

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RODOLFO JOSÉ BUENO ROGERIO

**Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de
dimensão de massa um**

Guaratinguetá
2018

Rodolfo José Bueno Rogerio

**Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de
dimensão de massa um**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, para a obtenção do título
de Doutor em Física na área de Partículas e
Campos.

Orientador: Júlio Marny Hoff da Silva.

Guaratinguetá
2018

R722a	<p>Rogério, Rodolfo José Bueno</p> <p>Aspectos clássicos e quânticos de espinores de dinâmica não-usual: espinores de dimensão de massa um / Rodolfo José Bueno Rogério. – Guaratinguetá, 2018. 113 f : il.</p> <p>Bibliografia: f. 88-93</p> <p>Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.</p> <p>Orientador: Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva</p> <p>1. Renormalização (Física). 2 Férmions 3. Teoria quântica de campos I. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU 531.145 (043)</p>
-------	--

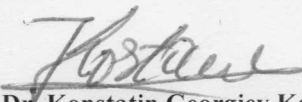
Pâmella Benevides Gonçalves
Bibliotecária/CRB-8/9203

RODOLFO JOSÉ BUENO ROGERIO

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM FÍSICA”**

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

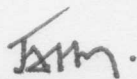

Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

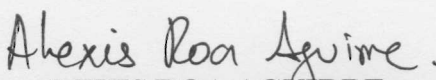
BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. JULIO MARNY HOFF DA SILVA
Orientador / UNESP/FEG


Prof. Dr. SAULO HENRIQUE PEREIRA
UNES/PFEG


Prof. Dr. MARCO ANDRÉ FERREIRA DIAS
UNIFESP


Prof Dr. JOSÉ ABDALLA HELAYEL-NETO
CBPF/RJ


Prof. Dr. ALEXIS ROA AGUIRRE
UNIFEI

Setembro de 2018

DADOS CURRICULARES

RODOLFO JOSÉ BUENO ROGERIO

NASCIMENTO 25/10/1987 - Piracaia/SP

FILIAÇÃO Paulo Afonso Rogerio
Ana Ruth Bueno Rogerio

2006/2011 Curso de Graduação - Bacharelado em Física
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP

2012/2012 Curso de Especialização em Docência do Ensino Superior
FALC
Faculdade da Aldeia de Carapicuíba.

2012/2014 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado,
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP
Brasil.

2014/2018 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Doutorado,
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP
Brasil.

de maneira especial, dedico esse trabalho à meus pais, Ana Ruth Bueno Rogerio e Paulo Afonso Rogerio, que com todo seu Amor, carinho e dedicação sempre me propuseram o melhor que puderam sem jamais medir esforços.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à meus Pais, *Paulo e Ana*, pois com muita dedicação sempre me educaram e me ensinaram o que é caráter.

Ao meu amigo e orientador, *Prof. Dr. Júlio Marny Hoff da Silva*, por ter me aceitado em seu grupo de pesquisas, pela dedicação, incentivo, ajuda e sobretudo pela transmissão de conhecimentos. Esses gestos foram sempre o combustível que cada vez mais me motivaram a seguir em frente.

Ao *Prof. Dr. Saulo Henrique Pereira*, pelo conhecimento que me passou e também pelos trabalhos que tive a honra de poder escrever junto a ele.

Em especial um agradecimento a *Cecília Chiarantano*, pessoa que me deu o privilégio de sua amizade, horas de conversa e descontração, fazendo do meu dia a dia mais divertido.

Ao meu grande amigo *Carlos Hugo Coronado Villalobos*, colega de trabalho, pessoa que sempre esteve disposta a ajudar, tanto academicamente quanto pessoalmente.

Expresso meu agradecimento também aos meus amigos *Ricardo Moraes e Gabriel Borderes* pelas horas de estudo, ajuda e conversa.

Também agradeço a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio durante todo o tempo de pesquisa.

E por fim, agradeço meu segundo lar, a *República* onde morei durante minha graduação e voltei a morar durante a pós graduação. Local onde sempre aprendi e também sempre pude ensinar.

Este trabalho contou com o apoio financeiro da:

CAPES Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

“... ou a morte ou a dominação total!”

Michels, Michel Jorge Raad

RESUMO

Na presente tese apresentaremos de forma detalhada o estudo sistemático de uma teoria quântica com férmions de dimensão de massa um que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac, abordando essencialmente sua construção, quantização do campo, análise dos observáveis físicos e aplicações quânticas. Forneceremos todos os detalhes de uma descoberta teórica inesperada da partícula de spin $1/2$ que compõe um conjunto completo de autoespinores com helicidade dual do operador conjugação de carga. Esses espinores recebem o nome de Elko, um acrônimo proveniente do Alemão *Eigen spinoren des Ladungskonjugationsoperators*. Veremos que o elo entre os espaços de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ não é dado pela simetria de paridade mas sim pela “Mágica das matrizes de Pauli”, e, portanto, como consequência a dinâmica de tais campos será regida única e exclusivamente pela dinâmica de Klein-Gordon. Tal fato faz com que o propagador associado ao Elko guarde muita similaridade com o propagador do campo escalar. Intrinsecamente, em sua formulação embrionária, as somas de spin para o Elko mostram um termo que quebra explicitamente a covariância relativística, levando então à apreciação da *Very Special Relativity*, que nada mais é do que um subgrupo do grupo de Lorentz, cuja álgebra deixa as somas de spin invariantes ou covariantes. Entretanto, mostraremos que existe uma liberdade na definição da estrutura dual, a qual permite que seja construída uma teoria local e invariante por transformações de Lorentz, levando, assim, a uma nova física bastante interessante e promissora.

Palavras-chave: Dimensão de massa um. Campo Quântico. Férmions. Conjugação de carga. Helicidade dual.

ABSTRACT

The present thesis covers in details a systematic study of a quantum theory based on mass dimension one fermions which satisfy the Fermi-Dirac statistics, essentially addressing its construction, field quantization, analysis of physical observables and quantum applications. We provide all the details of an unexpected theoretical discovery of a spin $1/2$ particle which composes a complete set of dual helicity spinors of the charge conjugation operator. Such spinors are called Elko, an acronym for the German word *Eigenspinoren der Ladungskonjugationsoperatoren*. We show that the relation between the representation spaces $(1/2, 0)$ and $(0, 1/2)$ is given by the “Magic of Pauli matrices” rather than parity symmetry, therefore, as a consequence the dynamic of such fields is governed solely and exclusively by the Klein-Gordon dynamic. Such fact makes the Elko propagator to be very similar to the scalar field propagator. Intrinsically, in its embryonic formulation, Elko spin sums shows up a term that explicitly breaks relativistic covariance, leading to the appreciation of Very Special Relativity, a theory which is based on a subgroup of the Lorentz group, whose algebra leaves the spin sums invariant or covariant. However, we show a freedom in the dual structure definition, which allows the construction of a local and Lorentz invariant theory, thus, leading to a very interesting and promising new physics.

Keywords: Mass dimension one. Quantum field. Fermion. Charge conjugation. Dual helicity.

LISTA DE TABELAS

Figure C.1	Os 4 subgrupos do grupo de Lorentz que compõe a VSR	108
Figure C.2	O <i>Little Group</i>	114

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	14
2	EXÓRDIO: ESPINORES DE DIRAC, SIMETRIA DE PARIDADE E A DINÂMICA ASSOCIADA	19
2.1	ESPINORES DE WEYL E DEFINIÇÃO DA NOTAÇÃO	19
2.2	OPERADOR PARIDADE E A DINÂMICA DE DIRAC	21
3	AUTOESPINORES DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA	25
3.1	ESTABELECEENDO OS AUTOESPINORES DE $\mathcal{C}$	27
3.2	CONSTRUÇÃO EXPLÍCITA DOS ESPINORES $\lambda(p^\mu)$	28
3.3	A CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA DUAL: TEORIA MATEMÁTICA DOS DUAIS	31
3.4	SOMAS DE SPIN: INVARIÂNCIA E LIMITAÇÃO CAUSADA PELO DUAL	34
3.5	REDEFINIÇÃO DA ESTRUTURA DUAL	36
3.5.1	A PSEUDOINVERSA	38
4	DINÂMICA DO CAMPO E SIMETRIAS CPT	42
4.1	ESPINORES $\lambda_\alpha(p^\mu)$ E A EQUAÇÃO DE DIRAC	42
4.2	TRANSFORMAÇÃO NÃO UNITÁRIA: ESTRUTURA COVARIANTE . .	44
4.3	SIMETRIA $(CPT)^2$	45
5	CONSTRUÇÃO DOS COVARIANTES BILINEARES (OBSERVÁVEIS FÍSICOS)	47
5.1	CLASSIFICAÇÃO DE LOUNESTO	47
5.2	ESPINORES DE DIRAC E ESTRUTURAS BILINEARES	48
5.2.1	GÊNESIS: ÁLGEBRA DE CLIFFORD REAL	48
5.2.2	IDENTIDADES DE FIERZ-PAULI-KOFINK	53
5.3	COVARIÂNCIA DAS ESTRUTURAS BILINEARES PARA $\lambda_\alpha(p^\mu)$	58
6	INTERPRETAÇÃO DE PARTÍCULA: NOVO CAMPO QUÂNTICO, PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON, DENSIDADE LAGRANGIANA E ENERGIA DO PONTO ZERO	61
6.1	ESTABELECEENDO A ENERGIA DO VÁCUO E AS ESTATÍSTICAS FERMIÔNICAS	61

6.2	O PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON	65
6.3	ESTRUTURA DE LOCALIDADE DOS NOVOS CAMPOS	71
6.4	INTERAÇÕES PERMITIDAS	75
7	LAGRANGIANA EFETIVA EM ESPAÇO CURVO	78
7.1	UMA BREVE REVISÃO NO FORMALISMO SOBRE LAGRANGIANA EFETIVA	78
7.2	CORREÇÕES QUÂNTICAS A 1-LOOP PARA OS CAMPOS FERMIÔNICOS DE DIMENSÃO DE MASSA UM	79
7.3	IMPLICAÇÕES COSMOLÓGICAS	84
7.3.1	1º caso: limite $H \approx m_{pl} \gg m \gg \phi$	85
7.3.2	2º caso: limite $\dot{\phi} \ll H\phi$, $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$ e $\phi \approx \text{constante}$	86
8	CONCLUSÕES	88
	REFERÊNCIAS	92
A	COMPONENTES ESPINORIAIS $\phi_L(k^\mu)$ e $\phi_R(k^\mu)$	98
B	MODELO SIGMA FERMIÔNICO	99
B.1	UM PANORÂMA GERAL DO MODELO SIGMA COM TORÇÃO	99
B.2	CONSTRUINDO O MODELO SIGMA	102
C	TEORIA DA RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL	106
C.1	OS GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO E A ESTRUTURA ALGÉBRICA DA VSR	106
C.2	REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DA ÁLGEBRA DOS GRUPOS SIM(2) E HOM(2)	109
C.3	INVARIANTES DE CASIMIR DO GRUPO ISIM(2)	111
C.4	ESTADOS DE UMA PARTÍCULA	112
C.5	ABORDAGEM DO ELKO PELA ÁLGEBRA DA VSR	114
C.6	INVARIÂNCIA DAS SOMAS DE SPIN À LUZ DA VSR	114
C.7	ESTRUTURAS BILINEARES DOS ESPINOES ELKO NO CONTEXTO DA VSR	115

1 INTRODUÇÃO

Os espinores entraram na Ciência através da Teoria de Pauli (1926) da mecânica quântica não relativística e da Teoria de Dirac (1928) da mecânica quântica relativística. Definir espinores não é uma tarefa nada simples. Existem essencialmente três diferentes definições de espinores, das quais duas são bem estabelecidas ao passo que a terceira vem ganhando espaço gradativamente. As três definições podem ser classificadas como: *(i) clássica*¹, *(ii) algébrica* e *(iii) operatorial*. Essas definições podem ser vistas com maior riqueza de detalhes na Referência Jr (2016). É importante salientar desde já que os espinores, independentemente da definição, possuem as mesmas aplicações físicas (VILLALOBOS, 2017). É nosso dever elucidar ao leitor, que uma vez que os espinores que são tema central de estudo dessa tese são objetos que carregam uma representação irredutível de spin 1/2 do grupo de Lorentz $SL(2, \mathbb{C})$, desta maneira, estaremos alicerçados pelo ponto de vista de espinores clássicos.

Consoante Rogerio (2014), podemos considerar o século XX como sendo a era das Teorias Quânticas de Campos (*TQC*), haja visto que a maioria dos conceitos conhecidos nos dias atuais surgiram na primeira metade desse século após a unificação da Mecânica Quântica, Relatividade Especial e Teoria Clássica de Campos. Na segunda metade do século XX, diversas aplicações foram analisadas e estudadas em detalhes. Tais fatos levaram à criação do que hoje é conhecido como Modelo Padrão (*Standard Model*) da física de partículas, que descreve todas as interações conhecidas da natureza exceto a interação gravitacional (WEINBERG, 1995a; WEINBERG, 1995b).

Ainda assim, mesmo com o grande sucesso da *TQC*, existem fenômenos que não são acomodados no escopo da teoria. Destarte, por exemplo, é natural tentar estender a estrutura já conhecida para explorar a natureza das partículas que compõe a matéria escura (LEE, 2013). Primeiramente nos perguntamos por que a matéria escura e a energia escura possuem interações extremamente limitadas com as partículas do modelo padrão de física de altas energias? Que tipo de formalismo teórico de campo quântico os descreve? Se conseguirmos entender isso no contexto da teoria de campos, conseguiríamos de alguma forma acelerar nosso progresso sobre a natureza da física e seus principais pilares (AHLUWALIA, 2017a). Apesar do grande sucesso dos modelos cosmológicos e da física de altas energias, não podemos afirmar com certeza se esses problemas indicam a possibilidade da existência

¹Devemos frisar que o adjetivo clássico não está relacionado com a aparição desses objetos no contexto da Mecânica Clássica.

de novas partículas ou se eles sugerem alguma incompletude nos fundamentos da física até então conhecida (AHLUWALIA, 2017a). Se tentarmos imaginar que os campos escuros são responsáveis pelos setores escuros, quaisquer que sejam esses campos, eles devem ser de alguma forma uma representação da álgebra de Lorentz. Pelo menos localmente, e pelo menos no limite de baixas energias, onde as simetrias de Lorentz se mantêm com uma boa precisão (AHLUWALIA, 2017a; AHLUWALIA D. V. E HORVATH, 2010). Segundo o modelo Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter model) o universo é composto de cerca de 75% de constante cosmológica (ou Energia Escura), existem outros 20% que correspondem a chamada matéria escura, ao passo que apenas 5% do universo é composto por matéria bariônica visível (matéria composta principalmente de prótons, nêutrons e elétrons). Existem evidências observacionais apontando para o fato de acreditar que essa matéria invisível é responsável pela dinâmica do universo.

O caminho que seguiremos aqui é baseado na visão de Wigner onde as partículas são descritas como representações irredutíveis do grupo de Poincaré e são rotuladas pelos invariantes de Casimir do grupo. A base do presente trabalho é o estudo da partícula fermiônica “escura” de spin $1/2$ e dimensão de massa um. Para tanto, essa tese será dividida em duas partes. A primeira está relacionada com a construção algébrica de tais espinores, estudo da dinâmica, análise dos observáveis físicos e finalmente a quantização e a construção dos campos quânticos. Na segunda metade faremos uso de tais campos quânticos e, assim, estudaremos algumas aplicações quânticas e também cosmológicas.

De acordo com Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), os espinores Elko propostos por D. V. Ahluwalia e D. Grumiller em 2003 foram uma descoberta teórica inesperada. Elko é um acrônimo derivado do termo alemão *Eigen-spinoren des Ladungs-kojugationsoperator*, cuja tradução é Autoespinor do Operador Conjugação de Carga. À época, os autores estavam interessados em estudar e entender os espinores de Majorana. Historicamente os espinores de Majorana foram descobertos no ano de 1937 por Ettore Majorana. Porém não se sabe ao certo a origem de seu surgimento. O conjunto usual dos espinores de Majorana é composto de dois biespinores, ambos possuindo autovalores positivos via atuação do operador conjugação de carga (ROGERIO, 2014)

$$\mathcal{C}\psi_M(p^\mu) = +\psi_M(p^\mu), \quad (1)$$

sendo assim denominado de espinor autoconjugado.

O surgimento dos espinores Elko vem da tentativa de estender os espinores (1) a um conjunto completo de autoespinores do operador conjugação, os quais estarão restritos a seguinte condição

$$\mathcal{C}\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu), \quad (2)$$

e desta forma buscaremos definir um espinor que possui autovalores ± 1 sob a atuação de operador conjugação de carga (ROGERIO, 2014). Assim como para os férmions de

Majorana, a simetria de conjugação de carga desempenha um papel central para a definição desses novos férmions. Uma característica bastante peculiar relacionada aos espinores Elko é a presença da helicidade dual, contrastando com os demais casos já conhecidos na literatura. Veremos que pela sua construção isso é uma propriedade intrínseca, ao se definir a helicidade de uma das componentes espinoriais a outra componente automaticamente possui helicidade oposta. Estudaremos esse ponto com maior rigor e detalhe no Capítulo 3.

Por certas razões específicas, ao estudar a dinâmica associada a esses espinores veremos que $\lambda(p^\mu)$ não é autoespinor do operador $\gamma_\mu p^\mu$, ou seja, o Elko não satisfaz a equação de Dirac. Isto está justamente relacionado com o fato de que os espaços de representação $(0,1/2)$ e $(1/2,0)$ não estão relacionados entre si pela simetria de paridade, como para o caso dos espinores de Dirac, mas sim com as matrizes de Pauli. Entretanto, como esperado para todo campo relativístico, mostraremos que o Elko obedece (única e exclusivamente) a equação de Klein-Gordon.

Apesar de estarmos tratando de um férmion, veremos que seu propagador é essencialmente o do campo escalar, e desta forma concluiremos que a dimensão de massa para o campo do Elko é um, diferente da dimensão de massa $3/2$ esperada para os campos espinoriais de spin $1/2$. A dimensionalidade do campo somada com o fato do mesmo ser eletricamente neutro via atuação do operador conjugação de carga, vide equação (2), faz com que as interações com partículas do Modelo Padrão, exceto com o Bóson de Higgs, sejam suprimidas ou não renormalizáveis perturbativamente, segundo a referência Gillard AB e Martin (2010). Esta última característica mencionada faz com que esse férmion seja considerado um candidato à matéria escura.

Assim como em Rogerio (2018) Faremos aqui uma breve revisão dos últimos fatos importantes relacionados com as mudanças que existiram na estrutura de tais campos. Podemos dizer que nos primórdios da definição dos espinores de dimensão de massa de um, a teoria foi apresentada de maneira que um termo de quebra de simetria de Lorentz emergia das somas de spin. Como resultado, o campo quântico associado apresentava não localidade e havia um eixo de simetria preferencial. A teoria mostrava-se invariante sob transformações dos subgrupos do grupo de Lorentz $SIM(2)$ e $HOM(2)$ (HORVATH, 2011), sendo então uma teoria que carregava as simetrias da chamada Relatividade Muito Especial (Very Special Relativity) (COHEN A. G; E GLASHOW, 2006). Recentemente em Ahluwalia (2017a), Ahluwalia (2017b), Rogerio R. J. B e da Silva (2017), fora mostrado vários avanços importantes na teoria dos duais dos espinores citados abriram a possibilidade de se propor um campo fermiônico de spin $1/2$ dotado de dimensão de massa um, local, neutro em relação às interações de gauge e cuja teoria respeita as simetrias de Lorentz. Assim, traremos de volta à cena o trabalho de Wigner sobre as representações irredutíveis do grupo de Poincaré, como em Wigner (1939). Pelo grupo de Poincaré entende-se, usualmente, uma extensão semi-simples do grupo Lorentz ortócrono próprio, englobando translações.

Ao investigar as representações irredutíveis para este caso, nenhuma partícula como um férmion com uma dimensão de massa um, i. e., férmions com traços bosônicos, é encontrada.

Entretanto, aqui a situação é ligeiramente diferente quando simetrias discretas são levadas em conta, ou seja, quando não apenas o grupo ortócrono próprio é considerado. Este ponto também foi analisado por Wigner, em um trabalho menos conhecido, o qual pode ser visto na referência Wigner (1962). Curiosamente, Wigner descobriu que as representações fermiônicas, cujo comportamento sob $\mathcal{C}$, P e $\mathcal{T}$ são exatamente o que é esperado para campos bosônicos. Por completeza, enquanto o conhecimento convencional diz que os férmions pertencentes ao modelo padrão (quarks e léptons) obedecem a $\mathcal{T}^2 = -1$ ($(\mathcal{CPT})^2 = -1$) e bósons $\mathcal{T}^2 = +1$ ($(\mathcal{CPT})^2 = +1$), Wigner ainda mostrou que, no reino das simetrias de Poincaré, é possível ter $\mathcal{T}^2 = +1$ para férmions (levando também a $(\mathcal{CPT})^2 = +1$). Acontece que o campo levado em consideração neste trabalho é uma realização da representação fermiônica mencionada anteriormente, de onde podemos aduzir seu “caráter bósonico”(ROGERIO, 2018). Independente das características citadas esses férmions ainda devem ser uma representação das simetrias do espaço-tempo (WIGNER, 1939). O que apresentaremos aqui é o estudo de uma teoria quântica com férmions de dimensão de massa um que obedecem as estatísticas de Fermi-Dirac. A presente tese está dividida da seguinte maneira: reservamos para o Capítulo 2 uma breve revisão da álgebra do grupo de Lorentz. A partir daí construiremos os operadores de boost para cada tipo de componente espinorial, as componentes que se transformam como componentes de mão direita e as componentes que se transformam como mão esquerda. Aproveitando esta álgebra construiremos a equação de Dirac e verificaremos que tal equação está intimamente relacionada com o operador de paridade (P).

O Capítulo 3 apresenta a simetria de conjugação de carga e a construção de seus respectivos autoespinores. Assim, um estudo bem detalhado da construção da estrutura formal do Elko será realizado. Verificaremos então qual deve ser a escolha da fixação das fases para que ele seja de fato um autoespinor do operador conjugação de carga com autovalores ± 1 . Através de simples cálculos mostraremos uma característica bastante peculiar desses espinores: a existência da helicidade dual. Via um procedimento matematicamente rigoroso, construiremos a estrutura dual associada e, em particular, perceberemos que ela se difere da construção do dual de Dirac. Desta forma, após a construção da estrutura dual, será possível verificar que as somas de spin possuirão um termo de quebra de simetria de Lorentz, trazendo algumas consequências para a interpretação física da teoria. Consequentemente, abordaremos esse problema redefinindo a estrutura dual, guiados por métodos matemáticos adequados, e, por fim, conseguiremos construir uma estrutura dual que restaura a invariância das somas de spin por transformações de Lorentz.

O Capítulo 4 tange a dinâmica do Elko. Faremos então a construção e análise do

²Sendo $\mathcal{C}$, P e $\mathcal{T}$, são os operadores de conjugação de carga, paridade e reversão temporal, respectivamente.

operador que aniquila tal espinor. Veremos que o Elko não satisfaz a equação de Dirac, e tal fato será melhor investigado no contexto a ser discutido. Aproveitaremos a abordagem mencionada e também discutiremos sobre o comportamento do Elko via atuação das simetrias discretas de conjugação de carga ($\mathcal{C}$), paridade ($\mathcal{P}$) e reversão temporal ($\mathcal{T}$). Diante de tal análise, comprovaremos que o Elko pertence a uma classe não padrão de Wigner.

O Capítulo 5 fora reservado para explorarmos e construirmos as estruturas bilineares (observáveis físicos) dos espinores Elko considerando sua estrutura dual correspondente. Para isso, será necessário entender (deformar) o mecanismo usado por Crawford quando construiu as estruturas bilineares para os espinores de Dirac a partir da álgebra de Clifford Real. Tal mecanismo é baseado na condição física de realidade para as densidades biespinoriais e a imposição da normalização de Dirac, garantindo assim a obtenção de estruturas covariantes construídas a partir dos elementos primordiais da base (e suas respectivas combinações) da álgebra de Clifford. Nesse capítulo também analisamos a covariância das estruturas bilineares por transformações de Lorentz (e no Apêndice C por transformações da VSR).

O Capítulo 6 fica reservado para a construção dos operadores de campo quântico. Para isso, primeiramente vamos construir a Hamiltoniana e estabelecer que tipo de relação os operadores de criação e aniquilação de partículas devem obedecer, a fim de manter a energia do sistema positivo definida. Assim, estabeleceremos a relação de anticomutação para tais operadores, assim como para o caso de Dirac, mostrando que os campos quânticos a serem construídos deverão obrigatoriamente obedecer a estatística fermiônica. Mostraremos que o propagador para o Elko coincide com o propagador do campo escalar. Faremos uma análise sobre a estrutura de localidade do campo quântico construído, usando a formulação primária da estrutura dual como também a redefinida e assim investigaremos se os quatro correlatores de campo quântico relevantes são respeitados. Finalmente, faremos uma breve discussão sobre as possíveis interações permitidas para o Elko

Por fim, no Capítulo 7 construiremos a lagrangiana efetiva para os campos quânticos de dimensão de massa um e exploraremos suas implicações cosmológicas. Utilizaremos do método de *background-field* desenvolvido por DeWitt e Schwinger, aplicando-o a um espaço-tempo curvo bem comportado por meio do limite de coincidência. Como resultado notaremos o surgimento de uma constante cosmológica dinâmica (que depende explicitamente do tempo) que consequentemente poderá nos trazer informações sobre a expansão cósmica.

Os Capítulos 3, 5, 7, Apêndice B e o trabalho em Beghetto D; Rogerio (2018) trazem nossas contribuições para a área. O último capítulo fora reservado para as considerações finais.

2 EXÓRDIO: ESPINORES DE DIRAC, SIMETRIA DE PARIDADE E A DINÂMICA ASSOCIADA

2.1 ESPINORES DE WEYL E DEFINIÇÃO DA NOTAÇÃO

Se recorrermos à clássica e consagrada literatura, e.g., Weinberg (1995a), Ryder (1996), Itzykson C. e Zuber (2006), Ramond (1981), veremos que a construção dos espinores de Dirac e Majorana, na representação de Weyl, comumente é escrita como

$$\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

onde os espinores massivos $\phi_R(p^\mu)$ e $\phi_L(p^\mu)$ se transformam mediante transformações de Lorentz como objetos pertencentes aos espaços de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$, respectivamente. Pensando em um boost arbitrário de Lorentz, por definição, a componente de mão direita se transforma da seguinte maneira

$$\phi_R(p^\mu) \longrightarrow e^{\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} \phi_R(k^\mu), \quad (4)$$

e para a componente de mão esquerda a transformação é definida como

$$\phi_L(p^\mu) \longrightarrow e^{-\frac{\sigma}{2} \cdot \varphi} \phi_L(k^\mu). \quad (5)$$

Assim sendo, vamos definir então

$$\kappa^{(1/2, 0)} = \exp\left(\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\right), \quad (6)$$

e

$$\kappa^{(0, 1/2)} = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varphi}}{2}\right) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m}\right), \quad (7)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$, por sua vez, representa o conjunto de matrizes de Pauli, $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. O parâmetro de boost φ é definido como $\exp(i\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi})$ de forma que sua atuação em um quadrimomento arbitrário é dada por

$$k^\mu = \left(m, \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}}{p}\right), \quad p = |\mathbf{p}|, \quad (8)$$

com isso, temos $\cosh \varphi = E/m$, $\sinh \varphi = p/m$ e $\hat{\varphi} = \hat{p}$, e o vetor $\mathbf{K}$ são matrizes 4×4 que representam os geradores de boost no espaço de Minkowski¹

$$\begin{aligned} K_x &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & K_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ K_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9)$$

Temos também para os três geradores de rotação as matrizes

$$\begin{aligned} J_x &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & J_y &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}, \\ J_z &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Para uma soma direta dos espaços de representação de Weyl de mão direita e mão esquerda (o que será útil mais adiante) os geradores de boost e rotação podem ser escritos como

$$\kappa = \begin{pmatrix} -i\sigma/2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & +i\sigma/2 \end{pmatrix}, \quad \zeta = \begin{pmatrix} \sigma/2 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \sigma/2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Os conjuntos de geradores $\{\mathbf{K}, \mathbf{J}\}$ e $\{\kappa, \zeta\}$, separadamente, satisfazem a mesma álgebra. Assim, com tais geradores em mãos, de uma maneira explícita, a relação de comutação entre essas quantidades pode ser calculada

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad \text{e permutações cíclicas}, \quad (12)$$

$$[K_x, K_y] = -iJ_z \quad \text{e permutações cíclicas}, \quad (13)$$

$$[J_x, K_x] = 0 \quad \text{etc}, \quad (14)$$

$$[J_x, K_y] = iK_z \quad \text{e permutações cíclicas}, \quad (15)$$

$$[K_x, J_y] = iK_z \quad \text{e permutações cíclicas}. \quad (16)$$

¹Onde aqui estamos usando a convenção $\hbar = c = 1$.

Desse modo $\mathbf{K}$ e $\mathbf{J}$ juntos não formam um grupo fechado (não completam uma álgebra) assim como os geradores de rotação $\mathbf{J}$:

$$[J_x, J_y] = iJ_z \quad \text{e permutações cíclicas.} \quad (17)$$

Podemos então, com esses 6 geradores $\mathbf{K}$ e $\mathbf{J}$ definir dois novos geradores (RYDER, 1996)

$$SU(2)_A : \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K}) \quad (18)$$

$$SU(2)_B : \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K}), \quad (19)$$

assegurando, assim, que as relações de comutação para essa nova composição de geradores sejam

$$[A_x, A_y] = iA_z \quad \text{e permutações cíclicas,} \quad (20)$$

$$[B_x, B_y] = iB_z \quad \text{e permutações cíclicas,} \quad (21)$$

$$[A_i, B_j] = 0 \quad i, j = x, y, z. \quad (22)$$

Isso mostra que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, cada um deles, agora forma um grupo $SU(2)$ e esses dois grupos fecham uma álgebra, como também fora apresentado em Ryder (1996). O grupo de Lorentz é essencialmente $SU(2) \otimes SU(2)$ e os espinores se transformam de maneira bem definida. Tais geradores serão rotulados por dois autovalores (j, j') o primeiro corresponderá a $\mathbf{A}$ e o segundo a $\mathbf{B}$. Dessa forma podemos escrever da seguinte maneira

$$\text{Tipo 1: } (1/2, 0): \quad \mathbf{J}^{1/2} = \boldsymbol{\sigma}/2, \quad \mathbf{K}^{1/2} = -i\boldsymbol{\sigma}/2, \quad (23)$$

$$\text{Tipo 2: } (0, 1/2): \quad \mathbf{J}^{1/2} = \boldsymbol{\sigma}/2, \quad \mathbf{K}^{1/2} = i\boldsymbol{\sigma}/2. \quad (24)$$

Devemos observar que esses seis parâmetros são referentes a três ângulos (θ_i onde $i = x, y, z$), que estão associados às rotações, e três velocidades (φ_i com $i = x, y, z$), às quais estão relacionadas aos boosts de Lorentz. Pelas transformações de Lorentz, existem dois tipos de espinores com duas componentes cada, transformando-se de acordo com o Tipo 1 e Tipo 2, que correspondem às representações $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ do grupo.

2.2 OPERADOR PARIDADE E A DINÂMICA DE DIRAC

A simetria de paridade, no espaço de Minkowski, é definida como o mapeamento (AHLUWALIA, 2017b)

$$P : x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \rightarrow x'^\mu = (x^0, -\mathbf{x}). \quad (25)$$

Uma questão que devemos nos fazer é “De que forma tal simetria afeta os espaços de representação?” Imaginemos um espinor² que pertença à soma direta dos espaços de representação:

$$\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix} = \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(k^\mu), \quad (26)$$

onde $p^\mu = \exp(i\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi}) k^\mu$ e $\mathbf{K}$ é dado por (9). Tal espinor pode ser autoespinor do operador paridade, conjugação de carga ou qualquer outra simetria física e matematicamente relevante se, a princípio, dada simetria faça com que as componentes de mão direita e esquerda de $\psi(p^\mu)$ percam sua independência. Apenas por uma questão de completeza, vale a pena notar que se ao invés de um boost em (26) aplicássemos uma rotação no espinor $\psi(p^\mu)$, teríamos

$$\psi(p'^\mu) = \exp(i\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\theta}) \psi(p^\mu), \quad (27)$$

com θ sendo um ângulo o qual caracteriza uma rotação sobre um eixo $\hat{n}$

$$\boldsymbol{\theta} = \theta \hat{n}, \quad (28)$$

e $p'^\mu = \exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}) p^\mu$. Diante da ação de P , sabemos que $\boldsymbol{\sigma} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varphi} \rightarrow -\boldsymbol{\varphi}$, ou seja, as velocidades são invertidas. Assim sendo, P relaciona os espaços de representação de mão direita e mão esquerda

$$(1/2, 0) \xleftrightarrow{P} (0, 1/2). \quad (29)$$

Consequentemente, o efeito de P em $\psi(p'^\mu)$ é então feito por uma matriz 4×4 a qual pode conter uma fase global e deve ser puramente “*off-diagonal*”. De tal modo que, fixando-se a fase como 1, o efeito de P sobre o espinor será dado por

$$P\psi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \psi(p'^\mu) = \gamma_0 \psi(p'^\mu), \quad (30)$$

onde neste caso p'^μ é exatamente p^μ sob efeito de P . É nosso dever ressaltar ao leitor que exatamente nesse ponto é onde notavelmente a maioria dos livros-texto param quando definem a simetria de paridade. Entretanto, aqui faremos diferente. Continuaremos analisando de forma mais aprofundada dada simetria e veremos quais as vantagens disso e onde podemos chegar.

