1) \\
X_{10} = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z_1 \overline{z_0}) = \sqrt{2}(x_1 x_0 - y_1 y_0)
\end{cases}
$$

Utilizando-se estas quantidades, pode-se considerar o espaço linear real S_4 com as coordenadas ortogonais:

$$\xi_{rs} = \sqrt{2}\,\frac{X_{rs}}{X_{00} + X_{11}}, \tag{5.8}$$

para $r = 0,1$ e $s = 0,1$, que são homogêneas de grau nulo em X_{rs} e que, portanto, independem da escolha de referencial para o sistema de coordenadas de S_1. Agora a correspondência entre os pontos (z_0, z_1) do espaço projetivo complexo S_1 e os pontos $P(\xi_{00}, \xi_{01}, \xi_{10}, \xi_{11})$ do real euclidiano S_4 é biunívoca e gera a Variedade de Segre V_2.

Já que V_2 está imersa num espaço euclidiano, é natural definir a distância entre dois de seus pontos P e P' como:

$$\delta = \sqrt{\sum_0^1 {}_{rs} (\xi_{rs} - \xi'_{rs})^2} \tag{5.9}$$

e a distância entre qualquer ponto P de V_2 e a sua origem de S_4 como:

$$\delta = \sqrt{\sum_0^1 {}_{rs} (\xi_{rs})^2} = \sqrt{2}\,.$$

Portanto, os pontos da Variedade de Segre V_2 estão todos sobre a hiper-esfera de centro na origem de S_4 e de raio $\sqrt{2}$. Por outro lado, as coordenadas ortogonais dos pontos da variedade V_2 satisfazem as equações (5.8), das quais pode observar-se a relação linear

$$\xi_{00} + \xi_{11} = \sqrt{2}\,\frac{X_{00}}{X_{00} + X_{11}} + \sqrt{2}\,\frac{X_{11}}{X_{00} + X_{11}} = \sqrt{2}\,, \tag{5.10}$$

que representa um hiper-plano de S_4. Desta forma, V_2 está na interseção deste hiper-plano com a hiper-esfera centrada na origem e com raio $\sqrt{2}$, que nada mais é do que uma hiper-esfera, ou melhor, neste caso simplificado em que $n = 1$, uma esfera contida no espaço euclidiano S_3. O centro P_0 dessa esfera é dado pelo pé da perpendicular baixada da origem até o hiper-plano (5.10), que é o vetor OP_0 de coordenadas $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, cujo comprimento é 1. Para qualquer ponto P da esfera que contém V_2 no espaço S_3, o triângulo OP_0P é retângulo em P_0 e, portanto,

$$(OP_0)^2 + (P_0P)^2 = (OP)^2 \Leftrightarrow P_0P = 1, \tag{5.11}$$

já que $P_0P > 0$. Conclui-se, assim, que V_2 está numa esfera de raio unitário no espaço euclidiano S_3, similar à conhecida projeção estereográfica. Como aludido na Nota 7 acima, o caso geral que estuda o espaço projetivo complexo S_n, de n dimensões complexas, terá uma associação biunívoca com uma Variedade de Segre V_{2n} sobre a hiper-esfera unitária de dimensão $[(n+1)^2 - 2]$ imersa num espaço euclidiano real de dimensão $[(n+1)^2 - 1]$.

A construção desse modelo é considerada por Fantappiè em *'I Funzionali delle Funzioni di due Variabili'* (1930) – para dimensão complexa 2 – e retomada de forma idêntica no Capítulo I de *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940), baseada em seu curso de *'Alta analisi'* apresentado em 1939-40 junto ao *Reale Instituto di Alta matematica – Roma*. No entanto, em trabalhos como *'Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones'* (1943), do próprio Fantappiè, e *'La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications'* (1951), de Franco Pellegrino [PELLEGRINO], já não mais é feita tal construção, pois assume-se, nestes dois trabalhos, a análise de funções sobre a esfera complexa unitária – as quais deverão ser tomadas em princípio como pertencentes ao espaço de definição dos funcionais – como ponto de partida para o desenvolvimento da teoria, deixando claro, assim, que houve uma assimilação completa da associação entre o espaço complexo S_n e a variedade de Segre V_{2n} no correr dos anos.

Portanto, parece importar mais num tempo moderno, tempo que incorpora de forma límpida a estrutura analítica baseada em conceitos da topologia e que está menos influenciado pela 'névoa' característica da vivência interna mais próxima do período de criação, as propriedades que delineiam os domínios de atuação dos funcionais analíticos como espaços topológicos. O texto de Pellegrino, numa nota de rodapé explicativa ao título *'Les fonctions localment analytiques e birégulières ([1])'* do primeiro parágrafo do seu Capítulo 1, explicita esta opção: *"Nous non bornons ici, pour plus de simplicité, aux fonctions d'une seule variable. D'ailleurs les mêmes définitions et les mêmes résultats s'appliquent facilement au cas général des fonctions de plusieurs variables"*, e continua quase como se fizesse, numa subversão do tempo, um prefácio ao trabalho brasileiro de Fantappiè e desvelasse o seu maior mérito, qual seja, o de tornar ainda mais inteligível o suporte matemático para a construção de espaços funcionais: *"La sphère complexe doit alors être remplacée par une certaine variété de Segre* V_{2n} *, (Cf. F. Severi, 'Conferenze di Geometria Algebrica', recueillies par B. Segre, Roma, 1927, p.68) dont on peut aussi construire un modèle métrique entièrement à distance finie (voir nº 23)."* (ver PELLEGRINO, p. 361; ver também a nota de rodapé NA1 do texto brasileiro de Fantappiè, traduzido neste trabalho à página 124 do Apêndice 1). Por sua vez, o texto espanhol não apresenta uma observação, digamos histórica e técnica, primeiro, porque nele já existe uma resenha histórica numa sua primeira parte e, segundo, porque tem a intenção de focar definitivamente aquela que era a melhor estrutura para o desenvolvimento dos funcionais analíticos, como bem mostra a abertura do sexto título, na *'Parte II – Definiciones de la teoría de conjuntos relativas a puntos sobre la esfera compleja'*, do segundo capítulo *'Las funciones analíticas definidas sobre la esfera* *compleja'*: *"Debiendo ocuparnos de las funciones analíticas como argumento de los funcionales, recordaremos ahora algunas nociones sobre la teoría de los conjuntos de números complejos, que representaremos por los puntos de la esfera compleja de radio unitario, llamándoles indistintamente puntos o números. ..."* (ver FANTAPPIÈ, *Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones*, p. 18).

Assim, observa-se na abordagem do texto brasileiro um tom mais ingênuo, uma linguagem matemática ainda não tão lapidada pelo rigor formal e, por isso mesmo, um sentido de desenvolvimento muito mais próximo da estrutura de criação do ferramental em análise do que o alcançado no texto espanhol ou mesmo, é claro, na resenha sobre 'Funcionais Analíticos' elaborada por Franco Pellegrino [PELLEGRINO], o que é um fator relevante (principalmente neste caso brasileiro) para a história do desenvolvimento de conceitos matemáticos, que, por sua vez, está óbvia e redundantemente submerso ao que é relevante historicamente. Vale observar, ainda, que o fato de se dizer que se está mais próximo da criação não quer dizer que o texto brasileiro faz parte do processo de criação de Fantappiè, num sentido estrito da palavra, mas que as memórias brasileiras tinham a clara missão de apresentar a um grupo de estudantes aquilo que seria a novidade na sua área de pesquisa, o que corrobora a visão do fazer história da ciência/matemática não somente a partir da observação da produção científica laureada pela sua comunidade, mas também através da transmissão do conhecimento nos moldes preconizados neste trabalho (ver Nota 19 do Capítulo 2 às páginas 26 e 27) – talvez até principalmente, em função das conquistas que essa atitude crítica agrega à cultura. Além do mais, o processo de criação propriamente dito remonta *'I funzionali analitici'* (1928), como atesta o próprio Fantappiè na página 5 daquela sua *Introduzione*: *"Questo lavoro conclude um gruppo di* *ricerche da me iniziate nel 1924-25 seguendo l'indirizzo delle suggestive teorie, sviluppate nel campo reale dal Prof. Volterra. La grande generalità dei metodi e dei concetti da Lui introdotti (teoria delle 'funzione de linea' o dei 'funzionali') e i consigli del Prof. Severi sull'importanza che avrebbero potuto assumere i consetti stessi transportati nel campo complesso, mi spinsero infatti tentare lo studio delle operazioni funzionali applicate, non più a funzione di variabili reale, ma a funzioni analitiche (operazione già trattate nel caso lineare dal Prof. Pincherle col nome di 'operazioni distributive')"*. A confirmação desta tese sobre a maturidade do texto brasileiro fica mais uma vez explicitada na página 18 do texto espanhol, em que são definidas sumariamente, para dois números z_0 e z_1, "Distância esférica *entre ambos, a la distancia en el espacio ambiente de los puntos imágenes sobre la esfera. Subsiste esta definición aunque uno de los puntos esté em el infinito, y en todo caso, esta distancia siempre será igual o menor que 2, por lo cual cualquier conjunto de puntos de la esfera está evidentemente limitado"* (ver acima a conclusão que se tira da equação 5.11) e "Distancia cuadrada *de los complejos es el módulo de su diferencia ,* $|z_0 - z_1|$*, y representa la distancia entre sus imágenes en el plano de Argand-Gauss"*, conceitos que sintetizam, ao sabor da nota explicativa de Franco Pellegrino sobre o uso de apenas funções de uma variável transcrita anteriormente, aquilo que vem a ser toda a discussão esboçada no item 3 – *Distância e vizinha de* $n\frac{uplas}{}$ – do capítulo 1 – *Os funcionais analíticos de várias variáveis e a topologia sobre a variedade de Segre* – do texto brasileiro traduzido no Apêndice 1 desta tese às páginas 128-9.

Bem, estas noções têm a função de estabelecer bases para a construção de uma topologia própria sobre a variedade de Segre V_{2n} que permita depois discutir conceitos de ‘proximidade’ entre funções e estabelecer em definitivo a estrutura de um espaço funcional como domínio para a ação de funcionais analíticos lineares. A partir, então, das concepções de distância esférica (ou simplesmente distância, doravante) entre dois pontos de V_{2n} (ver 5.10) e de vizinhança esférica de um ponto P_0, ou seja, o conjunto de pontos de V_{2n} que distam menos de ε (para qualquer $\varepsilon > 0$ real) deste ponto central P_0 (conjunto que hoje é tomado por uma bola aberta de raio ε – em se tratando de espaços métricos – em torno de P_0), serem apresentadas, são fornecidas as definições de *ponto de acumulação*, *conjunto fechado*, *distância entre conjuntos*, *diferença entre conjuntos* – que traduzem os mesmos conceitos que essas expressões indicam atualmente –, *região* e *vizinhança de conjunto*, caras ao desenvolvimento do conceito de função analítica sobre V_{2n}. Neste ponto, diferentemente do texto espanhol, como dito logo acima na discussão sobre a maturidade na forma de apresentar conceitos, o texto brasileiro é mais detalhista e conclui que a variedade de Segre V_{2n} é compacta, pois qualquer uma de suas seqüências é limitada (ver 5.11) e o Teorema de Bolzano-Weierstrass garante que é sempre possível extrair dela uma subseqüência convergente e, além do mais, toda vizinhança de algum ponto de acumulação contém infinitos pontos distintos dele próprio, por conta de que V_{2n} representa os pontos que se distribuem de forma contínua por todo o espaço projetivo S_n, o que configura a existência de subseqüência convergente. Também é verdade, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, que toda cobertura de um conjunto fechado da variedade de Segre V_{2n} possui sempre uma subcobertura finita. Com relação ao conceito de *região*, o texto brasileiro é, de certa forma, não necessariamente detalhista, pelo contrário, até mesmo mais confuso do que aquilo que está apresentado no texto espanhol, que com o auxílio da idéia de *ponto interior* (aquele que possui sempre alguma vizinhança de pontos do próprio conjunto) define região como todo conjunto constituído exclusivamente por pontos interiores. Já uma *região conexa* se restringe àquelas em que quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por uma curva contínua inteiramente contida na região, ou seja, como V_{2n} é uma variedade imersa num espaço euclidiano, a idéia de curva contínua está indissociavelmente impregnada por uma conceituação moderna do termo. Porém, todos os textos analisados aqui nesta tese referem-se invariavelmente a conceitos que são seguidos do adjetivo *regular*, que dá ao sujeito a medida de estar associado a alguma função contínua ou a uma função que pode desenvolver-se em série de potências em cada ponto (algo próximo ao conceito usual emprestado às funções analíticas) e indica a opção conceitual de Severi (como apontam as notas em cada um dos textos). A despeito disto, interessante é observar que as regiões de V_{2n} são conexas ou formadas por partes conexas, já que toda vizinhança é em si uma região. Como já observado anteriormente, em rigorosa congruência com o *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1940), do próprio Fantappiè, são definidas, ainda, *vizinhança de um conjunto* – formada por todos os pontos vizinhos do conjunto – e *domínio* – formado por uma região acrescentada de sua eventual vizinhança. É nesse ponto em que os textos de Fantappiè iniciam, então, a discussão acerca da definição de função analítica de variável(eis) complexa(s) e de suas nuances mais vantajosas para o desenvolvimento das regiões funcionais, domínios dos funcionais analíticos. Este é, também, precisamente o ponto de partida da resenha sobre os tais funcionais analíticos que Franco Pellegrino faz em [PELLEGRINO] (já citado), na qual assume os conceitos até aqui apresentados como algo de domínio comum aos iniciados no tema.

Assim, no último item, o de número 5, do Capítulo 1 de suas memórias brasileiras, *'Função analítica de n variáveis complexas'*, traduzido junto às páginas 137-8 do Apêndice 1 deste trabalho, Fantappiè apresenta o que se deve entender por função regular num ponto de certa *região R* da Variedade de Segre V_{2n} com o cuidado de ramificar a definição para os dois casos possíveis: aquele em que o ponto em questão é finito, ou seja, cujas coordenadas são todas finitas, e sobre o qual a função é passível de desenvolvimento em série de potências numa sua conveniente vizinhança, e o caso contrário, em que o ponto é infinito e a função deve se anular, quando vista como uma nova função que age sobre uma *região* R_1, resultante da transformação linear e não degenerada de *R* e que associa o ponto infinito a um ponto finito de R_1. Diz, ainda, Fantappiè: *"Com esta definição vê-se imediatamente que a única função regular sobre toda a variedade de Segre (FT27) é a função* $y(z_1, z_2, \ldots z_n) \equiv 0$, *ou seja, identicamente nula."* A partir daí, Fantappiè conceitua função localmente analítica como toda função definida e regular em cada ponto da *região R* da Variedade de Segre V_{2n}, ainda que esta região não seja conexa. Além disso, ele toma o cuidado de caracterizar as funções analíticas em *sentido estrito* como aquelas que são localmente analíticas numa *região conexa R*, eventualmente Riemanniana (região em que dois pontos sobrepostos com mesmas coordenadas separam folhas diferentes de uma cobertura de tal região, ou seja, todo ponto de qualquer uma das duas folhas possui uma conveniente vizinhança dentro da própria folha e que não contém o ponto na interseção), da Variedade de Segre V_{2n}, mas que não sejam prolongáveis[9] (garantindo assim a univocidade de sua definição) a outro *R*, que por isso é considerado seu *campo natural de existência*. O efeito de se trabalhar com o conceito de região Riemanniana é o de garantir que certas funções analíticas possam porventura assumir valores distintos em um mesmo ponto, fator que determina uma não necessária, mas possível ampliação na quantidade de funções a serem incorporadas no conjunto em que agem os funcionais analíticos. Por fim, Fantappiè observa que toda função localmente analítica em sentido estrito fica totalmente determinada pelos valores assumidos na vizinhança de um ponto qualquer do seu campo natural de existência e que, contrariamente, para identificar uma função analítica basta apresentar uma região *R* na qual a função estará definida e os valores por ela aí assumidos. É, assim, natural a opção por tratar prioritariamente de função que não esteja definida numa *cobertura* da Variedade de Segre, pois, desta forma, ela resultaria nula em toda região conexa (ver página 139 do Apêndice 1 deste trabalho). Os mesmos passos dados aqui são seguidos pelo trabalho espanhol, no título *7. Funciones analíticas localmente y funciones ultrarregulares* da segunda parte, e diferenciam as funções localmente analíticas quando o são em toda a *região R* de definição como *funções ultrarregulares*: "*Son aquellas funciones analíticas localmente, esto es, regulares en todos los puntos de la región en que están definidas y, además, sujetas a la condición de que si uno de estos puntos es el del infinito, la función debe ser no sólo regular en él, sino también nula*". Assim, este texto espanhol encerra a seção com a definição de *prolongamento* de uma função analítica, identicamente ao que

[9] Se uma função $y_0(t)$ localmente analítica está definida em uma região R_0, então toda função $y_1(t)$ também localmente analítica, porém definida em uma região R_1 que contém R_0, e ainda por cima coincidente com $y_0(t)$ em R_0, é chamada prolongamento desta última.

está formulado na nota 8 acima: *"Si la función ultrarregular* $y_0(t)$ *está definida en una región* R_0 *puede suceder que en otra región* R_1 *(conexa o no) que contenga a* R_0*, esté definida una función ultrarregular* $y_1(t)$ *que en la región* R_0 *coincida con la función* $y_1(t)$. *Se dice en tal caso que* $y_1(t)$ *es 'prolongación' (generalmente no analítica) de* $y_0(t)$ *".*

Certamente que não só por uma questão de estilo ou pela busca de uma estética essencial de elegância, mas por algo que está intrinsecamente ligado ao fazer matemática, que é o repensar contínuo de suas formas na busca de estruturas sintéticas e minimais, porém consistentes, ou ainda – para dizer de uma forma simplificada que busca aguçar a intuição –, estruturas cada vez mais despojadas de tudo que é prolixo, que Franco Pellegrino conseguiu, com olhar distante de quem produz uma resenha histórica – como realmente deveria ser –, imbuído dos desenvolvimentos teóricos da topologia como disciplina matemática e pautado também pelo próprio trabalho espanhol[10], construir uma síntese eficaz que captasse as discussões apresentadas sobre funções como argumentos de funcionais analíticos nas memórias brasileira e espanhola de Fantappiè. O Capítulo 1 – *Les champs de définition des fonctionnelles analytiques* – rapidamente introduz os elementos fundamentais para a análise dos funcionais analíticos, primeiro com uma justificativa para utilização de funções mais gerais do que as analíticas à Weierstrass, assim como o ocorrido no trabalho espanhol, que são as localmente analíticas: " *'Une fonction sera dite localement analytique si, indépendamment de tout prolongement, elle est définie et uniforme dans une région ouverte ([2]) connexe ou non, de la sphère complexe et si, en chaque point de cette région, la fonction vérifie les conditions de Cauchy-Riemann'. C'est au fond la définition*

[10] Ver referência [44] da bibliografia em PELLEGRINO, p.473.

(locale, mais très genérale) qui joue tout son rôle tant dans la théorie des équations différentielles que dans le théorème de Cauchy de la théorie des fonctions analytiques. Elle permet en plus de prendre en considération des problèmes, comme ceux qui se présentent dans l'étude des transmissión télégraphiques, où il s'agit justement de foctions qui sont analytiques seulement par morceaux. Remarquons encore qu'une fonction analytique au sens de Weierstrass est parfaitement déterminée par les valeurs qu'elle prend dans le voisinage d'un point quelconque de son champ naturel d'existence. 'Au contrire, pour qu'une fonction analytique soit entièrment déterminée, il faut donner, d'une part la region M où elle est définie, d'autre part les valeurs qu'elle prend dans M' (telles, cela va de soi, que la fonction soit partout régulière dans M)". E continua mais adiante com a definição de função bi-regular ao invés de ultrarregular que aparece no texto espanhol, precedida de uma rápida observação a respeito das vantagens trazidas por esta nova categoria e que se tornariam visíveis no desenrolar do texto, assim como feito também no texto espanhol: " *'Une fonction localement analytique sera dite birégulière, si elle est régulière dans tout les point de la région où elle est définie, avec la condition que, si cette région contient l'infini, elle doit s'y annuler'."* Com exatamente as mesmas considerações a respeito das singularidades associadas às funções localmente analíticas que estão presentes também no texto espanhol, Pellegrino finaliza os comentários sobre *campo natural de existência* de funções desta categoria com a mesma idéia de prolongamento: *"Introduisons encore une autre notion: soit $y_0(t)$ une fonction ([1]) définie dans une région M_0; toute fonction $y_1(t)$, définie dans une région M_1 contenant M_0 comme partie, et qui dans M_0 coïncide avec $y_0(t)$, sera dite um 'prolongement' (qui ne sera pas toujours analytique) de $y_0(t)$ ".*

A partir desse ponto, os três trabalhos até aqui analisados com mais detalhes apresentam as propriedades elementares do espaço funcional, mas, mais uma vez, por conta de Fantappiè trabalhar numa variedade de Segre V_{2n} na sua *Memória* brasileira, alguns ajustes que identificam plenamente a concepção de função localmente analítica com os conceitos de função ultrarregular (trabalho espanhol) e função bi-regular (trabalho de Franco Pellegrino) são levados a cabo. Dessa forma, o espaço funcional $\wp^{(n)}$ é constituído por uma região *R* da variedade V_{2n}, na qual está definida uma função regular $y(t_1,t_2,\ldots,t_n)$. Porém, esta região *R* não poderá esgotar toda a variedade de Segre V_{2n}, sob pena da função $y(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ se identificar com a função nula (conseqüência da própria definição já mencionada anteriormente), que por força do seu caráter absolutamente restritivo, é excluída como ponto do espaço funcional. Duas outras observações importantes são feitas: a primeira delas deriva do fato de que a região R de definição de y é um subconjunto próprio de $\wp^{(n)}$ e diz que o seu conjunto complementar I (em relação a $\wp^{(n)}$) é fechado e contém sempre um ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$; a segunda consideração toma o cuidado de fazer uma diferenciação para preservar idéias acerca de univocidade e afirma que todo possível prolongamento y_1 de um ponto $y = y(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ pertencente ao espaço funcional $\wp^{(n)}$ é diferente de y (ver páginas 140-41 do Apêndice 1 desta tese).

As noções topológicas básicas de vizinhança restrita e vizinhança linear são conceituadas, então, para os pontos (funções) do espaço funcional. O trabalho brasileiro diferencia-se do trabalho espanhol e do texto de Franco Pellegrino na medida em que o primeiro apresenta *vizinhança linear* antes de *vizinhança restrita*. A *vizinhança linear (A)* de um ponto y_0 do espaço funcional $\wp^{(n)}$, definido numa região R_0, é o conjunto de todas as funções localmente analíticas y que são regulares no fechado *A* e cujos campos de existências contêm *A*. Nestas mesmas condições e dado um real $\sigma > 0$, a *vizinhança restrita* (ou simplesmente *vizinhança*) *(* A,σ *)* do ponto y_0 é o conjunto de todas as funções regulares em *A* para as quais vale

$$|y(t_1,t_2,\ldots,t_n) - y_0(t_1,t_2,\ldots,t_n)| < \sigma, \tag{5.12}$$

qualquer que seja $(t_1,t_2,\ldots,t_n)\in A$. Independentemente da ordem em que estas definições estão apresentadas, nos três trabalhos elas são imediatamente sucedidas pela consideração de que as vizinhanças *(* A,σ *)* de uma função y_0, estão contidas na vizinhança linear *(A)* da mesma função, qualquer que seja a escolha do real positivo σ. Este parece ser o motivo que evidencia a opção por definir, primeiro, vizinhança restrita e, depois, vizinhança linear, nos dois trabalhos espanhol e de Pellegrino, fazendo coro com a idéia de partir do mais restritivo para o menos restritivo, numa tendência forte da matemática pelo enfraquecimento das condições iniciais num claro movimento de ampliação da estrutura teórica que passa a abarcar mais objetos no conjunto sob análise. O trabalho de Franco Pellegrino reserva ainda uma surpresa ao descrever toda essa operação, pois ele credita a Omar Catunda a melhoria da estrutura de definições no sentido de privilegiar uma compreensão mais rápida e clara para o desenvolvimento teórico e justifica, ainda, esta opção com a citação antecipada do teorema que caracteriza o espaço funcional através de conjuntos fechados sobre a variedade de Segre V_{2n}: *"Soit* $y_0(t)$ *une fonction définie et birégulière dans une région* M_0 *de la sphère complexe; soit A un ensemble fermé quelconque dans* M_0 *et* σ *un nombre positif arbitraire; nous appellerons alors 'voisinage' (* A,σ *) de la fonction* $y_0(t)$ *(ou* *‘voisinagerestreint’) l’ensemble des fonctions* $y(t)$ *birégulières dans l’ensemble A (donc définies chacune dans une M qui contient A) et qui y vérifient la relation* $|y(t) - y_0(t)| < \sigma$ *(Cette définition est due à M. Catunda [70], premier assistant de M. Fantappiè à l’Université de São Paulo (Brésil)*[11]*. Pour la définition antérieure de Fantappiè, qui détermine le mème type d’espace, mais est moins commode, voir [24]). Il est à remarquer que chaque voisinage (* A,σ *) de* $y_0(t)$ *contient évidemment toutes les fonctions qui sont des prolongalements de* $y_0(t)$. *Le ‘voisinage linéaire’ (A) d’une fonction* $y_0(t)$ *est l’ensemble des fonctions birégulières dans A, A étant, comme dans la définition précédente, un ensemble fermé quelconque contenu dans la région* M_0 *où* $y_0(t)$ *est défini. Son nom de voisinage linéaire sera justifié par le théorème II du nº 5.*[12] *Il est évident que le voisinage (A) de* $y_0(t)$ *contient touts lês voisinage (* A,σ *), avec le même A, de* $y_0(t)$ *et qu’il se présente aussi comme la limite pour* $\sigma \to \infty$ *du voisinage (* A,σ *) de* $y_0(t)$*.”*

Depois – nos trabalhos brasileiro e espanhol de Fantappiè e no de Franco Pellegrino –, é constatado que a vizinhança linear *(A)* de uma função y_0 contém todas as vizinhanças *(* A,σ *)* desta função, que é uma conclusão óbvia se for acrescentado à definição de vizinhança linear a desigualdade (5.12). Mas não é só isso, pois para toda função y da vizinhança linear *(A)* de y_0, é possível encontrar uma conveniente vizinhança de y_0 que contém y. Essa operação pode ser realizada observando-se que $y - y_0$ é uma função contínua em A e, portanto,

[11] Este tipo de citação importa mais para este trabalho do que a averiguação do próprio trabalho de Catunda, pois dá mostra de sua grandeza junto à comunidade científica a qual está inserido.
[12] O teorema citado aqui por Pellegrino é o mesmo Teorema II apresentado no início deste capítulo à página 63.

existe um valor máximo *M* tal que $|y - y_0| \leq M$. Assim, tomando-se $\sigma > M$, y resultará interior à vizinhança *(A,σ)* de y_0. Disso tudo, pode-se tirar uma nova idéia: a vizinhança linear *(A)* de y_0 é um conjunto numérico do espaço funcional $\wp^{(n)}$ que contém todas as vizinhanças *(A,σ)* desta função.

Agora fixado o espaço funcional e seu conseqüente sistema de vizinhanças, mostra-se que o seu comportamento é o mesmo que o de um espaço topológico por atender aos três postulados de Hausdorff. Na verdade, o texto brasileiro demonstra inicialmente que o conjunto de vizinhanças lineares de uma função localmente analítica satisfaz os postulados de Hausdorff e, posteriormente, que o sistema formado pelas vizinhanças *(A,σ)* de uma tal função satisfaz também o conhecido postulado da separação.

Primeiro, a ação demonstrativa dos postulados relativa ao sistema de vizinhanças lineares – realizada apenas no texto compilado por Dias. Assim, o fato de cada ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$ possuir uma vizinhança linear *(A)*, na qual está contido, é evidente a partir da própria definição. Quanto ao segundo postulado, pode-se observar que se *(A)* e *(B)* são duas vizinhanças lineares de uma mesma função y_0, os dois conjuntos *A* e *B* são fechados e pertencentes, ambos, à região R_0, na qual y_0 está definida. Então, as funções regulares sobre $A \cap B$, que são evidentemente as funções na intersecção das duas vizinhanças *(A)* e *(B)*, constituirão exatamente o interior linear *(A+B)* de y_0. Enfim, se y_1 pertence à vizinhança linear *(A)* de y_0, pode-se dizer que o conjunto fechado *A* está contido na região R_1 de definição de y_1; na verdade, a vizinhança linear *(A)* de y_1 não somente está contida na vizinhança linear *(A)* de y_0, mas coincide com ela, o que comprova o terceiro postulado.

A segunda ação realizada com o sistema de vizinhanças do tipo (A,σ) de y_0 se comprova de forma parecida com a que foi desenvolvida na primeira ação de verificação apresentada acima. O texto espanhol e o de Pellegrino, já mais amadurecidos matematicamente e, portanto, mais sintéticos por seguirem uma estética lingüística minimal, fixam apenas suas atenções no espaço funcional analítico (com suas funções ultrarregulares e birregulares, respectivamente no caso espanhol e no caso do trabalho de Pellegrino), dotado da tal estrutura de vizinhanças restritas, para caracterizá-lo como espaço topológico, de forma análoga ao que é feito no trabalho brasileiro. Em qualquer das abordagens, então, tem-se o seguinte: o primeiro postulado é evidente pela própria definição de vizinhança. Quanto ao segundo, tomam-se as vizinhanças (A,σ) e (A_1,σ_1) de y_0, o conjunto A_2 definido por $A+A_1$ – aquele que contém as funções regulares sobre $A \cap B$ – e $\sigma_2 = mín(\sigma,\sigma_1)$. Nessas condições, a vizinhança (A_2,σ_2) de y_0 está contida nas duas precedentes vizinhanças e, portanto, na sua interseção. Finalmente, qualquer função y_1 de uma vizinhança arbitrária (A,σ) de y_0 é regular em *A*, logo a função $|y_1 - y_0|$ apresenta no conjunto fechado *A* um máximo $L < \sigma$. Portanto, tomando $0 < \sigma' < \sigma - L$, a vizinhança (A,σ') de y_1 está contida na vizinhança (A,σ) de y_0, já que toda função *y* da vizinhança (A,σ') de y_1 satisfaz $|y - y_1| < \sigma'$ e que também é obviamente verdadeira a desigualdade $|y_1 - y_0| \leq L$. Estas duas desigualdades permitem, por sua vez, verificar que a expressão $|y - y_0| \leq |y - y_1| + |y_1 - y_0| < \sigma' + L < \sigma$ é verdadeira, ou seja, que realmente *y* pertence à vizinhança (A,σ) de y_0.

Falta, ainda, a verificação do postulado da separação. Sejam duas funções y_1 e y_2, definidas em duas regiões R_1 e R_2, respectivamente, com uma interseção $\overline{R}$, mas sem que essas funções coincidam em qualquer parte conexa B de $\overline{R}$, evitando assim que uma delas seja prolongamento da outra. Para um domínio $A \subset \overline{R}$ derivado de uma região conexa *B*, a diferença $y_1 - y_2$ não poderá ser nula e, portanto, é possível tomar um ponto neste domínio em que $|y_1 - y_2| > 2\sigma$. Conclusão: as vizinhanças (A, σ) de y_1 e (A, σ) de y_2 não possuem elementos comuns e o postulado da separação está verificado.

Além de tudo isso, observa-se ainda uma sutil diferença entre o texto espanhol e o trabalho de Pellegrino que é a suplementação fornecida neste último no item (b) pertencente ao título *'Nature topologique de l'espace* $S^{(1)}$ *des fonctions localement analytiques e birégulières'*, que o aproxima mais uma vez do texto brasileiro, por conta do já citado postulado da separação: *"*$S^{(1)}$ *est une espace* T_0 *– En effect, à cause du fait, déjà remarqué, qu'à chaque voisinage* (A, σ) *de* y_0 *appartiennent aussi toutes les fonctions qui sont des prolongements de* y_0*, on voit que le séparation de Hausdorff et de Fréchet, tandis que l'on peut démontrer [39] qu'il vérifie celui de Kolmogoroff, c'est-à-dire que, si l'on considère deux fonctions quelconques* y_1 *et* y_2 $(y_1 \neq y_2)$ *de* $S^{(1)}$*, l'une au moins des deux possède un voisinage qui ne contient pas l'autre (la topologie de* $S^{(1)}$ *es donc assez faible ; il faut toutefois remarquer que dans l'étude d'une fonctionnelle analytique bien déterminèe, cette topologie peut être fortiffiée, surtout si la fonctionnelle est lenéaire (voir nº 6 et 21)".* Vale observar, no entanto, que Luigi Fantappiè já havia feito uma pequena apreciação dessa idéia em uma breve nota que enviara para o *Reale Istituto Nazionale di Alta*

Matematica de Roma, em 1940, sob o título *'Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico* T_0 *'*.[13]

A síntese conquistada no processo de lapidação teórica, efetuada ao longo do tempo e imbuída de princípios de minimalização lingüística aplicada à matemática, permite um avanço mais acentuado para o desenvolvimento, neste caso, do estudo dos funcionais analíticos (obviamente o texto espanhol de Fantappiè e principalmente o texto de Franco Pellegrino são tomados aqui como o fim do que se vislumbra com o texto brasileiro de Fantappiè, por exemplo) a ponto de que as propriedades topológicas de conjuntos dos espaços funcionais acabam por levar mais rapidamente às mesmas conclusões que noutros são antes circundadas num movimento longo e espiralado, nem por isso injustificado, já que os ajustes técnicos ainda estão em desenvolvimento, até serem atingidas. Assim, enquanto o texto brasileiro, após apresentar os conceitos de *ponto de acumulação* e de *região funcional* (ver *7. Outras noções topológicas do espaço funcional* nas páginas 148-52 no Apêndice 1 desta tese), opta por discutir *linha analítica* e *variedade analítica* (ver *8. Linha e variedade analítica do espaço funcional* nas páginas de 150-60 no Apêndice 1 desta tese), por apresentar a estrutura algébrica de *módulo com multiplicadores* e por fim conceituar *região funcional* linear do espaço funcional (ver *9 Módulos com multiplicadores e regiões funcionais lineares* às páginas 160-1 e subseqüentes no Apêndice 1 desta tese) para somente então apresentar os dois teoremas que domesticam, por assim dizer, a caracterização das *regiões funcionais* como conjuntos fechados sobre a variedade complexa que contém o espaço funcional sob análise, o texto espanhol e o texto de Franco Pellegrino optam por outra abordagem e fazem uma pequena inversão

---

[13] Fantappiè, L. *Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico* T_0. Roma, Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica – Nota pervenuta in Redazione il 6 Febbraio 1940-XVIII.

para atacar de forma mais direta estes dois resultados, deixando por último a apresentação da discussão, não menos importante, sobre *linhas analíticas de um espaço funcional*. No entanto, a discussão não pode deixar de tocar novamente um ponto de extrema importância no desenvolvimento do trabalho brasileiro, que é a questão da expansão pretendida por Fantappiè em relação a trabalhos anteriores, ou seja, a sua busca por trabalhar com funcionais de várias variáveis. A despeito das simplificações – mesmo que tenham se mostrado eficazes – conquistadas com o desenvolvimento interno da disciplina ao longo do tempo, o movimento efetuado por Fantappiè na divulgação brasileira só foi levado a cabo no texto italiano *'Nuovi Fondamenti della Teoria dei Funzionali Analitici'* (1943), texto baseado em seu curso de Análise Matemática ministrado em Roma em 1939-40, o que por si só já é evidência de importância histórica. Neste sentido, é fator determinante a observação de que o texto compilado por Dias apresente a discussão de Variedades Analíticas como extensão do conceito de Linhas Analíticas. Ainda assim, e por ordem estrita da obrigação acadêmica de comprovação, segue o que o texto de Pellegrino faz, já que ele apreende de forma mais essencial as necessidades que as demonstrações dos dois resultados mencionados exigem para a ligação das hipóteses às suas respectivas teses, lembrando ainda que o texto espanhol, na sua página 24, traz de forma congruente em seu *'9. Conjuntos del espacio funcional'*, os conceitos de *'punto de acumulación de un conjunto funcional'*, de *'conjunto cerrado'*, de *'punto interno'* e de *'región funcional'* e em seu *'10. Conjunto y regiones lineales del espacio funcional'*, os conceitos de *'conjunto lineal'* e de *'región funcional lineal'*:

*"**4. Les ensembles de l'espace fonctionnel** $S^{(1)}$. – Bien des définitions basées sur la notion de voisinage peuvent maintenant sans difficulté être appliquées à l'espace $S^{(1)}$. Ainsi:*

'Point d'accumulation d'une ensemble fonctionnelle E': on appelle ainsi toute fonction $y_0(t)$ telle que dans tout voisinage (A,σ) de y_0 il y ait au moins une fonction de E qui ne coïncide pas avec $y_0(t)$.

'Un ensemble est dite fermé' s'il contient tous ses points d'accumulation.

'Point intérieur d'un ensemble fonctionnelle E': on appelle ainsi toute fonction y(t) de E qui posséde un voisinage (A,σ) appartenant entiérement à E.

'Région fonctionnelle R': c'est une ensemble de fonctione de $S^{(1)}$ dont tout point est intérieur.

On a vu au numéro précédent que notre définition de voisinage satisfait aux trois axiomes de Hausdorff. Le troisième nous montre que les voisinages (A,σ) sont eux-mêmes des régions fonctionnelles au sens qu'on vient de définir. Il en est de même des voisinages linéaires (A).

