

# Universidade Estadual Paulista

**Campus de São José do Rio Preto**
**Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas**


# Sobre certas teorias de cohomologia de grupos e aplicações


Jessica Cristina Rossinati Rodrigues da Costa

Orientadora: Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade


Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.


**São José do Rio Preto**
**Março - 2016**

# COMISSÃO JULGADORA

Titulares
Profª Drª Maria Gorete Carreira Andrade - Orientadora
Profª Drª Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Prof. Dr. Pedro Luiz Queiroz Pergher

Suplentes
Profª Drª Flávia Souza Machado da Silva
Profª Drª Ana Paula Tremura Galves

*"Todas as verdades são fáceis de entender depois que são descobertas. O difícil é descobri-las."*

Galileu Galilei (1564-1642)

Aos meus pais,
Romildo e Zilda,
dedico.

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo da minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

À minha orientadora Profª Drª Maria Gorete Carreira Andrade, pela orientação, apoio, confiança, por todo o empenho dedicado na elaboração deste trabalho, pelo conhecimento transmitido, pela amizade e conselhos nos momentos difíceis.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática do IBILCE por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação de caráter e afetividade de educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. Meu eterno agradecimento.

Aos meus pais, pelo amor, incentivo e apoio incondicional. Agradeço a minha mãe Zilda, heroína que me deu apoio e incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. Ao meu pai Romildo, que apesar de todas as dificuldades me fortaleceu e que para mim foi muito importante.

À minha vó, pelas orações.

Ao meu professor Marcos, por confiar e acreditar em mim.

Meus agradecimentos aos meus colegas da graduação e pós-graduação. Em especial aos meus amigos Ronan e Yagor, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade, que fizeram parte da minha formação, que me proporcionaram momentos inesqueciveis e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

À FAPESP, pelo apoio financeiro, processo nº 2013/23980-0.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo das teorias de cohomologia ordinária de grupos, da cohomologia de Tate e de Farrel, e algumas aplicações no contexto da Topologia Algébrica. Dentro desse contexto foram desenvolvidos, através da cohomologia de Tate, tópicos dentro da teoria de grupos com cohomologia periódica, detalhando resultados e condições necessárias e suficientes para um grupo ter essa propriedade. Como aplicação dessa teoria vimos um critério para uma função de uma esfera de homotopia em um CW-complexo ter uma (H,G)-coincidência. Também foram desenvolvidos tópicos sobre grupos satisfazendo certas condições de finitude, como por Exemplo grupos de dualidade virtual e, através da cohomologia de Farrell, apresentamos uma obstrução para grupos de dualidade virtual satisfazerem o isomorfismo de dualidade da teoria de Bieri e Eckmann.

**Palavras-chave:** Cohomologia de Tate, Cohomologia de Farrell, Cohomologia Periódica, Grupo de Dualidade, Ações livres em esferas, G-coincidências.

# Abstract

In this work we present a study of the ordinary cohomology of groups, Tate cohomology and Farrell cohomology, and some applications in the context of Algebraic Topology. In this context we were developed topics of the theory of groups with periodic cohomology, detailing results and necessary and sufficient conditions for a group to have this property. As an application of this theory we present a criterion for a map defined in sphere homotopy in a CW-complex to have a (H,G)-coincidence. Also, we have developed some topics about groups that satisfy certain finiteness conditions, as for example, virtual duality groups. Besides, through Farrell cohomology, we present an obstruction for virtual duality groups satisfying the duality isomorphism of the theory due to Bieri and Eckmann.

**Keywords:** Tate cohomology, Cohomology Farrell, Periodic cohomology, Group Duality, free actions on spheres, G-coincidences

# Sumário

# Introdução

A teoria de cohomologia de grupos surgiu através de estudos na álgebra e na topologia. O ponto de início para o aspecto topológico da teoria foi o trabalho de Hurewicz em 1936 sobre espaços asféricos, os seja, espaços X com grupo fundamental $\pi_1(X) = \mathrm{G}$ e grupos de homotopia superiores $\pi_n(X) = 0$, $n > 1$. Hurewicz mostrou, dentre outras coisas, que o tipo de homotopia de um espaço asférico X depende somente de seu grupo fundamental G e, em particular, os grupos de homologia de X dependem somente do grupo G. Por essa razão, a homologia de um grupo G, denotada por $H_*(G)$, é a homologia de qualquer espaço asférico X com grupo fundamental G. Até a década de 1940, não estava claro como descrever $H_*(G)$ algebricamente. O primeiro progresso nesta direção foi feito por Hopf em 1942, que descreveu $H_*(G)$ através de uma apresentação, por geradores e relações, de $G$.

Seguindo o trabalho de Hopf, houve um rápido desenvolvimento do assunto por Eckmann, Eilenberg-Maclane, Freudenthal, e o próprio Hopf. Em meados de década de 1940, foi dada uma definição puramente algébrica da homologia e cohomologia de um grupo, tornando-se claro que o assunto era de interesse, tanto de topólogos quanto de algebristas, oferecendo grandes possibilidades de interação entre as áreas. Uma dessas possibilidades é a teoria de grupos de dualidade devida a Bieri e Eckmann ([3]). Uma outra possibilidade é a teoria de cohomologia de grupos finitos que tem sido utilizada em vários contextos, por Exemplo, um dos resultados clássicos nessa área é que qualquer grupo finito que atua livremente em uma esfera deve ter cohomologia periódica.

Homologia e cohomologia de grupos finitos tem propriedades similares e Tate (ver [1] ou [6]) desenvolveu um modo de explorar essas similaridades. Uma ilustração útil da Teoria de Cohomologia de Tate, denotada por $\widehat{H}^*(G, M)$, é justamente na teoria de grupos com cohomologia periódica. Em [10], Farrell estendeu a cohomologia de Tate para certa classe de grupos infinitos: a dos grupos com dimensão cohomológica virtual finita. Uma das motivações para a construção da cohomologia de Farrell

foi para entender porque a dualidade de grupos (devida a Bieri-Eckmann) falha para grupos de dualidade virtual. Este trabalho enfocará as teorias de cohomologia ordinária de grupos, a cohomologia de Tate e a de Farrell, apresentando também aplicações dessas teorias.

O objetivo deste trabalho é, através do estudo das teorias de cohomologia ordinária de grupos, da cohomologia de Tate e de Farrel, apresentarmos aplicações dessas teorias no contexto da Topologia Algébrica. Dentro desse contexto desenvolvemos, baseados em [6], tópicos dentro da teoria de grupos com cohomologia periódica, através da cohomologia de Tate, detalhando resultados e condições necessárias e suficientes para um grupo ter essa propriedade e também desenvolvemos tópicos sobre grupos satisfazendo certas condições de finitude. Uma das motivações em estudar grupos com cohomologia periódica é o fato de eles atuarem em esferas de homotopia e assim pode-se obter, por Exemplo, generalizações do Teorema Clássico de Borsuk-Ulam. Com base nisso, como aplicação da teoria de grupos periódicos, detalhamos os resultados contidos no artigo [11]. Quanto à cohomologia de grupos infinitos, ela é também interessante principalmente se o grupo satisfaz certas condições de finitude, mesmo que virtuais. Por Exemplo, grupos com dimensão cohomológica virtual finita, grupos virtualmente cíclicos, grupos de dualidade virtual, grupos infinitos com cohomologia periódica após k passos, etc.. Para isso, outras teorias de cohomologia foram desenvolvidas. Uma dessas teorias é a Cohomologia de Farrell, (que estende a cohomologia de Tate), à qual estudamos para o desenvolvimento desse trabalho e nesse contexto, baseadoa nas referências [6] e [10] apresentamos resultados relacionados à teoria de grupos de dualidade virtual, como por Exemplo, uma obstrução para grupos de dualidade virtual satisfazerem o isomorfismo de dualidade da teoria de Bieri e Eckmann.