Recentemente, em Sperança (2014) mostrou-se com uma maior riqueza de detalhes o entendimento existente entre a simetria de paridade e a equação de Dirac. Na equação

²Imporemos que $m \neq 0$ aqui e ao longo de toda a construção que faremos no escopo desse trabalho.

(30) podemos notar que $\psi(p'^\mu)$ pode estar relacionado com $\psi(p^\mu)$ como se segue

$$\psi(p'^\mu) = \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot (-\boldsymbol{\varphi}))\psi(p^\mu). \quad (31)$$

Sabemos que de (26), podemos estabelecer

$$\psi(k^\mu) = \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi})\psi(p^\mu), \quad (32)$$

e desta maneira, a equação (31) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \psi(p'^\mu) &= \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \exp(-i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(p^\mu) \\ &= \exp(-2i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \psi(p^\mu). \end{aligned} \quad (33)$$

Substituindo $\psi(p'^\mu)$ da equação logo acima em (30), e usando o fato de que γ_0 anticomuta com cada um dos geradores de boost,

$$\{\gamma_0, \boldsymbol{\kappa}_i\} = 0, \quad \text{onde } i = x, y, z, \quad (34)$$

a equação (30) fica escrita como

$$P\psi(p^\mu) = \exp(2i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi})\gamma_0\psi(p^\mu). \quad (35)$$

Um cálculo direto, como realizado em Sperança (2014), da exponencial do lado direito de (35) nos fornece a identidade

$$\exp(2i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi})\gamma_0 = m^{-1}\gamma_\mu p^\mu, \quad (36)$$

onde $\gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_i)$ representam as matrizes de Dirac na representação de Weyl

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Desta forma, temos então em abstrato

$$P = m^{-1}\gamma_\mu p^\mu. \quad (38)$$

Os espinores que são autoespinores de P são chamados de espinores de Dirac. Os autovalores de P são ± 1 e cada um deles tem dupla degenerescência³ (AHLUWALIA,

³Aqui falamos degenerescência por um abuso de linguagem. O termo correto a ser utilizado deve ser helicidade.

2017b; VILLALOBOS; ROGERIO, 2016; ROGERIO R. J. B. E VILLALOBOS, 2018),

$$P\psi_\alpha^S(p^\mu) = +\psi_\alpha^S(p^\mu), \quad P\psi_\alpha^A(p^\mu) = -\psi_\alpha^A(p^\mu), \quad (39)$$

o subíndice α está relacionado com a degenerescência enquanto que o índice superior relaciona-se ao fato dos espinores serem *self-conjugated* (auto-conjugado) ou *anti-self conjugated* (anti-auto-conjugado) via ação do operador paridade (note que $P^2 = \mathbb{1}$). Com auxílio da dedução acima, a equação (39) pode ser escrita sob a forma

$$(\gamma_\mu p^\mu - m\mathbb{1})\psi_\alpha^S(p^\mu) = 0, \quad (\gamma_\mu p^\mu + m\mathbb{1})\psi_\alpha^A(p^\mu) = 0. \quad (40)$$

E assim, concluímos mostrando como os espinores que possuem a relação de paridade como elo fundamental entre os espaços de representação de mão direita e mão esquerda devem *mandatoriamente* obedecer a dinâmica de Dirac. Recentemente em Villalobos e Rogerio (2016) os autores mostraram que a simetria de paridade não é o único elo entre os espaços de representação, entretanto, se buscamos estabelecer um conjunto completo de espinores ($\psi_\alpha^S(p^\mu)$ e $\psi_\alpha^A(p^\mu)$), devemos em algum momento introduzir tal simetria.

3 AUTOESPINORES DO OPERADOR CONJUGAÇÃO DE CARGA

Na seção introdutória precedente, mostramos que a partir de um espinor arbitrário, como por exemplo (3), podemos estabelecer uma relação entre os espaços de representação por meio de uma simetria discreta, sem primeiramente invocar equação de onda ou a densidade lagrangiana, e, assim, consequentemente estabelecer a dinâmica associada. Aqui faremos algo bastante similar ao que foi feito via P , porém agora usaremos como elemento fundamental para essa construção o operador de reversão temporal de Wigner na representação de spin 1/2, Θ , o qual possui o seguinte efeito sobre as matrizes de Pauli, como observado em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), Ramond (1981), Ahluwalia (2017b), assim

$$\Theta \boldsymbol{\sigma} \Theta^{-1} = -\boldsymbol{\sigma}^*, \quad (41)$$

sendo ¹

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta^{-1} = -\Theta. \quad (42)$$

Um importante resultado emerge a partir da observação da relação (41), denominada por Pierre Ramond em Ramond (1981) como “*Mágica das matrizes de Pauli*”. Primeiramente, tomando-se o complexo conjugado das relações (4) e (5), consequentemente multiplicando-as pela esquerda por Θ os resultados obtidos e usando a definição acima do operador de reversão temporal de Wigner (a menos de uma fase global) o resultado obtido é

$$[\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu)] = \exp\left(-\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) [\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(k^\mu)], \quad (43)$$

$$[\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu)] = \exp\left(+\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}\right) [\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(k^\mu)]. \quad (44)$$

Isto é, essas observações quando combinadas implicam o seguinte

- Se $\phi_L(p^\mu)$ se transforma como uma componente mão esquerda então $\zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu)$ se transforma como um espinor de mão direita, com a fase ζ_λ ainda não especificada.
- Se $\phi_R(p^\mu)$ se transforma como uma componente de mão direita, então $\zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu)$

¹Podemos também escrever Θ em termos da matriz de Pauli, ou seja, $\Theta = -i\sigma_2$.

se transforma como uma componente mão esquerda, ainda com a fase ζ_ρ não especificada.

Essa relação crucial motivou Ahluwalia e Grumiller a introduzirem dois novos conjuntos de espinores, assim como em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), pertencentes ao espaço de representação $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$

$$\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \zeta_\lambda \Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad \rho(p^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_R(p^\mu) \\ \zeta_\rho \Theta \phi_R^*(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (45)$$

cabe ressaltar que os espinores $\rho(p^\mu)$ não trazem nenhuma informação física adicional, como pode ser visto em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), por tal circunstância, vamos fixar nossa atenção somente nos espinores $\lambda(p^\mu)$. Observe que de forma semelhante ao que foi feito no capítulo anterior, porém, agora usando-se o operador de Wigner, conseguimos estabelecer um outro tipo de vínculo entre os espaços de representação. Note que diante das considerações que fizemos para construir os espinores (45) utilizamos apenas de boosts de Lorentz (também válido para rotações) e a relação apresentada pelo operador de Wigner. Sendo assim, podemos afirmar que não fizemos uso de simetrias discretas e portanto não nos valemos de todo o grupo de Lorentz (composto por transformação de paridade, reversão temporal, boosts e rotações) e sim de um subgrupo do grupo de Lorentz, mais precisamente o ortócrono próprio $L_+^{\uparrow 2}$. Um fato importante com relação a forma com a qual os espaços de representação se relacionam foi recentemente mostrado em Villalobos e Rogerio (2016), onde os autores destacam a possibilidade de se construir espinores de Dirac usando a relação (41) como elemento de ligação entre os espaços de representação ao invés da simetria P , entretanto, faz-se necessário a utilização de tal simetria para se estabelecer um conjunto completo de espinores.

Diante da arbitrariedade ainda presente na equação (45), devida aos elementos ζ_λ e ζ_ρ , vamos buscar um operador de simetria, assim como fizemos para P , o qual será definido como (AHLUWALIA, 2017b)

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \alpha \Theta \\ \beta \Theta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \mathcal{K}, \quad (46)$$

onde $\mathcal{K}$ toma o complexo conjugado de qualquer quantidade que apareça à sua direita. Imporemos que $\mathcal{C}^2$ seja proporcional a identidade, e assim, fixamos³ $\alpha = i$ e $\beta = -i$,

²Qualquer transformação pura (boost) que conecte dois referenciais com eixos paralelos que se movem com velocidade constante e dita ortócrona. Vale ressaltar que as transformações próprias e ortócronas são chamadas de transformações de Lorentz restritas. O conjunto de transformações de Lorentz $L_+^{\uparrow}$ é o único setor que forma um subgrupo do grupo de Lorentz e tal subgrupo recebe o nome de grupo de Lorentz restrito (LEMOS, 2007).

³Existe ainda uma segunda possibilidade onde $\alpha = -i$ e $\beta = i$, entretanto, isso não traz nenhuma implicação física ao resultado que já fora obtido.

resultando em

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & i\Theta \\ -i\Theta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \mathcal{K}. \quad (47)$$

Assim, chegamos a forma final do operador conjugação de carga.

3.1 ESTABELECENDO OS AUTOESPINORES DE $\mathcal{C}$

Os espinores de Majorana são escritos como (RAMOND, 1981)

$$\psi_M(p^\mu) = \begin{pmatrix} -\sigma_2 \phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

tais espinores obedecem a condição de Majorana, dada por

$$\mathcal{C}\psi_M(p^\mu) = +\psi_M(p^\mu), \quad (49)$$

isto é, são espinores autoconjugados via atuação do operador conjugação de carga, pois possuem única e exclusivamente autovalor positivo. Podemos notar que $\phi_L(p^\mu)$ se transforma como um espinor de mão esquerda ao passo que $-\sigma_2 \phi_L^*(p^\mu)$ se transforma como um espinor de mão direita (AHLUWALIA-KHALILOVA; GRUMILLER, 2005; AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005), como mostrado e definido na seção anterior.

Agora, imporemos que os espinores (45) sejam autoespinores do operador conjugação de carga e limitar-nos-emos a apenas autovalores reais, assim

$$C\lambda(p^\mu) = \pm\lambda(p^\mu). \quad (50)$$

Desta forma, de maneira ilustrativa temos

$$\mathcal{C}\lambda(p^\mu) = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & i\Theta \\ -i\Theta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_\lambda^* \Theta \phi_L(p^\mu) \\ \phi_L^*(p^\mu) \end{pmatrix} \quad (51)$$

$$= \begin{pmatrix} i\Theta \phi_L^*(p^\mu) \\ i\zeta_\lambda^* \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad (52)$$

podemos então fixar $\zeta_\lambda = \pm i$ fazendo com que $\lambda(p^\mu)$ se torne um autoespinor de $\mathcal{C}$ com autovalores duplamente degenerados, ± 1

$$C\lambda^S(p^\mu) = +\lambda^S(p^\mu), \quad C\lambda^A(p^\mu) = -\lambda^A(p^\mu), \quad (53)$$

onde definiremos então

$$\lambda^S(p^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta\phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}, \quad \lambda^A(p^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta\phi_L^*(p^\mu) \\ \phi_L(p^\mu) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Faremos uma distinção entre os espinores que carregam autovalores positivos e autovalores negativos, doravante os denominaremos *Self-Conjugate* (ou *Autoconjugados*) e *Anti-Self-Conjugate* (ou *anti autoconjugados*), respectivamente. De forma geral, tais espinores recebem o nome de **Eigenspinoren des Ladungskonjugationsoperators** cujo acrônimo é *Elko*.

3.2 CONSTRUÇÃO EXPLICITA DOS ESPINORES $\lambda(p^\mu)$

Começaremos escrevendo os espinores $\lambda(p^\mu)$ em um referencial com momento arbitrário p^μ

$$\lambda(p^\mu) = \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) \lambda(k^\mu), \quad (55)$$

usando os operadores de boost previamente definidos em (11), e lembrando do fato que $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}})^2 = \mathbb{1}$, o operador de boost da última equação acima pode ser escrito como

$$\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} e^{\frac{\sigma}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & e^{-\frac{\sigma}{2} \cdot \boldsymbol{\varphi}} \end{pmatrix} \quad (56)$$

assim temos (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005),

$$\exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} + \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{1} - \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix}. \quad (57)$$

Agora, para obter a forma explícita dos autoespinores do operador conjugação de carga, imporemos que a componente $\phi_L(k^\mu)$ seja um autoestado do operador helicidade $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ (a menos de um fator 1/2 que será omitido), desta forma

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_L^\pm(k^\mu) = \pm \phi_L^\pm(k^\mu), \quad (58)$$

onde o operador é escrito como $\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} := \sigma_x \hat{p}_x + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z \hat{p}_z$ e o vetor unitário $\hat{p}$ parametrizado em coordenadas esféricas é $\hat{p} = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta)$. Desta maneira na forma matricial o operador helicidade é dado por

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \quad (59)$$

A título de explicitar como é feito o cálculo da helicidade, de maneira ilustrativa, definiremos a componente $\phi_L^\pm(k^\mu)$ da seguinte maneira

$$\phi_L^+(k^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \phi_L^-(k^\mu) = \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix}, \quad (60)$$

resolveremos então explicitamente para a helicidade positiva. Assim temos

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_L^+(k^\mu) = +\phi_L^+(k^\mu), \quad (61)$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} \phi_{L1}^+ \\ \phi_{L2}^+ \end{pmatrix}, \quad (62)$$

o que, após alguns simples cálculos envolvendo relações trigonométricas, leva-nos a

$$\phi_L^+(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i(\phi/2)} \\ \sin(\theta/2) e^{i(\phi/2)} \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Fazendo o mesmo procedimento para a helicidade negativa temos

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \phi_L^-(k^\mu) = -\phi_L^-(k^\mu), \quad (64)$$

assim,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \phi_{L1}^- \\ \phi_{L2}^- \end{pmatrix}, \quad (65)$$

e desta forma

$$\phi_L^-(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i(\phi/2)} \\ \cos(\theta/2) e^{i(\phi/2)} \end{pmatrix}. \quad (66)$$

O fator de massa é escolhido de forma que no caso limite de partículas sem massa, $m \rightarrow 0$, os espinores em repouso no espaço de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ desapareçam, pois não podem existir partículas sem massa em repouso (AHLUWALIA D. V. E JOHNSON, 1994). Para que isso seja consistente, as amplitudes de interação devem ter o fator m^j , onde no caso j é o spin associado à partícula (MARINOV, 1968). Por outro lado, de uma maneira um pouco mais simples podemos agora calcular os autoestados de helicidade para o espinor que se transforma como mão direita $\Theta \phi_L^{\pm*}$. Assim, conjugando a equação (58) temos

$$\boldsymbol{\sigma}^* \cdot \hat{\mathbf{p}} [\phi_L^\pm(k^\mu)]^* = \pm [\phi_L^\pm(k^\mu)]^*. \quad (67)$$

Substituindo σ^* pela relação apresentada em (41)

$$\Theta \sigma \Theta^{-1} \hat{p}[\phi_L^\pm(k^\mu)]^* = \mp[\phi_L^\pm(k^\mu)]^*, \quad (68)$$

e usando o fato de que $\Theta^{-1} = -\Theta$, encontramos

$$-\Theta \sigma \Theta \hat{p}[\phi_L^\pm(k^\mu)]^* = \mp[\phi_L^\pm(k^\mu)]^*, \quad (69)$$

ou ainda

$$\Theta^{-1} \sigma \Theta \hat{p}[\phi_L^\pm(k^\mu)]^* = \mp[\phi_L^\pm(k^\mu)]^*. \quad (70)$$

O passo final é multiplicar pela esquerda ambos os lados da equação (70) por Θ , pois assim chegaremos a conclusão que

$$\sigma \hat{p} \Theta [\phi_L^\pm(k^\mu)]^* = \mp \Theta [\phi_L^\pm(k^\mu)]^*. \quad (71)$$

De tal modo que podemos inferir que $\Theta[\phi_L^\pm(k^\mu)]^*$ possui helicidade oposta a $\phi_L^\pm(k^\mu)$, resultado esse que contrasta com os espinores de Dirac, pois neste último caso as duas componentes possuem mesma helicidade (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005).

Diante deste fato, podemos notar que temos uma determinada liberdade na escolha da helicidade das componente de $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ de $\lambda(p^\mu)$. Nesse momento estamos interessados em observar que se impusermos que as helicidades de $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ sejam idênticas, $\lambda(p^\mu)$ será um objeto de helicidade única, tornando-se idêntico aos espinores de Majorana (AHLUWALIA D. V.; LEE, 2011). Essa escolha contraria fortemente os resultados obtidos em (58) e (71). O que acontece é que para $\lambda(p^\mu)$ começamos com a componente $(0, 1/2)$ de $\phi_L(p^\mu)$ escolhendo uma determinada helicidade; já quando vamos construir a componente $(1/2, 0)$, ou seja, $\pm i \Theta \phi_L^*(p^\mu)$, percebemos uma mudança da helicidade para tal componente, acontecendo naturalmente. Isso é notado em (71), e por essa razão $\lambda(p^\mu)$ é considerado um objeto de helicidade dual (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005; AHLUWALIA D. V.; LEE, 2011). Então, uma vez que já foram estabelecidas as componentes de mão esquerda e mão direita de $\lambda(p^\mu)$ podemos definí-los de forma explícita (4 graus de liberdade), temos para os espinores auto conjugados

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^+(k^\mu)]^* \\ \phi_L^+(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{+,-\}}^S(k^\mu) = \begin{pmatrix} i\Theta[\phi_L^-(k^\mu)]^* \\ \phi_L^-(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad (72)$$

e para os anti autoconjugados

$$\lambda_{\{-,+\}}^A(k^\mu) = - \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^+(k^\mu)]^* \\ \phi_L^+(k^\mu) \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\{+,-\}}^A(k^\mu) = \begin{pmatrix} -i\Theta[\phi_L^-(k^\mu)]^* \\ \phi_L^-(k^\mu) \end{pmatrix}. \quad (73)$$

É nosso dever fazer uma breve pausa para esclarecer um pouco melhor a forma com que esses espinores foram escritos. As quantidades entre chaves $\{\pm, \mp\}$ estão relacionadas com a helicidade; a primeira entrada é referente a helicidade da componente que se transforma como mão direita, isto é $(1/2, 0)$ ao passo que a segunda entrada refere-se a helicidade da componente de mão esquerda $(0, 1/2)$.

Uma vez que os espinores foram definidos no referencial de repouso, k^μ , podemos aplicar o boost dado em (57) e assim teremos para os $\lambda(p^\mu)$ auto-conjugados

$$\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu), \quad (74)$$

e

$$\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{\{+,-\}}^S(k^\mu). \quad (75)$$

e para os anti auto-conjugados

$$\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{\{-,+\}}^A(k^\mu), \quad (76)$$

além de

$$\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{\{+,-\}}^A(k^\mu). \quad (77)$$

Portanto, construímos aqui um conjunto completo de auto espinores do operador conjugação de carga e explicitamos como ficam tais objetos mediante a atuação dos boost de Lorentz. Cabe mencionar, que uma verificação das equações (74) e (76), mostra que no limite de massa nula os graus de liberdade de $\lambda(p^\mu)$ reduzem para dois, pois como pode ser visto tanto $\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu)$ quanto $\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu)$ anulam-se identicamente (AHLUWALIA, 2017b). Mais adiante veremos que para o caso do Elko, a simetria de paridade faz com que $\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) \rightarrow \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu)$ e $\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) \rightarrow \lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu)$, desta maneira, combinando essas observações, concluímos que para o caso de massa nula não existe reflexão para os espinores $\lambda(p^\mu)$. Sendo assim, em Ahluwalia (2017b) é destacado que apenas em alguns casos tal limite pode ser tomado por um espaço de representação massiva.

3.3 A CONSTRUÇÃO DA ESTRUTURA DUAL: TEORIA MATEMÁTICA DOS DUAIS

Da literatura, e.g., Ryder (1996), Sabemos que para os espinores de Dirac a estrutura dual é dada por⁴

$$\bar{\psi}(p^\mu) = \psi^\dagger(p^\mu) \gamma_0, \quad (78)$$

⁴Entretanto, uma nova possibilidade de estrutura dual para Dirac foi recentemente desenvolvida em Rogerio R. J. B. e Villalobos (2018), mostrando que a rigidez da definição primária da estrutura dual de Dirac pode ser quebrada sem afetar a física já conhecida.

fazendo com que a quantidade $\bar{\psi}(p^\mu)\psi(p^\mu)$ seja um invariante sob transformações de Lorentz, i.e., um escalar. Em contrapartida, se esse formato de estrutura dual for tomado para os autoespinores de $\mathcal{C}$, $\bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) = \lambda_\alpha^\dagger(p^\mu)\gamma_0$ imediatamente veremos que a norma é nula

$$\bar{\lambda}_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu)\lambda_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu) = 0, \quad (79)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu)\lambda_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu) = 0, \quad (80)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu)\lambda_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu) = 0, \quad (81)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu)\lambda_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu) = 0, \quad (82)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu)\lambda_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu) = 0, \quad (83)$$

$$\bar{\lambda}_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu)\lambda_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu) = 0. \quad (84)$$

Não obstante, teremos também as normas imaginárias para os seguintes casos (AHLUWALIA, 2017b)

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^S(p^\mu)\lambda_{(\mp,\pm)}^S(p^\mu) = \mp 2im, \quad (85)$$

$$\bar{\lambda}_{(\pm,\mp)}^A(p^\mu)\lambda_{(\mp,\pm)}^A(p^\mu) = \pm 2im. \quad (86)$$

Desta maneira, é perceptível que se seguíssemos esse formalismo teríamos um grande problema com as estruturas duais dos autoespinores de $\mathcal{C}$. Devemos buscar uma estrutura dual que nos forneça uma norma real, não nula e invariante por transformações de Lorentz. Sendo assim, vamos buscar definir o dual de uma forma geral, dada por

$$\bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \stackrel{def}{=} [\Xi(p^\mu)\lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \eta, \quad (87)$$

onde $\Xi(p^\mu)$ e η representam matrizes 4×4 . Devemos ressaltar aqui algumas propriedades atreladas ao operador $\Xi(p^\mu)$ que surge em (87). Esse operador é tal que ao atuar em algum 4-espinor $\lambda_\alpha(p^\mu)$ deve nos devolver algum espinor $\lambda_\beta(p^\mu)$ que pertença ao conjunto de autoespinores de $\mathcal{C}$ que estamos trabalhando. Imporemos que $\Xi^2(p^\mu) = \mathbb{1}$ para que ele desempenhe o papel de um mapa invertível, para que assim possamos escrever o espinor usual em termos do espinor dual e vice-versa e também imporemos que $\Xi^{-1}(p^\mu)$ exista. De posse dos resultados contidos nas equações (79) até (84), isso nos permite definir (AHLUWALIA, 2017b)

$$\Xi(p^\mu) \stackrel{def}{=} \frac{1}{2m} [\lambda_{\{+,-\}}^S \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^S + \lambda_{\{-,+\}}^S \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^S - \lambda_{\{+,-\}}^A \bar{\lambda}_{\{+,-\}}^A - \lambda_{\{-,+\}}^A \bar{\lambda}_{\{-,+\}}^A], \quad (88)$$

cuja forma matricial, calculada em Silva (2016), é dada por

$$\Xi(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{ip \sin \theta}{m} & \frac{-i(E+p \cos \theta)e^{-i\phi}}{m} & 0 & 0 \\ \frac{i(E-p \cos \theta)e^{i\phi}}{m} & \frac{-ip \sin \theta}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-ip \sin \theta}{m} & \frac{-i(E-p \cos \theta)e^{-i\phi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(E+p \cos \theta)e^{i\phi}}{m} & \frac{ip \sin \theta}{m} \end{pmatrix}. \quad (89)$$

A atuação de $\Xi(p^\mu)$ nos espinores $\lambda(p^\mu)$ nos fornece

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = +i\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu), \quad (90)$$

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) = -i\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu), \quad (91)$$

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu) = +i\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu), \quad (92)$$

$$\Xi(p^\mu)\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) = -i\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu). \quad (93)$$

Uma vez que fora determinada a forma explícita de $\Xi(p^\mu)$, resta-nos apenas agora encontrar η . Sendo assim, partiremos da imposição de que a norma deve ser invariante sob qualquer transformação de Lorentz, o que se traduz em

$$[\Xi(k^\mu)\lambda_\alpha(k^\mu)]^\dagger \eta \lambda_\alpha(k^\mu) = [\Xi(p^\mu)\lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \eta \lambda_\alpha(p^\mu). \quad (94)$$

Já vimos no início deste capítulo que podemos expressar $\lambda_\alpha(p^\mu) = \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\varphi})\lambda_\alpha(k^\mu)$, e facilmente podemos notar de (11) que $\boldsymbol{\kappa}^\dagger = -\boldsymbol{\kappa}$, assim

$$[\Xi(p^\mu)\lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \eta \lambda_\alpha(p^\mu) = \lambda_\alpha^\dagger(k^\mu) e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \Xi^\dagger(p^\mu) \eta e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \lambda_\alpha(k^\mu). \quad (95)$$

Assim, temos a seguinte relação

$$\Xi(p^\mu) = e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \Xi(k^\mu) e^{-i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \quad (96)$$

e isso nos permite escrever (95) como

$$[\Xi(p^\mu)\lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \eta \lambda_\alpha(p^\mu) = [\Xi(k^\mu)\lambda_\alpha(k^\mu)]^\dagger e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \eta e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \lambda_\alpha(k^\mu), \quad (97)$$

ou seja, podemos inferir que

$$\eta = e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}} \eta e^{i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\varphi}}. \quad (98)$$

Logo concluímos que a última relação acima só é válida se η anticomutar com os geradores de boost

$$\{\boldsymbol{\kappa}, \eta\} = 0. \quad (99)$$

Um raciocínio semelhante pode (e deve) ser feito para os operadores de rotação. De tal procedimento pode ser visto que (11) $\zeta^\dagger = \zeta$ e isso nos leva a concluir que

$$[\zeta, \eta] = 0. \quad (100)$$

Das restrições encontradas chegamos em $\eta = \gamma_0$. Assim, a forma final para a estrutura dual é dada por

$$\bar{\lambda}_{\{-,+\}}^{S/A}(p^\mu) = i \left[\lambda_{\{+,-\}}^{S/A}(p^\mu) \right]^\dagger \gamma_0, \quad (101)$$

$$\bar{\lambda}_{\{+,-\}}^{S/A}(p^\mu) = -i \left[\lambda_{\{-,+\}}^{S/A}(p^\mu) \right]^\dagger \gamma_0. \quad (102)$$

Tais estruturas nos permitem escrever as seguintes relações de ortonormalidade

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 2m \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (103)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = -2m \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (104)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = \bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 0. \quad (105)$$

Agora com tal estrutura já estabelecida, vamos buscar encontrar quantidades físicas relevantes associadas aos espinores $\lambda(p^\mu)$. A estrutura dual contrasta fortemente com a estrutura dual de Dirac ($\bar{\psi}_\alpha = \psi_\alpha^\dagger \gamma_0$ onde $\Xi(p^\mu) = \mathbb{1}$), uma vez que para os espinores Elko faz-se necessário a troca de helicidade do espinor (para garantir um invariante) e o surgimento da unidade imaginária (garantindo que tal quantidade seja real). Cabe mencionar que uma nova redefinição da estrutura dual para os espinores de Dirac pode ser vista em Rogerio R. J. B. e Villalobos (2018), onde os autores mostram que uma estrutura dual com $\Xi(p^\mu) \neq \mathbb{1}$ é possível de ser encontrada e ainda assim preserva a física associada.

3.4 SOMAS DE SPIN: INVARIÂNCIA E LIMITAÇÃO CAUSADA PELO DUAL

A presente seção fora reservada para que abordemos a relação existente entre a soma de spin e o operador de onda associado aos auto espinores do operador $\mathcal{C}$. Sabemos que para o caso dos espinores de Dirac a estrutura dual não impõe nenhum tipo de limitação, e desta forma as somas de spin estão intimamente relacionadas com a equação de onda de Dirac. Diante da estrutura dual estabelecida, temos então

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^S(p^\mu) \bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu), \quad (106)$$

e

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^A(p^\mu) \bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu), \quad (107)$$

explicitamente temos

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = \left[\frac{E+m}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \right] \left(-i\lambda_{\{-,+\}}^S(k^{\mu}) [\lambda_{\{+,-\}}^S(k^{\mu})]^{\dagger} + i\lambda_{\{+,-\}}^S(k^{\mu}) [\lambda_{\{-,+\}}^S(k^{\mu})]^{\dagger} \right) \gamma_0, \quad (108)$$

e

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = \left[\frac{E+m}{2m} \left(1 - \frac{p^2}{(E+m)^2} \right) \right] \left(-i\lambda_{\{+,-\}}^A(k^{\mu}) [\lambda_{\{-,+\}}^A(k^{\mu})]^{\dagger} + i\lambda_{\{-,+\}}^A(k^{\mu}) [\lambda_{\{+,-\}}^A(k^{\mu})]^{\dagger} \right) \gamma_0. \quad (109)$$

Após simples cálculos, o resultado final pode ser escrito como

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = m[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)], \quad (110)$$

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = -m[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\phi)], \quad (111)$$

sendo a matriz $\mathcal{G}(\phi)$ dada por

$$\mathcal{G}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 0 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 0 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (112)$$

donde podemos inferir as seguintes relações

$$\mathcal{G}(\phi)\lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) = +\lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}), \quad \mathcal{G}(\phi)\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) = -\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}). \quad (113)$$

É notavel que o operador $\mathcal{G}(\phi)$ não é um operador de onda. Ademais, devemos destacar que nas somas de spin para o Elko existe uma determinada dependência com relação a uma direção espacial contida em $\mathcal{G}(\phi)$. Claramente a quantidade que aparece no lado direito das equações (110) e (111) quebra a covariância relativística de Lorentz. Desta maneira temos uma quantidade que não é invariante por transformações deste grupo. Tal problema foi pela primeira vez contornado com auxílio de uma teoria proposta por Cohen e Glashow Cohen A. G; e Glashow (2006). Tal teoria, possui um grupo de transformações dado por um subgrupo do grupo de Lorentz, e é denominada por Very Special Relativity (VSR). As somas de spin acima são covariantes por transformações desse subgrupo. Assim sendo, deixamos reservado ao leitor o Apêndice C, onde todos os detalhes com relação a estrutura matemática da VSR e a covariância das somas de spin poderão ser vistas em detalhes. Entretanto, se ainda buscarmos uma teoria que seja invariante por transformações de

Lorentz, nosso dever é analisar a possibilidade da existência de alguma liberdade deixada na definição primária da estrutura dual apresentada e, de alguma maneira, tentar redefini-las ou, até mesmo buscar uma nova estrutura, uma vez que em Rogerio R. J. B. e Villalobos (2018) foi mostrado que existe uma liberdade na definição da estrutura dual de Dirac e mesmo com a nova estrutura dual a informação física existente se mantém inalterada, diante da última observação feita, vamos buscar um procedimento para fixar uma nova estrutura sem alterar a informação física carregada por esses espinores. Visto que as somas de spin aparecem no âmago da estrutura do propagador associado ao campo, e esta quantidade está relacionada com a interpretação de partícula e localidade, provavelmente veremos que o uso de tal estrutura afetará na localidade do campo quântico.

Apenas a título de comparação, para o caso de Dirac temos as mesmas relações que em Ryder (1996), Rogerio R. J. B. e Villalobos (2018), ou seja,

$$\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\psi}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = (\gamma_{\mu} p^{\mu} - m \mathbb{1}), \quad (114)$$

$$\sum_{\alpha} \psi_{\alpha}^A(p^{\mu}) \bar{\psi}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = (\gamma_{\mu} p^{\mu} + m \mathbb{1}). \quad (115)$$

onde no lado direito das duas últimas equações acima aparece o operador de onda que aniquila os espinores de Dirac. Desta maneira, essa estrutura encontrada para o Elko contrasta diretamente com o caso usual

3.5 REDEFINIÇÃO DA ESTRUTURA DUAL

Esta seção está reservada para que uma análise mais criteriosa no tocante à (re)definição da estrutura dual do Elko seja implementada. Buscaremos uma redefinição no sentido de que a invariância por transformações de Lorentz das regras de ortonormalidade se mantenham inalteradas, entretanto, buscamos estabelecer a invariância das somas de spin. Antes de prosseguirmos com os cálculos, devemos sumarizar e tomar nota de alguns fatos bastante importantes. De maneira que não exista nenhum conflito relacionado com os autoespinores do operador conjugação de carga que estamos trabalhando, faremos uma pequena distinção entre a teoria embriônica, a qual viola Lorentz (primeira definição da estrutura dual) e a teoria mais recente, a que é invariante por Lorentz (estrutura dual redefinida) dito isto, para os constituintes da primeira denominaremos espinores Elko ao passo que para os da segunda chamaremos de espinores de dimensão de massa um. Desta forma, evitaremos qualquer tipo de ambiguidade quando usarmos o termo correto para definir tais campos. Ainda assim, de maneira mais abrangente e geral, quando quisermos nos referir a um contexto mais amplo sem fazer distinção alguma, usaremos o termo mais apropriado: autoespinores do operador conjugação de carga.