On dira maintenant qu'un ensemble E de $S^{(1)}$ est un 'ensemble linéaire' s'il contient toute combinaison linéaire $e_1y_1 + e_2y_2 + \Lambda + e_py_p$ [qui doit donc toujours existir (Nous rappelons ici que la somme d'un nombre fini de fonctions est une fonction définie seulement pour les valeurs de t communes aux régiones de définition de chaque terme de la somme. La condition nécessaire et suffisante pour que cette somme existe est donc que les régions de défintion de tous les termes de la somme aient une partie commune.)] à coefficients complexes arbitraires d'un nombre fini quelconque p de fonctions lui appartenant.

'Région fonctionnelle linéaire', ou tout simplement 'région linéaire': c'est un ensemble de $S^{(1)}$ *qui est en même temps un ensemble linéaire et une région. Comme nous le verrons au prochain numéro, un voisinage (A) d'une fonction est une région linéaire. Les voisinages* (A, σ) *sont, au contraire, des région 'non' linéaires [immergées dans la région linéaire (A)]. Cela nous conduit [82] à introduire encore la définition suivante:*

'Frontière d'un voisinage (A, σ_0) *de* $y_0(t)$ *dans (A)': c'est l'ensemble des fonctions y*(t) définies dans A et telles qu'à chacun de leurs voisinages* (A, σ) *appartient des fonctions du voisinage* (A, σ_0) *de* y_0*, et des fonctions qui ne se trouvent pas dans ce voisinage.*

Ces fonctions y peuvent être caractérisées par le théorème suivant: 'la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction y* appartienne à la frontière dans (A) du voisinage* (A, σ) *de* y_0 *est qu'on ait* $Max|y^* - y_0| = \sigma$ *pour t variable dans A."* (Ver PELLEGRINO, p. 365-6).

Seguem daqui, imediatamente os teoremas citados, ao contrário do que é feito no texto brasileiro – como já observado –, mas as demonstrações são precisamente as mesmas nos três trabalhos, a menos, é claro, dos já mencionados ajustes técnicos requeridos no trabalho brasileiro, por conta de uma linguagem ainda não muito aperfeiçoada ou mesmo não assimilada a contento em termos de estrutura e resultados da topologia. O mais importante aqui é destacar a forma como eles são apresentados, respectivamente, no trabalho espanhol e no de Pellegrino: *"en las regiones lineales se verifican dos teoremas de fundamental importancia para los capítulos sucesivos"* (FANTAPPIÈ, 1943, p. 24) e *"nous donnons ici des théorèmes dont les deux premieres sont absolutment* *fondamentaux pour la suite"* (PELLEGRINO, p. 367). Eis, então, os enunciados em suas três versões:

- Trabalho brasileiro, às páginas 166-7 do Apêndice 1 desta tese:

  "<u>Teorema I</u> – <u>Dados</u> <u>qualquer</u> <u>região</u> <u>funcional</u> <u>linear</u> R <u>e</u> <u>qualquer</u> <u>um</u> <u>de</u> <u>seus</u> <u>pontos</u> y_0, <u>se</u> <u>a</u> <u>vizinhança</u> (A, σ) <u>de</u> y_0 <u>pertence</u> <u>a</u> R, <u>o</u> <u>mesmo</u> <u>acontece</u> <u>com</u> <u>toda</u> <u>a</u> <u>vizinhança</u> <u>linear</u> (A) <u>de</u> y_0."

  "<u>Teorema II</u> – <u>A</u> <u>uma</u> <u>região</u> <u>funcional</u> <u>linear</u> R <u>do</u> <u>espaço</u> $\wp^{(n)}$ <u>está</u> <u>sempre</u> <u>associado</u> <u>um</u> <u>conjunto</u> <u>fechado</u> A <u>da</u> <u>variedade</u> <u>de</u> <u>Segre</u> V_{2n} (<u>que</u> <u>se</u> <u>chama</u> "<u>característica</u> <u>da</u> <u>região</u> <u>funcional</u> <u>linear</u>") <u>tal</u> <u>que</u> <u>a</u> <u>região</u> R <u>é</u> <u>formada</u> <u>unicamente</u> <u>por</u> <u>todas</u> <u>as</u> <u>funções</u> $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ <u>regulares</u> <u>em</u> A."

- Trabalho espanhol, às páginas 24 e 25:

  "Teorema I – Dada cualquier región funcional lineal R y tomado cualquier punto $y_0(t)$ de la misma, si el entorno (A, σ) de y_0 pertenece a R, lo mismo sucede para todo el entorno lineal (A) de y_0."

  "Teorema II – A toda región funcional lineal R corresponde un conjunto cerrado A, de puntos de la esfera compleja, tal que R está formada simplemente por todas las funciones ultrarregulares en A y sólo por éstas."

- Trabalho de Franco Pellegrino, às páginas 367 e 368:

  "Théorème I – Soit R une région fonctionnelle linéaire et $y_0(t)$ une fonction quelconque de R. Si le voisinage (A, σ) de $y_0(t)$ appartient à R, R contient aussi le voisinage linéaire (A) de $y_0(t)$."

  "Théorème II – Si R est une région fonctionnelle linéaire, l'intersection de touts les régions de définition des fonctions de R est un ensemble (partiel)

A de la sphère complexe, non vide et fermé, et chaque fonction birégulière dans A appartient à R. Réciproquement: l'ensemble des fonctions birégulières dans un ensemble fermé A (partiel) de la sphère complexe constitue une région fonctionnelle linéaire."

O trabalho brasileiro se fecha quase melancolicamente, por assim dizer, após a conclusão apoteótica deste teorema descrita da mesma forma nos três trabalhos: *"Queda así establecida una 'correspondencia biunivoca' entre las regiones funcionales lineales y los conjuntos cerrados de puntos de la esfera compleja (sus conjuntos característicos). Puesto que el conjunto característico A individualiza completamente a la región, determina también 'todas las propiedades' de la región funcional lineal, propiedades que están, pues, contenidas en las del conjunto característico A. Con esto, el estudio de las regiones funcionales lineales viene a reducirse al estudio mucho más simple de los conjuntos cerrados de puntos sobre la esfera."* (Ver FANTAPPIÈ, 1943, p.27)

O trabalho brasileiro tem ainda fôlego para dizer que, *"como conseqüência imediata do teorema II, ora demonstrado, tem-se afinal o seguinte:*

Corolário – *Se uma variedade analítica* V_r *dada por*

(9,7) $$y = y(t_1, t_2, \ldots t_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

na qual o ponto $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ *varia sobre uma Riemanniana* Ω_r *da variedade de Segre* V_{2r}*, está contida numa região funcional linear (A); chamando de* Ω'_r *a região que se obtém de* Ω_r*, excluindo desta os eventuais pontos ao* ∞ *e de ramificação, toda a variedade analítica dada por*

$$(9,8) \qquad y = \frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_r}}{\partial\alpha_1^{p_1}\partial\alpha_2^{p_2}\cdots\partial\alpha_r^{p_r}}\, y(t_1,t_2,\ldots t_n;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) \qquad (p_1 - p_r = 0,1,2,\ldots)$$

para $P(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ *variável em* Ω'_r, *estará também contida na própria região funcional.*"

Porém, é oportuno retomar aqui o comentário feito no início deste capítulo à página 62 acima – 'já que nele **apenas** estão bem caracterizadas as regiões funcionais lineares do espaço funcional' – , para dizer que ele não tem intenção de diminuir em absoluto o conteúdo e as importantes conquistas desses teoremas – e nem poderia ter mesmo essa ousadia, dado que, ao final da demonstração do Teorema I, no seu trabalho espanhol, Fantappiè chama atenção para o fato de que *"de ahora en adelante, por tanto, para las regiones lineales, hablaremos de entornos lineales (A) en vez de entornos restringidos* (A,σ)*"* (ver FANTAPPIÈ, 1943, p.25) e, também, como o próprio Franco Pellegrino destaca, o Teorema II é *"un très remarquable théorème de Fantappiè"* e que *"l'étude des régions fonctionnelles linéaires se réduit ainsi à l'étude bien plus simple des ensembles fermés sur la sphère complexe"* (PELLEGRINO, p.370), mas sim mostrar uma sensação de frustração mediante a impossibilidade de não poder degustar o doce após ter experimentado o seu paladar, ou seja, não ter sido apresentado aos Funcionais Analíticos por conta do abrupto e precoce fim do texto compilado por Cândido Lima da Silva Dias após a caracterização feita para as regiões funcionais lineares, que contêm os argumentos dos tais Funcionais. Para que este comentário não seja tomado por exagero, é necessário relembrar que, na própria introdução *'1. Generalidades sobre funcionais'*, Fantappiè dizia que os funcionais analíticos e algumas de suas aplicações seriam objeto de análise no texto (ver página 113 do Apêndice 1 desta tese) e, em conseqüência dessas ausências, apresentar os caminhos que levam a esses objetivos almejados pelo próprio Fantappiè através de outras obras, como acontece no seu trabalho espanhol e no de Franco Pellegrino aqui exaustivamente tomados como suporte para análise. E nessa toada, ainda que o trabalho espanhol dê continuidade com a apresentação dos resultados estruturados a partir do conceito de *linha analítica do espaço funcional*, o trabalho de Franco Pellegrino se esmera ainda mais em explicitar a importância dos resultados obtidos até então antes de dar os próximos passos: *"Il faut remarquer que le théorème que l'on vient démontrer est absolument fondamental pour toute la théorie des functionnelles analytiques. En effet, comme on le verraplus loin (nº19, b), c'est grâce à ce théorème que l'on peut démontrer, 'en partant de nous définitions', la formule intégrale fondamentale au moyen de laquelle on peut exprimer toute fonctionnelle linéaire, formule qui à son tour, comme on peut bien le comprendre, a une importance fondamentale pour toute le reste de la théorie.*

Il faut encore observer qu'une foit ce théorème connu il serait bien plus commode de prendre dès le début, comme définition d'une région fonctionnelle linéaire, la totalité des fonctions birégulières dans un ensemble fermé A, ce qui simplifierait la suite de la théorie, mais n'expliquerait pas la raison du nom de 'région linéaire' " (Ver PELLEGRINO, p.370).

E apresenta, em mais uma pequena diferenciação em relação ao trabalho espanhol de Fantappiè, uma discussão sobre *regiões funcionais não lineares* que culmina com o seguinte resultado: *"Si y_0 est une fonction appartenant à une région non linéaire R, toutes les fonctions de tous les voisinages (A,σ) de y_0, appartenant à R, appartiennent à une même région fonctionnelle linéaire"* (Ver PELLEGRINO, p.372). Esta aparente ruptura com a busca da síntese minimal apenas revela os avanços incorporados pelo desenvolvimento da teoria. Agora sim é a vez daquilo que em geral fecha um primeiro capítulo, ao contrário do que ocorre no texto brasileiro, de estudos sobre funcionais analíticos: as *linhas analíticas sobre o espaço funcional*. A definição segue o mesmo roteiro nas três obras em destaque[14], observando sempre os ajustes mais intensos no trabalho brasileiro, cuja intenção deliberada é construir uma teoria para funcionais analíticos a funções de várias variáveis (passando inclusive pela discussão das já mencionadas variedades analíticas como expansão das linhas analíticas), e a diferenciação praticamente semântica entre função ultrarregular (no espanhol) e função bi-regular (no de Pellegrino): considere uma função $y = y(t,\alpha)$ a duas variáveis complexas t e α que, para cada α_0 de uma região Ω da esfera complexa α, se reduz a uma função regular $y_0 = y(t,\alpha_0)$ definida e regular em uma região $M(\alpha_0)$ da esfera complexa t, que depende, naturalmente, de α_0. Seja, ainda, $I(\alpha_0)$ o conjunto fechado complementar de $M(\alpha_0)$ e suponha, por fim, que a função $y = y(t,\alpha)$ seja contínua em α neste fechado. Assim, para todo $\alpha_0 \in \Omega$ fixado de maneira arbitrária, a cada real $\varepsilon > 0$ corresponde uma vizinhança $E(\alpha_0)$ de α_0 contida em Ω e tal que, para qualquer $\alpha \in E(\alpha_0)$, a distância entre os conjuntos fechados $I(\alpha)$ e $I(\alpha_0)$ seja menor do que ε. Nestas condições, o conjunto de funções na variável t que se obtém a partir da função $y(t,\alpha)$, ao variar α em Ω, constitui o que se chama de *linha analítica* L do espaço funcional, e α é o parâmetro que individualiza cada ponto $y_0 = y(t,\alpha_0)$ sobre a linha analítica L. O trabalho brasileiro contém ainda, como já descrito anteriormente, a concepção de *variedade analítica*, que, ao invés de trabalhar com uma função nas variáveis t e α da definição de linha analítica, toma r

[14] Ver trabalho brasileiro de Fantappiè compilado por DIAS às páginas 149-51 do Apêndice 1 nesta tese e PELLEGRINO, p.372-373.

parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_r$ para constituir de maneira semelhante a L uma variedade V_{2r} imersa na variedade de Segre $V_{2(n+r)}$.

Após uma discussão conceitual e exemplificação, os trabalhos se remetem a um teorema que no texto brasileiro é chamado de *'teorema de origem'* (ver página 158 do Apêndice 1 nesta tese) e que é apresentado por Fantappiè no texto espanhol da seguinte maneira, considerando-se $y_0(t) = y(t, \alpha_0)$ ponto de uma linha analítica: *"Tomando al arbitrio un entorno (A, σ) de $y_0(t)$ se puede encontrar en Ω un entorno $E(\alpha_0)$ de α_0 tal, que para todos los puntos de $E(\alpha_0)$ las funciones de la línea $y = y(t, \alpha)$ queden en el entorno (A, σ) de $y_0(t)$"* (ver FANTAPPIÈ, 1943, p.29; ver também PELLEGRINO, p.373-4). O texto espanhol e o texto de Franco Pellegrino exploram um pouco mais este último resultado e concebem *'fragmento de linha analítica'* como uma *região* Ω' interior a Ω, formada pelos valores de α associados aos pontos de uma linha analítica L penetrada por uma região funcional R e que contém tais pontos de L, conceito similar ao trecho regular de variedade analítica no trabalho brasileiro.

No entanto, o trabalho de Pellegrino somente finaliza esse primeiro passo no desenvolvimento da teoria de funcionais analíticos com apresentação de mais um resultado, que de certa forma antecipa a fórmula fundamental[15] que caracteriza um funcional linear: *"Si toutes les fonctions d'une ligne analytique $y = y(t, \alpha)$ qu'on obtien pour chaque α sur λ appartiennent à une région linéaire (A), cette région contient aussi la fonction $y(t) = \int_\lambda c(\alpha) y(t, \alpha) d\alpha$"* (Ver PELLEGRINO, p.374).

[15] Ver a próxima Nota 15 abaixo e, também, PELLEGRINO, p.400-4.

O segundo passo "natural" nesse estudo sobre funcional analítico é efetivamente defini-lo, e também ao funcional analítico linear, e explorar as propriedades advindas principalmente do conceito de *indicatriz do funcional*. Isso é feito de forma rápida no texto espanhol de Fantappiè e no texto de Franco Pellegrino, o que alimenta com certeza a frustração declarada em relação ao texto brasileiro até mesmo porque no texto (mencionado no início deste capítulo) *Integrazione con Quadrature dei Sistemi a Derivate Parziali Lineari e a Coefficienti Costanti in Due Variabili, Mediante il Calcolo Degli Operatori Lineari*, de 1932, o próprio Fantappiè faz uso essencial da *indicatriz* em suas aplicações: *"In tali ipotesi, infatti, l'espressione* $f(A)y$ *risulta un funzionale lineare di* $f(\lambda)$ *analitico localmente e univocamente definito per ogni funzione* $f(\lambda)$ *olomorfa nell'insieme E, funzionale di cui la soluzione* $\gamma(z,\lambda)$ *dell*

equazione (I) (univocamente definita, per ogni y di H e ogni λ *di B) non è altro che la considdetta 'indicatrice emisimmetrica', essendo* λ *l'indice. Il valore di* $f(A)y$*, per ogni funzione* $f(\lambda)$ *olomorfa in E, si ha quindi dall'espressione generale di un funzionale analitico lineare per mezzo della sua indicatrice (vedi F. A., nº 33*[16]*)"* (ver *Integrazione...*, p.20). Assim, a construção desse segundo passo é realizada, em linhas gerais, através das seguintes etapas: definição de funcional analítico, discussão a respeito da continuidade de funcionais analíticos

---

[16] *I funzionali analitici*, Memoria del prof. Luigi Fantappiè, 1928 – Capitolo II – 33. Valore del funzionale lineare per una funzione qualunque del campo di definizione, p.54: *"Questa formola* ($F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C v(t)y(t)dt$ *), fondamentale per tutta la teoria dei funzionali analitici, ci permete di calcolare il valore di un qualunque funzionale lineare F per qualunque funzione y(t) del suo campo di definizione, appena sia conosciuta la funzione indicatrice v(t) del funzionale. Mentre dunque la formola* $v(\alpha) = F_t\left[\frac{1}{t-\alpha}\right]$ *ci fa conoscere per ogni funzionale analitico lineare la sua funzione indicatrice, la formola ora trovata, vicecersa, ci individua completamente il funzionale F, quando se ne conosca l'indicatrice."*

sobre uma linha analítica e continuidade em geral, definição de funcionais analíticos lineares, derivação sob o sinal de funcionais lineares e integração de funcionais lineares, estudo de funcionais lineares de uma série, continuidade de funcionais lineares, apresentação de indicatriz anti-simétrica e simétrica de um funcional linear e o potencial para o cálculo de seus valores, apresentação do resultado que gera a fórmula fundamental de funcionais lineares, seguidos de estruturação do cálculo simbólico entre operadores funcionais lineares e posteriores aplicações (ver FANTAPPIÈ, 1943, p.31-56 e PELLEGRINO, p.375 e ss). Como já visto, nada disso está contemplado no trabalho brasileiro, porém não se deve desqualifica-lo a ponto de ser considerado tão somente uma leitura introdutória ao tema e de, portanto, ter o papel histórico de servir como transferência de conhecimento científico. Não, ele vai além! Apesar de ter sido dito no primeiro parágrafo deste capítulo que a peça brasileira se ‘mostra inconclusa’ e que ‘já havia ganhado mundo’, ela na verdade aprofunda as discussões, obviamente restritas à caracterização de regiões funcionais lineares, feitas com *‘I Funzionali Analiciti’* (1928) – que trabalha com funcionais de funções de uma variável – e *‘I Funzionali delle Funzione di due Variabili’* (1930), avançando com análise para funcionais de funções de várias variáveis. Basta observar os índices de conteúdos desses trabalhos para confirmar tal afirmação.

Por fim, uma pequena questão interessante em termos históricos – que não tem a necessidade de se esgotar por conta de alguma complexidade inerente ou, por outro lado, que não tem a pretensão de se prolongar por conta da obviedade porventura expressa em si mesma ao final de sua apresentação – é a constância com que Fantappiè refaz os mesmos passos dos trabalhos anteriores a cada nova investida na construção e desenvolvimento da teoria dos funcionais analíticos ao longo dos quinze anos que separam *'I Funzionali Analiciti'* de *'Teoría de los funcionales analíticos y sus aplicaciones'*. Pelo menos duas teses não excludentes e até mesmo dependentes podem ser tomadas como objetos de reflexão: a organização sistemática e congruente dos sucessivos textos deve servir como suporte facilitador para o desenvolvimento da teoria e esta mesma organização pode ser vista como apoio didático para a interpretação correta das ferramentas desenvolvidas por parte de uma comunidade científica ainda carente de veículos de comunicação não totalmente rápidos e eficazes a ponto de fazer chegar a todos cada passo fundamental dos desenvolvimentos da área de pesquisa. Um apoio significativo pode ser tomado da leitura de *'Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici – Memoria di Luigi Fantappiè – Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica – Roma, 1940'*, no qual o autor reelabora, baseado em parte do curso *'Alta analise'* ministrado por ele no referido instituto, todos os passos dados nos trabalhos anteriores. No entanto, o fato provável mais marcante de toda essa história do desenvolvimento da teoria dos funcionais analíticos é que Fantappiè prometeu no *Jornal de Matemática Pura e Aplicada*, em sua publicação de 1936 sobre as atividades do *Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo* realizadas no ano de 1935 (ver Apêndice 2), um texto a ser publicado em breve no Brasil. Fantappiè ficaria neste país até praticamente fins de 1938, voltando para a Itália em 1939, portanto o referido texto deveria ter sido desenvolvido num intervalo de tempo de dois anos. Como já mencionado anteriormente, o texto compilado por Dias deve ter sido o resultado de tal investida e a sua interrupção, ao final de um primeiro capítulo, parece ter sido motivada pelo retorno de Fantappiè à Itália. O reforço das convicções nessa tese vem exatamente da análise do acima citado *'Nuovi fondamenti della teoria dei* *funzionali analitici'*, que tem o seu primeiro capítulo praticamente idêntico ao texto brasileiro, diferenciando-se na introdução e prosseguindo com o desenvolvimento da teoria. Assim, suspeita-se que ao chegar a Roma e assumir a tarefa de ministrar um curso de análise matemática, Fantappiè valeu-se das exposições já apresentadas para o grupo de novos pesquisadores – por ele formado no Brasil – como ponto de partida para suas aulas, o que justificaria a congruência entre os textos e relevaria em definitivo a importância matemática e histórica dos *'Funcionais de Funções de Várias Variáveis'*.

Capítulo 6

Conclusão

A sublimação da educação através da história

A idéia inicial deste projeto era configurar teórica e praticamente uma proposta educacional para o estudo da matemática que pudesse agregar novas motivações ao seu processo de ensino/aprendizagem através da investigação de textos matemáticos históricos.

Teoricamente porque a estrutura da pesquisa em história da matemática, num sentido convencional, apresenta limitações que só podem ser ultrapassadas por uma nova forma de se fazer essa tal história. Estas limitações são identificadas primeira e principalmente por exaustão da capacidade explicativa dos fenômenos históricos, já que a técnica convencional dá conta tradicionalmente apenas de apreender o que resta como síntese de todo o processo de evolução científica – ou seja, o que é sucesso –, negligenciando, de certa forma, toda base que estrutura seu alicerce concretado com peças forjadas pelos erros e enganos das civilizações que buscam conhecimento pleno. Segundo, as limitações desta técnica parecem seguir a máxima: *ao vencedor, as batatas!*[1] A orientação das pesquisas tem como referência o corredor hegemônico de desenvolvimento do pensamento ocidental e acabam por desembocar numa visão euro-centrista e, depois, americanizada. Toda atividade periférica só tem algum valor caso seja prioritariamente inspirada na evolução hegemônica e que, independentemente desta inspiração, agregue necessariamente benefícios ao desenvolvimento deste caminho central[2]. Tem-se dois problemas, então: a não compreensão integral do fenômeno analisado – o que

[1] Em ASSIS, *Quincas Borba*.
[2] Ver D'AMBROSIO, editado em 2000, p. 79-92.

gera uma *crise de objetividade*[3] – e a negligência em tratar de questões *periféricas genuínas*. Com a nova concepção adotada para investigação em história da matemática – Capítulo 2 –, o primeiro problema acaba se diluindo na medida em que o segundo é atacado eficazmente por uma análise crítica de contexto histórico e de seu diálogo com a etnomatemática.

Praticamente porque há a crença, subjacente a este trabalho, de que toda ação educacional objetiva no mínimo um ganho de conhecimento, quiçá cultural, e, portanto, através de exemplificação didático-pedagógica, deve apresentar claramente os valores agregados à matéria de estudo. Seguindo a tese da insubordinação da matemática à educação, ou vice-versa – porém, que preserva a idéia de que a educação permeia toda ação de conhecimento –, e observando que o tema sob análise ganha status de ser a própria *História*, a escolha feita neste trabalho – *Luigi Fantappiè: influências na matemática brasileira – um estudo de História como contribuição para a Educação Matemática* – acarreta uma minoração da importância da investigação em etnomatemática comparativamente à análise crítica do fenômeno propriamente dito. No entanto, isto em nada deprecia, aliás, nem mesmo tem a ver com a qualidade dos frutos colhidos após longa gestação que se configurou através dos estudos de contexto histórico brasileiro no resgate de um capítulo da verdadeira *História da Matemática no Brasil*. Um primeiro ganho na evolução e desenvolvimento do projeto foi de caráter eminentemente histórico – a descoberta da *Memória de Luigi Fantappiè* anotada por Cândido Lima da Silva Dias por volta de 1935 – e de grande valia para reafirmar que a criação da USP e a atuação de Luigi Fantappiè na FFCL praticamente determinaram o ponto de inflexão na sorte da matemática brasileira,

[3] TÁBOAS, p. 6.

transformando-a de simples consumidora a também produtora no cenário global após a década de 1930. Além do fato histórico de grande relevância que é o caráter de originalidade em que se envolve o texto de Fantappiè, ele demonstra um amadurecimento crescente no pensamento científico do autor ao ser comparado com textos da virada da década de 1920/30 e início da década 1940, conforme exposto pelo próprio Fantappiè[4]. O segundo ganho neste projeto, que se revela, provavelmente, a grande contribuição para a Educação Matemática, é o conjunto das possibilidades que um mergulho na *Memória* apresenta para a interação com temas matemáticos, (inter)ação que, numa nova dimensão de temporalidade diferente da convencional, presentifica o passado através do reconhecimento de conceitos técnicos, ampliando percepções e perspectivas do presente redesenhado como futuro que acaba de acontecer.

Agora resta enumerar os temas de matemática avançada que o encontro com a *Memória de Luigi Fantappiè* proporcionou nesta investida no mundo da *História*.

A introdução que Fantappiè apresenta, de acordo com uma orientação organizacional interna do texto que segue uma numeração crescente para títulos, independentemente de capítulo, sob o número de ordem 1, *Generalidades sobre funcionais*, traz o conceito de *funcionais* e dá exemplos dos mesmos. Existem aí elementos para motivar o estudo desde integração múltipla, com suas aplicações físico-geométricas, e o estudo de sistemas de equações a derivadas parciais até o cálculo das variações.

O *Capítulo I* inicia-se com o título 2 – *Representação da* $n^{\underline{upla}}$ *de variáveis e a topologia sobre a variedade de Segre*, que disponibiliza elementos para o

[4] FANTAPPIÈ, editado em 1943, p. 9.

estudo de funções de variáveis complexas, espaço de representação geométrica para sistemas de números complexos a *n* dimensões em correspondência a sistemas reais de *2n* dimensões, extensão da representação do espaço a números infinitos, construção de métrica para um espaço com inspiração no conceito euclidiano de distância, enfim, estruturas de espaços métricos. Além destas possibilidades, o capítulo oferece ainda uma outra por conta do conceito de variedade para o *espaço funcional* que, obviamente, conduz as atenções para o estudo da própria conceituação de *variedades*.

O título 3 – *Distância e Vizinhança* – dá munição para se discutir o conceito de distância e de vizinhança de um ponto, o que pode preparar o terreno para o estudo de propriedades topológicas de espaços métricos bem como o formalismo necessário para investigações em *análise matemática*.

O título 4 – *A topologia sobre a Variedade de Segre* – aproveita as ferramentas do título anterior e constrói, no cenário específico, os conceitos de conjunto aberto, conjunto fechado e conjunto conexo, distância entre conjuntos, que é claramente o subsídio para induzir a discussão destes mesmos elementos num contexto topológico geral.

O título 5 – *Função analítica de n variáveis complexas* – deduz da análise matemática os resultados apropriados para o contexto da obra, gerando as definições e conceituações de seu interesse, e, no caso do trabalho que ora se apresenta, a sua leitura segue o caminho inverso, induz a discussão de um dos capítulos mais prolíficos da análise matemática, o que diz das funções analíticas e toda sua estrutura de regularidade.

O título 6 – *Noção de espaço funcional* – faz uma adequação do material desenvolvido anteriormente, toma os funcionais como pontos de um espaço e passa a estudar vizinhança e demais conceitos topológicos, sempre com o cuidado de construir um espaço de Hausdorff e aproveitar toda uma gama de teoremas que ajudam a compreender e manipular melhor seus elementos em função de possíveis aplicações. É óbvio que o convite é um estudo detalhado de topologia, especificamente sobre espaços de Hausdorff. Os títulos 7 e 8 – *Outras noções topológicas do espaço funcional* e *Linhas e variedade analítica do espaço funcional* – mergulham nas propriedades topológicas do espaço funcional e procuram classificar os tipos de funcionais analíticos sobre uma variedade de Segre. Na verdade, estes títulos 6, 7 e 8 apenas continuam induzindo, a exemplo do que ocorreu no título 5, o estudo avançado da topologia.

O título 9 – *Módulos com multiplicadores e regiões funcionais lineares* – traz toda a notação básica das estruturas algébricas de grupo, grupo abeliano, módulos e anel, especifica um espaço vetorial de Frechet através de um módulo, imbuído de uma norma, sobre o anel dos números reais, classifica, de maneira ainda mais segmentada, os funcionais agora como lineares (ou não lineares) numa variedade de Segre e faz uso do Teorema de Borel-Lebesgue para identificar, grosso modo, os funcionais lineares a conjuntos do espaço funcional, o que reduz todo seu estudo ao da variedade. Certamente, a indução aqui é inicialmente feita no sentido de se (re)pensar a Álgebra e suas estruturas.

Por fim, o que se pode sintetizar deste mergulho na matemática através da análise crítica de textos, que se justificam por serem subprodutos de investigação histórica ampliada, é que a motivação para o estudo da matéria pode ser feita através de processo que parte das reflexões do ser no mundo e vai até a concepção abstrata de modelos algorítmicos e de técnicas, que salvaguarda, de certa forma, todo o processo de criação ou de descoberta matemática e que está indicado, em linhas gerais, a seguir – porém, nem de longe e nem de forma alguma prega ou pleiteia uma educação utilitarista –:

1 – Análise de problema;

2 – Construção ou adequação de ferramental técnico/matemático para atacar o problema;

3 – Adaptação do ferramental para atacar uma gama de problemas semelhantes ao inicial;

4 – Constituição de uma classe de problemas e definição de estruturas e das ferramentas compatíveis para resolvê-los.

Após a conquista do formalismo axiomático lógico-dedutivo por parte da matemática, sua apresentação segue um padrão inverso ao dado anteriormente:

1 – Definição de instrumental técnico/matemático;

2 – Apresentação das propriedades relativas a este instrumental;

3 – Exemplificação da utilização em algum problema específico;

4 – Proposição de novos problemas.

Este formato, ainda que constituído de forma a preservar um novo conceito estético da matemática, calcado na *consistência* e na *minimalidade* das suas estruturas, carrega consigo o peso de parecer sempre esconder suas verdadeiras intenções e que, de certa forma, enevoa a sua compreensão. Soma-se a isto a velocidade vertiginosa do desenvolvimento da matemática durante o século XX, a ponto de não existirem mais universalistas na matéria, que implica na segmentação do conhecimento e mais névoa para envolvê-la. É a consciência de tal situação que fortalece a crença não no abandono dos ideais estéticos da matemática, mas na proposta didático-pedagógica instrumentalizada pelas técnicas da investigação histórica como auxílio às ações da Educação Matemática.

Apêndice 1

Memória de Luigi Fantappiè – Funcionais Analíticos

A seguir é apresentada a tradução do texto *'I funzionali delle funzioni di piu variabili – Memoria de Luigi Fantappiè'*. Em termos históricos, o grande mérito desse texto é que ele representa uma peça que não passou por uma elaboração secundária, ele é a cópia do que Fantappiè apresentou em aulas e escreveu em lousa provavelmente, é uma pedra bruta que apenas foi limpa e ainda não passou por lapidação. É marcante o ritmo inicial, de certa maneira repetitivo, do texto, que parece mostrar o esforço do professor em se fazer entender a brasileiros em língua italiana e, principalmente, referindo-se a tema tão novo aos ouvidos e olhares dos jovens estudantes. Na medida em que o curso evolui, o ritmo do texto é mais fluido, parecendo terem já sido consolidadas as bases teóricas nas mentes dos interlocutores de Fantappiè. A tradução é feita, obviamente, através de uma leitura interpretativa, de forma que há opções nem tanto estilísticas, pois a intenção é preservar o ritmo do texto, como de significação de termos. A idéia foi empregar palavras que trouxessem ao leitor o conceito de forma mais clara para os dias de hoje. Por exemplo *'intorno'* foi traduzido por *vizinhança*, ainda que o próprio Fantappiè tenha em algum momento feito uma observação a respeito da sinonímia de *'intorno'* e *'vicinanza'* no contexto da obra. O texto tem a singularidade, anunciada pelo próprio Fantappiè, de ser uma re-elaboração e um aprofundamento de textos já produzidos por ele e, ao compará-lo com o seu texto espanhol *'Teoría de los funcinales analíticos y sus aplicaciones'* de 1943[1], o primeiro a tratar de maneira

[1] FANTAPPIÈ, editado em 1943.

significativa o mesmo tema após sua saída do Brasil, percebe-se que ele se situa intermediariamente no desenvolvimento da matéria. Assim, resta concluir que houve desenvolvimento, de acordo com o conceituado no Capítulo 2, matemático/científico significativo em solo brasileiro, por conta da transmissão dos conteúdos abordados no texto de Fantappiè e da interação dos alunos com os mesmos, interação, inclusive, que originou pesquisas mais avançadas por parte destes últimos. Uma curiosidade, apenas: nas considerações iniciais de Fantappiè, no texto espanhol anteriormente citado, que fazem uma resenha histórica do desenvolvimento das pesquisas sobre funcionais analíticos não há qualquer menção aos trabalhos realizados no Brasil, nem mesmo de alguns desdobramentos já realizados, por exemplo, por Omar Catunda[2], ainda que apresentem as linhas de investigações desenvolvidas na Itália, na França e na Alemanha.

Por outro lado, e o que é de extrema relevância, a leitura do caderno de anotações do Prof. Cândido Lima da Silva Dias não deve ser tratada apenas como o contato com o passado ou como idolatria de uma peça de museu, ao contrário, deve ser entendida como uma grande motivação para a interação com temas matemáticos, portanto e mais do que nunca a temporalidade ganha uma nova dimensão e a interação do leitor com um texto histórico acaba por *presentificar*, dar vida à matemática, que desta forma o coloca já no futuro, com uma visão renovada acerca das *coisas* da própria matemática.

As notas de rodapé que aparecem nesta tradução, diferentemente das demais notas que aparecem em todo esse trabalho, são de dois tipos: as do tradutor e as do autor, que serão representadas por NT e NA, respectivamente, seguidas de numeração crescente e natural a partir de 1.

[2] CATUNDA, 1937, 1939 e 1942, tirado de LEVY, p. 474.

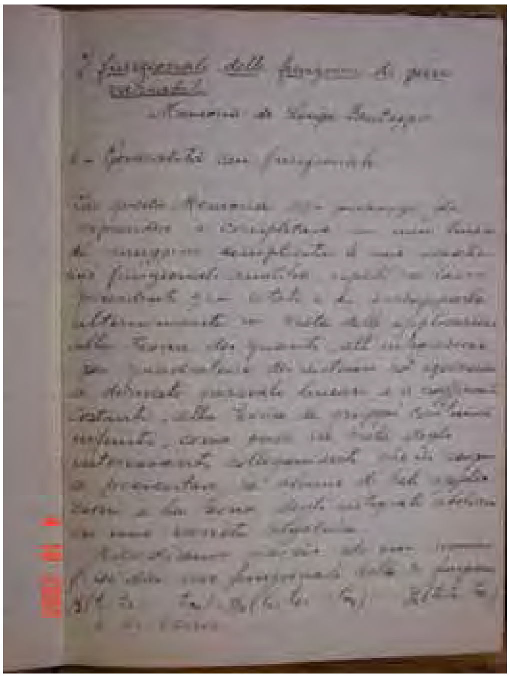
Por fim, a tradução está acompanhada das fotos tiradas do texto original. Estas fotos foram feitas numa segunda visita à Biblioteca “Prof. Achille Bassi” (ICMC-SC/USP), feita no dia 4 de outubro de 2002, com uma câmera digital SONY DSC-P71, com a iluminação ambiente da própria biblioteca e sem utilização de iluminação forçada por *flash*. As duas primeiras fotos, logo a seguir, são da capa superior do caderno – brochura com capa dura – de anotações do Prof. Cândido Lima da Silva Dias, no qual está copiado o texto das *Memórias de Luigi Fantappiè*, e do verso desta capa superior, onde aparece o selo da loja em que o caderno fora comprado. Na seqüência de tudo isso, aparece a tradução da obra propriamente dita. Para cada página fotografada haverá, de forma associada na tradução, a sua última palavra ou último símbolo acompanhado, dentro de parêntesis, de FT seguido de numeração crescente e natural a partir de 1.

Funcionais de Funções de Várias Variáveis

Memória de Luigi Fantappiè

1. Generalidade sobre funcionais

Nessa memória me proponho a retomar e complementar numa linha de maior simplicidade a minha pesquisa sobre funcionais analíticos, [NT1] exposta num trabalho anterior já citado, e a desenvolvê-la posteriormente em vista das aplicações à teoria ‘dos quanta’, à integração pela quadratura de sistemas e equações a derivadas parciais lineares com coeficientes constantes, à teoria dos grupos contínuos infinitos, como também em vista de interessantes ligações que venham se apresentar a partir de alguma de tais aplicações e da teoria de integrais abelianas sobre uma variedade algébrica.