Mais detalhadamente, a dissertação contempla os seguintes tópicos:

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados básicos em Topologia Algébrica, que serão de fundamental importância para o compreendimento do trabalho. Introduzimos, primeiramente, os conceitos de ação de grupos, alguns resultados sobre espaços de recobrimento. Apresentamos também os espaços denominados CW-complexos, e alguns Exemplos do mesmo. Além disso, estudamos o complexo de Eilenberg-Maclane do tipo $(G, 1)$, ou $K(G, 1)$-complexo, o qual se trata de um CW-complexo $X$ conexo, tal que $\pi_1(X) = G$, e cujo recobrimento universal $\tilde{X}$ é contrátil (Ver [6] e [18] ). E brevemente relatamos algumas fórmulas sobre o grau de uma aplicação, número de Lefschetz, fórmula de Kunneth, alguns resultados de fibrados e espaços classificantes, finalizando este capítulo com homomorfismos transfer (Ver [5], [14] e [18] ).

No capítulo 2, baseados em [6], definimos os $n$-ésimos grupos de homologia e cohomologia do grupo $G$, com coeficientes no $\mathbb{Z}G$-módulo $M$:

$$H_n(G,M) = H_n(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \text{ e } H^n(G,M) = H^n(Hom_{\mathbb{Z}G}F, M)$$

onde $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Apresentamos, dentre outros resultados, o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia de grupo $G$ com a (co)homologia de seu subgrupo $H$, e através de resultados sobre $Ind_H^G(Res_H^G M)$ e $Coind_H^G(Res_H^G M)$, e vemos uma interpretação topólogica para $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$ no caso em que $M$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial, e alguns Exemplos. Esta interpretação é importante pois nos permite calcular a (co)homologia de um grupo $G$ através da (co)homologia do espaço (CW-complexo) $K(G,1)$. Neste capítulo também fazemos um breve estudo da teoria de (co)homologia de grupos finitos através de resoluções periódicas via ações livres em esferas. No final do capítulo listamos alguns resultados importantes da teoria de (co)homologia de grupos, como, produto cross e cup e deslocamento de dimensões (dimension-shifting) e fazendo um estudo sobre os functores Torção e Extensão, destacando os isomorfismos quando $M$ : $\mathbb{Z}$-livre de torção:

$$Tor_*^{\mathbb{Z}G}(M,N) \simeq H_*(G, M \otimes N) \text{ e } Ext^*_{\mathbb{Z}G}(M,N) \simeq H^*(G, Hom(M,N))$$

onde $M$ e $N$ são $\mathbb{Z}G$-módulos e $G$ atua diagonalmente em $M \otimes N$ e em $Hom(M,N)$.

No capitulo 3 apresentamos, baseados em [6], certas condições de finitude que podem ser impostas sobre um grupo $G$ a fim de garantir que a (co)homologia tenha propriedades boas. A definição dos grupos de (co)homologia de $G$ nos permite escolher uma resolução projetiva $F$ arbitrária de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Desde que tenhamos liberdade de escolha, é razoável tentarmos trabalhar com $F$ sendo tão "pequena"quanto possível, e assim somos levados ao conceito de dimensão cohomológica de um grupo $G$, $cd(G)$, que inicialmente introduzimos neste capítulo. Apresentamos também os grupos de tipo $FP_n$, e os grupos de tipo $FP$ e $FL$. Finalizando o capítulo, fazemos um breve estudo da teoria de grupos de dualidade que são grupos que satisfazem isomorfismos entre a cohomologia absoluta e a homologia absoluta, denominados *isomorfismos de dualidade de Bieri-Eckmann.* Também apresentamos uma interpretação topológica de grupos de dualidade de Poincaré e alguns Exemplos.

No capítulo 4, vemos inicialmente alguns resultados de àlgebra homológica e resoluções completa, que são necessários para apresentarmos as teoria de (co)homologia de Tate e de Farrell. Com o estudo da cohomologia de Tate e algumas

de suas proprieades, apresentamos alguns resultados sobre grupos com cohomologia periódica. O principal enfoque deste capítulo é apresentar a teoria de cohomologia de Farrell, mostrando que ela estende a cohomologia de Tate para uma certa classe de grupos infinitos, ou seja, grupos com dimensão cohomologia virtualmente finita, e algumas propriedades. As principais referências para este capítulo são [6] e [10].

No último e principal capítulo, apresentamos duas aplicações das teorias de cohomologia estudadas nos capítulos anteriores. Na primeira seção vemos em detalhes a demonstração, que se encontra em [11] do seguinte critério de $(H, G)$-coincidência de aplicações, *Suponha que G é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo* $\sum^{2n+1}$ *que tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera 2n+1-dimensional e* $f : \sum^{2n+1} \to Y$ *é uma aplicação. Suponha ainda que uma das condições abaixo é verdadeira, a)* $\sum^{2n+1}$ *é um CW-complexo finito 2n+1-dimensional e Y é um CW-complexo k-dimensional. b) Y é um CW-complexo k-dimensional finito. então, se* $2n + 1 \geq |G|k$*, existe um subgrupo não trivial* $H \subset G$ *e uma (H,G)-coincidência para f.* Esse resultado pode ser visto como uma aplicação do Teorema 4.4.1, mais especificamente uma consequência deste que é o Lema 4.4.1, da teoria de cohomologia de grupos com cohomologia periódica. Na segunda seção, apresentamos uma aplicação do estudo da cohomologia de Farrell. Mais especificamente, baseados em [6] e [10], apresentamos uma demonstração de um resultado que fornece uma obstrução para grupos de dualidade virtual satisfazerem o isomorfismo de dualidade de Bieri-Eckmann.

Capítulo

1

# Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns resultados e definições que foram de grande importância para desenvolvimento dos capítulos posteriores. As principais referências são [5], [14], [18] e [23].

## 1.1 Ação de Grupos

**Definição 1.1.1** *Sejam $G$ um grupo e $X$ um conjunto não vazio. Uma* ***ação (à esquerda) de $G$ em $X$*** *é uma aplicação $\phi : G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = gx$ satisfazendo, para todo $x \in X$, as condições:*
*i) $ex = x$ (e: elemento neutro de G).*
*ii) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.*

Equivalentemente, podemos escrever esta definição da seguinte forma: *uma ação de $G$ em $X$ é um homomorfismo $\varphi : G \to Bij(X)$ dado por $\varphi(g) = \varphi_g$ tal que $\varphi_g(x) = gx$ onde $Bij(X) = \{f : X \to X; f$ é uma bijeção$\}$ é um grupo com a operação de composição.* Sempre que tivermos um grupo $G$ atuando em um conjunto $X$ chamaremos este conjunto de $G$-conjunto. Se $X$ for um espaço topológico e $G$ atua em $X$ chamaremos $X$ de $G$-espaço. Neste caso consideraremos $\varphi : G \to Homeo(X)$.