Vamos então introduzir uma nova definição do dual, a qual se traduz como (AH-

LUWALIA, 2017b)

$$\tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \rightarrow \bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) = \tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \mathcal{A}, \quad (116)$$

$$\tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \rightarrow \bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) = \tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \mathcal{B}, \quad (117)$$

onde as quantidades $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ estão restritas a algumas propriedades não triviais:

- os espinores $\lambda_\alpha^S(p^\mu)$ e $\lambda_\alpha^A(p^\mu)$ devem ser autoespinores de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, respectivamente, com autovalor $+1$, assim

$$\mathcal{A}\lambda_\alpha^S(p^\mu) = \lambda_\alpha^S(p^\mu), \quad \mathcal{B}\lambda_\alpha^A(p^\mu) = \lambda_\alpha^A(p^\mu), \quad (118)$$

- além disso, os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ devem ser tais que assegurem

$$\tilde{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \mathcal{A} \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = 0, \quad \tilde{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \mathcal{B} \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 0. \quad (119)$$

Diante da nova redefinição, as regras de ortonormalidade devem manter-se intactas, ou seja,

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 2m \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (120)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = -2m \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (121)$$

$$\bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^A(p^\mu) = \bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) \lambda_{\alpha'}^S(p^\mu) = 0. \quad (122)$$

Usando-se a estrutura dual redefinida, temos então que as somas de spin ficam

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^S(p^\mu) \bar{\lambda}_\alpha^S(p^\mu) = m[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)] \mathcal{A}, \quad (123)$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^A(p^\mu) \bar{\lambda}_\alpha^A(p^\mu) = -m[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\phi)] \mathcal{B}. \quad (124)$$

Devemos mostrar a existência de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de forma que tais quantidades satisfaçam as imposições dadas em (118) e (119) e ao mesmo tempo retornem uma soma de spin invariante por Lorentz. Sendo assim, a menos de uma constante, para que tenhamos uma quantidade invariante os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ devem ser a inversa de $[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]$ e $[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\phi)]$, respectivamente. Entretanto, $\det[\mathbb{1} \pm \mathcal{G}(\phi)] = 0$, ou seja, precisamos da inversa de uma matriz singular. Assim, vamos recorrer a alguns métodos matemáticos para determinar a (pseudo)inversa das somas de spin. No que se segue, apresentaremos o percurso descrito em Rogerio R. J. B e da Silva (2017), onde nos valem de uma série de tentativas para alcançar nosso intento.

3.5.1 A PSEUDOINVERSA

Um procedimento para se encontrar a inversa geral de uma matriz singular, foi introduzida na literatura em trabalhos conceituados de Moore e Penrose, como Moors (1920), Penrose (1955). De maneira geral, esses trabalhos fornecem um algoritmo completo para encontrar o que é conhecida como “pseudoinversa”, doravante denotada por M^+ , de uma matriz singular M . Como já fora notado em Lee (2016a), infelizmente tal procedimento é inócuo para o caso em questão. Aplicando-se o procedimento da pseudoinversa $[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+$, visto em Rogerio R. J. B e da Silva (2017), Penrose (1955), é dada por

$$[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = [\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \left([\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \right)^{-1}, \quad (125)$$

ou, de maneira similar

$$[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \left([\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger [\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)] \right)^{-1} [\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger. \quad (126)$$

No entanto, ambos os resultados acima são matrizes singulares, tornando o procedimento inválido (ROGERIO R. J. B E DA SILVA, 2017). Devemos então buscar procedimentos alternativos e eficientes para conseguir encontrar a pseudoinversa para este caso.

O método conhecido como Regularização de Tikhonov, dado em Tikhonov (1963), provê uma outra maneira de se obter a pseudoinversa de uma matriz singular, caso o protocolo anterior venha a falhar, mostrado em Rogerio R. J. B e da Silva (2017). Tal procedimento consiste em introduzir um parâmetro de “deformação” no cálculo da pseudoinversa e assim, tomar o limite adequado desse parâmetro após os cálculos. Ao adaptar o problema que estamos tratando à esse método, somos levados à

$$[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} [\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger \left([\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^\dagger + \mu \mathbb{1} \right)^{-1},$$

onde $\mu \in \mathbb{C}$ é o parâmetro de deformação. Um cálculo bastante simples nos fornece

$$[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+ = \lim_{\mu \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{1}{4+\mu} & 0 & 0 & \frac{-ie^{-i\phi}}{4+\mu} \\ 0 & \frac{1}{4+\mu} & \frac{ie^{i\phi}}{4+\mu} & 0 \\ 0 & \frac{-ie^{-i\phi}}{4+\mu} & \frac{1}{4+\mu} & 0 \\ \frac{ie^{i\phi}}{4+\mu} & 0 & 0 & \frac{1}{4+\mu} \end{pmatrix}. \quad (127)$$

Para verificar se (127) é de fato a pseudoinversa de $[\mathbb{1} + G(\phi)]$, multiplicaremos $[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+$

por $[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]$ e então tomaremos o limite $\mu \rightarrow 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} [\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)][\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^+ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -ie^{-i\phi} \\ 0 & 1 & ie^{i\phi} & 0 \\ 0 & -ie^{-i\phi} & 1 & 0 \\ ie^{i\phi} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)], \end{aligned} \quad (128)$$

nos fornecendo novamente um resultado não satisfatório.

Ainda visando encontrar uma matriz que possa ser realmente classificada como a inversa do termo que quebra a invariância relativística das somas de spin, como mostrado em Rogerio R. J. B e da Silva (2017), somos levados ao método da vizinhança de matrizes singulares (também conhecido como “ τ -deformação”), então escreveremos

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) = m[\mathbb{1} + \tau G(\phi)] \mathcal{A}|_{\tau \rightarrow 1}, \quad (129)$$

e

$$\sum_{\alpha} \lambda_h^A(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) = -m[\mathbb{1} - \tau G(\phi)] \mathcal{B}|_{\tau \rightarrow 1}. \quad (130)$$

Note que para esse procedimento ter efeito a τ -deformação deve ter um limite bem estabelecido quando $\tau \rightarrow 1$. Assim, esse limite será a única restrição a ser usada. A análise da vizinhança de $[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]$ corroborará os cálculos fornecendo uma explicação matematicamente aceitável para o método adotado.

Levados pelo mesmo protocolo que foi usado em Barata J. C. A. e Hussein (2012), partiremos do fato de que ambas as matrizes $\mathbb{1}$ and $\mathcal{G}(\phi)$ são matrizes não singulares. Dito isto, existem constantes r_1 e r_2 , as quais, por sua vez, dependem de $\mathbb{1}$ e $\mathcal{G}(\phi)$, sob a condição $0 < r_1 \leq r_2$, tal que $[\mathbb{1} + \tau \mathcal{G}(\phi)]$ é invertível para $\tau \in \mathbb{C}$ com $0 < |\tau| < r_1$ e para todo $\tau \in \mathbb{C}$ com $|\tau| > r_2$, da mesma form que em Rogerio R. J. B e da Silva (2017). Assim é possível notar que

$$\mathbb{1} + \tau G(\phi) = [\mathbb{1}\tau + G^{-1}(\phi)]G(\phi), \quad (131)$$

de maneira que $[\mathbb{1} + \tau G(\phi)]$ é invertível apenas se $[\mathbb{1}\tau + G^{-1}(\phi)]$ for não singular. Definiremos agora $Z \equiv -G^{-1}(\phi)$ e $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \in \mathbb{C}$ sendo as k raízes não necessariamente distintas do polinômio p_z , i. e., $p_z = \det[Z - \lambda \mathbb{1}]$. Note que a partir de (131) temos

$$\mathbb{1} + \tau G(\phi) = -[Z - \mathbb{1}\tau]G(\phi). \quad (132)$$

Se todas as raízes forem nulas, devemos tomar $r_1 = r_2$ como sendo qualquer número positivo. Definiremos, então, $r_1 \equiv \min\{|\lambda_k|, \lambda_k \neq 0\}$ e $r_2 \equiv \max\{|\lambda_k|\}$, assim temos duas

variedades possíveis de valores para τ para os quais τ permite $[\mathbb{1}\tau + \mathcal{G}^{-1}(\phi)]$ ser uma matriz não singular, assegurando, então, que $[\mathbb{1} + \tau\mathcal{G}(\phi)]$ seja invertível. Esses conjuntos de valores permitidos estão entre $\{\tau \in \mathbb{R}, 0 < |\tau| < r_1\}$ e $\{\tau \in \mathbb{R}, |\tau| > r_2\}$. Como podemos ver

$$p_z = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1, \quad (133)$$

possuindo raízes dadas por ± 1 , ambas com multiplicidade 2. Desta forma, podemos ver que a única restrição é dada por $|\tau| > 1$ ou $0 < |\tau| < 1$. Assim, o limite usado na Ref. Ahluwalia (2017b) é válido para os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ e fornecem de fato a inversa de (129) e (130), respectivamente. Desta forma, podemos deixar explícito o valor dos operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$

$$\mathcal{A} = 2[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]^{-1} = 2 \left[\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right], \quad (134)$$

$$\mathcal{B} = 2[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\phi)]^{-1} = 2 \left[\frac{\mathbb{1} + \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right], \quad (135)$$

usando o fato de que $\mathcal{G}(\phi)^2 = \mathbb{1}$, podemos então estabelecer que as somas de spin para os férmions de dimensão de massa um são

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu}) &= 2m[\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)] \left[\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right] \Big|_{\tau \rightarrow 1}, \\ &= 2m\mathbb{1}, \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu}) &= -2m[\mathbb{1} - \mathcal{G}(\phi)] \left[\frac{\mathbb{1} + \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right] \Big|_{\tau \rightarrow 1}, \\ &= -2m\mathbb{1}. \end{aligned} \quad (137)$$

Isso nos revela que não existe solução para o caso em que $\tau = 1$, mas sim existe solução em uma vizinhança infinitesimalmente próxima de 1, tanto no limite pela esquerda quanto pela direita desse valor. Uma vez que estabelecemos a nova estrutura dual, veremos se além de fornecer uma soma de spin invariante por transformações de Lorentz também as relações dadas em (118) são respeitadas. Para isso, um fato importante a ser destacado é que $\mathcal{G}(\phi)\lambda_{\alpha}^{S/A}(p^{\mu}) = \pm\lambda_{\alpha}^{S/A}(p^{\mu})$, assim

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) &= 2 \left[\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2} \right] \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) = 2 \left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau^2} \right) \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}), \\ &= \left(\frac{2}{1 + \tau} \right) \Big|_{\tau \rightarrow 1} \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}) = \lambda_{\alpha}^S(p^{\mu}). \end{aligned} \quad (138)$$

Temos também

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) &= 2\left[\frac{\mathbb{1} + \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2}\right]\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) = 2\left(\frac{1 - \tau}{1 - \tau^2}\right)\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}), \\
 &= \left(\frac{2}{1 + \tau}\right)|_{\tau \rightarrow 1}\lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}) = \lambda_{\alpha}^A(p^{\mu}).
 \end{aligned} \tag{139}$$

Agora, examinaremos se (119) é também respeitada

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu})\mathcal{A}\lambda_{\alpha'}^A(p^{\mu}) &= 2\tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu})\left[\frac{\mathbb{1} - \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2}\right]\lambda_{\alpha'}^A(p^{\mu}) \\
 &= 2\left(\frac{1}{1 - \tau}\right)|_{\tau \rightarrow 1}\tilde{\lambda}_{\alpha}^S(p^{\mu})\lambda_{\alpha'}^A(p^{\mu}) = 0,
 \end{aligned} \tag{140}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu})\mathcal{B}\lambda_{\alpha'}^S(p^{\mu}) &= 2\tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu})\left[\frac{\mathbb{1} + \tau\mathcal{G}(\phi)}{1 - \tau^2}\right]\lambda_{\alpha'}^S(p^{\mu}) \\
 &= 2\left(\frac{1}{1 - \tau}\right)|_{\tau \rightarrow 1}\tilde{\lambda}_{\alpha}^A(p^{\mu})\lambda_{\alpha'}^S(p^{\mu}) = 0.
 \end{aligned} \tag{141}$$

Portanto, vemos que a redefinição da estrutura dual, fornece uma teoria invariante por transformações de Lorentz, além do fato de manter intacta todas as regras de ortonormalidade já previamente estabelecidas. Assim, finalmente temos uma teoria local e invariante sem a necessidade de se recorrer à Very Special Relativity.

4 DINÂMICA DO CAMPO E SIMETRIAS $\mathcal{CPT}$

O presente capítulo está reservado para que possamos realizar uma ampla análise sobre a dinâmica dos espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$. O primeiro alerta sobre a dimensionalidade desses férmions de spin $1/2$ é regido pela observação de que o operador de Dirac não os aniquila. De tal forma que esses campos obedecem apenas a dinâmica de Klein-Gordon, e assim, são fadados a possuir dimensão de massa um ao invés de $3/2$.

4.1 ESPINORES $\lambda_\alpha(p^\mu)$ E A EQUAÇÃO DE DIRAC

Veremos que a equação de Dirac no espaço dos momentos não aniquila os espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$. Para tanto, vamos atuar com $\gamma_\mu p^\mu$ em um determinado $\lambda_\alpha(p^\mu)$ anteriormente obtido, desta maneira (AHLUWALIA, 2017b; ROGERIO, 2014)

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) \left[E\gamma_0 + p \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \right] \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu). \quad (142)$$

De posse das relações (67) e (71) e fazendo-se algumas manipulações algébricas simples, obtém-se

$$\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \\ -\vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \end{pmatrix} \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu) = \gamma_0 \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu), \quad (143)$$

de forma que podemos escrever (142) como

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+p) \gamma_0 \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu). \quad (144)$$

Agora, trabalhando com o lado direito da última equação acima, observa-se que

$$\gamma_0 \lambda_{\{-,+\}}^S(k^\mu) = -i \lambda_{\{+,-\}}^S(k^\mu), \quad (145)$$

e evocando a relação de dispersão, temos

$$\left(1 - \frac{p}{E+m}\right) (E+p) = \left(1 + \frac{p}{E+m}\right). \quad (146)$$

Finalmente somos levados à

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = -im\sqrt{\frac{E+m}{2m}} \left(1 + \frac{p}{E+m}\right) \lambda_{\{+,-\}}^S(k^\mu), \quad (147)$$

ou seja,

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = -im\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu). \quad (148)$$

De forma completa, temos então que a atuação de $\gamma_\mu p^\mu$ nos outros espinores resulta em

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = -im\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu), \quad (149)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) = im\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu), \quad (150)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) = -im\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu), \quad (151)$$

$$\gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu) = im\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu). \quad (152)$$

Ou de forma mais simples, podemos ainda resumir o conjunto de equações acima como (SILVA, 2016)

$$(\gamma_\mu p^\mu \pm \Xi(p^\mu)m)\lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) = 0. \quad (153)$$

De posse da relação de comutação $[\gamma_\mu p^\mu, \Xi(p^\mu)] = 0$, podemos ainda escrever

$$(\gamma_\mu p^\mu \Xi(p^\mu) \pm m)\lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) = 0. \quad (154)$$

Claramente podemos ver que os autoespinores de $\mathcal{C}$ não possuem a dinâmica de Dirac. Tal fato pode ser explicado por dois motivos: primeiramente, tais espinores foram construídos sem o uso da simetria de paridade (P) como vínculo fundamental entre os espaços de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ (o que fortemente contrasta com os espinores apresentados no Capítulo 2) segundo motivo é a presença da helicidade dual, como pode ser notado, ao atuar com a equação tipo-Dirac (154), estamos relacionando espinores com diferentes helicidades. Visando encontrar uma dinâmica para tais espinores, a próxima etapa é verificar se os mesmos satisfazem a equação de Klein-Gordon. Portanto, iremos atuar com o operador $\gamma_\nu p^\nu$ na relação (149), por exemplo. Desta maneira

$$\begin{aligned} \gamma_\nu p^\nu \gamma_\mu p^\mu \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) &= im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu), \\ \underbrace{-(\gamma_\mu \partial^\mu)(\gamma_\nu \partial^\nu)}_{-\frac{1}{2}\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}\partial^\mu \partial^\nu} \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) &= im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu). \end{aligned} \quad (155)$$

Recorrendo à relação (150), ficamos com

$$-\square \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = im\gamma_\nu p^\nu \lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) \quad (156)$$

$$= m^2 \lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu), \quad (157)$$

fornecendo, desta maneira, para todos os espinores $\lambda_\alpha^S(p^\mu)$ a relação

$$(\square + m^2) \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) = 0. \quad (158)$$

Este resultado já era esperado, visto que a equação de Klein-Gordon é uma relação que expressa conservação de energia, e, portanto, ela deve ser satisfeita por qualquer campo independentemente do spin (ROGERIO, 2014).

Assim como é o caso do campo escalar, a densidade de probabilidade para tais espinores não é positivo definida. Consequentemente, isso pode ser resolvido se deixarmos de lado a interpretação de uma única partícula descrita por uma função de onda e passarmos a pensar em um campo quântico, para o qual, após a quantização, conseguimos assegurar uma densidade de probabilidade positivo definida (ROGERIO, 2014).

4.2 TRANSFORMAÇÃO NÃO UNITÁRIA: ESTRUTURA COVARIANTE

Vamos analisar aqui a relação de covariância do vínculo algébrico (154) que aniquila¹ os espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$. Para tanto vamos ver se essa equação mantém sua forma após uma transformação geral do tipo

$$\lambda'_\alpha{}^{S/A}(p'^\mu) = S(\Lambda) \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu). \quad (159)$$

Aplicando a transformação (159) para os campos da equação (154), encontramos

$$(\gamma_\mu p'^\mu \Xi'(p^\mu) \pm m) \lambda'_\alpha{}^{S/A}(p^\mu) = 0. \quad (160)$$

Escrevendo o momento como $p^\mu \leftrightarrow i\partial^\mu$, sabemos que a derivada parcial usualmente se transforma como $\partial'^\mu = \Lambda^\mu{}_\beta \partial^\beta$. Assim, de maneira a assegurar a covariância de (154), as matrizes de Dirac e o operador $\Xi(p^\mu)$ devem transformar-se da seguinte maneira:

$$\gamma'_\beta = S(\Lambda) \gamma_\mu S^{-1}(\Lambda) \Lambda^\mu{}_\beta, \quad (161)$$

$$\Xi'(p^\mu) = S(\Lambda) \Xi(p^\mu) S^{-1}(\Lambda). \quad (162)$$

A equação (161) é uma imposição usual para as matrizes gamma de maneira a garantir a covariância até mesmo da equação de Dirac. Agora, a relação (162) é um novo ingrediente

¹O termo “aniquila” aqui usado, é um abuso de linguagem, visto que sabemos diante do que já foi exposto que não existe uma dinâmica associada devido a tal equação.

para a teoria dos espinores em questão.

Desta maneira, se Λ for uma rotação então a transformação aplicada em $\lambda_\alpha(p^\mu)$ é unitária, mas caso Λ seja um boost de Lorentz a transformação não será unitária. Portanto, os espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$ não podem representar um estado quântico, e sim servirão como coeficientes de expansão do campo quântico, o qual, este sim, transformar-se-á de maneira unitária.

4.3 SIMETRIA $(CPT)^2$

Como visto em (38), o operador paridade está intimamente relacionado com o operador $\gamma_\mu p^\mu$. Dito isto, podemos inferir das relações (149)-(152) as seguintes correlações (AHLUWALIA, 2017b)

$$P\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = i\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu), \quad (163)$$

$$P\lambda_{\{+,-\}}^S(p^\mu) = -i\lambda_{\{-,+\}}^S(p^\mu), \quad (164)$$

$$P\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu) = i\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu), \quad (165)$$

$$P\lambda_{\{+,-\}}^A(p^\mu) = -i\lambda_{\{-,+\}}^A(p^\mu). \quad (166)$$

Tais relações podem ser escritas em uma forma mais compacta

$$P\lambda_{\{\mp,\pm\}}^S(p^\mu) = \pm i\lambda_{\{\pm,\mp\}}^S(p^\mu), \quad (167)$$

$$P\lambda_{\{\mp,\pm\}}^A(p^\mu) = \pm i\lambda_{\{\pm,\mp\}}^A(p^\mu), \quad (168)$$

donde, facilmente pode ser visto que $P^2 = \mathbb{1}$. Diante do que foi até agora exposto, podemos analisar a relação existente entre os operadores $\mathcal{C}$ e P , desta forma atuando com $\mathcal{C}P$ e PC nos espinores em questão somos levados à seguinte relação (AHLUWALIA, 2017b)

$$\{\mathcal{C}, P\} = 0, \quad (169)$$

relação aliás esperada para férmions, de acordo com o que fora explorado em Lee T. D. e Wick (1966). Entretanto, sob efeito do operador de reversão-temporal, cuja realização pode ser dada por $\mathcal{T} = i\gamma_5\mathcal{C}$, temos

$$\mathcal{T}\lambda_\alpha^S(p^\mu) = -i\lambda_\alpha^A(p^\mu), \quad (170)$$

$$\mathcal{T}\lambda_\alpha^A(p^\mu) = i\lambda_\alpha^S(p^\mu). \quad (171)$$

Assim, podemos ver que $\mathcal{T}^2 = -\mathbb{1}$, e consequentemente

$$[\mathcal{T}, P] = 0, \quad [\mathcal{C}, \mathcal{T}] = 0. \quad (172)$$

Como consequência direta das relações acima, temos que

$$(\mathcal{CPT})^2 = \mathbb{1}. \quad (173)$$

De acordo com Lee T. D. e Wick (1966), as relações $[\mathcal{T}, P] = 0$ e $(\mathcal{CPT})^2 = \mathbb{1}$ são características tipicamente bosônicas. É nosso dever sumarizar os resultados encontrados nessa última etapa com relação a análise pertinente às simetrias discretas. Para isso, vamos utilizar da prescrição encontrada no trabalho de Wigner sobre representações irredutíveis do grupo de Poincaré, como em Wigner (1939). O grupo de Poincaré pode ser entendido como uma extensão semi-simples do grupo de Lorentz ortócrono próprio com translações. Ao se investigar as representações irredutíveis, nenhuma partícula como, por exemplo, um férmion de dimensão de massa um foi até então encontrado (ou seja, nenhum férmion com características bosônicas). Devemos observar que a situação muda bastante quando as simetrias discretas são levadas em conta e não apenas consideramos o grupo ortócrono próprio, este ponto foi também analisado por Wigner em Wigner (1962). Um fato curioso é que Wigner encontrou representações irredutíveis fermiônicas as quais sob efeito de $\mathcal{C}$, P and $\mathcal{T}$ são exatamente o que se esperaria de um bóson.

De forma a deixar claro o nosso raciocínio, enquanto normalmente é estabelecido que os férmions pertencentes ao modelo padrão (quarks e leptons) estes obedecem $\mathcal{T}^2 = -\mathbb{1}$ e $(\mathcal{CPT})^2 = -\mathbb{1}$ e bósons $\mathcal{T}^2 = +\mathbb{1}$ e $(\mathcal{CPT})^2 = +\mathbb{1}$, Wigner mostra que é possível também se obter $\mathcal{T}^2 = +\mathbb{1}$ para férmions, levando à $(\mathcal{CPT})^2 = +\mathbb{1}$. Acontece que o campo considerado neste trabalho é uma realização da representação fermiônica, como acima mencionado, porém com “caráter bosônico”, assim, podemos dizer que tal campo pertence à classe não padrão de Wigner (ROGERIO, 2018).

5 CONSTRUÇÃO DOS COVARIANTES BILINEARES (OBSERVÁVEIS FÍSICOS)

Este capítulo fora reservado para explorarmos as estruturas bilineares, também chamadas de densidades bispinoriais. Haja visto que os espinores são estruturas matemáticas que carregam consigo informação sobre o espaço de representação, grande parte da física associada aos espinores é revelada a partir de suas estruturas bilineares, pela simples razão de que os férmions sozinhos não são diretamente observados (SILVA, 2016). A forma explícita das estruturas bilineares pode ser encontrada em qualquer livro texto, como, por exemplo, Zee (2010), Bjorken J. D. e Drell (1965). Entretanto, neste capítulo faremos a construção de tais bilineares partindo da álgebra de Clifford. Tal construção fornece um melhor entendimento sobre o espaço de representação associado às estruturas bilineares, de acordo com Crawford (1990), Crawford (1991). O presente capítulo será fracionado em duas partes. Primeiramente analisaremos os espinores Elko e, assim, depois o mesmo procedimento será estendido ao caso dos espinores com a nova estrutura dual. Essa tarefa tem o intuito de averiguarmos se existe uma mudança associada aos observáveis físicos das duas teorias.

5.1 CLASSIFICAÇÃO DE LOUNESTO

Dentro da classificação de Lounesto é possível encontrar espinores classicamente conhecidos como: Dirac, Majorana e Weyl (BENN I. E TUCKER, 1987; CRUMEYROLLE, 2013), não obstante, a classificação de Lounesto carrega em seu cerne uma vasta informação geométrica, de modo que, dado um espinor ψ que pertença a uma representação linear do grupo de Lorentz $SU(2, \mathbb{C})$, os covariantes bilineares necessariamente deverão satisfazer as identidades de Fierz-Pauli-Kofink¹. Podemos ver que das diferentes combinações dos covariantes bilineares é possível encontrar apenas seis classes de espinores, as quais são:

1. $\sigma \neq 0, \quad \omega \neq 0;$
2. $\sigma \neq 0, \quad \omega = 0;$
3. $\sigma = 0, \quad \omega \neq 0;$
4. $\sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad \mathbf{S} \neq 0;$

¹Doravante denominaremos apenas como Identidades de Fierz

$$5. \sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} = 0, \quad \mathbf{S} \neq 0;$$

$$6. \sigma = 0 = \omega, \quad \mathbf{K} \neq 0, \quad \mathbf{S} = 0.$$

De forma geral, tais quantidades estão associadas com observáveis físicos. Desta maneira, σ representa o comprimento invariante (norma dos espinores), $\mathbf{J}$ está relacionado com a densidade de corrente eletromagnética para o caso dos espinores de Dirac, $\mathbf{K}$ representa a projeção do spin na direção do movimento e $\mathbf{S}$ é a densidade de momento eletromagnético. Cabe mencionar que na classificação de Lounesto é crucial que J seja não nulo, primeiramente pelo fato de que dada quantidade física está associada com a corrente conservada e também para que as identidades de Fierz sejam satisfeitas. Na classificação de Lounesto existem dois tipos de espinores, regulares e singulares. Espinores regulares caracterizam-se por ter $\sigma \neq 0$ ou $\omega \neq 0$ ou ambas essas condições simultaneamente enquanto espinores singulares são aqueles onde $\sigma = 0 = \omega$. Nesta classificação os espinores regulares são dados por: espinores tipo-1, 2 e 3. Os espinores singulares são dados por: espinor tipo-4, espinor tipo-5 ou também conhecido como espinor de Majorana e os espinores tipo-6 que são exemplificados por espinores de Weyl (BENN I. E TUCKER, 1987).

5.2 ESPINORES DE DIRAC E ESTRUTURAS BILINEARES

Visando a construção dos bilineares associados aos autoespinores do operador conjugação de carga, usaremos a definição das álgebras de Clifford reais. Desta maneira, um ponto extremamente relevante e importante será a imposição da condição física de realidade de tais estruturas e também a normalização de Dirac, fato que nos permitirá deformar os elementos da álgebra de modo que nos possibilite encontrar uma regra para construir novos elementos de vetores da base.

5.2.1 GÊNESIS: ÁLGEBRA DE CLIFFORD REAL

A definição da álgebra de Clifford está associada com a condição de que os vetores da sua base devem mandatoriamente satisfazer a relação constitutiva

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \dots, N-1, \quad (174)$$

onde $g_{\mu\nu}$ está associada com a métrica do espaço-tempo de dimensão par, $N = 2n$, que em coordenadas Cartesianas tem a forma dada por $diag(1, -1, -1, \dots, -1)$, onde os elementos $\mathbb{1}$ e γ_μ representam os principais elementos construtores da álgebra. Denotaremos então a álgebra real de Clifford como $\mathcal{R}_{1, N-1}$, cuja base pode ser construída a partir das diferentes combinações (arranjos) das matrizes $\mathbb{1}$ e γ_μ . Os elementos que advém de tais combinações

são definidos como

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \equiv \frac{1}{M!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1}} \gamma^{\mu_{N-M+2}} \dots \gamma^{\mu_N}, \quad (175)$$

onde $M = 2, 3, \dots, N$. Desta maneira, todo o conjunto de elementos que forma a base da álgebra real de Clifford será definido por

$$\{\Gamma_i\} \equiv \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-2}}, \dots, \tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}\}, \quad (176)$$

onde utilizamos $\tilde{\gamma} \equiv \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-N}}$. Os elementos $\tilde{\gamma}_\mu$ representam as possíveis deformações para ter-se bilineares reais. Por conseguinte, usaremos da condição de normalização com a finalidade de calcular os elementos que advém da deformação. De posse dos principais elementos da base, $\mathbb{1}$ e γ_μ , construiremos as duas primeiras estruturas bilineares primordiais

$$\sigma \equiv \psi^\dagger \gamma \mathbb{1} \psi \equiv \bar{\psi} \psi, \quad (177)$$

$$J_\mu \equiv \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (178)$$

As quantidades (177) e (178) podem ser interpretadas como comprimento invariante σ e densidade de corrente J_μ para o caso específico de espinores usuais (SILVA, 2016). Vamos impor a condição de realidade das quantidades (177) e (178) e, assim, mostraremos quais relações devem satisfazer as matrizes de Dirac. Temos então para o primeiro caso

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma^*, \\ \bar{\psi} \psi &= (\bar{\psi} \psi)^*, \\ \psi^\dagger \gamma \psi &= \psi^\dagger \gamma^\dagger \psi, \end{aligned} \quad (179)$$

de (179) obtemos a seguinte condição $\gamma = \gamma^\dagger$. Entretanto, a única matriz que satisfaz tal condição é a matriz γ_0 . Analogamente, imporemos que a quantidade J_μ seja real

$$\begin{aligned} J_\mu &= J_\mu^*, \\ \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi &= (\psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi)^*, \\ \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi &= \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma_0^\dagger \psi, \\ \psi^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu \psi &= \bar{\psi} \gamma_0^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 \psi. \end{aligned} \quad (180)$$

Note que para garantir a realidade do bilinear J_μ , a seguinte relação deve ser obedecida

$$\gamma_0^{-1} \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu, \quad (181)$$

entretanto, como já havíamos visto na equação (179), $\gamma = \gamma_0$, assim, podemos reescrever a equação (181), par tal usaremos a seguinte propriedade $\gamma_0 = \gamma_0^\dagger = \gamma_0^{-1}$, de maneira que

$$\gamma_\mu = \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0. \quad (182)$$

Assim, encontramos duas relações para as matrizes de Dirac que nos garantem que as quantidades σ e J_μ sejam reais. O próximo passo então será construir novas formas bilineares a partir da “deformação” dos vetores da base $\{\Gamma_i\}$. Esses novos vetores da base fornecerão novas estruturas bilineares, as quais também devem ser reais, uma vez que estão associadas a observáveis físicos. Sendo assim, definiremos a normalização de Dirac para o caso das densidades biespinoriais construídas a partir dos elementos da base dadas em (175)

$$\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi = (\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi)^*. \quad (183)$$

Usando a condição (174) para as matrizes de Dirac obtemos

$$(\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi)^* = (-1)^{M(M-1)/2} \bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \psi, \quad (184)$$

onde o termo $(-1)^{M(M-1)/2}$ é apenas um regulador de sinal proveniente das relações de comutação entre as matrizes de Dirac. Para evidenciar esse fato, faremos um exemplo ilustrativo para o caso onde $M = 2$ e $N = 4$. Assim, chegamos a seguinte relação

$$(\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2} \psi)^* = \psi^\dagger \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2}^\dagger \gamma_0 \psi. \quad (185)$$

Vamos usar a equação (175) para definir $\tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2}$,

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4}. \quad (186)$$

Agora, calculando o adjunto de (186) obtemos

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2}^\dagger = \frac{1}{2!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma^{\dagger \mu_4} \gamma^{\dagger \mu_3}. \quad (187)$$

Usando a relação (182) e $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$, encontrarmos que $\tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2}^\dagger$ é dado por

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2}^\dagger = -\frac{1}{2!} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma^0 \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \gamma^0, \quad (188)$$

e finalmente, substituindo a equação (188) em (185), obtemos

$$(\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2} \psi)^* = -\bar{\psi} \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2} \psi. \quad (189)$$

Como pode ser notado, existe um fator (-1) compatível com o termo $(-1)^{M(M-1)/2}$ da equação (184), já que para o caso de nosso exemplo $M = 2$. Assim, temos justificado a presença do fator $(-1)^{M(M-1)/2}$.

Entretanto, isso ainda não garante que os novos bilineares que surgirão da normalização de Dirac serão reais, uma vez que o termo $(-1)^{M(M-1)/2}$ não assegura a realidade para certos valores de M . Portanto, vamos ainda impor a seguinte relação

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N-M}} \equiv (i^{M(M-1)/2}/M!) \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1}} \gamma^{\mu_{N-M+2}} \dots \gamma^{\mu_N}. \quad (190)$$

Da normalização (183), podemos dizer que o conjunto de vetores da base devem satisfazer a equação (182) e que os bilineares construídos a partir (190) deverão ser reais. Com essas considerações podemos afirmar que

$$\bar{\Gamma}_i \equiv \gamma_0 \Gamma_i^\dagger \gamma_0 = \Gamma_i, \quad (191)$$

$$\rho_i \equiv \bar{\psi} \Gamma_i \psi = \rho^*. \quad (192)$$

Desta maneira, definimos o caminho para encontrar todos os elementos (combinações) possíveis da base $\{\Gamma_i\}$, a partir das relações encontradas para as matrizes de Dirac e do fato que as estruturas bilineares devem obrigatoriamente ser reais. Vamos começar considerando um caso típico, que é o espaço de Minkowski $N = 4$. Faremos uso da normalização de Dirac nos elementos da base e, desta maneira, finalmente poderemos comparar os resultados que obteremos com as estruturas bilineares fornecidas em diversos livros textos, como no trabalho Bjorken J. D. e Drell (1965). Para o caso de $N = 4$, os valores permitidos de M são $M = 2, 3, 4$. Aqui já estamos partindo da afirmação que as quantidades σ e J_μ são reais, desde que satisfaçam as equações (179) e (182). Assim, devemos analisar os casos nos quais $M = 4$, $M = 3$ e $M = 2$ de modo que teremos um conjunto completo de elementos da base.

