UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Campus de São José do Rio Preto

Jairo Barbosa da Silva Junior

O Método Averaging e Aplicações

São José do Rio Preto
2009

Jairo Barbosa da Silva Junior

O Método Averaging e Aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Câmpus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi

São José do Rio Preto
2009

Silva Junior, Jairo Barbosa
O Método Averaging e Aplicações/Jairo Barbosa da Silva Junior – São José do Rio Preto : [s.n.], 2009
58 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Claudio Aguinaldo Buzzi
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2.Teoria da bifurcação. 3. Método Averaging. 4. Ciclos Limite. I. Buzzi, Claudio Aguinaldo. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.93

Jairo Barbosa da Silva Junior

O Método Averaging e Aplicações

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi
Professor Adjunto Doutor
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Maurício Firmino Silva Lima
Professor Doutor
Universidade Federal do ABC

Prof. Dr. Marcelo Messias
Professor Assistente Doutor
UNESP – Presidente Prudente

São José do Rio Preto, 6 de março de 2009

À minha família (dedico).

Agradecimentos

Primeiramente à Deus pelas bênçãos, à minha família por estar sempre ao meu lado, aos amigos pelo apoio, meu orientador Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi pela sua competência e paciência ao me conduzir para a realização deste trabalho e aos professores que fizeram parte da minha formação acadêmica.

Agradeço a todos, pois fizeram parte da minha formação como pessoa e cidadão, e que, de alguma forma, estão presentes neste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos o Método Averaging. Este método é uma ferramenta extremamente útil para quantificar o número de ciclos limites que podem bifurcar de uma singularidade do tipo centro de um sistema de equações diferenciais.

A parte inicial do trabalho apresenta a Teoria de Aproximação Assintótica e um primeiro contato com o Averaging. Posteriormente apresentamos uma versão do Averaging via a Teoria do Grau de Brouwer. Finalmente fizemos algumas aplicações do método apresentando uma cota superior para o número de ciclos limites que podem bifurcar a partir das órbitas periódicas de centros de um sistema de equações diferenciais. Além disso, mostramos através de exemplos concretos que esta cota superior pode ser realizada.

Palavras chave: Método Averaging, Ciclos Limites, Teoria da Aproximação Assintótica.

Abstract

In this work we study the Averaging Method. This method is a useful tool in order to give the maximum number of limit cycles that can bifurcate from a center type singularity of a differential equation system.

In the first part of the work we present the Asymptotic Approximation Theory and a first view of the averaging. After that, we present a version of the averaging via Brouwer Degree Theory. Finally we give some applications of this method presenting an upper bound for the number of limit cycles that can bifurcate from a center type singularity of a differential equation system. Moreover, we show by presenting concrete examples that this upper bound can be realized.

Key words: Averaging Method, Limit Cycles, Asymptotic Approximation Theory.

Sumário

1 Introdução **10**
1.1 Conceitos Básicos 10
1.2 Conceitos de aproximação assintótica 11
1.3 O Grau de Brouwer 18

2 O Método Averaging para Aproximações de soluções **20**
2.1 Formulação de problemas simples de perturbação 20
2.2 Reformulação na forma padrão 23
2.3 A forma padrão no caso quaselinear 25
2.4 Averaging, uma primeira introdução 26
2.5 Exemplos e contra-exemplos do averaging elementar 30

3 O Método Averaging Para Encontrar Soluções Periódicas Via o Grau de Brouwer **39**
3.1 Observações sobre o grau de Brouwer 40
3.2 O Teorema do Averaging de primeira ordem 43
3.3 Método Averaging para sistemas planares autônomos 45
3.4 Mais uma aplicação do Método Averaging 50

Capítulo 1

Introdução

1.1 Conceitos Básicos

Neste capítulo vamos estudar os conceitos e métodos elementares assintóticos que são pré-requisitos necessários para o estudo de tempo-lento.

Alguns métodos que podem ser utilizados são: análise numérica, aproximação por uma série de funções ortonormais em um espaço de *Hilbert*, aproximação por uma série convergente ou teoria da aproximação assintótica. Consideraremos problemas onde a teoria da aproximação assintótica é utilizada com mais freqüência e iremos introduzir os conceitos necessários. O livro [3] trata deste conteúdo e com várias aplicações.

Vamos estudar equações da forma

$$\dot{x} = f(t, x; \epsilon),$$

onde x é um vetor do $\mathbb{R}^n$. Frequentemente devemos supor $x \in D \subset \mathbb{R}^n$ sendo D um conjunto aberto limitado, e chamaremos a variável x de variável espacial. A variável $t \in \mathbb{R}$ é chamada de tempo; assumimos $t \geq 0$ ou $t \geq t_0$ com t_0 uma constante. O parâmetro ϵ representa um pequeno parâmetro que caracteriza a grandeza de certas pertubações. Vamos tomar ϵ positivo, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ com ϵ_0 uma constante; entretanto, durante o processo de aproximação poderemos incluir o valor limite $\epsilon \downarrow 0$.

A função vetorial $f(t, x; \epsilon)$ anteriormente descrita terá certas propriedades com respeito às variáveis t e x e o parâmetro ϵ. Com respeito a variável espacial x, f sempre irá satisfazer a condição de *Lipschitz*:

Definição 1.1.1. Considere a função vetorial $f(t, x; \epsilon)$, $f(t, x; \epsilon) \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$; f satisfaz a condição de *Lipschitz* em x com constante *Lipschitziana* L se em $[t_0, t_0 + T] \times D \times (0, \epsilon_0]$ temos

$$\|f(t, x_1; \epsilon) - f(t, x_2; \epsilon)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

onde $x_1, x_2 \in D$, e L é uma constante positiva.

Agora podemos enunciar um conhecido teorema de existência e unicidade para problemas com valor inicial. Para uma demonstração ver [6].

Teorema 1.1.2 (Existência e Unicidade)**.** *Considere o problema com valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \epsilon), x(t_0) = x_0,$$

onde $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t_0 \leq t \leq t_0 + T$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$; $D = \{x; \|x - x_0\| \leq d\}$. *Suponhamos que*

a) $f(t, x; \epsilon)$ *é contínua para* $(t, x; \epsilon)$ *em* $G = [t_0, t_0 + T] \times D \times (0, \epsilon_0]$.

b) $f(t, x; \epsilon)$ *satisfaz a condição de Lipschitz com relação à variável* x.

Então o problema de valor inicial tem uma única solução existente em $t_0 \leq t \leq t_0 + inf(T, \frac{d}{M})$ *onde* $M = \sup_G \|f\|$ *e* d *uma constante positiva.*

Iremos encontrar equações na chamada forma padrão, que são equações na forma

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon g(t, x), x(t_0) = x_0.$$

Se as condições do Teorema de Existência e Unicidade são satisfeitas, sabemos que a solução existe para $t_0 \leq t \leq t_0 + inf(T, \frac{d}{M})$ com $M = \epsilon \sup_{x \in D} \sup_{t \in [t_0, t_0+T)} \|g\|$.

Admitindo T tão grande quanto possível, isto significa que o tamanho do intervalo de existência de solução é da ordem $\frac{L}{\epsilon}$ com L constante. Esta conclusão, na qual ϵ é um parâmetro pequeno, envolve uma estimativa assintótica do tamanho de um intervalo; tal estimativa será feita de forma precisa mais à frente.

1.2 Conceitos de aproximação assintótica

Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \epsilon), x(t_0) = x_0. \tag{1.1}$$

Como sempre, $t, t_0 \in [0, \infty); x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$ com ϵ um parâmetro pequeno positivo. Se o campo de vetores f é suficientemente suave em uma vizinhança de $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ o problema de valor inicial tem uma única solução

$x_\epsilon(t)$ para todo valor de ϵ; alguns problemas desse processo de aproximação são ilustrados pelos seguintes exemplos. Considere a equação de primeira ordem com valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = x + \epsilon, x(0) = 1.$$

A solução é $x_\epsilon(t) = (x + \epsilon)e^t - \epsilon$. Podemos rearranjar essa expressão em torno de ϵ:

$$x_\epsilon(t) = xe^t + \epsilon(e^t - 1).$$

Este resultado sugere que de alguma forma a função xe^t é uma aproximação para $x(t)$ para t pequeno. Na definição do conceito de aproximação assintótica precisamos considerar o domínio onde é válida a aproximação. Um segundo exemplo também mostra que na solução a dependência com relação ao parâmetro ϵ nem sempre é C^∞:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\epsilon x}{\epsilon + t}, x(0) = 1.$$

A solução é

$$x_\epsilon(t) = (\frac{\epsilon}{\epsilon + t})^\epsilon.$$

Para caracterizar o comportamento da solução em relação a ϵ, para $t \geq 0$ temos que dividir $\mathbb{R}^+$ em diferentes domínios. Por exemplo, tomando $t >> \epsilon$ podemos expandir

$$x_\epsilon(t) = 1 + \epsilon log\epsilon - \epsilon logt + O(\frac{\epsilon}{t}).$$

É claro que esta expansão não satisfaz a condição inicial.

Definição 1.2.1. Uma função $\delta(\epsilon)$ será chamada *função ordem* se $\delta(\epsilon)$ for contínua e positiva (ou negativa) em $(0, \epsilon_0]$ e $\lim_{\epsilon \to 0} \delta(\epsilon)$ existe.

Muitas vezes usaremos subíndices como i em $\delta_i(\epsilon)$, $i = 1, 2 \ldots$. Em muitas aplicações devemos usar o conjunto de funções ordem $\{\epsilon^n\}_{n=1}^\infty$, entretanto funções ordem do tipo ϵ^q, $q \in \mathbb{Q}$ também poderão ser usadas.

Para comparar funções ordem usamos os Símbolos de *Landau*, ou também conhecidos como, O-grande ($O(\cdot)$) e o-pequeno ($o(\cdot)$):

Definição 1.2.2.

1. $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \to 0$ se existe uma constante k tal que $|\delta_1(\epsilon)| \leq k|\delta_2(\epsilon)|$ para $\epsilon \to 0$;

2. $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \to 0$ se $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0$.

Exemplo 1.2.3.

1. $\epsilon^n = o(\epsilon^m)$ para $\epsilon \to 0$ se $n > m$;
2. $\epsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\epsilon}) = O(\epsilon)$ para $\epsilon \to 0$;
3. $\epsilon^2 \log \epsilon = o(\epsilon^2 \log^2 \epsilon)$ para $\epsilon \to 0$;
4. $e^{\frac{-1}{\epsilon}} = o(\epsilon^n)$ para $\epsilon \to 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ implica que $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$. Por exemplo, $\epsilon^2 = o(\epsilon)$ e $\epsilon^2 = O(\epsilon)$ quando $\epsilon \to 0$. Então temos que introduzir a noção de uma estimativa mais fina para funções ordem:

Definição 1.2.4.

$\delta_1(\epsilon) = O_S(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \to 0$ se $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ e $\delta_1(\epsilon) \neq o(\delta_2(\epsilon))$ para $\epsilon \to 0$.

Exemplo 1.2.5.

$\epsilon \operatorname{sen}(\frac{1}{\epsilon}) = O_S(\epsilon)$;

$\epsilon \log \epsilon = O_S(2\epsilon \log \epsilon + \epsilon^2)$;

Em todos os problemas vamos considerar funções ordem em uma vizinhança de $\epsilon = 0$. Nas estimativas vamos omitir a expressão "para $\epsilon \to 0$".

A variável real usada no problema de valor inicial (1.1) será chamada de *tempo*. Devemos também ter variáveis tempo-escala da forma $\tau = \delta(\epsilon)t$ com $\delta(\epsilon) = O(1)$. Agora podemos estimar a ordem de grandeza de funções $\phi(t, \epsilon)$ definidas em um intervalo I, $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

Definição 1.2.6 (ordem de grandeza de ϕ_ϵ em I)**.**

1. $\phi_\epsilon = O(\delta(\epsilon))$ em I se existe uma constante k tal que $\|\phi\| = O(\delta(\epsilon))$ para $\epsilon \to 0$, $\delta(\epsilon)$ uma função ordem em $(0, \epsilon_0]$ e $\|.\|$ é uma norma para ϕ como uma função de t;
2. $\phi_\epsilon = o(\delta(\epsilon))$ em I se $\lim\limits_{\epsilon \to 0} \dfrac{\|\phi\|}{\delta(\epsilon)}$;
3. $\phi_\epsilon = O_S(\delta(\epsilon))$ em I se $\phi_\epsilon = O(\delta(\epsilon))$ e $\phi_\epsilon \neq o(\delta(\epsilon))$.

Note que esta definição implica que admitimos uma norma de uma função independente de ϵ. Devemos observar que existem diferentes normas envolvidas: primeiro uma norma para medir $\phi_\epsilon(t)$; então uma norma, que devemos freqüentemente tomar a norma do supremo, para medir ϕ_ϵ (como em $\|\phi_\epsilon\| = \sup_{t\in I} \|\phi_\epsilon\|$) e finalmente podemos tomar a norma do supremo em ϵ.

É claro que podemos dar as mesmas definições para a variável espacial.

Exemplo 1.2.7. Desejamos estimar a ordem da grandeza do erro quando aproximamos $\operatorname{sen}(t+\epsilon t)$ por $\operatorname{sen}(t)$ no intervalo I. Se $I = [0, 2\pi]$ temos para a diferença das duas funções, usando a série de Taylor, que

$$\operatorname{sen}(t+\epsilon t) = \operatorname{sen}(t) + R_1, \ \textit{onde} \ \lim_{\epsilon\to 0} \frac{R_1}{\epsilon} = 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,2\pi]} |\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t)| &= \sup_{t\in[0,2\pi]} |R_1| \Rightarrow \\
\frac{\sup_{t\in[0,2\pi]} |\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t)|}{\epsilon} &= \frac{\sup_{t\in[0,2\pi]} |R_1|}{\epsilon} \Rightarrow \\
\frac{\sup_{t\in[0,2\pi]} |\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t)|}{\epsilon} &= \sup_{t\in[0,2\pi]} \left|\frac{R_1}{\epsilon}\right| \overset{\epsilon\to 0}{\Rightarrow} \\
\frac{\sup_{t\in[0,2\pi]} |\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t)|}{\epsilon} &\to 0 \ \textit{quando} \ \epsilon \to 0.
\end{aligned}$$

Logo, $\sup_{t\in[0,2\pi]} |\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t)| = o(\epsilon) \Rightarrow \sup_{t\in[0,2\pi]} |\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t)| = O(\epsilon)$.

Uma complicação é o fato de que em muitos problemas a fronteira do intervalo I depende de ϵ de tal forma que o intervalo se torna ilimitado quando ϵ tende a 0.