**Definição 1.1.2** *Seja $X$ um $G$-conjunto e $x \in X$. Definimos a* ***$G$-órbita de*** *$x$ como o subconjunto de $X$ dado por $G(x) = \{gx \mid g \in G\}$. O conjunto definido por $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ é um subgrupo de $G$ chamado subgrupo de isotropia de $G$ em $x$.*

**Observação 1.1.1** *(i) As órbitas de $X$ formam uma partição de $X$, isto é, existe $E = \{x_i; i \in I\}$, conjunto de representantes para as órbitas distintas, tal que*

$$X = \dot{\bigcup_{x_i \in E}} G(x_i).$$

*(ii)Existe uma correspondência 1-1 entre o conjunto quociente $G/G_x$ e a órbita $G(x)$, dada pela aplicação:*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & G(x) & \to & G/G_x \\ & gx & \mapsto & \overline{g} = gG_x, \end{array}$$

**Definição 1.1.3** *Seja $G$ um grupo e $X$ um conjunto no qual $G$ atua. Dizemos que $X$ é um* **G-conjunto livre** *se a ação de $G$ em $X$ é livre, isto é, $gx = x$, para algum $x \in X$ se, e somente se, $g = e$. Neste caso $G_x = \{e\}$, para todo $x \in X$.*
*Dizemos que $X$ é um* **G-conjunto trivial** *se a ação de $G$ em $X$ é trivial, isto é, $gx = x$, para todo $x \in X$ e para todo $g \in G$. Neste caso $G_x = G$ e $G(x) = \{x\}$, para todo $x \in X$.*
*Dizemos que $X$ é um* **G-conjunto homogêneo** *se $G$ atua transitivamente em $X$, isto é, para quaisquer $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$. Neste caso $G(x) = X$, para qualquer $x \in E$.*

**Definição 1.1.4** *Sejam $X$ um espaço topológico e $G$ o grupo de homeomorfismos de $X$.*
*(i) Dizemos que $G$ é* **propriamente descontínuo** *se todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $V$ tal que, para todo $g \in G$, $g \neq 1$, tem-se $g.V \cap V = \emptyset$. Neste caso dizemos que a ação de $G$ em $X$ é propriamente descontínua.*
*(ii) Dizemos que $G$ atua efetivamente em $X$ se o homomorfismo $\varphi : G \to Homeo(X)$ dado por $\varphi(g)(x) = gx, \forall x \in X$ é injetor. Em outras palavras, a ação de $G$ em $X$ é efetiva se $(gx = x, \forall x \in X) \Rightarrow g = e$.*

**Observação 1.1.2** *(i) Toda ação propriamente descontínua é livre.*
*(ii) Toda ação livre é efetiva.*

**Definição 1.1.5** *Sejam $X$ e $Y$ dois $G$-espaços e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Se $f(xg) = gf(x)$ para todo $x \in X$ e todo $g \in G$, então $f$ é chamada de* ***aplicação equivariante****.*

**Exemplo 1.1.1** *Considere $X = S^n$ (esfera de dimensão $n$ e $G = \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$ (grupo multiplicativo). Temos que $G$ atua a esquerda em $S^n$ da seguinte forma: $1.x = x$ e $-1.x = -x$. A aplicação $f : S^n \longrightarrow S^n$ definida, para $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, por $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$ é $G$-equivariante.*

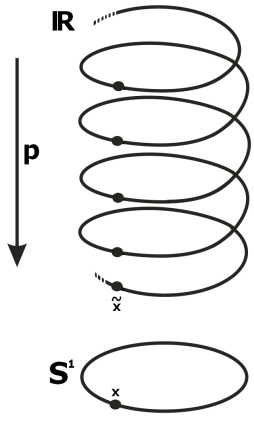
## 1.2 Alguns resultados sobre Espaços de Recobrimento

Para definirmos espaços de recobrimento assumimos que os espaços topológicos utilizados são conexos por caminhos e localmente conexos por caminhos (e portanto, conexos).

**Definição 1.2.1** *Seja $X$ um espaço topológico. Um* **espaço de recobrimento** *de $X$ é um par $(\widetilde{X}, p)$, com $p : \widetilde{X} \to X$ uma aplicação contínua tal que:*
*(1) $p$ é sobrejetora.*
*(2) Todo ponto $x \in X$ possui uma vizinhança $U$ aberta, de modo que a restrição de $p$ a cada componente conexa $\widetilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é um homeomorfismo.*

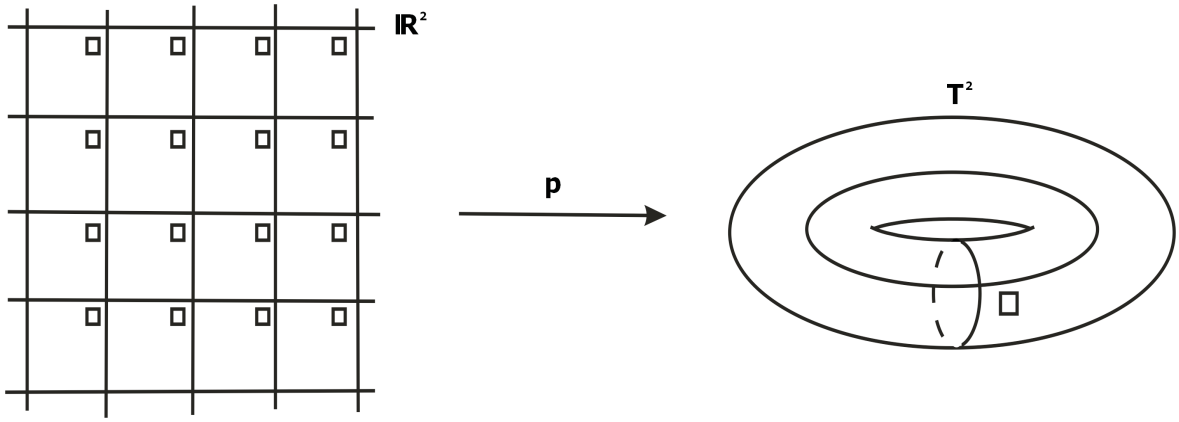
**Observação 1.2.1** *Denominamos a aplicação $p$ e a vizinhança $U$ respectivamente de* **projeção de recobrimento** *e* **vizinhança elementar**. *Ainda, o conjunto $p^{-1}(x)$ é denominado* **fibra** *no ponto $x \in X$.*

**Exemplo 1.2.1** *Seja $p : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $p(t) = (sent, cost), t \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, p)$ é um recobrimento de $S^1$.Além disso, todo subintervalo aberto de $S^1$ pode ser visto como uma vizinhança elementar.*




**Observação 1.2.2** *Sejam $(\widetilde{X}, p)$ e $(\widetilde{Y}, q)$ recobrimentos de $X$ e $Y$ respectivamente. Então $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p \times q)$ é recobrimento de $X \times Y$, sendo a aplicação $p \times q$ definida como $(p \times q)(x, y) = (p(x), p(y))$. Agora, se $U$ e $V$ são vizinhanças elementares de $x \in X$ e $y \in Y$ então $U \times V$ é uma vizinhança elementar de $(x, y) \in X \times Y$.*