Para $M = 4$, temos

$$\tilde{\gamma}_{\mu_4-4} = (i^6/4!) \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4}. \quad (193)$$

Como sabemos as matrizes γ^{μ_i} podem tomar os valores γ^0 , γ^1 , γ^2 e γ^3 , mas devido ao símbolo de Levi-Civita podemos ver que o denominador, $4!$, na expressão anterior deve se cancelar quando consideramos todas as possíveis combinações das matrizes γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$), de modo que a expressão anterior fica simplesmente (VILLALOBOS, 2017)

$$\tilde{\gamma} = -\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (194)$$

onde, $\tilde{\gamma}_{\mu_4-4} = \tilde{\gamma}$. Definindo $\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, a equação (194) leva ao conhecido resultado

$$\tilde{\gamma} = -i\gamma_5. \quad (195)$$

Para $M = 3$, temos

$$\tilde{\gamma}_{\mu_4-3} = (i^3/3!)\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4}. \quad (196)$$

Da mesma maneira como feita no caso anterior, o símbolo de Levi-Civita e o denominador, $3!$, devem se cancelar, e a equação (196) fica como

$$\tilde{\gamma}_\mu = \gamma_5\gamma_\mu. \quad (197)$$

Por último, para $M = 2$, obtemos

$$\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma^{\lambda\kappa}, \quad \text{onde} \quad \sigma^{\lambda\kappa} = (i/2)[\gamma^\lambda, \gamma^\kappa]. \quad (198)$$

Assim, o conjunto completo de vetores da base Γ_i será dado por

$$\{\Gamma_i\} = \{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}_\mu, \tilde{\gamma}_{\mu\nu}\}. \quad (199)$$

Definiremos então as densidades bilineares $\rho_i \equiv \bar{\psi}\Gamma_i\psi = \rho_i^*$, associadas a cada valor de M

Para $M = 4$, o bilinear associado doravante denominado por ω . Assim

$$\omega = -\bar{\psi}\gamma_5\psi. \quad (200)$$

Para $M = 3$, temos

$$K_\mu = -\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi, \quad (201)$$

e finalmente, para $M = 2$, é dado por

$$S_{\mu\nu} = \bar{\psi}\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa}\sigma^{\lambda\kappa}\psi, \quad (202)$$

ou ainda

$$S_{\mu\nu} = \bar{\psi}i\gamma_\mu\gamma_\nu\psi. \quad (203)$$

Assim sendo, mostramos como e quais as possíveis formas bilineares podem ser construídas a partir dos elementos da base da álgebra de Clifford.

5.2.2 IDENTIDADES DE FIERZ-PAULI-KOFINK

As identidades de Fierz-Pauli-Kofink (também conhecidas como identidades de Fierz ou identidades de FPK) são relações quadráticas entre os covariantes bilineares (FIERZ, 1937; PAULI, 1936; LANDAU, 1971). Uma vez que os covariantes bilineares de um determinado espinor satisfaçam tais identidades, é possível recuperar o espinor a partir dessas quantidades, a menos um fator de fase (LOUNESTO, 2001). As identidades de FPK podem ser divididas em dois blocos, o primeiro deles para o caso de espinores regulares e o segundo para espinores singulares. Para os espinores singulares faz-se necessário reescrever as identidades de Fierz em termos de uma nova estrutura, chamada de multivetor: $Z = \sigma + \omega + \mathbf{J} + i\mathbf{S} + i\mathbf{K}\gamma_{0123}$ (LOUNESTO, 2001). Dá-se o nome de espinores regulares para aqueles cujos covariantes bilineares σ ou ω são simultaneamente não nulos ou quando apenas um deles é não nulo. Como mostrado em Pauli (1936), Fierz (1937), Landau (1971), as identidades de Fierz são as seguintes

$$\begin{aligned} J_\mu J^\mu &= \sigma^2 + \omega^2, & J_\mu J^\mu &= -K_\mu K^\mu, \\ J_\mu K^\mu &= 0, & J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu &= -\omega S_{\mu\nu} - \frac{\sigma}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}S^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (204)$$

Cabe mencionar que essas não são as únicas identidades de Fierz, entretanto, são as fundamentais, pois delas são derivadas as demais.

A maior motivação de deformar os elementos da base da álgebra de Clifford para o caso de espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$, surge do fato que a estrutura dual desses espinores é bastante diferente quando comparada, por exemplo, com a estrutura dual do espinor de Dirac. Desse fato surgem imediatamente algumas questões que vão nos motivar a buscar uma resposta precisa, são elas: os autoespinores de $\mathcal{C}$ possuem as mesmas estruturas bilineares que os espinores de Dirac? Essas estruturas bilineares são reais, ou seja, representam observáveis físicos? Por acaso as estruturas bilineares de tais espinores satisfazem as identidades de Fierz?

Vamos começar respondendo a primeira questão. Considere que as estruturas bilineares associadas aos autoespinores de $\mathcal{C}$ tenham a mesma estrutura que os bilineares associados ao espinor de Dirac, ou seja

$$\rho_i \equiv \bar{\lambda}_\alpha^{S/A}(p^\mu)\Gamma_i\lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu), \quad (205)$$

com Γ_i dado em (176), que representa o conjunto de elementos da base da álgebra de Clifford real. No entanto, um problema está codificado na equação (205): alguns ρ_i não serão reais e também não serão covariantes. Para responder a segunda questão, analisaremos as estruturas construídas a partir dos elementos “primordiais” da álgebra de Clifford $\{\mathbb{1}, \gamma_\mu\}$. Para a estrutura σ que é construída a partir do elemento $\mathbb{1}$, temos que dada quantidade está associada com a norma do espinor, $\sigma = \pm 2m$, que necessariamente é um

número real e um invariante por transformações de Lorentz. O próximo passo é analisar o bilinear J_μ , construído a partir do elemento da base γ_μ , de tal modo que

$$J_\mu = \bar{\lambda}_\alpha^{S/A} (p^\mu) \gamma_\mu \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu). \quad (206)$$

A última equação acima nos fornece as seguintes quantidades (SILVA, 2016)

$$\begin{aligned} J_0 &= 0, \\ J_1 &= 2im \cos \theta \cos \phi, \\ J_2 &= 2im \cos \theta \sin \phi, \\ J_3 &= -2im \sin \theta. \end{aligned} \quad (207)$$

Note que por construção o bilinear J_μ não é real, sem embargo, é covariante por transformações de Lorentz. À vista disso, até então, a segunda questão não foi resolvida em sua totalidade, uma vez que nos resta analisar se as demais quantidades bilineares são reais. Para esta finalidade, usaremos o mesmo critério usado para definir os bilineares do espinor de Dirac, porém agora com a diferença que consideraremos ao invés do dual de Dirac o dual dos espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$. Em decorrência disso definimos as seguintes quantidades

$$\omega = - \bar{\lambda}_\alpha^{S/A} (p^\mu) i \gamma_{0123} \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \quad (208)$$

$$K_\mu = - \bar{\lambda}_\alpha^{S/A} (p^\mu) \gamma_5 \gamma_\mu \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \quad (209)$$

$$S_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\lambda}_\alpha^{S/A} (p^\mu) i \gamma_{\mu\nu} \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu). \quad (210)$$

Substituindo os espinores já definidos anteriormente, encontraremos as seguintes relações

$$\omega = 0, \quad (211)$$

$$K_0 = 0, \quad (212)$$

$$K_1 = -2m \sin \phi, \quad (213)$$

$$K_2 = 2m \cos \phi, \quad (214)$$

$$K_3 = 0, \quad (215)$$

$$S_{01} = -2im \sin \theta \cos \phi, \quad (216)$$

$$S_{02} = -2im \sin \theta \sin \phi, \quad (217)$$

$$S_{03} = -2im \cos \theta, \quad (218)$$

$$S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0. \quad (219)$$

Note que existem outras quantidades não reais. Diante de tais circunstâncias, o nosso próximo passo será verificar se as formas bilineares encontradas satisfazem as identidades

de Fierz (204). Como podemos ver, a primeira identidade se reduz a

$$J^2 = \sigma^2, \quad (220)$$

visto que $\omega = 0$. Para tanto vamos considerar os resultados obtidos anteriormente para σ e J_μ e desta forma temos

$$J^2 = 4m^2, \quad (221)$$

portanto, de (207) a identidade (220) é satisfeita. A próxima identidade a ser verificada é $J_\mu K^\mu = 0$, vamos então escrevê-las como

$$J_\mu K^\mu = J_0 K^0 + J_1 K^1 + J_2 K^2 + J_3 K^3. \quad (222)$$

Das expressões (207) e (215) temos que

$$J_\mu K^\mu = -2im^2 \cos \theta \sin 2\phi + 2im^2 \cos \theta \sin 2\phi, \quad (223)$$

e desta maneira verifica-se que

$$J_\mu K^\mu = 0. \quad (224)$$

Agora analisaremos $J_\mu J^\mu = -K_\mu K^\mu$, visto que já calculamos $J_\mu J^\mu$ vamos analisar o lado direito dessa expressão, o que nos fornece

$$K_\mu K^\mu = -4m^2 \sin^2 \phi - 4m^2 \cos^2 \phi, \quad (225)$$

reduzindo-se à

$$K_\mu K^\mu = -4m^2. \quad (226)$$

Comparando as equações (221) e (226) facilmente vemos que a relação $J_\mu J^\mu = -K_\mu K^\mu$ é satisfeita. Finalmente calcularemos a identidade $J_\mu K_\nu - K_\mu J_\nu = -\frac{\sigma}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} S^{\lambda\kappa}$. Para sumarizar, veremos apenas dois casos para mostrar que esta identidade não é totalmente satisfeita:

Primeiro caso: se $\mu = 0$ e $\nu = 1$, temos

$$J_0 K_1 - K_0 J_1 = -\frac{\sigma}{2} \epsilon_{01\lambda\kappa} S^{\lambda\kappa}. \quad (227)$$

Recorrendo aos valores calculados anteriormente para (207), (215) e (219), a equação (227) se traduz a

$$(0)(-2m \sin \phi) - (0)(2im \cos \theta \cos \phi) = -2m S^{23}, \quad (228)$$

como sabemos $S^{23} = S_{23} = 0$, de modo que a identidade anterior é satisfeita.

Segundo caso: se $\mu = 1$ e $\nu = 2$, temos

$$J_1 K_2 - K_1 J_2 = -\frac{\sigma}{2} \epsilon_{12\lambda\kappa} S^{\lambda\kappa}. \quad (229)$$

Analogamente ao primeiro caso, substituindo os valores dados em (207), (215) e (219) na expressão anterior temos

$$4im^2 \cos \theta \neq -4im^2 \cos \theta, \quad (230)$$

assim, vemos que a última identidade não é satisfeita. Por outro lado, sabemos que as identidades de Fierz são de suma importância, pois como já observado, a partir dessas estruturas é possível recuperar o espinor original em termos de seus bilineares via o algoritmo de Takahashi por exemplo (VILLALOBOS, 2017). Desta forma, precisamos redefinir as estruturas bilineares associadas aos autoespinores de $\mathcal{C}$ de tal modo que seus bilineares satisfaçam as identidades de Fierz. Para concretizar nosso objetivo, usaremos a deformação dos elementos da base da álgebra. Nesta etapa não teremos como foco que as formas bilineares associados aos citados espinores sejam mandatoriamente todas reais, isto porque a princípio já nos deparamos com o bilinear J_μ não real, por construção.

Utilizando os elementos primitivos, $\mathbb{1}$ e γ_μ , vamos buscar novos elementos da base, visto que consideraremos todas as combinações possíveis entre eles. Essas possíveis combinações são representadas pela equação (175). Como vimos, M representa o número de combinações possíveis dos elementos primitivos da base. Por tal motivo, o valor mínimo de M deve ser dois, já que é o mínimo de combinações possíveis para as matrizes γ_μ , e o limite superior é N , a dimensão do espaço-tempo, ou seja, $M = 2, \dots, N$. Com tais considerações os elementos da base são dados por (176). Conforme previamente mencionado, a deformação dos elementos da base da álgebra de Clifford é feita com o propósito de encontrarmos novas estruturas bilineares. Começaremos então mostrando que para o caso em questão existe a impossibilidade de que a quantidade J_μ seja real. Logo, impondo a condição de realidade para σ , temos

$$\begin{aligned} \sigma = \sigma^* &= \left[[\Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \gamma_0 \lambda_\alpha(p^\mu) \right]^*, \\ &= \lambda_\alpha^\dagger(p^\mu) \gamma_0 \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu), \end{aligned} \quad (231)$$

com $\Xi(p^\mu)$ definido em (89). Diante do fato que $\Xi^\dagger(p^\mu) \Xi(p^\mu) = \mathbb{1}$, tem-se

$$\sigma^* = [\Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger \Xi(p^\mu) \gamma_0 \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu). \quad (232)$$

Portanto, da imposição $\sigma = \sigma^*$ obtemos automaticamente a condição

$$\gamma_0 = \Xi(p^\mu) \gamma_0 \Xi(p^\mu), \quad (233)$$

a qual é de fato satisfeita e por tal motivo podemos afirmar que σ é real. Faremos a mesma

abordagem para o bilinear J_μ e impondo $J_\mu = J_\mu^*$, temos

$$\gamma_0 \gamma_\mu = \Xi^\dagger(p^\mu) \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 \Xi(p^\mu). \quad (234)$$

A última relação acima não é satisfeita por nenhuma das matrizes de Dirac. Diante disso, apenas confirmamos o que já havia sido encontrado na equação (207). Esse último resultado é extremamente importante para a nossa análise. Se comparamos com a relação obtida para o caso do espinor de Dirac ($\gamma_\mu = \gamma_0^{-1} \gamma_\mu^\dagger \gamma_0$), existe uma grande diferença devido o fato que os espinores em questão possuem uma estrutura dual mais complexa. *A priori* esse resultado não deve nos preocupar, uma vez que J_μ para esse caso específico não está associado com a corrente conservada.

Devemos deixar claro que qualquer alteração feita em γ_μ , de modo a tentar obter J_μ real, leva a uma mudança na relação constitutiva da álgebra de Clifford, o que, em geral, leva a inconsistências e por isso abandonaremos esse tipo de abordagem (SILVA, 2016). Vamos agora deformar a base usual para redefinir os covariantes bilineares com a intenção de que satisfaçam as identidades Fierz. Fazendo uso da equação (175) e levando em conta que a norma para os autoespinores de $\mathcal{C}$ é real, obtemos então

$$[\bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-M}} \lambda_\alpha(p^\mu)]^\dagger = (-1)^{M(M-1)/2} \bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \Xi(p^\mu) \tilde{\gamma}_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{N-M}} \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu),$$

de modo que

$$\tilde{\gamma}_{\mu_1 \dots \mu_{N-M}} = (i^{M(M-1)/2} / M!) \Xi(p^\mu) \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_N} \gamma^{\mu_{N-M+1} \dots \mu_N} \Xi(p^\mu). \quad (235)$$

Com a redefinição anterior, é possível obter um conjunto completo de elementos da base da álgebra de Clifford como em (176). Desta maneira, tal conjunto nos possibilitará encontrar os bilineares associados aos espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$. Como exemplo, consideremos o espaço-tempo de quatro dimensões. Neste caso, a base é dada por

$$M = 4 \Rightarrow \tilde{\gamma} = -i \Xi(p^\mu) \gamma_5 \Xi(p^\mu) =, -i \gamma_5 \text{ visto que } [\Xi(p^\mu), \gamma_5] = 0, \quad (236)$$

$$M = 3 \Rightarrow \tilde{\gamma}_\mu = -\Xi(p^\mu) \gamma_5 \gamma_\mu \Xi(p^\mu), \quad (237)$$

$$M = 2 \Rightarrow \tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \Xi(p^\mu) \gamma_\mu \gamma_\nu \Xi(p^\mu), \quad (238)$$

onde $\gamma_5 = -i \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$. De posse desse conjunto de elementos da base da álgebra de Clifford,

estamos aptos a construir os bilineares definidos por

$$\begin{aligned}
\mathbb{1} &\Rightarrow \sigma_E = \bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \mathbb{1} \lambda_\alpha(p^\mu), \\
\gamma_\mu &\Rightarrow J_{\mu E} = \bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \gamma_\mu \lambda_\alpha(p^\mu), \\
\tilde{\gamma} &\Rightarrow \omega_E = -i \bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \gamma_5 \lambda_\alpha(p^\mu), \\
\tilde{\gamma}_\mu &\Rightarrow K_{\mu E} = -\bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \Xi(p^\mu) \gamma_5 \gamma_\mu \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu), \\
\tilde{\gamma}_{\mu\nu} &\Rightarrow S_{\mu\nu E} = i \bar{\lambda}_\alpha(p^\mu) \Xi(p^\mu) \gamma_\mu \gamma_\nu \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha(p^\mu).
\end{aligned} \tag{239}$$

Com a construção acima, garantimos que as alterações realizadas nos bilineares sejam suficientes para que as mesmas satisfaçam as identidades Fierz (204). Desta forma, concluímos que as quantidades σ e K_μ são as únicas quantidades reais não nulas.

5.3 COVARIÂNCIA DAS ESTRUTURAS BILINEARES PARA $\lambda_\alpha(p^\mu)$

Tendo em vista que no capítulo anterior nós analisamos a covariância do vínculo algébrico (154), e, conseqüentemente, definimos a transformação do operador $\Xi(p^\mu)$ (vide relação (162)) vamos abordar a covariância dos bilineares encontrados por transformações de Lorentz. Começaremos analisando σ ,

$$\begin{aligned}
\sigma'_E &= \bar{\lambda}_\alpha^{S/A}(p'^\mu) \lambda_\alpha^{S/A}(p'^\mu) \\
&= \lambda_\alpha^{\dagger S/A}(p^\mu) S^\dagger(\Lambda) S^{-1\dagger}(\Lambda) \Xi^\dagger(p^\mu) \gamma_0 \gamma_0 S^\dagger(\Lambda) \gamma_0 S(\Lambda) \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) \\
&= \lambda_\alpha^{\dagger S/A}(p^\mu) \Xi^\dagger(p^\mu) \gamma_0 S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu), \\
&= \bar{\lambda}_\alpha^{S/A}(p^\mu) \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu), \\
&= \sigma_E,
\end{aligned}$$

evidenciando que σ é um escalar. Repetindo o mesmo procedimento para J^μ temos

$$\begin{aligned}
J'_{\mu E} &= \bar{\lambda}_\alpha^{S/A}(p^\mu) S^{-1}(\Lambda) \Lambda_\mu^\beta S(\Lambda) \gamma_\beta S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu), \\
&= \Lambda_\mu^\beta \bar{\lambda}_\alpha^{S/A}(p^\mu) \gamma_\beta \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu), \\
&= \Lambda_\mu^\beta J_{\beta E},
\end{aligned}$$

fazendo uso de (161). A presença do termo Λ_μ^β nos revela que $J_{\mu E}$ se transforma como um vetor. Para a quantidade ω_E , temos

$$\begin{aligned}\omega'_E &= -i \lambda_\alpha^{-S/A} (p'^\mu) \gamma_5 \lambda_\alpha^{S/A} (p'^\mu), \\ &= -i \lambda_\alpha^{-S/A} (p^\mu) \underbrace{S^{-1}(\Lambda) \gamma_5 S(\Lambda)}_{\det(\Lambda) \gamma_5} \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \\ &= -i \det(\Lambda) \lambda_\alpha^{-S/A} (p^\mu) \gamma_5 \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \\ &= \det(\Lambda) \omega_E.\end{aligned}$$

Note que ω_E se transforma de fato como um (pseudo) escalar. De modo análogo a análise de $K_{\mu E}$ nos conduz à

$$K'_{\mu E} = \lambda_\alpha^{-S/A} (p'^\mu) \Xi'(p'^\mu) \gamma_5 \gamma'_\nu \Xi'(p'^\mu) \lambda_\alpha^{S/A} (p'^\mu). \quad (240)$$

Utilizando as relações (161) e (162) na expressão anterior, pode-se escrever

$$\begin{aligned}K'_{\mu E} &= -\lambda_\alpha^{-S/A} (p^\mu) S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \Xi(p^\mu) \det(\Lambda) \gamma_5 \Lambda_\mu^\beta \gamma_\beta S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \Xi(p^\mu) S^{-1}(\Lambda) S(\Lambda) \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \\ &= -\det(\Lambda) \Lambda_\mu^\beta \lambda_\alpha^{-S/A} (p^\mu) \Xi(p^\mu) \gamma_5 \gamma_\beta \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \\ &= \det(\Lambda) \Lambda_\mu^\beta K_{\beta E},\end{aligned}$$

de modo que verificamos que $K_{\mu E}$ se transforma como um (pseudo) vetor. Finalmente, para $S_{\mu\nu E}$ teremos

$$S'_{\mu\nu E} = \frac{i}{2} \lambda_\alpha^{-S/A} (p'^\mu) \Xi'(p'^\mu) \gamma'_\mu \gamma'_\nu \Xi'(p'^\mu) \lambda_\alpha^{S/A} (p'^\mu),$$

novamente, usando as relações (161) e (162), a equação anterior fica

$$\begin{aligned}S'_{\mu\nu E} &= \frac{i}{2} \Lambda_\mu^\beta \Lambda_\nu^\rho \lambda_\alpha^{-S/A} (p^\mu) \Xi(p^\mu) \gamma_\beta \gamma_\alpha \Xi(p^\mu) \lambda_\alpha^{S/A} (p^\mu), \\ &= \Lambda_\mu^\beta \Lambda_\nu^\rho S_{\beta\rho E}.\end{aligned}$$

Portanto, $S_{\mu\nu E}$ se transforma como um bivector. Como podemos ver, a nomenclatura que adotamos para definir a transformação dos bilineares é, ainda, a mais adequada. Como já demonstrado anteriormente, existe uma possibilidade de se redefinir a estrutura dual, para que assim a invariância das somas de spin por transformações de Lorentz seja garantida (ROGERIO R. J. B E DA SILVA, 2017; AHLUWALIA, 2017b). Com essa nova formulação, um grande cuidado foi tomado de maneira a não prejudicar o bilinear σ , i. e., exigido-se

que os espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$ fossem autoespinores do operador² $\mathcal{O}$. Buscaremos a relação entre $\mathcal{O}$ e $S(\Lambda)$ de maneira a assegurar a covariância relativística de (154), portanto,

$$\left[i\gamma^\mu \Lambda_\beta^\mu \partial'^\beta \Xi(p^\mu) \pm m(S(\Lambda)\mathcal{O})^{-1}\mathcal{O}' \right] \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) = 0, \quad (241)$$

podendo ser reescrita como

$$\left[i\gamma'_\beta \partial'^\beta S(\Lambda)\Xi(p^\mu)\mathcal{O}^{-1}S^{-1}(\Lambda)\mathcal{O}' \pm mS(\Lambda)(S(\Lambda)\mathcal{O})^{-1}\mathcal{O}' \right] \lambda_\alpha^{S/A}(p^\mu) = 0. \quad (242)$$

Imediatamente é assegurado

$$S(\Lambda)\mathcal{O}^{-1}S^{-1}(\Lambda)\mathcal{O}' = 1, \quad (243)$$

$$\Xi'(p^\mu) = S(\Lambda)\Xi(p^\mu)(S(\Lambda)\mathcal{O})^{-1}\mathcal{O}'. \quad (244)$$

Da relação dada em (243) podemos ver que o novo operador deve se transformar de acordo com $\mathcal{O}' = S(\Lambda)\mathcal{O}S^{-1}(\Lambda)$, que é a mesma relação de transformação vista em (162) para o operador $\Xi(p^\mu)$. Consequentemente a covariância da equação (154) para os espinores com a nova estrutura dual é também garantida. Toda a análise covariante das quantidades bilineares correspondentes, então, segue imediatamente levando essencialmente aos mesmos resultados já conhecidos (SILVA, 2016). Uma análise semelhante das estruturas bilineares, entretanto, sob a ótica dos subgrupos de Lorentz (VSR) é realizada com mais detalhes no apêndice C.

²Aqui trabalharemos em abstrato chamando os operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$ apenas com a intenção de tornar a notação simples.

6 INTERPRETAÇÃO DE PARTÍCULA: NOVO CAMPO QUÂNTICO, PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON, DENSIDADE LAGRANGIANA E ENERGIA DO PONTO ZERO

O presente capítulo abordará em detalhes a construção dos operadores de campo quântico onde os autoespinores do operador conjugação de carga servirão como coeficientes de expansão. Tal tarefa será realizada através da análise da Hamiltoniana ($\mathcal{H}$), após o que mostraremos a construção do propagador de Feynman-Dyson. Mostraremos que tipo de relação deve existir entre os operadores de criação e aniquilação de partículas de maneira a garantir que a energia seja positivo definida. Como visto nas seções anteriores, a dinâmica de tais campos é a dinâmica de Klein-Gordon e desta forma a lagrangiana que dá origem à equação de movimento do campo é a lagrangiana do campo escalar. Tal motivo implicará no fato de que esses espinores sejam dotados de dimensão de massa um, diferente da dimensão 3/2 esperada para um campo espinorial de Dirac.

6.1 ESTABELECENDO A ENERGIA DO VÁCUO E AS ESTATÍSTICAS FERMIÔNICAS

Usaremos os campos $\lambda_\alpha(p^\mu)$ como coeficientes de expansão para definir o campo quântico em sua forma mais geral, em conformidade com o que fora apresentado em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), Rogerio (2014), temos então

$$\mathfrak{f}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \sum_\alpha \left[c_\alpha(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) e^{ip_\mu x^\mu} \right], \quad (245)$$

onde $a(p^\mu) \in \mathbb{R}$ e será determinada posteriormente. Vamos estabelecer qual é o tipo de relação (comutação ou anticomutação) que deve existir entre os operadores de criação e aniquilação, $c_\beta^\dagger$ e c_β respectivamente. Como mostrado anteriormente os espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$ obedecem a equação de Klein-Gordon, dada em (158), desta maneira, o operador que aniquila o campo quântico deve ser simplesmente (AHLUWALIA D. V.; LEE, 2010)

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \mathfrak{f}(x) = 0, \quad (246)$$

portanto, a lagrangiana que dá origem a equação de movimento deve ser coerentemente dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \bar{\mathbf{f}}(x) \partial^\mu \mathbf{f}(x) - m^2 \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x). \quad (247)$$

A densidade de momento $\mathbf{p}(x)$ associada é

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{f}}(x)} \\ &= \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(x)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (248)$$

analogamente a densidade de momento conjugado é tida como

$$\bar{\mathbf{p}}(x) = \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial t}. \quad (249)$$

Para o caso dos espinores de Dirac, tal quantidade acima seria nula, entretanto, para esse caso em questão $\bar{\mathbf{p}}(x)$ é diferente de zero. Escreveremos então a densidade Hamiltoniana em termos das densidades de momento da seguinte maneira

$$\mathcal{H} = \mathbf{p}(x) \frac{\partial \mathbf{f}(x)}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}(x)}{\partial t} \bar{\mathbf{p}}(x) - \mathcal{L}. \quad (250)$$

Estabeleceremos as relações entre os operadores c_α e $c_\alpha^\dagger$ quando integrarmos a densidade Hamiltoniana em todo espaço e exigirmos que a energia do sistema seja positivo definida (ROGERIO, 2014)

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H} \\ &= \int d^3x \left[\partial_0 \bar{\mathbf{f}}(x) \partial^0 \mathbf{f}(x) - \partial_i \bar{\mathbf{f}}(x) \partial^i \mathbf{f}(x) + m^2 \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x) \right]. \end{aligned} \quad (251)$$

Substituindo $\bar{f}(x)$ e $f(x)$ em (251) garantimos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
H = \int d^3x \sum_{\alpha\alpha'} \int \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{a(p'^\mu)}{2E(\mathbf{p}')} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a(p^\mu)}{2E(\mathbf{p})} \\
\times \left(\left[(c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p})(ip^0)e^{ip_\mu x^\mu} + c_\alpha(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p})(-ip^0)e^{-ip_\mu x^\mu}) \right. \right. \\
\times (c_{\alpha'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^S(\mathbf{p}')(-ip'^0)e^{-ip'_\mu x^\mu} + c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}')(+ip'^0)e^{+ip'_\mu x^\mu}) \Big] \\
+ \left[(c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p})(i\mathbf{p})e^{+ip_\mu x^\mu} + c_\alpha(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p})(-i\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}) \right. \\
\times (c_{\alpha'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^S(\mathbf{p}')(-i\mathbf{p}')e^{-ip'_\mu x^\mu} + c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}')(+i\mathbf{p}')e^{+ip'_\mu x^\mu}) \Big] \\
+ m^2 \left[(c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p})e^{+ip_\mu x^\mu} + c_\alpha(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p})e^{-ip_\mu x^\mu}) \right. \\
\times (c_{\alpha'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^S(\mathbf{p}')e^{-ip'_\mu x^\mu} + c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}')e^{+ip'_\mu x^\mu}) \Big] \Big).
\end{aligned}$$

Integrando-se no espaço a equação acima obteremos $(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$, e, por conseguinte

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{a^2(p^\mu)}{4E^2(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} \left[(p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2)(c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})c_\alpha(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p})\lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) + c_\alpha(\mathbf{p})c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p})\lambda_\alpha^A(\mathbf{p})) \right].$$

Recorrendo às relações de ortonormalidade (103) e (104), têm-se

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{2ma^2(p^\mu)}{4E^2(\mathbf{p})} \sum_{\alpha} \left[(p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2)(c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})c_\alpha(\mathbf{p}) - c_\alpha(\mathbf{p})c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})) \right]. \quad (252)$$

Note que $p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 = 2E^2(\mathbf{p})$ e, assim, somos levados a escrever

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} ma^2(p^\mu) \sum_{\alpha} \left[c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})c_\alpha(\mathbf{p}) - c_\alpha(\mathbf{p})c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \right]. \quad (253)$$

Evidentemente, pela análise de (253), percebemos que se impusermos a relação de comutação entre os operadores $c_\alpha(\mathbf{p})$ e $c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})$ a Hamiltoniana (253) nos fornecerá uma energia que irá evanescer. Dadas as circunstâncias, a relação a ser fixada deve ser a relação fermiônica de anticomutação, ou seja (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005; ROGERIO, 2014)

$$\{c_\alpha(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = b(p^\mu)(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'}, \quad (254)$$

sendo o parâmetro $b(p^\mu) \in \mathbb{R}$ um parâmetro arbitrário a ser posteriormente determinado ao longo da interpretação física de H . Ademais, podemos escrever a seguinte relação

$$c_\alpha(\mathbf{p})c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}') = b(p^\mu)(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'} - c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}')c_\alpha(\mathbf{p}) \quad (255)$$

introduzindo (255) em (253), temos

$$H = -\delta^3(\mathbf{0}) \int d^3p a^2(p^\mu) m b(p^\mu) \sum_\alpha 2E(\mathbf{p})\delta_{\alpha\alpha'} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} a^2(p^\mu) m \sum_\alpha 2c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})c_\alpha(\mathbf{p}).$$

De forma a garantir que a Hamiltoniana acima seja consistente com a dos campos fermiônicos, vamos impor que as quantidades $a(p^\mu)$ e $b(p^\mu)$ sejam fixadas como

$$a(p^\mu) = \sqrt{\frac{2E(\mathbf{p})}{m}}, \quad b(p^\mu) = \frac{1}{2E(\mathbf{p})}. \quad (256)$$

Consequentemente temos

$$H = -\delta^3(\mathbf{0}) \int d^3p \sum_\alpha 2E(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2E(\mathbf{p}) \sum_\alpha 2c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})c_\alpha(\mathbf{p}). \quad (257)$$

Sabendo que o funcional $\delta^3(\mathbf{0})$ pode ser escrito como

$$\delta^3(\mathbf{0}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x, \quad (258)$$

então o primeiro termo de (257) fica

$$H_0 = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \sum_\alpha 2E(\mathbf{p}), \quad (259)$$

daí, finalmente vemos que a Hamiltoniana para os autoespinores do operador conjugação de carga é dada por

$$H = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3x \int d^3p \sum_\alpha 2E(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2E(\mathbf{p}) \sum_\alpha 2c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})c_\alpha(\mathbf{p}). \quad (260)$$

A título de comparação, a Hamiltoniana usual para o campo de Dirac é dada por (ZEE, 2010)

$$H = -\delta(\mathbf{0}) \int d^3p \sum_s E(\mathbf{p}) + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E(\mathbf{p}) \sum_s 2b_s^\dagger(\mathbf{p})b_s(\mathbf{p}). \quad (261)$$

Note que podemos inferir que cada uma das helicidades, $\alpha = \{+, -\}$ e $\alpha = \{-, +\}$, dos espinores autoconjugados e anti autoconjugados, presente em (260), contribuem com uma energia de $\frac{1}{2}E(\mathbf{p})$. Tais contribuições, por sua vez, totalizam $2E(\mathbf{p})$, contrastando com o caso de Dirac que possui helicidade única e onde a energia é $E(\mathbf{p})$, ou seja, metade

do que obtemos para os espinores $\lambda_\alpha(p^\mu)$. O termo H_0 na equação (260) é análogo à energia de ponto zero, ou energia mínima, de um oscilador harmônico simples dada por $(1/2)\hbar\omega$, porém com um sinal negativo assim como no caso de Dirac. Então cada partícula contribui com $(-1/2)\hbar\omega$ para a energia do vácuo (ROGERIO, 2014). Lembremos, de passagem, que para o campo escalar as contribuições são de $(1/2)\hbar\omega$. Posto isto, após alguns cálculos, chegamos a conclusão que as relações entre os operadores $c_\alpha(\mathbf{p})$ e $c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})$ devem ser (AHLUWALIA, 2017b)

$$\{c_\alpha(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (262)$$

$$\{c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')\} = \{c_\alpha(\mathbf{p}), c_{\alpha'}(\mathbf{p}')\} = 0, \quad (263)$$

de modo que os operadores de campo quântico $\hat{\mathbf{f}}(x)$ e $\bar{\hat{\mathbf{f}}}(x)$ são dados por ¹

$$\hat{\mathbf{f}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \sum_\alpha \left[c_\alpha(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} + c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} \right], \quad (264)$$

$$\bar{\hat{\mathbf{f}}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \sum_\alpha \left[c_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu x^\mu} + c_\alpha(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu} \right]. \quad (265)$$

Assim, mostramos detalhadamente a construção dos operadores de campo quântico, os quais foram obtidos através da análise da Hamiltoniana, uma vez que exigimos que a energia de ponto zero fosse positivo definida e, conseqüentemente, estabelecemos as relações fermiônicas de anticomutação para os operadores de criação e aniquilação de partículas.