Exemplo 1.2.8. Se no exemplo acima compararmos $\operatorname{sen}(t+\epsilon t)$ com $\operatorname{sen}(t)$ no intervalo $I = [0, \frac{2\pi}{\epsilon}]$. Temos pela norma no supremo

$$\operatorname{sen}(t+\epsilon t) - \operatorname{sen}(t) = O_S(1).$$

Para estimar funções em tais intervalos existem muitas formas na literatura. Usaremos a seguinte:

Suponha $\delta(\epsilon) = o(1)$ e desejamos estimar ϕ_ϵ em $I = [0, \dfrac{L}{\delta(\epsilon)}]$ com L uma constante independente de ϵ. A estimativa á dada por

$$\phi_\epsilon = O(\delta_0(\epsilon)) \ \textit{quando} \ \epsilon \to 0 \ \textit{em} \ I.$$

Observação 1.2.9 (Abuso de notação)**.** Na prática devemos escrever isto como

$$\phi_\epsilon(t) = O(\delta_0(\epsilon)) \; quando \; \epsilon \to 0 \; em \; I.$$

Como no exemplo anterior, mas esta notação pode causar problemas. No exemplo acima temos

$$\operatorname{sen}(t + \epsilon t) - \operatorname{sen}(t) = O(1) \; quando \; \epsilon \to 0 \; em \; I.$$

Expressaremos estas estimativas como segue.

Definição 1.2.10 (tempo-escala)**.** $\phi_\epsilon(t) = O(\delta_0(\epsilon))$ quando $\epsilon \to 0$ no *tempo-escala* $\delta^{-1}(\epsilon)$ se a estimativa satisfaz $0 \leq \delta(\epsilon)t \leq L$ com L uma constante independente de ϵ. Uma definição análoga pode ser dada para estimativas $o(\delta_0(\epsilon))$. Agora estamos prontos para estimar funções ordem e para definir aproximação assintótica.

Definição 1.2.11.

a) $\psi_\epsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de $\phi_\epsilon(t)$ no intervalo I se

$$\psi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t) = o(1) \; quando \; \epsilon \to 0, \; uniformemente \; para \; t \in I.$$

Ou reescrevendo para intervalos que dependem de ϵ

b) $\psi_\epsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de $\phi_\epsilon(t)$ no tempo-escala $\delta^{-1}(\epsilon)$ I se

$$\psi_\epsilon(t) - \phi_\epsilon(t) = o(1) \; no \; tempo \; escala \; \delta^{-1}(\epsilon).$$

Em geral podemos obter como aproximação assintótica séries (ou expansões) em algum intervalo I. Existem expansões da forma

$$\tilde{\phi}_\epsilon(t) = \Sigma_{n=1}^{m} \delta_n(\epsilon)\phi_{n_\epsilon}(t)$$

nas quais $\delta_n(\epsilon)$ são funções ordem com $\delta_{n+1}(\epsilon) = o(\delta_n(\epsilon))$, $n = 1, \cdots, m-1$, e para as funções $\phi_{n_\epsilon}(t)$ temos $\phi_{n_\epsilon} = O_S(1)$ *em* I. Dada uma função ϕ_ϵ no intervalo I, a série assintótica ϕ_ϵ é chamada de aproximação assintótica de m-ésima ordem de ϕ_ϵ em I se

$$\phi_\epsilon(t) - \tilde{\phi}_\epsilon(t) = o(\delta_m(\epsilon)) \; em \; I.$$

Exemplo 1.2.12. Considere

$$\phi_\epsilon(t) = \operatorname{sen}(t + \epsilon t) \; em \; I = [0, 2\pi],$$

$$\tilde{\phi}_\epsilon = \operatorname{sen}(t) + \epsilon t \cos(t) - \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 \operatorname{sen}(t).$$

As funções ordem são $\delta_n(\epsilon) = \epsilon^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$ e $\tilde{\phi}_\epsilon(t)$ é uma aproximação assintótica de terceira ordem de $\phi_\epsilon(t)$ em I.

Exemplo 1.2.13. Tome

$$\phi_\epsilon(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+\epsilon t} dt,\ \epsilon \in (0, \epsilon_0].$$

ϕ_ϵ está bem definida, pois:

$$\frac{e^{-t}}{1+\epsilon t} \leq e^{-t},\ \forall t \in [0, \infty)$$

e como

$$\int_0^\infty e^{-t} dt \to 1$$

é convergente, então pelo critério de convergência

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+\epsilon t} dt$$

é convergente, e assim bem definida.

Agora, transforme $\epsilon t = \tau$ obtendo

$$\phi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{1+\tau} d\tau. \left(\epsilon t = \tau \Rightarrow \frac{d(\epsilon t)}{d\tau} = 1 \Rightarrow \epsilon \frac{dt}{d\tau} = 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{\epsilon} d\tau \right)$$

Integrando por partes:

$$u = \frac{1}{1+\tau} \Rightarrow \frac{du}{d\tau} = -\frac{1}{(1+\tau)^2} \Rightarrow du = -\frac{1}{(1+\tau)^2} d\tau$$

$$dv = e^{-\frac{\tau}{\epsilon}} \Rightarrow v = -\epsilon e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \phi_\epsilon &= \frac{1}{\epsilon} \left[uv \mid_0^\infty - \int_0^\infty v du \right] = \frac{1}{\epsilon} \left[\frac{-\epsilon e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)} \mid_0^\infty - \epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^2} d\tau \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon} \left[\lim_{\tau \to \infty} \frac{-\epsilon e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{1+\tau} - \left(-\frac{\epsilon e^0}{1+0} \right) - \epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^2} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{-\epsilon e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{1+\tau} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{-\epsilon}{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}(1+\tau)} = 0.$$

Temos o seguinte resultado

$$\phi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \left[\epsilon - \epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^2} d\tau \right] = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^2} d\tau.$$

Repetindo a integração parcial, temos

$$\phi_\epsilon = 1 - \epsilon + 2\epsilon \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^3} d\tau.$$

É fácil ver que

$$\phi_\epsilon = \tilde{\phi}_\epsilon + R_{m_\epsilon}$$

onde $R_{m_\epsilon} = (-1)^{m+1}(m+1)!\epsilon^m \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\tau}{\epsilon}}}{(1+\tau)^{m+2}} d\tau$.

Fazendo a transformação de τ para t podemos observar que $R_{m_\epsilon} = O(\epsilon^{m+1})$, então $\tilde{\phi}_\epsilon$ é uma aproximação assintótica de ordem $m+1$ para ϕ_ϵ.

Aproximações assintóticas não são únicas. Outra aproximação assintótica de $\phi_\epsilon(t)$ em I seria

$$\psi_\epsilon(t) = \operatorname{sen}(t) + \epsilon\phi_{2_\epsilon}(t) - \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 \operatorname{sen}(t),$$

com $\phi_{2_\epsilon} = \operatorname{sen}(\epsilon t)\cos(t)/\epsilon$. A função ϕ_{n_ϵ} não é determinada de forma única como está claro pela definição. Mais importante, é que para uma função dada, diferentes aproximações assintóticas podem ser construídas com diferentes conjuntos de funções ordem. Considere o seguinte exemplo:

$$\phi_\epsilon(t) = (1 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}t)^{-1},\ I = [0,1].$$

As seguintes expansões são aproximações assintóticas de ϕ_ϵ em I:

$$\psi_{1_\epsilon} = \sum_{n=0}^{m} (\frac{\epsilon}{1+\epsilon})^n t^n,$$

$$\psi_{2_\epsilon} = 1 + \sum_{n=1}^{m} \epsilon^n t(t-1)^{n-1}.$$

Uma observação final relaciona o caso quando uma série assintótica obtida converge. Isto não implica que a série converge para a função estudada. Consideremos o seguinte exemplo

$$\phi_\epsilon = \operatorname{sen}(\epsilon) + e^{-\frac{1}{\epsilon}}.$$

A expansão de *Taylor* nos dá a seguinte série

$$\tilde{\phi}_\epsilon = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

que converge quando $m \to \infty$;

De fato,

tome $x_n = \dfrac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{\epsilon, \dfrac{\epsilon^3}{3!}, \dfrac{\epsilon^5}{5!}, \cdots\}$

Assim,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{\epsilon^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\frac{\epsilon^{2n+1}}{(2n+1)!}} = \frac{\epsilon^2}{(2n+2)(2n+3)}.$$

Como $\epsilon < 1$, então $x_{n+1} \leq x_n$.

$\therefore (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente.

$\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lim \dfrac{\epsilon^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.
O que prova nossa afirmação.

Logo, $\tilde{\phi}_\epsilon$ é uma aproximação assintótica de ϕ_ϵ e

$$\phi_\epsilon - \tilde{\phi}_\epsilon = O(\epsilon^{2m+3}) \text{ } para \text{ } todo \text{ } m \in \mathbb{N}.$$

Entretanto, a série não converge para ϕ_ϵ.

Na teoria de equações diferenciais não-lineares esta parte de convergência é de pouco interesse prático. Geralmente o cálculo de um ou de mais termos na expansão é tudo que precisamos para nossos interesses.

1.3 O Grau de Brouwer

Nesta seção vamos definir o grau de Brouwer e enunciar algumas de suas principais propriedades. Para um detalhamento maior, ver [7]. Estes resultados serão utilizados no capítulo 3 no qual demonstraremos o método averaging de primeira ordem que dá uma relação quantitativa entre as soluções de um sistema diferencial não autônomo e os zeros de uma função definida em um espaço de dimensão finita.

Vamos considerar V um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, $\bar{V}$ o seu fecho, $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma função e $S = \{x \in V | J_f(x) = 0\}$, onde $J_f(a)$ é o determinante do jacobiano de f aplicado no ponto a .

Definição 1.3.1. Sejam $f : V \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $b \notin f(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação f em relação a V no ponto b, como sendo o número inteiro

$$d_B(f, V, b) = \sum_{\zeta_i \in f^{-1}(\{b\})} sign(J_f(\zeta_i)),$$

onde *sign* é a função sinal definida por

$$sign(t) = \begin{cases} 1, & se \quad t > 0 \\ -1, & se \quad t < 0. \end{cases}$$

Exemplo 1.3.2. Considere a aplicação $f : (0, \frac{5\pi}{2}) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \text{sen}(x)$ com $b = \frac{\pi}{4}$. Vamos calcular o grau de Brouwer com relação a $(0, \frac{5\pi}{2})$ no ponto $\frac{\pi}{4}$, ou seja $d(f, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4})$.

Para que $d(f, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4})$ esteja bem definida devemos verificar que $\frac{\pi}{4} \notin f(S)$. Temos

$$S = \{x \in (0, \frac{5\pi}{2}) | \cos(x) = 0\} \Rightarrow S = \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\} \Rightarrow f(S) = \{1, -1\}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} \notin f(S) = \{-1, 1\}$$

Assim, pela definição,

$$d(f, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}) = \sum_{\zeta_i \in f^{-1}(\{\frac{\pi}{4}\})} sign(J_f(\zeta_i))$$

logo,

$$d(f, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4}) = 1 + (-1) + 1 = 1$$

Vamos enunciar agora algumas propriedades do grau de Brouwer que serão usadas nessa dissertação:

- **Invariância por homotopia de classe $\mathbf{C^2}$**
  Sejam $H : V \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, com $b \notin H(\partial V \times [0, 1])$. Então,
  $$d(H(\cdot, t), V, b) \equiv constante, \quad \forall t \in [0, 1].$$

- **Existência de solução**
  Se $d(f, V, b) \neq 0$ então, existe $x_0 \in V$ tal que $f(x_0) = b$.

- **Excisão**
  Seja $K \subset \bar{V}$ um compacto e $b \notin f(K) \cup f(\partial V)$. Então,
  $$d(f, V, b) = d(f, V/K, b).$$

As demonstrações dessas propriedades são feitas em [7].

Capítulo 2

O Método Averaging para Aproximações de soluções

2.1 Formulação de problemas simples de perturbação

Estamos interessados em estudar problemas de valor inicial do tipo

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \epsilon), x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

com $x, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t, t_0 \in [0, \infty), \epsilon \in (0, \epsilon_0]$. O campo de vetores satisfaz as condições do teorema de existência e unicidade (1.1.2). Suponha que

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(t, x; \epsilon) = f(t, x, 0)$$

existe uniformemente em $D \times I$ com I um subintervalo $[t_0, A]$ de $[0, \infty)$. Então podemos associar ao problema (2.1) o problema

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y; 0), y(t_0) = x_0, \tag{2.2}$$

e desejamos estabelecer uma relação entre a solução do problema (2.1) e do problema (2.2). A relação será expressa em termos de aproximações assintóticas, como introduzido na Seção 1.2. Note que este tratamento só faz sentido se não conhecemos as soluções de (2.1) e conseguimos resolver (2.2). A última hipótese não é trivial pois (2.2) é ,em geral, não-autônoma e não-linear.

Apesar desta parecer uma aproximação natural, para problemas de valor inicial ela produz em geral resultados fracos. Vamos mostrar este fato através do exemplo a seguir e então apresentar uma estimativa da diferença entre as soluções dos problemas (2.1) e (2.2) no Lema 2.1.2.