**Exemplo 1.2.2** *Assim, como o toro $T^2 = S^1 \times S^1$, temos que seu recobrimento é $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.*




**Proposição 1.2.1** *Se $(\widetilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento de $X$ então $p : \widetilde{X} \to X$ é um homeomorfismo local.*

**Demonstração:**[18], V.2. □

**Proposição 1.2.2** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de $X$, $\widetilde{x_0} \in \widetilde{X}$ e $x_0 = p(\widetilde{x_0})$. Então o homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x_0}) \to \pi_1(X, x_0)$ é um monomorfismo.*

**Demonstração:** [18], V.4.1. □

**Definição 1.2.2** *Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de $X$. Um homeomorfismo $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ é dito* **transformação de recobrimento (ou deck transformação)** *se $p \circ \varphi = p$. Ainda, o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotado por $A(\widetilde{X}, p)$) é um grupo em relação à composição.*

**Proposição 1.2.3** *O grupo $A(\widetilde{X}, p)$ atua livremente sobre $\widetilde{X}$, isto é, $g.\widetilde{x} = \widetilde{x}$ se, e somente se, $g = 1$.*

**Demonstração:** [18], V.3.2. □

**Definição 1.2.3** *Um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de $X$ é dito* **recobrimento universal** *de $X$ se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, isto é, se $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = 0$, para todo $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$.*

**Definição 1.2.4** *Um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ é dito* **recobrimento regular** *se $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x)$. Ainda, esta condição independe da escolha do ponto base $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

**Exemplo 1.2.3** *Todo recobrimento universal é regular.*

**Definição 1.2.5** *Se $(\widetilde{X}, p)$ é um espaço de recobrimento de $X$, o número cardinal comum dos conjuntos $p^{-1}(x)$, $x \in X$, é chamado de* ***número de folhas do recobrimento****. Nós dizemos que o recobrimento é de $n$-folhas se $\#p^{-1}(x) = n$ e de infinitas folhas se $\#p^{-1}(x) = \infty$.*

**Proposição 1.2.4** *Se $(\widetilde{X},p)$ é um espaço de recobrimento de $X$, $\widetilde{x}\in p^{-1}(x)$, $x\in X$.*
*(i) $p^{-1}(x)$ é um $\pi_1(X,x)$-espaço homogêneo.*
*(ii) O subgrupo de isotropia correspondente a $\widetilde{x}\in p^{-1}(x)$ é precisamente o subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$ de $\pi_1(X,x)$.*
*(iii) O número de folhas do recobrimento $(\widetilde{X},p)$ é o índice do subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$ em $\pi_1(X,x)$.*

**Demonstração:**[18] □

**Proposição 1.2.5** *Seja $(\widetilde{X},p)$ um recobrimento de $X$. Então $A(\widetilde{X},p)$ é isomorfo ao grupo quociente $\pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))$, para todo $x\in X$ e todo $\widetilde{x}\in p^{-1}(x)$.*

**Demonstração:**[18] □

**Observação 1.2.3** *Em particular, se o recobrimento é universal, $p_*(\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}))\simeq\{1\}$ e portanto, $A(\widetilde{X},p)\simeq\pi_1(X,x)$ e a ordem de $\pi_1(X)$ é igual ao número de folhas do recobrimento $(\widetilde{X},p)$, ou seja, $\#p^{-1}(x)=\#\pi_1(X)$.*

**Proposição 1.2.6** *Seja $(\widetilde{X},p)$ um recobrimento de $X$. O grupo $A(\widetilde{X},p)$ atua transitivamente sobre $p^{-1}(x)$ se, e somente se, $(\widetilde{X},p)$ é um recobrimento regular de $X$.*

**Demonstração:** [18], V.8.1. □

**Proposição 1.2.7** *Sejam $X$ um espaço topológico, $G$ o grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de $X$ e $q:X\to X/G$ a aplicação quociente sobre o espaço de órbitas de $G$. Então $(X,q)$ é um recobrimento regular de $X/G$, com $G=A(X,q)$.*

**Demonstração:** [18], V.8.2. □

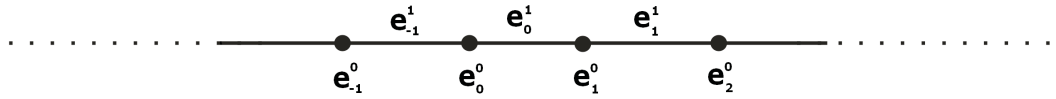
## 1.3 CW-complexos e $K(G,1)$-espaços

**Definição 1.3.1** *Dado um espaço $X$ de Hausdorff, dizemos que $X$ admite uma estrutura de* **CW-complexo** *se possui uma coleção de subconjuntos fechados $\sigma_j^q$ (onde $q$ representa dimensão $(q=0,1,2,\ldots)$ e $j$ varia sobre um conjunto de índices $J_q$), e uma família de subespaços fechados $X^0\subset X^1\subset\ldots\subset X^q\subset\ldots$ com $X^q=\bigcup_{\substack{p\leq q\\ j\in J_p}}\sigma_j$ (por definição $X^{-1}=\emptyset$), e fronteira dada por $f_j^q=\sigma_j^q\cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:*
*(i) $\sigma_i^p-f_i^p$ intercepta $\sigma_j^q-f_j^q$ somente quando $p=q$ e $i=j$.*
*(ii) $X=\bigcup_q X^q$.*
*(iii) Para cada $\sigma_j^q$, existe uma aplicação característica $\phi_j^q:D^q\to\sigma_j^q$ (onde $D^q$ é o disco de dimensão $q$) que leva $S^{q-1}$ (esfera de dimensão $q-1$) sobre $f_j^q$, e aplica $D^q-S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q-f_j^q$ ($S^{-1}$ é o conjunto vazio).*
*(iv) $f_j^q$ intercepta um número finito de conjuntos $(\sigma_i^q-f_i^q)$, $i\in J_q$.*
*(v) Um subconjunto $Y$ de $X$ é fechado se $Y\cap\sigma_j^q$ é fechado em $\sigma_j^q$, $\forall q$ e $\forall j\in J_q$, onde $\sigma_j^q$ possui a topologia quociente de $D^q$ (via $\phi_j^q$).*

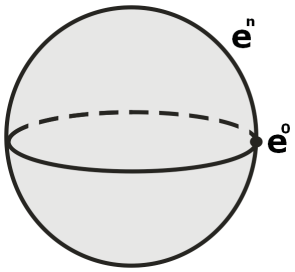
**Notação:** Em um $CW$-complexo $X$, $e^q$ denotará a célula aberta de dimensão $q$ :

$$e^q = \sigma^q - f^q.$$

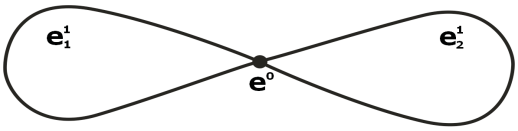
**Exemplo 1.3.1** *Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW-complexo, onde as 0-células e 1-células são dadas , respectivamente, por $e^0_n = \{n\}$ e $e^1_n = (n, n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$.*