6.2 O PROPAGADOR DE FEYNMAN-DYSON

Como demonstrado em Peskin (2018), o propagador de um campo está essencialmente atrelado à relação

$$\langle 0 | [\hat{\mathbf{f}}(x'), \bar{\hat{\mathbf{f}}}(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\mathbf{f}}(x') \bar{\hat{\mathbf{f}}}(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\hat{\mathbf{f}}}(x) \hat{\mathbf{f}}(x') | 0 \rangle, \quad (266)$$

onde $|0\rangle$ é um estado que representa o vácuo físico e cada uma das parcelas contidas em (266) se referem a amplitude de propagação das partículas. A primeira parcela do comutador está associada a uma partícula autoconjugada que possui energia positiva e propaga de um dado ponto x até x' ao passo que a segunda parcela refere-se à antipartícula. De posse da equação (266) podemos escrever então a amplitude de propagação $\mathcal{Q}(x' - x)$,

¹Ressaltamos que o termo $\frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}}$ que aparece na integral do operador de campo é de extrema importância, pois é responsável por manter o elemento de volume invariante por transformações de Lorentz, como no caso dos campos bosônicos e fermiônicos usuais, porém para este caso aparece um termo de massa.

e, deste modo, temos

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \left(\langle 0 | \mathbf{f}(x') \bar{\mathbf{f}}(x) | 0 \rangle - \langle 0 | \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x') | 0 \rangle \right), \quad (267)$$

onde ϑ é um fator que será fixado no momento em que impusermos que a integração de $\mathcal{Q}(x' - x)$ em todo espaço-tempo deve nos assegurar o valor igual a 1. Tal fato, irá nos assegurar que podemos encontrar a amplitude de propagação dessa partícula em algum lugar do universo e, portanto, $|\mathcal{Q}(x' - x)|^2$ está relacionado com a probabilidade de encontrá-la. A propagação de uma partícula autoconjugada, como no caso de Dirac, é um processo onde uma partícula é criada a partir do vácuo em um ponto arbitrário x e a mesma se propaga até um outro ponto arbitrário x' , onde é então absorvida pelo vácuo. Devemos frisar que uma partícula não pode ser destruída antes mesmo de ser criada, uma vez que isso aconteça o ordenamento temporal dos eventos estará sendo violado (violação da causalidade).

Visto que as amplitudes de propagação fermiônicas são antissimétricas pela troca $x \rightarrow x'$, escreveremos a amplitude para o processo como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \langle 0 | \mathbf{f}(x') \bar{\mathbf{f}}(x) | 0 \rangle \theta(x'^0 - x^0) - \vartheta \langle 0 | \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x') | 0 \rangle \theta(x^0 - x'^0), \quad (268)$$

onde as funções $\theta(x'^0 - x^0)$ e $\theta(x^0 - x'^0)$ são as distribuições de Heaviside. Tais distribuições exigem que $x'^0 > x^0$ e $x^0 < x'^0$ respectivamente. De uma maneira mais compacta a equação (268) pode ser escrita como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | [\mathbf{f}(x'), \bar{\mathbf{f}}(x)] | 0 \rangle. \quad (269)$$

Usando o operador de ordenamento temporal, $\mathcal{T}$, podemos escrever a equação (268) como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \langle 0 | \mathcal{T} \mathbf{f}(x') \bar{\mathbf{f}}(x) | 0 \rangle, \quad (270)$$

onde o operador $\mathcal{T}$ requer que os operadores de campo sejam colocados em ordem temporal, assim, aquele que possui maior x^0 fica à esquerda. Calcularemos então $\mathcal{Q}(x' - x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(x' - x) &= \left\langle \left| \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3 \sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \right. \right. \\ &\times \sum_{\alpha} \sum_{\alpha'} \left[c_{\alpha'}(\mathbf{p}') \lambda_{\alpha'}^S(\mathbf{p}') e^{-ip'_{\mu} x'^{\mu}} + c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}') \lambda_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') e^{+ip'_{\mu} x'^{\mu}} \right] \\ &\times \left[c_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}) e^{+ip_{\mu} x^{\mu}} + c_{\alpha}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu} x^{\mu}} \right] \left. \right\rangle \theta(x'^0 - x^0). \quad (271) \end{aligned}$$

De posse das relações encontradas para os operadores $c_{\alpha}(\mathbf{p})$ e $c_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p})$ contidas na equação

(262), obtemos

$$\langle 0|c_\alpha(\mathbf{p})c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle + \underbrace{\langle 0|c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')c_\alpha(\mathbf{p})|0\rangle}_{=0} = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'}\langle 0|0\rangle, \quad (272)$$

O estado normalizado fica sendo $\langle 0|0\rangle = 1$, restando apenas

$$\langle 0|c_\alpha(\mathbf{p})c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')|0\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (273)$$

Posto isto, podemos escrever $\langle 0|\mathcal{T}\mathcal{F}(x')\bar{\mathcal{F}}(x)|0\rangle$ como

$$\mathcal{Q}(x'-x) = \vartheta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2mE(\mathbf{p})} \sum_\alpha \left[\begin{aligned} &\lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu(x'^\mu-x^\mu)} \theta(x'^0-x^0) \\ &- \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(\mathbf{p}) e^{+ip_\mu(x'^\mu-x^\mu)} \theta(x^0-x'^0) \end{aligned} \right], \quad (274)$$

assim, agora recorrendo às somas de spin que já definimos anteriormente e que estão bem estabelecidas no limite de $\tau \rightarrow 1$, estamos aptos a escrever

$$\mathcal{Q}(x'-x) = \vartheta \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[\begin{aligned} &e^{-ip_\mu(x'^\mu-x^\mu)} \theta(x'^0-x^0) \\ &+ e^{+ip_\mu(x'^\mu-x^\mu)} \theta(x^0-x'^0) \end{aligned} \right] \mathbb{1}. \quad (275)$$

Agora utilizando as funções de Heaviside na forma integral, dadas por

$$\theta(x'^0-x^0) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(x'^0-x^0)}}{\omega}, \quad (276)$$

$$\theta(x^0-x'^0) = \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{i\omega(x^0-x'^0)}}{\omega}, \quad (277)$$

e inserindo-as em (275), têm-se

$$\mathcal{Q}(x'-x) = \vartheta \int \frac{d\omega}{2\pi i} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[\begin{aligned} &e^{-iE(\mathbf{p})(x'^0-x^0)+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \frac{e^{i\omega(x'^0-x^0)}}{\omega} \\ &+ e^{+iE(\mathbf{p})(x'^0-x^0)+i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}'-\mathbf{x})} \frac{e^{i\omega(x^0-x'^0)}}{\omega} \end{aligned} \right], \quad (278)$$

reagrupando alguns termos, a última equação acima pode ser escrita como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d\omega}{2\pi i} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \left[\frac{1}{\omega} \left(e^{i(\omega - E(\mathbf{p}))(x'^0 - x^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} + e^{-i(\omega - E(\mathbf{p}))(x'^0 - x^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \right) \right]. \quad (279)$$

Agora, faremos a seguinte mudança de variáveis: para o primeiro termo da integral $\omega \rightarrow p_0 = -(\omega - E(\mathbf{p}))$ e para o segundo termo da integral $\omega \rightarrow p_0 = \omega - E(\mathbf{p})$, assim, ficamos com

$$\mathcal{Q}(x' - x) = \vartheta \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E(\mathbf{p})} \int \frac{dp^0}{2\pi i} e^{-ip_0(x'^0 - x^0)} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x})} \times \left[\frac{1}{E(\mathbf{p}) - p_0} + \frac{1}{E(\mathbf{p}) + p_0} \right]. \quad (280)$$

Analisando apenas a integral em p^0 , no plano complexo, temos pólos localizados em $p_0 = \pm E(\mathbf{p})$, desta forma, faremos uso do teorema dos resíduos para calculá-la, o mesmo raciocínio foi utilizado em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), Peskin (2018). Logo,

$$E(\mathbf{p}) = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

ou ainda

$$p_0 = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},$$

e os dois termos entre colchetes na equação (280) podem ser reescritos como

$$\begin{aligned} \frac{1}{E(\mathbf{p}) - p_0} + \frac{1}{E(\mathbf{p}) + p_0} &= \frac{-2E(\mathbf{p})}{p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2} \\ &= \frac{-2E(\mathbf{p})}{p_\mu p^\mu - m^2}. \end{aligned} \quad (281)$$

Substituindo a relação (281) na equação (280), obtemos²

$$\mathcal{Q}(x' - x) = i\vartheta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (282)$$

o fator $i\epsilon$ contido na última expressão acima apenas desloca os pólos, $p_0 = \pm(E(\mathbf{p}) - i\epsilon)$, de uma quantidade ϵ acima ou abaixo do eixo real.

²Enfatizamos que se trabalhássemos com a primeira formulação dos Elkos, cujas simetrias relativistas são regidas pelos subgrupos $SIM(2)$ ou $HOM(2)$ de Lorentz, o equivalente da amplitude de propagação seria (usando as estruturas duais que nos fornecem as somas de spin (110) e (111))

$$\mathcal{Q}(x' - x) = i\vartheta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right],$$

a qual carregaria consigo termo de quebra de Lorentz $G(\phi)$.

O próximo passo é encontrar o valor de ϑ . Para tanto, integraremos a equação (282) em todo o espaço e vamos impor que o valor dessa integração seja igual a 1. Definindo $\mathcal{X}^\mu \equiv (x'^\mu - x^\mu)$, temos então

$$\underbrace{\int d\mathcal{X}^\mu \mathcal{Q}(x' - x)}_1 = i\vartheta \int \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d\mathcal{X}^\mu e^{-ip_\mu \mathcal{X}^\mu} \left[\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (283)$$

desta forma temos

$$i\vartheta \int \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} d\mathcal{X}^\mu e^{-ip_\mu \mathcal{X}^\mu} \left[\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right] = 1, \quad (284)$$

e, portanto,

$$i\vartheta \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \delta^4(p^\mu) \left[\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right] = 1, \quad (285)$$

fornecendo

$$\frac{i\vartheta}{-m^2 + i\epsilon} = 1. \quad (286)$$

De modo que no limite em que $\epsilon \rightarrow 0$, podemos estabelecer

$$\vartheta = im^2. \quad (287)$$

Com o fator ϑ fixado, escrevemos (282) como

$$\mathcal{Q}(x' - x) = -m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu (x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{1}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (288)$$

como discutido na maioria dos livros texto, sabemos que o propagador de um campo quântico é uma função de Green. Sendo assim, o propagador deve obedecer a equação de onda da seguinte maneira

$$(\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2) \mathcal{Q}(x' - x) \mathbb{1} \propto \delta^4(x' - x) \mathbb{1}, \quad (289)$$

ademais, podemos atuar com o operador $(\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2)$ em $\mathcal{Q}(x' - x)$ e verificar se (288) obedece a relação (289), logo

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu'} \partial^{\mu'} + m^2) \mathcal{Q}(x' - x) \mathbb{1} &= \partial_{\mu'} \partial^{\mu'} \{ \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | [\mathbb{F}(x'), \bar{\mathbb{F}}(x)] | 0 \rangle \} \\ &+ m^2 \{ \theta(x'^0 - x^0) \langle 0 | [\mathbb{F}(x'), \bar{\mathbb{F}}(x)] | 0 \rangle \}. \end{aligned} \quad (290)$$

Como $\theta(x'^0 - x^0)$ é uma função que depende exclusivamente do tempo, as únicas derivadas

não nulas são $\partial_{0'}$ e $\partial^{0'}$, e portanto

$$\begin{aligned} (\partial_{\mu'}\partial^{\mu'} + m^2)\mathcal{Q}(x' - x) &= \partial_{0'}\partial^{0'}[\theta(x'^0 - x^0)]\langle 0 | [\mathbf{f}(x'), \bar{\mathbf{f}}(x)] | 0 \rangle \\ &+ 2\partial_{0'}[\theta(x'^0 - x^0)]\partial^{0'}\langle 0 | [\mathbf{f}(x'), \bar{\mathbf{f}}(x)] | 0 \rangle + \theta(x'^0 - x^0)(\partial^2 + m^2)\langle 0 | [\mathbf{f}(x'), \bar{\mathbf{f}}(x)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (291)$$

Consequentemente a última equação acima nos fornece

$$(\partial^2 + m^2)\mathcal{Q}(x' - x) = -i\delta^4(x' - x). \quad (292)$$

Finalmente, vamos calcular o propagador de uma maneira simples, utilizaremos para esta finalidade a transformada de Fourier, ou seja, escrevendo

$$\mathcal{Q}(x' - x) = -m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \tilde{\mathcal{Q}}(p). \quad (293)$$

Substituindo a equação (293) em (292) temos que encontrar a função $\tilde{\mathcal{Q}}(p)$ que dá origem a $\mathcal{Q}(x' - x)$. Prosseguindo com este raciocínio obteremos a seguinte quantidade

$$-m^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\partial_{\mu'}\partial^{\mu'} + m^2) e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \tilde{\mathcal{Q}}(p) = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)}, \quad (294)$$

a equação (294) é, de fato, idêntica à equação (292), porém está na forma integral. Posto isto, (294) nos fornece como resultado

$$\tilde{\mathcal{Q}}(p) = \frac{-1}{m^2(p^2 - m^2)}. \quad (295)$$

Substituindo na equação (293) o último resultado obtido, temos o propagador para os espinores em questão

$$\mathcal{S}(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (296)$$

que satisfaz a relação

$$(\partial_{\mu'}\partial^{\mu'} + m^2)\mathcal{S}(x' - x)\mathbb{1} = -\delta^4(x' - x). \quad (297)$$

Ao passo que o propagador de Dirac é escrito como

$$\mathcal{S}^{DIRAC}(x' - x) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip_\mu(x'^\mu - x^\mu)} \left[\frac{\gamma^\mu p_\mu + m\mathbb{1}}{p_\mu p^\mu - m^2 + i\epsilon} \right], \quad (298)$$

onde é perceptível a presença do operador de onda no âmago de tal estrutura.

O propagador encontrado em (296) é idêntico ao propagador do campo escalar de

Klein-Gordon. Como já vimos anteriormente os autoespinores de $\mathcal{C}$ satisfazem única e exclusivamente a equação de Klein-Gordon, dada por (158). Neste capítulo construímos o propagador para tais campos partindo da lagrangiana clássica, a qual sabemos que é válida para este caso, e a partir dela estabelecemos a energia associada ao sistema. Assim, estabelecemos quais deveriam ser as relações existentes entre operadores de criação e aniquilação de partículas a fim de manter a energia positivo definida.

No modelo padrão da física de partículas, todos espinores considerados são Dirac, Weyl e Majorana, tais espinores obedecem uma equação dinâmica de primeira ordem. Esta característica implica um propagador quântico que, para grandes momentos, seja proporcional à p^{-1} . Esse comportamento assintótico do propagador resulta, entre outras coisas, no fato de que a dimensão de massa deve ser $3/2$. Agora, a única equação de onda para os autoespinores de $\mathcal{C}$ é a equação de Klein-Gordon, uma equação de campo com derivadas de segunda ordem. Neste caso, para um grande momento, o propagador quântico é proporcional à $1/p^2$, contradizendo o caso anterior. Assim, somos levados a concluir que a dimensão de massa dos autoespinores de $\mathcal{C}$ é um ao invés de $3/2$, como seria normalmente esperado para um campo fermiônico (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016).

6.3 ESTRUTURA DE LOCALIDADE DOS NOVOS CAMPOS

Esta seção está reservada para uma discussão a respeito da estrutura de localidade do campo quântico associado aos autoespinores de $\mathcal{C}$ através da análise dos quatro anti-comutadores fundamentais. Ademais, mostraremos como as relações ficam tanto para a formulação onde leva-se em conta a estrutura dual antiga quanto para a nova estrutura dual redefinida, e analisaremos que consequências estão atreladas a isso. As relações fermiônicas de anticomutação entre os operadores de campo, $\mathbf{f}(x)$, e densidade de momento, $\mathbf{p}(x)$, serão construídas com a finalidade de extrairmos informações físicas relevantes a respeito da estrutura de localidade de tais campos.

Dos livros texto sabemos que as relações fermiônicas usuais entre os operadores de campo quântico $\mathbf{f}(x)$ e $\mathbf{p}(x)$ devem ser³

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \mathbb{1}, \quad (299)$$

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}', t)\} = 0, \quad (300)$$

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}', t)\} = 0, \quad (301)$$

$$\{\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} = 0. \quad (302)$$

Tais relações acima devem ser satisfeitas por todo campo quântico local e invariante por transformações de Lorentz. Dito isto, vamos calcular esses quatro correlatores para o caso

³Enfatizamos ao leitor que tais relações serão sempre tomadas a tempos iguais.

em questão e verificar se esses campos satisfazem tais relações. Começaremos analisando o seguinte correlator a tempos iguais

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}', t)\}, \quad (303)$$

que escrito em termos dos operadores de campo (264) e (265), traduz-se em

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \times \\ &\quad \sum_{\alpha\alpha'} \left[\left[c_{\alpha}(\mathbf{p}) \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \right. \\ &\quad \times \left[c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}') (iE(\mathbf{p}')) \bar{\lambda}_{\alpha'}^S(\mathbf{p}') e^{ip'_{\mu}x'^{\mu}} + c_{\alpha'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') (-iE(\mathbf{p}')) e^{-ip'_{\mu}x'^{\mu}} \right] \\ &\quad + \left[c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}') (iE(\mathbf{p}')) \bar{\lambda}_{\alpha'}^S(\mathbf{p}') e^{ip'_{\mu}x'^{\mu}} + c_{\alpha'}(\mathbf{p}') \bar{\lambda}_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') (-iE(\mathbf{p}')) e^{-ip'_{\mu}x'^{\mu}} \right] \\ &\quad \left. \times \left[c_{\alpha}(\mathbf{p}) \lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) e^{-ip_{\mu}x^{\mu}} + c_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) e^{ip_{\mu}x^{\mu}} \right] \right]. \quad (304) \end{aligned}$$

Com as relações (262) e (263) em mãos obtemos

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \times \\ &\quad \sum_{\alpha\alpha'} iE(\mathbf{p}') \left[\lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}') \{c_{\alpha}(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^{\dagger}(\mathbf{p}')\} e^{-ip_{\mu}x^{\mu} + ip'_{\mu}x'^{\mu}} \right] \\ &\quad - \left[\lambda_{\alpha}^A(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(\mathbf{p}') \{c_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{p}), c_{\alpha'}(\mathbf{p}')\} e^{ip_{\mu}x^{\mu} - ip'_{\mu}x'^{\mu}} \right]. \quad (305) \end{aligned}$$

Integrando a equação (305) em $\mathbf{p}'$, e, posteriormente, no segundo termo da integral fazendo a mudança de variáveis $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, podemos escrever

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \mathbf{p}(\mathbf{x}', t)\} = \frac{i}{2m} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \sum_{\alpha} \left[\lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p}) - \lambda_{\alpha}^A(-\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(-\mathbf{p}) \right]. \quad (306)$$

Ademais, recorrendo às somas de spin (136) e (137), finalmente podemos escrever⁴

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \mathbf{p}(\mathbf{x}',t)\} = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \mathbb{1}. \quad (308)$$

e assim

$$i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \mathbb{1}. \quad (309)$$

Finalmente concluímos que

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \mathbf{p}(\mathbf{x}',t)\} = i\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \mathbb{1}. \quad (310)$$

Destarte, usando a nova redefinição da estrutura dual, mostra-se que, diferentemente do que foi anteriormente apresentado na literatura, ao se calcular o primeiro correlator quântico o termo de quebra de simetria de Lorentz não se faz presente, conseqüentemente, a relação (299) é satisfeita. Logo podemos então afirmar que tal feito nos leva a uma teoria local.

Calcularemos os próximos correlatores de maneira análoga ao que foi feito para o caso anterior. Neste momento vamos determinar o anticomutador entre $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ e $\bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}',t)$. Para isto usaremos algumas identidades já encontradas anteriormente, seguindo com os cálculos podemos escrever para este caso

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}',t)\} = \frac{1}{2m} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 E(\mathbf{p})} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \sum_{\alpha} \left[\underbrace{\lambda_{\alpha}^S(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^S(\mathbf{p})}_{2m\mathbb{1}} + \underbrace{\lambda_{\alpha}^A(-\mathbf{p}) \bar{\lambda}_{\alpha}^A(-\mathbf{p})}_{-2m\mathbb{1}} \right]_{=0}. \quad (311)$$

Notemos que ao recorrer às somas de spin, o lado direito da última equação é identicamente nulo. Facilmente demonstramos que a relação de anticomutação é dada pela forma usual, ou seja⁵

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \bar{\mathbf{f}}(\mathbf{x}',t)\} = 0. \quad (312)$$

⁴Note que se fizermos uso das relações dadas em (110) e (111), temos

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \mathbf{p}(\mathbf{x}',t)\} = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} [\mathbb{1} + \mathcal{G}(\phi)]. \quad (307)$$

Novamente o termo de quebra de simetria $\mathcal{G}(\phi)$ aparece. Até então, antes da redefinição da estrutura dual, se escolhessemos uma direção em que o momento estivesse alinhado o eixo z , a integração em ϕ era identicamente nula, de modo que o caráter de localidade do campo era restaurado somente em uma direção espacial privilegiada.

⁵Tal resultado já era assegurado mesmo sem efeito da redefinição da estrutura dual, como pode ser visto em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005).

Nosso próximo passo é calcular o anticomutador dos campos a tempos iguais

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \mathbf{f}(\mathbf{x}',t)\} &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p})}} \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2mE(\mathbf{p}')}} \\ &\times \sum_{\alpha\alpha'} \left[\{c_\alpha(\mathbf{p}), c_{\alpha'}^\dagger(\mathbf{p}')\} \lambda_\alpha^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_{\alpha'}^A(\mathbf{p}') e^{-ip_\mu x^\mu + ip'_\mu x'^\mu} \right. \\ &\left. + \{c_{\alpha'}(\mathbf{p}'), c_\alpha^\dagger(\mathbf{p})\} \lambda_{\alpha'}^{A\dagger}(\mathbf{p}') \lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu x^\mu + ip'_\mu x'^\mu} \right]. \end{aligned} \quad (313)$$

Fazendo uso das relações (262) e (263), a última equação acima se reduz à

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \mathbf{f}(\mathbf{x}',t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\mathbf{p})} \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) e^{-ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} + \lambda_\alpha^{A\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^S(\mathbf{p}) e^{ip_\mu(x^\mu - x'^\mu)} \right].$$

Podemos escrever o lado direito da equação acima da seguinte maneira

$$\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2mE(\mathbf{p})} e^{-ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \underbrace{\sum_\alpha \left[\lambda_\alpha^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) + \lambda_\alpha^{A\dagger}(-\mathbf{p}) \lambda_\alpha^S(-\mathbf{p}) \right]}_{(\Upsilon)}, \quad (314)$$

na integral (314) os cálculos da quantidade Υ em termos dos espinores $\lambda^S(\mathbf{p})$ e $\lambda^A(\mathbf{p})$, nos assegura

$$\Upsilon = \sum_\alpha \left[\lambda_\alpha^{S\dagger}(\mathbf{p}) \lambda_\alpha^A(\mathbf{p}) + \lambda_\alpha^{A\dagger}(-\mathbf{p}) \lambda_\alpha^S(-\mathbf{p}) \right] = 0. \quad (315)$$

Consequentemente, a relação de anticomutação a tempos iguais é

$$\{\mathbf{f}(\mathbf{x},t), \mathbf{f}(\mathbf{x}',t)\} = 0. \quad (316)$$

De maneira similar, a última relação a ser mostrada é o anticomutador momento-momento. Daí, têm-se que

$$\{\mathbf{p}(\mathbf{x},t), \mathbf{p}(\mathbf{x}',t)\} = \left\{ \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x},t), \frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial t}(\mathbf{x}',t) \right\}, \quad (317)$$

o que, após uma série de cálculos simples fornece

$$\{\mathbf{p}(\mathbf{x},t), \mathbf{p}(\mathbf{x}',t)\} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{E(\mathbf{p})}{2m} e^{-ip(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \underbrace{\sum_\alpha \left[\bar{\lambda}_\alpha^{A\dagger}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^S(\mathbf{p}) + \bar{\lambda}_\alpha^{S\dagger}(-\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\alpha^A(-\mathbf{p}) \right]}_{\blacksquare}.$$

Calculando-se explicitamente o somatório chegamos à

$$\blacksquare = \sum_\beta \left[\bar{\lambda}_\beta^{A\dagger}(\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^S(\mathbf{p}) + \bar{\lambda}_\beta^{S\dagger}(-\mathbf{p}) \bar{\lambda}_\beta^A(-\mathbf{p}) \right] = 0, \quad (318)$$

donde finalmente a seguinte relação é garantida

$$\{\mathfrak{p}(\boldsymbol{x}, t), \mathfrak{p}(\boldsymbol{x}', t)\} = 0. \quad (319)$$

Portanto, tais observações nos levam a concluir pela análise das equações (310), (312), (316) e (319) que o campo quântico $\mathfrak{f}(x)$ após a redefinição da estrutura dual é um campo local. Diante de tal fato faz-se necessário então uma reavaliação do teorema no-go de Weinberg. Esse teorema afirma que é impossível a existência de um campo espinorial de spin $1/2$, além do campo de Dirac, que seja local e não viole as simetrias de Lorentz (AHLUWALIA, 2017a). Por evadir-se o teorema no-go e entender as estruturas subjacentes das estruturas duais, nós encontramos uma nova gama de possibilidades para ampliar o modelo padrão da física das altas energias. Muitas dessas novas construções devem carregar uma “escuridão” natural e deveriam ser dotadas de novas propriedades com relação a simetria de paridade, conjugação de carga e reversão temporal. Os campos de dimensão de massa um são apenas um exemplo desse novo modelo. Muitas classes de espinores podem ser definidas. Algumas delas, por exemplo, dependem das formas bilineares e das estruturas duais associadas ao passo que outros campos dependem explicitamente de seu comportamento sob efeito das simetrias discretas. A possibilidade de que esses campos possam servir como coeficientes de expansão para a construção de novos campos locais ainda é assunto que está em aberto para ser explorado (AHLUWALIA, 2017a).

6.4 INTERAÇÕES PERMITIDAS

Aqui vamos explorarmos um pouco a respeito das possíveis interações dos campos estudados até então. Uma vez que já fora discutido que tais campos são possíveis candidatos à matéria escura, visto que não possuem interações com partículas do Modelo Padrão exceto com o campo de Higgs (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005; GILLARD, 2012), veremos quais outras possibilidades de interação podem ser relevantes fisicamente. Como vimos a lagrangiana associada a esses campos é dada por

$$\mathcal{L}(x) = \partial_\mu \bar{\mathfrak{f}}(x) \partial^\mu \mathfrak{f}(x) - m^2 \bar{\mathfrak{f}}(x) \mathfrak{f}(x). \quad (320)$$

Seguindo com a intenção de analisar as interações permitidas para esses campos, nosso próximo passo é estabelecer quais interações são possíveis. Sabemos que os campos $\mathfrak{f}(x)$ e $\bar{\mathfrak{f}}(x)$ são dotados de dimensão de massa um e, assim, qualquer interação a ser analisada com as partículas do Modelo Padrão será regida pelo argumento de contagem de potência para que, desta maneira, possamos obter uma teoria unitária e renormalizável perturbativamente. Começaremos evidenciando a possibilidade da interação da forma

(AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005)

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g_E \phi^\dagger(x) \phi(x) \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x), \quad (321)$$

onde $\phi(x)$ é um dubleto de Higgs e g_E é uma constante de acoplamento adimensional. Claro está que mais interações desse tipo são possíveis se mais campos escalares existirem na natureza (GILLARD AB E MARTIN, 2010). Uma outra possibilidade (e na verdade a única interação escalar) conhecida como interação de Yukawa, que é unitária e renormalizável, foi mostrada em (LEE, 2016b), dada por

$$\mathcal{L}_{int}(x) = -g_\phi \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x) \phi - \frac{g_\phi^2}{2} \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x) \phi^2 - \frac{g_\phi}{2} (\bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x))^2 - \frac{h_\phi^3}{3!} \phi^3 - \frac{h_\phi^4}{4!} \phi^4, \quad (322)$$

note que g_ϕ e h_ϕ^3 possuem dimensão de massa um ao passo que g_ϕ^2 , g_ϕ e h_ϕ^4 são adimensionais. Devemos mencionar que a interação de Yukawa ($g_\phi \bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x) \phi$) vem da interação quártica entre autoespinores de $\mathcal{C}$ e Higgs (321). No caso, através do mecanismo de quebra espontânea de simetria o dubleto de Higgs $\phi(x)$ adquire um valor esperado no vácuo (VeV) diferente de zero, de forma que a constante de acoplamento g_ϕ fica relacionada com a antiga constante g_E e com o VeV, da seguinte maneira $g_\phi = g_E \times VeV$, daí, diante deste fato, surge a dimensão de massa um de g_ϕ .

Uma outra interação que acreditava-se que era permitida é autointeração, anteriormente analisada em Ahluwalia-Khalilova D. V. e Grumiller (2005), é dada por

$$\mathcal{L}_{int}(x) = \alpha_E [\bar{\mathbf{f}}(x) \mathbf{f}(x)]^2, \quad (323)$$

onde α_E representa uma constante adimensional. Não obstante, contrariamente à expectativa ingênua de contagem de potência e renormalização, a autointeração viola a unitaridade nos regimes de altas energias e, portanto, não pode ser uma interação fundamental (LEE, 2016b). Cabe ainda mencionar que uma possibilidade de interação não padrão permitida para os férmions de dimensão de massa um é com o tensor eletromagnético. Fora utilizado o método de ondas parciais para encontrar uma região de massa e constante de acoplamento em que a teoria possa ser considerada unitária. Tal interação foi analisada em Alves (2018), ela é escrita como

$$\mathcal{L}_{int}(x) = g_c \bar{\mathbf{f}}(x) [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \mathbf{f}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad (324)$$

sendo g_c uma constante de acoplamento e é esperada que seja extremamente pequena, haja visto que tal constante contribui com a massa do fóton via correções de loop para o propagador do fóton. Ainda não foram realizadas análises explícitas para avaliar as restrições nesse modelo proposto. Em Alves (2018) é mostrado que um requisito teórico importante deve ser novamente enfatizado, a interação de Elko-Elko através da troca de

fótons pode violar a unitariedade em altas energias, sendo assim, isso pode colocar alguma restrição a esse acoplamento.

7 LAGRANGIANA EFETIVA EM ESPAÇO CURVO

Neste capítulo estudaremos certos aspectos da teoria quântica de campos calculando a lagrangiana efetiva para os campos quânticos de dimensão de massa um construídos previamente e estudaremos também suas implicações cosmológicas. A idéia é aproveitarmos do método de *background-field* desenvolvido por DeWitt e Schwinger em DeWitt (1968), Schwinger (1951), aplicando-o a um espaço-tempo curvo bem comportado por meio do limite de coincidência Özer Murat e Taha (1987), Bertolami (1986), Özer Murat e Taha (1986), Gasperini (1987), Gasperini (1988), Freese (1987). Não obstante, o que é relevante para a presente discussão é o surgimento de uma constante cosmológica dinâmica, que depende explicitamente do tempo e conseqüentemente pode trazer informações sobre a expansão cósmica, algo similar também foi analisado em Costa Sandro e Makler (2007). Normalmente, acredita-se que o comportamento da constante cosmológica seja uma consequência de um determinado efeito quântico do universo em seus estágios primordiais (NOVELLO M, 2001; NOVELLO M, 2002; PEEBLES P. J. E. E RATRA, 1988). O mecanismo apresentado nesta seção é apropriado para descrever o comportamento da constante cosmológica desde os estágios inflacionários até seu valor atual.