Exemplo 2.1.1.

$$\frac{dx}{dt} = -\epsilon x, x(0) = 1; x \in [0,1], t \in [0,\infty), \epsilon \in (0,\epsilon_0].$$

O problema sem perturbação é

$$\frac{dy}{dt} = 0, y(0) = 1.$$

Então $x(t) = e^{-\epsilon t}, y(t) = 1$ e não conseguimos nenhum resultado melhor que

$$x_\epsilon(t) - y(t) = O(\epsilon) \text{ no tempo-escala 1.}$$

Antes de enunciar o próximo lema, vamos demonstrar o Lema de *Gronwall* [3]:

Lema 2.1.2 (Lema de Gronwall)**.** *Suponha que para* $t_0 \leq t \leq t_0 + T$

$$\phi(t) \leq \delta_2(t - t_0) + \delta_1 \int_{t_0}^{t} \phi(s)ds + \delta_3,$$

com $\phi(t)$ *contínua,* $\phi(t) \geq 0$ *para* $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ *e constantes* $\delta_1 > 0$, $\delta_2 \geq 0$, $\delta_3 \geq 0$. *Então*

$$\phi(t) \leq \left(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3\right) e^{\delta_1(t-t_0)} - \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Demonstração. Tome $\phi(t) = \psi(t) - \dfrac{\delta_2}{\delta_1}$ que transforma a inequação em

$$\psi(t) \leq \delta_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3.$$

Excluindo o caso trivial $\delta_2 = \delta_3 = 0$, neste caso $\phi(t) = 0$ para $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. O lado direito é positivo, desta maneira

$$\frac{\delta_1\psi(t)}{\delta_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds + \dfrac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3} \leq \delta_1.$$

A integração produz

$$\log(\delta_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3) - \log(\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3) \leq \delta_1(t - t_0)$$

ou

$$\delta_1 \int_{t_0}^{t} \psi(s)ds + \frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3 \leq (\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3)e^{\delta_1(t-t_0)}.$$

Aplicando a inequação original para ψ temos

$$\psi(t) \leq (\frac{\delta_2}{\delta_1} + \delta_3)e^{\delta_1(t-t_0)}$$

e transformando novamente para $\phi(t)$ obtemos o resultado do lema. □

Lema 2.1.3. *Considere os problemas de valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \delta(\epsilon)g(t,x;\epsilon), x(t_0) = x_0 \tag{2.3}$$

e

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y), y(t_0) = x_0, \tag{2.4}$$

nos quais f e g são Lipschitz-contínuas com respeito a x em $D \subset \mathbb{R}^n$ e contínua com respeito à $(t,x;\epsilon) \in [t,\infty) \times D \times (0,\epsilon]$; $\delta(\epsilon)$ é uma função ordem. Se $g(t,x;\epsilon) = O(1)$ no tempo-escala 1 temos

$$x_\epsilon(t) - y(t) = O(\delta(\epsilon)) \text{ no tempo} - \text{escala } 1.$$

Demonstração. Escrevemos as equações diferenciais (2.3) e (2.4) como equações integrais

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) + \delta(\epsilon)g(s,x(s);\epsilon))ds, \\ y(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,y(s);0)ds. \end{aligned}$$

Subtraindo as equações e tomando a norma desta diferença temos

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &= \| \int_{t_0}^{t} (f(s,x(s)) - f(s,y(s);0) + \delta(\epsilon)g(s,x(s);\epsilon))ds\| \\ &\leq \int_{t_0}^{t} \|(f(s,x(s)) - f(s,y(s);0)\|ds + \int_{t_0}^{t} \|\delta(\epsilon)g(s,x(s);\epsilon)\|ds. \end{aligned}$$

Existe uma constante M com $\|g(s,x(s);\epsilon)\| \leq M$ em $I \times D \times (0,\epsilon_0]$. A condição de *Lipschitz*-continuidade de f com respeito a variável x (com constante L) implica que

$$\|x(t) - y(t)\| \leq L \int_{t_0}^{t} \|x(s) - y(s)\|ds + \delta(\epsilon)M(t - t_0).$$

Aplicando o Lema de *Gronwall* com $\delta_1(\epsilon) = L, \delta_2(\epsilon) = M\delta(\epsilon), \delta_3 = 0$, obtemos

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \delta(\epsilon)\frac{M}{L}e^{l(t-t_0)} - \delta(\epsilon)\frac{M}{L}. \tag{2.5}$$

Logo, desta inequação temos que y é uma aproximação assintótica de x com erro $\delta(\epsilon)$ se $L(t-t_0)$ é limitado por uma constante que não depende de ϵ; então a aproximação é válida no tempo-escala 1. □

Observe que se tentarmos melhorar a aproximação pela escolha de uma equação associada melhor (incluindo termos de ordem maior em ϵ), o tempo-escala de validade não é estendido. De forma mais específica, vamos supor que podemos escrever

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \delta(\epsilon)g(t,x;0) + \bar{\delta}(\epsilon)h(t,x;\epsilon),$$

com $h = O(1)$ e $\bar{\delta}(\epsilon) = o(\delta(\epsilon))$. Aplicando a mesma técnica de estimativas com $\delta_1(\epsilon) = L$ e $\delta_2(\epsilon) = \bar{\delta}(\epsilon)M$ a estimativa (2.5) produz para y, como solução de

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y) + \delta(\epsilon)g(t,y;0), y(t_0) = x_0,$$

a seguinte estimativa para a aproximação:

$$x(t) - y(t) = O(\bar{\delta}(\epsilon)) \text{ no tempo-escala 1.}$$

Para estender o tempo-escala de validade precisamos de métodos mais sofisticados. A função y definida no lema e discutida acima é chamada de *aproximação formal de x*. Notemos que esta aproximação formal para problemas com valor inicial é uma aproximação assintótica no tempo-escala 1.

2.2 Reformulação na forma padrão

Vamos encontrar equações na chamada forma padrão:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \epsilon g(t,x;\epsilon) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Consideremos o problema com perturbação da forma

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) + \epsilon g(t,x;\epsilon) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.6}$$

e o problema sem perturbação

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Suponhamos que (2.7) pode ser resolvido explicitamente. A solução dependerá do valor inicial x_0 e a escrevemos como $y(t,x_0)$. Então temos

$$y = y(t,z), y(0,z) = z, z \in \mathbb{R}^n.$$

Agora consideremos esta como uma transformação (método da variação dos parâmetros) como segue:

$$x = y(t, z).$$

Usando (2.6) e (2.7) derivamos a equação diferencial em z

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial z}\frac{dz}{dt} = f(t, y) + \epsilon g(t, y; \epsilon).$$

Como y satisfaz a equação não perturbada, os primeiros termos dos lados esquerdo e direito se cancelam. Se supormos que $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ é não-singular podemos escrever

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon \left(\frac{\partial y(t, z)}{\partial z}\right)^{-1} g(t, y(t, z); \epsilon). \tag{2.8}$$

A equação (2.8), mais o valor inicial de z será chamada de *problema com perturbação na forma padrão.*

Em geral, equações do tipo (2.8) são pouco interessantes.

Exemplo 2.2.1. Considere duas espécies vivendo em uma região com um suprimento de comida restrito e uma ligeira interação entre as espécies afetando sua densidade polacional x_1 e x_2. Descrevemos o crescimento populacional pelo modelo

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1 x_1 - x_1^2 + \epsilon f_1(x_1, x_2),\ x_1(0) = x_1^0,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_2 x_2 - x_2^2 + \epsilon f_2(x_1, x_2),\ x_2(0) = x_2^0,$$

onde as constantes $a_i, x_i^0 > 0$ e $x_i(t) \geq 0$ para $i = 1, 2$. A solução do problema sem perturbação é

$$x_i(t) = \frac{a_i}{1 + \frac{a_i - x_i^0}{x_i^0} e^{-t}} = \frac{a_i x_i^0 e^t}{a_i + x_i^0(e^t - 1)}.$$

Aplicando (2.8) temos

$$\frac{dz_i}{dt} = \epsilon e^{-t}(1 + \frac{z_i}{a_i}(e^t - 1))^2 f_i(x_1, x_2)\ z_i(0) = x_i^0,\ i = 1, 2.$$

Como foi dito anteriormente a transformação pode se tornar impraticável, e podemos ver nesse exemplo porque mesmo que tomemos f_i constante, o lado direito da equação cresce exponencialmente. Existe entretanto uma classe importante onde essa técnica funciona bem, e vamos estudá-la na próxima seção.

2.3 A forma padrão no caso quaselinear

O problema com perturbação

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \epsilon g(t,x;\epsilon),\ x(t_0) = x_0$$

será chamado de *quaselinear* se a equação pode ser escrita como

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \epsilon g(t,x;\epsilon),\ x(t_0) = x_0 \tag{2.9}$$

onde $A(t)$ é uma matriz contínua $n \times n$. O problema sem perturbação

$$\frac{dx}{dt} = A(t)y$$

possui n soluções linearmente independentes com as quais construímos a matriz fundamental $\Phi(t)$. Escolhemos Φ tal que $\Phi(t_0) = I$. Aplicando o método da variação dos parâmetros, obtemos

$$x = \Phi(t)z$$

e obtemos de (2.8) da página 24

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon\Phi^{-1}(t)g(t,\Phi(t)z;\epsilon). \tag{2.10}$$

Se A é uma matriz constante temos para a matriz fundamental

$$\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}.$$

A forma padrão neste caso é

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon e^{-A(t-t_0)}g(t,e^{A(t-t_0)}z;\epsilon). \tag{2.11}$$

É claro que se os autovalores de A não são todos puramente imaginários, a equação com perturbação (2.11) pode apresentar alguns problemas se g for limitada.

Observação 2.3.1. Na teoria de oscilações forçadas não-lineares os problemas com perturbação podem ser da forma

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) + \epsilon g(t,x;\epsilon),\ x(t_0) = x_0, \tag{2.12}$$

com A uma matriz constante. A transformação variação dos parâmetros nos fornece

$$x = e^{A(t-t_0)}z + e^{A(t-t_0)}\int_{t_0}^{t} e^{-A(t-t_0)}f(\tau)d\tau. \tag{2.13}$$

O problema com perturbação na forma padrão é

$$\frac{dz}{dt} = \epsilon e^{-A(t-t_0)}g(t,x;\epsilon),$$

onde x tem que ser reescrito na forma da expressão (2.13).

Exemplo 2.3.2. No estudo de oscilações não-lineares podemos considerar o problema com valor inicial com perturbação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon g(t, x, \dot{x}; \epsilon),\ x(t_0) = \alpha,\ \dot{x}(t_0) = \beta. \tag{2.14}$$

Duas soluções independentes do problema sem perturbação $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ são $\cos(\omega(t - t_0))$ e $\operatorname{sen}(\omega(t - t_0))$. A transformação variação dos parâmetros fornece

$$\begin{cases} x = z_1 \cos(\omega(t - t_0)) + \dfrac{z_2}{\omega} \operatorname{sen}(\omega(t - t_0)), \\ \dot{x} = -z_1 \omega \operatorname{sen}(\omega(t - t_0)) + z_2 \cos(\omega(t - t_0)). \end{cases} \tag{2.15}$$

Observe que a matriz fundamental é $\Phi(t) = I$. A equação (2.11) neste caso torna-se

$$\begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} = -\dfrac{\epsilon}{\omega} \operatorname{sen}(\omega(t - t_0)) g(t, \cdot, \cdot; \epsilon),\ z_1(t_0) = \alpha, \\ \\ \dfrac{dz_2}{dt} = \epsilon \cos(\omega(t - t_0)) g(t, \cdot, \cdot; \epsilon),\ z_2(t_0) = \beta. \end{cases} \tag{2.16}$$

As expressões para x e $\dot{x}$ devem ser substituídas em g nos lugares dos pontos.

Pode ser vantajoso adaptar uma transformação que nos forneça imediatamente as equações da variação da amplitude r e da fase ψ da solução. Tomemos

$$\begin{cases} x = r \cos(\omega t + \psi), \\ \dot{x} = -r\omega \operatorname{sen}(\omega t + \psi). \end{cases} \tag{2.17}$$

A equação com perturbação torna-se

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{\epsilon}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \psi) g(t, \cdot, \cdot; \epsilon), \\ \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\epsilon}{r\omega} \omega \cos(\omega t + \psi) g(t, \cdot, \cdot; \epsilon). \end{cases} \tag{2.18}$$

Os valores iniciais de r e ψ podem ser calculados por (2.17). É claro que a fórmula com perturbação (2.18) não é muito interessante em problemas onde a amplitude r torna-se pequena. Na Seção 2.5 mostramos a utilidade das transformações (2.15) e (2.17).

2.4 Averaging, uma primeira introdução

Nesta seção vamos apresentar a forma mais simples da teoria averaging. Estamos interessados na solução de problemas com perturbação na forma padrão que podemos escrever da seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon f(t,x) + \epsilon^2 g(t,x;\epsilon), x(t_0) = x_0. \tag{2.19}$$

Suponha que f é T-periódica em t, então parece natural dividir proporcionalmente f em t (enquanto deixamos x constante). Então consideremos a seguinte equação média

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon f^0(y), y(t_0) = x_0 \tag{2.20}$$

com

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t,y)dt.$$

Com mais algumas hipóteses (nem todas realmente necessárias), podemos estabelecer o seguinte resultado [3]:

Teorema 2.4.1 (averaging de primeira ordem)**.** *Considere os problemas de valor inicial* (2.19) *e* (2.20) *com* $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n, t \in [t_0, t_0 + T], \epsilon \in (0, \epsilon_0]$. *Suponha*

1. *f, g e ∇f estão definidas, são contínuas e limitadas por uma constante M independente de ϵ, em $[t_0, \infty) \times D$;*
2. *g é Lipschitz-contínua em $x \in D$;*
3. *f é T-periódica em t com T constante, independente de ϵ;*
4. *$y(t)$ pertence (independente de ϵ) a um subconjunto interior de D no tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$;*

então

$$x(t) - y(t) = O(\epsilon) \text{ quando } \epsilon \to 0 \text{ no tempo-escala } \frac{1}{\epsilon}.$$

Observação 2.4.2. Podemos verificar que na hipótese (1) é suficiente considerar o conjunto $[t_0, t_0 + \frac{L}{\epsilon}]$ com L uma constante independente de ϵ.

Demonstração. As hipóteses (1) e (2) garantem a existência e unicidade das soluções dos problemas (2.19) e (2.20); pela escala $\tau = \epsilon t$ temos a existência da equação (2.19) no tempo-escala 1 em τ, i.e., em $\frac{1}{\epsilon}$ em t. Defina

$$u^1(t,y) = \int_{t_0}^t [f(s,y) - f^0(y)]ds.$$

Pela observação 2.4.2, podemos considerar o conjunto $[t_0, t_0 + T]$ no tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$, onde T é o período de f em t.