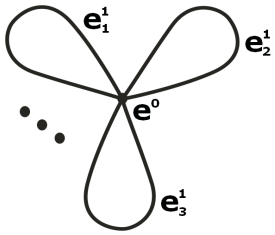

**Exemplo 1.3.2** *Seja $X = S^n$ ($n$-esfera). Uma estrutura de $CW$-complexo sobre $S^n$ pode ser dada por uma 0-célula e uma $n$-célula, ou seja, $S^n = e^0 \cup e^n$.*



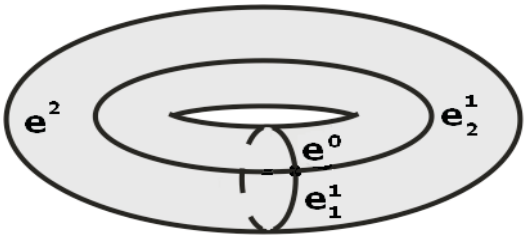

**Exemplo 1.3.3** *Consideremos $X$ a figura oito. É possível dar a $X$ uma estrutura de $CW$-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula, e duas 1-células, ou seja, $X = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2$.*




**Exemplo 1.3.4** *Como um caso mais geral, consideremos $X = \bigvee_{s\in S} S^1_s$, o bouquet de círculos indexados por um conjunto $S$. Podemos dar a $X$ uma estrutura de $CW$-complexo 1-dimensional, com uma única 0-célula e uma 1-célula para cada elemento de $S$, ou seja, $X = (e^0 \cup (\bigcup_{s\in S} e^1_s))$.*




**Exemplo 1.3.5** *O toro ($T^2$) admite uma estrutura de $CW$-complexo 2-dimensional, com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula, ou seja, $T^2 = e^0 \cup e^1_1 \cup e^1_2 \cup e^2$.*




**Observação 1.3.1** *É também usual denotar uma n-célula por $\sigma^n$ ou, simplesmente por $\sigma$, caso a dimensão esteja clara no contexto.*

**Definição 1.3.2** *Um subconjunto $A$ de um CW-complexo $X$ é dito* ***subcomplexo****, se $A$ é a união das células de $X$, e se para cada célula $e^n$,*

$$e^n \subset A \Rightarrow \overline{e^n} \subset A.$$

*Neste caso, podemos mostrar que os conjuntos*

$$A^n = A \cap X^n, n = 0, 1, 2, \ldots,$$

*define uma estrutura de CW-complexo em $A$.*

**Proposição 1.3.1** *Seja $X$ um CW-complexo, o qual é a união de dois subcomplexos $X_1$ e $X_2$, cuja intersecção $Y = X_1 \cap X_2$ é conexa e não-vazio. Se $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são aplicações injetivas no diagrama abaixo*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y) & \xrightarrow{\alpha_2} & \pi_1(X_2) \\ {\scriptstyle \alpha_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta_2} \\ \pi_1(X_1) & \xrightarrow{\beta_1} & \pi_1(X) \end{array}$$

*então $\beta_1$ e $\beta_2$ também são injetivas, onde todas as aplicações acima são induzidas das inclusões.*

**Demonstração:** [6], Lema 7.4. □

Nosso objetivo agora é definir um CW-complexo satisfazendo condições especiais. Para tanto, fazemos inicialmente algumas considerações.

Sejam $X$ um $CW$-complexo e $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$, um recobrimento de $X$. Por [22], III.6.9.2, temos que $\widetilde{X}$ também é um $CW$-complexo (as $n$-células $\widetilde{\sigma}$ de $\widetilde{X}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde $\sigma$ é uma $n$-célula de $X$, e $p|_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \to \sigma$ é um homeomorfismo).

O grupo $G$ das transformações de recobrimento atua livremente em $\widetilde{X}$ permutando suas células (Proposição 1.2.3). Assim, $\widetilde{X}$ é um $G$-complexo.

Se $\widetilde{X}$ é contrátil, o complexo celular aumentado de $\widetilde{X}$ é uma $\mathbb{Z}G$-resolução livre de $\mathbb{Z}$ com $C_n(\widetilde{X})$ um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento básico par cada órbita de célula em $\widetilde{X}$(Teorema 2.1.3).

Se o recobrimento é regular, temos que $G$ atua transitivamente em $p^{-1}(\sigma)$, ou seja, $G(\widetilde{\sigma}) = p^{-1}(\sigma)$, para todo $\widetilde{\sigma} \in p^{-1}(\sigma)$ (Proposição 1.2.6). Logo cada célula em $X$ nos fornece uma órbita de células de mesma dimensão em $\widetilde{X}$. Se, além disso, o recobrimento é contrátil, temos $C_*(\widetilde{X})$ um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com um elemento básico para cada célula de $X$.

Será definido a seguir um $CW$-complexo que satisfaz todas as condições citadas anteriormente.

**Definição 1.3.3** *Seja $X$ um $CW$-complexo tal que:*
*(i) $X$ é conexo.*
*(ii) $\pi_1(X) = G$.*
*(iii) O recobrimento universal $\widetilde{X}$ de $X$ é contrátil (é fato conhecido que, para $CW$-complexos conexos, sempre existe tal recobrimento universal e este é regular)* ([22], III.6.9.1 e [13], I.6.7).

*Nestas condições, $X$ é dito um* **complexo de Eilenberg-MacLane do tipo** $(G, 1)$ *ou simplesmente, $K(G, 1)$-**complexo**.*

**Observação 1.3.2** *Pode-se mostrar que a condição (iii) da definição anterior pode ser substituída por uma das condições abaixo* ([6] I.4)*: $(iii)'$ $H_i(\widetilde{X}) = 0$ para $i \geq 2$.*
*$(iii)''$ $\pi_i(X) = 0$ para $i \geq 2$.*

**Observação 1.3.3** *Neste trabalho, vamos admitir o seguinte Teorema: "Dado um grupo $G$, sempre existe um $K(G, 1)$-complexo"([6], VIII.7.1).*

**Exemplo 1.3.6** *Sejam $G =< \alpha > \simeq \mathbb{Z}$ e $X = S^1$. Temos que $X$ é um $K(G, 1)$-complexo, pois é um $CW$-complexo conexo, com $\pi_1(X) = G$ e o recobrimento universal de $X$ é $\widetilde{X} = \mathbb{R}$ (Exemplo 1.2.1), que é contrátil.*

**Exemplo 1.3.7** *Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto $n$) e $X = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (toro $n$-dimensional). Temos que $X$ é um $CW$-complexo conexo, $\pi_1(X) = G$ e o recobrimento universal de $X$ é $\widetilde{X} = \mathbb{R}^n$ (Observação 1.2.2), que é contrátil. Logo, $X$ é um $K(G, 1)$-complexo.*

**Exemplo 1.3.8** *Sejam $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto $S$ enumerável) e $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ (bouquet de círculos indexados por um conjunto $S$). Temos que $Y$ é um $CW$-complexo conexo de dimensão 1 (pelo Exemplo 1.3.4), com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de $S$ e, $\pi_1(Y) = G$ ([18],IV.3.4). Além disso, $Y$ é conexo e, se $\widetilde{Y}$ é recobrimento universal de $Y$, temos que $\widetilde{Y}$ tem dimensão 1 (pois $\widetilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ é homeomorfismo local). Assim, $H_i(\widetilde{Y}) = 0$ para $i \geq 2$. Portanto, $Y$ é um $K(G, 1)$-complexo.*