7.1 UMA BREVE REVISÃO NO FORMALISMO SOBRE LAGRANGIANA EFETIVA

O método a ser aplicado para encontrar a lagrangiana efetiva relacionada com os férmions de dimensão de massa um foi discutido ao longo de anos em vários trabalhos, tais como (BROWN M. R. E DUFF, 1975; BUNCH T. S. E PARKER, 1979; HU B. L.; CRITCHLEY, 1987; HU B. L. E O'CONNOR, 1984; LEE, 2016a). Aqui, vamos ilustrar tal procedimento aplicando-o primeiramente ao campo escalar em um espaço-tempo curvo. Desta forma, a lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi(\square + m^2 + \xi R)\phi, \quad (325)$$

onde $\square$ é operador de Laplace-Beltrami, R é o escalar de curvatura e $\xi = \frac{1}{4}\frac{(d-2)}{(d-1)}$ é o coeficiente conformal. De modo a encontrar a lagrangiana efetiva o método de *background-field* deve ser implementado (DEWITT, 1968). Para tanto dividiremos o campo quântico em uma parte clássica (background ϕ) mais uma parte relacionada a flutuação quântica

h (BROWN M. R. E DUFF, 1975)

$$\phi \rightarrow \phi + h. \quad (326)$$

Diante disso, podemos reescrever a equação (325) como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}h(\square + \alpha^2)h, \quad (327)$$

onde $\alpha^2 \equiv m^2 + \xi R$ é denominada de massa efetiva. Consequentemente, a lagrangiana induzida por efeitos a 1-loop, denotada por $\mathcal{L}^{(1)}$, é dada pela integral funcional sobre todos os campos quânticos

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx \mathcal{L}^{(1)}\right) = \mathcal{N} \int dh \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int dx \mathcal{L}\right), \quad (328)$$

onde $\mathcal{N}$ representa um fator de normalização. Diferenciando ambos os lados de (328) com relação a α^2 , obtêm-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \alpha^2} &= -\frac{1}{2} \frac{\int h(x)h(x') \exp[(i/\hbar) \int dx \mathcal{L}] dh}{\int \exp[(i/\hbar) \int dx \mathcal{L}] dh} \\ &= \lim_{x \rightarrow x'} -\frac{1}{2} \langle h(x)h(x') \rangle, \end{aligned} \quad (329)$$

e assim

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \alpha^2} = \lim_{x \rightarrow x'} -\frac{\hbar}{2i} G(x - x'), \quad (330)$$

onde $G(x - x')$ é a função de Green satisfazendo

$$(\square + \alpha^2)G(x - x') = (g)^{-1/2} \delta(x - x'). \quad (331)$$

Posto isto, a lagrangiana efetiva é obtida após integrar-se o propagador com respeito a α^2 , impondo o limite de coincidência $x \rightarrow x'$. Basicamente, esta é a receita a que nos trará as bases necessárias para calcular a correção a 1-loop para os férmions de dimensão de massa um.

7.2 CORREÇÕES QUÂNTICAS A 1-LOOP PARA OS CAMPOS FERMIONICOS DE DIMENSÃO DE MASSA UM

Seja a lagrangiana em espaço curvo para os campos de dimensão de massa um dada por¹

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{-g} [g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \bar{\lambda} \nabla_\nu \lambda) - m^2 \bar{\lambda} \lambda - \xi R \bar{\lambda} \lambda], \quad (332)$$

¹Nesse caso específico ignoramos os termos de auto-acoplamento devido a extrema dificuldade que isso traz aos cálculos.

onde $\bar{\lambda}$ e λ representam respectivamente os campos quânticos dual e usual que foram construídos no Capítulo 6. A métrica espacialmente plana, homogênea e isotrópica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) para um universo em expansão é

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (333)$$

onde

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -a^2(t), -a^2(t), -a^2(t)), \quad (334)$$

e

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1/a^2(t), -1/a^2(t), -1/a^2(t)). \quad (335)$$

De maneira geral derivada covariante, ∇_μ , atuando em um vetor é dada por

$$\nabla_\mu A^\nu = \partial_\mu A^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu A^\rho, \quad (336)$$

sendo $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$ o símbolo de Christoffel. Tal derivada é definida para espinores impondo que $\nabla_\mu e_\nu^a = 0$, onde aqui e_ν^a representa uma tetrada ², consequentemente, $\nabla_\mu \gamma^\nu = 0$. Assim, a conexão de spin é definida como (YEPEZ, 2011; BÖHMER C. G.; ET, 2010)

$$\omega_\mu^{ab} = e_\nu^a \partial_\mu e^{\nu b} + e_\nu^a e^{\sigma b} \Gamma_{\mu\sigma}^\nu. \quad (337)$$

A ação da derivada covariante é dada por (BÖHMER C. G.; ET, 2010)

$$\nabla_\mu \bar{\lambda} = \partial_\mu \bar{\lambda} + \bar{\lambda} \Gamma_\mu, \quad (338)$$

e

$$\nabla_\mu \lambda = \partial_\mu \lambda - \Gamma_\mu \lambda, \quad (339)$$

onde

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4} \omega_\mu^{ab} f_{ab}, \quad f_{ab} = \frac{i}{2} [\gamma_a, \gamma_b]. \quad (340)$$

Portanto, no cenário em que estamos trabalhando podemos escrever as componentes da conexão de spin como (BÖHMER C. G.; ET, 2010)

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_j = -\frac{\dot{a}(t)}{2} \gamma_0 \gamma_j, \quad (341)$$

aqui γ_j são as matrizes

$$\gamma^0(t) = \gamma_0, \quad \text{e} \quad \gamma^j(t) = -\frac{1}{a(t)} \gamma_j, \quad (342)$$

²Definiremos as tetradas como sendo $e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab} = g_{\mu\nu}$ onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica do espaço tempo e $\eta_{ab} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

onde γ_μ são as matrizes de Dirac no espaço-tempo de Minkowski na representação de Weyl que por sua vez satisfazem a relação constitutiva $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ (SILVA J. M H. E PEREIRA, 2014). Para executar o método do *background-field*, apresentado em Brown M. R. e Duff (1975), Bunch T. S. e Parker (1979), primeiramente faz-se necessário dividir o campo em background clássico λ e uma flutuação quântica ψ , $\lambda \rightarrow \lambda + \psi$. Os efeitos a 1-loop, cujo resultado efetivo estará contido em $\mathcal{L}^{(1)}$, serão regidos pela integral funcional sobre os campos como mostrado em (328). Assim, a contribuição da lagrangiana efetiva a 1-loop está relacionada com a função de Green

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial \alpha^2} = -\frac{1}{2} \langle \bar{\psi}^\beta(x) \psi_\beta(x') \rangle \quad (343)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x'} -\frac{\hbar}{2i} \text{Tr} G(x - x'). \quad (344)$$

Como agora estamos tratando de um campo espinorial, devemos nos atentar a sutileza de tomar o traço nos índices dos espinores, em concordância com o que é destacado em Brown M. R. e Duff (1975). Seguindo com o protocolo, temos que a equação de movimento correspondente para a flutuação quântica é dada por

$$\left(\square + 3H(t)\partial^0 + \frac{2}{a^2(t)}\Gamma_j\partial^j + \alpha^2 \right) \psi = 0, \quad (345)$$

onde $\alpha^2 \equiv m^2 + \xi R - \frac{3}{4}H^2(t)$ corresponde a massa efetiva e $H(t) = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. De modo a prosseguir e encontrar a função de Green, será necessário nesse ponto realizar a rotação de Wick, i.e., $t \rightarrow -it$, consequentemente, temos

$$\left(\partial_E^2 + \partial_j^2 - 3iH(it)\partial^0 + \frac{2}{a^2(it)}\Gamma_j\partial^j + \alpha_E^2 \right) G_E(-it, \vec{x}, -it', \vec{x}') = (-g)^{-1/2} \delta(-it, \vec{x}, -it', \vec{x}'), \quad (346)$$

onde agora α_E^2 é a massa efetiva Euclidianizada. Como mostrado em Hu B. L. e O'Connor (1984), esta representação no espaço dos momentos é bem definida apenas em uma vizinhança local quando $x - x' \rightarrow 0$. Para os estudos de divergência ultravioleta em dois pontos ou ainda para o estudo de sistemas envolvendo variações quasi-locais em baixa ordem, quando o limite de coincidência é tomado, o método de *background-field* (o mesmo apresentado nessa seção) é o mais adequado. Agora, se considerarmos processos que envolvam variações rápidas no background, assim como, por exemplo, produção de pares, defeitos topológicos devido a transição de fase e tratamentos perturbativos de situações mais complicadas com o surgimento de derivadas superiores do *background-field*, tal prescrição não é a mais adequada, e sendo assim é necessário recorrer ao procedimento conhecido como Heat-Kernel Nepomechie (1985). Tal método fornece um algoritmo apropriado e, consequentemente, deve fornecer o mesmo resultado final Hu B. L. e O'Connor (1984). Agora,

tomando o limite de coincidência para que possamos utilizar das técnicas de quantização do espaço dos momentos, escreveremos

$$G(p) = \int dx e^{ip_\mu(x-x')^\mu} G_E(-it, \vec{x}, -it', \vec{x}'), \quad (347)$$

de modo que temos então

$$G_E(x \rightarrow x') = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds e^{-\left(p^2 - 3iH(it)p^0 + \frac{2i}{a^2(it)}\Gamma_j p^j + \alpha_E^2\right)s}. \quad (348)$$

Decompondo o momento em coordenadas esféricas $p^\mu = (p^0, |p| \sin \theta \cos \phi, |p| \sin \theta \sin \phi, |p| \cos \theta)$, temos³

$$\begin{aligned} G_E(x \rightarrow x') &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds e^{-\alpha_E^2 s} \int_0^\infty dp^0 e^{(-p^0 + 3iH(it)p^0)s} \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\quad \times \int_0^\infty dp |p|^2 \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta e^{\left(-|p|^2 + \frac{H(it)}{a(it)}\gamma_0 \gamma_j p^j\right)s}. \end{aligned} \quad (350)$$

Note que mesmo que as integrais acima sejam Gaussianas, entretanto, a presença de matrizes nas exponenciais faz com que a integração seja extremamente complicada e laboriosa. Para resolver as integrais acima, utilizamos o seguinte procedimento: seja $\mathbf{M}$ uma matriz quadrada, podemos definir então

$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^n}{n!}. \quad (351)$$

Seguindo com esse raciocínio, o resultado final das integrações pode ser escrito explicitamente em termos da função gamma incompleta (ABRAMOWITZ M. E STEGUN, 1964; BATEMAN, 1953), de modo que obtemos

$$G_E(x \rightarrow x') = \frac{-i}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} e^{-\alpha_E^2 s} e^{-\frac{9}{4}H^2(it)s} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}H^2(it)s\right) \right] \mathbb{1}. \quad (352)$$

Finalmente, a lagrangiana efetiva a 1-loop Euclidianizada pode ser obtida inserindo-se (352) em (343). Para voltar a forma não Euclidianizada é necessário seguir o seguinte

³Devemos enfatizar que se trabalhássemos com a primeira formulação do Elko, a qual é governada pelas simetrias relativistas dos subgrupos de Lorentz $SIM(2)$ ou $HOM(2)$, então a função de Green no espaço dos momentos seria dada por (ROGERIO, 2018)

$$G_E(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty ds \int d^4 p e^{-(p^2 - 3iH(it)p^0 + \frac{2i}{a^2(it)}\Gamma_j p^j + \alpha_E^2 + M_p)s}, \quad (349)$$

onde M_p é uma versão da matriz dependente de ϕ no espaço dos momentos, dando origem a uma direção privilegiada. Tal matriz pode ser escrita em termos de derivadas fracionárias, como em Lee (2016a) e sua forma explícita faz, até onde sabemos, a integração acima inviável.

procedimento $\mathcal{L}_E \rightarrow -\mathcal{L}$ e $H^2(it) \rightarrow -H^2(t)$, de modo que temos então

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{\hbar}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^3} e^{-\alpha^2 s} e^{\frac{9}{4} H(t)^2 s} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4} H^2(t) s\right) \right]. \quad (353)$$

Na sequência, para expandir as exponenciais utilizaremos da seguinte prescrição

$$e^{-Us} = \sum_{l=0}^{\infty} d_l s^l, \quad (354)$$

onde os coeficientes d_l são definidos como

$$d_l \equiv (-1)^l \frac{(\xi R - 3H^2(t))^l}{l!}. \quad (355)$$

Agora, escreveremos a função gamma incompleta em termos de uma série de potências, que pode ser encontrada em Bateman (1953)

$$\gamma(z, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{z+n}}{(z+n)}. \quad (356)$$

Consequentemente, a lagrangiana a 1-loop pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \frac{\hbar}{16\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} d_l \int_0^\infty ds e^{-m^2 s} s^{l-3} + \\ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\hbar}{16\pi^2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_l \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(\frac{9}{4} H^2(t)\right)^{1/2+n}}{(1/2+n)} \int_0^\infty ds e^{-m^2 s} s^{l+n-5/2}. \end{aligned} \quad (357)$$

Note que utilizando a função gamma completa, dada pela seguinte identidade

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty ds s^{x-1} e^{-s}, \quad (358)$$

podemos finalmente escrever a lagrangiana efetiva (357) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(1)} = & \frac{\hbar}{16\pi^2} \left[\sum_{l=0}^{\infty} d_l (m^2)^{2-l} \Gamma(l-2) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_l \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\left(\frac{9}{4} H^2(t)\right)^{1/2+n}}{(1/2+n)} (m^2)^{3/2-l-n} \Gamma\left(l+n-3/2\right) \right]. \end{aligned} \quad (359)$$

Visando analisar as consequências cosmológicas das correções quânticas obtidas, nós proporemos investigar seu impacto na constante cosmológica efetiva e também no escalar de curvatura, um procedimento análogo é feito em Novello M (2001), Novello M (2002),

entretanto em um cenário ligeiramente diferente. Posto isto, considere a ação gravitacional geral

$$\mathcal{S}_{grav} = \int d^4x \mathcal{L}_{grav} = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (R + 2\Lambda), \quad (360)$$

onde Λ é a constante cosmológica, R é o escalar de curvatura e G é a constante gravitacional. Expandindo (359) em termos de l e n , e negligenciando os termos de ordem superior a $H^2(t)$, a lagrangiana efetiva total é dada pela soma das equações (332), (359) e (360), por conseguinte,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_0 &+ \left(\frac{m^4 \hbar (3-2\gamma)}{64\pi^2} - \frac{3H^2(t)m^2(1-\gamma)\hbar}{16\pi^2} + \frac{2H(t)m^3\hbar}{16\pi^2} - \frac{2\Lambda}{16\pi G} \right) \sqrt{-g} \\ &+ \left(\frac{m^2 \xi (1-\gamma)\hbar}{16\pi^2} + \frac{1}{16\pi G} \right) \sqrt{-g} R + \mathcal{O}(R^2), \end{aligned} \quad (361)$$

onde γ representa a constante de Euler-Mascheroni.

7.3 IMPLICAÇÕES COSMOLÓGICAS

Com a finalidade de estudar as consequências da ação acima dentro de um contexto cosmológico, derivaremos as equações de FRW através da formulação lagrangiana (ROGERIO, 2018), a qual basicamente consiste em introduzir uma função lapso $N(t)$ na métrica (333), assim $ds^2 = N^2(t)dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. As equações de Euler-Lagrange obtidas pela variação de $\mathcal{L}$ com respeito a $N(t)$ e $a(t)$ nos proverão duas equações de Friedmann, as quais após obtidas imporemos que $N(t) = 1$. Vamos assumir que o campo espinorial presente em $\mathcal{L}_0$, que corresponde a matéria, pode ser escrito como $\lambda(x) = \phi(t)\chi(\vec{x})$, com χ satisfazendo a condição de normalização $\bar{\chi}\chi = 1$ (SILVA J. M. H. E PEREIRA, 2014). Não obstante, vamos analisar o caso onde o campo espinorial preenche todo o universo de forma homogênea, implicando, assim, em $\nabla_i \chi(\vec{x}) = 0$, e imporemos também que a evolução do background é suave e adiabática, ou seja, estamos interessados em um cenário bem comportado e onde as variações sejam graduais e sutis. Também a condição de adiabaticidade é necessária para que assim possamos desconsiderar tanto o aumento da entropia e a interação entre as partículas como citado em Hu B. L. e O'Connor (1984), Hu B. L.; Critchley (1987). Diante de tais circunstâncias, a lagrangiana na presença da função $N(t)$ é ⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{1}{N} \left(\frac{3a\dot{a}^2}{8\pi G} - \frac{1}{2}a^3\dot{\phi}^2 - \frac{3}{8}a\dot{a}^2\phi^2 - 3\xi[a\dot{a}^2\phi^2 + 2a^2\dot{a}\phi\dot{\phi}] + (1-2\xi)\frac{3m^2(1-\gamma)\hbar}{16\pi^2}a\dot{a}^2 \right) \\ & -Na^3 \left(\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\Lambda}{8\pi G} - \frac{m^4(3-2\gamma)\hbar}{64\pi^2} \right) + \frac{2m^3\hbar}{16\pi^2}\dot{a}a^2. \end{aligned} \quad (362)$$

⁴Algumas das modificações geradas pela função $N(t)$ são $\sqrt{-g} = N(t)a^3(t)$, $\Gamma_\mu\Gamma^\mu = -\frac{3}{4}\frac{\dot{a}^2(t)}{N^2(t)a^2(t)}\mathbb{1}$, $\Gamma_j = -\frac{\dot{a}(t)}{2N(t)}\gamma_0\gamma_j$ e $R = -\frac{6}{N^2(t)a(t)}\left(\ddot{a}(t) + \frac{\dot{a}^2(t)}{a^2(t)} - \frac{\dot{a}(t)\dot{N}(t)}{N(t)}\right)$.

Assim, as equações de Friedmann são dadas por (ROGERIO, 2018)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{3}{8}H^2\phi^2 + \frac{\Lambda}{8\pi G} - 3\xi[H^2\phi^2 + 2H\phi\dot{\phi}] - \frac{m^4\hbar(3-2\gamma)}{64\pi^2} - (1-2\xi)\frac{3m^2(1-\gamma)\hbar}{16\pi^2}H^2 \right], \quad (363)$$

e

$$\begin{aligned} -2\dot{H} - 3H^2 = 8\pi G \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{3}{8}H^2\phi^2 - \frac{1}{4}\dot{H}\phi^2 - \frac{1}{2}H\phi\dot{\phi} - \frac{\Lambda}{8\pi G} \right. \\ \left. + \xi[3H^2\phi^2 + 4H\phi\dot{\phi} + 2\dot{H}\phi^2 + 2\dot{\phi}^2 + 2\phi\ddot{\phi}] + (1-2\xi)[H^2 + \frac{2}{3}\dot{H}]\frac{3m^2(1-\gamma)\hbar}{16\pi^2} \right]. \quad (364) \end{aligned}$$

Podemos identificar o lado direito da equação (363) como sendo a densidade de energia do campo e suas correções quânticas e o lado direito de (364) relacionado com a pressão e sua devida correção quântica. Note que no caso limite $\hbar \rightarrow 0$ e $\xi = 0$ recuperamos as mesmas equações previamente obtidas em Pereira (2017). Perceba que o último termo do lado direito presente na equação (363) corresponde à correção quântica de H^2 ao passo que o termo proporcional a $m^4\hbar$ é a correção para a constante cosmológica. Dentro das duas possibilidades que surgem, vamos analisar dois limites interessantes.

7.3.1 1º caso: limite $H \approx m_{pl} \gg m \gg \phi$

De forma a inquirir as possíveis consequências das equações anteriores para um universo primordial, onde os efeitos quânticos foram mais relevantes, iremos analisar a primeira equação de Friedmann (363) no limite $H \approx m_{pl} \gg m \gg \phi$. Tal limite corresponde a um universo de aproximadamente $t = H^{-1} \sim 10^{-43}\text{s}$, antes da inflação ocorrer. Nesse caso temos (ROGERIO, 2018)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2m_{pl}^2} + \frac{\Lambda}{8\pi} - (1-2\xi)\frac{H^2}{m_{pl}^2} \frac{3m^2(1-\gamma)\hbar}{16\pi^2} \right], \quad (365)$$

onde $m_{pl} = 1/\sqrt{G}$ é a massa de Planck. Se negligenciarmos o termo cinético, vemos que uma contribuição positiva para a constante cosmológica Λ pode ser obtida se impusermos que $\xi > 1/2$, indicando, assim, que mesmo na ausência da constante cosmológica ($\Lambda = 0$) uma contribuição positiva proporcional a H^2 sobrevive no último termo, que pode ser livremente interpretado como uma constante cosmológica induzida por efeitos quânticos podendo ser responsável pela fase inflacionária dos primeiros estágios do universo. Conforme o universo se expande e H diminui, os termos proporcionais a ϕ começam a ser dominantes.

7.3.2 2º caso: limite $\dot{\phi} \ll H\phi$, $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$ e $\phi \approx \text{constante}$

Como uma possível aplicação para esse espinor candidato a energia escura, para os tempos mais recentes da evolução do universo vamos supor que o campo seja aproximadamente constante ($\phi \approx \text{constante}$) satisfazendo a condição de variação suave, $\dot{\phi} \ll H\phi$ e $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$. Dado limite fora estudado em um contexto cosmológico em Pereira (2017). As equações de Friedmann se traduzem em Rogerio (2018)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3m_{pl}^2} \Lambda(t), \quad (366)$$

com $\Lambda(t) = A + BH(t)^2$ onde A e B são constantes dadas por

$$A = \frac{m_{pl}^2}{8\pi} \Lambda + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{m^4(3-2\gamma)\hbar}{64\pi^2}, \quad B = 3\phi^2 \left(\frac{1}{8} - \xi \right) - 3(1-2\xi) \frac{m^2(1-\gamma)\hbar}{16\pi^2}. \quad (367)$$

Esse comportamento é análogo ao dos modelos que possuem um termo de constante⁵ cosmológica que varia no tempo, os quais são motivados pelo grupo de renormalização da energia de vácuo quântico (SHAPIRO, 2003; SHAPIRO I. L.; SOLA, 2005). Soluções analíticas para a equação de Friedmann (366) foram também obtidas para modelos fenomenológicos com constante cosmológica que varia no tempo Costa Sandro e Makler (2007). A solução para o fator de escala é

$$a(t) = a_0 \exp \left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{3\pi A}{3m_{pl}^2 - 8\pi B}} t \right), \quad (368)$$

indicando uma solução do tipo de Sitter, fornecendo uma solução acelerada para a evolução tardia do universo. Se supusermos ϕ e m muito menores que m_{pl} e devido a contribuição negativa da correção quântica presente no termo A em (367), o efeito resultante na evolução do fator de escala é uma expansão suave e crescente.

De forma a sumarizar tudo o que foi feito nesse capítulo, podemos dizer que completamos o programa de derivar a lagrangiana efetiva para os campos fermiônicos de dimensão de massa um em espaço-tempo curvo levando em conta uma suave variação do *background-field* no regime quasi-local. E, conseqüentemente, encontramos também correções quânticas a temperatura finita.

Para o caso de temperatura zero, analisamos dois diferentes limites, um deles correspondendo a um universo recente e o outro a um universo primordial. No regime de temperatura zero vimos que o limite $H \approx m_{pl} \gg m \gg \phi$ e $\xi > 1/2$ fornecem um termo positivo de correção quântica para a constante cosmológica, o qual pode ser responsável pela expansão acelerada inflacionária depois de $t \sim H^{-1} \sim 10^{-43}\text{s}$, onde os efeitos

⁵Note que o uso do termo “constante” nesses casos é um abuso de linguagem, entretanto, essa é a melhor forma de nos expressar.

quânticos eram relevantes. Para tempos recentes estudamos o limite $\dot{\phi} \ll H\phi$, $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$ e $\phi \approx$ constante, que corresponde ao modelo com uma constante cosmológica que varia no tempo, já previamente estudada em Pereira (2017), entretanto, aqui correspondendo a uma correção quântica, a qual é solução para o fator de escala do tipo acelerado. Um modelo mais robusto e completo pode incluir também componentes de matéria, tais como: radiação e matéria bariônica (ROGERIO, 2018).

8 CONCLUSÕES

Como apresentado no escopo dessa tese, mostramos que existe uma grande e nítida dicotomia entre a formulação embrionária e a formulação mais recente dos campos de dimensão de massa um. As discussões que traremos, neste Capítulo final, serão baseadas na segunda formulação. Há agora um cenário onde estamos alicerçados por uma teoria local e invariante por transformações de Lorentz, de tal modo que nessa dada conjuntura temos uma interpretação física bastante rica e relevante. Inicialmente fizemos toda a construção algébrica, sistemática e teórica dos espinores Elko, propostos por Alhuwalia e Grumiller. Tais espinores são os pioneiros na literatura em formar, de fato, um conjunto completo de autoespinores do operador conjugação de carga ($\mathcal{C}$) com helicidade dual. Por apresentar essa particularidade, a neutralidade via atuação de $\mathcal{C}$, o Elko é então considerado um forte candidato a descrever matéria escura, visto que tal característica significa que ele não carrega cargas de calibre.

É importante frisar que ao se referir aos espinores Elko, a maneira mais adequada e precisa de definí-los é através das equações: (41), (43) e (44). Essas são as relações fundamentais que nos mostram que é através da “Mágica das matrizes de Pauli” que as componentes espinoriais se transformam como objetos de mão direita e objetos de mão esquerda nos espaços de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$, isso é o que fortemente contrasta com outros espinores presentes na literatura, como por exemplo, o caso dos espinores de Dirac, onde os espaços de representação estão vinculados via simetria de paridade.

Primeiramente, notamos que para a construção da estrutura dual fez-se necessário um cuidado e rigor para tal tarefa, haja visto que se utilizarmos da mesma estrutura dual de Dirac não conseguimos definir uma norma não nula ou real. Inicialmente definimos um “novo dual”¹ que obrigatoriamente requer a troca de helicidade dos espinores além da presença da unidade imaginária. Tal estrutura é necessária para que assim asseguremos uma norma real, não nula e invariante por transformações de Lorentz. Entretanto, a partir do momento que estabelecemos dada estrutura, é fácil de se verificar que nas somas de spin surge um termo que quebra explicitamente a invariância por transformações de Lorentz, dado pelo termo $\mathcal{G}(\phi)$, pois como visto o referido termo forçava com que a teoria fosse local em apenas uma determinada direção espacial. A princípio acreditava-se que esse fato era algo intrínseco a esses espinores. Desta forma, à época uma das alternativas para

¹O adjetivo novo é usado no sentido que estamos nos referindo a uma estrutura bastante diferente da estrutura já conhecida de Dirac.

se contornar o problema da interpretação física e tentar reestabeler de alguma forma a invariância da teoria era recorrer à Very Special Relativity. O grupo $SIM(2)$ da VSR era o grupo de simetria da teoria.

Sem embargo, ainda assim existia uma grande motivação para se tentar buscar uma teoria que fosse de fato local e invariante por Lorentz, não restringindo apenas a VSR ou apenas a uma dada direção privilegiada. Deste modo, percebeu-se uma “liberdade” deixada na definição nas estruturas duais. Como apresentado nas equações 116 e 117, a redefinição da estrutura dual é basicamente dada pela introdução dos operadores $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ à direita da estrutura dual embrionária, e deste modo, as somas de spin são modificadas e passam a depender desses operadores. Consequentemente, buscamos métodos matemáticos bem estabelecidos para conseguir reconhecer tais operadores como sendo a (pseudo)inversa da matriz singular $[\mathbb{1} \pm \mathcal{G}(\phi)]$. Por conseguinte, mostramos que com a redefinição da estrutura dual conseguimos estabelecer uma teoria local e invariante por transformações de Lorentz.

No tocante a dinâmica relacionada a esses campos, foi mostrado que diferentemente do que é esperado para um campo espinorial, o Elko não obedece a dinâmica de Dirac. A razão por detrás disso é bastante simples. Como exposto, o operador de Dirac está intimamente relacionado com o operador paridade. Ademais, sabemos que os espinores de Dirac possuem a simetria de paridade como elo entre os espaços de representação, e assim, tais espinores automaticamente satisfazem a dinâmica de Dirac. Uma vez que o Elko é construído sem alusão a nenhuma simetria discreta, ou melhor dizendo, sem a presença da simetria de paridade como relação fundamental, então não podemos esperar que esse campo possua a mesma dinâmica que os espinores de Dirac. Assim sendo, mostramos que este campo obedece unicamente a equação de Klein-Gordon e, portanto, a lagrangiana que dá origem à equação de movimento do campo é a mesma lagrangiana que a do campo escalar. Vale frisar que de acordo com a análise e interpretação de Wigner baseada na investigação sob o comportamento do campo via atuação das simetrias discretas, $\mathcal{C}$, P , $\mathcal{T}$ e $(CPT)^2$, nota-se que o campo considerado neste trabalho é uma realização da representação fermiônica porém com “caráter bosônico”, e, portanto, isso evidencia que dado campo pertence à classe não padrão de Wigner.

Após a análise da dinâmica dos campos fermiônicos de dimensão de massa um, utilizamos a lagrangiana do sistema para construir a Hamiltoniana, a qual vimos que só é positivo definida se as relações entre os operadores de criação e aniquilação de partículas obedecerem as relações fermiônicas usuais (estatística de Fermi-Dirac). Assim, uma vez que para esse caso a lagrangiana é a mesma que a do campo escalar, concluímos que o Elko possui dimensão de massa um ao invés de $3/2$, diferentemente do que é usualmente esperado para campos fermiônicos. Como é sabido, as somas de spin compõe o cerne da estrutura do propagador do campo quântico e, desta maneira, utilizando-se a prescrição primária da estrutura dual, o fator $\mathcal{G}(\phi)$ é automaticamente herdado quando se constrói o propagador. Afetando, consequentemente, a estrutura local do campo que agora passa a

dependem naturalmente deste termo. Tal patologia tornava a interpretação física bastante restrita e complexa. Todavia, após a redefinição da estrutura dual conseguimos facilmente contornar o problema relacionado com a presença do termo de quebra de simetria de Lorentz, tanto nas somas de spin como no propagador de campo quântico e também nos correlatores de campo. Deste modo podemos notar que o propagador de campo quântico associado ao Elko é idêntico ao propagador do campo escalar de Klein-Gordon. Finalmente através da análise dos quatro correlatores fundamentais de campo quântico, concluímos que os campos quânticos construídos, possuindo os autoespinores do operador conjugação de carga como coeficientes de expansão, são campos invariantes e locais. Isso nos abre portas para uma nova física e uma nova gama de possibilidades ainda a serem exploradas.

Sobre os aspectos fenomenológicos de tais campos, sabemos que existe uma classe restrita de interações, primeiramente devido a sua neutralidade diante conjugação de carga e depois devido a dimensão de massa. Até então sabemos que são dois acoplamentos permitidos para o Elko. Um deles é com o dubleto de Higgs e o outro é a interação Yukawa pois ambos são interações renormalizáveis e não violam a unitariedade. Acreditava-se que uma outra interação permitida é a autointeração, entretanto, tal interação viola a unitariedade no regime das altas energias e, assim, não pode ser considerada uma interação fundamental. O fato do Elko não interagir com campos de gauge ou com férmions do Modelo Padrão faz com que seja difícil detectá-lo, por estas razões este campo é um forte candidato a descrever a matéria escura.

Uma outra particularidade importante que apresentamos está relacionada com a construção das estruturas bilineares associadas ao Elko. Notamos que existe a necessidade de deformar os elementos primordiais da base da álgebra de Clifford real com o intuito de que as identidades de FPK sejam satisfeitas por tais estruturas. Diante dessas considerações foi possível encontrar apenas um subconjunto de bilineares reais. Ainda assim mostramos que os novos elementos que completam a base da álgebra de Clifford dependem explicitamente do operador que realiza a troca de helicidade dos espinores Elko. Estudamos também a covariância tanto por transformações de Lorentz como por transformações pelos grupos $HOM(2)$ e $SIM(2)$.

Podemos ver que as estruturas bilineares do espinor Elko se diferem bastante das estruturas já conhecidas na literatura. Esse fato é consequência da nova estrutura dual que estes espinores apresentam. À vista disso, salientamos que os espinores Elko não pertencem à classificação usual de Lounesto. Este é um ponto importante, já que anteriormente acreditava-se que o Elko poderia ser classificado como um espinor do tipo-5 dentro da classificação de Lounesto mas isso implicava que o termo de massa (σ) a ele associado fosse nulo, o que apresenta uma forte contradição com a construção aqui apresentada. Logo, acreditamos na relevância dessa abordagem realizada, uma vez que estabelecemos os critérios para uma futura classificação para espinores de dimensão de massa um.

Como uma aplicação desses campos construídos aqui, derivamos a lagrangiana efetiva

um em espaço-tempo curvo levando em conta uma suave variação do *background-field* no regime quasi-local visando uma análise no cenário cosmológico. Para o caso de temperatura zero, nós analisamos dois diferentes limites, o primeiro correspondendo a um universo recente e o outro a um universo primordial. Vimos que no limite onde $H \approx m_{pl} \gg m \gg \phi$ e $\xi > 1/2$ emerge um termo positivo de correção quântica para a constante cosmológica, o qual pode ser responsável pela expansão acelerada inflacionária onde os efeitos quânticos eram bastante relevantes. Para tempos recentes, estudamos o limite $\dot{\phi} \ll H\phi$, $\ddot{\phi} \ll H\dot{\phi}$ e $\phi \approx \text{constante}$, correspondendo ao modelo com uma constante cosmológica que varia no tempo nos fornecendo uma solução para o fator de escala do tipo acelerado.