É claro que $\|u^1(t,y)\| \leq 2MT$ em $[t_0, t_0+T] \times D$ no tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$. Introduza $z(t) = y(t) + \epsilon u(t, y(t))$. Estimamos, já que $y(t) \in D$ no tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$,

$\|x(t)-y(t)\| \leq \|x(t)-z(t)\|+\|z(t)-y(t)\| \leq \|x(t)-z(t)\|+\epsilon\|u(t,y(t))\| \leq \|x(t)-z(t)\| + 2\epsilon MT.$

Notemos que $x(t) - z(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt}\right) ds$ e calculemos

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} - \frac{dz}{dt} &= \epsilon f(t,x(t)) + \epsilon g(t,x(t)) - \frac{dy}{dt} - \epsilon \frac{\partial u(t,y(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt} - \epsilon \frac{\partial u(t,y(t))}{\partial t} \\
&= \epsilon f(t,x(t)) - \epsilon f(t,z(t)) \\
&+ \underbrace{\epsilon^2 g(t,x(t)) - \frac{dy}{dt} - \epsilon^2 \frac{\partial u(t,y(t))}{\partial y} f^0(y) + \epsilon f(t,z(t)) - \epsilon f(t,y(t)) + f^0(y)}_{=R}
\end{aligned}$$

Afirmação: existe uma constante k tal que

$$\|R\| \leq k\epsilon^2.$$

De fato,

$\|R\| = \|\epsilon^2 g(t,x(t)) - \epsilon^2 \frac{\partial u(t,y(t))}{\partial y} f^0(y) + \epsilon f(t,z(t)) - \epsilon f(t,y(t))\| \leq \|\epsilon^2 g(t,x(t))\| + \|\epsilon^2 \frac{\partial u(t,y(t))}{\partial y} f^0(y)\| + \|\epsilon f(t,z(t)) - \epsilon f(t,y(t))\|.$

Observe que $\|f^0(y)\| \leq M$ e $\|\frac{\partial u(t,y(t))}{\partial y}\| \leq 2MT$ e da *Lipschitz*-continuidade de f segue que existe uma constante L tal que

$$\|f(t,z(t)) - f(t,y(t))\| \leq L\|z(t) - y(t)\| \leq \epsilon^2 L\|u(t,y(t)\| \leq 2\epsilon LMT$$

$$\therefore \|R\| \leq \|\epsilon^2 M\| + \|\epsilon^2 2MT\|\|M\| + \|2\epsilon^2 MLT\| \leq \epsilon^2 \underbrace{(M + 2M^2T + 2MLT)}_{=k}.$$

É claro que

$$\begin{aligned}
\|x(t)-z(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|\frac{dx}{dt}-\frac{dz}{dt}\|ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (\|\epsilon f(t,x(t))-\epsilon f(t,z(t))+R\|)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (\|\epsilon f(t,x(t))-\epsilon f(t,z(t))\|+\|R\|)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} (\|\epsilon f(t,x(t))-\epsilon f(t,z(t))\|+k\epsilon^2)ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t} \|\epsilon f(t,x(t))-\epsilon f(t,z(t))\|ds+\int_{t_0}^{t} k\epsilon^2 ds \\
&\leq \epsilon\int_{t_0}^{t} L\|x(t)-z(t)\|ds+k\epsilon^2(t-t_0) \\
&\leq L\epsilon\int_{t_0}^{t} \|x(t)-z(t)\|ds+k\epsilon^2(t-t_0).
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de *Gronwall* (2.1.2) temos

$$\|x(t)-z(t)\| \leq \epsilon\frac{k}{L}e^{\epsilon L(t-t_0)}-\epsilon\frac{k}{L}$$

e conseqüentemente

$$\|x(t)-y(t)\|-2\epsilon MT \leq \|x(t)-z(t)\| \leq \epsilon\left(\frac{k}{L}e^{\epsilon L(t-t_0)}-\frac{k}{L}\right).$$

$$\therefore \|x(t)-y(t)\| \leq \epsilon\left(\frac{k}{L}e^{\epsilon L(t-t_0)}-\frac{k}{L}+2MT\right).$$

Como $\epsilon L(t-t_0) \leq \epsilon L\frac{T}{\epsilon} = LT$, no tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$, ou seja é limitado por uma constante independente de ϵ, resulta que

$$x(t)-y(t) = O(\epsilon) \textit{ quando } \epsilon \to 0 \textit{ no} \text{ tempo-escala } \frac{1}{\epsilon}.$$

□

Podemos ter uma versão um pouco diferente deste teorema se permitirmos erros no valor inicial, também as funções ordem ϵ, ϵ^2 podem ser um pouco mais gerais [3]:

Teorema 2.4.3. *Considere o problema de valor inicial*

$$\frac{dx}{dt} = \delta_1(\epsilon)f(t,x) + \delta_2(\epsilon)g(t,x;\epsilon),\ x(t_0) = x_0$$

e o problema associado

$$\frac{dy}{dt} = \delta_1(\epsilon)f^0(y),\ y(t_0) = x_0 + \delta_3(\epsilon),$$

δ_1, δ_2 e δ_3 são funções ordem em ϵ, $\delta_2 = o(\delta_1)$ quando $\epsilon \to 0$. Com as condições (a-d) do Teorema 2.4.1 temos

$$x(t) - y(t) = O(\frac{\delta_1}{\delta_2} + \delta_3) \text{ quando } \epsilon \to 0 \text{ no tempo-escala } \frac{1}{\delta_1}.$$

Demonstração. A prova é análoga à do Teorema 2.4.1. □

2.5 Exemplos e contra-exemplos do averaging elementar

Nesta seção vamos aplicar o Teorema 2.4.1 para alguns problemas clássicos. Também apresentamos alguns contra-exemplos para mostrar a necessidade de algumas hipóteses e restrições do teorema.

Exemplo 2.5.1 (equação de van der Pol)**.** Considere a equação

$$\ddot{x} + x = \epsilon f(x, \dot{x}) \tag{2.21}$$

com valores iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$ dados e f uma função de classe C^∞ em $D \subset \mathbb{R}^2$. Este é um sistema quaselinear e usaremos a transformação fase-amplitude (2.18) para colocar o sistema na forma padrão. Tome

$$\begin{aligned} x &= r\cos(t+\psi), \\ \dot{x} &= -r\,\mathrm{sen}(t+\psi). \end{aligned}$$

A equação com perturbação (2.17) torna-se

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= -\epsilon\,\mathrm{sen}(t+\psi)f(r\cos(t+\psi), -r\,\mathrm{sen}(t+\psi)), r(0) = r_0, \\ \frac{d\psi}{dt} &= -\frac{\epsilon}{r}\cos(t+\psi)f(r\cos(t+\psi), -r\,\mathrm{sen}(t+\psi)), \psi(0) = \psi_0. \end{aligned} \tag{2.22}$$

O campo de vetores (2.22) é 2π-periódico em t e se $f \in C^1(D)$ podemos aplicar o avaraging do lado direito visto que excluímos uma vizinhança da origem. Como a equação original é autônoma, a nova equação depende apenas de r e definimos duas componentes para o novo campo de vetores como segue

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi))dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\tau) f(r\cos(\tau), -r\operatorname{sen}(\tau))d\tau \end{aligned}$$

e

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(\tau) f(r\cos(\tau), -r\operatorname{sen}(\tau))d\tau.$$

Uma aproximação assintótica é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}}{dt} &= -\epsilon f_1(\tilde{r}) \\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= -\epsilon \frac{f_2(\tilde{r})}{\tilde{r}} \end{aligned}$$

com valores iniciais apropriados. Esta é uma redução a um sistema autônomo de primeira ordem.

Aplicamos a redução acima para um famoso exemplo, a equação de *van der Pol*:

$$\ddot{x} + x = \epsilon(1-x^2)\dot{x}.$$

Assim

$f(x,\dot{x}) = (1-x^2)\dot{x} \Rightarrow$

$f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) = (1-r^2\cos^2(t+\psi))(-r\operatorname{sen}(t+\psi))$.

Dessa forma temos

$$f_1(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -r\operatorname{sen}^2(t+\psi)(1-r^2\cos^2(t+\psi))dt = -\frac{r}{2}\left(1-\frac{r^2}{4}\right)$$

e

$$f_2(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -r\cos(t+\psi)\operatorname{sen}(t+\psi)(1-r^2\cos^2(t+\psi))dt = 0.$$

Logo,

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} = \epsilon\frac{\tilde{r}}{2}\left(1-\frac{\tilde{r}^2}{4}\right) \tag{2.23}$$

$$\frac{d\tilde{\psi}}{dt} = 0. \tag{2.24}$$

Pelo Teorema 2.4.1 a solução é

$$x(t) = \frac{r_0 e^{\frac{\epsilon t}{2}}}{(1+\frac{1}{4}r_0^2(e^{\epsilon t}-1))^{\frac{1}{2}}}\cos(t+\psi_0) + O(\epsilon) \tag{2.25}$$

no tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$.

Se o valor inicial da amplitude r_0 for igual a 0 ou 2 a amplitude $\tilde{r}$ é constante para todo tempo. O valor $r_0 = 0$ corresponde a um ponto crítico instável da equação original, $r_0 = 2$ dá uma solução periódica. Temos

$$x(t) = 2\cos(t + \psi_0) + O(\epsilon) \text{ } no \text{ tempo-escala } \tfrac{1}{\epsilon}. \tag{2.26}$$

A solução (2.25) tende para a solução periódica (2.26), pois se $0 < r_0 < 2$ então, de acordo com (2.23), temos $dr/dt > 0$ ou seja $r(t)$ é crescente. Portanto em coordenadas polares as soluções que se iniciam com raio entre 0 e 2 se afastam da origem e tendem à solução periódica (2.26). Analogamente para $r_0 > 2$ teremos $dr/dt < 0$ e novamente a trajetória que se inicia em r_0 tendem à solução (2.26). Chamamos esta órbita periódica dada por (2.26) de ciclo limite (estável). Na Figura 2.1 descrevemos algumas órbitas das soluções de (2.25).

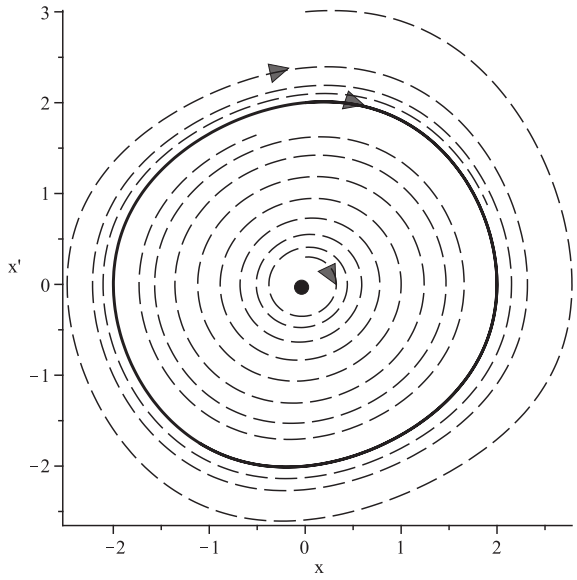


Figura 2.1: Retrato de fases da equação de Van der Pol $\ddot{x} + x = \epsilon(1 - x^2)\dot{x}$ onde $\epsilon = 1$.

No exemplo seguinte mostramos que uma escolha apropriada da transformação na forma padrão pode simplificar a análise do problema com perturbação.

Exemplo 2.5.2 (oscilador linear com freqüência modulada)**.** Considere um exemplo da equação de *Mathieus*

$$\ddot{x} + (1 + 2\epsilon\cos(2t))x = 0,$$

com valores iniciais $x(0) = \alpha$ e $\dot{x}(0) = \beta$.

Podemos fazer o mesmo processo que no Exemplo 2.5.1, entretanto a equação (2.21) agora depende explicitamente de t. A transformação fase-amplitude produz com $f(t, x) = -2\cos(2t)x$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 2\epsilon r \operatorname{sen}(t+\psi)\cos(t+\psi)\cos(2t) \\ \frac{d\psi}{dt} &= 2\epsilon \cos^2(t+\psi)\cos(2t). \end{aligned}$$

O lado direito é 2π-periódico em t, o averaging produz

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}}{dt} &= \frac{1}{2}\epsilon\tilde{r}\operatorname{sen}(2\tilde{\psi}) \\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= \frac{1}{2}\epsilon\tilde{r}\cos(2\tilde{\psi}). \end{aligned}$$

Então para aproximarmos as soluções de um sistema linear temos que resolver um sistema não-linear. Aqui a integração pode ser usada mas é mais prático escolher uma transformação diferente para obter a forma padrão, ficando dentro da categoria de sistemas lineares com transformações lineares. Usemos a transformação (2.15) com $\omega = 1$ e $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} x &= z_1\cos(t) + z_2\operatorname{sen}(t), \\ \dot{x} &= -z_1\operatorname{sen}(t) + z_2\cos(t). \end{aligned}$$

As equações com perturbação ficam

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{dt} &= -2\epsilon\operatorname{sen}(t)\cos(2t)(z_1\cos(t) + z_2\operatorname{sen}(t)), \\ \frac{dz_2}{dt} &= -2\epsilon\cos(t)\cos(2t)(z_1\cos(t) + z_2\operatorname{sen}(t)). \end{aligned}$$

O lado direito é 2π-periódico em t, pelo averaging temos

$$\begin{aligned} f_1(z_1) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\cos(2t)(z_1\cos(t) + z_2\operatorname{sen}(t))dt = -\frac{1}{4}z_2 \\ &\quad e \\ f_2(z_2) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t)\cos(2t)(z_1\cos(t) + z_2\operatorname{sen}(t))dt = \frac{1}{4}z_1. \end{aligned}$$

Daí, a equação obtida é

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{z}_1}{dt} &= -2\epsilon f_1(\tilde{z}_1) = \frac{1}{2}\epsilon\tilde{z}_2,\ \tilde{z}_1(0) = \alpha\\ \frac{d\tilde{z}_2}{dt} &= -2\epsilon f_2(\tilde{z}_2) = \frac{1}{2}\epsilon\tilde{z}_1,\ \tilde{z}_2(0) = \beta\end{aligned}$$

Este é um sistema liner cuja solução é

$$\begin{aligned}\tilde{z}_1(t) &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t} + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)e^{\frac{1}{2}\epsilon t},\\ \tilde{z}_2(t) &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t} - \frac{1}{2}(\alpha-\beta)e^{\frac{1}{2}\epsilon t}.\end{aligned}$$

A aproximação assintótica para a solução $x(t)$ desta equação de *Mathieus* é

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)e^{-\frac{1}{2}\epsilon t}(\cos(t)+\operatorname{sen}(t)) + \frac{1}{2}(\alpha-\beta)e^{\frac{1}{2}\epsilon t}(\cos(t)-\operatorname{sen}(t)).$$

Observe que a solução $x = \dot{x} = 0$ é instável.

No exemplo seguinte uma representação fase-amplitude é mais apropriada.

Exemplo 2.5.3. Considere o sistema de equações *Hamiltonianas* com um grau de liberdade.

$$\ddot{x} + x = \epsilon f(x),$$

onde f é suficientemente diferenciável. Aplicando a fórmula do Exemplo 2.5.1 obtemos para a fase e amplitude as seguinte equações

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= -\epsilon\operatorname{sen}(t+\psi)f(r\cos(t+\psi)),\\ \frac{d\psi}{dt} &= -\epsilon\frac{\cos(t+\psi)}{r}f(r\cos(t+\psi)).\end{aligned}$$

Temos

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(t+\psi)f(r\cos(t+\psi))dt = 0.$$

Então a equação obtida pelo averaging para a amplitude é

$$\frac{d\tilde{r}}{dt} = 0,$$

isto é, na primeira aproximação a amplitude é constante. Isto significa que uma pequena perturbação *Hamiltoniana* em osciladores harmônicos produz soluções periódicas com uma amplitude constante mas em geral um período depende desta amplitude, ou seja, do valor inicial.

É fácil ver que podemos obter o mesmo resultado usando a transformação (2.15) mas o cálculo é muito mais complicado.