**Exemplo 1.3.9** *Sejam* $G = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \right\rangle$ *e* $g$*, um inteiro maior ou igual a 1.*

*Temos que* $G$ *é o grupo com geradores* $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$*,* $e$ $\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1$ *é a única relação, onde* $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$*. Além disso,* $G$ *é infinito ([21], 6.4.3). Temos ainda que* $G$ *é o grupo fundamental da superfície orientada* $Y$ *de genus* $g$ *(soma conexa de* $g$ *toros) ([18], IV.5. ex 5.3).*

*Agora, vamos mostrar que* $Y$ *é um* $K(G,1)$*-complexo.*

*Seja* $\widetilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ *o recobrimento universal de* $Y$*. Como* $G$ *é infinito, temos que* $\widetilde{Y}$ *não é compacto, assim,* $\widetilde{Y}$ *é uma superfície não compacta e conexa. Daí, por [13], III.22.25, temos que* $H_2(\widetilde{Y}) = 0$*. Como* $H_k(\widetilde{Y}) = 0$ *para* $k > 2$*, pois* $\widetilde{Y}$ *tem dimensão 2, temos que* $H_k(\widetilde{Y}) = 0$ *para* $k \geq 2$*. Portanto,* $Y$ *é um* $K(G,1)$*-complexo.*

**Exemplo 1.3.10** *Seja* $G =< c_1, \ldots, c_k; \prod_{i=1}^{k} c_i^2 >$*.*

*Temos que* $G$ *é o grupo fundamental de uma superfície* $Y$ *fechada não orientável de genus* $k$*,* $k \geq 2$ *(soma conexa de* $k$ *planos projetivos).*

*Analogamente ao Exemplo anterior, temos que* $Y$ *é um* $K(G,1)$*-complexo.*

Finalizando essa seção vamos ver o conceito de $G$-complexo.

**Definição 1.3.4** *Um* **G-complexo** *é um CW-complexo* $X$ *munido de uma ação de* $G$ *em* $X$ *que permuta as células, isto é, se* $S$ *representa o conjunto das células de* $X$*, então* $gS = S$*, para todo* $g$ *em* $G$*. Se a ação de* $G$ *em* $X$ *permuta livremente as células, dizemos que* $X$ *é um* **G-complexo livre**.

**Observação 1.3.4** *é importante notar que, pelo fato da ação de* $G$ *em* $X$ *induzir um homomorfismo dado por*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow Homeo(X) \\ g &\mapsto \varphi_g : X \rightarrow X \end{aligned}$$

*tal que* $\varphi_g(x) = g \cdot x$*, temos que, se* $\sigma$ *é uma célula de* $X$*, então* $g \cdot \sigma$ *também é uma célula de* $X$ *cuja dimensão é a mesma de* $\sigma$ *(ou seja,* $\varphi_g$ *preserva dimensão).*

**Observação 1.3.5** *Se* $\widetilde{X}$ *é recobrimento universal de um CW-complexo* $X$*, temos que* $\widetilde{X}$ *é um* $G$*-complexo, onde* $G = \pi_1(X)$*.*

## 1.4 Grau de uma aplicação

Seja $n \geq 1$ e suponhamos que $f : S^n \to S^n$ é uma aplicação contínua. Temos que

$$H_i(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se i=0,n;} \\ 0, \text{ se } i \neq 0, n. \end{cases}$$

Escolha um gerador $\alpha$ de $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ e note que o homomorfismo induzido pela f em $H_n(S^n)$ tem $f_*(\alpha) = m.\alpha$ para algum inteiro m. Este inteiro é independente da escolha do gerador já que

$$f_*(-\alpha) = -f_*(\alpha) = -m.\alpha = m.(-\alpha).$$

O inteiro m é o **grau de f**, denotado por deg(f). Este inteiro também é muitas vezes referido como o grau de Brouwer como um resultado de seus esforços em desenvolver tal idéia.
As seguintes propriedades básicas do grau de uma aplicação podem ser encontradas em [26].
(a) Se id denota a aplicação identidade de $S^n$ então $deg(id) = 1$;
(b) Se $f, g : S^n \to S^n$ são aplicações contínuas então $deg(f \circ g) = deg(f).deg(g)$;
(c) deg$(k_c) = 0$ onde $k_c : S^n \to S^n$ é qualquer aplicação não sobrejetora;
(d) Se $f, g : S^n \to S^n$ são homotópicas então $deg(f) = deg(g)$;
(e) Se $f : S^n \to S^n$ é uma equivalência homotópica então $deg(f) = \pm 1$.
Todas estas propriedades são resultados da Teoria de Homologia. Uma propriedade bem mais sofisticada é um resultado da teoria de homotopia de Hopf, a qual consiste no inverso da propriedade (d): se $deg(f) = deg(g)$ então $f$ e $g$ são homotópicas.
Dessa forma, o grau é um invariante algébrico completo para o estudo de classes de homotopia de aplicações de $S^n$ em $S^n$.

## 1.5 Número de Lefschetz

Sejam M uma variedade fechada de dimensão m e $f : M \to M$ uma aplicação contínua. Então para cada k existe o homomorfismo induzido na homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

$$f_k : H_k(M, \mathbb{Z}) \to H_k(M, \mathbb{Z})$$

Como M é compacto e desta forma, admite uma triangulação finita, segue que $H_k(M, \mathbb{Z})$ é um grupo abeliano finitamente gerado. Logo

$$H_k(M, \mathbb{Z}) = (\text{Parte Livre }) \oplus (\text{Parte de Torção})$$

Assim, $H_k(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \oplus T$, onde a soma das p cópias de $\mathbb{Z}$ é a parte livre e T é a parte de torção.

Considere agora a seguinte aplicação:

$$H_k(M,\mathbb{Z})/T \overset{\bar{f}_k}{\to} H_k(M,\mathbb{Z})/T$$

Logo $\bar{f}_k : \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$
Portanto temos uma matriz associada a $\bar{f}_k$. Seja tr(fk) o traço desta matriz.