Diante de toda a discussão que fora elaborada, fica evidente ao leitor que os espinores que foram objetos de estudo do presente trabalho possuem características intrínsecas que os tornam bastante peculiares dentro da literatura corrente. Por tais motivos, o Elko foi e tem sido objeto de estudo em diversos setores da física, contribuindo de forma bastante promissora com os resultados obtidos até o momento. Com isso em mente, primeiramente um dos pontos que esperamos abordar é a construção de uma classificação similar a de Lounesto, porém, agora com o objetivo de classificar especificamente espinores com dimensão de massa um. Desta maneira, esperamos conseguir encontrar novas classes desses objetos além de uma interpretação física relevante para as formas bilineares contruídas. Um outro ponto bastante interessante para aprofundarmos os estudos é a decomposição de espinores Elkos em termos de espinores RIM (Restricted Inomata-McKinley) (BEGHETTO D; ROGERIO, 2018; NOVELLO, 2007), haja visto que tal mecanismo mostra-se bastante útil no cenário da cosmologia não linear para se descrever neutrinos e suas oscilações. Ainda dentro desse cenário é possível definir um espaço bidimensional chamado de *spinor-plane*, onde residem todos os espinores que podem ser decompostos em termos de espinores RIM. Assim, o objetivo é de se conseguir estabelecer um mapa linear bijetivo entre os campos de dimensões de massa um e os campos de Dirac, buscando uma ligação algébrica-topológica entre eles. No que se refere a fenomenologia, agora que é possível uma teoria local e invariante, ainda estão em aberto estudos relacionados com a autointeração e também a interação Elko-Higgs.

REFERÊNCIAS

- ABŁAMOWICZ R.; GONÇALVES, I. e. d. R. R. Bilinear covariants and spinor fields duality in quantum clifford algebras. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 55, n. 10, p. 103501, 2014.
- ABRAMOWITZ M. E STEGUN, I. A. **Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables**. [S.l.]: Courier Corporation, 1964. v. 55.
- AHLUWALIA, D. V. Evading weinberg's no-go theorem to construct mass dimension one fermions: Constructing darkness. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 118, n. 6, p. 60001, 2017. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/118/i=6/a=60001>>.
- AHLUWALIA, D. V. The theory of local mass dimension one fermions of spin one half. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 27, n. 3, p. 2247–2285, Sep 2017. ISSN 1661-4909. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00006-017-0775-1>>.
- AHLUWALIA D. V. E HORVATH, S. P. Very special relativity as relativity of dark matter: the elko connection. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 11, p. 78, 2010.
- AHLUWALIA D. V. E JOHNSON, M. B. Majorana-like representation spaces: Construction and physical interpretation. **arXiv preprint hep-th/9307118**, 1994.
- AHLUWALIA D. V.; LEE, C. Y. e. S. D. Elko as self-interacting fermionic dark matter with axis of locality. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 687, n. 2-3, p. 248–252, 2010.
- AHLUWALIA D. V.; LEE, C. Y. e. S. D. Self-interacting elko dark matter with an axis of locality. **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 83, p. 065017, Mar 2011. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.065017>>.
- AHLUWALIA-KHALILOVA, D. V.; GRUMILLER, D. Dark matter: A spin one-half fermion field with mass dimension one? **Phys. Rev. D**, American Physical Society, v. 72, p. 067701, Sep 2005. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.067701>>.
- AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, D. Spin-half fermions with mass dimension one: theory, phenomenology, and dark matter. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2005, n. 07, p. 012, 2005.
- ALVES, A. e. a. Constraining elko dark matter at the lhc with monophoton events. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 121, n. 3, p. 31001, 2018.
- BARATA J. C. A. E HUSSEIN, M. S. The moore–penrose pseudoinverse: A tutorial review of the theory. **Brazilian Journal of Physics**, Springer, v. 42, n. 1-2, p. 146–165, 2012.

- BATEMAN, H. e. a. **Higher transcendental functions**. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1953. v. 1.
- BEESHAM A.; CHERVON, S. V. e. M. S. D. An emergent universe supported by a nonlinear sigma model. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 26, n. 7, p. 075017, 2009.
- BEGHETTO D; ROGERIO, R. J. B. e. V. C. H. C. The restricted inomata-mckinley spinor-plane, homotopic deformations and the lounesto classification. 2018.
- BENN I. E TUCKER, R. **An introduction to spinors and geometry with applications in physics**. [S.l.]: ADAM HILGER LTD, 1987.
- BERTOLAMI, O. Time-dependent cosmological term. **Il Nuovo Cimento B (1971-1996)**, Springer, v. 93, n. 1, p. 36–42, 1986.
- BJORKEN J. D. E DRELL, S. D. **Relativistic quantum mechanics**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.
- BÖHMER C. G.; ET, a. Dark spinor models in gravitation and cosmology. **Journal of High Energy Physics**, Springer, v. 2010, n. 7, p. 53, 2010.
- BROWN M. R. E DUFF, M. J. Exact results for effective lagrangians. **Physical Review D**, APS, v. 11, n. 8, p. 2124, 1975.
- BUNCH T. S. E PARKER, L. Feynman propagator in curved spacetime: A momentum-space representation. **Physical Review D**, APS, v. 20, n. 10, p. 2499, 1979.
- COHEN A. G; E GLASHOW, S. L. Very special relativity. **Physical review letters**, APS, v. 97, n. 2, p. 021601, 2006.
- COSTA SANDRO E MAKLER, M. Silva e. **Connections among three roads to cosmic acceleration: Decaying vacuum, bulk viscosity, and nonlinear fluids**. [S.l.], 2007.
- CRAWFORD, J. P. Bispinor geometry for even-dimensional space-time. **Journal of mathematical physics**, AIP, v. 31, n. 8, p. 1991–1997, 1990.
- CRAWFORD, J. P. Clifford algebra: notes on the spinor metric and lorentz, poincaré, and conformal groups. **Journal of mathematical physics**, AIP, v. 32, n. 3, p. 576–583, 1991.
- CRUMEYROLLE, A. **Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras: Spinor Structures**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 57.
- DEWITT, B. S. Quantum theory of gravity. ii. the manifestly covariant theory. **Physical Review**, APS, v. 171, n. 5, p. 1834, 1968.
- DUTTA BIPLAB E BHATTACHARYA, K. Length contraction in Very Special Relativity. 2011.
- FIERZ, M. Zur fermischen theorie des β -zerfalls. **Zeitschrift für Physik**, Springer, v. 104, n. 7-8, p. 553–565, 1937.
- FREESE, K. K. freese, fc adams, ja frieman, and e. mottola, nucl. phys. b287, 797 (1987). **Nucl. Phys.**, v. 287, p. 797, 1987.

GASPERINI, M. Decreasing vacuum temperature: A thermal approach to the cosmological constant problem. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 194, n. 3, p. 347–349, 1987.

GASPERINI, M. A thermal interpretation of the cosmological constant. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 5, n. 3, p. 521, 1988.

GELL-MANN M. E LÉVY, M. The axial vector current in beta decay. **Il Nuovo Cimento (1955-1965)**, Springer, v. 16, n. 4, p. 705–726, 1960.

GILLARD, A. B. Quantum fields, dark matter, elko fields and non-standard wigner classes. University of Canterbury. Physics and Astronomy, 2012.

GILLARD AB E MARTIN, B. Quantum fields, dark matter and non-standard wigner classes. In: **Dark Matter In Astrophysics And Particle Physics**. [S.l.]: World Scientific, 2010. p. 451–456.

HORVATH, S. P. On the relativity of elko dark matter. **Master's thesis, University of Canterbury**, 2011.

HU B. L.; CRITCHLEY, R. e. S. A. Finite-temperature quantum field theory in curved spacetime: Quasilocal effective lagrangians. **Physical Review D**, APS, v. 35, n. 2, p. 510, 1987.

HU B. L. E O'CONNOR, D. J. Effective lagrangian for $\lambda \varphi^4$ theory in curved spacetime with varying background fields: Quasilocal approximation. **Physical Review D**, APS, v. 30, n. 4, p. 743, 1984.

ITZYKSON C. E ZUBER, J. B. **Quantum field theory**. [S.l.]: Courier Corporation, 2006.

JR, J. e. d. R. J. V. **An Introduction to Clifford Algebras and Spinors**. [S.l.]: Oxford University Press, 2016.

LANDAU, L. D. e. a. Relativistic quantum theory. Pergamon, 1971.

LEE, C.-Y. Symmetries of elko and massive vector fields. **arXiv preprint arXiv:1306.5491**, 2013.

LEE, C. Y. A lagrangian for mass dimension one fermionic dark matter. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 760, p. 164–169, 2016.

LEE, C. Y. Symmetries and unitary interactions of mass dimension one fermionic dark matter. **International Journal of Modern Physics A**, World Scientific, v. 31, n. 35, p. 1650187, 2016.

LEE T. D. E WICK, G. C. Space inversion, time reversal, and other discrete symmetries in local field theories. **Physical Review**, APS, v. 148, n. 4, p. 1385, 1966.

LEMOIS, N. A. **Mecânica analítica**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2007.

LOUNESTO, P. **Clifford algebras and spinors**. [S.l.]: Cambridge university press, 2001. v. 286.

MARINOV, M. S. Construction of invariant amplitudes for interactions of particles with any spin. **Annals of Physics**, Elsevier, v. 49, n. 3, p. 357–392, 1968.

- MOORS, E. On the reciprocal of the general algebraic matrix, abstract. **Bull. Amer. Math. Soc.**, v. 26, p. 394–395, 1920.
- MUKHI, S. Classical and quantum theory of supersymmetric σ -models. In: **Superstrings, unified theories and cosmology**. [S.l.: s.n.], 1987.
- NEPOMECHIE, R. I. Calculating heat kernels. **Physical Review D**, APS, v. 31, n. 12, p. 3291, 1985.
- NOVELLO, M. Constructing dirac linear fermions in terms of non-linear heisenberg spinors. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 80, n. 4, p. 41001, 2007.
- NOVELLO M, . B.-N. J. e. S. J. M. Model for a time-dependent cosmological constant. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 18, n. 7, p. 1261, 2001.
- NOVELLO M, . B.-N. J. e. S. J. M. A model for time-dependent cosmological constant and its consistency with the present friedmann universe. **Classical and Quantum Gravity**, IOP Publishing, v. 19, n. 11, p. 3107, 2002.
- ÖZER MURAT E TAHA, M. A possible solution to the main cosmological problems. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 171, n. 4, p. 363–365, 1986.
- ÖZER MURAT E TAHA, M. A model of the universe free of cosmological problems. **Nuclear Physics B**, Elsevier, v. 287, p. 776–796, 1987.
- PATERA, J. e. a. Subgroups of the poincaré group and their invariants. **Journal of Mathematical Physics**, AIP, v. 17, n. 6, p. 977–985, 1976.
- PAULI, W. Contributions mathématiques a la théorie des matrices de dirac. **Ann. Inst. Henri Poincaré**, v. 6, p. 109–136, 1936.
- PEEBLES P. J. E. E RATRA, B. Cosmology with a time-variable cosmological'constant'. **The Astrophysical Journal**, v. 325, p. L17–L20, 1988.
- PENROSE, R. A generalized inverse for matrices. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society**. [S.l.], 1955. v. 51, n. 3, p. 406–413.
- PEREIRA, S. H. e. a. $\lambda(t)$ cosmology induced by a slowly varying elko field. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2017, n. 01, p. 055, 2017.
- PESKIN, M. E. **An introduction to quantum field theory**. [S.l.]: CRC Press, 2018.
- RAMOND, P. Field theory. a modern primer. **Front. Phys.**, v. 74, p. 1–397, 1981.
- ROGERIO, R. J. B. Campos espinoriais elko. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2014.
- ROGERIO R. J. B; DA SILVA, J. M. H. P. S. H. e. d. R. R. A framework to a mass-dimension-one fermionic sigma model. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 113, n. 6, p. 60001, 2016. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/113/i=6/a=60001>>.
- ROGERIO, R. J. B. e. Effective lagrangian for a mass dimension one fermionic field in curved spacetime. **Journal of High Energy Physics**, v. 2018, n. 2, p. 145, Feb 2018. ISSN 1029-8479. Disponível em: <[https://doi.org/10.1007/JHEP02\(2018\)145](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2018)145)>.

ROGERIO R. J. B E DA SILVA, J. M. H. The local vicinity of spin sums for certain mass-dimension-one spinors. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 118, n. 1, p. 10003, 2017. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/118/i=1/a=10003>>.

ROGERIO R. J. B. E VILLALOBOS, C. H. C. Non-standard dirac adjoint spinor: The emergence of a new dual. **EPL (Europhysics Letters)**, IOP Publishing, v. 121, n. 2, p. 21001, 2018.

RYDER, L. H. **Quantum Field Theory**. 2. ed. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996.

SCHWINGER, J. On gauge invariance and vacuum polarization. **Physical Review**, APS, v. 82, n. 5, p. 664, 1951.

SHAPIRO, I. L. e. a. Variable cosmological constant as a planck scale effect. **Physics Letters B**, Elsevier, v. 574, n. 3-4, p. 149–155, 2003.

SHAPIRO I. L.; SOLA, J. e. Š. H. Running g and λ at low energies from physics at mx: possible cosmological and astrophysical implications. **Journal of cosmology and astroparticle physics**, IOP Publishing, v. 2005, n. 01, p. 012, 2005.

SILVA, J. M. H. e. a. da. On the bilinear covariants associated to mass dimension one spinors. **The European Physical Journal C**, Springer, v. 76, n. 10, p. 563, 2016.

SILVA J. M H. E PEREIRA, S. H. da. Exact solutions to elko spinors in spatially flat friedmann-robertson-walker spacetimes. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, IOP Publishing, v. 2014, n. 03, p. 009, 2014.

SPERANÇA, L. D. An identification of the dirac operator with the parity operator. **International Journal of Modern Physics D**, v. 23, n. 14, p. 1444003, 2014. Disponível em: <<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218271814440039>>.

TIKHONOV, A. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. **Soviet Meth. Dokl.**, v. 4, p. 1035–1038, 1963.

VILLALOBOS, C. H. C. Álgebra de espinores e novos espinores em física. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2017.

VILLALOBOS, C. H. C.; ROGERIO, R. J. B. The connection between dirac dynamic and parity symmetry. **EPL (Europhysics Letters)**, v. 116, n. 6, p. 60007, 2016. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0295-5075/116/i=6/a=60007>>.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 1.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. [S.l.]: Cambridge university press, 1995. v. 2.

WIGNER, E. On unitary representations of the inhomogeneous lorentz group. **Annals of Mathematics**, Annals of Mathematics, v. 40, n. 1, p. 149–204, 1939. ISSN 0003486X. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1968551>>.

WIGNER, E. Unitary representations of lorentz group including reflections. **Theoretical concepts and methods in elementary particle physics, Lectures of the Istanbul School of Theoretical Phys**, 1962.

YEPEZ, J. Einstein's vierbein field theory of curved space. **arXiv preprint arXiv:1106.2037**, 2011.

ZEE, A. **Quantum field theory in a nutshell**. [S.l.]: Princeton university press, 2010.

Apêndice A COMPONENTES ESPINORIAIS $\phi_L(k^\mu)$ e $\phi_R(k^\mu)$

Representando o vetor unitário $\hat{p}$, parametrizado em coordenadas esféricas, como

$$\hat{p} = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta)), \quad (369)$$

assim, as componentes mão esquerda são dadas por

$$\phi_L^+(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (370)$$

$$\phi_L^-(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -\sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ \cos(\theta/2) e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (371)$$

E as componentes de mão direita são representadas por

$$\phi_R^+(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \sin(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ i \cos(\theta/2) e^{i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (372)$$

$$\phi_R^-(k^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} -i \cos(\theta/2) e^{-i\phi/2} \\ -i \sin(\theta/2) e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (373)$$

O fator de massa é escolhido de forma que no caso limite de partículas sem massa, $m \rightarrow 0$, os espinores em repouso no espaço de representação $(1/2, 0)$ e $(0, 1/2)$ desapareçam, pois não podem existir partículas sem massa em repouso (AHLUWALIA D. V. E JOHNSON, 1994). Para que isso seja consistente, as amplitudes de interação devem ter o fator m^j , onde no caso j é o spin associado à partícula (MARINOV, 1968).

Apêndice B MODELO SIGMA FERMIONICO

Este apêndice foi reservado para que façamos uma abordagem do modelo sigma fermiônico utilizando os férmions construídos e apresentados no escopo da presente tese. Por modelo sigma nos referimos ao mapeamento do espaço de Minkowski dentro de um target-space. Dado mapeamento é realizado pelos campos espinoriais e suas relações com a teoria de Utiyama-Yang-Mills (GELL-MANN M. E LÉVY, 1960). Neste viés, tendo em mente a característica Grassmanniana do espinor, ainda levaremos em conta o target-space com torção. Tais espinores são escolhidos como sendo uma realização específica dos férmions de dimensão de massa um, em que a característica fermiônica não-comutativa é governada pela torção (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016). Além disso, verificaremos também, como aplicação cosmológica, que esses espinores servirão como fonte de matéria escura em um background em expansão e constataremos que eles induzem uma constante cosmológica efetiva para o universo, reforçando assim o que já foi verificado no Capítulo 7.

B.1 UM PANORÂMA GERAL DO MODELO SIGMA COM TORÇÃO

Aqui vamos apresentar uma generalização direta relacionada à interação entre modelos sigma não-lineares e teorias não-abelianas (MUKHI, 1987), levando em conta termos de torção. Para tanto, começaremos descrevendo os aspectos mais gerais do modelo, não especificando ainda para os férmions de dimensão de massa de um. Seja $\{\xi_i\}$ a base canônica em um referencial inercial no target-space Σ , e $\{d\xi^i\}$ a base correspondente dual. É possível dividir a geometria do target-space definindo-se uma métrica efetiva $g \in \sec(T_p\Sigma)^* \times \sec(T_p\Sigma)^*$, onde p é um ponto arbitrário pertencente à Σ , e $\sec T_p\Sigma$ é uma seção do fibrado tangente de Σ no ponto p . Isso nos permite escrever

$$g(\varphi, \varphi) = [g_{mn}d\xi^m \otimes d\xi^n + \gamma_{mn}d\xi^m \wedge d\xi^n](\varphi^i \xi_i, \varphi^j \xi_j), \quad (374)$$

onde $\otimes$ e $\wedge$ representam os produtos tensorial e exterior, respectivamente e $\phi = \varphi^i \xi_i$ é um vetor. Um cálculo direto de (374), levando em conta a relação anti-simétrica entre os dois produtos, nos fornece

$$g(\varphi, \varphi) = g_{ij}\varphi^i\varphi^j + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{ij}\varphi^i\varphi^j, \quad (375)$$

sendo $\tilde{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} - \gamma_{ji}$. Por escrever dado produto como uma parte comutativa e uma anticomutativa, i. e., $\varphi^i \varphi^j = \frac{1}{2}[\varphi^i, \varphi^j] + \frac{1}{2}\{\varphi^i, \varphi^j\}$, temos

$$g(\varphi, \varphi) = \frac{1}{2}g_{ij}\{\varphi^i, \varphi^j\} + \frac{1}{4}\tilde{\gamma}_{ij}[\varphi^i, \varphi^j]. \quad (376)$$

Enfatizamos que uma classificação completa dos espinores com base em seus covariantes bilineares em um espaço-tempo em que a métrica é dotada de uma parte simétrica e anti-simétrica foi realizado em (ABŁAMOWICZ R.; GONÇALVES, 2014). O modelo sigma completo, assim como (376), pode ser estudado através da lagrangiana livre

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g(\partial_\mu \varphi, \partial^\mu \varphi) = \frac{1}{4}g_{ij}\{\partial_\mu \varphi^i, \partial^\mu \varphi^j\} + \frac{1}{8}\tilde{\gamma}_{ij}[\partial_\mu \varphi^i, \partial^\mu \varphi^j], \quad (377)$$

aqui os índices Gregos estão relacionados com as coordenadas do espaço-tempo. Certamente, no caso comutativo usual, temos garantido $[\partial_\mu \varphi^i, \partial^\mu \varphi^j] = 0$, portanto, ficamos apenas com $\mathcal{L} = \frac{1}{2}g_{ij}\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j$. Neste último caso, a conexão com as teorias de Utiyama-Yang-Mills são determinadas impondo-se $\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^i} = 0$ (sob uma integração em todo espaço-tempo). Nesse sentido, os símbolos de Christoffel $\Gamma_{jk}^i(\varphi)$ são gerados automaticamente, em termos dos quais a conexão $A_{\mu k}^i(\varphi) = \Gamma_{jk}^i(\varphi)\partial_\mu \varphi^j$ é identificada (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016). A equação de movimento se traduz por (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016)

$$D_{\mu j}^i(\partial^\mu \varphi^j) = 0, \quad (378)$$

note que a derivada covariante é dada por $D_{\mu j}^i = \partial_\mu \delta_j^i + A_{\mu j}^i$. Além disso, a contração do tensor de curvatura de Riemann R_{jkl}^i com $\partial_\mu \varphi^k \partial_\nu \varphi^l$ leva ao *field-strenght* não-abeliano

$$R_{jkl}^i(\partial_\mu \varphi^k)(\partial_\nu \varphi^l) = \partial_\mu A_{\nu j}^i - \partial_\nu A_{\mu j}^i + ([A_\mu, A_\nu])_j^i. \quad (379)$$

Voltando ao caso completo, levando em conta o setor não comutativo, a variação funcional da lagrangiana fornece

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi^m + \tilde{\Gamma}_{ij}^m(\varphi) \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j = 0, \quad (380)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^m(\varphi) = \Gamma_{ij}^m(\varphi) + \Lambda_{ij}^m(\varphi), \quad (381)$$

em que $\Lambda_{ij}^m(\varphi)$ é definido como

$$\Lambda_{ij}^m(\varphi) \equiv \frac{1}{2}g^{mk} \left(\partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ik} - \frac{1}{2} \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} \right), \quad (382)$$

e, assim, notamos que existe uma contribuição explícita dos termos de torção (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016). Ademais, o tensor de curvatura no target-space é escrito como

$$\tilde{R}_{jkl}^i = R_{jkl}^i + \partial_{[k}\Lambda_{j]l}^i + (\Gamma_{m[k}^i + \Lambda_{m[k}^i)\Lambda_{j]l}^m + \Lambda_{m[k}^i\Gamma_{j]l}^m. \quad (383)$$

Perceba que se $\tilde{\gamma}_{ij} = 0$ e impondo $[\partial_\mu\varphi^i, \partial^\mu\varphi^j] = 0$, (adotando $\Lambda_{ij}^m(\varphi) = 0$), as equações (380) e (383) se reduzem ao caso usual, como era esperado. De fato, não é trivial encontrar uma contrapartida geométrica das quantidades de Yang-Mills como em (379) para esse caso em questão. Devemos frisar que o aspecto mais importante aqui é que quando a comutatividade é levada em conta no target-space, vemos que termos de torção são automaticamente gerados (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016).

Uma aplicação bastante útil para ser implementada é descrevermos algumas implicações cosmológicas utilizando o modelo sigma. Mostraremos brevemente algumas das principais equações que devem ser consideradas para esse caso, dada uma forma explícita aos campos do target-space. A lagrangiana do modelo sigma (377) contida na ação em um background curvo é tida como

$$S = \int \sqrt{-\bar{g}} d^4x \left[-\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j \bar{g}^{\mu\nu} - W(\varphi) \right], \quad (384)$$

onde R representa o escalar de Ricci, $\kappa = 8\pi G$ e $h_{ij} = g_{ij} + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{ij}$. A métrica é aqui representada por $\bar{g}^{\mu\nu}$ e $W(\varphi)$ está associado com um potencial auto-interativo. Variando-se a ação (384) com respeito a métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$, somos levados as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\bar{g}_{\mu\nu}R = 2\kappa T_{\mu\nu}, \quad (385)$$

sendo $R_{\mu\nu}$ o tensor de Ricci e $T_{\mu\nu}$ o tensor energia-momento correspondente a matéria (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016)

$$T_{\mu\nu} = h_{ij} \partial_\mu \varphi^i \partial_\nu \varphi^j - \bar{g}_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} h_{ij} \partial_\alpha \varphi^i \partial_\beta \varphi^j \bar{g}^{\alpha\beta} - W(\varphi) \right]. \quad (386)$$

Agora, variando a ação com relação a φ^k temos a equação de movimento do campo

$$\frac{1}{\sqrt{-\bar{g}}} \partial^\mu (\sqrt{-\bar{g}} \partial_\mu \varphi^m) + \tilde{\Gamma}_{ij}^m (\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j) + (\partial_k W) g^{km} = 0, \quad (387)$$

com $\tilde{\Gamma}_{ij}^m$ dado em (381). É fácil e direto verificar que (387) se reduz à (380), quando a métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$ é a métrica plana de Minkowski e o potencial $W(\varphi)$ é nulo. Ao se especificar os campos φ^i e o potencial $W(\varphi)$, pode-se obter as equações de Friedmann através de (385). Um universo emergente, suportado por um modelo sigma não-linear sem torção, fora estudado em (BEESHAM A.; CHERVON, 2009). No contexto aqui abordado, levando em

consideração que h_{ij} engloba termos de torção, imagina-se que exista a grande possibilidade de que a dinâmica da evolução do universo seja alterada.

B.2 CONSTRUINDO O MODELO SIGMA

É possível fornecer uma base particular adaptada aos autoespinores de $\mathcal{C}$, relacionada à representação de Majorana. De forma alternativa, podemos fazer uso da representação quiral, explorada paradigmaticamente em toda a literatura de espinores de dimensão de massa um (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016). Seja qual for a base escolhida, deixaremos claro que dada abordagem é independente da escolha da base. Para o nosso propósito, será extremamente relevante que sejam construídas todas as possibilidades de espinores, posto isso, sejam então c^i e d_j números complexos, escreveremos $\lambda = c^i \lambda_i$ e $\bar{\lambda} = d_j \bar{\lambda}^j$. Agora, decomporemos λ e $\bar{\lambda}$ em termos da base canônica usual e também da base correspondente dual, tal raciocínio se traduz a

$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \lambda_i^1 \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \lambda_i^4 \end{pmatrix} = \lambda_i^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \lambda_i^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (388)$$

e também

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}^j = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1^j & \bar{\lambda}_2^j & \bar{\lambda}_3^j & \bar{\lambda}_4^j \end{pmatrix} &= \bar{\lambda}_1^j (1, 0, 0, 0) + \cdots \\ &+ \bar{\lambda}_4^j (0, 0, 0, 1). \end{aligned} \quad (389)$$

A contar deste momento, denotando-se o elemento da base por $\{\xi_a\}$ e o correspondente dual por $\{\bar{\xi}^b\}$, temos $\lambda = c^i \lambda_i^a \xi_a$ e $\bar{\lambda} = d_j \bar{\lambda}_b^j \bar{\xi}^b$, onde $\bar{\xi}^b(\xi_a) = \delta_a^b$. De maneira a implementar o modelo sigma para o caso em questão, será necessário modificar os produtos tensorial e exterior, os quais devem abranger o caráter fermiônico do campo (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016).

Começaremos a definir, então, o produto $\tilde{\otimes}$ da seguinte maneira: seja $\mathbb{S}$ o espaço vetorial complexo gerado por todas as combinações lineares finitas dos produtos cartesianos usuais $(v_i, \bar{v}^i)$, onde v_i e $\bar{v}^i$ são embasados pelas respectivas bases canônicas. Ademais, seja I um sub-espaço de $\mathbb{S}$ gerado por

$$(v_i + u_i, \bar{w}^i) - (v_i, \bar{v}^i) - (u_i, \bar{v}^i), \quad (390)$$

$$(v_i, \bar{w}^i + \bar{u}^i) - (v_i, \bar{u}^i), \quad (391)$$

$$(kv_i, l \bar{w}^i) - kl(v_i, \bar{w}^i), \quad (392)$$

sendo k e l números complexos e v_i , u_i e w_i , representam a base canônica (o mesmo é válido para a base dual). Assim, o produto $\tilde{\otimes}$ é definido pela conjugação dos elementos no espaço $\mathbf{S}/\mathbf{I}$, e, desta maneira, as equações (390)-(392) asseguram a bilinearidade. Posto isto, devemos ressaltar alguns aspectos importantes de modo a deixar claro as propriedades relevantes de $\tilde{\otimes}$. Sendo a base de $\mathbf{S}/\mathbf{I}$ é dada por $\{\xi_i \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{i}}\}$ (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016), definiremos a ação de $\tilde{\otimes}$ como

$$(v \tilde{\otimes} \bar{w})(\bar{u}, x) = (v^i \xi_i \tilde{\otimes} \bar{w}_j \bar{\xi}^{\bar{j}})(\bar{u}_k \bar{\xi}^{\bar{k}}, x^l \xi_l) = v^i \bar{w}_j \bar{u}_i x^j, \quad (393)$$

onde $\bar{w}_j$ e $\bar{u}_j$ representam apenas coeficientes. O fato mais importante é que nós definimos a ação na base de $(\xi_i \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{j}})(\bar{\xi}^{\bar{k}}, \xi_l) = \bar{\xi}^{\bar{k}}(\xi_i) \bar{\xi}^{\bar{j}}(\xi_l) = \delta_i^k \delta_l^j$. Cabe ainda mencionar que o produto $\tilde{\otimes}$ é único (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016), a menos de isomorfismos¹. Por último, seja $\{\xi_i\} \cup \{\xi_i \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{j}}\}$ sobre o domínio de $\mathbb{C}$ sendo a base de $\tilde{\mathbf{T}}$ e $\tilde{\mathbf{I}}$ o bilateral ideal gerado por $\xi_i \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{i}}$. O produto $\tilde{\wedge}$ atuando em $\tilde{\mathbf{T}}/\tilde{\mathbf{I}}$ está relacionado com $\tilde{\otimes}$ e, como esperado, é dado por $\xi_m \tilde{\wedge} \bar{\xi}^{\bar{n}} = \frac{1}{2}(\xi_m \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{n}} - \xi_n \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{m}})$.

Agora, estamos aptos a implementar a divisão da equação (332), porém agora com os novos produtos definidos. Consequentemente, isso será dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_n^m \xi_m \tilde{\otimes} \bar{\xi}^{\bar{n}} (\partial^\mu \bar{\lambda}, \partial_\mu \lambda) + \frac{1}{2} \gamma_n^m \xi_m \tilde{\wedge} \bar{\xi}^{\bar{n}} (\partial^\mu \bar{\lambda}, \partial_\mu \lambda). \quad (394)$$

De acordo com nossa construção anterior, a decomposição fermiônica junto com a bilinearidade dos novos produtos definidos pode ser usada de uma forma direta. Assim, na decomposição adotada $\lambda = c^i \lambda_i^a \xi_a$ e $\bar{\lambda} = d_j \bar{\lambda}_b^{\bar{j}} \bar{\xi}^{\bar{b}}$ os termos λ_i^a e $\bar{\lambda}_b^{\bar{j}}$ são entendidos como variáveis Grassmannianas², ressaltamos ainda que a estrutura formal dos espinores aqui usados são as mesmas que em (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005) no referencial de repouso. Aproveitando-nos destas observações, a lagrangiana (394) com a adição de um termo de massa produz

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} g_j^i d_a c^b \partial^\mu \bar{\lambda}_i^{\bar{a}} \partial_\mu \lambda_b^j + \frac{1}{4} \tilde{\gamma}_j^i d_a c^b \partial^\mu \bar{\lambda}_i^{\bar{a}} \partial_\mu \lambda_b^j \\ & + m^2 d_j c^i \bar{\lambda}_a^{\bar{j}} \lambda_i^a. \end{aligned} \quad (395)$$

Isso será nosso ponto inicial para o desenvolvimento do modelo sigma fermiônico para os férmions de dimensão de massa um. A partir da densidade lagrangiana (395) é interessante notar que os termos de torção contribuem com a densidade de corrente de spin. De fato, o surgimento de $\tilde{\gamma}_j^i$ na expressão abaixo torna isso explícito (ROGERIO R. J. B; DA SILVA,

¹De um ponto de vista complementar, o produto definido $\tilde{\otimes}$ é apenas um isomorfismo do produto tensorial usual $\otimes$.

²Grosso modo, isso é uma tentativa de reproduzir as características quânticas do campo ao se absorver os operadores de criação e aniquilação dentro dos coeficientes de expansão.