Exemplo 2.5.4 (um exemplo trivial com soluções limitadas e um tempo-escala de validade restrito)**.** Considere a equação

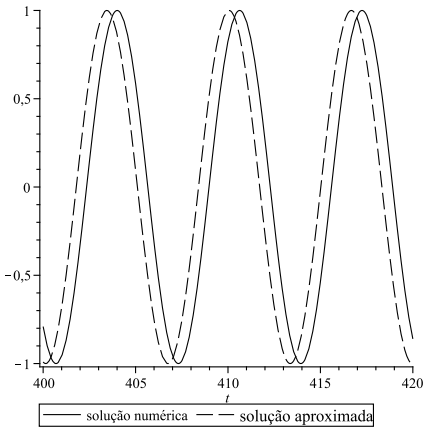
$$\ddot{x} + x = \epsilon x,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0.$$

Depois de aplicarmos a transformação fase-amplitude e averaging como no Exemplo 2.5.1 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{r}}{dt} &= 0,\ \tilde{r}(0) = 1, \\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= \frac{1}{2}\epsilon,\ \tilde{\psi}(0) = 0. \end{aligned}$$

Temos as aproximações

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \cos((1 - \frac{1}{2}\epsilon)t), \\ \dot{\tilde{x}}(t) &= -\operatorname{sen}((1 - \frac{1}{2}\epsilon)t). \end{aligned}$$



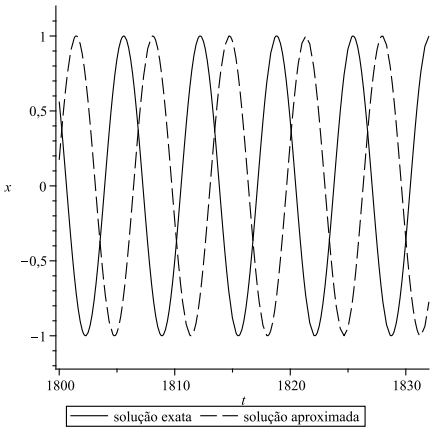


Figura 2.2: Soluções exata e aproximada de $\ddot{x} + x = \epsilon x$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ e $\epsilon = 0.1$.

Como $x(t) - \tilde{x}(t) = O(\epsilon)$ *no* tempo-escala $\frac{1}{\epsilon}$ e $x(t) = \cos((1 - \epsilon)^{\frac{1}{2}}t)$, segue que temos um exemplo onde a aproximação em $\frac{1}{\epsilon}$ não é válido em $\frac{1}{\epsilon^2}$ já que

$x(t) - \dot{\tilde{x}} = O_S(1)$ *no* tempo-escala $\dfrac{1}{\epsilon^2}$. Na Figura 2.2 esboçamos $x(t)$ e $\tilde{x}$ em intervalos distintos.

Finalmente poderemos nos perguntar qual a necessidade de fazer o averaging depois fazermos penosas transformações para encontrarmos a forma padrão. Por que não aplicamos o averaging nos termos periódicos da equação original? Vamos chamar de *averaging simples*. O seguinte contra exemplo pode servir para desestimular tal processo.

Exemplo 2.5.5 (contra exemplo de *averaging simples*)**.** Considere a equação

$$\ddot{x} + 4\epsilon \cos^2(t)\dot{x} + x = 0,$$

com valores iniciais $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. A equação corresponde a um oscilador amortecido linear onde o coeficiente de atrito oscila entre 0 e 4ϵ.

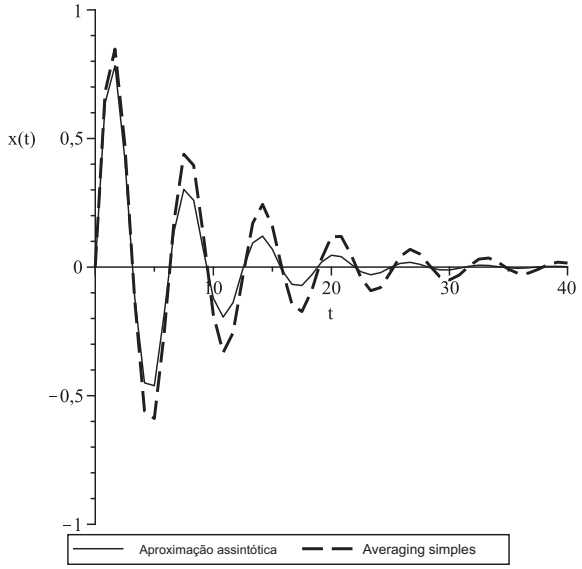


Figura 2.3: Aproximação assintótica e solução obtida através do "averaging simples"de $\ddot{x} + 4\epsilon \cos^2(t)\dot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$; $\epsilon = 0.1$.

Aplicando o averaging no termo que representa o atrito produzimos a equação

$$\ddot{x} + 2\epsilon\dot{z} + z = 0,\ z(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 1,$$

que chamaremos de *averaging simples*.

Esperamos que $z(t)$ seja uma aproximação de $x(t)$ para algum tempo-escala. Temos

$$z(t) = \frac{1}{(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-\epsilon t} \operatorname{sen}((1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}} t).$$

Esta não é uma boa aproximação. Para ver isto fazemos o averaging através da forma padrão como no Exemplo 2.5.1. Encontrando

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{r}}{dt} &= -\epsilon\tilde{r}(1-\frac{1}{2}\cos(2\tilde{\psi}),\ \tilde{r}(0)=1.\\ \frac{d\tilde{\psi}}{dt} &= \frac{1}{2}\epsilon\,\mathrm{sen}(2\tilde{\psi}),\ \tilde{\psi}(0)=-\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

e temos $\tilde{r}(t)=e^{-\frac{3}{2}\epsilon t},\ \tilde{\psi}(t)=-\frac{\pi}{2}$. Então

$$x(t)=e^{-\frac{3}{2}\epsilon t}\,\mathrm{sen}(t)+O(\epsilon)\ \textit{no}\ \text{tempo-escala}\ \frac{1}{\epsilon}.$$

Esta estimativa é válida em $[0,\infty)$. É claro que

$$x(t)-z(t)=O_S(1)\ \textit{no}\ \text{tempo-escala}\ \frac{1}{\epsilon}.$$

Na Figura 2.3 descrevemos $z(t)$ e $x(t)$ obtido por integral numérica. Poderíamos ter esboçado o gráfico de $e^{-\frac{3}{2}\epsilon t}\,\mathrm{sen}(t)$ mas esta aproximação assintótica quase coincide com a solução numérica. Sabemos que se $\epsilon=0.1$

$$\sup_{t\geq 0}|x(t)-e^{-\frac{3}{2}\epsilon t}\,\mathrm{sen}(t)|\leq 0.015.$$

Na Figura 2.4 ilustramos o comportamento no plano-fase do average simples e a solução numérica.

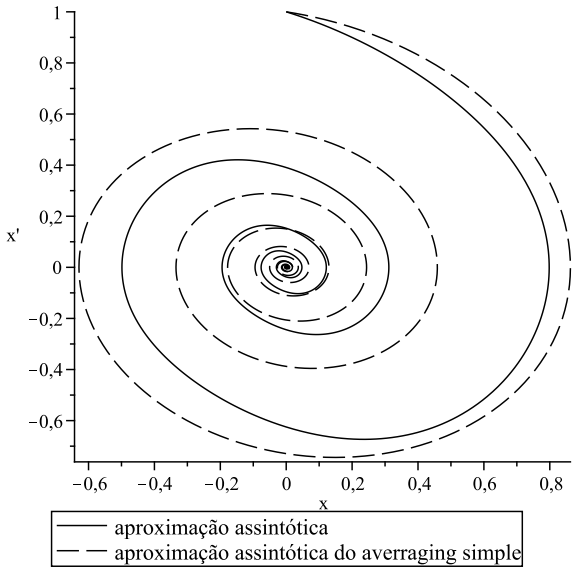


Figura 2.4: Retrato de fase para $\ddot{x}+4\epsilon\cos^2(t)\dot{x}=0, x(0)=0, \dot{x}=1; \epsilon=0,1$. A órbita da solução numérica e a aproximação assintótica praticamente coincidem e foi representada pela linha contínua e a aproximação simples foi representada por - - -.

Capítulo 3

O Método Averaging Para Encontrar Soluções Periódicas Via o Grau de Brouwer

Neste capítulo vamos tratar do seguinte resultado:

Teorema 3.0.6 (Método Averaging de Primeira Ordem)**.** *Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais*

$$\dot{x}(t) = \epsilon F_1(t,x) + \epsilon^2 R(t,x,\epsilon), \tag{3.1}$$

onde $F_1 : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ *são funções contínuas,* T*-periódicas na primeira variável e* D *é um subconjunto aberto e limitado do* $\mathbb{R}^n$*. Definimos* $f_1 : D \to \mathbb{R}^n$ *como*

$$f_1(z) = \int_0^T F_1(s,z)ds, \tag{3.2}$$

e vamos assumir que:

(i) F_1 *e* R *são localmente Lipschitziana com respeito a* x*;*

(ii) para $a \in D$ *com* $f_1(a) = 0$*, existe uma vizinhança* V *de* a *tal que* $f_1(z) \neq 0$ *para todo* $z \in \bar{V}/\{a\}$ *e* $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$*.*

Então, para $|\epsilon| > 0$ *suficientemente pequeno, existe uma solução* T*-periódica* $\varphi(\cdot,\epsilon)$ *do sistema* (3.1) *tal que* $\varphi(\cdot,\epsilon) \to a$ *quando* $\epsilon \to 0$*.*

Este resultado é a versão publicada por Jaume Llibre e Adriana Buica em [1], apresentando hipóteses mais fracas que na versão clássica apresentada em [4], página 158, Teorema 11.5. Observamos que a condição $d_B(f_1, V, 0) \neq 0$ na hipótese (ii) da versão aqui apresentada, implica na condição 11.51 de [4], isto é, o determinante Jacobiano de f_1 é não nulo. Outro aspecto envolvendo essas duas versões do Teorema do Averaging, é que em Verhulst [4] é exigido diferenciabilidade de F, enquanto que na versão de Buica-Llibre em [1] não é exigido.

3.1 Observações sobre o grau de Brouwer

Nesta seção usaremos as propriedades do grau de Brouwer apresentadas na Seção 1.3 para construir algumas observações que serão usadas na demonstração do Teorema 3.0.6 para uma função $f : D \times [-\epsilon_f, \epsilon_f] \to \mathbb{R}^n$, onde D é um aberto do R^n, e um subconjunto V do $\mathbb{R}^n$, tal que $V \subset D$ e 0 não está em $f(\partial V, \epsilon)$ para todo ϵ. O principal resultado desta seção é o seguinte:

Proposição 3.1.1. *Consideremos as funções contínuas $f_i : \bar{V} \to \mathbb{R}^n$, para $i = 0, \ldots, k$ e $f, g, r : \bar{V} \times [-\epsilon_f, \epsilon_f] \to \mathbb{R}^n$, dadas por*

$$g(\cdot, \epsilon) = f_0(\cdot) + \epsilon f_1(\cdot) + \epsilon^2 f_2(\cdot) + \cdots + \epsilon^k f_k(\cdot), \tag{3.3}$$

$$f(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + \epsilon^{k+1} r(\cdot, \epsilon). \tag{3.4}$$

Suponha que

$$g(z, \epsilon) \neq 0 \quad \textit{para todo} \quad z \in \partial V, \epsilon \in [-\epsilon_f, \epsilon_f]/\{0\}. \tag{3.5}$$

Então, para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno, $d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0)$ está bem definido e

$$d_B(f(\cdot, \epsilon), V, 0) = d_B(g(\cdot, \epsilon), V, 0).$$

Demonstração. Usaremos a propriedade de invariância por homotopia do grau de Brouwer. Para cada $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]/\{0\}$ considere a seguinte homotopia contínua

$$H_t(\cdot, \epsilon) = g(\cdot, \epsilon) + t(f(\cdot, \epsilon) - g(\cdot, \epsilon)), \quad \textit{para} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Assim, temos que provar que quando ϵ é suficientemente pequeno, $0 \notin H_t(\partial V, \epsilon)$ para $0 < t \leq 1$. Suponhamos, por contradição, que para algum $t_0 \in (0, 1]$ e algum $x_0 \in \partial V$, $H_{t_0}(x_0, \epsilon) = 0$.

Pela continuidade de r, sabemos que existe $M > 0$ tal que $|r(z, \epsilon)| \leq M$ para todo $z \in \bar{V}$ e todo $\epsilon \in (0, \epsilon_0]$.

Daí,

$$\begin{aligned}
H_t(x_0, \epsilon) &= 0 \\
&\Rightarrow \quad g(x_0, \epsilon) + t_0(f(x_0, \epsilon) - g(x_0, \epsilon)) = 0 \\
&\Rightarrow \quad g(x_0, \epsilon) + t_0 \epsilon^{k+1} r(x_0, \epsilon) = 0 \\
&\Rightarrow \quad g(x_0, \epsilon) = -t_0 \epsilon^{k+1} r(x_0, \epsilon) \\
&\Rightarrow \quad |g(x_0, \epsilon)| \leq |\epsilon^{k+1} r(x_0, \epsilon) \\
&\Rightarrow \quad |g(x_0, \epsilon)| \leq M \epsilon^{k+1}
\end{aligned}$$

O que não é verdade para ϵ suficientemente pequeno, já que

$$|g(x_0, \epsilon)| = |f_0(x_0) + \epsilon f_1(x_0) + \epsilon^2 f_2(x_0) + \cdots + \epsilon^k f_k(x_0)| \neq 0$$

□

Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1, com $f(a) = 0$, onde D é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e $a \in D$. Quando $J_f(a) \neq 0$, pelo Teorema da Função Inversa, existe uma vizinhança V de a tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V}/\{a\}$. Portanto $d_B(f, V, 0) \in \{-1, 1\}$.

Observe que o grau de Brouwer da função $f_0(z) = z^2$ é 0 em qualquer vizinhança da origem. A função f_0 tem um único zero, $a = 0$, e temos que $f'(0) = 0$. Afim de calcularmos o grau, consideremos um $\lambda > 0$ arbitrário, o intervalo $V = (-2\lambda, 2\lambda)$ e a função $g(z) = z^2 - \lambda^2$. Notemos que g tem dois zeros em V, $-\lambda$ e λ, e o sinal da jacobiana é negativa em -λ e positiva em λ. Portanto, $d_B(g, V, 0) = 0$ e pela Proposição 3.1.1 concluímos que $d_B(f_0, V, 0) = 0$.

Queremos descrever um método usando a Proposição 3.1.1 afim de dar algumas respostas para o nosso problema principal: encontrar zeros de uma função $f : D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \to \mathbb{R}^n$. Assumiremos que D é um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ e f é da forma (3.4) com g dada por (3.3) e $r : D \times (-\epsilon_0, \epsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ contínuas. O primeiro passo para isto é encontrar todos os zeros de f_0. Dado $a \in D$ tal que $f_0(a) = 0$, se existir uma vizinhança V de a tal que $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$, então para $|\epsilon| > 0$ suficientemente pequeno $f(\cdot, \epsilon)$ admite pelo menos um zero em V.

Se o grau de Brouwer de f_0 for zero em uma pequena vizinhança de a ou se não pode ser calculada (isto inclui a possibilidade de f_0 ser identicamente nula), procedemos para o estudo de $f_0 + \epsilon f_1$ em alguma vizinhança pequena de a e para ϵ suficientemente pequeno. Primeiramente supomos que existe a_{1_ϵ} que seja um zero de $f_0 + \epsilon f_1$ e um subconjunto aberto limitado V tal que $a_{1_\epsilon} \in V$ para cada $\epsilon \neq 0$ suficientemente pequeno e

$$d_B(f_0 + \epsilon f_1, V, 0) \neq 0. \tag{3.6}$$

Assim da Proposição 3.1.1, $f(\cdot, \epsilon)$ tem pelo menos um zero em V. Notemos que ainda existe a possibilidade de existir outros zeros de $f_0 + \epsilon f_1$ em alguma vizinhança de a.