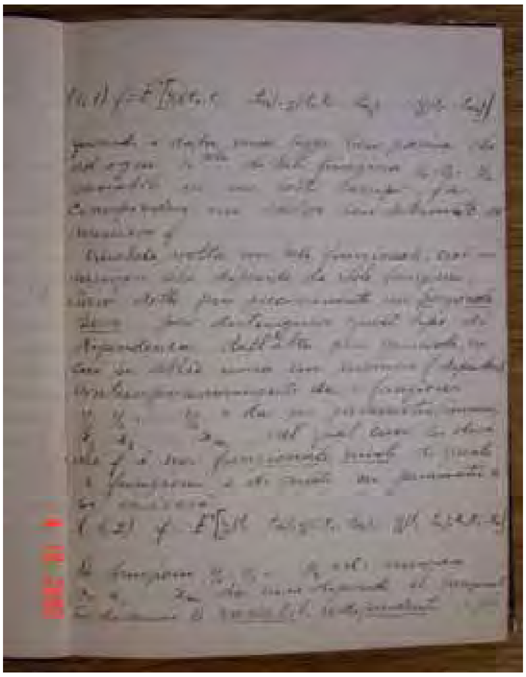


Recordemos, antes, que um número f se diz um funcional de r funções $y_1(t_1,t_2,\ldots,t_{n_1}), y_2(t_1,t_2,\ldots,t_{n_2}),\ldots, y_r(t_1,t_2,\ldots,t_{n_r})$ e se escreve (FT1)

[NT1] Apesar da intenção declarada por Fantappiè, nem a sua atividade de pesquisa nem mesmo esse texto é citado na resenha histórica feita no Item 3 (*‘Diversas direções no estudo dos funcionais’*), Capítulo I (*‘Considerações Prévias*) da Primeira Parte (*‘Teoria dos Funcionais Analíticos’*) do texto espanhol *‘Teoria dos funcionais analíticos e suas aplicações’*, de 1943, já citado.

$$(1,1) \qquad f = F[y_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}), y_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n_2}), \ldots, y_r(t_1, t_2, \ldots, t_{n_r})]$$

quando é dada uma lei bem precisa que a cada $r^{\underline{upla}}$ das tais funções $y_1, y_2, \ldots, y_r$, variáveis num certo campo[NT2], faz corresponder um valor bem determinado do número f.

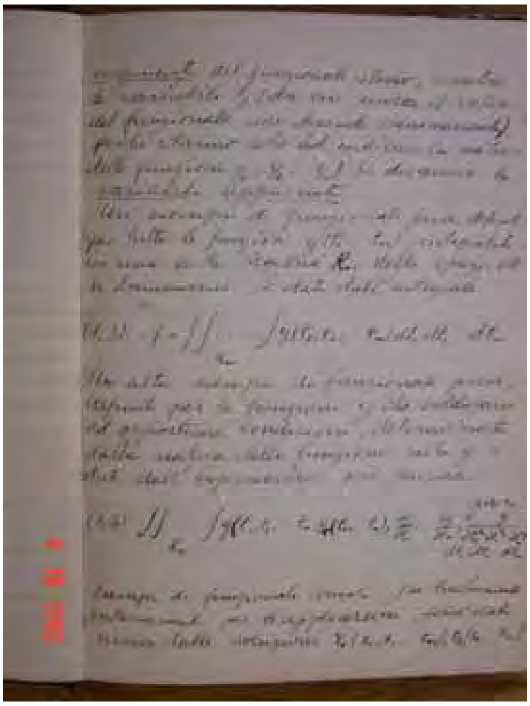


Algumas vezes um tal funcional, isto é, um número que depende das próprias funções, será chamado mais precisamente de funcional puro, para distinguir esse tipo de dependência de outro mais geral que, ao contrário, associa um número f dependente ao mesmo tempo das r funções $y_1, y_2, \ldots, y_r$ e de m parâmetros (números) $x_1, x_2, \ldots, x_m$, no qual f será chamado de um funcional misto dessas r funções e desses m parâmetros e se escreverá

$$(l,2) \qquad f = F[y_1(t_1, t_2, \ldots, t_{n_1}), y_2(t_1, t_2, \ldots, t_{n_2}), \ldots, y_r(t_1, t_2, \ldots, t_{n_r}); x_1, x_2, \ldots, x_m].$$

[NT2] A palavra campo não deve ser uma boa tradução, melhor seria a palavra conjunto. Inicialmente, a palavra campo foi utilizada por alguns autores para designar a estrutura algébrica de corpo, mas isso pode gerar confusão com a idéia de campo que se tem na Física. Parece prematura também, nesse ponto do texto, a utilização de espaço, uma estrutura topológica.

As funções $y_1, y_2, \ldots, y_r$ e os números $x_1, x_2, \ldots, x_m$ de quem depende o funcional, são chamados de <u>variáveis independentes</u> ou <u>argumentos</u> do próprio (FT2) funcional, ao passo que as variáveis t (das quais, ao contrário, o valor do funcional não depende minimamente, porque estão somente a indicar a natureza das funções $y_1, y_2, \ldots, y_r$) são chamadas de <u>variáveis aparentes</u>.



Um exemplo de funcional puro, definido para todas as funções $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, integrável em uma certa região R_n do espaço n-dimensional, é dado pela integral

$$(l,3) \qquad f = \iint \cdots \int_{R_n} y(t_1, t_2, \ldots, t_n) dt_1 dt_2 \ldots dt_n \,.$$

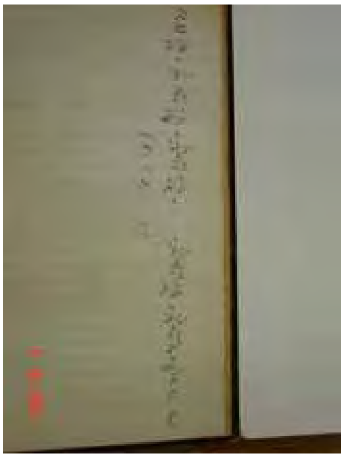
Um outro exemplo de funcional puro, definido para as funções y que satisfazem a oportunas condições[NT3], determinadas pela natureza da função mista g, é dado pela expressão mais geral

$$(l,4) \quad \iint \cdots \int_{R_n} g(t_1, t_2, \ldots, t_n, y(t_1, t_2, \ldots, t_n), \frac{\partial y}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial t_n}, \frac{\partial^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} y}{\partial t_1^{k_1} \partial t_2^{k_2} \cdots \partial t_n^{k_n}}) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \,.$$

[NT3] Condições de integrabilidade.

Exemplos de funcionais mistos, particularmente interessantes por suas aplicações, são dados de outro modo a partir das soluções $z_1(x_0, x_1, \ldots, x_n), z_2(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, (FT3) $\ldots, z_r(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ do sistema[NT4] a derivadas parciais

$$(1,5)\quad \frac{\partial z_l}{\partial x_0} + \sum_{k=1}^{r} a_{lk}^{(1)} \frac{\partial z_k}{\partial x_1} + \sum_{k=1}^{r} a_{lk}^{(2)} \frac{\partial z_k}{\partial x_2} + \cdots + \sum_{k=1}^{r} a_{lk}^{(n)} \frac{\partial z_k}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{r} a_{lk}^{(n+1)} z_k = f_l(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$



com $l = 1,2,\ldots,r$ (FT4) (sendo constantes os coeficientes a_{lk}), que para x = 0 assumem os valores iniciais

$$(l,6)\qquad z_l(0, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi_l(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$(l = 1,2,\ldots,r).$$

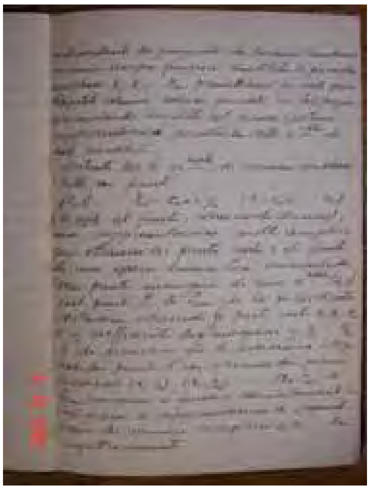
Qualquer uma das r funções z_s assume de fato um valor bem determinado toda vez que são atribuídos os valores dos $n+1$ números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (variáveis da função) e as $2r$ funções f_l e Ψ_l $(l = 1,2,\ldots,r)$; esses valores das soluções z_s de (l,5) e (1,6) são portanto funcionais mistos das $2r$ funções f_l e Ψ_l e dos $n+1$ números $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (variáveis independentes de tais funcionais).

[NT4] Sistema de equações a derivadas parciais.

Capítulo I

Os funcionais analíticos de várias variáveis e a topologia sobre variedade de Segre

2. Representação da $n^{\underline{upla}}$ de variáveis complexas sobre uma variedade de Segre.



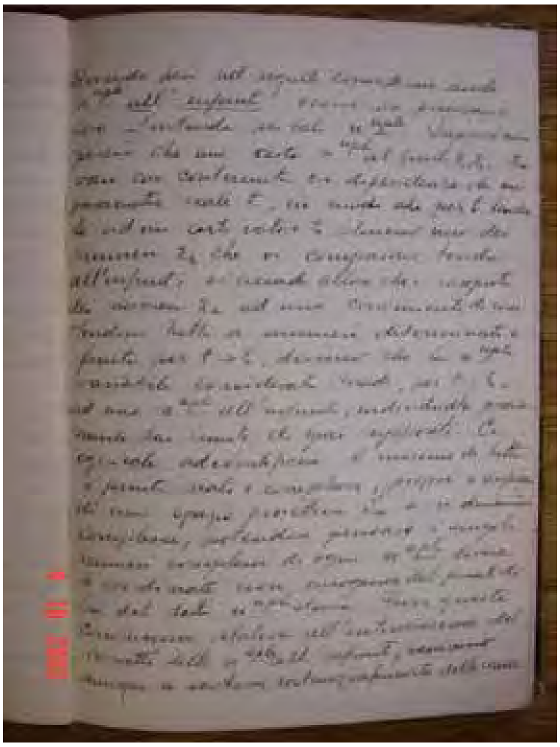
Como, em seguida, as funções das variáveis (FT5) independentes nos funcionais que deveremos considerar serão sempre funções analíticas de várias variáveis complexas $z_1, z_2, \ldots, z_n$, daremos nesse primeiro Capítulo algumas noções gerais sobre tais funções, começando, antes de tudo, com a busca de uma oportuna representação geométrica das $n^{\underline{uplas}}$ de tais variáveis.

Entretanto, para as $n^{\underline{uplas}}$ de números complexos finitos

(2,1) $$z_r = x_r + i \cdot y_r \qquad (r = 1,2,\ldots,n)$$

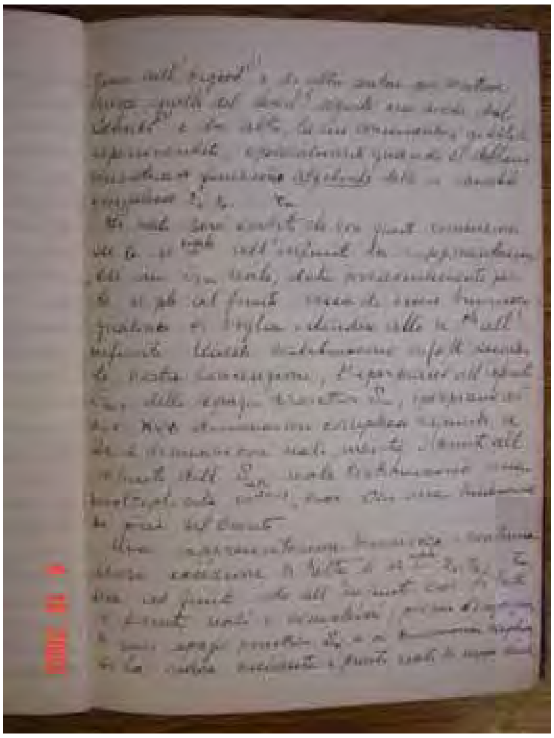
(<u>$n^{\underline{uplas}}$ *finitas*</u>, como também diremos), uma representação muito simples pode ser obtida com pontos reais e finitos de um espaço linear S_{2n}, assumindo como ponto imagem de uma $n^{\underline{upla}}$ (2,1) aquele ponto P de S_{2n} que tem por coordenadas cartesianas ortogonais as suas partes reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e imaginárias $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Observa-se que as projeções ortogonais dos pontos P sobre cada um dos planos coordenados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ de S_{2n} geram ordenadamente sobre tais planos as representações de Argand-Gauss dos números complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$, respectivamente. (FT6)

Devendo, em prosseguimento, considerar também $n^{\underline{uplas}}$ no infinito, é preciso determinar o que se entende por tais $n^{\underline{uplas}}$. Suponhamos, para isso, que uma certa $n^{\underline{upla}}$ no infinito $z_1, z_2, \ldots, z_n$ varia continuamente na dependência de um parâmetro real t, de modo que para t tendendo a um certo valor t_0, pelo menos um dos números z_r que se apresentam tenda ao infinito; e se ocorrer ainda que a relação dos números z_r, associados a convenientes parâmetros t, tenderem todos a números determinados e finitos para $t \to t_0$, então diremos que a $n^{\underline{upla}}$ variável considerada tende, para $t \to t_0$, a uma $n^{\underline{upla}}$ infinita, definida precisamente pelos limites aos quais se referem; isso equivale a identificar o conjunto de todos os pontos reais e complexos, próprios e impróprios de um espaço projetivo complexo S_n a n dimensões complexas, podendo-se pensar e escolher números complexos de qualquer $n^{\underline{upla}}$ como as coordenadas não homogêneas de um ponto de S_n dado a partir da própria $n^{\underline{upla}}$[NT5]. Com essas convenções relativas à introdução do conceito de $n^{\underline{upla}}$ infinita, vamos, portanto, nos afastar substancialmente das convenções (FT7) de Esgood[1] e de outros autores para



[NT5] O texto parece se tornar um tanto repetitivo, o que deve ser um esforço do autor em tornar-se compreendido claramente.

aceitar de outro modo as de Severi[3], seguindo ora também as de Behnke[3] e de outros, cuja conveniência já está verificada, especialmente quando devemos considerar também funções algébricas de n variáveis complexas $z_1, z_2, \ldots, z_n$[NT6].

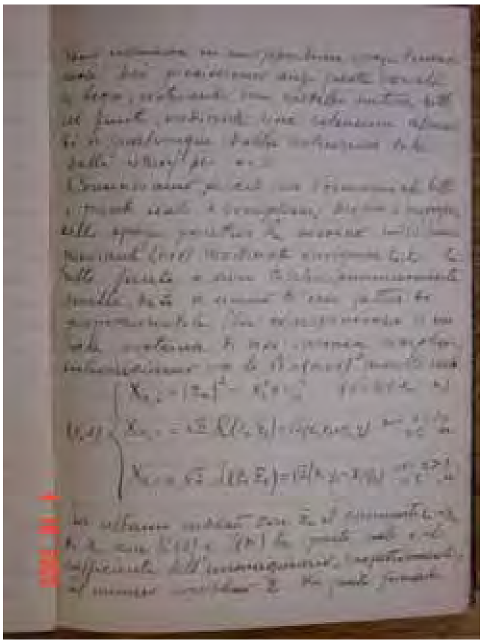


Logo, vê-se que com esta convenção a respeito de $n^{\underline{upla}}$ infinita, a representação sobre um S_{2n} real, dada anteriormente pela $n^{\underline{upla}}$ finita, deixa de ser biunívoca caso se queira estendê-la a uma $n^{\underline{upla}}$ infinita. Este constitui de fato, segundo as nossas convenções, o hiperplano infinito S_{n-1} do espaço projetivo S_n, hiperplano de $n-1$ dimensões complexas equivalentes a $2n-2$ dimensões reais, enquanto os pontos no infinito de S_{2n} real, constituem uma multiplicidade ∞^{2n-1}, isto é, com uma dimensão a mais do que o devido.

Uma representação biunívoca e contínua, sem exceção, de toda $n^{\underline{upla}}$ $z_1, z_2, \ldots, z_n$, seja finita ou infinita, isto é, se todos os pontos reais e complexos, próprios e impróprios de um espaço projetivo S_n a n dimensões complexas, existe, ao contrário, através dos pontos reais de uma variedade (FT8) V_{2n} imersa em um

[NT6] Cândido Lima da Silva Dias faz menção a notas explicativas ao citar os nomes de Esgood, Severi e Behnke, porém elas não aparecem no texto.

apropriado espaço linear real, determinaremos, assim, esta variedade como de Segre, construindo um modelo métrico, todo finito, mediante uma extensão ao caso de n qualquer, a partir da construção de Study(1) para $n = 2$.



Começamos, assim, por observar que todos os pontos reais e complexos, próprios e impróprios, do espaço projetivo S_n podem individualizar-se mediante $(n+1)$ coordenadas homogêneas $z_0, z_1, \ldots, z_n$, todas finitas e nem todas nulas, dadas a menos de um fator de proporcionalidade.

Em correspondência a um tal sistema de $n+1$ números complexos, introduzimos agora $N = (n+1)^2$ quantidades reais

$$(2,2) \qquad \begin{cases} X_{r,r} = |z_r|^2 = x_r^{\;2} + y_r^{\;2} & (r = 0,1,2,\ldots,n) \\ X_{r,s} = \sqrt{2}\Re(z_r \overline{z_s}) = \sqrt{2}(x_r x_s + y_r y_s) & \text{para } r < s = 0,1,\ldots,n \\ X_{r,s} = \sqrt{2}\Im(z_s \overline{z_r}) = \sqrt{2}(x_r x_s - y_r y_s) & \text{para } r > s = 0,1,\ldots,n \end{cases}$$

nas quais indicamos com $\overline{z_r}$ o conjugado $x_r - iy_r$ de z_r, com $\Re(z)$ e $\Im(z)$ a parte real e o coeficiente imaginário[NT7], respectivamente, do número complexo z. Destas fórmulas (FT9) seguem-se, imediatamente, as relações:

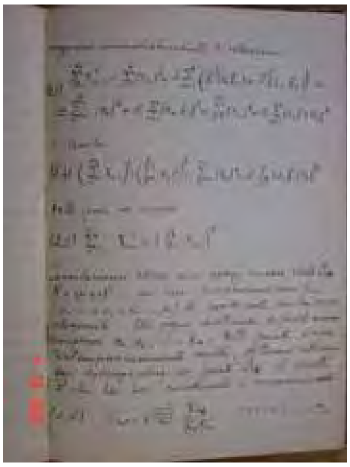
[NT7] Veja o cuidado para não construir repetições como ‘a parte real e a parte imaginária’.

$$(2,3)\qquad \sum_0^n{}_{r,s} X_{r,s}^{\ 2} = \sum_0^n{}_r |z_r|^4 + 2\sum_{r<s}(\Re^2(z_r\overline{z_s}) + \Im^2(z_r\overline{z_s})) =$$

$$= \sum_0^n{}_r |z_r|^4 + 2\sum_{r<s}\left|z_r\overline{z_s}\right|^2 = \sum_0^n{}_r |z_r|^4 + 2\sum_{r<s}|z_r|^2|z_s|^2$$

e também:

$$(2,4)\qquad \left(\sum_0^n{}_r X_{r,r}\right)^2 = \left(\sum_0^n{}_r |z_r|^2\right)^2 = \sum_0^n{}_r |z_r|^4 + 2\sum_{r<s}|z_r|^2|z_s|^2$$



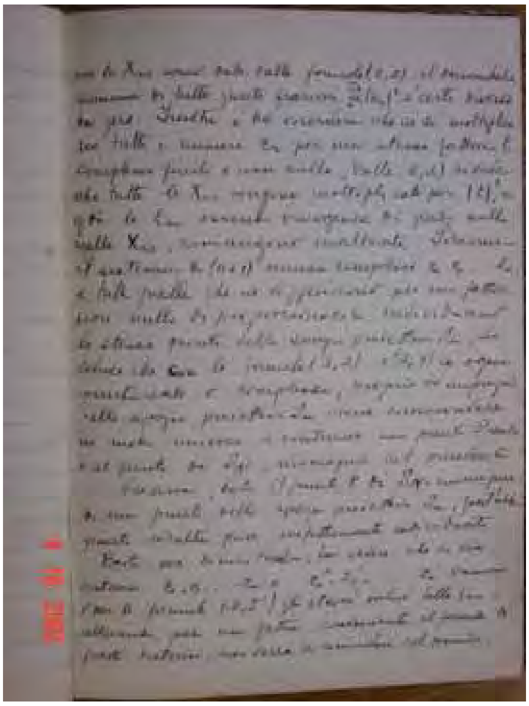
das quais deduz-se:

$$(2,5)\qquad \sum_0^n{}_{r,s} X_{r,s}^{\ 2} = \left(\sum_0^n{}_r X_{r,r}\right)^2$$

Consideremos, agora, um espaço linear real S_N, $N=(n+1)^2$, no qual indicamos com ξ_{rs} $(r,s=0,1,2\ldots,n)$ as coordenadas cartesianas ortogonais. Para qualquer sistema de $n+1$ números complexos $z_0, z_1, \ldots, z_n$, todos finitos e não contemporaneamente nulos, podemos, agora fazer corresponder neste S_N o ponto P que tem por coordenadas os números reais

$$(2,\mathrm{I})\qquad \xi_{rs} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{X_{rs}}{\sum_0^n X_{rr}} \qquad (r,s=0,1,\ldots,n)\ \ (\mathrm{FT10})$$

em que X_{rs} são dados pelas fórmulas (2,2) e o denominador comum de todas estas frações é seguramente diferente de zero. Além disso, observa-se que se multiplicarem



todos os números z_r por um mesmo fator t complexo finito e não nulo, em (2,2) observa-se que todos os X_{rs} ficam multiplicados por $|t|^2$ e, por isso, os ξ_{rs} são homogêneos de grau nulo em X_{rs}, permanecendo inalterados. Como o sistema dos $n+1$ números complexos $z_0, z_1, \ldots, z_n$ e todos aqueles que não se diferenciam por um fator não nulo, de proporcionalidade determinada, o mesmo ponto do espaço projetivo S_n, deduz-se que com as fórmulas (2,2) e (2,1), a cada ponto real ou complexo, próprio ou impróprio no espaço projetivo S_n corresponderá de modo unívoco e contínuo um ponto P real e finito de S_N, imagem do precedente.

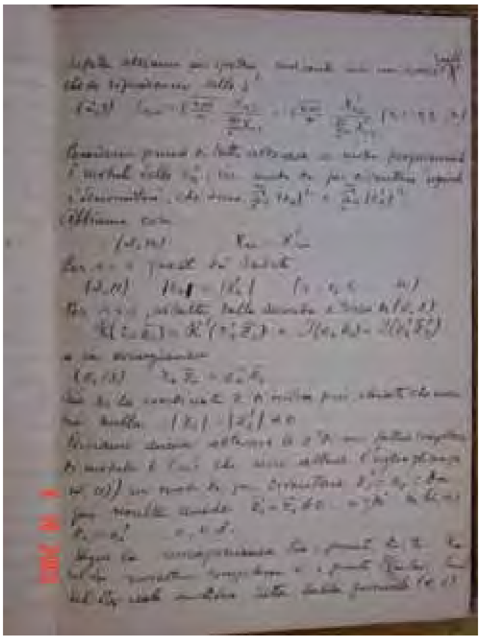
Vice-versa, dado o ponto P de S_N, imagem de um ponto do espaço projetivo S_n, este último resultará também perfeitamente individual[NT8]. Basta para demonstrar, ver-se que se dois sistemas $z_0, z_1, \ldots, z_n$ e $z'_0, z'_1, \ldots, z'_n$, dão (pelas fórmulas (2,I)), os mesmos valores de ξ_{rs}, alterando-se para um fator conveniente o segundo destes sistemas, ele virá a coincidir com o primeiro. (FT11)

[NT8] Talvez, melhor fosse ‘resultará também único’.

De fato, tomemos por hipótese, indicando com um apóstrofo nos X que se referem aos z'

$$(2,9)^{\text{NT9}} \qquad \xi_{rs} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{X_{rs}}{\sum_0^n X_{rr}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\,\frac{X'_{rs}}{\sum_0^n X'_{rr}} \qquad (r,s = 0,1,\ldots,n)$$

Podemos, antes de tudo, alterar de modo proporcional os módulos dos z'_r, de modo a fazerem-se iguais os denominadores, que são $\sum_0^n {}_r |z_r|^2$ e $\sum_0^n {}_r |z'_r|^2$. Temos assim,



$$(2,10) \qquad X_{rs} = X'_{rs}.$$

Para $r = s$ isto dá

$$(2,11) \qquad |z_r| = |z'_r| \qquad (r = 0,1,\ldots,n).$$

Para $r < s$, resulta, da segunda e terceira de

$$(2,2) \qquad \Re\left(z_r \overline{z_s}\right) = \Re'\left(z'_r \overline{z_s}\right)$$

e $\Im\left(z_r \overline{z_s}\right) = \Im\left(z'_r \overline{z'_s}\right)$ e, em conseqüência,

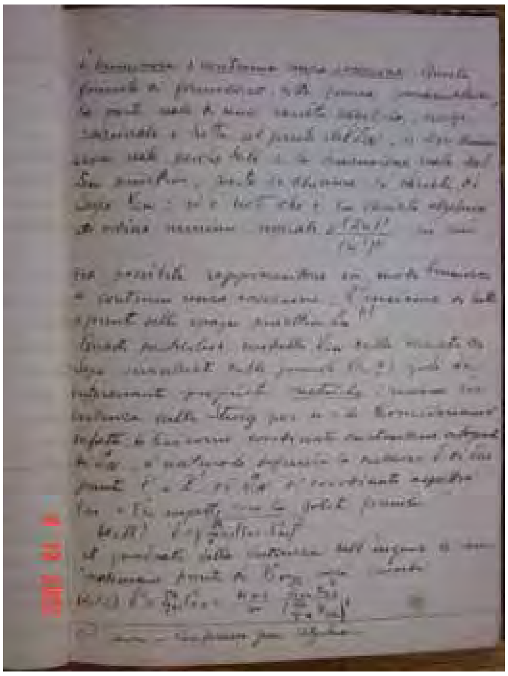
$$(2,12) \qquad z_r \overline{z_s} = z'_r \overline{z_s}.$$

Seja z_0 a coordenada z de índice mais elevado que não seja nula: $|z_s| = |z'_s| \neq 0$.

Podemos ainda alterar z' de um fator complexo de módulo 1 (isto não altera a igualdade (2,11)) de modo a tornar-se $z'_s = z_s$; da qual resulta também $\overline{z'_s} = \overline{z_s} = 0$. E, portanto, de (2,12) $z_r = z'_r$, c.q.d.

NT9 Há aqui uma descontinuidade da numeração das fórmulas.

Portanto, a correspondência entre os pontos $z_0, z_1, \ldots, z_n$ do S_n projetivo complexo e os pontos $P(\xi_{00}, \xi_{01}, \ldots, \xi_{nn})$ do S_N real euclidiano dados pela fórmula (2,I) (FT12) é biunívoca e contínua, sem exceção. Estas fórmulas são obtidas, sob forma paramétrica, da parte real de uma variedade algébrica, antes sazonal e toda finita de S_N, em $2n$ dimensões reais, porque tal é a dimensão real da S_n projetiva; esta se chama a Variedade de Segre V_{2n}: e é de se notar que é a variedade algébrica de ordem mínima igual a $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ sobre a qual seja possível representar de modo biunívoco e contínuo, sem exceção, o conjunto de todos os pontos no espaço projetivo S_n [NA1].



Este modelo particular V_{2n} da Variedade de Segre, <u>definida</u> a partir da fórmula (2,I), goza de interessantes propriedades <u>métricas</u>, como na evidência de Study para $n = 2$ [NT9]. De fato, considerando ξ_{rs} as coordenadas cartesianas ortogonais de S_N, é natural definir a distância δ entre dois pontos P e P' de S_N de coordenadas ξ_{rs} e ξ'_{rs}, respectivamente, de acordo com a fórmula

(2,II) $$\delta = \sqrt{\sum_{0}^{n}{}_{rs}\left(\xi_{rs} - \xi'_{rs}\right)^2}$$

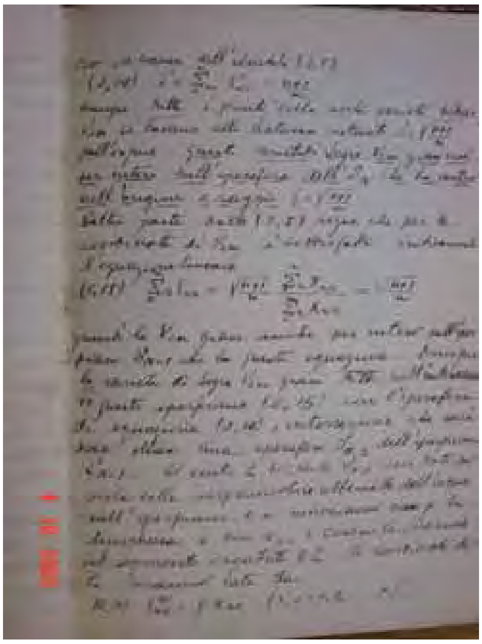
[NA1] Severi – Conferência Geom. Algébrica.
[NT9] Parece o melhor para *‘..., messe in evidenza dallo Study per n=2’*.

e o quadrado da distância de um ponto qualquer à origem de V_{2n} como

$$\delta^2 = \sum_0^n {}_{rs}\xi_{rs}^2 = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sum_0^n {}_{rs}X_{rs}^2}{\left(\sum_0^n {}_{rs}X_{rs}\right)^2}, \text{ (FT13)} \tag{2,13}$$

que, em conseqüência da identidade (2,5)

$$\delta^2 = \sum_0^n {}_{rs}\xi_{rs}^2 = \frac{n+1}{n} \tag{2,14}$$



Portanto, todos os pontos da nossa variedade de Segre V_{2n} se encontram a uma distância constante $\delta = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ da origem: estas variedades de Segre V_{2n} permanecem, então, por inteiro sobre a hiper-esfera da S_N que tem centro na origem e raio $\delta = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$.

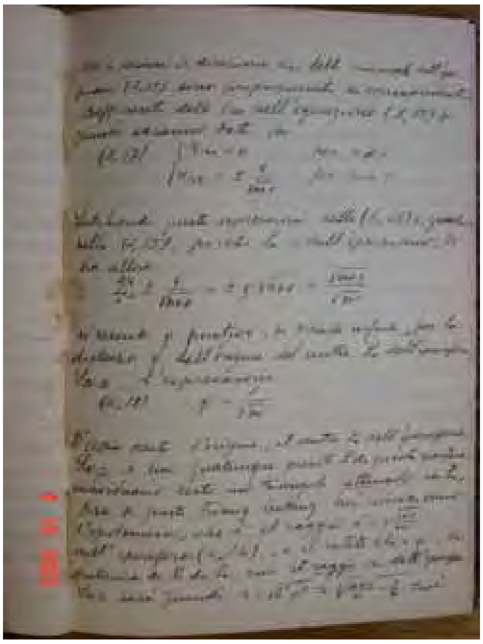
Por outro lado, de (2,I) segue-se que para a coordenada de V_{2n} é satisfeita identicamente a equação linear

$$\sum_0^n {}_r\xi_{rr} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \cdot \frac{\sum_0^n {}_rX_{rr}}{\sum_0^n {}_rX_{rr}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} \tag{2,15}$$

Assim, a V_{2n} permanece também por inteiro sobre o hiperplano S_{N-1} que tem esta equação. Portanto a variedade de Segre V_{2n}, permanece toda sobre a intersecção deste hiperplano (2,15) com a hiper-esfera da equação (2,14), intersecção esta que é ela mesma uma hiper-esfera S_{N-2} do hiperplano S_{N-1}. O centro P_0 desta S_{N-2} é dado pelo pé da perpendicular baixada da origem sobre o hiperplano, indicamos com ρ o comprimento e com α_{rs} os co-senos da direção do seguimento orientado OP_0, as coordenadas de P_0 serão dadas por:

(2,16) $$\xi_{rs}^{(0)} = \rho\alpha_{rs} \qquad (r, s = 0,1,\ldots,n)$$.(FT14)

Mas os co-senos das direções α_{rs} dos hiperplanos normais (2,15) são proporcionais aos correspondentes coeficientes das ξ_{rs} na equação (2,15) e, portanto, serão dados por



(2,17) $$\begin{cases} \alpha_{rs} = 0 & \text{para } r \neq s \\ \alpha_{rr} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} & \text{para } r = s \end{cases}$$

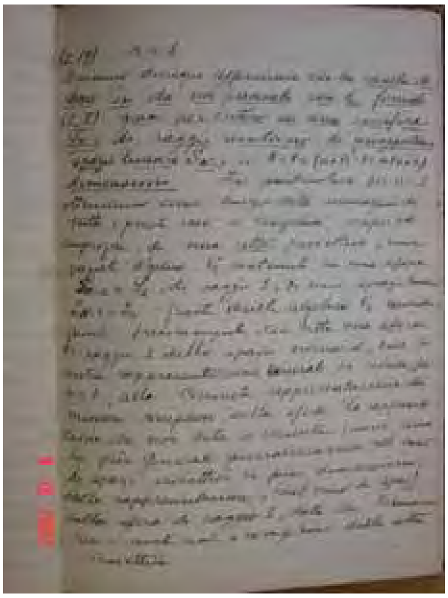
Substituindo-se estas expressões em (2,16) e esta em (2,15), e já que P_0 está no hiperplano, tem-se agora

$$\sum_0^n {}_r \pm \frac{\rho}{\sqrt{n+1}} = \pm\rho\sqrt{n+1} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

E sendo ρ positivo, deduz-se enfim, para a distância ρ da origem ao centro P_0 da hiper-esfera S_{N-2}, a expressão

(2,18) $$\rho = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Por outro lado, a origem, o centro P_0 da hiper-esfera S_{N-2} e um ponto



qualquer P desta hiper-esfera caracterizam, com certeza, um triângulo retângulo em P_0. Ora, deste triângulo retângulo conhecemos a hipotenusa, que é o raio $\delta = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ da hiper-esfera (2,14), o cateto $OP_0 = \rho$, e a distância de P a P_0, que é o raio da hiper-esfera S_{N-2}, sendo, assim, $r = \sqrt{\delta^2 - \rho^2} = \sqrt{\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n}}$, isto é, (FT15) (2,19) $r = 1$. Podemos, portanto, afirmar que a variedade de Segre V_{2n}, então determinada pela fórmula (2,I), permanece por inteiro sobre uma hiper-esfera S_{N-2} de raio unitário, num apropriado espaço linear S_{N-1} a $N-1 = (n+1)^2 - 1 = n(n+2)$ dimensões. Em particular para $n = 1$, obtemos como espaço das imagens todos os pontos reais ou complexos, próprios ou impróprios de uma reta projetiva, uma variedade algébrica V_2 contida numa esfera $S_{N-2} = S_2$, de raio 1, de um espaço linear $S_{N-1} = S_3$. Esta variedade algébrica V_2 coincidirá, portanto, precisamente, com toda uma esfera de raio 1 do espaço ordinário, isto é, a nossa representação geral se reduz, para $n = 1$, à conhecida representação dos números complexos sobre a esfera. A representação por nós dada se apresenta, portanto, como a mais geral generalização dos espaços projetivos para muitas dimensões da representação, (no caso de Spaz) sobre a esfera de raio 1, dada por Riemann para os pontos reais e complexos da reta projetiva. (FT16)

3. Distância e vizinhança de $n^{\underline{uplas}}$.

Para as aplicações que deveremos fazer em seguida sobre a teoria das funções analíticas de várias variáveis, convém, agora, introduzir duas definições diferentes para a distância entre duas $n^{\underline{uplas}}$ de números complexos, a saber:

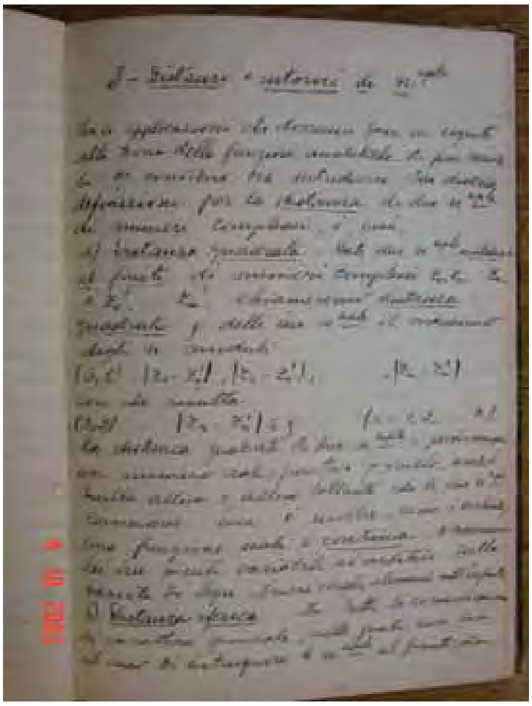
a) Distância quadrada: Dadas duas $n^{\underline{uplas}}$, ambas finitas, de números complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$, chamaremos distância quadrada ρ entre as duas $n^{\underline{uplas}}$ o máximo dos n módulos

(3,1) $\quad |z_1 - z'_1|, |z_2 - z'_2|, \ldots |z_n - z'_n|,$

de onde resulta

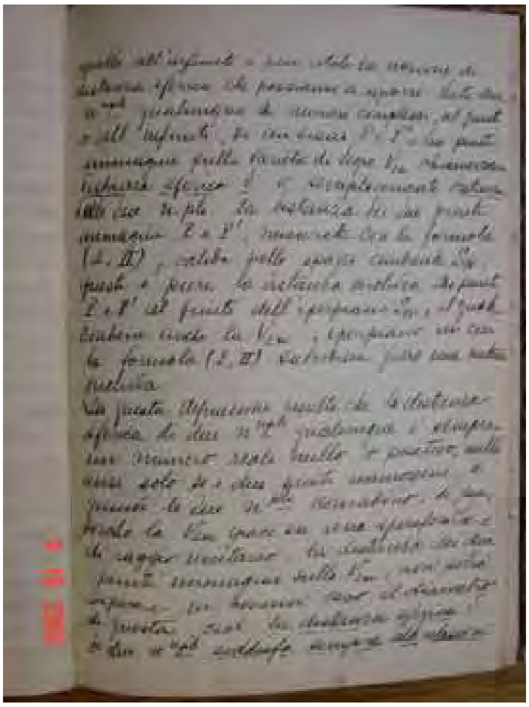
(3,2) $\quad |z_r - z'_r| \leq \rho$

$(r = 1, 2 \ldots, n)$.