2016):

$$S_{\alpha\beta}^{\mu} = -\frac{1}{2}d_a c^b (g_j^i + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_j^i) \left[\partial^{\mu} \bar{\lambda}_i^a \frac{\delta \lambda_b^j}{\delta \omega^{\alpha\beta}} + \frac{\delta \bar{\lambda}_i^a}{\delta \omega_{\alpha\beta}} \partial^{\mu} \lambda_b^j \right]. \quad (396)$$

Devemos finalizar considerando a lagrangiana (395) como uma fonte de matéria, em um background curvo e em expansão, estando, então, de acordo com o que já foi mostrado no Capítulo 7. A fim de escrever a ação para o caso em mãos, primeiramente vamos definir os campos $\bar{\phi}_i = d_a \bar{\lambda}_i^a$, $\phi^j = c^b \lambda_b^j$, e, conseqüentemente, as derivadas covariantes $\nabla_{\mu} \bar{\phi}_i = \partial_{\mu} \bar{\phi}_i + \bar{\phi}_i \Gamma_{\mu}$ e $\nabla_{\mu} \phi^j = \partial_{\mu} \phi^j - \Gamma_{\mu} \phi^j$, com Γ_{μ} representando as conexões de spin definidas no Capítulo 7. Portanto, a ação no espaço curvo é tida como (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016)

$$S = \int \sqrt{-\bar{g}} d^4x \left[-\frac{R}{2\kappa} + \frac{1}{2} h_j^i \nabla_{\mu} \bar{\phi}_i \nabla_{\nu} \phi^j \bar{g}^{\mu\nu} - W(\bar{\phi}, \phi) \right], \quad (397)$$

onde $h_j^i = g_j^i + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}_j^i$. As equações de movimento para os campos são obtidas diretamente pela variação da ação com relação a $\bar{\phi}_i$ e ϕ^j . A equação (397) pode servir como um ponto de partida para aplicarmos o formalismo aqui apresentado dentro de um contexto cosmológico. Note que, em particular, a interação quártica que aparece é devido a contribuição dos termos de torção (provenientes da conexão de spin). Agora, visando mostrar uma contribuição explícita proveniente da parte simétrica e anti-simétrica do target-space nas equações relevantes para a cosmologia. À título de simplificação, vamos supor um conjunto de espinores constantes, tais que $\partial_{\mu} \bar{\lambda} = 0 = \partial^{\mu} \lambda$, e o potencial dado por $W = \frac{1}{2} m^2 \bar{\lambda} \lambda$. Podemos escrever h_j^i da seguinte maneira

$$h_j^i = \begin{pmatrix} g & \gamma & \gamma & \gamma \\ -\gamma & g & \gamma & \gamma \\ -\gamma & -\gamma & g & \gamma \\ -\gamma & -\gamma & -\gamma & g \end{pmatrix}, \quad (398)$$

onde g e γ representam a parte simétrica e anti-simétrica de h_j^i (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016). Pode parecer uma simplificação excessiva, porém (como veremos adiante) essa particularização nos leva a uma consequência física bastante relevante. Utilizando de uma métrica de FRW plana, homogênea e isotrópica, $\bar{g}_{\mu\nu} = \text{diag}[1, -a(t)^2, -a(t)^2, -a(t)^2]$ as conexões de spin Γ_{μ} podem ser determinadas como $\Gamma_0 = 0$ e $\Gamma_k = -\frac{\dot{a}}{2} \gamma_0 \gamma_k$, sendo que γ_{μ} são as matrizes de Dirac. Note que, mesmo para um caso onde os espinores são constantes, o termo de conexão de spin se acopla à métrica, através de $\bar{\phi}_i \Gamma_{\mu} \Gamma^{\mu} \phi^j$, onde $\Gamma_{\mu} \Gamma^{\mu} = -\frac{3}{4} \frac{\dot{a}^2}{a^2} \mathbb{1}$ e, desta forma, contribui com termos que dependem explicitamente do tempo. A ação

(397) fica sob a forma

$$S = \int \sqrt{-\bar{g}} d^4x \left[-\frac{R}{2\kappa} + \Lambda_S(t) + \Lambda_A(t) - \Lambda_m \right]. \quad (399)$$

Aqui Λ_m advém da parte relacionada ao potencial, ou seja, $\Lambda_m = \frac{1}{2}m^2 \bar{\lambda} \lambda$, e representa o termo de constante cosmológica, com dependência da massa do campo. Os termos $\Lambda_S(t)$ e $\Lambda_A(t)$ estão relacionados com a parte simétrica e anti-simétrica, respectivamente, que são provenientes da contribuição do modelo sigma, os quais podem ser escritos como $\Lambda_S(t) = \frac{3}{8}gC(d_a, c^b, \bar{\lambda}_i^a, \lambda_b^i)H(t)^2$ e $\Lambda_A(t) = \frac{3}{16}\gamma C(d_a, c^b, \bar{\lambda}_i^a, \lambda_b^i)H(t)^2$, onde $C(d_a, c^b, \bar{\lambda}_i^a, \lambda_b^i)$ é uma constante e $H(t) = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. Eles compõem uma constante cosmológica efetiva dependente do tempo, $\Lambda_{eff}(t) = \Lambda_S(t) + \Lambda_A(t) - \Lambda_m$. Na evolução cosmológica primordial, quando $\Lambda_S(t) + \Lambda_A(t) > \Lambda_m$, a contribuição positiva de Λ_{eff} serve como um campo gravitacional atrativo na parte geométrica da equação de Einstein, levando a um universo desacelerado. Conforme o universo se expandia $H(t)$ decaía. Quando a contribuição $\Lambda_S(t) + \Lambda_A(t) < \Lambda_m$ é alcançada, o universo passa a ser dominado por uma contribuição negativa de Λ_{eff} , que implica em uma força gravitacional repulsiva, conduzida por uma constante cosmológica Λ_m , coincidindo com o modelo Λ CDM (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016). Podemos notar que os parâmetros podem ser ajustados de modo a reproduzir a transição de uma expansão acelerada para uma expansão desacelerada do universo (ROGERIO R. J. B; DA SILVA, 2016).

Apêndice C TEORIA DA RELATIVIDADE MUITO ESPECIAL

A Very Special Relativity (VSR) foi proposta no ano de 2006 por Andrew Cohen e Sheldon Glashow. Tal teoria foi elaborada com o intuito de melhor descrever teorias que violam a simetria de Lorentz, assim como o caso da primeira formulação do Elko que, como vimos, adequa-se exatamente à esse caso, pois possui um termo de quebra de simetria codificado nas somas de spin. Os autores ainda mostram que a invariância das leis físicas (intervalo invariante) e a existência de uma velocidade isotrópica limite e universal (velocidade da luz) em qualquer referencial inercial não necessitam do grupo completo de Lorentz mas sim podem ser explicadas por dois de seus subgrupos, denominados $HOM(2)$ e $SIM(2)$. De modo geral, se a teoria a ser estudada contém partículas massivas e não viola nenhuma simetria discreta como P , $\mathcal{T}$, $\mathcal{CP}$ e $\mathcal{CT}$ então a escolha é única, deve-se escolher o grupo de Poincaré. Caso a teoria viole alguma simetria discreta, então o grupo que melhor abordará essa teoria é algum subgrupo que está por trás da VSR.

À época, para a primeira formulação do Elko, a VSR era tida como uma teoria de suma importância, como visto no Capítulo 3. Veremos aqui que na estrutura algébrica da VSR as somas de spin para o Elko são invariantes por quaisquer transformações, possibilitando desta maneira uma melhor interpretação física. Portanto, deixamos reservado esse capítulo com o intuito de esclarecer melhor ao leitor essa abordagem que por anos fez-se necessária e fundamental.

C.1 OS GRUPOS DE TRANSFORMAÇÃO E A ESTRUTURA ALGÉBRICA DA VSR

Definiremos os subgrupos do grupo de Lorentz¹ como subgrupos que tecem a VSR, se a estes subgrupos quando feita a adição de qualquer simetria discreta tal como: P , $\mathcal{T}$, $\mathcal{CP}$ e $\mathcal{CT}$ retornamos novamente ao grupo de Lorentz. Dito isto, o menor grupo que carrega essa propriedade é composto pelos geradores a seguir

$$T_1 \equiv K_x + J_y \quad \text{e} \quad T_2 \equiv K_y - J_x, \quad (400)$$

¹Para fixar a notação, quando nos referirmos ao grupo de Lorentz estamos falando do grupo formado pelas simetrias discretas, geradores de rotações $\mathbf{J}$ e geradores de boosts $\mathbf{K}$. Quando nos referimos ao grupo de Poincaré, obviamente, estamos falando do grupo de Lorentz mais geradores de translações no espaço-tempo.

onde $\mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ são geradores usuais de rotações e boosts, respectivamente. Esse grupo é isomorfo ao grupo de translações no plano $T(2)$ (HORVATH, 2011; COHEN A. G; E GLASHOW, 2006). Atentando-nos ao fato de que $T(2)$ é um subgrupo de Lorentz, verificaremos então se com a adição da simetria de paridade, P , por exemplo, retornamos ao grupo de Lorentz. Como consequência, tanto P quanto $\mathcal{T}$ transformam T_1 em $\bar{T}_1$ e T_2 em $\bar{T}_2$. É fácil ver que

$$\begin{aligned} P\mathbf{K}P^{-1} &\rightarrow -\mathbf{K}, & \mathcal{T}\mathbf{K}\mathcal{T}^{-1} &\rightarrow -\mathbf{K} \quad , \\ P\mathbf{J}P^{-1} &\rightarrow \mathbf{J}, & \mathcal{T}\mathbf{J}\mathcal{T}^{-1} &\rightarrow \mathbf{J} \quad . \end{aligned} \quad (401)$$

Note que apenas os geradores de boost ganham um sinal. Isso advém do fato que a atuação de P em tais geradores inverte o sentido da velocidade, fazendo $\vec{v} \rightarrow -\vec{v}$. Para os geradores de rotação, os quais da maneira mais simples podemos escrever como $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$, a atuação de P inverte o sinal de ambos os termos mantendo o resultado final inalterado.

Uma vez que façamos combinações apropriadas com as equações (400) e (401) podemos obter K_x , K_y , J_x e J_y . Além do mais, usando as relações de comutação dos geradores do grupo de Lorentz

$$[K_x, K_y] = -iJ_z \quad \text{e permutações cíclicas}, \quad (402)$$

$$[J_x, K_x] = 0 \quad \text{etc.}, \quad (403)$$

$$[J_x, K_y] = iK_z \quad \text{e permutações cíclicas}, \quad (404)$$

e também as relações entre os operadores T_1 , T_2 , $\bar{T}_1$ e $\bar{T}_2$, pode-se facilmente ver que

$$[T_1, T_2] = [\bar{T}_1, \bar{T}_2] = 0, \quad (405)$$

$$[T_1, \bar{T}_1] = [T_2, \bar{T}_2] = 2iK_z, \quad (406)$$

$$[T_1, \bar{T}_2] = [\bar{T}_1, T_2] = -2iJ_z, \quad (407)$$

$$[T_1, J_z] = -[T_2, K_z] = -iT_2, \quad (408)$$

$$[T_2, J_z] = [T_1, K_z] = iT_1, \quad (409)$$

$$[\bar{T}_1, J_z] = [\bar{T}_2, K_z] = -i\bar{T}_2, \quad (410)$$

$$[\bar{T}_1, K_z] = -[\bar{T}_2, J_z] = -i\bar{T}_1. \quad (411)$$

Logo, podemos recuperar os geradores K_z e J_z . Consequentemente, é fácil notar que o grupo $T(2)$ com a adição de P e $\mathcal{T}$ é equivalente ao grupo de Lorentz. Nosso próximo passo será catalogar todos os grupos que compõe a VSR. Podemos adicionar à $T(2)$ o gerador de rotação em torno do eixo z , J_z , e assim, isso nos fornece um grupo isomorfo ao grupo euclidiano $E(2)$, o grupo de rotações e translações no plano xy . É claro que $E(2)$ com a adição de alguma simetria discreta é equivalente ao grupo de Lorentz, uma

vez que $T(2)$ é um subgrupo de $E(2)$. (ROGERIO, 2014). Prosseguindo com a ideia de aumentar os grupos da VSR, adicionando a $T(2)$ o gerador K_z temos o grupo isomorfo ao grupo de três parâmetros de transformações de similaridade, ou homotetias, $HOM(2)$, enquanto que com a adição de ambos os geradores K_z e J_z consegue-se construir um grupo isomorfo ao grupo de 4 parâmetros, similitude, ou $SIM(2)$ (HORVATH, 2011; COHEN A. G; E GLASHOW, 2006), o maior grupo. Temos então, de forma ilustrativa a tabela abaixo com todos os grupos que carregam as características mencionadas anteriormente

Grupo	Geradores	Álgebra
$T(2)$	T_1, T_2	$[T_1, T_2] = 0$
$E(2)$	T_1, T_2, J_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1$
$HOM(2)$	T_1, T_2, K_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1, [T_2, K_z] = iT_2$
$SIM(2)$	T_1, T_2, J_z, K_z	$[T_1, T_2] = 0, [T_1, K_z] = iT_1, [T_2, K_z] = iT_2$ $[T_1, J_z] = -iT_2, [T_2, J_z] = iT_1, [J_z, K_z] = 0$

Tabela C.1: Os 4 subgrupos do grupo de Lorentz que compõe a VSR

Dois dos subgrupos de Lorentz, $HOM(2)$ e $SIM(2)$, permitem a construção de uma transformação que simula o comportamento do boost de Lorentz, isto é, a transformação da VSR que conecta dois referenciais inerciais. Tal transformação toma um dado vetor ou espinor do repouso levando para um referencial com um momento arbitrário (HORVATH, 2011). O boost da VSR é definido como (COHEN A. G; E GLASHOW, 2006)

$$\mathcal{V} \equiv e^{iT_1 \epsilon_1} e^{iT_2 \epsilon_2} e^{iK_z \varphi_z}. \quad (412)$$

Os parâmetros de transformação acima são dados por

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &\equiv \frac{p^1}{p^0 - p^3}, \\ \epsilon_2 &\equiv \frac{p^2}{p^0 - p^3}, \\ \varphi_z &\equiv -\log\left(\frac{p^0 - p^3}{m}\right). \end{aligned} \quad (413)$$

Com tais parâmetros podemos escrever o boost da VSR como

$$\mathcal{V}(p) = \begin{pmatrix} \frac{p^0}{m} & \frac{p^1}{p^0-p^3} & \frac{p^2}{p^0-p^3} & \frac{m^2-p^0(p^0-p^3)}{m(p^0-p^3)} \\ \frac{p^1}{m} & 1 & 0 & -\frac{p^1}{m} \\ \frac{p^2}{m} & 0 & 1 & -\frac{p^2}{m} \\ \frac{p^3}{m} & \frac{p^1}{p^0-p^3} & \frac{p^2}{p^0-p^3} & \frac{m^2-p^3(p^0-p^3)}{m(p^0-p^3)} \end{pmatrix}. \quad (414)$$

O operador de boost acima nos permite escrever $p^\mu = \mathcal{V}k^\mu$ onde $k^\mu = (m, \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p})$. Podemos obter um conjunto de coordenadas transformadas, dadas por

$$\begin{aligned} t &= \gamma t' + \gamma u_x x' + \gamma u_y y' + \gamma u_z z', \\ x &= \frac{u_x}{1+u_z} t' + x' - \frac{u_x}{1+u_z} z', \\ y &= \frac{u_y}{1+u_z} t' + y' - \frac{u_y}{1+u_z} z', \\ z &= \frac{\gamma(u_z + \mathbf{u}^2)}{1+u_z} t' + \gamma u_x x' + \gamma u_y y' + \frac{\gamma(1 - \mathbf{u}^2 + u_z + u_z^2)}{1+u_z} z', \end{aligned}$$

onde $p^0 = \gamma m$ e $p^i = \gamma m u^i$ com $\gamma = 1/\sqrt{1 - \mathbf{u}^2}$. A partir do conjunto de equações acima pode-se mostrar que $ds^2 = ds'^2$, ou seja, o intervalo permanece invariante por transformações de $HOM(2)$ e $SIM(2)$ (DUTTA BIPLAB E BHATTACHARYA, 2011).

C.2 REPRESENTAÇÃO ESPINORIAL DA ÁLGEBRA DOS GRUPOS $SIM(2)$ E $HOM(2)$

A partir deste momento passaremos a analisar a álgebra dos grupos $SIM(2)$ e $HOM(2)$. Vamos denotá-las por $\mathfrak{sim}(2)$ e $\mathfrak{hom}(2)$, respectivamente. Começaremos com a observação que essas duas álgebras admitem dois tipos de representações espinoriais de spin 1/2 as quais chamaremos de *tipo-a* e *tipo-b*, algo bastante similar com o que foi feito no Capítulo 2. Por definição, uma vez que paridade não é uma simetria de $SIM(2)$, a forma com que esses dois tipos se transformam um em outro é diferente dos *tipo-r* e *tipo-l* da representação espinorial de Weyl. Os geradores do *tipo-a* na representação espinorial $\mathfrak{sim}(2)$ são

$$\mathcal{T}_1^a \equiv \mathcal{K}_x^a + \mathcal{J}_y^a, \quad (415)$$

$$\mathcal{T}_2^a \equiv \mathcal{K}_y^a - \mathcal{J}_x^a, \quad (416)$$

onde $\mathcal{K}_z^a$ e $\mathcal{J}_z^a$ são

$$\mathcal{K}^a = -i\sigma/2, \quad \mathcal{J}^a = \sigma/2. \quad (417)$$

Para os *tipo-b* temos os geradores

$$\mathcal{T}_1^b \equiv \mathcal{K}_x^b + \mathcal{J}_y^b, \quad (418)$$

$$\mathcal{T}_2^b \equiv \mathcal{K}_y^b - \mathcal{J}_x^b, \quad (419)$$

com as quantidades $\mathcal{K}_z^b$ e $\mathcal{J}_z^b$ iguais a

$$\mathcal{K}^b = +i\sigma/2, \quad \mathcal{J}^b = \sigma/2, \quad (420)$$

sendo $\sigma = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ as matrizes de Pauli, dadas por

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (421)$$

Fazendo uma soma direta entre os geradores do *tipo-a* e *tipo-b* teremos uma representação espinorial quadridimensional dada pelos geradores na forma matricial (HORVATH, 2011)

$$\mathcal{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (422)$$

$$\mathcal{J}_z = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (423)$$

Agora, usando esses geradores podemos redefinir (412) como (HORVATH, 2011)

$$\mathcal{V} \equiv e^{i\mathcal{T}_1\epsilon_1} e^{i\mathcal{T}_2\epsilon_2} e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z}. \quad (424)$$

Para encontrar a forma matricial de (424) devemos expandir as exponenciais em termos dos geradores atentando-nos para o fato de que $(\mathcal{T}_1)^2 = (\mathcal{T}_2)^2 = 0$ e $(2\mathcal{K}_z)^3 = -2\mathcal{K}_z$. Assim,

temos (AHLUWALIA D. V. E HORVATH, 2010; HORVATH, 2011)

$$\begin{aligned} e^{i\mathcal{T}_1\epsilon_1} &= 1 + i\mathcal{T}_1\epsilon_1, \\ e^{i\mathcal{T}_2\epsilon_2} &= 1 + i\mathcal{T}_2\epsilon_2, \\ e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z} &= 1 + i(2\mathcal{K}_z)\sinh(\varphi/2) + (2\mathcal{K}_z)^2[1 - \cosh(\varphi_z/2)]. \end{aligned} \quad (425)$$

Usando então as relações dadas em (426) podemos encontrar a forma matricial de (424)

$$\mathcal{V}(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} & \frac{p^1-ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{p^0-p^3}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p^1+ip^2}{\sqrt{m(p^0-p^3)}} & \sqrt{\frac{m}{p^0-p^3}} \end{pmatrix}. \quad (426)$$

Desta maneira encontramos a representação espinorial do boost da VSR, o qual será bastante importante no escopo do desenvolvimento desse apêndice.

C.3 INVARIANTES DE CASIMIR DO GRUPO ISIM(2)

Sabemos que para o grupo de Poincaré os invariantes de Casimir são dados por (RYDER, 1996)

$$C_1 = P_\mu P^\mu = m^2, \quad C_2 = W_\mu W^\mu = -m^2 s(s+1), \quad (427)$$

sendo $W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}J^{\nu\rho}P^\lambda$ o pseudo-vetor de Pauli-Lubanski e $\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda}$ o tensor de Livi-Civita, com (LEE, 2013; RYDER, 1996)

$$\epsilon_{0123} = -\epsilon^{0123} = 1. \quad (428)$$

Massa e spin são autovalores dos operadores C_1 e C_2 de Casimir. Esses dois autovalores comutam com todos os geradores do grupo de Poincaré, fato que lhes assegura o epíteto de invariantes. Por outro lado, queremos levar essa análise adiante para a VSR. Os invariantes de Casimir para o grupo² $ISIM(2)$ são dados por (PATERA, 1976)

$$C_1 = P^\mu P_\mu, \quad C_2 = J^3 - \frac{P^2}{P^0 - P^3}T^1 + \frac{P^1}{P^0 - P^3}T^2. \quad (429)$$

Facilmente podemos identificar os autoestados do primeiro Casimir com a massa da partícula. Todavia, os autoestados do segundo invariante não possuem interpretação física

²O Grupo $ISIM(2)$ é o análogo de Poincaré (Rotações+Boosts+Translações no espaço-tempo) para a VSR. Basicamente esse grupo é o grupo $SIM(2)$, porém com a inclusão de geradores de translação no espaço-tempo.

direta até então. O que podemos inferir de (429) é que massa continua sendo válida para a descrição de partículas, contudo além da noção de spin, não fica clara qual informação está contida em C_2 .

C.4 ESTADOS DE UMA PARTÍCULA

Sabemos que os invariantes de Casimir nos trazem informações sobre os estados de uma partícula. Entretanto não nos dá informações a respeito de como esses estados se transformam. Por este motivo, precisamos estudar as representações irredutíveis do grupo, ou seja, vamos buscar os *Little Groups*, grupos que mantêm invariantes por transformações um dado estado inicial. Os estados de uma partícula construídos na VSR carregam praticamente os mesmos aspectos que os encontrados usualmente nos livros-texto, porém aqui faremos a construção deles ressaltando algumas sutilezas advindas da álgebra da VSR.

Sabemos que os geradores de translação no espaço-tempo, P^μ , comutam com a energia H do sistema, então para que nossos estados possuam energia e momento bem definidos, vamos impor que sejam autoestados de P^μ , de maneira que

$$P^\mu |p, \sigma\rangle = p^\mu |p, \sigma\rangle, \quad (430)$$

onde o índice σ pode se referir a qualquer outra grandeza, como spin por exemplo. Imaginemos um dado vetor momento tipo-tempo no referencial de repouso, denotado por

$$k^\mu = (m, \mathbf{0}). \quad (431)$$

Considere um momento p^μ , tipo-tempo

$$p^\mu = (p^0, \mathbf{p}). \quad (432)$$

É óbvio que existe uma transformação que conecta k^μ , do repouso, para um momento arbitrário p^μ . No nosso caso, a transformação é a seguinte

$$p^\mu = \mathcal{V}_\nu^\mu(p) k^\nu, \quad (433)$$

sendo $\mathcal{V}_\nu^\mu(p)$ dado pela matriz (426). Podemos escrever a relação acima no espaço de Hilbert

$$|p, \sigma\rangle = U(\mathcal{V}(p)) |k, \sigma\rangle. \quad (434)$$

Onde $U(\mathcal{V}(p))$ é um operador unitário que implementa $\mathcal{V}_\nu^\mu(p)$. Agora consideremos uma transformação arbitrária da VSR, mais precisamente uma transformação feita por algum

gerador de $SIM(2)$, dada por Λ

$$p^\mu \rightarrow p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu, \quad (435)$$

que atuando em um estado quântico corresponde a

$$|p, \sigma\rangle \rightarrow U(\Lambda)|p, \sigma\rangle. \quad (436)$$

Precisamos encontrar o estado transformado $U(\Lambda)|p, \sigma\rangle$. Reescrevendo (434) obtemos

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\Lambda)U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle, \quad (437)$$

inserindo a matriz identidade do lado direito da última equação acima, ficamos com

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\mathcal{V}(\Lambda p))U^{-1}(\mathcal{V}(\Lambda p))U(\Lambda)U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle. \quad (438)$$

Usando as seguintes regras $U^{-1}(A) = U(A^{-1})$ e $U(A)U(B)U(C) = U(ABC)$ (RYDER, 1996), teremos

$$U(\Lambda)|p, \sigma\rangle = U(\mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{V}(p))U(\Lambda)U(\mathcal{V}(p))|k, \sigma\rangle. \quad (439)$$

Note que $\mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{V}(p)$ é a matriz que quando atua em k^μ devolve k^μ , pois $\mathcal{V}(p)$ transforma k em p , Λ transforma p em Λp e finalmente $\mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)$ faz a transformação inversa, isto é, transforma Λp em k . Vamos então definir essa matriz, a fim de simplificar a notação, como

$$\mathcal{W}(\Lambda, p) = \mathcal{V}^{-1}(\Lambda p)\Lambda\mathcal{V}(p). \quad (440)$$

Assim, podemos escrever

$$U(\mathcal{V})|p, \sigma\rangle = \sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathcal{W}(\Lambda, p))|\Lambda p, \bar{\sigma}\rangle, \quad (441)$$

onde a quantidade $\sum_{\bar{\sigma}} D_{\sigma\bar{\sigma}}(\mathcal{W}(\Lambda, p))$ pode ser entendida como uma soma de sucessivas transformações. Para este caso, a transformação que deixa invariante o estado de uma partícula massiva é (LEE, 2013)

$$D(\mathcal{W}(\Lambda, p)) = e^{iJ_z\phi}, \quad (442)$$

ou seja, nada mais do que uma rotação em torno do eixo z . De forma a contrastar com o grupo de Poincaré, temos a tabela abaixo. Aqui o grupo $SO(2)$ é o grupo de rotações no plano, geradas por J_z e o grupo $SU(2)$ é o de rotações geradas por J_x, J_y e J_z .

	k^μ	<i>Little Group VSR</i>	<i>Little Group SR</i>
$p_\mu p^\mu = m^2, p^0 > 0$	$(m, 0, 0, 0)$	SO(2)	SU(2)

Tabela C.2: O *Little Group*.

C.5 ABORDAGEM DO ELKO PELA ÁLGEBRA DA VSR

Esta seção está reservada para que possamos elaborar uma abordagem com maior riqueza de detalhes do Elko dentro do contexto da VSR, mais precisamente pelo grupo $SIM(2)$. Como já visto anteriormente, sabemos que as somas de spin para o Elko quebram a covariância relativística de Lorentz, tornando difícil providenciar uma interpretação física relevante para a teoria. Veremos aqui que boa parte da estrutura algébrica do Elko permanece inalterada pelo grupo $SIM(2)$. Primeiramente deve ser salientado que podemos sem perda de generalidade construir o Elko dentro da teoria da VSR, pois este é um autoespinor do operador conjugação de carga, e, como sabemos, $\mathcal{C}$ não é uma simetria do grupo de Lorentz, ou seja, não é uma simetria que aumenta, por assim dizer, nenhum dos grupos da VSR. Tendo a última afirmação em mente, podemos evidenciar o fato de que o mesmo não poderia ser feito para os espinores de Dirac, pelo simples fato destes serem autoespinores do operador paridade, simetria banida quando fizemos a construção da VSR (ROGERIO, 2014). Já foi mostrado anteriormente que o Elko é um objeto de helicidade dual e isso continua válido nos nossos novos moldes algébricos. Relembrando o operador de boost construído no Capítulo 3, sabemos da veracidade das equações (74) - (77) quando se trata do grupo de Lorentz. Fazendo uma analogia, podemos escrever em termos do operador de boost da VSR a seguinte relação³

$$\chi_\alpha^{S/A}(p^\mu) = \mathcal{V}(p)\chi_\alpha^{S/A}(k^\mu), \quad (443)$$

onde $\chi_\alpha(k^\mu)$ é um dos quatro autoespinores Elko, os mesmo já definidos anteriormente. O subíndice α refere-se as duas possíveis helicidades, $\{\pm, \mp\}$ de cada espinor $\chi_\alpha^{S/A}$. Os resultados a serem obtidos serão os mesmos apresentados em (58) e (71) e, por conseguinte, podemos estendê-los para um momento arbitrário.

C.6 INVARIÂNCIA DAS SOMAS DE SPIN À LUZ DA VSR

No Capítulo 3 quando calculamos as somas de spin para o Elko, encontramos um termo que viola a simetria de Lorentz, a presença da matriz $\mathcal{G}(\phi)$ nas equações (110) e (111) revela dependência com uma dada direção espacial. Nosso dever a partir desse ponto é explorar o comportamento de $\mathcal{G}(\phi)$ mediante transformações dadas pelos geradores do

³Apenas para evitar qualquer tipo de confusão relacionada a notação, os espinores Elko dentro da VSR serão denotados por $\chi_\alpha(p^\mu)$.

grupo $SIM(2)$. Assim, primeiramente, analisaremos a invariância de $\mathcal{G}(\phi)$ pela matriz⁴ (426)

$$\mathcal{V}(p)\mathcal{G}(\phi)[\mathcal{V}(p)]^{-1} = \mathcal{G}(\phi), \quad (444)$$

mostrando que tal termo é invariante sob transformação realizada pelo boost da VSR, $\mathcal{V}(p)$. Porém ainda é necessário averiguar o que acontece para as demais transformações provocadas pelos geradores do grupo $SIM(2)$. Com o intuito de facilitar a notação, vamos definir $\Gamma_1 \equiv e^{i\mathcal{T}_1\epsilon_1}$. De modo que temos

$$\Gamma_1\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_1]^{-1} \big|_{\epsilon_1=0} = \mathcal{G}(\phi), \quad (445)$$

evidenciando a invariância de $\mathcal{G}(\phi)$ por transformações geradas por $\mathcal{T}_1$. Analogamente definiremos $\Gamma_2 \equiv e^{i\mathcal{T}_2\epsilon_2}$, e assim obtemos

$$\Gamma_2\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_2]^{-1} \big|_{\epsilon_2=0} = \mathcal{G}(\phi), \quad (446)$$

donde facilmente notamos que $\mathcal{G}(\phi)$ também é invariante por transformações geradas por $\mathcal{T}_2$. Agora $\Gamma_3 \equiv e^{i\mathcal{K}_z\varphi_z}$, e assim encontramos

$$\Gamma_3\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_3]^{-1} = \mathcal{G}(\phi). \quad (447)$$

Logo, $\mathcal{G}(\phi)$ é invariante sob um boost arbitrário ao longo da direção z (HORVATH, 2011). Por fim vamos determinar o que acontece sob a transformação de $e^{i\mathcal{J}_z\phi'}$, denotando $\Gamma_4 \equiv e^{i\mathcal{J}_z\phi'}$, temos

$$\Gamma_4\mathcal{G}(\phi)[\Gamma_4]^{-1} = \mathcal{G}(\phi + \phi'), \quad (448)$$

revelando que neste caso $\mathcal{G}(\phi)$ é covariante (forma invariante) por uma rotação em torno do eixo z . Assim, mostramos que ao se usar o grupo $SIM(2)$ é garantida a covariância da matriz $\mathcal{G}(\phi)$ por transformações realizadas pelos geradores deste grupo. Assim sendo, dentro da VSR conseguimos solucionar o problema da quebra de covariância relativística das somas de spin.

C.7 ESTRUTURAS BILINEARES DOS ESPINORES ELKO NO CONTEXTO DA VSR

Como mostrado nas referências (AHLUWALIA-KHALILOVA D. V. E GRUMILLER, 2005; HORVATH, 2011), o espinor Elko pode ser entendido como um objeto que carrega a representação linear do subgrupo do grupo de Lorentz $SIM(2)$ ou $HOM(2)$. Neste sentido,

⁴Todos os cálculos dessa seção foram realizados usando os *softwares Maple 16.0* e *Wolfram Mathematica 7.0*.

seria importante explorar uma possível deformação da base de álgebra de Clifford nesse cenário (VILLALOBOS, 2017). Para ilustrar esta situação, faremos uso dos espinores Elko encontrados em (AHLUWALIA D. V. E HORVATH, 2010). Definiremos um espinor Elko no contexto da VSR, dessa maneira, ilustraremos nosso raciocínio utilizando o espinor $\chi_{\{-,+\}}^S(p^\mu)$, portanto,

$$\chi_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} i \frac{p_x - ip_y}{\sqrt{m(p_0 - p_z)}} e^{i\phi/2} \\ i \sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}} e^{i\phi/2} \\ \sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}} e^{-i\phi/2} \\ - \frac{p_x + ip_y}{\sqrt{m(p_0 - p_z)}} e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}, \quad (449)$$

com o respectivo dual dado por

$$\bar{\chi}_{\{-,+\}}^S(p^\mu) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} 0 & -i \frac{e^{-i\phi/2}}{\sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}}} & \frac{e^{i\phi/2}}{\sqrt{\frac{p_0 - p_z}{m}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (450)$$

cujas construção obedece a mesma prescrição anteriormente desenvolvida, i.e., podemos escrever o dual da seguinte maneira $\bar{\chi}_\alpha^{S/A}(p^\mu) = [\Xi_{VSR}(p^\mu) \chi_\alpha^{S/A}(p^\mu)]^\dagger \gamma_0$, onde o operador $\Xi_{VSR}(p^\mu)$ é redefinido e dado por

$$\Xi_{VSR}(p^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{i(p_x - ip_y)e^{i\phi}}{m} & \frac{-i(p_x - ip_y)^2 e^{i\phi}}{m(p_0 - p_z)} - \frac{ime^{-i\phi}}{p_0 - p_z} & 0 & 0 \\ \frac{i(p_0 - p_z)e^{i\phi}}{m} & -\frac{i(p_x - ip_y)e^{i\phi}}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i(p_x + ip_y)e^{-i\phi}}{m} & \frac{-i(p_0 - p_z)e^{-i\phi}}{m} \\ 0 & 0 & \frac{i(p_x + ip_y)^2 e^{-i\phi}}{m(p_0 - p_z)} + \frac{ie^{i\phi}m}{p_0 - p_z} & \frac{i(p_x + ip_y)e^{-i\phi}}{m} \end{pmatrix}.$$

Este operador atua nos espinores definidos na VSR de maneira análoga ao que acontece para o caso previamente construído no Capítulo 3, ou seja, muda o tipo de espinor e também obedece as mesmas identidades, $\Xi_{VSR}^2(p^\mu) = \mathbb{1}$ e $\det \Xi_{VSR}(p)^\mu = 1$ garantindo a existência da matriz inversa.

Com tais ingredientes, é possível ver que todos os passos anteriores são repetidos aqui, a saber: as identidades Fierz não são respeitadas, exceto se a base de Clifford sofrer a mesma deformação. Assim, σ_{VSR} e K_{VSR}^μ são as únicas quantidades físicas não nulas e reais, ao passo que, $\omega_{VSR} = 0$ e os demais bilineares são imaginários.