Neste caso continuamos o estudo, analogamente, para a função $f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$, e assim por diante.

Exemplo 3.1.2. Vamos ilustrar aqui o que foi dito anteriormente. Consideremos a função contínua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(z, \epsilon) = z^2 - \epsilon^2 + \epsilon^3 r(z, \epsilon)$, usando as notações da Proposição 3.1.1 temos: $f_0(z) = z^2, f_1(z) = 0, f_2(z) = -1$.

Já vimos que em qualquer vizinhança de 0, o grau de f_0 é 0, assim continuaremos com o estudo de $(f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2)(z) = z^2-\epsilon^2$. Esta função tem dois zeros, $-\epsilon$ e ϵ. Fixemos um $\epsilon_0 > 0$ e considere os intervalos abertos $V = (0, \epsilon_0)$ e $U = (-\epsilon_0, 0)$. Como vimos anteriormente, $d_B(f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2, V, 0) \neq 0$ para $0 < \epsilon < \epsilon_0$, e a mesma relação é satisfeita para U em vez de V. Logo, pela Proposição 3.1.1, para ϵ suficientemente pequeno, $f(\cdot, \epsilon)$ tem pelo menos dois zeros, um em V e outro em U.(*)

Vamos supor que r é de classe C^∞, com $f_0(z) = z^2$, e usaremos o Teorema da Preparação de Malgrange [5], para estimar o número de zeros que $f(\cdot, \epsilon)$ pode admitir.

Teorema 3.1.3 (Teorema da Preparação de Malgrange)**.** *Suponha que $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ é um aberto com $(0,0) \in U$, e $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ satisfaz*

$$f(x, 0) = x^k g(x)$$

para algum inteiro $k \geq 1$, onde g é C^∞ em uma vizinhança de $x = 0$, e $g(0) \neq 0$. Então existe uma função q definida em uma vizinhança V de $(0,0)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ e funções C^∞ $a_0(\epsilon), \cdots, a_{k-1}(\epsilon)$ em uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^n$ tal que $q(0,0) \neq 0$, $a_0(0) = \cdots = a_{k-1}(0) = 0$, e

$$q(x, \epsilon) f(x, \epsilon) = x^k + \sum_{i=0}^{k-1} a_i(\epsilon) x^i \quad (x, \epsilon) \in V.$$

A função f é de classe C^∞, tomando $g(z) = 1$, e portanto satisfaz as condições do Teorema 3.1.3 e $f(z, 0) = z^2 g(z)$, então pelo Teorema 3.1.3 existe uma função q tal que

$$q(z, \epsilon) f(z, \epsilon) = z^2 + \sum_{i=0}^{1} a_i(\epsilon) z^i = z^2 + a_1(\epsilon) z + a_0(\epsilon)$$

em uma vizinhança da origem.

Como $q(z, \epsilon) f(z, \epsilon)$ é uma função polinomial de segundo grau, ela admite no máximo dois zeros e portanto f admite no máximo dois zeros.

Logo, por (*) e pelo Teorema da Preparação de Malgrange, $f(\cdot, \epsilon)$ possui exatamente dois zeros.

Corolário 3.1.4. *Suponha que as hipóteses da proposição 3.1.1 são satisfeitas para $k = 0$ e, além disso, que*

(i) para $a \in D$ com $f_0(a) = 0$, existe uma vizinhança V de a tal que $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V}/a$ e $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$.

Então, pelo menos um ramo de zeros bifurcam de a.

Demonstração. Como $f_0(z) \neq 0$ para todo $z \in \bar{V}$, pela propriedade de excisão do grau de Brouwer, deduzimos que $d_B(f_0, V, 0) \neq 0$ para toda vizinhança $V_\mu \subset V$ de a. Escolhamos V_μ de forma que $V_\mu \to a$ quando $\mu \to 0$. Portanto, para ϵ suficientemente pequeno $f(\cdot, \epsilon)$ tem pelo menos um zero $a_\epsilon \in V_\mu$ e que podemos escolher a_ϵ tal que $a_\epsilon \to a$ quando $\epsilon \to 0$. Ainda mais, se, além disso, $J_{f_0}(a) \neq 0$, pelo Teorema da Função Inversa, este ramo é único. □

3.2 O Teorema do Averaging de primeira ordem

Nesta seção apresentaremos a demonstração do Teorema 3.0.6, que pode ser encontrada em [1], que é o principal resultado teórico deste capítulo. Começaremos então justificando a seguinte afirmação: O problema de encontrar soluções T-periódicas para um sistema de equações diferenciais é equivalente a encontrar zeros de uma função definida em um espaço de dimensão finita correspondente.

Comecemos considerando o sistema de equações diferenciais,

$$\dot{x} = F(t, x, \epsilon), \tag{3.7}$$

onde $F : \mathbb{R} \times D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, T-periódica na primeira variável, localmente lipschitziana na segunda variável e D é um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$. Para cada $z \in D$ denotamos $x(\cdot, z, \epsilon) : [0, t_z) \to \mathbb{R}^n$ a solução de (3.7) com $x(0, z, \epsilon) = z$. Suponhamos que

$$t_z > T \ \ para \ \ todo \ \ z \in D. \tag{3.8}$$

Consideremos a função $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$f(z, \epsilon) = \int_0^T F(t, x(t, z, \epsilon), \epsilon) dt. \tag{3.9}$$

Toda solução de (3.7)

$$x : [0, T] \to \mathbb{R}^n \ \ com \ \ x(0) = x(T) \tag{3.10}$$

pode, pela sua periodicidade, ser extendida à $\mathbb{R}$ e temos a relação

$$x(T, z, \epsilon) - x(0, z, \epsilon) = f(z, \epsilon).$$

Então para todo (z_ϵ, ϵ) tal que

$$f(z_\epsilon, \epsilon) = 0, \tag{3.11}$$

produz-se uma solução periódica de $x(\cdot, z_\epsilon, \epsilon)$ de (3.7). O contrário também é verdade, i.e. para cada solução T-periódica de (3.7), se denotarmos por z_ϵ seu valor em $t = 0$ então (3.11) é satisfeita, o que prova nossa afirmação inicial.

Afim de aplicar a Proposição 3.1.1 precisamos da fórmula de Mac-Laurin. Quando $f : D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f) \to \mathbb{R}^n$ é contínua e de classe C^k em ϵ escrevemos

$$f(z,\epsilon) = g(z,\epsilon) + \epsilon^{k+1} r(z,\epsilon), \tag{3.12}$$

com g dada por

$$g(z,\epsilon) = f(z,0) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial \epsilon}(z,0) + \cdots + \epsilon^k \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial \epsilon^k}(z,0). \tag{3.13}$$

Exceto em $\epsilon = 0$, a função r está bem definida e é contínua. Se conseguirmos provar que r é limitada em algum conjunto da forma $K \times [-\epsilon_f, \epsilon_f]$ com K um subconjunto compacto de D, então temos que r é contínua em $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$. A continuidade é uma condição necessária na Proposição 3.1.1 e, neste caso, de agora em diante, ao invés de escrever a fórmula (3.10) com a função r dada explicitamente, usaremos os símbolos de *Landau* e escreveremos em $K \times [-\epsilon_f, \epsilon_f]$,

$$f(z,\epsilon) = g(z,\epsilon) + \epsilon^{k+1} O(1).$$

Agora iremos provar o Teorema 3.0.6.

Demonstração do Teorema 3.0.6. Para todo $z \in \bar{V}$, existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, quando $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$, $x(\cdot, z, \epsilon)$ está definido em $[0, T]$, i.e. a relação (3.8) é válida. Daí, pelo Teorema Local de Existência e Unicidade 1.1.2, $t_z > h_z$ e $h_z = \inf(T, \frac{b}{M(\epsilon)})$ onde $M(\epsilon) \geq |\epsilon F_1(t,x) + \epsilon^2 R(t,x,\epsilon)|$ para todo $t \in [0,T]$, para cada x com $|x - z| \leq b$ e para todo $z \in \bar{V}$. Quando $|\epsilon|$ é suficientemente pequeno, $M(\epsilon)$ pode ser arbitrariamente grande, tal que $h_z = T$ para todo $z \in \bar{V}$.

Para todo $t \in [0,T]$, $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$ a seguinte relação é satisfeita

$$x(t,z,\epsilon) = z + \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s,z,\epsilon), \epsilon) ds + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s,z,\epsilon), \epsilon) ds, \tag{3.14}$$

e a função f dada por (3.9) torna-se para o nosso sistema

$$f(z,\epsilon) = \epsilon \int_0^t F_1(s, x(s,z,\epsilon), \epsilon) ds + \epsilon^2 \int_0^t R(s, x(s,z,\epsilon), \epsilon) ds.$$

Iremos provar agora que

$$f(z,\epsilon) = \epsilon f_1(z) + \epsilon^2 O(1) \ \ em \ \ \bar{V} \times [-\epsilon_0, \epsilon_0], \tag{3.15}$$

com f_1 dada por (3.2). Observe que existe K um subconjunto compacto de D tal que $x(t,z,\epsilon) \in K$ para todo $t \in [0,T]$, $z \in \bar{V}$ e $\epsilon \in [-\epsilon_0, \epsilon_0]$.

Então, pela continuidade de R em $[0,T]\times K\times[-\epsilon_0,\epsilon_0]$ existe $N_K>0$ tal que $R(t,x(t,z,\epsilon),\epsilon)\leq N_K$, ou seja,

$$\int_0^T R(s,x(s,z,\epsilon),\epsilon)ds \leq \int_0^T N_K ds = TN_K = O(1)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\epsilon\int_0^T F_1(s,x(s,z,\epsilon),\epsilon)ds &= \epsilon\int_0^T [F_1(s,x(s,z,\epsilon),\epsilon)-F_1(s,z)+F_1(s,z)]ds\\ &= \epsilon\int_0^T [F_1(s,x(s,z,\epsilon),\epsilon)-F_1(s,z)]ds\\ &+ \underbrace{\epsilon\int_0^T F_1(s,z)ds}_{=f_1(z)}\end{aligned}$$

Daí,

$$f(z,\epsilon)-\epsilon f_1(z) = \epsilon\int_0^T [F_1(s,x(s,z,\epsilon),\epsilon)-F_1(s,z)]ds+\epsilon^2 O(1). \quad (3.16)$$

Usando o fato de F_1 ser *Lipschitiziana* com respieto a x em $[0,T]\times K$ e a fórmula (3.14), obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}|F_1(s,x(s,z,\epsilon),\epsilon)-F_1(s,z)| &\leq L_K|x(s,z,\epsilon)-z|\\ &\leq bL_K = O(1) = \epsilon^2 O(1).\end{aligned}$$

Portanto, (3.15) é satisfeita. Usando o Corolário 3.1.4, temos que as hipóteses (ii) asseguram a existência de z_ϵ tal que $f(z_\epsilon,\epsilon)=0$ e $z_\epsilon\to a$ quando $\epsilon\to 0$. Então $\varphi(\cdot,\epsilon)=x(\cdot,z_\epsilon,\epsilon)$ é uma solução periódica de (3.1) e $\varphi(\cdot,\epsilon)\to a$ quando $\epsilon\to 0$ (isto é válido pela propriedade de continuidade das soluções de (3.1) com respeito a um parâmetro e o valor inicial). □

3.3 Método Averaging para sistemas planares autônomos

Seja

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x,y),\\ \dot{y} &= Q(x,y),\end{aligned} \quad (3.17)$$

um sistema planar, onde $P,Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ são funções polinomiais, a função $\mu=\mu(x,y)$ é um *fator de integração* do sistema (3.17) se uma das seguintes condições equivalentes são satisfeitas

(i) $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial x} = -\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial y}$;

(ii) $div(\mu P, \mu Q) = 0$.

A *integral primeira* H associada ao fator de integração μ é dada por

$$H(x,y) = \int \mu(x,y)P(x,y)dy + h(x), \tag{3.18}$$

onde h é escolhida de forma que $\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\mu Q$. Então,

$$\dot{x} = \mu P = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = \mu Q = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{3.19}$$

Reciprocamente, dada uma integral primeira H do sistema (3.17) sempre podemos encontrar um fator de integração μ para o qual (3.19) é satisfeita.

Agora, consideremos o sistema planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y), \\ \dot{y} &= Q(x,y), \end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são funções polinomiais sob a hipótese

($A1$) O sistema (3.20) tem um anel periódico (i. é., uma região do plano composta por trajetórias periódicas) em torno do ponto singular $(0,0)$,

$$\Gamma_h : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : H(x,y) = h, \quad h_c < h < h_s\}.$$

Aqui H é a integral primeira, h_c é o nível do ponto crítico de H correspondendo ao centro $(0,0)$ e h_s denota o valor de H para o qual a anel periódico termina. Sem perda de generalidade podemos supor que $h_s > h_c \geq 0$. Denotamos por $\mu = \mu(x,y)$ o fator de integração do sistema (3.20) correspondente a integral primeira H.

Agora vamos perturbar o sistema (3.20) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= P(x,y) + \epsilon p(x,y,\epsilon), \\ \dot{y} &= Q(x,y) + \epsilon q(x,y,\epsilon), \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde $p, q : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções contínuas.

Vamos aplicar o Método Averaging para estudarmos os ciclos limites que bifurcam em $\epsilon = 0$ do sistema (3.21), para ϵ suficientemente pequeno, das trajetórias do anel periódico (3.20). O primeiro passo é escrever o sistema (3.21) na forma padrão (i.e. na forma (3.1)) para aplicarmos o Método Averaging. Neste caso, a forma padrão vai descrever a relação entre a raiz da energia $R = \sqrt{h}$ e o ângulo φ das coordenadas polares. O campo de vetores, nas coordenadas (R, φ) será 2π-periódico e suas soluções 2π-periódicas serão trajetórias periódicas de (3.21).