A distância quadrada entre as duas $n^{\underline{uplas}}$ é, portanto, sempre um número real, positivo ou nulo, e neste último caso, se e somente se as duas $n^{\underline{uplas}}$ forem iguais. Essa é, além disso, como é evidente, uma função real e contínua, para quaisquer dois pontos arbitrários na variedade de Segre, a menos dos elementos infinitos.

b) Distância esférica: Em todas as considerações de caráter geral, nas quais não seja o caso de distinguir as $n^{\underline{uplas}}$ finitas das (FT17) infinitas, é mais útil a noção de distância esférica que passaremos a expor. Dadas duas $n^{\underline{uplas}}$ quaisquer de números complexos, finitos ou infinitos, dos quais *P* e *P'* são os pontos correspondentes sobre a Variedade de Segre V_{2n}, chamaremos distância esférica δ ou simplesmente distância das duas $n^{\underline{uplas}}$ a distância entre os dois pontos correspondentes *P* e *P'*, medida com a fórmula (2,II), válida no espaço ambiente S_N; esta é, também, a distância entre os pontos *P* e *P'* finitos do hiperplano S_{N-1}, o qual contém também V_{2n}; hiperplano no qual a fórmula (2,II) subordina também uma métrica euclidiana.

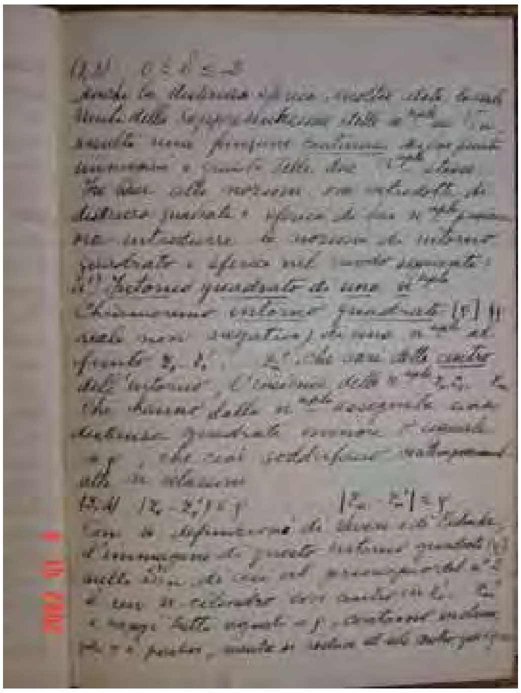


Desta definição resulta que a distância esférica entre duas $n^{\underline{uplas}}$ quaisquer é sempre um número real nulo ou positivo, nulo se e somente se os dois pontos imagem coincidem e, o que é o mesmo, as duas $n^{\underline{uplas}}$ são iguais. Além disso, dado que a V_{2n} permanece sobre uma hiper-esfera S_{N-2} de raio unitário, a distância entre dois pontos imagem sobre V_{2n}, não poderá superar em nenhum caso o diâmetro desta, ou seja, a distância esférica δ entre duas $n^{\underline{uplas}}$ satisfaz sempre às relações (FT18)

(3,3) $$0 < \delta < 2 .$$

Também a distância esférica, além do mais, dada a continuidade da representação da $n^{\underline{upla}}$ sobre V_{2n}, resulta uma função contínua dos dois pontos imagem e, portanto, das duas $n^{\underline{uplas}}$ correspondentes.

Em função das noções então introduzidas de distância quadrada e distância esférica, poderemos agora introduzir as noções de vizinhança quadrada e vizinhança esférica da seguinte forma:



a') <u>Vizinhança quadrada de uma $n^{\underline{upla}}$</u>. Chamaremos de <u>vizinhança quadrada</u> $[\rho]$ (ρ real não negativo) de uma $n^{\underline{upla}}$ finita $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$, que será o centro da vizinhança, o conjunto das $n^{\underline{uplas}}$ $z_1, z_2, \ldots, z_n$ que têm da $n^{\underline{upla}}$ dada[NT11] distância quadrada menor ou igual a ρ, ou ainda, que satisfaz contemporaneamente as n relações

(3,4) $$|z_1 - z'_1| \leq \rho, |z_2 - z'_2| \leq \rho, \ldots |z_n - z'_n| \leq \rho .$$

Com as definições de Severi e de Behnke, a imagem desta vizinhança quadrada $[\rho]$ em S_{2n}, do qual o princípio de nº 2 dá um *n*-cilindro com centro em $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$ e raios todos iguais a ρ, inclusive a sua superfície, quando ρ é positivo, enquanto se reduz ao próprio centro quando $\rho = 0$ [NT12]. (FT19)

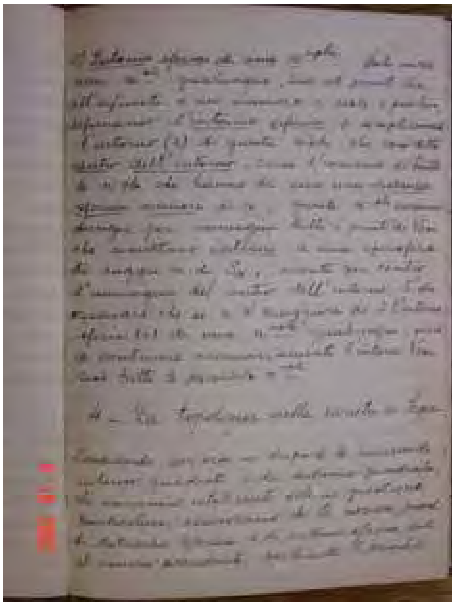
b') <u>Vizinhança esférica de uma $n^{\underline{upla}}$</u>. Dada, ao contrário, uma $n^{\underline{upla}}$ qualquer, seja finita ou infinita e um número *r* real e positivo, definimos a <u>vizinhança esférica</u> ou

---

[NT11] $n^{\underline{upla}}$ dada como centro do conjunto.

[NT12] Ao que tudo indica, o princípio de nº 2 ao qual Fantappiè se refere é parte da lei dicotômica que diz: (1º) os pontos são iguais quando a distância quadrada é zero ou (2º) diferentes quando é maior do que zero.

simplesmente vizinhança (r) desta $n^{\underline{upla}}$, que é o <u>centro</u> <u>da</u> <u>vizinhança</u>, como o conjunto de todas as $n^{\underline{uplas}}$ que têm uma <u>distância</u> <u>esférica</u> <u>menor</u> <u>do</u> <u>que</u> r; estas $n^{\underline{uplas}}$



terão, assim, por imagem todos os pontos de V_{2n} que resultam <u>interiores</u> a uma hiper-esfera de raio r em S_{N-1}, tendo como centro a imagem do centro da vizinhança. É de se observar que se r é maior do que 2, a vizinhança esférica (r) de uma $n^{\underline{upla}}$ qualquer conterá necessariamente V_{2n} inteira, isto é, todas as possíveis $n^{\underline{uplas}}$.

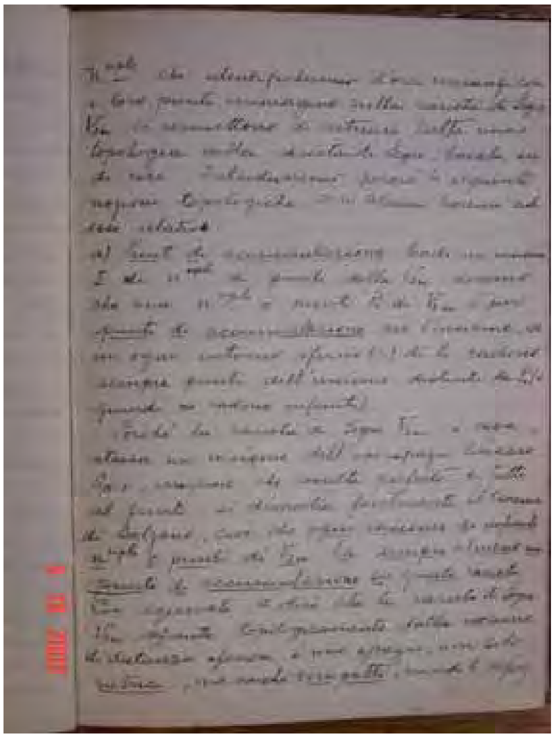
4. A topologia sobre a Variedade de Segre.

Deixando de lado por ora as noções de vizinhança quadrada e de distância quadrada, que serão utilizadas apenas em questões particulares, observamos que as noções gerais de distância esférica e de vizinhança esférica, dadas no número precedente[NT13], para todas as possíveis (FT20) $n^{\underline{uplas}}$ que identificaremos de agora em diante com as suas imagens sobre a variedade de Segre V_{2n}, permite-nos construir toda uma topologia da Variedade de Segre, baseada sobre elas. Introduziremos, portanto, as seguintes noções topológicas com alguns teoremas a elas relativos.

[NT13] Item precedente: “3 – Distância e Vizinhança de $n^{\underline{uplas}}$”.

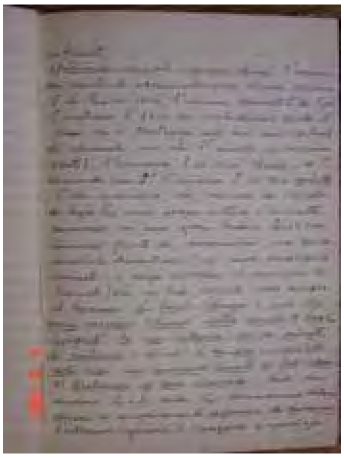
a) Ponto de acumulação: Dado um conjunto *I* de $n^{\underline{uplas}}$ de pontos de V_{2n}, diremos que uma $n^{\underline{upla}}$ ou ponto P_0 de V_{2n} é um ponto de acumulação do conjunto se em toda vizinhança esférica (*r*) de P_0 caem sempre pontos do conjunto distintos de P_0 (e, portanto, caem infinitos).

Dado que a Variedade de Segre V_{2n} é ela mesma um conjunto do hiper-espaço linear S_{N-1}, conjunto que resulta perfeito e todo finito, demonstra-se facilmente o teorema de Bolzano, isto é, que todo conjunto de infinitas $n^{\underline{uplas}}$ ou pontos de V_{2n} tem sempre ao menos um ponto de acumulação sobre esta Variedade. Isto equivale a dizer que a Variedade de Segre V_{2n}, definida topologicamente pelas noções de distância esférica, é um espaço não somente métrico, mas também compacto, segundo as definições (FT21) de Fréchet.

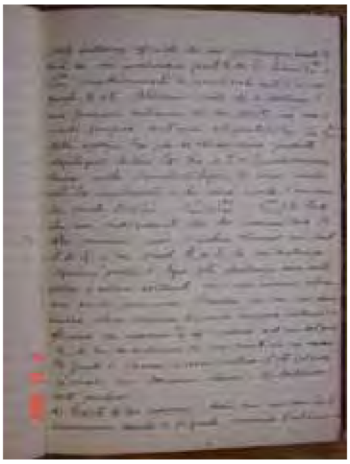


b) Conjunto derivado, conjunto fechado. Ao conjunto dos pontos de acumulação de um conjunto *I* de V_{2n} dir-se-á conjunto derivado *I’* de *I*; se *I* contiver *I’* (incluímos também o caso em que *I* contém apenas um número finito de elementos, com o que *I’* resulta um conjunto vazio), o conjunto *I* será fechado; se *I* coincide com *I’*, o conjunto *I* será perfeito.

Observar-se que, sendo a Variedade de Segre V_{2n} um espaço métrico e compacto, imerso em um espaço linear S_{N-1} a um número finito de dimensões, será também possível demonstrar (de modo análogo ao habitual; e sem invocar o princípio de Zermelo) que, sob tal variedade, vale sempre o teorema de Borel-Lebesgue, ou seja, que cada conjunto fechado da variedade de Segre V_{2n} coberto por um sistema, mesmo infinito, de vizinhanças (esféricas), é sempre passível de ser coberto apenas por um número finito das tais vizinhanças.

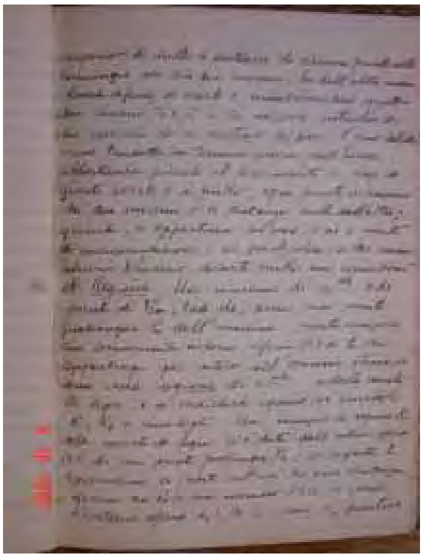


c) Distância entre dois conjuntos. Dados dois conjuntos I_1 e I_2 em V_{2n}, chamaremos distância esférica ou simplesmente distância entre dois conjuntos o extremo inferior δ (maior ou igual a zero) (FT22) da distância esférica de um ponto qualquer P_1 de I_1 a um ponto qualquer P_2 de I_2. São $\xi_{rs}^{(1)}$ e $\xi_{rs}^{(2)}$, respectivamente, as coordenadas em S_N dos pontos P_1 e P_2. Vimos que a distância é uma função contínua dos dois pontos; mas ela é também função contínua do ponto $P \equiv (\xi_{00}^{(1)}, \ldots, \xi_{nn}^{(1)}, \ldots, \xi_{nn}^{(2)})$ do espaço S_{2N}, que se obtém como produto topológico de dois S_N. Ora, se I_1 e I_2 são conjuntos fechados na variedade de Segre, o são também em S_N ambiente e o será também o conjunto dos pontos $P \equiv (\xi_{00}^{(1)}, \ldots, \xi_{nn}^{(1)}, \xi_{00}^{(2)}, \ldots, \xi_{nn}^{(2)})$ de S_{2N} a partir de suas características; dos dois conjuntos existirá, portanto, um número, isto é, existirá ao menos um ponto P_1 de I_1



e um ponto P_2 de I_2, cuja distância esférica será o próprio δ. E que esta distância será nula se e somente se os dois conjuntos possuírem um ponto comum. Resulta, pois, que dois conjuntos fechados sem elementos comuns, terão sempre distância $\delta > 0$; se um dos conjuntos I_2 se reduzir a um só ponto P_2, se existe a distância de um ponto a um conjunto, se este é fechado e não contém o ponto (o qual é também um conjunto fechado), então, a distância é, com certeza, positiva.

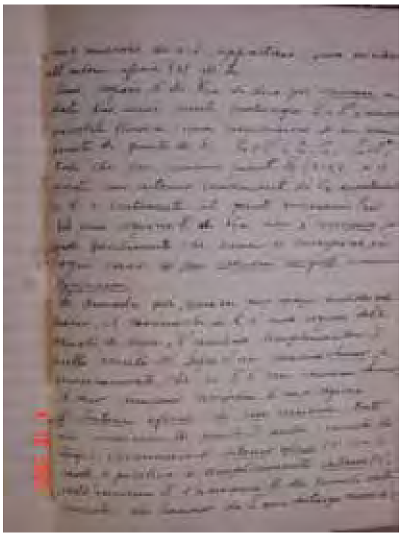
d) Diferença entre dois conjuntos. Dados dois conjuntos I_1 e I_2, chamaremos diferença *s* entre estes conjuntos o extremo (FT23) superior de todas as distâncias entre os pontos de um dos conjuntos em relação ao outro conjunto. Esta definição de diferença, que é evidentemente simétrica em relação aos dois conjuntos I_1 e I_2 e condizente com a noção intuitiva dos dois conjuntos que se separam um pouco um do outro, vem traduzir em termos precisos a menor diferença *s* que se possa observar entre ambos. Desta forma, se esta diferença *s* é nula, cada ponto de quaisquer um dos dois conjuntos tem distância nula do outro e, por isso, ou pertence ao outro, ou é seu ponto de acumulação; em particular, se dois conjuntos fechados têm diferença nula, eles coincidem.



e) Região. Um conjunto de n^{uplas} ou de pontos de V_{2n}, tal que, dado um ponto qualquer P_0 do conjunto, exista sempre uma conveniente vizinhança esférica (*r*) de P_0 que separe por inteiro o próprio conjunto, será uma região de n^{uplas} ou da

Variedade de Segre, e será indicada freqüentemente com os símbolos R, R_1 ou análogo. Um exemplo de região *R* da Variedade de Segre é dado pela vizinhança esférica (*r*) de um ponto qualquer P_0: se, de fato, P_0 separa esta vizinhança, a sua distância esférica a partir de P_0 é um número $\delta < r$ e, por isso, a vizinhança esférica r_1 de P_1, com r_1 positivo (FT24) mas menor do que $r - \delta$, separa por inteiro a vizinhança esférica (*r*) de P_0.

Uma região *R* de V_{2n}, será <u>conexa</u> se, dados dois quaisquer de seus pontos *P*' e *P*'', é sempre possível encontrar uma sucessão finita de pontos de *R*, $P_0 = P'$, P_1, $P_2, \ldots, P_n = P''$, tais que para cada um dos pontos P_k $(k = 0,1,\ldots, n-1)$ exista uma vizinhança conveniente de P_k separando *R* e contendo o ponto sucessivo P_{k+1}.

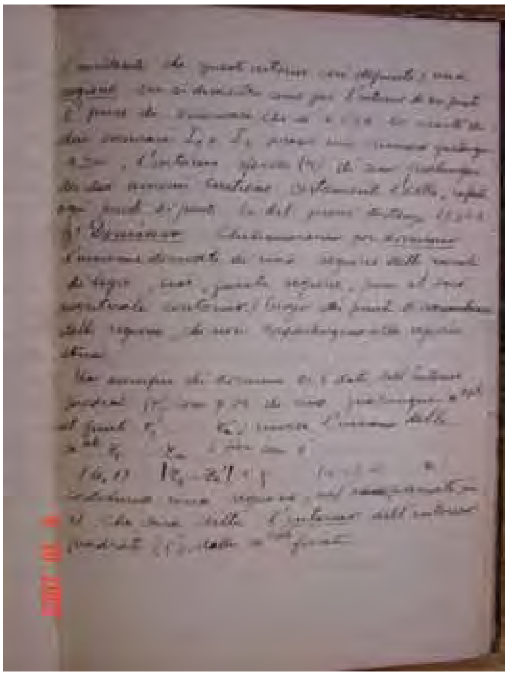


Se uma região *R* de V_{2n} <u>não</u> <u>é</u> <u>conexa</u>, vê-se facilmente que ela é composta, em cada caso, <u>de</u> <u>várias</u> <u>regiões</u> <u>parciais</u>, cada uma delas <u>conexa</u>.

Demonstra-se, pois, como em um espaço euclidiano ordinário, o teorema que se *R* é uma região da Variedade de Segre, o conjunto complementar *I* sobre a Variedade de Segre, é um conjunto <u>fechado</u>, e, inversamente, que se *I* é um conjunto fechado, o seu conjunto complementar é uma região.

f) <u>Vizinhança</u> <u>esférica</u> <u>de</u> <u>um</u> <u>conjunto</u>. Dado um conjunto de pontos *I* na Variedade de Segre, chamaremos <u>vizinhança</u> <u>esférica</u> (*r*) com *r* real e positivo ou simplesmente vizinhança (r) do conjunto I o conjunto R dos pontos da variedade que têm de I uma distância menor do de r. (FT25)

É evidente que esta vizinhança assim definida é uma região, o que se demonstra como para a vizinhança de um ponto[NT14]. Observa-se, também, que se



$s > 0$ for a diferença entre dois conjuntos I_1 e I_2, tomando um número qualquer $r > s$, a vizinhança esférica (r) de qualquer um dos dois conjuntos contém certamente o outro; de fato, cada ponto deste tem do primeiro distâncias $\delta \leq s < r$.

g) Domínio. Chamaremos por domínio o conjunto derivado de uma região da variedade de Segre, isto é, esta região mais a sua eventual vizinhança (local dos pontos de acumulação da região, que não se separam da própria região).

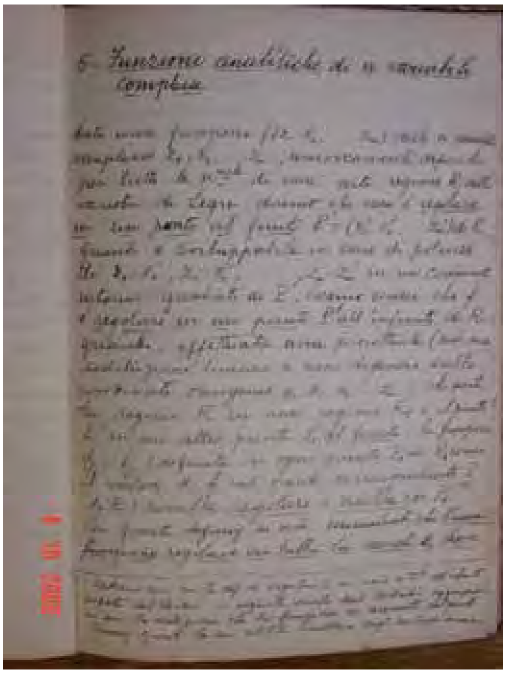
Um exemplo de domínio é dado pela vizinhança quadrada $[\rho]$, com $\rho > 0$, de qualquer n^{upla} finita $z'_1, \ldots z'_n$; ou seja, o conjunto das n^{uplas} $z_1, \ldots z_n$ para as quais vale

(4,1) $$|z_r - z'_r| < \delta \qquad (r = 1, 2, \ldots, n),$$

que constitui-se uma região, no supracitado em (e), que será chamada o interior da vizinhança quadrada $[\rho]$ da n^{upla} fixada. (FT26)

5. Função analítica de *n* variáveis complexas.

Dada uma função $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ da n variáveis complexas $z_1, z_2, \ldots z_n$, univocamente definida para toda n^{upla} de uma certa região R da variedade de Segre, diremos que ela é regular em um ponto finito $P' = (z'_1, z'_2, \ldots z'_n)$ de R, quando é passível de desenvolvimento em uma série de potências de $z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_n - z'_n$, numa conveniente vizinhança quadrada de P', e diremos, por outro lado, que f é regular em um ponto infinito P' de R, quando, efetuada uma transformação (isto é, uma substituição linear e não degenerada sobre as coordenadas homogêneas $z_0, z_1, z_2, \ldots z_n$[NT15]) que leva a região R a uma região R_1 e o ponto P' a um outro



ponto P'_1 finito, a função $\varphi_P = f_P$ (definida em cada ponto P_1 de R_1 como o valor de f no ponto correspondente P de R) resulta regular e nula em P'_1[NA2]. Com esta definição vê-se imediatamente que a única função regular sobre toda a variedade de Segre (FT27) é a função $y(z_1, z_2, \ldots z_n) \equiv 0$, ou seja, identicamente nula. De fato,

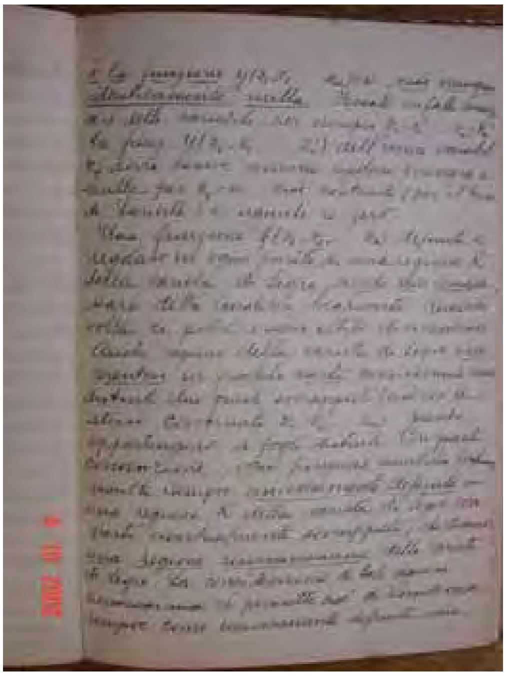
---

[NT14] Ver item (e) anterior.
[NT15] O texto original apresenta *n*+1, o que parece apenas um lapso de quem toma nota ou mesmo de quem profere a aula, já que o correto é $z_1, z_2, \ldots z_n$.

[NA2] Adotamos, com isto, a definição de regularidade [*regolante*] em uma n^{upla} infinita proposta por Severi, seguida também por Behnke, e agregada ainda da condição de a função se anular no ponto indicado, cuja utilidade resultará dos sucessivos desenvolvimentos.

estabelecidas de qualquer maneira $n-1$ das variáveis, por exemplo $z_2 = z'_2, \ldots, z_n = z'_n$, a função $y(z_1, z'_2, \ldots z'_n)$ de uma única variável z_1 deverá ser ainda regular por toda parte e nula para $z_1 = \infty$, isto é, constante (pelo teorema de Liouville) e igual a zero.

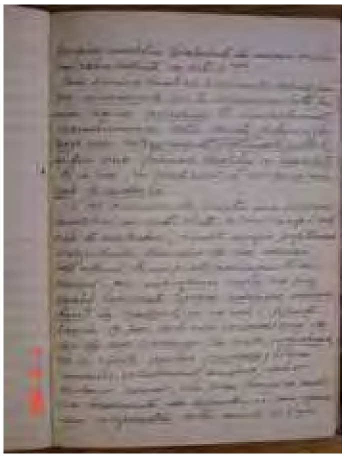
Uma função $f(z_1, z_2, \ldots z_n)$ definida e regular em cada ponto de uma região *R* da variedade de Segre, mesmo não conexa, será dita localmente analítica. De

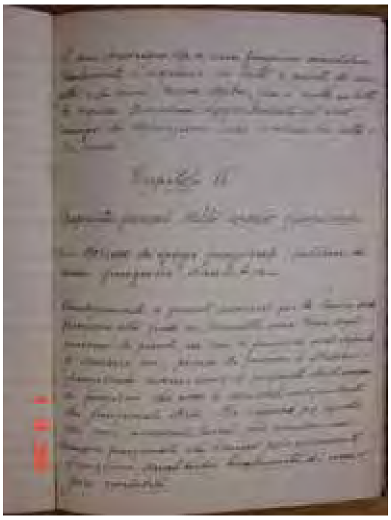


qualquer forma, poderá ser útil considerar-se também a região da variedade de Segre coberta em qualquer parte, considerando como distintos dois pontos sobrepostos (isto é, com as mesmas coordenadas $z_1, z_2, \ldots z_n$) quando separam folhas distintas. Com esta convenção, cada função localmente analítica resulta sempre univocamente definida em uma região *R* da variedade de Segre, com partes eventualmente sobrepostas, a qual chamaremos uma região Riemanniana da variedade de Segre. A consideração de tais regiões Riemannianas permite, assim, considerar sempre como univocamente definida uma (FT28) função localmente analítica que assuma também mais valores distintos em certa n^{upla}.

Uma função localmente analítica, definida (sempre univocamente pelas convenções feitas) em uma região conexa *R*, eventualmente Riemanniana, da variedade de Segre e que não seja posteriormente prolongável a outro *R*, dir-se-á uma função analítica em sentido estrito; *R*, neste caso, é o seu campo natural de existência.

Observa-se que entre uma função analítica em sentido estrito, com seu campo natural de existência, resulta sempre perfeitamente individualizada pelos valores que assume na vizinhança de um ponto qualquer de tal campo, por outro lado, para individualizar uma função localmente analítica, é necessário apresentar o conjunto tanto da região *R*, na qual ela está definida (mesmo nas várias partes não conexas), como os valores que ela aí assume (de modo, naturalmente, como aqueles resultados regulares, seja onde for). De agora em diante, entenderemos sempre, salvo aviso contrário, que uma função localmente analítica está definida em uma região não coberta da variedade de Segre. (FT29) Pode-se observar que se uma função localmente analítica é regular em todos os pontos de uma reta ou de uma curva algébrica, ela é nula em toda a região conexa pertencente ao seu campo de definição e que contém a reta ou a curva.



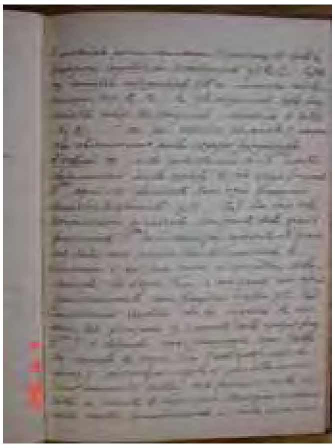


Capítulo II

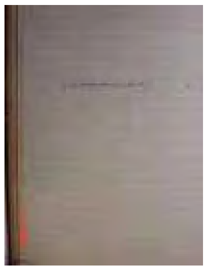
Propriedades Gerais do Espaço Funcional

6. Noção de espaço funcional: entorno de uma função analítica.

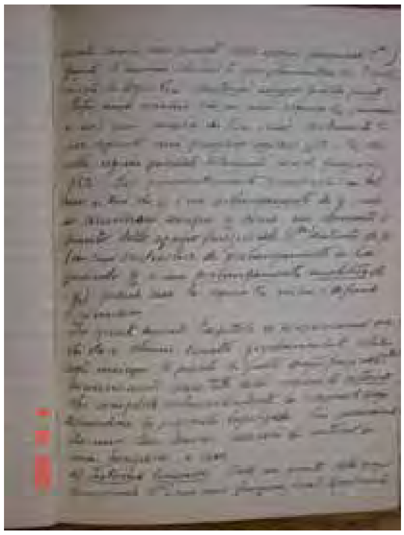
Analogamente a tudo quanto existe para a teoria das funções, às quais se antepõe uma teoria de conjuntos de pontos nos quais as funções são definidas, se estabelecerá agora, antes de passar a se estudar os funcionais, examinar as propriedades dos conjuntos de funções que são as variáveis independentes dos próprios funcionais. Por razões já expostas nos meus trabalhos precedentes,



consideraremos sempre funcionais que tenham por argumentos <u>funções localmente analíticas de uma ou mais variáveis</u>. (FT30) É natural, portanto, considerar o <u>conjunto de todas as funções localmente analíticas</u> $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ <u>de</u> $\underline{n}$ <u>variáveis independentes</u> (de agora em diante indicadas sempre com $t_1, t_2, \ldots, t_n$, argumentos das funções variáveis independentes dos funcionais, reservando as letras $z_1, z_2, \ldots, z_n$ etc. para indicar parâmetros), o conjunto que chamaremos então <u>espaço funcional de ordem</u> $\underline{n}$[NT16] e que indicaremos com $\wp^{(n)}$, enquanto chamaremos <u>ponto</u> de tal espaço funcional $\wp^{(n)}$ cada um de seus elementos, isto é, cada função localmente analítica $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.



Com base na convenção precedente, um ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$ será, portanto, definido quando for dada uma região bem determinada *R*, conexa ou não, mas não coberta, da variedade de Segre V_{2n} e nesta for definida univocamente uma função regular $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$. Estabeleceremos, por outro lado, que a região R onde uma tal função y (ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$) é definida não esgote por ventura toda a variedade de Segre V_{2n} (caso em que o função y, em toda parte regular, deve ser identicamente nula; tal função nula sobre toda a variedade de Segre será, portanto, excluída da nossa consideração e não será tomada (FT32) como um ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$), portanto, o conjunto fechado I, complementar de R sobre a variedade de Segre V_{2n}, conterá sempre algum ponto. Poderá, também, ocorrer que em uma região R_1 (conexa ou não) mais ampla em V_{2n}, ou seja, contendo R, seja definida uma função regular $y_1(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ que na região parcial R coincida com a função $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ anteriormente considerada: em tal caso se dirá que y_1 é um prolongamento de y, mas y_1 será considerada sempre como um elemento ou ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$ diferente de y (no caso particular



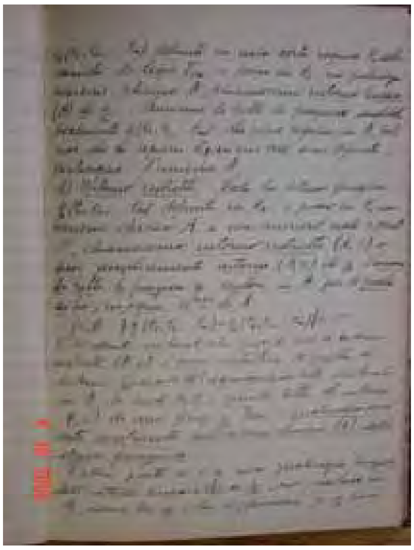
de prolongamento, se existir, quando y_1 é um prolongamento analítico de y), isto é, quando a região R_1 em que está definida é conexa[NT17].

Neste segundo Capítulo, nos propomos a fornecer alguns conceitos fundamentais relativos aos conjuntos de pontos deste espaço funcional $\wp^{(n)}$,

[NT16] Nessa linha, na margem esquerda, há uma seta que remete ao verso da folha anterior do caderno; e, na linha correspondente do verso da outra folha, uma outra seta indicando os dizeres: (Noção de espaço funcional: Pincherle). (FT31)

[NT17] Os parêntesis deveriam chegar até aqui, pois a consideração de prolongamento analítico depende de R_1 ser conexa.

começando antes de tudo pela noção de vizinhança que completa substancialmente a noção de espaço, definindo-se a propriedade topológica. Mais precisamente, daremos duas diferentes noções de vizinhança de uma função, a saber:



a) Vizinhança linear: Dado um ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$, isto é, uma função localmente analítica (FT33) $y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ definida em uma certa região R_0 da variedade de Segre V_{2n} e contido em R_0 um conjunto qualquer fechado *A*, chamaremos vizinhança linear *(A)* de y_0 o conjunto de todas as funções localmente analíticas $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ que são regulares em *A*, de forma ainda que as regiões *R* em que elas são definidas contenham o conjunto *A*.

b) Vizinhança restrita: Dada a mesma função $y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ definida em R_0, e contido em R_0 um conjunto fechado *A* e dado um número real e positivo σ, chamaremos vizinhança restrita *(A,σ)*, ou mais simplesmente vizinhança *(A,σ)* de y_0, o conjunto de todas as funções *y* regulares em *A* para as quais se tem, em cada n^{upla} de *A*

(6,1) $$|y(t_1, t_2, \ldots, t_n) - y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)| < \sigma .$$

É evidente, no entanto, que esta noção de vizinhança restrita *(A,σ)* é mais restritiva do que aquela de vizinhança linear *(A)*, acrescentando-se à regularidade em *A* a condição (6,1); por isso, todas as vizinhanças *(A,σ)* de uma função y_0, com σ qualquer, estarão, certamente, contidas na vizinhança linear *(A)* da mesma função.

Por outro lado, se *y* é uma função qualquer da vizinhança linear *(A)* de y_0, isto é, regular em *A* como y_0, a diferença $y - y_0$ será (FT34) também regular em *A*, e, portanto, o seu módulo, que é uma função contínua, assumirá em *A* um valor máximo *M*, e se encontrará, portanto, sempre em *A*,

(6,2) $$\left| y(t_1, t_2, \ldots, t_n) - y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n) \right| \leq M \,.$$

Bastará, portanto, tomar um número real $\sigma > M$, para que valha a (6,1) em todo *A* e, então, *y* resultará interior à vizinhança *(A,σ)* de y_0.

Portanto, não só a vizinhança linear *(A)* de uma função y_0 contém todas as vizinhanças *(A,σ)* desta função, mas também, vice-versa, cada função *y* da vizinhança linear *(A)* de y_0 isola sempre qualquer oportuna vizinhança *(A,σ)* de y_0. A vizinhança linear *(A)* de y_0 pode, por isso, ser definida também como o conjunto numérico do espaço funcional $\wp^{(n)}$ que contém todas as vizinhanças *(A,σ)* dessa função (com *A* fixo, σ arbitrário).

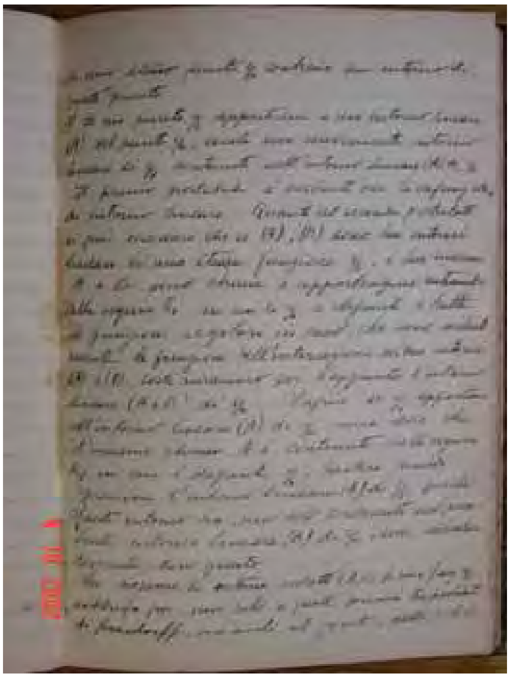
Observa-se que a noção de vizinhança linear *(A)* de uma função y_0 satisfaz aos primeiros teoremas de Hausdorff postulados para espaços de vizinhanças, o que quer dizer:

1º) Cada ponto do espaço funcional $\wp^{(n)}$ possui uma vizinhança linear *(A)* e nela está contido.