**Definição 1.5.1** *Definimos o* ***número de Lefschetz de f*** *por*

$$\Lambda_f = \Lambda(f) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k tr(f_k)$$

**Observação 1.5.1** *$\Lambda_f$ independe das escolhas envolvidas e logo está bem definido. O número de Lefschetz depende apenas da classe de homotopia de f.*

**Teorema 1.5.1** *(Teorema do ponto fixo de Lefschetz) Se $\Lambda_f \neq 0$ então f possui um ponto fixo.*

**Demonstração:**[26], VI. □

## 1.6 Fórmula de Kunneth

**Teorema 1.6.1** *Se X e Y são espaços topológicos e R é um domínio de ideal principal, então existem as sequências exatas, as quais cinde*

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X,R) \otimes_R H_q(Y,R) \to H_n(X \times Y, R) \to \bigoplus_{p+q=n-1} Tor_1^R(H_p(X,R), H_q(Y,R)) \to 0$$

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(X,R) \otimes_R H^q(Y,R) \to H^n(X \times Y, R) \to \bigoplus_{p+q=n+1} Tor_1^R(H^p(X,R), H^q(Y,R)) \to 0$$

**Demonstração:**[6], V.5.8.

**Observação 1.6.1** *Se $p_1 : X \times Y \to X$ e $p_2 : X \times Y \to Y$ são as projeções, F um corpo, $u \in H^p(X,F)$ e $v \in H^q(Y,F)$, lembramos que o produto cross é definido por*

$$u \times v = p_1^*(u) \cup p_2^*(v)$$

*Assim, em vista do Teorema anterior, um elemento de $H^n(X \times Y, F)$ é soma de produtos cup de classes de homologia menores que n. ([18], pag 175)*

## 1.7 Fibrados e Espaços Classificantes

Os resultados e as definições desta seção podem ser encontrados em [7] e [1].

**Definição 1.7.1** *Seja $G$ um grupo topológico atuando efetivamente em um espaço $X$, ou seja o homomorfismo $G \to Homeo(X)$ é injetor. Um* ***fibrado*** *$E$* ***sobre*** *$B$* ***com fibra*** *$X$* ***e estrutura de grupo*** *$G$ é uma aplicação $p : E \to B$ junto com uma coleção de homeomorfismos $\{\varphi : U \times X \to p^{-1}(U)\}$, onde $U$ são abertos em $B$ ($\varphi$ é chamada de carta sobre $U$), tais que:*

*(1)O diagrama*

$$\begin{array}{ccc} U \times X & \longrightarrow & U \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \nearrow{\scriptstyle p} & \\ p^{-1}(U) & & \end{array}$$

*comuta para cada carta $\varphi$ sobre $U$.*

*(2)Cada ponto de $B$ possui um vizinhança sobre a qual existe um carta.*

*(3)Se $\varphi$ é uma carta sobre $U$ e $V \subset U$ é aberto, então a restrição de $\varphi$ a $V$ é uma carta sobre $V$.*

*(4)Para quaisquer duas cartas $\varphi, \varphi'$ sobre $U$, existe uma aplicação contínua $\theta_{\varphi,\varphi'} : U \to G$ tal que $\varphi'(u, x) = (u, \theta_{\varphi,\varphi'}(u).x)$ para todo $u \in U$ e todo $x \in X$. A aplicação $\theta_{\varphi,\varphi'}$ é chamada de função transição para $\varphi, \varphi'$.*

*(5)A coleção de cartas é maximal entre as coleções satisfazendo as condições anteriores.*

A terminologia usual é chamar B de base, X é chamado de fibra, e E é chamado de espaço total.

**Definição 1.7.2** *Uma aplicação contínua $p : E \to B$ é uma* ***fibração*** *se dadas aplicações contínuas $f, \tilde{f}$ e a inclusão $i$ como abaixo, existe uma aplicação contínua $g$ tal que o diagrama é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} Y \times 0 & \xrightarrow{f} & E \\ \downarrow{\scriptstyle i} & \nearrow{\scriptstyle g} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ Y \times I & \xrightarrow{\tilde{f}} & B \end{array}$$

**Observação 1.7.1** *Uma aplicação de recobrimento é uma fibração. Para uma aplicação de recobrimento os levantamentos são únicos, o que não acontece para uma fibração arbitrária.*

O Teorema a seguir é chamado de Teorema de Hurewicz para fibração e afirma que se uma aplicação é localmente uma fibração então ela também é uma fibração global.

**Teorema 1.7.1** *Seja $p : E \to B$ uma aplicação contínua. Suponha que $B$ é paracompacto e que existe uma cobertura aberta $U_\alpha$ de $B$ tal que $p : p^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha$ é uma fibração para cada $U_\alpha$. Então $p : E \to B$ é uma fibração.*

**Corolário 1.7.1** *Se $p : E \to B$ é um fibrado sobre um espaço paracompacto B, então p é uma fibração.*

Se G é um grupo topológico, então G atua sobre ele mesmo pela translação a esquerda.

$$\begin{array}{ccc} G & \to & Homeo(G) \\ g & \longmapsto & (x \mapsto gx) \end{array}$$

**Definição 1.7.3** *Um **G-fibrado principal sobre B** é o fibrado $p : E \to B$ com fibra F=G e estrutura de grupo G atuando pela translação a esquerda.*

**Definição 1.7.4** *Sejam $p : E \to B$ um fibrado com fibra X e estrutura de grupo G e $f : B' \to B$ uma função contínua. Definimos o **pullback de** $p : E \to B$ **pela f** como sendo o espaço $f^*(E) = \{(b', e) \in B' \times E | p(e) = f(b')\}$*

**Teorema 1.7.2** *(**Teorema de Milnor**) Dado um grupo topológico G, existe um espaço B(G) e um G-fibrado com espaço total E(G)*

$$G \to E(G) \to B(G)$$

*tal que se $G \to E \to X$ é um G-fibrado principal sobre X qualquer então existe uma única classe de homotopia de aplicações $f : X \to B(G)$ tal que $f^*(E(G)) = E$.*

**Definição 1.7.5** *O espaço B(G) é chamado de **espaço classificante** e a aplicação f é chamada de **aplicação classificante**.*

**Observação 1.7.2** *Se G é discreto, então a sequência exata de homotopia da fibração mostra que*

$$\pi_n(B(G)) = \begin{cases} 0, \text{se } n > 1; \\ G, \text{se } n = 1 \end{cases}$$

*Portanto B(G) é um K(G,1)-complexo (ver [1] II.1).*

**Teorema 1.7.3** *Seja $\rho : E \to B$ uma fibração com espaço base conexo por caminhos e fibra F uma k-esfera de cohomologia com $k \geq 1$ e A um grupo abeliano. Então existe uma sequência exata longa*

$$\ldots \xrightarrow{\rho^*} H^s(E, A) \to H^{s-k}(B, A) \xrightarrow{\psi} H^{s+1}(B, A) \xrightarrow{\rho^*} H^{s+1}(E, A) \to H^{s+1-k}(B, A) \to \ldots$$

**Demonstração:**Ver [23] 9.5.2. □

**Definição 1.7.6** *Sejam $X$ e $Y$ dois G-espaços. Definimos $X \times_G Y$ como sendo o* ***espaço quociente de*** *$X \times Y$ sobre a relação de equivalência que relaciona $(gx, y)$ com $(x, gy)$ para todo $x \in X$, $y \in Y$ e $g \in G$.*

**Teorema 1.7.4** *Sejam $p : E \to B$ um G-fibrado principal e $F$ um G-espaço. Então $\pi : F \times_G E \to B$ definida por $\pi[f, e] = p(e)$ é um fibrado com fibra $F$ e estrutura de grupo $G$ e é chamado de F-fibrado associado ao G-fibrado principal.*

**Demonstração:**Ver [5] pag 74. □

## 1.8 Homomorfismos Transfer

Seja $\pi : \tilde{X} \to X$ um espaço de recobrimento de n-folhas, para algum n finito. Em adição a aplicação induzida em cadeias singulares $\pi_\# : C_k(\tilde{X}) \to C_k(X)$, existe também um homomorfismo na direção contrária $\tau : C_k(X) \to C_k(\tilde{X})$ que leva todo simplexo singular $\sigma : \Delta_k \to X$ na soma dos n levantamentos distintos $\tilde{\sigma} : \Delta_k \to \tilde{X}$. Isto é uma aplicação de cadeia que comuta com os homomorfismos bordo, logo induz os homomorfismos $\tau_* : H_k(X, A) \to H_k(\tilde{X}, A)$ e $\tau^* : H^k(\tilde{X}, A) \to H^k(X, A)$ para qualquer grupo de coeficientes A.