Teorema 3.3.1. *Suponha que o sistema* (3.20) *satisfaz as condições* $(A1)$ *e que*

$$xQ(x,y) - yP(x,y) \neq 0 \tag{3.22}$$

para todo (x,y) *na região de centros. Seja* $\rho : (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi) \to [0, \infty)$ *uma função tal que*

$$H(\rho(R,\varphi)\cos\varphi, \rho(R,\varphi)\operatorname{sen}\varphi) = R^2. \tag{3.23}$$

para todo $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$ *e todo* $\varphi \in [0, 2\pi)$*. Então a equação diferencial que descreve a dependência entre a raiz quadrada da energia,* $R = \sqrt{h}$ *e o ângulo* φ *para o sistema* (3.21) *é*

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{\mu(x^2+y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py) + 2R\epsilon(qx - py)}. \tag{3.24}$$

onde $x = \rho(R,\varphi)\cos\varphi$ *e* $y = \rho(R,\varphi)\operatorname{sen}\varphi$*.*

Tomamos $\epsilon_f > 0$ *suficientemente pequeno e* $D = \cup_{h_{c^*}<h<h_{s^*}} \Gamma_h$*, onde* $h_c < h_{c^*} < h_{s^*} < h_s$ *são fixos mas arbitrariamente próximo de* h_c *e* h_s*, respectivamente. O campo de vetores da equação* (3.23) *está bem definido, é contínuo em* $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ *e é* 2π*-periódico com respeito a* φ*.*

Demonstração. Primeiramente observe que as relações

$$\frac{\partial H}{\partial x}P + \frac{\partial H}{\partial y}Q = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\mu P, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \mu Q$$

são válidas na região de centros já que H é uma integral primeira e μ é um fator de integração de (3.20). Vamos definir a função

$$G(r, R, \varphi) = H(r\cos\varphi, r\operatorname{sen}\varphi) - R^2,$$

em todo ponto (r,φ) da região de centros (que é um conjunto aberto) e para cada $R \in (\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s})$. Daí (r,φ) denota a coordenada polar. Então,

$$\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\partial H}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial H}{\partial y}\operatorname{sen}\varphi = \mu(Q\cos\varphi - P\operatorname{sen}\varphi).$$

Para todo (r_0, φ_0) na região de centros existe um R_0 tal que $G(r_0, R_0, \varphi_0) = 0$. As hipóteses (3.22) asseguram que $\frac{\partial G}{\partial r} \neq 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, em torno de cada ponto (r_0, φ_0) existe uma única função $\rho = \rho(R,\varphi)$ tal que a relação (3.23) é satisfeita. Daí esta função está bem definida no domínio $(\sqrt{h_c}, \sqrt{h_s}) \times [0, 2\pi)$ e satisfaz (3.23).

A dependência entre entre a raiz quadrada da energia e o tempo é dada por $R(t) = \sqrt{H(x(t), y(t))}$, e entre o ângulo φ e o tempo é $\varphi(t) = \arctan\frac{y(t)}{x(t)}$, quando $(x(t), y(t)) \in \Gamma_h$, $t \in \mathbb{R}$. Então temos

$$\dot{R} = \left(\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y}\dot{y}\right)\frac{1}{\sqrt{H}} = \epsilon\frac{\mu(Qp - Pq)}{2R},$$

e

$$\dot{\varphi} = \left(\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right)\frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = \frac{(Qx - yP) + \epsilon(qx - py)}{x^2 + y^2}.$$

Eliminado o tempo obtemos a equação (3.24). A condição (3.22) implica que o campo de vetores de (3.24) está bem definido em $D \times (-\epsilon_f, \epsilon_f)$ para ϵ_f suficientemente pequeno. Também, o campo é contínuo e 2π-periódico em φ. □

Escrevendo (3.24) como uma expansão de *Taylor* com resto de *Lagrange* em $\epsilon = 0$, obtemos a forma padrão:

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon F_1(\varphi, R) + \epsilon^2 G(\varphi, R, \epsilon), \tag{3.25}$$

onde

$$F_1(\varphi, R) = \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} \tag{3.26}$$

e G é o resto de *Lagrange* logo a expressão de (3.2) para este caso fica:

$$f_1(R) = \int_0^{2\pi} \frac{\mu(x^2 + y^2)(Qp - Pq)}{2R(Qx - Py)} d\varphi \tag{3.27}$$

Exemplo 3.3.2 (Estudo da bifurcação de ciclos limites de um centro isócrono via Averaging)**.** Consideremos o seguinte sistema diferencial quadrático

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2, \\ \dot{y} &= x + xy, \end{aligned} \tag{3.28}$$

com um centro isócrono na origem e uma integral primeira na região de centros com a seguinte expressão $H(x, y) = \frac{x^2+y^2}{(1+y)^2}$. Para esse sistema temos $h_c = 0$, $h_s = 1$, e a função ρ descrita no Teorema 3.3.1 é dada por $\rho(R, \varphi) = \frac{R}{1-R\operatorname{sen}\varphi}$ para todo $0 < R < 1$ e $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Vamos considerar que a perturbação está na forma normal de *Bautin*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x^2 + \epsilon p(x, y), \\ \dot{y} &= x + xy + \epsilon q(x, y), \end{aligned} \tag{3.29}$$

onde $p(x, y) = a_1 x - a_3 x^2 + (2a_2 + a_5)xy + a_6 y^2$ e $q(x, y) = a_1 y + a_2 x^2 + a_4 xy - a_2 y^2$. A equação (3.24) correspondente é

$$\frac{dR}{d\varphi} = \epsilon \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\,\mathrm{sen}\,\varphi + \epsilon c(\varphi)R} \tag{3.30}$$

onde

$$\begin{aligned} a(\varphi) &= (-2a_1 + 2_2 + a_5)\,\mathrm{sen}\,\varphi + (a_4 + a_6)\cos\varphi \\ &+ (-4a_2 - a_5)\,\mathrm{sin}^3\,\varphi + (-a_3 - a_4 - a_6)\cos^3\varphi, \\ b(\varphi) &= a_1 + a_2 + (-a_1 - 2a_2)\cos^2\varphi - a_4\cos\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi, \\ c(\varphi) &= (a_3 + a_4)\,\mathrm{sen}\,\varphi + (-3a_2 - a_5)\cos\varphi + ((-a_3 - a_4 - a_6)\,\mathrm{sen}^2\,\varphi \\ &+ (4a_2 + a_5)\cos^3\varphi. \end{aligned}$$

Assim, neste caso obtemos

$$F_1(\varphi, R) = \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\,\mathrm{sen}\,\varphi}$$

Afim de aplicar o Teorema 3.0.6, precisamos da função (3.2) que neste caso é $f_1 : (0,1) \to \mathbb{R}$,

$$f_1(z) = \int_0^{2\pi} \frac{a_1 R + a(\varphi)R^2 + b(\varphi)R^3}{1 - R\,\mathrm{sen}\,\varphi} d\varphi$$

Fazendo os cálculos, temos

$$\begin{aligned} f_1(z) = &- \frac{1}{2(z\sqrt{1-z^2})}[2a_2 z^4 + (6_2 + a_5 - 2a_1)z^2\sqrt{1-z^2} - (10a_2 + 2a_5)z^2 \\ &- (2a_5 + 8a_2)\sqrt{1-z^2} + 8a_2 + 2a_5]. \end{aligned}$$

Vamos fazer a seguinte mudança de variáveis $z = \sqrt{1-\xi^2}$, onde $\xi \in (0,1)$, obtendo

$$f_1(\sqrt{1-\xi^2}) = \frac{1}{2(\sqrt{1-\xi^2})}(1-\xi^2)[2a_2\xi^2 + (2a_1 - 4a_2 - a_5)\xi + 2a_1 + 2a_2 + a_5].$$

Observemos que $z \in (0,1)$ é um zero de f_1 se, e somente se, $\xi \in (0,1)$ é um zero da função polinomial $g(\xi) = 2a_2\xi^2 + c_1\xi + c_2$, onde $c_1 = 2a_1 - 4a_2 - a_5$ e $c_2 = 2a_1 + 2a_2 + a_5$. Considerando em nossa discussão sobre os zeros de g, iremos considerar seus coeficientes como números reais arbitrários. Então podemos concluir que o número máximo de zeros de g no intervalo $(0,1)$ é dois. Isto significa que o número de zeros de f_1 é no máximo dois. Logo, no máximo dois ciclos limites bifurcam do anel periódico do sistema (3.28).

3.4 Mais uma aplicação do Método Averaging

Nesta seção estudaremos a bifurcação de ciclos limites a partir de órbitas periódicas de centros quadridimensionais em uma classe de sistemas diferenciais lineares por partes. Vamos determinar uma cota superior para o número de ciclos limites e dar um exemplo tal que o número de ciclos limites que bifurcam seja igual a cota superior encontrada.

Estudaremos uma classe de sistemas que tem a seguinte forma

$$\dot{x} = A_0 x + \epsilon A x + \epsilon \varphi(x_1) b \tag{3.31}$$

onde, $A \in M_4(\mathbb{R})$ é uma matriz arbitrária, $b = e_1$ ou $b = e_3$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função linear por partes

$$\varphi(x_1) = \begin{cases} -1, & para \;\; x_1 \in (-\infty, -1), \\ x_1, & para \;\; x_1 \in [-1, 1], \\ 1, & para \;\; x_1 \in (1, \infty). \end{cases} \tag{3.32}$$

Essa classe de sistemas foi tratada em [2].

A variável independente, como de costume, é denotada por t, e vetores do $\mathbb{R}^4$ são vetores coluna.

Para $\epsilon = 0$ o sistema (3.31), torna-se

$$\dot{x_1} = -x_2, \quad \dot{x_2} = x_1, \quad \dot{x_3} = -x_4, \quad \dot{x_4} = x_3. \tag{3.33}$$

Notemos que a origem é um centro global isócrono para (3.33), i.e. todas as órbitas são periódicas e têm o mesmo período.

Afim de colocar a equação (3.31) na forma padrão para aplicarmos o Teorema 3.0.6 faremos a seguinte mudança de variáveis, (x_1, x_2, x_3, x_4) para (θ, r, ρ, s), fazendo

$$x_1 = r\cos\theta, \quad x_2 = r\,\mathrm{sen}\,\theta, \quad x_3 = \rho\cos(\theta + s), \quad x_4 = \rho\,\mathrm{sen}(\theta + s)$$

Daí, temos que o sistema,

$$\begin{aligned}
\dot{x_1} &= -x_2 + \epsilon \sum_{i=1}^{4} a_{1i}x_{1i} + \epsilon\varphi(x_1)b_1 \\
\dot{x_2} &= x_1 + \epsilon \sum_{i=1}^{4} a_{2i}x_{2i} + \epsilon\varphi(x_1)b_2 \\
\dot{x_3} &= -x_4 + \epsilon \sum_{i=1}^{4} a_{3i}x_{3i} + \epsilon\varphi(x_1)b_3 \\
\dot{x_4} &= x_3 + \epsilon \sum_{i=1}^{4} a_{4i}x_{4i} + \epsilon\varphi(x_1)b_4
\end{aligned}$$

fica da seguinte forma nas variáveis (θ, r, ρ, s),

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 1 + \epsilon\frac{1}{r}(\cos\theta F_2 - \operatorname{sen}\theta F_1), \\
\dot{r} &= \epsilon H_1(\theta, r, \rho, s), \\
\dot{\rho} &= \epsilon H_2(\theta, r, \rho, s), \\
\dot{s} &= \epsilon H_3(\theta, r, \rho, s).
\end{aligned}$$

onde,

$$\begin{aligned}
H_1 &= \cos\theta F_1 + \operatorname{sen}\theta F_2, \\
H_2 &= \cos(\theta + s)F_3 + \operatorname{sen}(\theta + s)F_4, \\
H_3 &= -\frac{1}{r}\cos\theta F_2 + \frac{1}{r}\operatorname{sen}\theta F_1 + \frac{1}{\rho}\cos(\theta + s)F_4 - \frac{1}{\rho}\operatorname{sen}(\theta + s)F_3,
\end{aligned}$$

e para todo $i = 1, \cdots, 4$

$$F_i = a_{i1}r\cos\theta + a_{i2}r\operatorname{sen}\theta + a_{i3}\rho\cos(\theta + s) + a_{i4}\rho\operatorname{sen}(\theta + s) + \varphi(rcos\theta)b_i.$$

Note que para $|\epsilon|$ suficientemente pequeno, $\dot{\theta} > 0$ para cada t quando $(\theta, r, \rho, s) \in \mathbb{R} \times D_n$, onde $D_n = (\frac{1}{n}, n) \times (\frac{1}{n}, n) \times \mathbb{R}$. Agora eliminamos a variável t no sistema acima considerando θ como a nova variável independente. Daí, o lado direito do novo sistema é contínuo e está bem definido em $\mathbb{R} \times D_n$, é 2π-periódico com respeito a variável independente θ e localmente *lipischitziana* com respeito a (r, ρ, s). A partir da expansão de *Taylor* com resto de *Lagrange* com respeito a ϵ em zero, obtemos o seguinte sistema:

$$\frac{dr}{d\theta} = \epsilon H_1(\theta, r, \rho, s) + \epsilon^2 O(1), \tag{3.34}$$

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \epsilon H_2(\theta, r, \rho, s) + \epsilon^2 O(1), \tag{3.35}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \epsilon H_3(\theta, r, \rho, s) + \epsilon^2 O(1). \tag{3.36}$$

que está na forma padrão para aplicarmos o Teorema 3.0.6.

O próximo passo é estudar a função $h : D_n \to \mathbb{R}^3$, $h = (h_1, h_2, h_3)^T$, que é equivalente a (3.2), e suas componentes são

$$h_i = \int_0^{2\pi} H_i(\theta, r, \rho, s)d\theta,$$

para cada $i = 1, \cdots, 3$.

Para calcular a expressão de h, precisaremos calcular as seguintes integrais:

Para cada $r > 0$ denotamos

$$I_1(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r\cos\theta)\cos\theta d\theta, \tag{3.37}$$

$$I_2(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta. \tag{3.38}$$

Onde φ é a função linear por partes descrita em (3.32).

Afirmamos que as integrais I_1 e I_2 dadas por (3.37) e (3.38), respectivamente, têm a seguinte expressão

$$I_1(r) = \begin{cases} r\pi, \quad para \quad 0 < r \leq 1 \\ 2\dfrac{\sqrt{r^2-1}}{r} + r\pi \\ -2r\arctan\sqrt{r^2-1}, \quad para \quad r > 1 \end{cases} \tag{3.39}$$

e

$$I_2(r) = 0 \quad para \quad todo \quad r > 0 \tag{3.40}$$

Agora vamos voltar a afirmação.