2º) A intersecção de duas vizinhanças lineares *(A)*, *(B)* (FT35) de um mesmo ponto y_0 contém uma vizinhança desse ponto.

3º) Se um ponto y_1 está isolado em uma vizinhança linear *(A)* do ponto y_0, existe uma conveniente vizinhança linear de y_1 contida na vizinhança linear *(A)* de y_0.

O primeiro postulado é evidente pela própria definição de vizinhança linear. Quanto ao segundo postulado, pode-se observar que se *(A)*, *(B)* são duas vizinhanças



lineares de uma mesma função y_0, os dois conjuntos *A* e *B* são fechados e pertencentes, ambos, à região R_0, na qual y_0 está definida e todas as funções regulares sobre ele, que são evidentemente as funções na intersecção das duas vizinhanças *(A)* e *(B)*, constituirão exatamente o interior linear *(A+B)* de y_0. Enfim, se y_1 pertence à vizinhança linear *(A)* de y_0, diremos que o conjunto fechado *A* está contido na região R_1, na qual está definida y_1; bastará, para isso, tomar a vizinhança linear *(A)* de y_1 para que esta vizinhança esteja não somente contida na anterior vizinhança linear *(A)* de y_0, mas até coincidente com ela.

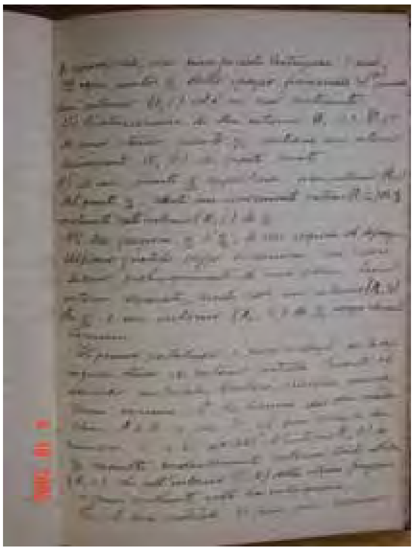
A noção de vizinhança restrita *(A,σ)* de uma função y_0, satisfaz assim não somente a estes primeiros três postulados de Hausdorff, mas também ao quarto, conhecido como postulado (FT36) de separação, com pequenas restrições, a saber:

1º) cada ponto y_0 do espaço funcional $\wp^{(n)}$ possui uma vizinhança (A,σ) e nela está contido;

2º) a intersecção de duas vizinhanças (A,σ) e (B,τ) de um mesmo ponto y_0 contém uma conveniente vizinhança (C,ϑ) deste ponto;

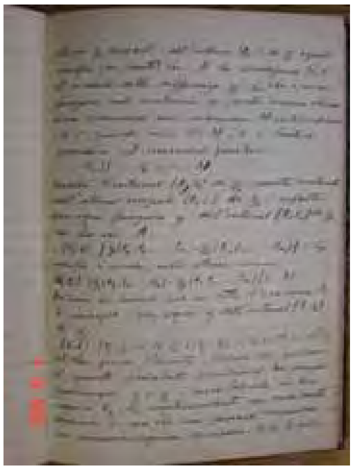
3º) se um ponto y_1 pertence a uma vizinhança (A,σ) do ponto y_0, existe uma conveniente vizinhança (A,σ_1) de y_1 contida na vizinhança (A,σ) de y_0;

4º) duas funções y_1 e y_2, cujas regiões de definição têm alguma parte em comum, mas não são prolongamentos uma da outra, têm vizinhanças separadas, existe então uma vizinhança (A,σ_1) de y_1 e uma vizinhança (A,σ_2) de y_2 sem elementos comuns.



O primeiro postulado é também evidente pela própria definição de vizinhança restrita. Quanto ao segundo postulado, bastará tomar ainda como conjunto C a soma dos dois conjuntos fechados A e B e por ϑ o menor dos números σ e τ para que a vizinhança (C,ϑ) de y_0 resulte evidentemente interior tanto para a vizinhança (A,σ) quanto para a vizinhança (B,τ) da mesma função e, por isso, contida na própria intersecção.

Para o terceiro postulado, pode-se observar (FT37) que se y_1 pertence à vizinhança (A,σ) de y_0, e assim verifica-se (nesta) em A a condição (6,1), então o módulo da diferença $y_1 - y_0$, que é uma função real contínua neste conjunto fechado, deverá assumir um máximo M com certeza inferior a σ, portanto $\sigma - M > 0$ e bastará tomar o número positivo



(6,3) $$\sigma_1 \leq \sigma - M$$

para que a vizinhança (A,σ_1) de y_1 esteja contida na vizinhança inicial (A,σ) de y_0; de fato, para cada função y da vizinhança (A,σ_1) de y_1 tem-se em A

(6,4) $$|y(t_1,t_2,\ldots,t_n) - y_1(t_1,t_2,\ldots,t_n)| < \sigma_1,$$

enquanto que vale, também, no próprio conjunto,

(6,5) $$|y_1(t_1,t_2,\ldots,t_n) - y_0(t_1,t_2,\ldots,t_n)| \leq M,$$

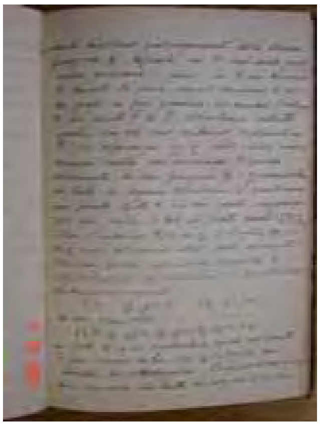
do que se deduz que em todo o conjunto A será sempre, para cada y da vizinhança (A,σ_1) de y_1

(6,6) $$|y - y_0| \leq |y - y_1| + |y_1 - y_0| < \sigma_1 + M \leq \sigma,$$

o que prova a afirmação. Enfim, para provar o quarto postulado, tomamos duas funções quaisquer y_1 e y_2, definidas em duas regiões R_1 e R_2, respectivamente, com uma parte comum $\overline{R}$, mas que não podem coincidir em qualquer região conexa B de $\overline{R}$, senão (FT38) serão prolongamentos da mesma função $\overline{y}$, definida em B mediante este valor comum; tomado em $\overline{R}$ um domínio A derivado de uma região conexa B, para a qual se pode tomar, por exemplo, a vizinhança de um ponto $\overline{P}$ de $\overline{R}$ suficientemente restrito ([NT18]porque está com seu contorno contido em $\overline{R}$), a diferença $y_1 - y_2$ não poderá ser sempre nula no domínio A (já que, em caso

[NT18] Ao que tudo indica, aqui é que devem ser abertos os parêntesis.

contrário, as duas funções y_1 e y_2 coincidiriam em toda a região conexa *B*), tomamos um ponto P_0 de *A* no qual esta diferença não seja nula e seja neste ponto $\left|y_1^0 - y_2^0\right| > 2\sigma$. Dessa forma, a vizinhança (A,σ) de y_1 e a vizinhança (A,σ) de y_2 não poderão ter, é claro, elementos comuns, pois uma função *y* pertencente a



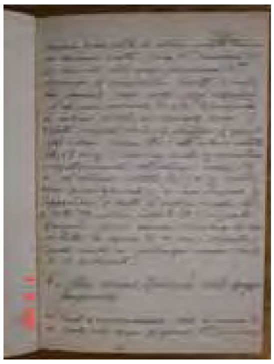
ambos deverá ter contemporaneamente

(6,7) $$\left|y_1 - y\right| < \sigma \quad \text{e} \quad \left|y_2 - y\right| < \sigma$$

das quais seguem:

(6,8) $$\left|y_1 - y_2\right| \le \left|y_1 - y\right| + \left|y_2 - y\right| < 2\sigma$$

em todo *A*, e em particular também no próprio ponto P_0, no qual, ao contrário, tem-se $\left|y_1 - y_2\right| = 2\sigma$, de onde resulta a contradição. É oportuno, enfim, observar que tanto a noção de vizinhança (FT39) linear como a de vizinhança restrita são tratadas nos termos exatos da idéia de "vizinhança" [NT19] entre dois elementos do espaço funcional $\wp^{(n)}$, conservando-se a simetria com relação a estes dois elementos como nos espaços ordinários, o que não contraria a definição de vizinhança adotada no precedente trabalho. É, de fato, evidente que se a função y_2 separa a vizinhança linear *(A)* ou a vizinhança restrita (A,σ) de y_1, ao contrário também y_1 separa, respectivamente, a vizinhança linear *(A)* ou a vizinhança restrita (A,σ) de y_2. Por outro lado, cada prolongamento y_1 de uma função *y* separa todas essas vizinhanças lineares *(A)* e

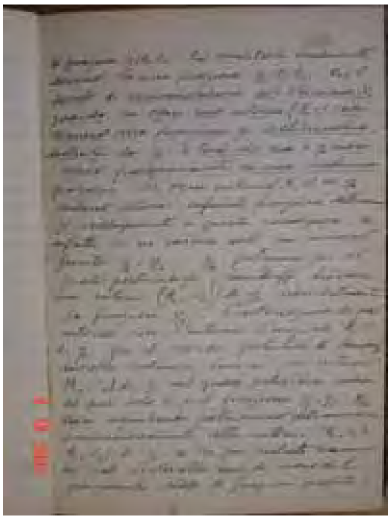


[NT19] A opção feita desde o princípio foi traduzir *entorno* como *vizinhança*; a intenção foi a de já aproximar o sentido que Fantappiè explicita neste ponto.

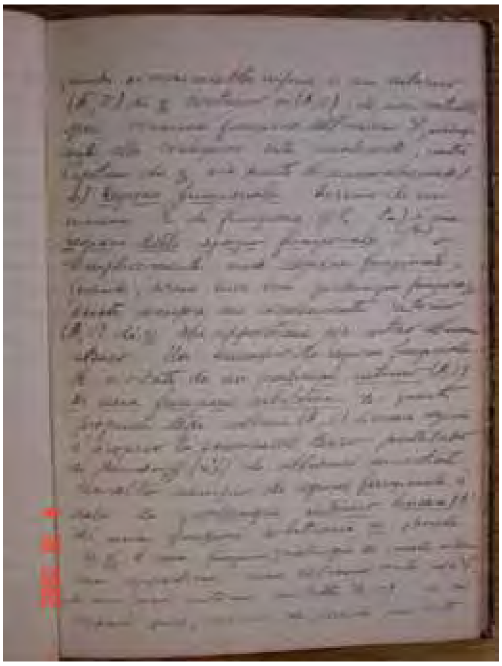
todas essas vizinhanças restritas (A, σ) desta função, pois coincide com ela em toda a região R na qual é definida, e por isso mesmo em qualquer conjunto fechado A ali contido.

7. Outras noções topológicas do espaço funcional.

a) Ponto de acumulação. Dado um conjunto Y de pontos do espaço funcional $\wp^{(n)}$, ou seja, um conjunto (FT40) de funções $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ localmente analíticas, diremos que uma função $y_0(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é ponto de acumulação do conjunto Y quando em cada uma das suas vizinhanças (A, σ) caia ao menos uma função y do conjunto que seja diferente de y_0 e que ela e y_0 não sejam prolongamentos de uma mesma função. Em cada vizinhança (A, σ) de y_0 caem, então, infinitas funções do conjunto Y satisfazendo a esta condição; de fato, se nessa vizinhança caísse um número finito $y_1, y_2, \ldots, y_k$, poderíamos, pelo quarto postulado de Hausdorff, encontrar uma vizinhança de (A_1', σ_1') de y_0 que não contém a função y_1; a interseção desta vizinhança com a vizinhança inicial (A, σ) de y_0 deverá conter ainda, pelo segundo postulado de Hausdorff, uma vizinhança (A_1, σ_1) de y_0, na qual poderão cair tão somente as $k-1$ funções $y_2, y_3, \ldots, y_k$. Assim, de forma análoga, podemos determinar sucessivamente outras vizinhanças (A_2, σ_2), (A_3, σ_3) de y_0, que via de regra contêm, cada uma



delas, uma função a menos do que a anterior, dentre aquelas *k* funções anteriormente citadas, (FT41) portanto, chega-se , enfim, a uma vizinhança $(\overline{A},\overline{\sigma})$ de y_0 contínua em (A,σ), que não conterá mais qualquer função do conjunto *Y* que satisfaça à condição dada inicialmente, contra a hipótese de que y_0 é ponto de acumulação de *Y*.

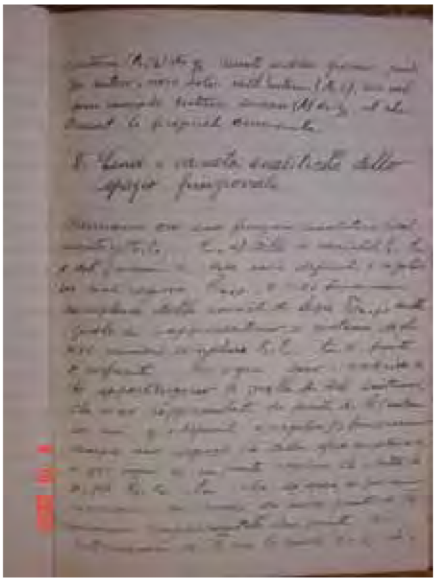


b) Região funcional. Diremos que um conjunto *R* de funções $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ é uma região do espaço funcional $\wp^{(n)}$, ou simplesmente uma região funcional, quando, tomada uma função qualquer y_0, existir sempre uma vizinhança (A,σ) de y_0 que pertence por inteiro ao próprio conjunto. Um exemplo de região funcional *R* é dado por uma vizinhança (A,σ) qualquer de uma função arbitrária y_0; esta propriedade da vizinhança (A,σ) ser região é exatamente a essência do terceiro postulado de Hausdorff (título 6), como havíamos demonstrado.

Outro exemplo de região funcional é dado por uma vizinhança linear *(A)* qualquer de uma função arbitrária y_0, uma vez que, se y_1 é uma função qualquer desta vizinhança, ela pertence, como vimos no título 6, a uma conveniente vizinhança restrita (A,σ) à qual pertence propriamente, pelo que precede[NT20], uma certa (FT42) vizinhança (A_1,σ_1) de y_1. Esta vizinhança permanecerá então por inteiro, não somente na vizinhança *(A,σ),* mas no mais amplo entorno linear *(A)* de y_0, o que demonstra a propriedade enunciada.

8. Linhas e variedade analítica do espaço funcional.

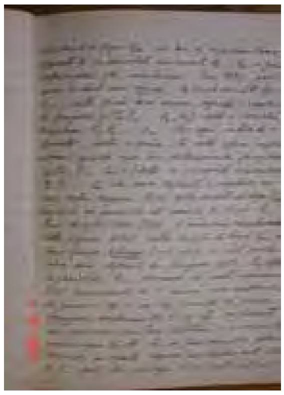
Tomamos agora uma função localmente analítica $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha)$ de n variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e parâmetro α; ela será definida e regular em uma região $\overline{R}_{n+1}$, para $n+1$ dimensões complexas da variedade de Segre $V_{2(n+1)}$ sobre a qual se



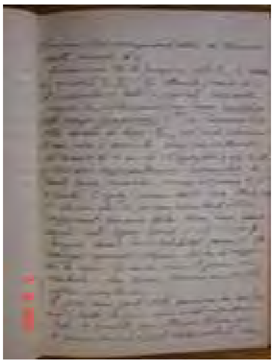
representam os sistemas de $n+1$ números complexos $t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha$, finitos ou infinitos. Em cada caso, os valores de α que pertencem a qualquer desses sistemas, que são representações dos pontos de $\overline{R}$ (sistemas nos quais y é definida e regular), formarão sempre uma <u>região</u> Ω da esfera complexa α, e, para cada α_0 nesta região Ω, toda $n^{\underline{upla}}$ $t_1, t_2, \ldots, t_n$ que a ele se pode associar de modo a ter pontos de $\overline{R}$, será representada pelos pontos de intersecção de $\overline{R}$ com a variedade $\alpha = \alpha_0$, que é (FT43) uma variedade de Segre V_{2n}, sobre a qual se representam exatamente as *n* variáveis restantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e esta intersecção, que indicaremos por $R(\alpha_0)$, será também, é claro, uma <u>região</u> desta variedade de Segre V_{2n}, na qual será ainda definida e regular a função

NT20 [no mesmo título 6].

$y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_0)$ de n variáveis complexas $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Para cada valor de α fixado na região Ω da esfera complexa, teremos portanto uma bem determinada função $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha)$ das n variáveis restantes $t_1, t_2, \ldots, t_n$ que será definida e regular em certa região $R(\alpha)$ da variedade de Segre V_{2n}, variáveis em geral ao variar de α em Ω. Indicamos com $I(\alpha)$ o conjunto complementar da região $R(\alpha)$ na variedade de Segre V_{2n}, a qual será então fechada (veja 4(e)) e na qual não será definida a função $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha)$ de variáveis t_k; diremos que este conjunto $I(\alpha)$ dependente de α varia continuamente ao variar α em Ω ou mesmo que é uma função contínua de α em Ω, se fixado um número positivo arbitrário ε e um ponto qualquer α_0 de Ω pode-se sempre determinar nesta região uma conveniente vizinhança de α_0, tal que, para cada α nesta vizinhança, (FT44) o conjunto $I(\alpha)$ correspondente tenha de $I(\alpha_0)$ uma diferença menor do que ε.

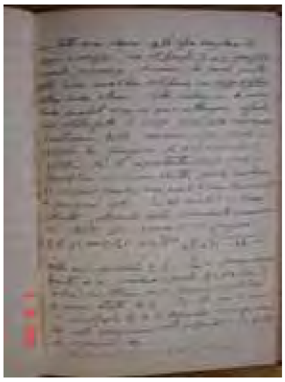


Diremos agora que a função $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha)$ de n variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_n$, obtida fixando-se para o parâmetro α todos os possíveis valores na região Ω, constitui uma linha analítica do espaço funcional $\wp^{(n)}$, se o conjunto $I(\alpha)$ da variedade de Segre V_{2n}, no qual cada uma delas não é definida, varia continuamente com α em Ω. A equação $y = y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha)$ será uma representação paramétrica desta linha analítica, correspondente ao parâmetro α, ou ainda a equação paramétrica desta linha; e, é claro que se pode ter outras representações paramétricas da mesma linha fornecendo simplesmente na equação precedente $\alpha = \varphi(\beta)$, com φ função analítica invertível do parâmetro β. Para maior generalidade, poderemos então supor mesmo que a região Ω, na qual varia o parâmetro, seja eventualmente uma região



Riemanniana da esfera complexa.

Se, pois, uma parte das funções de uma linha analítica (parte que pode também eventualmente estender-se a qualquer linha) pode ser obtida fazendo-se variar o parâmetro (em uma oportuna representação da própria linha) (FT45) em uma região qualquer da esfera complexa que não se recobre, seja finita e simplesmente conexa, diremos que esta parte da linha analítica constitui-se um trecho regular da própria linha. Na construção de uma linha analítica é preciso chamar-se atenção a fim de que seja satisfeita a condição fundamental de variação contínua do conjunto $I(\alpha)$, quando se escolhe a função de $n+1$ variáveis $y(t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha)$, sobretudo quando esta é



analítica em sentido estrito, pois que nem sempre se pode tomar como pontos de uma linha analítica a função $y(t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha)$ analítica em sentido estrito, obtida da precedente pela fixação de α. Dada, por exemplo, a função

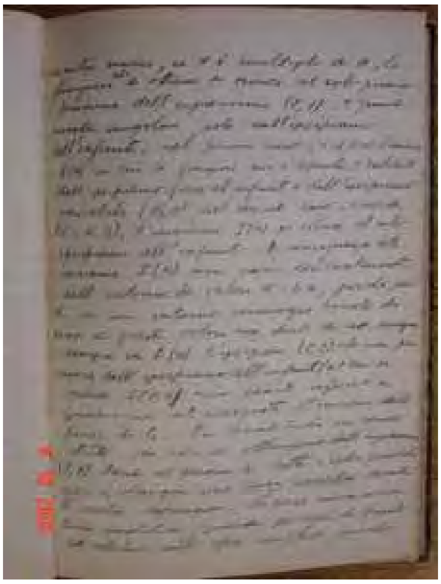
$$y=\operatorname{sen}(a_1t_1+\cdots+a_nt_n)+\frac{1}{a_1t_1+a_2t_2+\cdots+a_nt_n-\alpha} \tag{8,1}$$

de $n+1$ variáveis $t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha$, para cada valor finito de α, excluindo-se os pontos $\frac{\pi}{2}+k\pi$ (com k inteiro), obtém-se uma função analítica em sentido estrito de

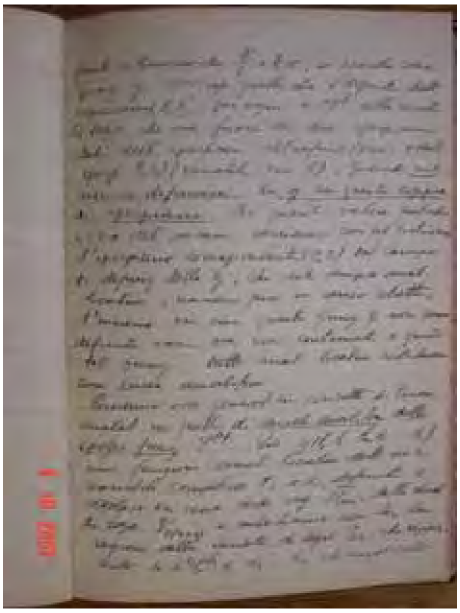
$t_1, t_2, \ldots, t_n$ que, se α não for múltiplo de π, é definida para toda parte menos no hiperplano infinito e naquela de equação

$$a_1 t_1 + a_2 t_2 + \cdots + a_n t_n - \alpha = 0, \qquad (8,2) \quad \text{(FT46)}$$

enquanto que, ao contrário, se α for múltiplo de π, a função que se obtém se reduz a somente o primeiro termo da expressão (8,1) e, portanto, resulta única sobre o hiperplano infinito; no primeiro caso $(\alpha \neq k\pi)$ o conjunto $I(\alpha)$, no qual a função não é definida, é constituído do hiperplano fixo infinito e do hiperplano variável (8,2); no segundo caso, ao contrário $(\alpha = k\pi)$, o conjunto $I(\alpha)$ se reduz a apenas o hiperplano infinito, e em conseqüência tal conjunto $I(\alpha)$ não varia continuamente na vizinhança dos valores $\alpha = k\pi$, porque para α em uma vizinhança ainda que pequena de um destes



valores, mas distinto dele, recobre sempre em $I(\alpha)$ o hiperplano (8,2), que não pode ter do hiperplano infinito (ao qual se reduz $I(k\pi)$), uma diferença inferior a qualquer número escolhido. O conjunto das funções de $t_1, t_2, \ldots, t_n$ analíticas em sentido estrito, que não se obtêm da expressão (8,1) dando ao parâmetro α todos os valores possíveis, não é portanto uma linha analítica segundo a nossa definição. Ter-se-á, ao contrário, uma linha analítica quando para cada α fixado arbitrariamente sobre a esfera complexa, desde que (FT47) finito e diferente de $\frac{\pi}{2} + k\pi$, se toma como função *y* correspondente aquela que é definida pela expressão (8,1) para cada $n^{\underline{upla}}$ da variedade de Segre que esteja fora dos dois hiperplanos, dados pelo hiperplano infinito (fixo) e pelo hiperplano (8,2) (variável com α), ou seja, quando não se definir *y* sobre este par de hiperplanos. Para estes valores particulares $\alpha = k\pi$ do parâmetro, viremos assim a excluir o hiperplano correspondente (8,2) do campo de

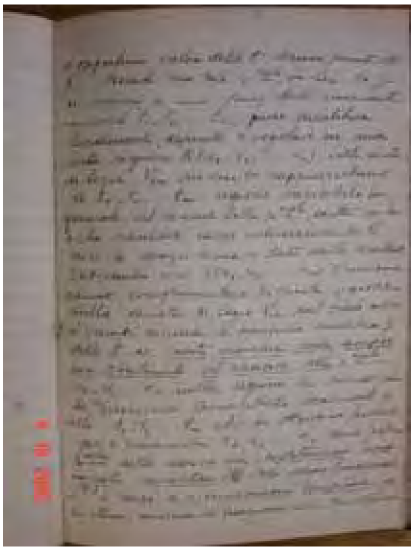


definição de *y*, que permanece sempre localmente analítico, mas não mais em sentido estrito; o conjunto no qual estas funções *y* não são definidas varia, agora, continuamente e por isso tais funções, todas localmente analíticas, constituem uma linha analítica.

Podemos agora generalizar o conceito de linha analítica para aquele de variedade analítica do espaço funcional $\vartheta^{(n)}$. Seja $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ uma função localmente analítica de $n + r$ variáveis complexas t_r e α_0[NT21], definida e regular em uma certa região $\overline{R}_{n+r}$ da variedade de Segre $V_{2(n+r)}$ e indiquemos por Ω_r a região da variedade de Segre V_{2r} que representa as $r^{\underline{uplas}}$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ que, associadas (FT48) a adequados valores de *t*, dão pontos de $\overline{R}$. Fixada uma tal $r^{\underline{upla}}$ Ω_r, *y* se reduzirá a uma função das restantes variáveis $t_1, t_2, \ldots, t_n$, também localmente analítica, definida e regular em uma certa região $R(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, da variedade de Segre V_{2n}, na qual

[NT21] O correto seria t_k e α_s ou $t_1, t_2, \ldots, t_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$.

se representam as $t_1, t_2, \ldots, t_n$ regiões variáveis em geral ao variar a $r^{\underline{upla}}$ escolhida em Ω_r e que resultará como interseção de $\overline{R}$ com o espaço linear dado por α constante. Indicando com $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ o conjunto fechado complementar desta região sobre a variedade de Segre V_{2n}, na qual não está portanto definida a função analítica y de t se este conjunto varia sempre continuamente ao variar a $r^{\underline{upla}}$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ na região Ω_r, diremos que a função localmente analítica y de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, que se obtém fixando para os parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ uma $r^{\underline{upla}}$ qualquer da região Ω_r, constitui uma variedade analítica V_r do espaço funcional $\vartheta^{(n)}$ e, pelo contrário, a r dimensões complexas, se o mesmo conjunto de funções não puder ser obtido (FT49) dos valores dos r parâmetros, que são funções analíticas de um número inferior dos parâmetros.



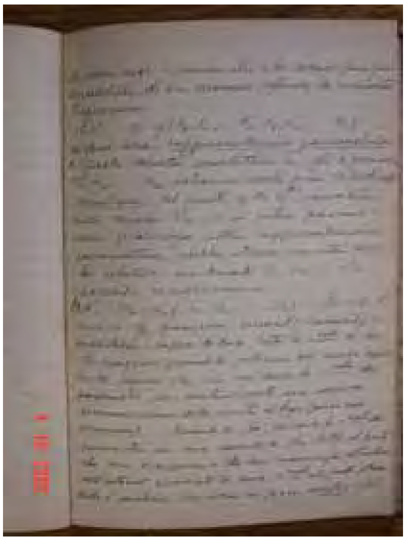
A equação:

(8,3) $$y = y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$$

será uma representação paramétrica desta variedade analítica V_r, os r parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ poderão também ver-se como coordenadas curvilíneas do ponto y de $\wp^{(n)}$, variáveis sobre a variedade V_r, e poder-se-á passar a uma outra representação paramétrica qualquer da mesma variedade com as relativas coordenadas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$, colocando-se simplesmente

$$(8,4) \qquad \alpha = \varphi_k(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s) \qquad (k = 1,2,\ldots, r),$$

com as φ_k funções (localmente) analíticas e invertíveis, capazes de dar toda $r^{\underline{upla}}$ de Ω_r. Para maior generalidade, podemos, pois, também, supor que a região Ω_r, na



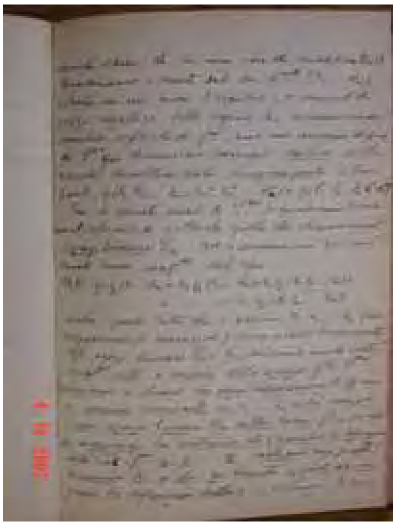
qual varia a $r^{\underline{upla}}$ de parâmetros, seja eventualmente uma região Riemanniana da variedade de Segre (possa, portanto, recobrir-se). Quando se faz variar a $r^{\underline{upla}}$ de parâmetros em uma região de Ω_r toda finita, que não se recobre e que seja homeomorfa ao interior da vizinhança quadrada de uma $r^{\underline{upla}}$ finita, obtemos da variedade analítica o que se dirá um <u>trecho</u> <u>regular</u> da (FT50) própria variedade. Se em uma variedade analítica (8,3) consideramos os pontos dados pelas $r^{\underline{uplas}}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ situadas sobre um arco λ regular, ou composto de trechos regulares da região Ω_r, teremos uma simples infinita de funções, isto é, um conjunto de pontos de $\wp^{(n)}$ que diremos um <u>caminho</u> <u>regular</u> da variedade analítica dada, <u>unindo</u> os dois pontos $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1^0, \alpha_2^0, \ldots, \alpha_r^0)$ e $y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1^1, \alpha_2^1, \ldots, \alpha_r^1)$.

Entre as variedades analíticas de $\wp^{(n)}$ assinalaremos como particularmente notável aquela que chamaremos espaço linear L_r a r dimensões para a qual existe uma $r^{\underline{upla}}$ do tipo:

$$y = y_0(t_1,\ldots,t_n) + \alpha_1 y_1(t_1,\ldots,t_n) + \alpha_2 y_2(t_1,\ldots,t_n) + \cdots + \alpha_r y_r(t_1,\ldots,t_n)\,, \tag{8,5}$$

na qual todos os r parâmetros $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ (que supomos essenciais) comparecem linearmente.

Os espaços lineares L_1 e L_r serão também ditos respectivamente retas e planos do espaço funcional $\wp^{(n)}$. Ao contrário, é claro que cada expressão (8,5) com r parâmetros essenciais $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ nos dá sempre um espaço linear L_r do espaço funcional, desde que se acrescente a condição de que os campos de definição das $r+1$ funções $y_0, y_1, \ldots, y_r$ contenham uma parte comum R e que se limitem a esta região a guisa da definição de y, quaisquer que sejam (FT51) os valores finitos dos parâmetros. A primeira condição é necessária, evidentemente, quando todos os parâmetros são diferentes de zero; a segunda, é necessária para manter-se a continuidade do conjunto fechado $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, onde a função y não é definida também para aqueles eventuais valores dos parâmetros nos quais aparecem alguns pontos singulares das

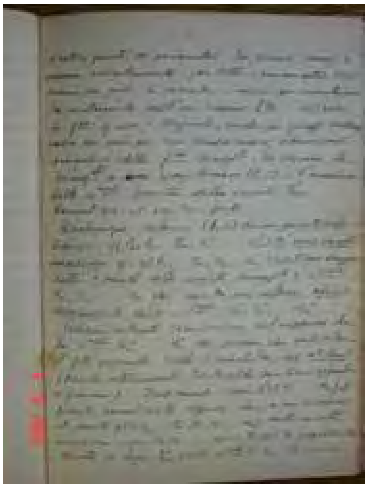


funções correspondentes. A região Ω_r correspondente a um espaço linear (8,5) é o conjunto das $r^{\underline{uplas}}$ finitas da variedade V_{2r}.

Demonstremos, agora, o seguinte teorema de origem:

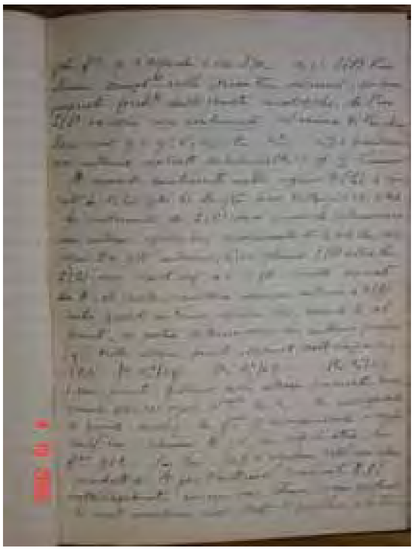
Qualquer vizinhança (A,σ) de um ponto arbitrário $y(t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha_1{}^0,\alpha_2{}^0,\ldots,\alpha_r{}^0)$ de uma variedade analítica $y = y(t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ contém sempre todos os pontos da variedade correspondentes às $r^{\underline{uplas}}$ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ de parâmetros de uma vizinhança esférica conveniente da $r^{\underline{upla}}$ $\alpha_1{}^0,\alpha_2{}^0,\ldots,\alpha_r{}^0$.

Podemos, entretanto, começar com a suposição de que a $r^{\underline{upla}}$ $\alpha_1{}^0,\alpha_2{}^0,\ldots,\alpha_r{}^0$ de parâmetros que determinam o ponto escolhido sobre a variedade analítica, seja finita (dado que, caso contrário, bastaria trocar oportunamente os parâmetros).



Indicando com $P \equiv (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r)$ o ponto variável na região Ω_r, ao qual corresponde o ponto $y(t_1,t_2,\ldots,t_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_r)$ sobre a variedade analítica, com $R(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) = R(P)$ a região da variedade de Segre V_{2n} (de $n^{\underline{uplas}}$ $t_1,t_2,\ldots,t_n$) na qual (FT52) esta função y é definida e com $I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) = I(P)$ o conjunto fechado complementar sobre a própria V_{2n}, teremos, por uma propriedade fundamental da variedade analítica, que o conjunto $I(P)$ variará continuamente ao variar P em Ω_r. Pondo

$y_0 = y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1{}^0, \alpha_2{}^0, \ldots, \alpha_r{}^0)$ e tomando uma vizinhança restrita arbitrária *(A,σ)* de y_0, o conjunto *A* contido na região $R(P_0)$ está separado de $I(P_0)$, isto é, tem deste uma distância $\delta > 0$, e dada a continuidade de $I(P)$ será possível determinar uma vizinhança esférica (*r*) conveniente de P_0 tal que, para cada *P* desta vizinhança, o conjunto fechado $I(P)$ tenha de $I(P_0)$ uma distância inferior a δ e, por isso, resulta separado de *A*, o qual resulta sempre interno a $R(P)$.



Dentro desta vizinhança esférica (*r*), sendo P_0 finito, será possível determinar uma vizinhança quadrada [ρ] do mesmo ponto, definida pelas desigualdades

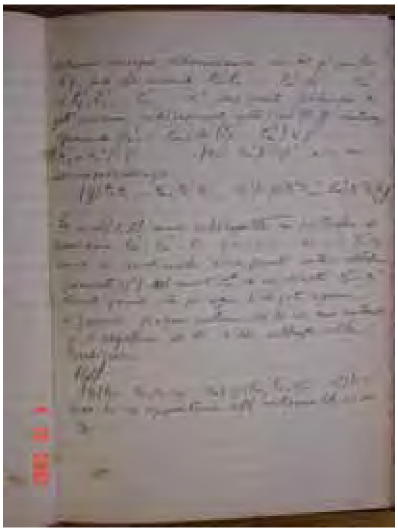
(8,6) $$\left|\alpha_1 - \alpha_1{}^0\right| \leq \rho, \left|\alpha_2 - \alpha_2{}^0\right| \leq \rho, \ldots, \left|\alpha_r - \alpha_r{}^0\right| \leq \rho$$

e cujos pontos gozem da mesma propriedade. Resulta portanto que, para cada $r^{\underline{upla}}$ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ que satisfaz esta condição, a função *y* correspondente é regular no conjunto fechado *A*, ou, o que é o mesmo, a função $y(t_1, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ é regular no conjunto fechado, produto de *A* pela vizinhança quadrada (8,6).

Da regularidade em um conjunto fechado, segue-se naturalmente a continuidade uniforme, isto é, dado σ positivo qualquer, (FT53) poderemos sempre determinar um número ρ' positivo $\leq \rho$ tal que, sendo $t_1', t_2', \ldots, t_n', \alpha_1', \ldots, \alpha_r'$ e

$t_1'', t_2'', \ldots, t_n'', \alpha_1'', \ldots, \alpha_r''$ dois pontos quaisquer deste conjunto satisfazendo à condição (8,7) de distância esférica entre $(t_1', t_2', \ldots, t_n')$ e $(t_1'', t_2'', \ldots, t_n'') < \rho'$, $|\alpha_1' - \alpha_1''| \leq \rho', |\alpha_2' - \alpha_2''| \leq \rho', \ldots, |\alpha_r' - \alpha_r''| \leq \rho'$, esteja em correspondência com:

$$|y(t_1', t_2', \ldots, t_n', \alpha_1', \ldots, \alpha_r') - y(t_1'', t_2'', \ldots, t_n'', \alpha_1'', \ldots, \alpha_r'')| < \sigma$$



As condições (8,7) estão satisfeitas em particular se colocamos $t_k' = t_k'' = t$ $(k = 1,2,\ldots, n)$ e se $\alpha_j' = \alpha_j$ são coordenadas de um ponto interior da vizinhança quadrada [ρ'] do ponto P_0 de coordenadas $\alpha_j^0 = \alpha_j''$. Resulta portanto que, para cada *P* desta região, e por isso de cada vizinhança de P_0 nela contida, *y* é regular em *A* e estará satisfeita a condição

(8, 8) $$|y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_r) - y(t_1, t_2, \ldots, t_n, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_r^0)| < \sigma,$$

ou seja, *y* pertence à vizinhança *(A,σ)* de y_0. (FT54)

9. Módulos com multiplicadores e regiões funcionais lineares.

a) Módulos relativos a um anel – Seguindo a terminologia de Van der Waerden, diremos que um conjunto $\Im$ de elementos y é um módulo quando neste conjunto é definida uma operação de adição que a cada par de elementos y e z corresponde um outro elemento do mesmo conjunto, a sua "soma" $y+z$, com as seguintes propriedades:

1) $(y+z)+u = y+(z+u)$ (associativa)

2) $y+z = z+y$ (comutativa)

3) Dados y e z, existe sempre em $\Im$ um único elemento u, tal que $y+u=z$.

Desta terceira propriedade segue a existência e unicidade em $\Im$ de um elemento 0, tal que $y+0=0+y=y$, qualquer que seja y, e para cada y, a existência do elemento "oposto" $-y$, tal que $y+(-y)=0$. Segue daqui que o conceito de módulo se identifica substancialmente com aquele de grupo abeliano, quando se

convenciona indicar com sinal + a operação de multiplicação no grupo, com 0 a identidade e $-y$ o elemento inverso de y. (FT55)

Diremos, ainda, que um módulo $\Im$ é relativo a um anel A de multiplicadores[NA3], ou mais simplesmente, que é relativo a A ou é A-módulo ou é um módulo com multiplicadores em A, se para cada

[NA3] Recordemos, também, que se entende por anel cada conjunto de elementos para os quais estão definidas as operações de adição,com as mesmas propriedades de (1) a (3) acima enunciadas, e elemento *y* de $\Im$ e cada elemento α de *A* está definido, também, em correspondência um elemento αy de $\Im$, que se chama "produto" de α por *y*, com as seguintes propriedades (*y* e *z* quaisquer de $\Im$, α e β de *A*):

4) $(\alpha + \beta)y = \alpha y + \beta y$

5) $\alpha(y + z) = \alpha y + \alpha z$

6) $\alpha(\beta y) = \alpha\beta \cdot y$

Se o módulo $\Im$ relativo ao anel *A* está contido em *A*, ele se reduz a um ideal de *A* (devendo-se distinguir entre ideal direito e ideal esquerdo, se *A* não é comutativo).

Além das propriedades de (1) a (6), características de um *A*-módulo, segundo Van der Waerden, suporemos, ainda, salvo aviso explícito em contrário, que valem também as seguintes:

7) Se $\alpha y = 0$, segue $\alpha = 0$ ou $y = 0$.

8) O anel *A* é comutativo e com (FT57) elemento unitário l relativo à multiplicação, tal que $1 \cdot y = y$.

Se num módulo $\Im$ relativo ao anel dos números reais se define também, para cada elemento *y*, uma norma $\|y\|$ tal que:

---

multiplicação com as propriedades associativa e distributiva com relação à soma do anel, chamando-o

9) $\|y\|$ seja sempre um número real ≥ 0;

10) $\|y\| = 0$ somente se $y = 0$;

11) $\|\alpha y\| = \alpha \|y\|$[NT22];

o conjunto $\Im$ torna-se uma <u>família</u> <u>de</u> <u>vetores</u> <u>abstratos</u> ou um <u>espaço</u> <u>vetorial</u> no sentido de Frechet.

Da definição de *A*-módulo, resulta, então, que se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são elementos de $\Im$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ elementos de *A*, de resto quaisquer, pertencerá a $\Im$ também o elemento

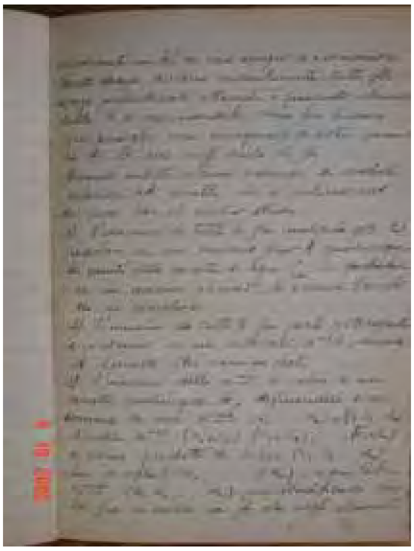
(9,1) $$y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n .$$

Se estes elementos $y_1, y_2, \ldots, y_n$ não são amarrados por qualquer relação linear $\sum \beta_i y_i = 0$ com β[NT23] (pertencentes a *A*) não todos nulos, quer dizer, se são linearmente independentes, é fácil ver que os elementos *y* dados por (9,1) estão em correspondência biunívoca, sem exceção, com $n\underline{^{uplas}}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, as quais se podem considerar como <u>pontos</u> (com (FT58) coordenadas em *A*) de um espaço a *n* dimensões. Este espaço conterá, evidentemente, todos os espaços subordinados obtidos pela fixação de algum α ou expressando-o como função linear (em geral não homogênea) de outros parâmetros de *A*, com coeficientes também de *A*.

<u>comutativo</u> se a multiplicação também goza da propriedade comutativa. (FT56)

[NT22] O correto seria $\|\alpha y\| = |\alpha| \, \|y\|$.

Damos, imediatamente, alguns exemplos de módulos relativos a anéis que interessam em muito ao nosso estudo.



1) O conjunto de todas as funções analíticas $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ regulares em um conjunto fixo *A* qualquer de pontos da variedade de Segre V_{2n}, em particular em um conjunto fechado, sendo *A* o anel dos números complexos.

2) O conjunto de todas as funções reais $y(t)$ definidas e contínuas em um intervalo $[a,b]$, sendo *A* o anel dos números reais.

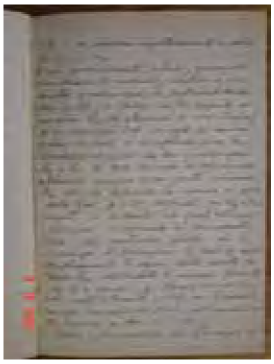
3) O conjunto das $n^{\underline{uplas}}$ de valores de um anel qualquer *A*, definido-se como soma de duas $n^{\underline{uplas}}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ a $n^{\underline{upla}}$ $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$ e como produto de β por $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ a $n^{\underline{upla}}$ $(\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, \ldots, \beta\alpha_n)$; cada $n^{\underline{upla}}$ $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ pode identificar-se com a função de valores em *A* que nos elementos (FT59) $1, 2, \ldots, n$ assume respectivamente os valores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

4) Mais geralmente, enfim, podemos considerar o módulo relativo a um anel qualquer *A*, constituído pelas funções $y(\tau)$, com valores em *A*, definidas no conjunto Ry de elementos τ arbitrários (por exemplo, números ou $n^{\underline{uplas}}$ de números inteiros, reais ou complexos) com a condição, contudo, que dois quaisquer Ry e Rz de tais campos

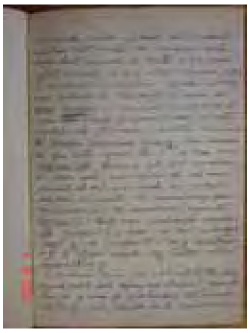
---

NT23 Obviamente β_i.

de definição tenham sempre uma parte comum Ru, onde se define a soma $u = y + z$ das funções y e z definidas em Ry e Rz, respectivamente. É evidente que este último exemplo compreende os precedentes como casos particulares, dado que em (1) os campos de definição Ry de y são simplesmente as regiões da variedade de Segre V_{2n}, contidas no conjunto fixo A; em (2), os campos de definição coincidem todos com intervalo $[a,b]$; em (3), estes campos coincidem também no conjunto fixo dos números inteiros $1,\ldots,n$.



Enfim, observa-se que o exemplo (4) (FT60) compreende também o caso do módulo, relativamente ao anel dos números reais, dado pelo conjunto de todas as funções reais $y(\tau)$ definidas em um mesmo conjunto fixo R de elementos τ arbitrários. Estes módulos são indicados por Hausdorff com o nome de <u>espaços lineares</u>; reservaremos, entretanto, o nome de campos funcionais lineares a outros módulos que estudaremos em outra ocasião.



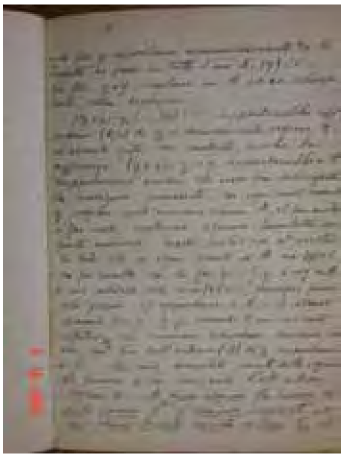
b) <u>Regiões</u> <u>funcionais</u> <u>lineares</u> – Um conjunto de funções do espaço funcional $\wp^{(n)}$ se diz uma <u>região</u> <u>funcional</u> <u>linear</u> quando este conjunto é não somente uma região funcional, no sentido exato do número 7[NT24], mas também um <u>módulo</u>, relativo ao anel dos números complexos.

Começaremos por demonstrar o seguinte

[NT24] Título 7 – Outras noções topológicas do espaço funcional.

Teorema I – Dados qualquer região funcional linear *R* e qualquer um de seus pontos y_0, se a vizinhança *(A,*σ *)* de y_0 pertence a *R*, o mesmo acontece com toda a vizinhança linear *(A)* de y_0.

A existência de uma tal vizinhança restrita *(A,*σ *)* de y_0 resulta de imediato da própria definição de região funcional. Seja, portanto, *y* uma função qualquer d vizinhança *(A)* de y_0, isto é, regular em *A*, mostremos que (FT61) esta função *y*



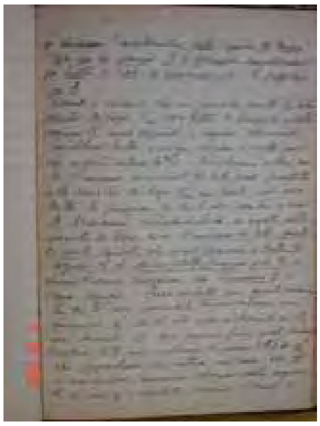
pertence necessariamente a *R*. De fato, se fosse em todo o conjunto *A*, $|y| < \sigma$, a função $y_0 + y$, regular em *A* e satisfazendo à condição $|(y_0 + y) - y_0| = |y| < \sigma$, pertence à vizinhança *(A,*σ *)* de y_0 e, portanto, à região *R*, e sendo esta um módulo, também a diferença $(y_0 + y) - y_0 = y$ pertence a *R*.

Suponhamos, ao contrário, que não seja satisfeita a condição precedente; em cada caso, sendo *y* regular no conjunto fechado *A*, o seu módulo é função real, contínua e, portanto, limitada neste conjunto. Existe, portanto, um número positivo *L* tal que em cada ponto de *A* seja $|y| < L$, de onde resulta que a função $\varphi = \frac{\sigma}{L} y$ é regular em *A* e satisfaz a condição $|\varphi| < \sigma$, portanto, pelo que precede, φ pertence a *R*, e o mesmo acontece para $y = \frac{L}{\sigma}\varphi$ já que *R* é um módulo relativo aos números complexos. Vemos, portanto, que cada função da vizinhança *(A)* de y_0 pertence a *R*.

Mas, uma completa caracterização da região funcional linear se tem mediante outro interessante:

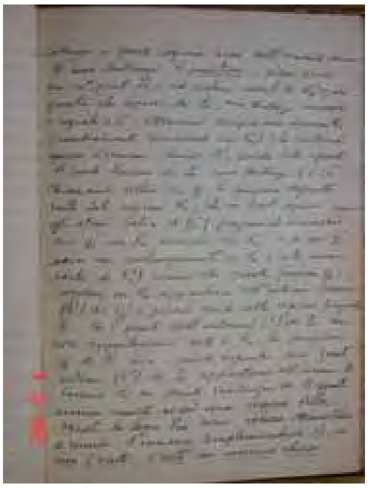
Teorema II – A uma região funcional linear R do espaço $\wp^{(n)}$ está sempre associado um conjunto fechado A da variedade de Segre V_{2n} (que (FT62) se chama "característica da região funcional linear") tal que a região R é formada unicamente por todas as funções $y(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ regulares em A.

Entretanto, é claro que em qualquer ponto P_0 da variedade de Segre V_{2n}, nem todas as funções y da região R são definidas e regulares, caso contrário seriam em toda parte regulares e nulas, caso em que se exclui o sistema (nº 6[NT25]). Indicamos então com B o conjunto não vazio de todos estes pontos P_0 da variedade de Segre V_{2n} nos quais a saber nem todas as funções y de R são regulares e com A o conjunto complementar, se existir, sobre a variedade de Segre, isto é, o conjunto de todos os pontos desta variedade que são comuns a todas as regiões R de definição das funções y de R e demonstramos, em primeiro lugar, que o conjunto B é uma região. Tomando, assim, um ponto qualquer P_0 de B será possível achar alguma função y_0' de R que não é definida em P_0, mas, sendo R uma região funcional linear, existirá todo uma vizinhança linear (A') de y_0' que pertence por inteiro a ela, onde A' é um conveniente conjunto fechado da região R_0', na qual y_0' é definida: sendo o ponto



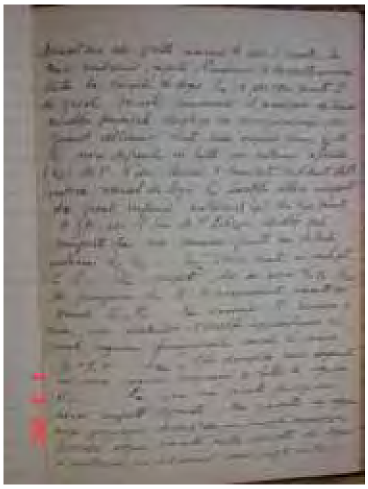
[NT25] Título 6 – Noção de espaço funcional: vizinhança de uma função analítica.

P_0 (FT63) externo a esta região, terá do conjunto fechado A' uma distância δ positiva; tomando, então, um número positivo $\delta' < \delta$ e excluídos eventualmente de R_0' os pontos que tiverem de P_0 uma distância menor ou igual a δ', obteremos sempre uma região R_0 (eventualmente coincidente com R_0') que conterá ainda o conjunto fechado *A*, já que todos os pontos deste têm de P_0 uma distância $\geq \delta > \delta'$. Chamando, então, de y_0 a função definida na própria região R_0, que nesta região

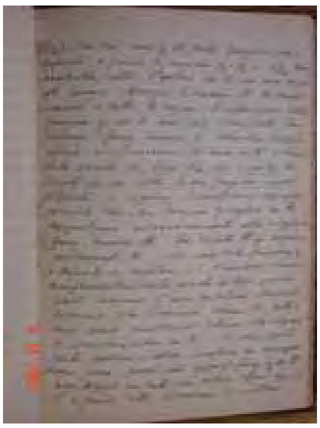


assume os mesmos valores de y_0' (função que coincidirá com y_0' se R_0 coincidir com R_0' e da qual y_0' será um prolongamento se R_0 for somente uma parte de R_0'), temos que esta função y_0, regular em R_0, pertencerá à vizinhança linear *(* A' *)* de y_0' e, portanto, também à região funcional *R*. Para os pontos da vizinhança *(* δ' *)* de P_0 que não pertencem com certeza a R_0, a função y_0 de *R* não está portanto definida, ou seja, esta vizinhança *(* δ' *)* de P_0 pertence ao conjunto *B*. Sendo P_0 um ponto qualquer de *B*, este conjunto resulta portanto uma região da variedade de Segre V_{2n}, como queríamos demonstrar e, logo, o conjunto complementar *A*, se não é vazio, com certeza é um conjunto fechado. (FT64)

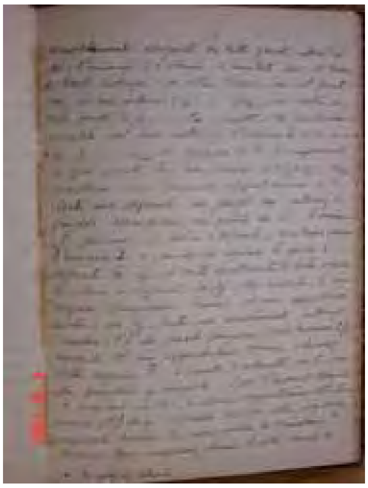
Demonstramos agora que este conjunto *A* não é vazio. Caso contrário, então, o conjunto *B* deverá invadir toda a variedade de Segre V_{2n}, e para cada ponto *P* desta variedade, pelo princípio de Zermelo, será possível escolher em correspondência, por tudo que temos visto, uma conveniente função y_P de *R* não definida em toda vizinhança esférica (δ_P) de P. O conjunto fechado e limitado, constituído pela variedade de Segre V_{2n} inteira, será então ocupado por estas infinitas vizinhanças



(δ_P) de seus pontos e, assim, pelo teorema de B. Lebesgue[NT26] será já ocupado por um número finito m de tais vizinhanças $\delta_{P_1}, \delta_{P_2}, \ldots \delta_{P_m}$, com centro nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_m$, respectivamente. Mas, se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de R são correspondentes, respectivamente, aos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_m$, sendo R linear e, por isto, um módulo, deverá pertencer a esta região funcional também a soma $y_1 + y_2 + \cdots + y_m$, que deverá, por sua vez, ser definida em uma região comum a todas as regiões $R_1, R_2, \ldots, R_m$, nas quais estas funções são respectivamente definidas. Mas, estas *m* regiões não podem ter nenhum ponto comum, uma vez que cada ponto da variedade de Segre está dentro de pelo menos uma das vizinhanças (FT65) (δ_{P_k}), na qual uma y_k desta função não é definida e, por isso, a soma



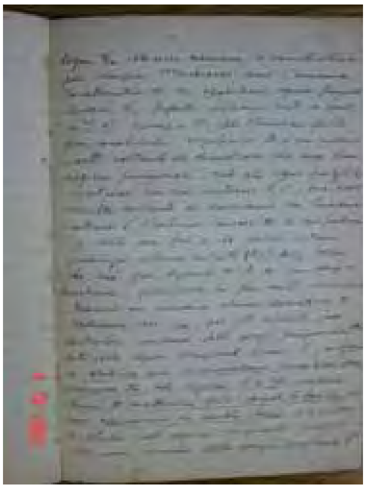
$y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ não existirá, contra a hipótese de que R seja uma região funcional linear. Portanto, o conjunto A dos pontos comuns a todas as regiões de definição das funções y de R não pode ser vazio; a região funcional linear R identifica sempre, então, um conjunto A não vazio e fechado da variedade de Segre V_{2n}, que é aquele dos pontos nos quais todas as suas funções são definidas e regulares. Demonstramos, agora, inversamente, que cada função y regular em A pertence necessariamente a alguma região funcional linear R. Seja, assim, R a região que contém A, onde uma tal função y é definida e regular, e I o conjunto fechado complementar sobre a variedade de Segre; dado que este conjunto I não possui qualquer elemento comum com o conjunto fechado A, todos os seus pontos resultam internos à região B, complementar de A. Para cada ponto P de I podemos então escolher em correspondência, como antes, uma conveniente função y_0 de R, não definida em toda vizinhança esférica (δ_P) de P e, portanto, todo o conjunto I estará (FT66) completamente coberto por todas estas vizinhanças (δ_P). Porém, o conjunto I é fechado e limitado e, pelo teorema de Borel-Lebesgue, pode-se encontrar um número finito m de tais vizinhanças $\delta_{P_1}, \delta_{P_2}, \ldots \delta_{P_m}$, com centro nos pontos $P_1, P_2, \ldots, P_m$, respectivamente, que recobrem no seu interior o conjunto I e se $y_1, y_2, \ldots, y_m$ são as funções de R correspondentes àqueles pontos, a sua soma $\overline{y} = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$ resultará uma função ainda pertencente a R. Com certeza não definida naquelas m vizinhanças e, portanto, também não nos pontos de I. O conjunto $\overline{I}$ no qual $\overline{y}$ não é definida, contém portanto o



conjunto I e, por isso, a região $\overline{R}$, onde é definida $\overline{y}$, está com certeza contida na região R, onde está definida y. Mas, sendo R uma região funcional linear, a essa pertencerá também, com $\overline{y}$, toda conveniente vizinhança linear (A') desta função

NT26 Teorema de Borel-Lebesgue.

(veja teorema I), com A' um conjunto fechado adequado da região $\overline{R}$ e, portanto, contido em *R*; ora, a função *y* inicial é apropriadamente definida e regular em *R* e por isso pertence à vizinhança linear *(* A' *)* de $\overline{y}$ e portanto, também, à região funcional linear *R*, como se quer demonstrar[NA4] e, vice-versa, cada conjunto fechado *A* da variedade de (FT67) Segre V_{2n}, que não esgota a própria variedade, pode sempre

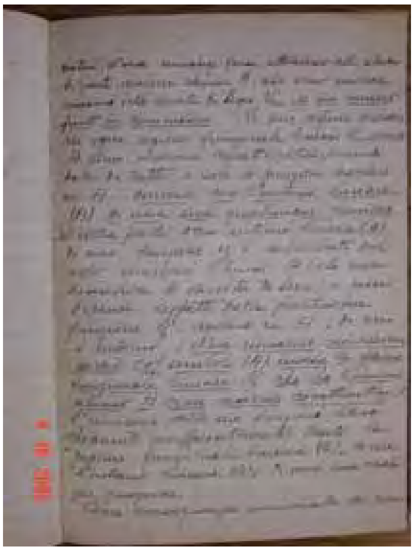


considerar-se como o conjunto característico de uma apropriada região funcional linear *R*. De fato, vimos neste nº 9, a), primeiro exemplo[NT27], que o conjunto das funções analíticas regulares em *A* é um módulo, restando, somente demonstrar que ele é uma região funcional, quer dizer, que para cada função $y_0(t_1,\ldots,t_n)$ ele contém uma sua vizinhança $(\overline{A},\sigma)$; ora, isto torna-se evidente se observarmos que o próprio conjunto é vizinhança linear *(A)* de qualquer uma de suas funções y_0 e que, por isso, contém qualquer vizinhança restrita (A,σ) de y_0. Note-se que uma função definida em *A* pode sempre ser construída tomando-se a função nula, seja onde for, exceto num conjunto fechado separado de *A*.

Vemos, assim, no que se refere àqueles particulares conjuntos do espaço funcional $\wp^{(n)}$ dados pelas regiões funcionais lineares *R*, que <u>se estabelece uma correspondência biunívoca sem exceção entre tais regiões *R* e seus conjuntos fechados *A* (característicos) da variedade de Segre V_{2n} que não esgotam a própria</u>

[NA4] Ver notas de Catunda.

variedade e, portanto, o estudo das regiões funcionais lineares que são conjuntos do espaço funcional $\wp^{(n)}$ (FT68) poderá, de agora em diante, ser feito através do estudo destes conjuntos fechados *A*, que são, ao contrário, conjuntos da variedade de Segre V_{2n}, a um número finito de dimensões. Pode-se, enfim, observar que cada região funcional linear *R*, tendo *A* como conjunto característico e sendo dada unicamente por todas as funções regulares em *A*, coincide com a vizinhança linear *(A)* de qualquer uma de suas funções. Por outro lado, cada vizinhança linear *(A)* de uma função y_0 é determinada pelo único conjunto fechado *A* (que não esgota a variedade de Segre) e não depende absolutamente da particular função y_0, regular em *A*, da qual é vizinhança; de agora em diante indicaremos, então, com o símbolo *(A)* também a região funcional linear *R* que tem o conjunto fechado *A* como conjunto característico, e o conjunto das suas funções será chamado indiferentemente tanto de “a região funcional linear *(A)*” como de “a vizinhança linear *(A)*” de uma qualquer de suas funções.



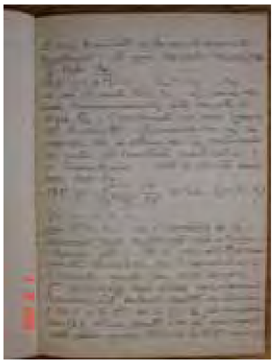
Como conseqüência imediata do teorema (FT69) II, ora demonstrado, tem-se afinal o seguinte:

Corolário – Se uma variedade analítica V_r dada por

(9,7) $$y = y(t_1, t_2, \ldots t_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

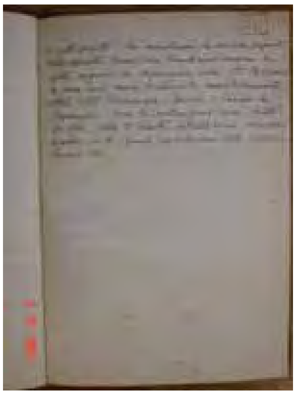
[NT27] Título 9, item (a), primeiro exemplo.

na qual o ponto $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ varia sobre uma Riemanniana Ω_r da variedade de Segre V_{2r}, está contida numa região funcional linear *(A)*; chamando de Ω'_r a região que se obtém de Ω_r, excluindo desta os eventuais pontos ao ∞ e de ramificação, toda a variedade analítica dada por



$$(9,8) \qquad y = \frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots+p_r}}{\partial\alpha_1^{p_1}\partial\alpha_2^{p_2}\ldots\partial\alpha_r^{p_r}} y(t_1, t_2, \ldots t_n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \qquad (p_1 - p_r = 0,1,2,\ldots)$$

<u>para $P(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ variável em Ω'_r, estará também contida na própria região funcional</u>. Que as derivadas (9,8) dão variedades analíticas para *P* variável sobre Ω'_r é evidente, já que elas são sempre funções analíticas dos mesmos $n+r$ argumentos (eventualmente constantes em relação a algumas delas) e as funções de $t_1, t_2, \ldots t_n$, que correspondem por (9,8) a um ponto *P* de Ω'_r, estão definidas na mesma região



P(P) que em (9,7) corresponde (FT70) a este ponto. Para manter a segunda propriedade da variedade analítica limitamos sempre a esta região a definição da função (9,8), mesmo que essa possa ser prolongada analiticamente a outra *R(P)*. De qualquer forma, dado que os campos de definições não se restringem nunca, todas as funções de *t* consagradas em (9,8) são sempre regulares em *A*, por isso, pertencem à região linear *(A)*. (FT71)

Apêndice 2

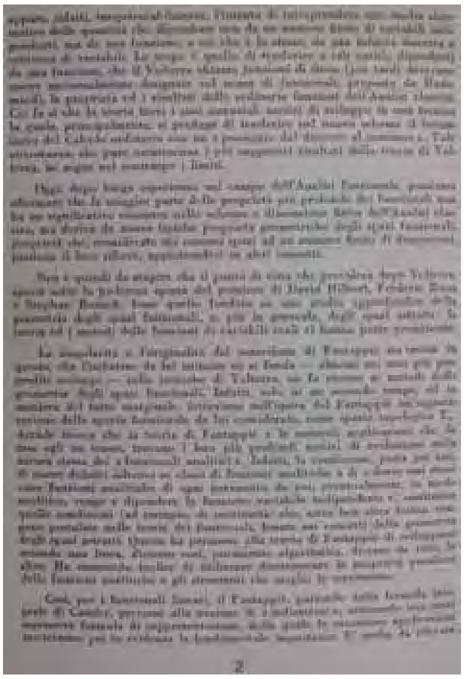
Luigi Fantappiè e *'Jornal de Matemática Pura e Aplicada'*: fotos

Luigi Fantappiè (1901-1954)

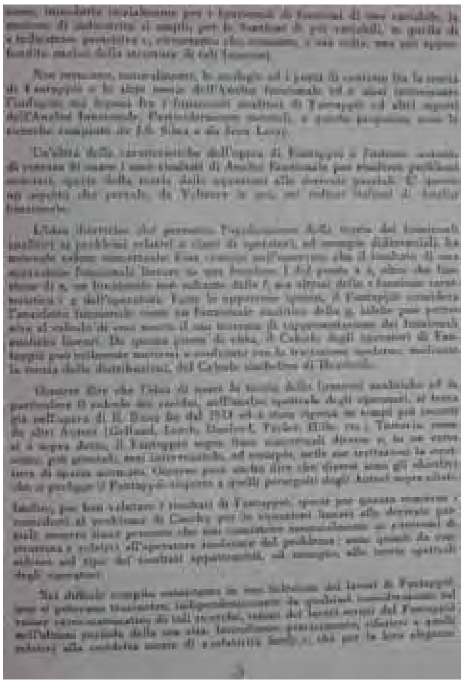
Biografia de Luigi Fantappiè em

‘Opere Scelte – Vol. 1 – Reprint – Roma: Unione Matematica Italiana, 1973’

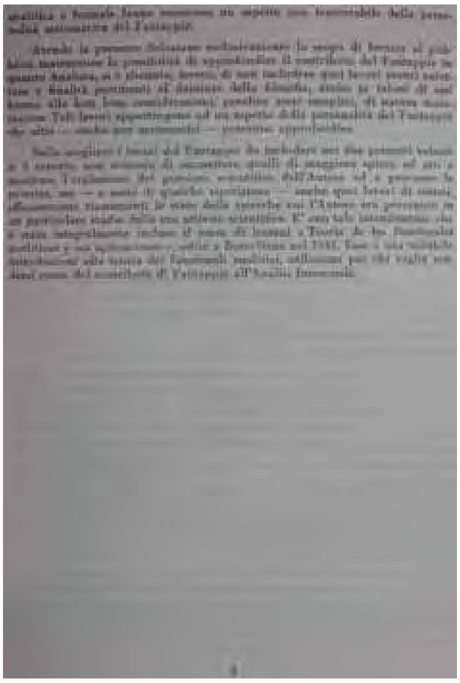
Página 1



Página 2



Página 3



Página 4

Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo

Editado por Luigi Fantappiè em 1936

Volume 1º — Fascículo 1º — Junho 1936

JORNAL DE MATEMÁTICA
PURA E APLICADA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

REDIGIDO PELOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA E FÍSICA
DA FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS:

Giacomo ALBANESE, da R. Universidade de Pisa (Italia)
Luigi FANTAPPIÈ, da R. Universidade de Bologna (Italia)
Gleb WATAGHIN, da R. Universidade de Torino (Italia)

DIRETOR
LUIGI FANTAPPIÈ
DIRETOR ADMINISTRATIVO
ERNESTO LUIZ DE OLIVEIRA JÚNIOR
SECRETÁRIO
NARCISO MENCIASSI LUPI

EDIÇÕES DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

IMPRENSA OFICIAL DO ESTADO
1936
S. PAULO — BRASIL

Capa do *'Jornal...'*

SUMÁRIO

Face interna da capa do *'Jornal...'*

Proprietà in grande delle linee piane convesse

Memoria di BENIAMINO SEGRE (a Bologna)

SUNTO — [illegible] **proprietà in grande** [illegible] **linee piane convesse.** [illegible]

PARTE PRIMA

GLI ARCHI CONVESSI

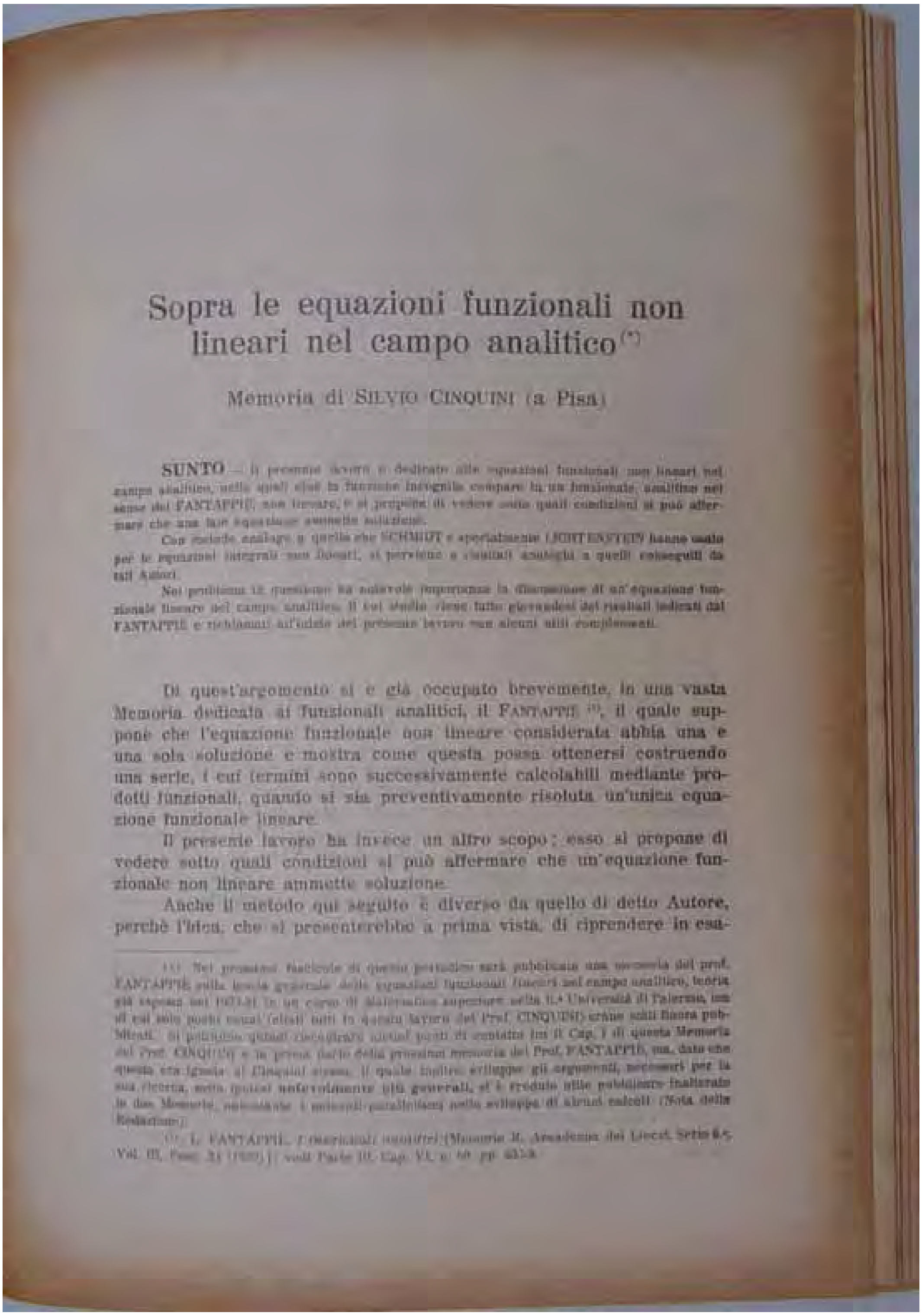
§ I. Generalità.

1. — Le *linee* che considereremo nel seguito si supporranno sempre *piane*, tutte *al finito*, e (salvo che nel § VII) dotate in ogni punto di *tangente* e di *curvatura non nulla*, variabile da punto a punto con *continuità*. Tali linee sono dunque **curve intuitive** nel senso di SEVERI [2].

[1] Vedi B. SEGRE, Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulla curvatura degli archi convessi soggetti a date condizioni agli estremi, [illegible] Proprietà in grande delle linee piane convesse [illegible] fra ovali [illegible] Proprietà in grande delle linee piane convesse: Sulle ovali inscritte e circoscritte ad un poligono convesso [illegible]

[2] Vedi F. SEVERI, Le curve intuitive, Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, t. 54 [illegible]

Primeira página da memória de Beniamino Segre – Página 1 do *‘Jornal...’*



Sopra le equazioni funzionali non lineari nel campo analitico(*)

Memoria di SILVIO CINQUINI (a Pisa)

Di quest'argomento si è già occupato brevemente, in una vasta Memoria dedicata ai funzionali analitici, il FANTAPPIÈ (1), il quale suppone che l'equazione funzionale non lineare considerata abbia una e una sola soluzione e mostra come questa possa ottenersi costruendo una serie, i cui termini sono successivamente calcolabili mediante prodotti funzionali, quando si sia preventivamente risoluta un'unica equazione funzionale lineare.

Il presente lavoro ha invece un altro scopo; esso si propone di vedere sotto quali condizioni si può affermare che un'equazione funzionale non lineare ammette soluzione.

Anche il metodo qui seguito è diverso da quello di detto Autore, perchè l'idea, che si presenterebbe a prima vista, di riprendere in esa-

Primeira página da memória de Silvio Cinquini – Página 41 do *'Jornal...'*

Seminário Matemático e Físico da Universidade de São Paulo

Com o intuito de estabelecer um mais intimo contato entre o orgão de alta cultura que é a Universidade de São Paulo e o público estudioso desta capital, resolveram os professores que ora lecionam nas sub secções de Ciências Físicas e Matemáticas da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, organizar um «Seminário Matemático» onde fossem abordadas questões referentes a êstes ramos dos conhecimentos humanos que, por sua natureza, não pudessem ser incluidos nos cursos normais.