Quando $0 < r \leq 1$ temos $|r\cos\theta| \leq 1$ e $|r\,\mathrm{sen}\,\theta| \leq 1$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Então, $\varphi(r\cos\theta) = r\cos\theta$, assim

$$\begin{aligned} I_1(r) = & \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = r\pi, \\ I_2(r) = & \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,\theta\cos\theta d\theta = 0, \end{aligned}$$

Fixemos agora $r > 1$ e considere $\theta_c \in (0, \pi/2)$ tal que $\cos\theta_c = 1/r$. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} I_1(r) \;=\; & \int_0^{\theta_c} \cos\theta d\theta + r\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \cos^2\theta d\theta \\ & - \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} \cos\theta d\theta + r\int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \cos\theta d\theta \\ & + \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} \cos\theta d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \quad I_2(r) &= \int_0^{\theta_c} \operatorname{sen}\theta d\theta + r\int_{\theta_c}^{\pi-\theta_c} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \\ &- \int_{\pi-\theta_c}^{\pi+\theta_c} \operatorname{sen}\theta d\theta + r\int_{\pi+\theta_c}^{2\pi-\theta_c} \operatorname{sen}\theta\cos\theta d\theta \\ &+ \int_{2\pi-\theta_c}^{2\pi} \operatorname{sen}\theta d\theta. \end{aligned}$$

Calculando as integrais acima obtemos

$$I_1(r) = 2\operatorname{sen}\theta_c + r\pi - 2r\theta_c, \quad e \quad I_2(r) = 0.$$

Como $\theta_c \in (0, \pi/2)$ com $\cos\theta_c = 1/r$, temos $\operatorname{sen}\theta_c = \sqrt{r^2-1}/r$ e $\theta_c = \arctan\sqrt{r^2-1}$. Isto prova a afirmação.

Com esses valores de I_1 e I_2, obtemos os seguintes valores para as funções coordenadas de h

$$\begin{cases} h_1 = c_1 r + (c_2\cos s + c_3 \operatorname{sen} s)\rho + b_1 I_1, \\ h_2 = (c_5\cos s + c_6 \operatorname{sen} s)r + c_7\rho + (b_3\cos s + b_4 \operatorname{sen} s)I_1, \\ h_3 = -c_4 + (c_3\cos s - c_2 \operatorname{sen} s)\dfrac{\rho}{r} \\ +(c_6\cos s - c_5 \operatorname{sen} s)\dfrac{r}{\rho} + (-\dfrac{b_2}{r} + \dfrac{b_4\cos s - b_3 \operatorname{sen} s}{\rho})I_1, \end{cases} \tag{3.41}$$

onde usamos a seguinte notação $I_1(r) = I_1$ e,

$$\begin{aligned} c_1 &= (a_{11} + a_{22})\pi, \\ c_2 &= (a_{13} + a_{24})\pi, \\ c_3 &= (a_{14} - a_{23})\pi, \\ c_4 &= (a_{21} - a_{12} - a_{43} + a_{34})\pi, \\ c_5 &= (a_{31} + a_{42})\pi, \\ c_6 &= (a_{41} - a_{32})\pi, \\ c_7 &= (a_{33} + a_{44})\pi. \end{aligned}$$

Agora vamos voltar ao sistema (3.31). Para cada constante $(r^*, \rho^*, s^*) \in D_n$ associamos uma órbita periódica do sistema (3.33) (i.e. (3.31) com $\epsilon = 0$), já que

$$\begin{aligned} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \rho = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \\ s = \arctan\frac{x_4}{x_3} - \arctan\frac{x_2}{x_1}, \end{aligned}$$

são integrais primeira desse sistema. Observe que o sistema (3.34) satisfaz as hipóteses do Teorema 3.0.6, e para qualquer solução isolada 2π-periódica de

(3.34) com $|\epsilon| \neq 0$ suficientemente pequeno, corresponde a um ciclo limite de (3.31).

Nosso objetivo agora é provar a proposição abaixo. Afim de encontrar os zeros de h em D_n é suficiente olhar para seus zeros em $(0,\infty)\times(0,\infty)\times[0,2\pi)$. Isto se deve pelo fato de que n pode ser escolhido arbitrariamente grande, e h, como definido acima.

Proposição 3.4.1. *Seja $h : D_n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a função cujas componentes são dadas por* (3.41)*, onde $c_i, i = 1, \cdots, 7$ são parâmetros reais arbitrários, $b_1, b_3 \in \{0,1\}$ com $b_1 b_3 = 0$ e $b_1^2 + b_3^2 \neq 0$. A função I_1 é dada por* (3.39)*. Então,*

(i) h é de classe C^1;

(ii) o número máximo de zeros isolados de h em $D_n \times [0, 2\pi)$ é três.

Além disso, para os seguintes valores dos coeficientes,

$$\begin{aligned} c_1 = -2, \quad c_2 = -2, \quad c_3 = 0 \quad c_4 = \frac{21}{10}, \\ c_5 = 0, \quad c_6 = 1, \quad c_7 = -1, \quad b_1 = 1, \\ b_2 = b_3 = b_4 = 0, \end{aligned}$$

h tem exatamente três zeros.

Demonstração. A função h é a composição de algumas funções elementares e a função I_1 , portanto para demonstrarmos o item (i) podemos restringir ao estudo de I_1 ser de classe C^1 em $(0,\infty)$.

$$I_1'(r) = \begin{cases} \pi, \quad para \quad 0 < r \leq 1, \\ 2\dfrac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} + \pi - 2\arctan\sqrt{r^2-1} \quad para \quad r > 1. \end{cases}$$

Precisamos verificar se a função I_1' é contínua no ponto 1. Como,

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 1^-} I_1'(r) &= \lim_{r\to 1^-} \pi = \pi, \\ \lim_{r\to 1^+} I_1'(r) &= \lim_{r\to 1^+} 2\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} + \pi - 2\arctan\sqrt{r^2-1} = \pi, \end{aligned}$$

podemos concluir que I_1' é contínua.

Vamos provar agora o item (ii).

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} h_1 = 0, \\ h_2 = 0 \end{cases}$$

em ρ e I_1, obtemos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{c_1(b_3\cos s + b_4 \operatorname{sen} s) - b_1(c_5\cos s + c_6 \operatorname{sen} s)}{(c_2\cos s + c_3 \operatorname{sen} s)(b_3\cos s + b_4 \operatorname{sen} s) - b_1 c_7} r \\ I_1 &= \frac{(c_2\cos s + c_3 \operatorname{sen} s)(c_5\cos s + c_6 \operatorname{sen} s) - c_1 c_7}{(c_2\cos s + c_3 \operatorname{sen} s)(b_3\cos s + b_4 \operatorname{sen} s) - b_1 c_7} r. \end{aligned}$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} k_1(s) &= c_1(b_3\cos s + b_4 \operatorname{sen} s) - b_1(c_5\cos s + c_6 \operatorname{sen} s), \\ k_2(s) &= (c_2\cos s + c_3 \operatorname{sen} s)(c_5\cos s + c_6 \operatorname{sen} s) - c_1c_7, \\ d(s) &= (c_2\cos s + c_3 \operatorname{sen} s)(b_3\cos s + b_4 \operatorname{sen} s) - b_1c_7. \end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\rho = \frac{k_1(s)}{d(s)}r, \tag{3.42}$$

$$I_1 = \frac{k_2(s)}{d(s)}r. \tag{3.43}$$

Se substituirmos em h_3, os valores de ρ e I_1, vemos que h_3 torna-se uma função f que depende apenas da variável s, já que f é uma combinação das constantes c_i e b_i, $i = 1, \cdots, 4$ e das funções $\cos s$ e $\operatorname{sen} s$.

Notemos que estudar os zeros de h_3 é equivalente a estudarmos os zeros de f. Fazendo a seguinte mudança de variáveis $\cos s = x$ e $\operatorname{sen} s = \sqrt{1-x^2}$ e igualando f a zero, obtemos uma equação com seguinte forma:

$$C_1x + C_3x^3 + (D_0 + D_2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0, \tag{3.44}$$

onde C_1, C_3, D_0 e D_2 são termos que dependem das constantes c_i e b_i, $i = 1, \cdots, 4$.

Observe que temos que considerar o caso em que $\operatorname{sen} s = -\sqrt{1-x^2}$, então a equação (3.44) torna-se

$$C_1x + C_3x^3 - (D_0 + D_2x^2)\sqrt{1-x^2} = 0, \tag{3.45}$$

Portanto temos que encontrar as soluções $x \in [-1, 1]$ que satisfazem (3.44) e (3.45), ou seja, que satisfaz

$$(C_1x + C_3x^3)^2 - (D_0 + D_2x^2)^2(1-x^2) = 0, \tag{3.46}$$

que é a equação polinomial

$$\begin{aligned} - \quad & D_0^2 + (C_1^2 + D_0^2D_0D_2)x^2 + (2C_1C_3 + 2D_0D_2 - D_2^2)x^4 \\ + \quad & (c_3^2 + D_2^2)x^6 = 0. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Esta equação admite no máximo seis zeros no intervalo $[-1, 1]$, então f admite no máximo seis soluções $s \in [0, 2\pi)$. Como $f(s+\pi) = -f(s)$ para todo $s \in [0, 2\pi)$ então se s^* é um zero de f então $s^* + \pi$ será também.

Agora vamos estudar a solubilidade de (3.43) com respeito a $r > 0$, e para isso usaremos o seguinte lema:

Lema 3.4.2. *Consideremos a seguinte equação*

$$I_1(r) = cr, \quad r > 0, \tag{3.48}$$

com I_1 dada por (3.39) e c um parâmetro real. No estudo da solubilidade da equação acima temos as seguintes situações:

a) Se $0 < c < \pi$ então (3.48) tem uma única solução $r^* > 1$.

b) Se $c = \pi$ então (3.48) tem o intervalo $(0, 1]$ como conjunto solução.

c) Se $c \leq 0$ ou $c > \pi$ então (3.48) não admite solução.

Demonstração. Pela expressão de I_1 temos que se $r \in (0, 1]$ então $I_1(r) = \pi c$ e portanto o resultado é válido.

Para $r > 1$, pela expressão de I_1 a equação (3.48) fica:

$$2\frac{\sqrt{r^2-1}}{r^2} + \pi - 2\arctan\sqrt{r^2-1} = cr.$$

Fazendo a mudança de variável $u = \sqrt{1-r^2}$ obtemos a seguinte equação:

$$\arctan u = \frac{\pi - c}{2} + \frac{u}{u^2+1} \quad u > 0.$$

Um estudo gráfico desta equação no intervalo $(0, \infty)$ nos mostra que o lado direito e o lado esquerdo desta equação se interceptam se e somente se $0 < \frac{\pi - c}{2} < \frac{\pi}{2}$, ou seja, $0 < c < \pi$ e neste caso a intersecção é única. □

Usando o lema anterior, existe uma solução $r > 0$ de (3.43) se, e somente se,

$$0 < \frac{k_2(s^*)}{d(s^*)} < \pi, \tag{3.49}$$

e neste caso, a solução é única. Além disso, para r^* fixo correspondendo a algum s^*, quando

$$\frac{k_1(s^*)}{d(s^*)} > 0 \tag{3.50}$$

podemos encontrar $\rho^* > 0$ de forma única para (3.42).

Provaremos que a condição (3.50), é satisfeita para no máximo a metade dos zeros de f. Afim de provar isto, observemos que $k_1(s + \pi) = -k_1(s)$, $d(s + \pi) = d(s)$, e já vimos que os zeros de f aparecem em pares s^* junto com $s^* + \pi$.

A condição (3.50) é satisfeita para s^*, ou para $s^* + \pi$, a menos que $k_1(s^*) = 0$.

Daí, a função h pode ter no máximo três zeros isolados $(r^*, \rho^*, s^*) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ com $d(S^*) \neq 0$.

Para os valores dos coeficientes dados por esta proposição, as componentes de h ficam da seguinte forma

$$\begin{aligned} h_1 &= 2r - 2\rho\cos s + I_1(r), \\ h_2 &= r\,\mathrm{sen}\, s - \rho, \\ h_3 &= \frac{21}{10} - 2\frac{\rho}{r}\,\mathrm{sen}\, s - \frac{r}{\rho}\cos s. \end{aligned}$$

e as funções auxiliares d, k_1, k_2 e f são dadas por:

$$\begin{aligned} d(s) &= 1, \\ k_1(s) &= \mathrm{sen}\, s, \\ k_2(s) &= 2 + 2\cos s\,\mathrm{sen}\, s, \\ f(s) &= -10\cos s + 21\,\mathrm{sen}\, s - 20\,\mathrm{sen}^3 s. \end{aligned}$$

Com a notação $x = \cos s$, a equação $f(s) = 0$ torna-se $\mathrm{sen}\, s = \dfrac{10x}{1+20x^2}$, ou, de forma equivalente

$$1 - 61x^2 + 360x^4 - 400x^6 = 0.$$

Esta equação polinomial tem seis soluções $x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{5}$, $x_{3,4,5,6} = \pm\sqrt{(7 \pm 2\sqrt{11})/20}$ e todas elas estão no intervalo $(-1, 1)$.

Assim, concluímos que f tem as seguintes raízes

$$s_1 = \arccos 1/\sqrt{5}, \quad s_{2,3} = \arccos\sqrt{\frac{7 \pm 2\sqrt{11}}{20}}, \zeta_{1,2,3} = s_{1,2,3} + \pi$$

Todas as raízes satisfazem a condição (3.49), mas apenas as raízes ζ_1, ζ_2 e ζ_3 satisfazem a condição (3.50). Então h tem exatamente três zeros. Temos que mostrar que $J_h(r, \rho, s) \neq 0$ para cada zero de h. A matriz jacobiana de h é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2\,\mathrm{sen}\,(s)\,\rho & -2\,\cos(s) & 2 + \dfrac{d}{dr} I_1(r) \\ \cos(s)\, r & -1 & \mathrm{sen}\,(s) \\ -2\,\dfrac{\cos(s)\,\rho}{r} + \dfrac{\mathrm{sen}\,(s)\, r}{\rho} & -2\,\dfrac{\mathrm{sen}\,(s)}{r} + \dfrac{\cos(s)\, r}{\rho^2} & 2\,\dfrac{\mathrm{sen}\,(s)\,\rho}{r^2} - \dfrac{\cos(s)}{\rho} \end{bmatrix}$$

Observamos que $\rho^* = r^*\,\mathrm{sen}\, s^*$ e $r^* > 1$ é uma solução única de $I_1(r) = (2 + 2\cos s^*\,\mathrm{sen}\, s^*)r$. Calculando o determinante do jacobianoobtemos

$$\frac{4}{5r^{*2}}(\sqrt{r^{*2} - 1} - r^{*2})\cos s^*(15\cos s^* - 16\,\mathrm{sen}\, s^*).$$

que é diferente de zero para cada $\zeta_{1,2,3}$.

□

Referências Bibliográficas

[1] Buica, A. & Llibre, J. *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, 2nd. ed. Addison-Wesley Bull Sci. Math 128, 7-22. (2004).

[2] Buica, A. & Llibre, J. *Bifurcation of limit cycles from a four-dimensional center in control systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 15 no. 8 pp. 2653-2662. (2005).

[3] Sanders, J.A. & Verhulst, F. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical System*, Appl. MAth. Sci., vol.59, Springer (1985).

[4] Verhulst, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Universityext, Springer (1991).

[5] Chow, S.N. & D. Wang, C.Li, *Normal forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press (1994).

[6] Perko, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Cambridge University Press (1994). Springer (1991).

[7] Almeida, O. B. *Teoria do Grau e Aplicações*, Tese de Mestrado, CCT - UFCG,Campina Grande-MG,2006.