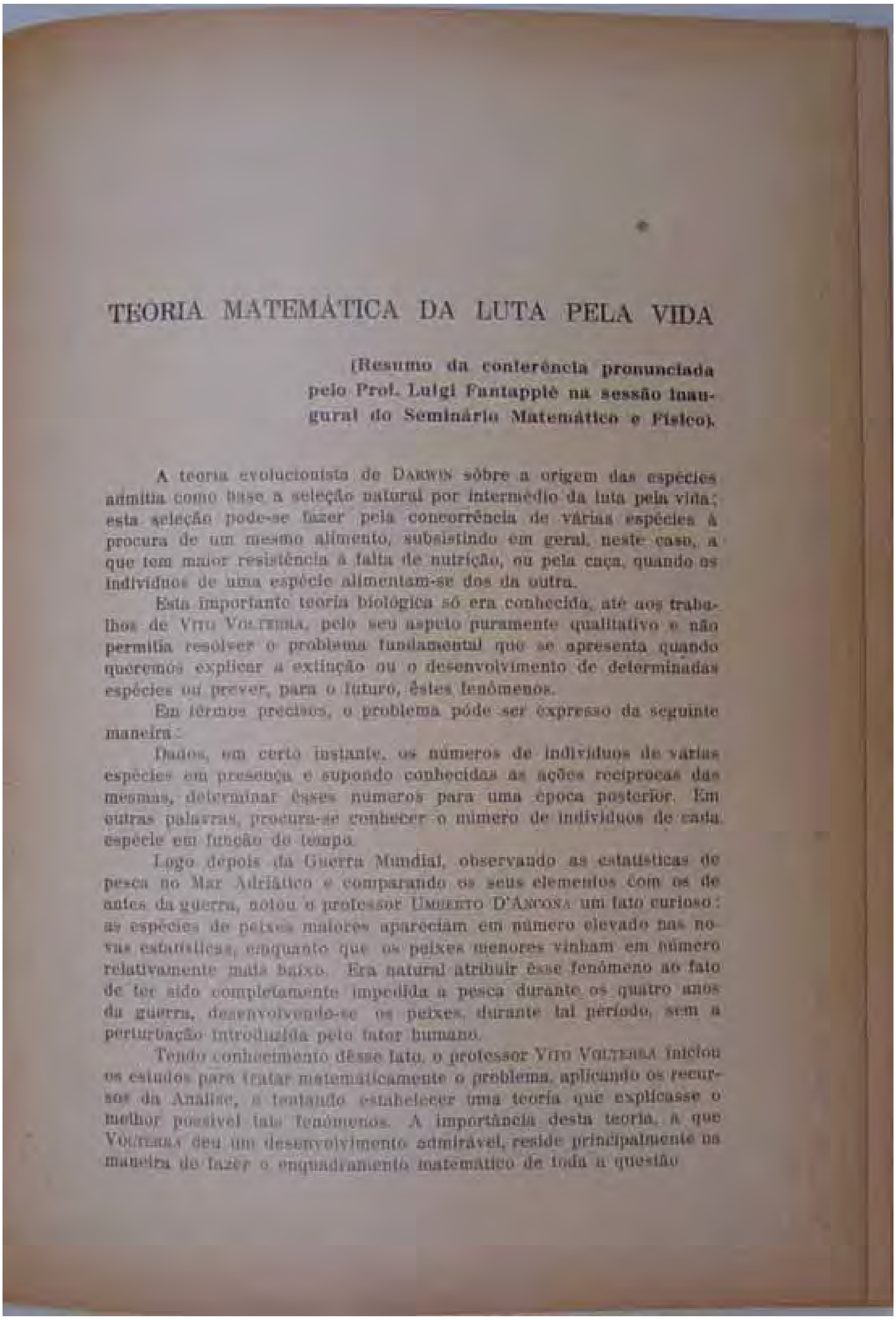
Destina-se tambem êste organismo a ser o ponto onde poderão ser apresentados ás rodas científicas, os trabalhos originais de professores e alunos.

O Instituto de Engenharia, compreendendo o alto valor do empreendimento, gentilmente cedeu o seu salão nobre para sala de conferencias.

Na reunião inaugural, em 7-5-35, falou o Prof. LUIGI FANTAPPIÈ, a respeito de recentes trabalhos do Prof VITO VOLTERRA sôbre a Teoria Matemática da Luta pela Vida.

Damos a seguir, um resumo de todas as conferências pronunciadas durante o ano de 1935.

Página 83 do *'Jornal...'*



TEORIA MATEMÁTICA DA LUTA PELA VIDA

(Resumo da conferência pronunciada pelo Prof. Luigi Fantappiè na sessão inaugural do Seminário Matemático e Físico).

A teoria evolucionista de DARWIN sôbre a origem das espécies admitia como base a seleção natural por intermédio da luta pela vida; esta seleção pode-se fazer pela concorrência de várias espécies à procura de um mesmo alimento, subsistindo em geral, neste caso, a que tem maior resistência à falta de nutrição, ou pela caça, quando os indivíduos de uma espécie alimentam-se dos da outra.

Esta importante teoria biológica só era conhecida, até aos trabalhos de VITO VOLTERRA, pelo seu aspeto puramente qualitativo e não permitia resolver o problema fundamental que se apresenta quando queremos explicar a extinção ou o desenvolvimento de determinadas espécies ou prever, para o futuro, êstes fenômenos.

Em têrmos precisos, o problema póde ser expresso da seguinte maneira:

Dados, em certo instante, os números de indivíduos de várias espécies em presença e supondo conhecidas as ações recíprocas das mesmas, determinar êsses números para uma época posterior. Em outras palavras, procura-se conhecer o número de indivíduos de cada espécie em função do tempo.

Logo depois da Guerra Mundial, observando as estatísticas de pesca no Mar Adriático e comparando os seus elementos com os de antes da guerra, notou o professor UMBERTO D'ANCONA um fato curioso: as espécies de peixes maiores apareciam em número elevado nas novas estatísticas, enquanto que os peixes menores vinham em número relativamente mais baixo. Era natural atribuir êsse fenômeno ao fato de ter sido completamente impedida a pesca durante os quatro anos da guerra, desenvolvendo-se os peixes, durante tal período, sem a perturbação introduzida pelo fator humano.

Tendo conhecimento dêsse fato, o professor VITO VOLTERRA iniciou os estudos para tratar matemàticamente o problema, aplicando os recursos da Análise, e tentando estabelecer uma teoria que explicasse o melhor possível tais fenômenos. A importância desta teoria, a que VOLTERRA deu um desenvolvimento admirável, reside principalmente na maneira de fazer o enquadramento matemático de toda a questão

Página 85 do *'Jornal...'*

São os raciocínios do Prof. VOLTERRA que expomos aqui.

Para evitar o emprego de grandezas descontínuas, e como a aproximação que se pode exigir nos calculos é da ordem de milhares de indivíduos ou talvez ainda menor, podemos, sem êrro sensível, substituir o número de indivíduos de uma espécie por uma grandeza N variável com continuidade em todo o campo de números reais positivos ou nulos, e que supomos função contínua e com derivadas contínuas em relação ao tempo t. O valor dessa função para um certo tempo t dará, com suficiente aproximação, o número de indivíduos existentes nessa época.

1. Consideremos preliminarmente o caso mais simples, qual seja o de uma espécie isolada podendo reproduzir-se livremente. A alteração do número N é sempre provocada pelos nascimentos e mortes e é natural admitir que seja proporcional ao número de indivíduos; essa alteração em relação ao tempo é medida pela derivada $\frac{dN}{dt}$.

Temos assim,

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N$$

Se outras causas exteriores não intervém, ε será constante e teremos

$$N = N_0 e^{\varepsilon t},$$

sendo N_0 o número de indivíduos no instante inicial $(t = 0)$.

2. Suponhamos agora que duas espécies com N_1 e N_2 indivíduos respetivamente, vivam em um mesmo ambiente, disputando o mesmo alimento; sejam ε_1 e ε_2 os coeficientes de acréscimo no caso delas se reproduzirem isoladamente, com abundância de alimento. Supondo que os números de indivíduos N_1 e N_2 existentes diminuam a quantidade de alimento de que cada um pode dispor na medida $h_1N_1 + h_2N_2$, cada espécie se resentirá dessa diminuição, e os coeficientes de acréscimo serão diminuidos. Neste caso obtemos o sistema de equações diferenciais

$$\frac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1(h_1N_1 + h_2N_2)]N_1 \qquad \frac{dN_2}{dt} = [\varepsilon_2 - \gamma_2(h_1N_1 + h_2N_2)]N_2$$

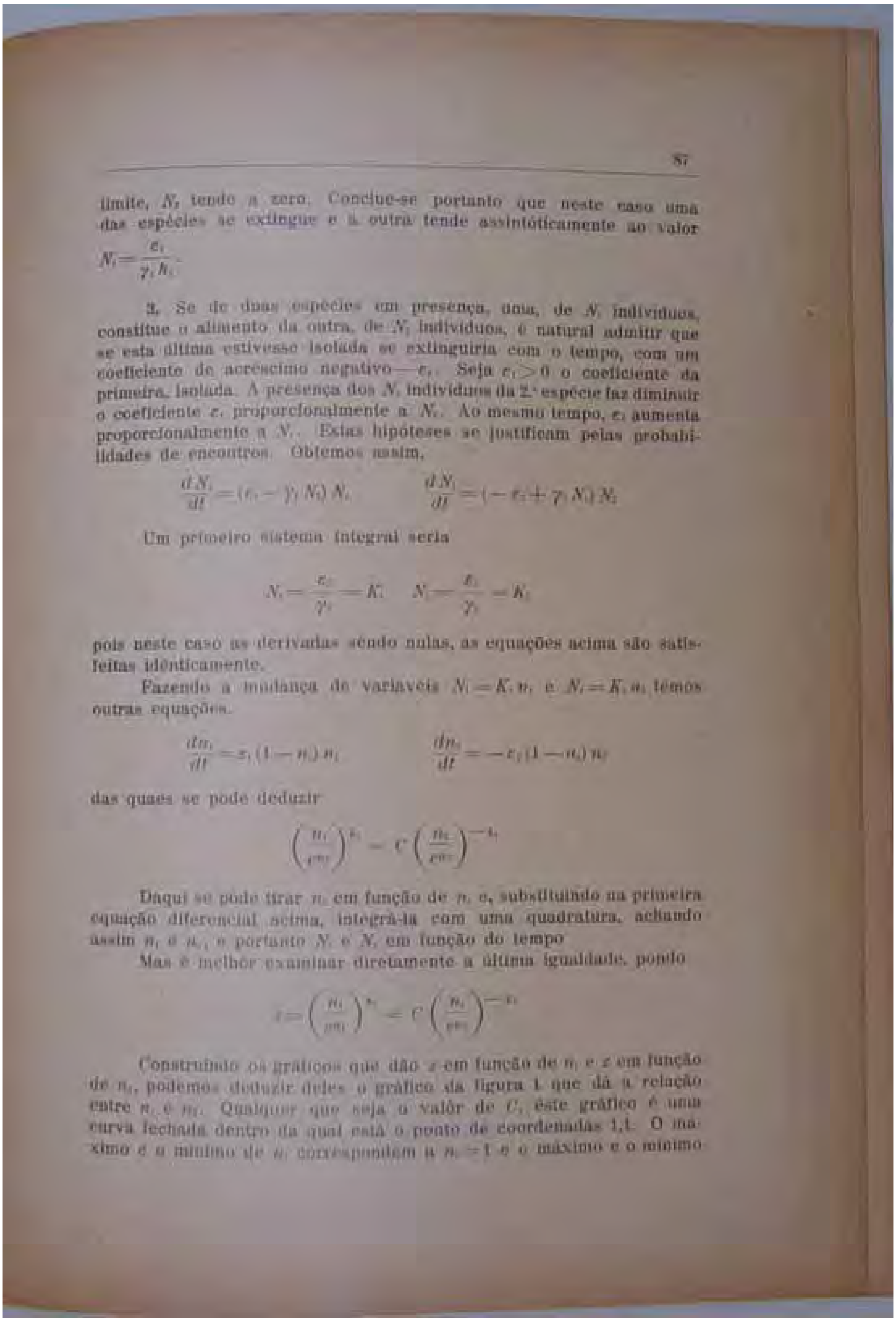
onde $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2, h_1, h_2$ são constantes positivas.

Destas equações tira-se uma integral

$$\frac{N_1^{\gamma_2}}{N_2^{\gamma_1}} = C e^{(\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1)t}$$

Supondo $\varepsilon_1\gamma_2 - \varepsilon_2\gamma_1 > 0$, pois o caso de ser nula esta quantidade é infinitamente pouco provável, vê-se que o segundo membro aumenta indefinidamente com t. Como N_1 não pode passar um certo

Página 86 do *'Jornal...'*



87

limite, N_2 tendo a zero. Conclue-se portanto que neste caso uma das espécies se extingue e a outra tende assintóticamente ao valor $N_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\gamma_1 h_1}$.

3. Se de duas espécies em presença, uma, de N_1 individuos, constitue o alimento da outra, de N_2 individuos, é natural admitir que se esta última estivesse isolada se extinguiria com o tempo, com um coeficiente de acréscimo negativo $-\varepsilon_2$. Seja $\varepsilon_1 > 0$ o coeficiente da primeira, isolada. A presença dos N_2 individuos da 2.ª espécie faz diminuir o coeficiente ε_1 proporcionalmente a N_2. Ao mesmo tempo, ε_2 aumenta proporcionalmente a N_1. Estas hipóteses se justificam pelas probabilidades de encontros. Obtemos assim,

$$\frac{dN_1}{dt} = (\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2)\, N_1 \qquad \frac{dN_2}{dt} = (-\varepsilon_2 + \gamma_2 N_1)\, N_2$$

Um primeiro sistema integral seria

$$N_1 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} = K_1 \qquad N_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = K_2$$

pois neste caso as derivadas sendo nulas, as equações acima são satisfeitas identicamente.

Fazendo a mudança de variaveis $N_1 = K_1 n_1$ e $N_2 = K_2 n_2$ temos outras equações.

$$\frac{dn_1}{dt} = \varepsilon_1 (1 - n_2)\, n_1 \qquad \frac{dn_2}{dt} = -\varepsilon_2 (1 - n_1)\, n_2$$

das quaes se pode deduzir

$$\left(\frac{n_1}{e^{n_1}}\right)^{\varepsilon_2} = C \left(\frac{n_2}{e^{n_2}}\right)^{-\varepsilon_1}$$

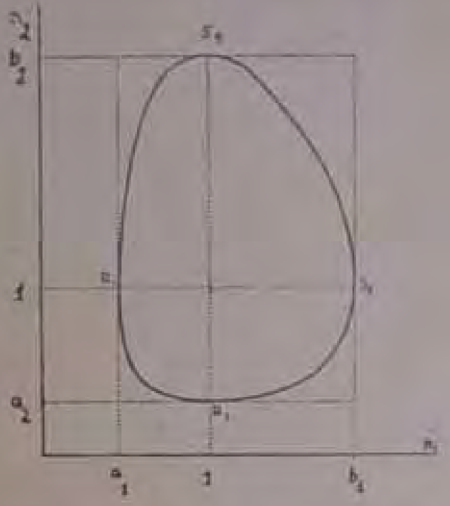
Daqui se pode tirar n_2 em função de n_1 e, substituindo na primeira equação diferencial acima, integrá-la com uma quadratura, achando assim n_1 e n_2, e portanto N_1 e N_2 em função do tempo

Mas é melhor examinar diretamente a última igualdade, pondo

$$z = \left(\frac{n_1}{e^{n_1}}\right)^{\varepsilon_2} = C \left(\frac{n_2}{e^{n_2}}\right)^{-\varepsilon_1}$$

Construindo os gráficos que dão z em função de n_1 e z em função de n_2, podemos deduzir deles o gráfico da figura 1 que dá a relação entre n_1 e n_2. Qualquer que seja o valôr de C, éste gráfico é uma curva fechada dentro da qual está o ponto de coordenadas 1,1. O máximo e o minimo de n_1 correspondem a $n_2 = 1$ e o máximo e o minimo

Página 87 do *'Jornal...'*



de n_2 correspondem a $n_1 = 1$. A cada valor n'_1 de n_1 correspondem dois valores n'_2 e n''_2 de n_2; a êstes correspondem sempre os mesmos valores n'_1 e n''_1 de n_1, de modo que podemos inscrever na curva uma infinidade de retangulos com lados paralelos aos eixos. Se percorrermos a curva num mesmo sentido, partindo de um par de valores n_{10} e n_{20} voltamos aos mesmos valores iniciais e portanto ás mesmas condições do ponto de partida; o fenomeno é, portanto, periódico sendo as flutuações de n_2 retardadas em relação ás de n_1. O tempo constante durante o qual se realiza um ciclo completo chama-se periodo T de flutuação.

Verifica-se tambem que o valôr médio tanto de n_1 como de n_2 durante um ciclo completo é

$$\frac{1}{T}\int_0^T n_1\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T n_2\,dt = 1$$

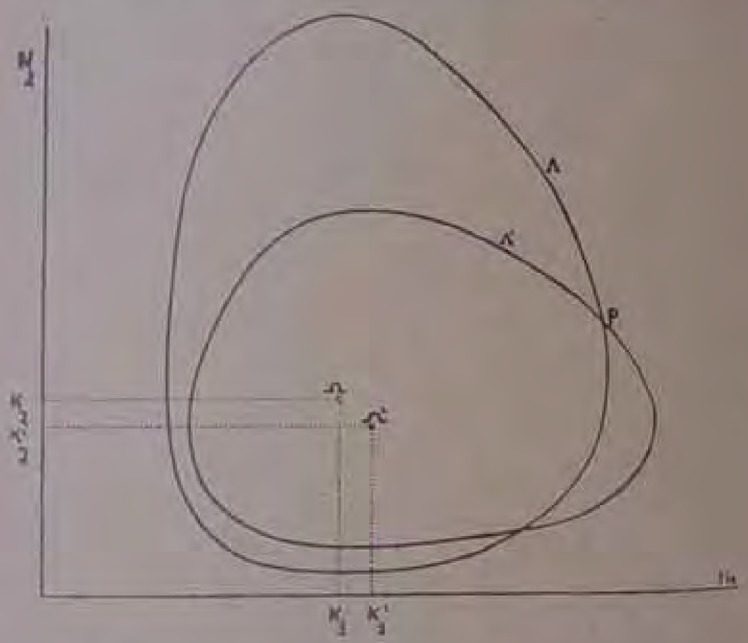
Êsses resultados para n_1 e n_2 permitem passar ao estudo dos números de indivíduos N_1 e N_2, multiplicando respetivamente n_1 e n_2 por K_1 e K_2. Interpretando os resultados obtidos, podemos assim enunciar as *leis fundamentais das flutuações* das espécies conviventes:

1.º — As flutuações das duas espécies são periódicas, e o periodo depende sómente das condições iniciais (constante C) e dos coeficientes ε_1 e ε_2. As flutuações da espécie que se nutre da outra são sempre retardadas em relação ás desta última.

Página 88 do *'Jornal...'*

2.ª — As médias dos números de indivíduos (K_1 e K_2) são constantes quaesquer que sejam as condições iniciais, desde que se mantenham constantes os coeficientes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2$.

3.ª — Se se destroem uniforme e proporcionalmente ao seu número os indivíduos das duas espécies (o que corresponde a aumentar ε_1 e diminuir ε_2), a média dos indivíduos da espécie perseguida cresce, ao passo que a dos indivíduos da outra espécie diminue. O gráfico da relação entre N_1 e N_2 fica alterado conforme se vê na figura 2.



Esta última lei se justifica recordando as expressões das médias K_1 e K_2.

Tal conclusão foi brilhantemente confirmada pelo fenómeno assinalado a princípio, da pesca no Mar Adriático. Com efeito, a pesca corresponde justamente a destruir todos os peixes, proporcionalmente ao seu número. A cessação da pesca durante a última guerra produziu um fenómeno que está inteiramente de acôrdo com a 3.ª lei. Alem disto outras estatísticas de pesca confirmaram tambem a existência do fenómeno de flutuação, conforme a 1.ª lei.

Note-se tambem que, no fundo o isolamento de doentes de molestias infecciosas, que se faz durante as epidemias, corresponde justa-

Página 89 do *'Jornal...'*

mente a afastar do ambiente tanto indivíduos da espécie perseguida (o homem) como da espécie que se nutre da primeira (os micro-organismos). O resultado é, de acôrdo com a teoria, uma diminuição desta ultima.

O Prof. Volterra, em trabalhos mais recentes, deu grande desenvolvimento a outros aspetos dêste interessante problema, examinando tambem os casos de várias espécies conviventes e considerando a influência das alterações do clima e da variedade de indivíduos na mesma espécie, considerações essas que exigem o emprego de equações integrais.

Prof. G. Wataghin — Sobre o desenvolvimento das teorias físicas.

O conferencista se propõe dar uma idéia do desenvolvimento da física moderna, segundo as necessidades dos problemas em estudo.

As teorias físicas conhecidas até o presente têm um campo de aplicação limitado. Por exemplo, a mecânica de Newton é aplicavel a fenômenos nos quais as velocidades dos corpos são despreziveis diante da velocidade da luz (simbòlicamente $\frac{v}{c} = 0$, ou $c = \infty$) e além disso, a «ação» dos corpos em estudo, isto é, o produto de uma genérica dimensão linear pelo impulso correspondente, ou tambem, produto da energia pelo tempo, é muito grande em relação à ação elementar h de Planck ($h = 6.10^{-27}$ e. s.).

Analogamente, na electrodinâmica de Maxwell e na teoria da relatividade restrita, considera-se a velocidade da luz como limite superior finito da velocidade de transmissão dos sinais ou da energia, mas supõe-se ainda $h = 0$ e desprezam-se os fenômenos da gravitação, igualando-se a zero a constante de gravitação k.

A mecânica do átomo, chamada «mecânica quântica», considera o caso $h \neq 0$, e com isto aplica-se ao movimento dos electrons em tôrno aos átomos, aos problemas da emissão e absorção da luz, à teoria dos compostos químicos e a alguns outros problemas relativos à estrutura atômica. É essa ainda, porém, uma teoria não relativística ($c = \infty$; $k = 0$).

Os problemas da física do nucleo e dos raios cósmicos requerem uma mecânica quântica relativística ($h \neq 0$, $c \neq \infty$).

O conferencista mostra os varios progressos realizados até hoje na teoria relativística do electron (equação de Dirac) e em alguns problemas particulares da física do núcleo (teoria dos raios β de Pauli e de Fermi).

Página 90 do *‘Jornal...’*

91

Omar Catunda — Exposição de uma memória de Abel sobre funções simétricas e teoremas de adição.

Como esta memória tem relação estreita com os teoremas de adição, a exposição começou por um esclarecimento sobre tais teoremas, deduzindo-se que de uma relação da forma

$$\varphi(u+v)=f(\varphi(u),\varphi(v)),$$

resulta que a função $f(x,y)$, que deve evidentemente ser simétrica em relação a x e y, gosa ainda da propriedade de simetria expressa pela igualdade

$$f(z,f(x,y))=f(x,f(z,y))$$

Ora, a memoria de ABEL em questão dá a reciproca deste teorema, isto é, demonstra que se uma função $f(x,y)$ satisfaz à relação acima, existe uma função de uma variavel $\psi(z)$, tal que se tenha

$$\psi f(x,y)=\psi(x)+\psi(y),$$

donde, sendo $\psi(x)=u$, $\psi(y)=v$ e sendo φ a função inversa de $\psi(x)$, temos

$$\varphi(u+v)=f(\varphi(u),\varphi(v)),$$

relação que exprime justamente o teorema de adição relativo à função $\varphi(u)$. A função $\psi(x)$ pode ser determinada como função primitiva de

$$\psi'(y)\,\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

em que se consideram constantes y e $\psi'(y)$. Estas constantes, assim como a constante de integração, são em geral faceis de determinar.

Candido Silva Dias — Demonstração do teorema de Lindemann.

Êste teorema, que dá uma solução definitiva ao problema da retificação da circumferência, pode-se enunciar sob a forma geral seguinte, da qual se deduzem varias conclusões interessantes:

Sendo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$, numeros algébricos não nulos, não pode subsistir nenhuma relação da forma

$$C_0+C_1e^{\lambda_1}+C_2e^{\lambda_2}+\ldots\ldots+C_ke^{\lambda_k}=0$$

sendo os coeficientes $C_0, C_1, \ldots C_k$, números algébricos não todos nulos.

Página 91 do *'Jornal...'*

A demonstração foi feita segundo CIPOLLA, por meio de tres lemas preliminares, em que se aplicam as propriedades mais elementares dos números algébricos.

Do teorema anterior resulta:

1.º — Que, existindo a relação

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

π é forçosamente um numero transcendente, logo não é possivel construir, por meio de curvas algébricas, em particular, circulos e retas (construções por meio de regua e compasso), um segmento de grandeza 2π, que daria a retificação da circumferencia de raio 1.

2.º — Que, sendo $\alpha = e^{\lambda}$, temos $\lambda = \log \alpha$, donde deduzimos que todo número algébrico diferente de 1 e de 0 tem logaritmo transcendente.

3.º — Das relações

$$2 \cos x = e^{ix} + e^{-ix} \qquad 2 i \operatorname{sen} x = e^{ix} - e^{-ix}$$

deduz-se que se x é um número algébrico não nulo, as quantidades $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ são forçosamente números transcendentes.

Mario Schenberg — Números transfinitos.

Partindo de exemplos elementares, o conferencista mostrou como se pode definir rigorosamente o conceito de potência de um conjunto qualquer, dando como exemplos a potência dos conjuntos enumeraveis e a potência do continuo.

Demonstrou o teorema de CANTOR sobre a potência dos continuos e a seguir o de NOETHER-LÜROTH, sobre a impossibilidade de uma correspondencia biunivoca e bicontinua (homeomorfismo) entre conjuntos de número de dimensões diferentes, chegando a uma definição de dimensionalidade.

Deu finalmente o processo de construcção de novos conjuntos de potências crescentes, mostrando a possibilidade do estabelecimento de uma aritmética dos números transfinitos.

Miguel Ângelo Aguiar — Números complexos com um número qualquer de unidades.

Nesta palestra foi desenvolvido o estudo dos números complexos com n unidades, satisfazendo a propriedade distributiva.

Página 92 do *'Jornal...'*

Mostrou o conferencista as conseqüências a que levam as hipóteses de serem válidas as propriedades associativa, comutativa, e a da não existencia de divisores do zero. Demonstrou que a imposição simultânea dessas três propriedades acarreta a redução das unidades fundamentais a duas, sendo que uma delas dá origem a uma álgebra isomorfa com a dos números reais.

Terminou fazendo algumas considerações sobre certas álgebras particulares, como a dos quatérnios.

Prof. L. Fantappiè — O desenvolvimento da Matemática nos últimos cincoenta anos e no futuro próximo.

Nesta palestra o prof. Fantappiè reproduz a conferência que fez na Academia de Ciências, no Rio de Janeiro.

Mostrou primeiramente as vantagens de ser conhecido o progresso últimamente realizado, pois êste conhecimento serve de base à orientação dos jovens matemáticos, mostrando os campos que podem mais fàcilmente ser explorados por quem se inicia nesta ciência.

Passou em seguida a examinar as conquistas mais recentes da Matemática, que foram divididas em duas categorias:

I) conquistas isoladas, novos teoremas ou capítulos que entram no quadro de teorias já conhecidas.

II) teorias inteiramente novas, formando novos grandes ramos da Matemática e que são os campos mais férteis para serem explorados.

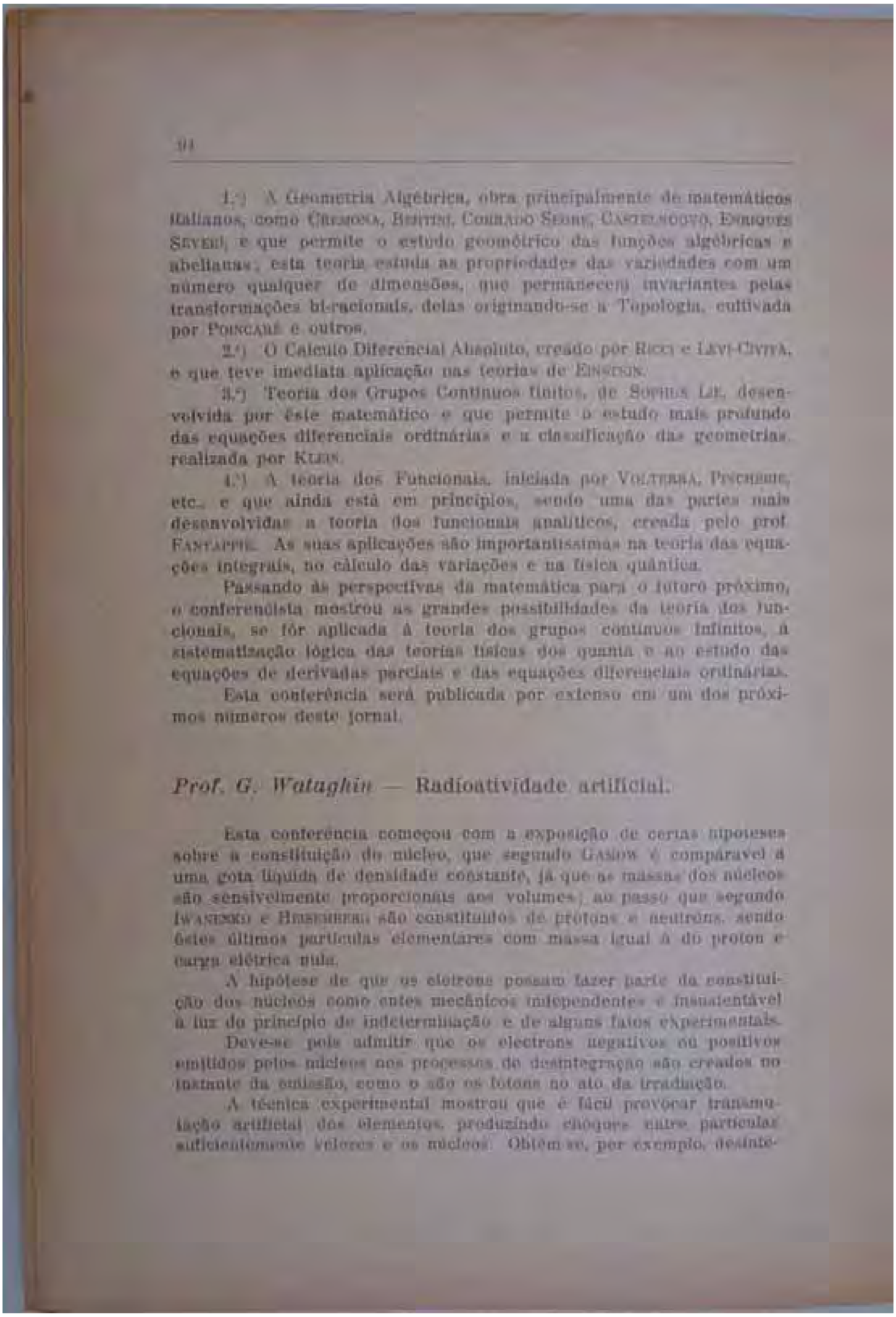
Quanto à primeira parte, enunciou o conferencista os resultados obtidos na Aritmética por Hadamard, Riemann (função zeta), etc. No campo das funções analíticas, referiu-se aos teoremas de Picard, aos trabalhos de Poincaré sôbre funções automorfas, aos de Goursat sôbre as funções hipergeométricas e ao desenvolvimento e aplicação à Física, do estudo de equações diferenciais particulares, como a de Bessel. Em outros campos, falou sobre os trabalhos de Fréchet, Julia, Schröder, e muitos outros.

Mostrou a continuação do trabalho de revisão crítica, iniciada por Bolzano, Cauchy, Weierstrass, etc., e continuada por Cantor, Dedekind, Peano e outros, que deram a base lógica da teoria dos números, e referiu-se aos trabalhos de Veronese, Pieri, sobre Geometria.

Falou sôbre os trabalhos de Borel sobre séries divergentes e os de Riquier e Poincaré sobre a teoria das equações de derivadas parciais, e finalmente sobre o cálculo de variações, a que Tonelli deu uma base sólida, com os seus «Fondamenti».

Passando à 2.ª categoria, mostrou o conferencista como se desenvolveram os quatro grandes ramos inteiramente novos:

Página 93 do *'Jornal...'*



94

1.º) A Geometria Algébrica, obra principalmente de matemáticos italianos, como CREMONA, BERTINI, CORRADO SEGRE, CASTELNUOVO, ENRIQUES, SEVERI, e que permite o estudo geométrico das funções algébricas e abelianas; esta teoria estuda as propriedades das variedades com um número qualquer de dimensões, que permanecem invariantes pelas transformações bi-racionais, delas originando-se a Topologia, cultivada por POINCARÉ e outros.

2.º) O Calculo Diferencial Absoluto, creado por RICCI e LEVI-CIVITA, e que teve imediata aplicação nas teorias de EINSTEIN.

3.º) Teoria dos Grupos Continuos finitos, de SOPHUS LIE, desenvolvida por êste matemático e que permite o estudo mais profundo das equações diferenciais ordinárias e a classificação das geometrias, realizada por KLEIN.

4.º) A teoria dos Funcionais, iniciada por VOLTERRA, PINCHERLE, etc., e que ainda está em principios, sendo uma das partes mais desenvolvidas a teoria dos funcionais analiticos, creada pelo prof. FANTAPPIÈ. As suas aplicações são importantissimas na teoria das equações integrais, no cálculo das variações e na fisica quântica.

Passando ás perspectivas da matemática para o futuro próximo, o conferencista mostrou as grandes possibilidades da teoria dos funcionais, se fôr aplicada á teoria dos grupos continuos infinitos, á sistematização lógica das teorias fisicas dos quanta e ao estudo das equações de derivadas parciais e das equações diferenciais ordinárias.

Esta conferência será publicada por extenso em um dos próximos números deste jornal.

Prof. G. Wataghin — Radioatividade artificial.

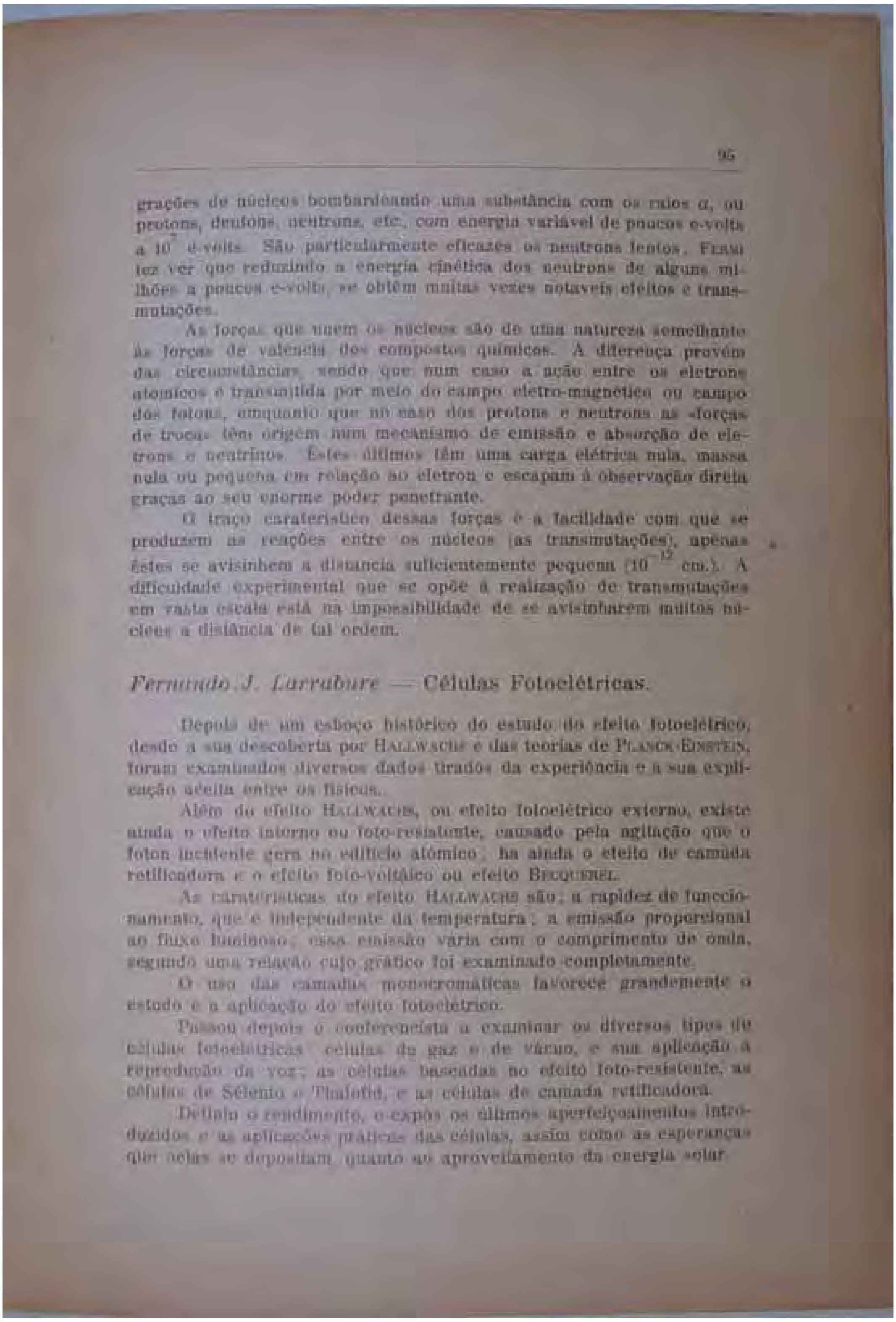
Esta conferência começou com a exposição de certas hipoteses sobre a constituição do núcleo, que segundo GAMOW é comparavel a uma gota liquida de densidade constante, já que as massas dos núcleos são sensivelmente proporcionais aos volumes; ao passo que segundo IWANENKO e HEISENBERG são constituidos de protons e neutrons, sendo êstes últimos particulas elementares com massa igual á do proton e carga elétrica nula.

A hipótese de que os eletrons possam fazer parte da constituição dos núcleos como entes mecânicos independentes é insustentável á luz do principio de indeterminação e de alguns fatos experimentais.

Deve-se pois admitir que os electrons negativos ou positivos emitidos pelos núcleos nos processos de desintegração são creados no instante da emissão, como o são os fotons no ato da irradiação.

A técnica experimental mostrou que é fácil provocar transmutação artificial dos elementos, produzindo chóques entre particulas suficientemente velozes e os núcleos. Obtém-se, por exemplo, desinte-

Página 94 do *'Jornal...'*



95

grações de núcleos bombardeando uma substância com os raios α, ou protons, deutons, neutrons, etc., com energia variável de poucos e-volts a 10^7 e-volts. São particularmente eficazes os neutrons lentos. Fermi fez ver que reduzindo a energia cinética dos neutrons de alguns milhões a poucos e-volts, se obtêm muitas vezes notaveis efeitos e transmutações.

As forças que unem os núcleos são de uma natureza semelhante às forças de valência dos compostos químicos. A diferença provém das circumstâncias, sendo que num caso a ação entre os eletrons atomicos é transmitida por meio do campo eletro-magnético ou campo dos fotons, emquanto que no caso dos protons e neutrons as «forças de troca» têm origem num mecanismo de emissão e absorção de eletrons e neutrinos. Êstes últimos têm uma carga elétrica nula, massa nula ou pequena em relação ao eletron e escapam à observação direta graças ao seu enorme poder penetrante.

O traço caraterístico dessas forças é a facilidade com que se produzem as reações entre os núcleos (as transmutações), apenas êstes se avisinhem a distancia suficientemente pequena (10^{-12} cm.). A dificuldade experimental que se opõe à realização de transmutações em vasta escala está na impossibilidade de se avisinharem muitos núcleos a distância de tal ordem.

Fernando J. Larrabure — Células Fotoelétricas.

Depois de um esboço histórico do estudo do efeito fotoelétrico, desde a sua descoberta por Hallwachs e das teorias de Planck-Einstein, foram examinados diversos dados tirados da experiência e a sua explicação aceita entre os físicos.

Além do efeito Hallwachs, ou efeito fotoelétrico externo, existe ainda o efeito interno ou foto-resistente, causado pela agitação que o foton incidente gera no edifício atómico; ha ainda o efeito de camada retificadora e o efeito foto-voltáico ou efeito Becquerel.

As caraterísticas do efeito Hallwachs são: a rapidez de funccionamento, que é independente da temperatura; a emissão proporcional ao fluxo luminoso; essa emissão varia com o comprimento de onda, segundo uma relação cujo gráfico foi examinado completamente.

O uso das camadas monocromáticas favorece grandemente o estudo e a aplicação do efeito fotoelétrico.

Passou depois o conferencista a examinar os diversos tipos de células fotoelétricas: células de gaz e de vácuo, e sua aplicação à reprodução da voz; as células baseadas no efeito foto-resistente, as células de Sélenio e Thalofid, e as células de camada retificadora.

Definiu o rendimento, e expôs os últimos aperfeiçoamentos introduzidos e as aplicações práticas das células, assim como as esperanças que nelas se depositam quanto ao aproveitamento da energia solar.

Página 95 do *‘Jornal...’*

Omar Catunda — Demonstração do teorema de Jordan sobre curvas fechadas.

A demonstração do teorema foi feita por etapas, seguindo a demonstração original do proprio JORDAN, e a demonstração mais simples, de F. SEVERI, no seu curso de Topologia feito em Buenos Ayres.

Depois de algumas recordações sobre os conjuntos de pontos de um plano e sobre a definição de homeomorfismo, foi dada rigorosamente a noção analitica de curva plana aberta e fechada, e demonstrada a possibilidade de se inscrever numa curva fechada um poligono tendo da mesma um desvio arbitrario e sem pontos duplos.

O teorema de JORDAN pode-se enunciar como se segue:

Uma curva de JORDAN fechada λ divide o plano em duas regiões, uma finita e simplesmente conexa, outra infinita e duplamente conexa.

Dada a definição rigorosa de região do plano, vê-se que o enunciado dêste teorema contem em si os seguintes, em que λ designa uma curva fechada:

1.º Os pontos do plano que não pertencem a λ estão divididos por λ em dois conjuntos que não são vazios, o primeiro dos quaes é limitado: pontos interiores e pontos exteriores.

2.º Si um ponto P é interior (exterior) a λ, ha um intorno de P formado sòmente de pontos interiores (ou exteriores).

3.º Não se pode passar de um ponto exterior a um ponto interior por uma linha de JORDAN aberta sem passar por λ.

4) Dois pontos interiores (ou exteriores) podem sempre unir-se por uma poligonal constituida sòmente de pontos interiores (ou exteriores).

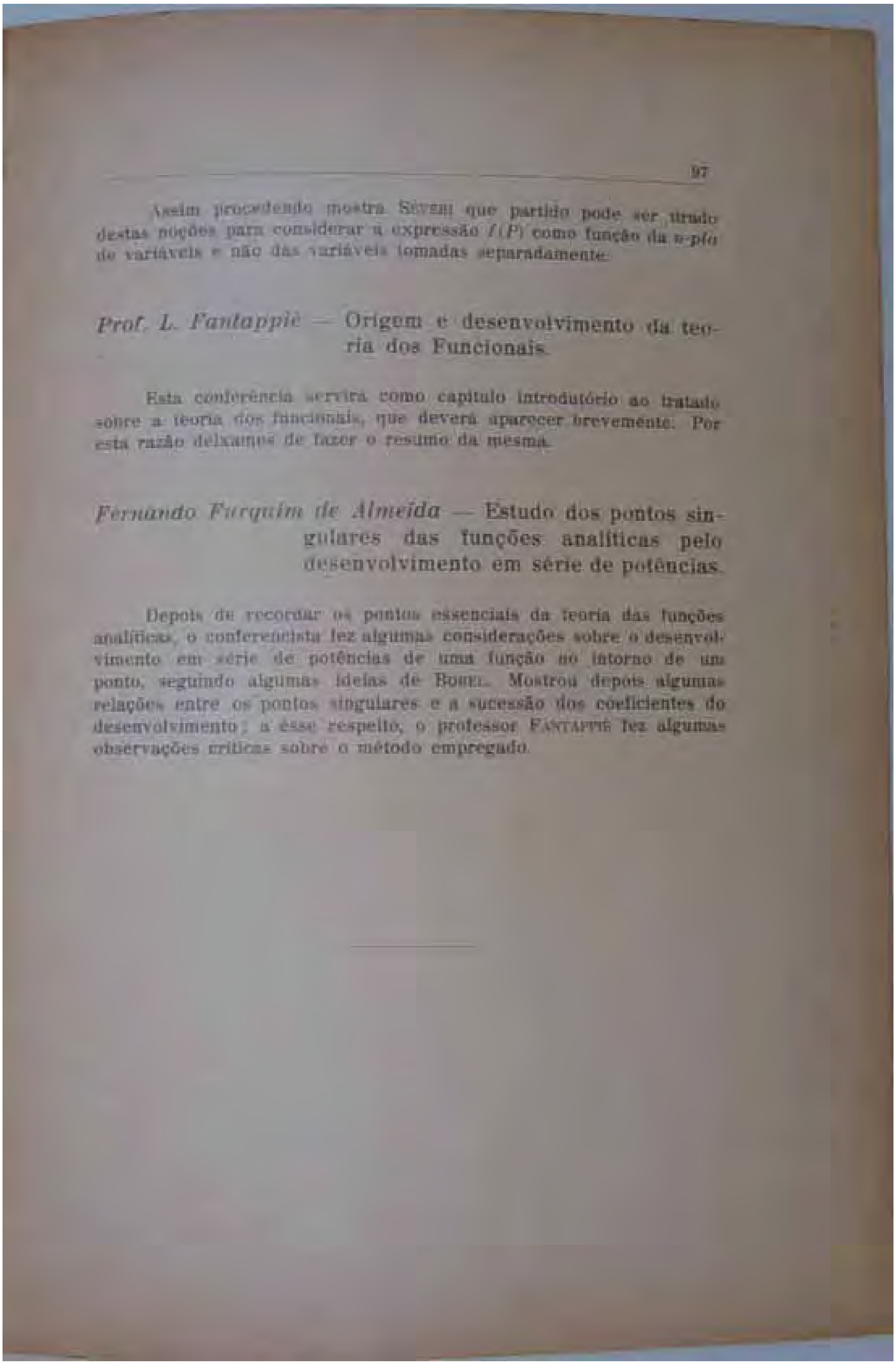
A demonstração foi feita: 1.º), para as linhas poligonais; 2.º), para as que têm um trecho poligonal; 3.º) para as linhas de JORDAN quaisquer.

Julio Rabin — Sobre a diferenciabilidade total das funções de mais de uma variável real

Esta palestra consistiu na exposição da memoria de SEVERI, intitulada «Sulla differenziabilità totale delle funzioni di più variabili reali», Ann. di Mathematica, Serie 4.ª, t. 13.

Introduzindo novos conceitos, quais sejam os de semitangente e corda impropria de um conjunto (I) em um seu ponto de acumulação, o conferencista mostra como SEVERI consegue obter um grupo de resultados acerca de condições necessarias e suficientes para a diferenciabilidade e [illegible] de uma função em um ou em todos os pontos de um dominio. Para enunciar estas condições são introduzidas as noções de derivada, ultraderivada e hiperderivada direcional da função em um ponto de acumulação do conjunto em que ella é definida assim como as derivadas parciais generalizadas.

Página 96 do *'Jornal...'*



97

Assim procedendo mostra SEVERI que partido pode ser tirado destas noções para considerar a expressão $f(P)$ como função da *n-pla* de variáveis e não das variáveis tomadas separadamente.

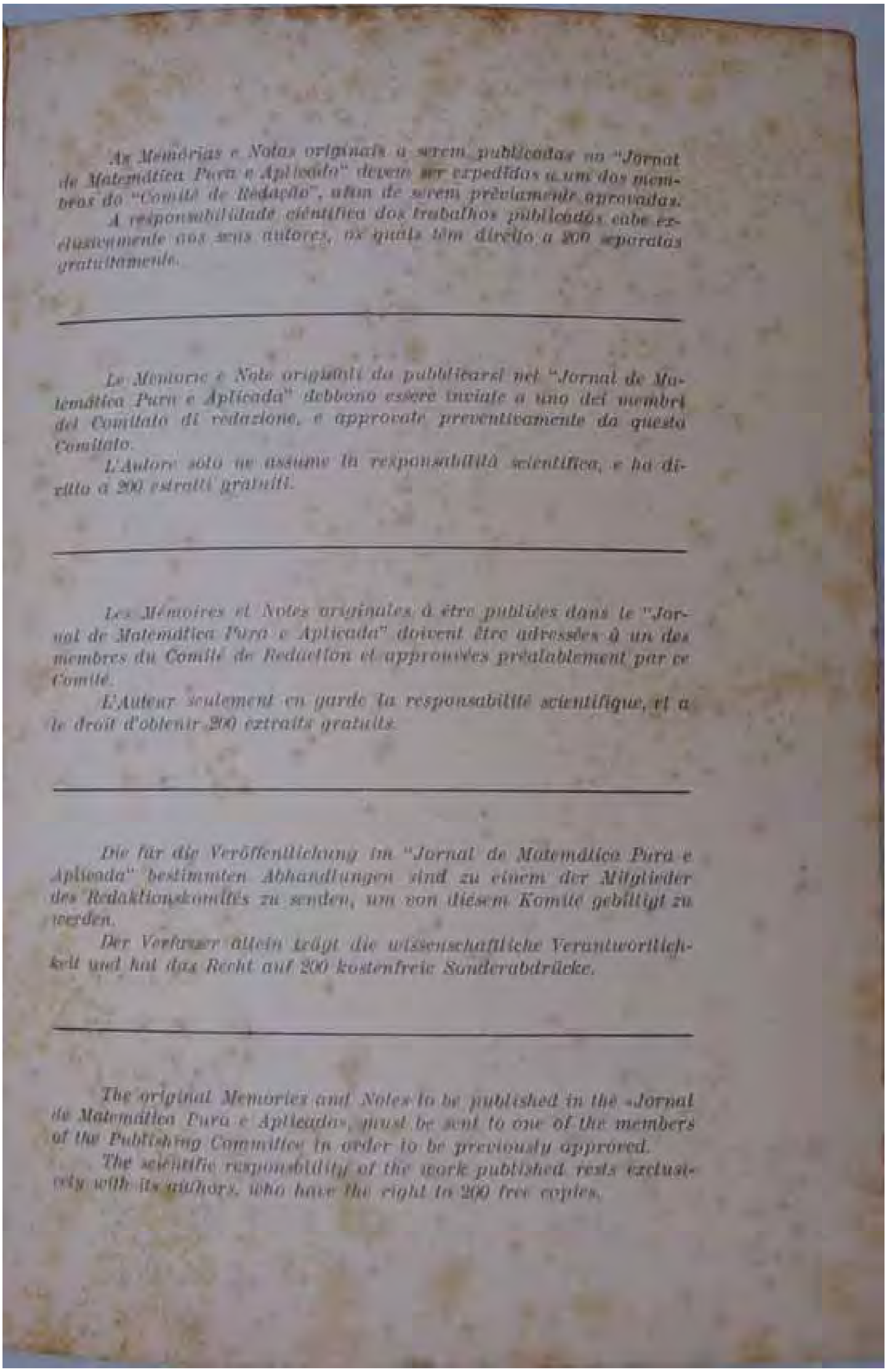
Prof. L. Fantappiè — Origem e desenvolvimento da teoria dos Funcionais.

Esta conferência servirá como capítulo introdutório ao tratado sobre a teoria dos funcionais, que deverá aparecer brevemente. Por esta razão deixamos de fazer o resumo da mesma.

Fernando Furquim de Almeida — Estudo dos pontos singulares das funções analíticas pelo desenvolvimento em série de potências.

Depois de recordar os pontos essenciais da teoria das funções analíticas, o conferencista fez algumas considerações sobre o desenvolvimento em série de potências de uma função no intorno de um ponto, seguindo algumas ideias de BOREL. Mostrou depois algumas relações entre os pontos singulares e a sucessão dos coeficientes do desenvolvimento; a êsse respeito, o professor FANTAPPIÈ fez algumas observações críticas sobre o método empregado.

Página 97 (última página) do *'Jornal...'*



As Memórias e Notas originais a serem publicadas no "Jornal de Matemática Pura e Aplicada" devem ser expedidas a um dos membros do "Comitê de Redação", afim de serem prèviamente aprovadas.
A responsabilidade científica dos trabalhos publicados cabe exclusivamente aos seus autores, os quais têm direito a 200 separatas gratuitamente.

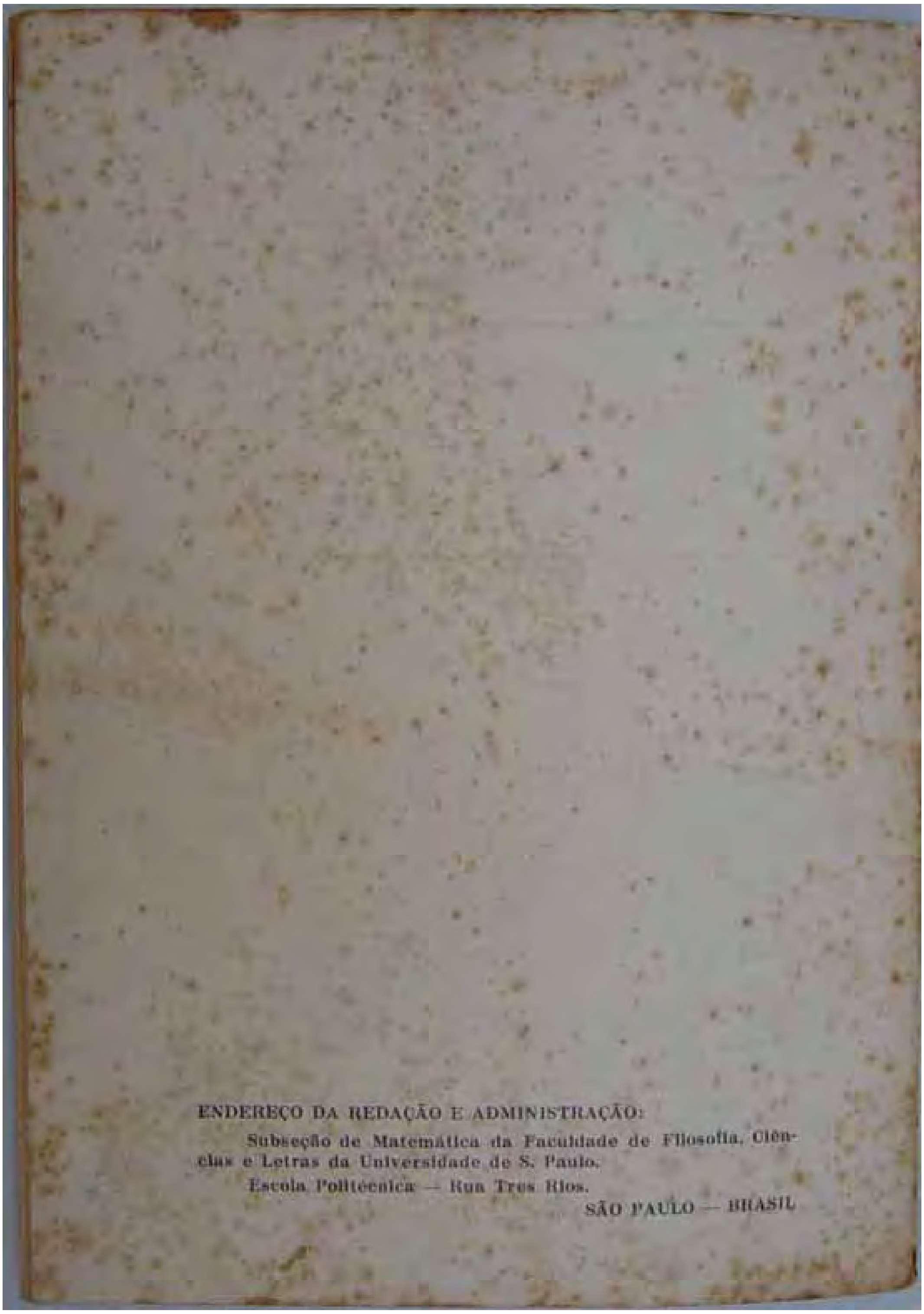
Le Memorie e Note originali da pubblicarsi nel "Jornal de Matemática Pura e Aplicada" debbono essere inviate a uno dei membri del Comitato di redazione, e approvate preventivamente da questo Comitato.
L'Autore solo ne assume la responsabilità scientifica, e ha diritto a 200 estratti gratuiti.

Les Mémoires et Notes originales à être publiées dans le "Jornal de Matemática Pura e Aplicada" doivent être adressées à un des membres du Comité de Rédaction et approuvées préalablement par ce Comité.
L'Auteur seulement en garde la responsabilité scientifique, et a le droit d'obtenir 200 extraits gratuits.

Die für die Veröffentlichung im "Jornal de Matemática Pura e Aplicada" bestimmten Abhandlungen sind zu einem der Mitglieder des Redaktionskomitës zu senden, um von diesem Komitë gebilligt zu werden.
Der Verfasser allein trägt die wissenschaftliche Verantwortlichkeit und hat das Recht auf 200 kostenfreie Sonderabdrücke.

The original Memories and Notes to be published in the «Jornal de Matemática Pura e Aplicada», must be sent to one of the members of the Publishing Committee in order to be previously approved.
The scientific responsability of the work published rests exclusively with its authors, who have the right to 200 free copies.

Face interna da contra-capa do *'Jornal..."*



Contra-capa do *'Jornal...'*

Referências Bibliográficas

ARBOLEDA, L. C. *Historia y Enseñanza de las Matematicas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 1983 (Epistemologia, Historia y Didactica de la Matematica, v.IV).

ARENDT, H. *On revolution*. [Harmondsworth, Eng.]: Penguin, 1973, c1965. 350p.

ASSIS, M. *Quincas Borba*. 5ª Edição. São Paulo: Ática, 1982. 191p.

BASSANEZI, R. C. & FERREIRA JR., W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. São Paulo: Harbra, 1988. 572p.

BLOCH, M. L. B. *Apologia da história, ou, O ofício de historiador*. Tradução de André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2001. 159p.

BOHR, N. *Sobre a Constituição de Átomos e Moléculas*. 2ª Edição. Tradução de Egídio Namorado. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1979. 202p.

BORBA, M. de C. (editor) *Boletim de Educação Matemática* – BOLEMA, ano 14, nº 15, 2001.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 3ª edição. Lisboa: Gradiva, 2000. 327p.

CASTRO, F. M. de O. *A matemática no Brasil*. Campinas: Editora da UNICAMP, 1992. 80p.

CATUNDA, O. *Curso de análise matemática*. São Paulo: Bandeirantes, 1952.

CHAUÍ, M. *Convite à Filosofia*. 13ª Edição. São Paulo: Ática, 2003. 424p.

COUTINHO, S. C. *Números Inteiros e Criptografia RSA*. 2ª Edição; 2ª Impressão. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. 226p.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*. São Paulo: Ática. 1993. 88p.

D'AMBROSIO, U. A Historiographical Proposal for Non-western Mathematics. *Mathematics Across Cultures. The History of Non-Western Mathematics*, ed. Helaine Selin, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000; pp.79-92.

DE BONI, L. A. (org.) *A presença italiana no Brasil*. Porto Alegre: EST; Fundazione Giovanni Agnelli, 1987. 536p.

DIAS, C. L. S. *Espaços vetoriais topológicos e sua aplicação na teoria dos espaços funcionais analíticos*. São Paulo: Graf. S. João, 1951. 66p.

EINSTEIN, A. *A Teoria da Relatividade Especial e Geral*. Tradução de Carlos Almeida Pereira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1999. 136p.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. 3ª edição. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2002 (Coleção Repertórios). 844p.

FANTAPPIÈ, L. *I Funzionali analitici*., Cagliari: S.N.,1928.

FANTAPPIÈ, L. *Funzionali delle funzioni di due variabilli*. Roma: S.N., 1930.

FANTAPPIÈ, L. (diretor) *Jornal de Matemática Pura e Aplicada da Universidade de São Paulo*. São Paulo: Edições da Universidade de São Paulo, 1936 (Volume 1º - Fascículo 1º - Junho). 97p.

FANTAPPIÈ, L. *Lo spazio funzionale analitico come spazio topologico* T_0. Roma: Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1940. 7p.

FANTAPPIÈ, L. *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici*. Roma: Reale Istituto Nazionale di Alta Matematica, 1940. 88p.

FANTAPPIÈ, L. *Teoria de los funcionales analiticos y sus aplicaciones*. Barcelona: Consejo Superior de Investtigaciones Científicas, 1943. 56p.

FANTAPPIÈ, L. *Opere Scelte*. Vol.1. Reprint. Roma: Unione Matematica Italiana, 1973.

FAUSTO, B. *A revolução de 1930: historiografia e história* – 16ª edição revista e ampliada; 2ª reimpressão. São Paulo: Companhia das Letras, 2002, c1997. 160p.

FAUSTO, B. *História do Brasil*. 11ª Edição. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2003. 663p.

FEYERABEND, P. *Contra o método*. Edição revista. Tradução de Miguel Serras Pereira. Lisboa: Verso, 1988. 365p.

FONTANA, J. *História: análise do passado e projeto social*. Tradução de Luiz Roncari. Bauru: EDUSC. 1998. 396p.

FONTANA, J. *Introdução ao estudo da história geral*. Tradução de Heloísa Reichel. Bauru: EDUSC. 2000. 409p.

FOSSA, J. (org.) *Facetas do diamante*. Rio Claro: Sociedade Brasileira de História da Matemática, 2000. 272p.

FOSSA, J. (editor) *Anais do IV Seminário Nacional de História da Matemática*. Rio Claro: Editora da SBHMat, 2001. 392p.

FUKUYAMA, F. *O fim da história e o último homem*. Tradução de Aulyde Soares Rodrigues. Rio de Janeiro: Rocco, 1992. 489p.

FURTADO, CELSO. *Formação econômica do Brasil*. 27ª edição. São Paulo: T. A. Queiroz, 2000; Publifolha, 2000 (Grandes nomes do pensamento brasileiro). 276p.

GOMES, A. C. *Vargas e a crise dos anos 50*. Rio de Janeiro: Relume Dumara, 1994. 271p.

HAMBURGUER, A. I.; DANTES, M. A.; PATY, M.; PETITJEAN, P. (org.) *A ciência nas relações Brasil-França (1850-1950)*. São Paulo: Editora da USP; FAPESP, 1996. 367p.

HARDY, G. H. *Em defesa de um matemático*. Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo: Martins Fontes, 2000 (Tópicos). 142p.

HOBSBAWM, E. *A era dos extremos: o breve século XX: 1914-1991*. 2ª edição; 3ª reimpressão. Tradução de Marcos Santarrita e revisão técnica de Maria Célia Paoli. São Paulo: Companhia das Letras, 1996. 598p.

HOBSBAWM, E. *Sobre história*. Tradução de Cid Knipel Moreira. São Paulo: Companhia das Letras, 1998. 336p.

HOUAISS, A. & VILLAR, M. S. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Objetiva, 2001. 2925p.

KATZ, V. *A History of Mathematics: An Introduction*. 2ª ed. New York: Addison-Wesley. 1998. 864p.

LÉVY, P. *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*. 2. éd. des Leçons d'analyse fonctionnelle, avec un complément sur les fonctionnelles analytiques, par F. Pellegrino. Paris, Gauthier-Villars, 1951 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). 482p.

MARAFON, A. C. de M. *Vocação matemática como reconhecimento acadêmico*. Campinas: [s.n.], 2001 (Tese de doutorado, Faculdade de Educação, UNICAMP). 298p.

MAY, K. O. *Biblioography and Reserch Manual of the History of Mathematics*. Toronto: University of Toronto Press. 1972. p.1-34.

MERLEAU-PONTY, M. *O homem e a comunicação*. Rio de Janeiro: Bloch, 1974.

MERLEAU-PONTY, M. *Fenomenologia da Percepção*. 2ª Edição. Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de Moura. São Paulo: Martins Fontes, 1999. 662p.

NACHBIN, L. *Ciência e Sociedade*. Curitiba: Editora da UFPR, 1996 (Clássicos, nº 6). 190p.

OMNÈS, R. *Filosofia da Ciência Contemporânea*. Tradução de Roberto Leal Ferreira. São Paulo: Editora da UNESP, 1996 (Biblioteca básica). 320p.

PELLEGRINO, F. *La théorie des fonctionnelles analytiques et ses applications*. In LÉVY, P. *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*. 2. éd. des Leçons d'analyse fonctionnelle, avec un complément sur les fonctionnelles analytiques, par F. Pellegrino. Paris, Gauthier-Villars, 1951 (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). 482p.

POINCARÉ, H. *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins e revisão técnica de Ildeu de Castro Moreira. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995. 180p.

SILK, J. *O Big Bang: a origem do universo*. 2ª Edição. Tradução de Fernando Dídimo Pereira Barbosa Vieira. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1988, c1980. 400p.

SILVA, C. P. *A matemática no Brasil: uma história de seu desenvolvimento*.2ª edição revista e ampliada. São Leopoldo: Editora da UNISINOS, 1999. 242p.

TÁBOAS. P. Z. *Uma Investigação Sobre as Origens dos Espaços Vetoriais e a Evolução da Análise Geométrica de Leibniz até Grassmann*. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 1999. 132p.

VALLS, A. L. M. *O que é Ética*. 3ª Edição. São Paulo: Editora Brasiliense, (Coleção Primeiros Passos), 1989.

VARGAS, M. *Teoria dos drenos artificiais de areia*. São Paulo: Revista Politécnica – USP, edição de 1947.

VARGAS, M. (org.) *História da Ciência e da Tecnologia no Brasil*. São Paulo: Editora da UNESP, 1994. 412p.

VOLOCH, J. F. (editor) *Atas do 16º Colóquio Brasileiro de Matemática*. Rio de Janeiro: IMPA/CNPq, 1988. 627p.

WEFFORT, F. C. *O populismo na política brasileira*. 5ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2003. 206p.

WEIL, A. *The apprenticeship of mathematician*. Translated from the French by Jennifer Cage. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1992. 197p.

WUSSING, H. *Vom Zählstein zum Computer: Mathematik in der Geschichte*. Hildeesheim: DIVerlag Franzbecker. 1997.

Bibliografia Adicional

Obras que ajudaram a orientar as idéias expostas neste trabalho

AMADO, J. e FERREIRA, M. de M. (org.) *Usos & abusos da história oral*. 3ª edição. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2000. 304p.

AZEVEDO, F. (org.) *As ciências no Brasil*. 2ª edição. Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1994. 462p.

BACON, F. *Novum Organum ou Verdadeiras Indicações Acerca da Interpretação da Natureza*. Tradução e notas de José Aluysio Reis de Andrade. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda., c1999. 255p

BARTLE, R. G. *The Elements of Integration*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1966. 129p.

BICUDO, M. A. V. (org.) *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perpectivas*. São Paulo: Editora da UNESP, 1999 (Seminários e Debates). 313p.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher. 1986. 488p.

BURKE, P. (org.) *A escrita da história: novas perspectivas*. São Paulo: Editora da UNESP, 1995. 354p.

CARDOSO, C. F. S. *Métodos da história: introdução aos problemas, métodos e técnicas da história demográfica, econômica e social*. 5ª edição. Rio de Janeiro: Graal, 1990 (Coleção Biblioteca de História, v. 5). 537p.

CARR, E. H. Que é história? – 7ª reimpressão. Tradução de Lúcia de Maurício de Alverga e revisão técnica de Maria Yedda Linhares. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996. 189p.

CHALHOUB, S. e PEREIRA, L. A. de M. (org.) *A história contada*. 2ª reimpressão. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1998 (Coleção Histórias do Brasil). 362p.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. *A experiência matemática*. Tradução de João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989. 485p.

DAVIS, P. J. e HERSH, R. *O sonho de Descartes: o mundo segundo a matemática*. Tradução e revisão técnica de Fernando Nunes e Fernando Bensabat. Lisboa: Sociedade Editorial e Livreira, 1997. 317p.

DESCARTES, R. *Discurso do Método; As Paixões da Alma; Meditações*. Tradução de Enrico Corvisieri. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda., c1999. 335p.

DOMINGUES, H. H. & IEZZI, G. *Álgebra Moderna*. 3ª Edição; 3ª Reimpressão. São Paulo: Atual, 2001. 263p.

ECO, H. *Interpretação e superinterpretação*. 2ª tiragem. São Paulo: Martins Fontes, 1993 (Coleção Tópicos). 182p.

ELSGOLTZ, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Moscú: Editorial Mir, 1969. 432p.

FANTAPPIÈ, L. *Curso de análise matemática*. S.L.: S.N., 19-?

FANTAPPIÈ, L. *La Funzione Filosofica della Matematica nell'atuale Momento Scientifico.*

FANTAPPIÈ, L. *Principi di una teoria unitaria del mondo fisico e biologico*. Roma: Soc. Editr. Humanitas nova, 1944.

FANTAPPIÈ, L. *Teoria das funções analíticas*. S.L.: S.N., 19-?

FAORO, RAYMUNDO. *Os donos do poder: formação do patronato político brasileiro – vol. 2*. 10ª edição. São Paulo: Globo; Publifolha, 2000 (Grandes nomes do pensamento brasileiro). 392p.

FERREIRA, M. de M., FERNANDES, T. M. e ALBERTI, V. (org.) *História oral: desafios para o século XXI*. Rio de Janeiro: Editora Fiocruz/Casa de Oswaldo Cruz/CPDOC – Fundação Getulio Vargas, 2000. 204p.

FOUCAULT, M. *História da sexualidade, vol. 1: a vontade de saber*. 13ª edição. Tradução de Maria Thereza da Costa Albuquerque e José Augusto Guilhon Albuquerque. Rio de Janeiro: Edições Graal, 1988. 152p.

FOUCAULT, M. *História da sexualidade, vol. 2: o uso dos prazeres*. 8ª edição. Tradução de Maria Thereza da Costa Albuquerque e revisão técnica de José Augusto Guilhon Albuquerque. Rio de Janeiro: Edições Graal, 1984 (Biblioteca de filosofia e história das ciências – v. n. 15). 232p.

FOUCAULT, M. *História da sexualidade, vol. 3: o cuidado de si*. 6ª edição. Tradução de Maria Thereza da Costa Albuquerque e revisão técnica de José Augusto Guilhon Albuquerque. Rio de Janeiro: Edições Graal, 1985 (Biblioteca de filosofia e história das ciências – v. n. 16). 246p.

FREIRE, P. *Educação como prática de liberdade*. 5ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1975. 150p.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 14ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (Coleção Leitura). 166p.

FREIRE, P. *Pedagogia do oprimido*. 18ª edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1988 (Coleção O mundo, hoje, v. 21). 184p.

GONSALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. 194p.

HUSSERL, E. *Investigações Lógicas; Sexta Investigação (Elementos de uma elucidação fenomenológica do conhecimento)*. Seleção de Zeljko Loparic e Andréa Maria Altino de Campos Loparic. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda., c2000. 224p.

KANT, I. *Crítica da Razão Pura*. Tradução de Valério Rohden e Udo Baldur Moosburger. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda., c1999. 511p.

KARTACHEV, A.; ROJDESTVENSKI, B. *Analyse Mathématique*. Traduit du russe par Djilali Embarek. Moscou: Éditions MIR, 1988 (Mathématiques). 472p.

KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978. 688p.

KUDRIÁVTSEV, L. D. *Curso de Análisis Matemático – Tomo 1*. Traducido del ruso por V. Fernández. Moscú: Editorial MIR, 1983. 709p.

KUDRIÁVTSEV, L. D. *Curso de Análisis Matemático – Tomo 2*. Traducido del ruso por el ingeniero K. P. Medkov. Moscú: Editorial MIR, 1984. 575p.

LE GOFF, J. e NORÁ, P. *História: novas abordagens*. 4ª edição. Tradução Henrique Mesquita e revisão técnica de Dirceu Lindoso e Theo Santiago. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1995. 198p.

LE GOFF, J. *História e Memória*. 3ª edição. Tradução de Bernardo Leitão ... [et al.]. Campinas: Editora da UNICAMP, 1994 (Coleção Repertórios). 553p.

LEIBNIZ, G. W. *Novos ensaios sobre o entendimento humano*. Tradução de Luiz João Baraúna. São Paulo: Editora Nova Cultural Ltda., c1996. 543p.

LEVY, N. *Ética e História*. São Paulo: Relume-Dumará, 2004. 184p.

MEIHY, J. C. S. B. *Manual de história oral*. 3ª edição revista e ampliada. São Paulo: Edições Loyola, 2000. 111p.

MELLO E SOUZA, ANTONIO CANDIDO. *Literatura e Sociedade*. 8ª edição. São Paulo: T. A. Queiroz, 2000, Publifolha, 2000 (Grandes nomes do pensamento brasileiro). 182p.

MONTENEGRO, A. T. *História oral e memória: a cultura popular revisitada*. 3ª edição. São Paulo: Contexto, 1994 (Caminhos da história). 153p.

NOBRE, S. (editor) *Anais do II Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática e do II Seminário Nacional de História da Matemática*. Águas de São Pedro-SP, 1997. 379p.

PERRENOUD, P. *Dez novas competências para ensinar: convite à viagem*. Tradução de Patrícia Chittoni Ramos e revisão técnica de Cristina Dias Alessandrini. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000. 192p.

RUSSEL, B. *História do pensamento ocidental: a aventura dos pré-socráticos a Wittgenstein*. 3ª edição. Tradução de Laura Alves e Aurélio Rebello. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001. 463p.

SILVA DA SILVA, C. M. (editora) *Anais do III Seminário Nacional de História da Matemática*. Vitória-ES, 1999. 658p.

SILVA DA SILVA, C. M. *A matemática positivista e sua difusão no Brasil*. Vitória: EDUFES, 1999 (Coleção de estudos capixabas, v.25). 343p.

SHOKRANIAN, S.; SOARES, M.; GODINHO, H. *Teoria dos Números*. 2ª Edição revista. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1999. 325p.

THOMPSON, P. *A voz do passado: história oral*. 2ª edição. Tradução de Lólio Lourenço de Oliveira. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1992. 385p.

TRENOGUIN, V. A.; PISARIEVSKI, B. M.; SÓBOLEVA, T. S. *Problemas y Ejercicios de Análisis Funcional*. Traducido del ruso por Andriánova M. A. Moscú: Editorial Mir, 1987. 267p.

TRENOGUINE, V. *Analyse Fonctionnelle*. Traduit du russe par V. Kotliar. Moscou: Éditions MIR, 1985 (Mathématiques). 528p.

VEYNE. P. M. *Como se escreve a história; Foucault revoluciona a história*. 4ª edição revisada. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1998. 285p.

VOLTERRA, V. *Theory of functionals and of integral integro-differential equations*; by Vito Volterra; edited by Luigi Fantappiè; authorized translation by Miss. M. Long. London, Glasgow, Blackie & Son Limited, 1930.

WEIL, A. *História da matemática: Por que e como*. In: Matemática Universitária, nº 13, junho de 1991, p. 17-30.