**Definição 1.8.1** *Os homomorfismos $\tau_*$ e $\tau^*$ são chamados de homomorfismos transfer.*

**Observação 1.8.1** *Considere $X$ e $Y$ G-complexos livres e as projeções de recobrimento $p_X : X \to X/G$ e $p_Y : Y \to Y/G$. Se $f : X \to Y$ é uma aplicação equivariante com $\bar{f} : X/G \to Y/G$ induzida nos espaços de órbitas, então temos o seguinte diagrama comutativo:*

$$\begin{array}{ccc} H^*(Y/G, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{\bar{f}^*} & H^*(X/G, \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau^*} & & \downarrow{\scriptstyle \tau^*} \\ H^*(Y, \mathbb{Z}_p) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X, \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

*onde $\tau^*$ é o respectivo homomorfismo transfer (Ver [5] pag 121).*

**Proposição 1.8.1** *Se $X$ é um CW-complexo k-dimensional, $G$ um grupo finito atuando livremente em $X$ e $R$ um anel com unidade. Então o homomorfismo transfer $\tau^* : H^k(X, R) \to H^k(X/G, R)$ é sobrejetor.*

**Demonstração:**A demonstração completa se encontra em [5].
A idéia da demonstração é considerar o complexo de cocadeias $S_j(, R) = Hom(S_j(, R), R)$, onde $S_j(, R)$ é o módulo livre gerado pelas j-células abertas. Como X é um G-CW-complexo, então X/G tem a CW-estrutura induzida; em particular se $e_\alpha$ são as k-células de X/G, então para cada $\alpha$ existem exatamente r k-células $e^1_\alpha, \ldots, e^r_\alpha$ de X levadas pela projeção $\pi$ em $e_\alpha$, onde $r = |G|$ e $\pi : X \to X/G$ é a aplicação quociente. Neste caso o homomorfismo transfer $\tau^* : H^k(X, R) \to$

$H^k(X/G, R)$ é o homomorfismo induzido pela aplicação de cadeia $\tau : S^k(X, R) \to S^k(X/G, R)$ dada por $\tau(\mu)(e_\alpha) = \mu(e_\alpha^1) + \ldots + \mu(e_\alpha^r)$. Considere um k-cociclo $\eta \in S^k(X/G, R)$. Definimos uma k-cocadeia $\eta' \in S^k(X, R)$ por $\eta'(e_\alpha^j) = \eta(e_\alpha)$ se j = 1 e $\eta'(e_\alpha^j) = 0$ se $j \neq 1$ para todo $\alpha$. Assim $\tau(\eta') = \eta$; mais ainda, como X tem dimensão k, $S^{k+1}(X, R) = 0$ e então toda k-cocadeia de X é um k-cociclo. Assim $\eta'$ representa uma classe de cohomologia de $H^k(X, R)$ que é levada em $[\eta]$ pela $\tau^*$.

□

Capítulo

2

# Homologia e Cohomologia de Grupos

Neste capítulo veremos o conceito de (co)homologia absoluta de grupos e alguns resultados sobre essa teoria, dentre eles o Lema de Shapiro. Além disso, apresentamos uma interpretação topológica para $H^*(G, M)$ e $H_*(G, M)$ que relaciona, a (co)homologia do grupo G com a (co)homologia de um K(G, 1)-complexo.

## 2.1 $\mathbb{Z}$G-módulos e Resoluções Projetivas

**Definição 2.1.1** *Seja $G$ um grupo denotado multiplicativamente. Considere $\mathbb{Z}G$ o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelos elementos de $G$. Daí, um elemento de $G$ é expresso unicamente na forma $\sum_{g\in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g \in \mathbb{Z}$ e $\alpha_g = 0$ para quase todo $g$. Em $\mathbb{Z}G$ definimos a multiplicação*

$$(\sum_{g\in G} \alpha_g g).(\sum_{h\in G} \beta_h h) = \sum_{g,h\in G} \alpha_g \beta_h gh$$

*e a soma*

$$(\sum_{g\in G} \alpha_g g) + (\sum_{g\in G} \beta_g g) = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

*que fazem de $\mathbb{Z}G$ um anel com unidade* 1e*, onde e é o elemento neutro de $G$, chamado de* **anel grupo** de $G$ sobre $\mathbb{Z}$.

**Proposição 2.1.1** *Sejam $G$ um grupo (multiplicativo) e $A$ um conjunto não vazio. Então, $A$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda) se, e somente se, $A$ é um $\mathbb{Z}$-módulo munido com uma ação de $G$ em $A$.*

**Demonstração:** Seja $A$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Temos que $A$ consiste de um grupo abeliano munido com um homomorfismo

$$\begin{array}{rccl} \rho: & \mathbb{Z}G & \to & End(A) \\ & \beta & \mapsto & \rho(\beta)=\varphi_\beta, \end{array}$$

onde $End(A)$ denota a anel dos homomorfismos de $A$ e $\varphi_\beta(a)=\beta.a$, para todo $a\in A$.
Este homomorfismo $\rho$ induz uma ação de $G$ em $A$, dada pela aplicação

$$\begin{array}{rccl} \rho: & G\times A & \to & A \\ & (g,a) & \mapsto & \phi(g,a)=\rho(g)(a)=g.a, \end{array}$$

Além disso, podemos definir um homomorfismo $\rho^*:\mathbb{Z}\to End(A)$, dado por $\rho^*(r)=\rho(re)$, onde $e$ denota um elemento neutro de $G$. Com este homomorfismo $\rho^*$, fazemos de $A$ um $\mathbb{Z}$-módulo. Reciprocamente, dado um $\mathbb{Z}$-módulo $A$ munido de uma ação $\varphi: G\to Aut(A)$, temos induzido um homomorfismo $\rho:\mathbb{Z}G\to End(A)$, dado por

$$\rho(\sum_{g\in G}\alpha_g g)=\sum \alpha_g\varphi(g).$$

Este homomorfismo, junto com a estrutura de grupo abeliano do $\mathbb{Z}$-módulo $A$, faz de $A$ um $\mathbb{Z}G$-módulo, como queríamos. □

**Observação 2.1.1** **(a)** *Seja $\varepsilon:\mathbb{Z}G\to\mathbb{Z}$ a aplicação aumentação usual, definida por*

$$\varepsilon(g)=1,\forall g\in G \;\; e \;\; \varepsilon(\sum_{g\in G}\alpha_g g)=\sum_{g\in G}\alpha_g\varepsilon(g)=\sum_{g\in G}\alpha_g.$$

*Se $A$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial e $\alpha=\sum_{g\in G}\alpha_g g\in\mathbb{Z}G$ então,*

$$\alpha m=(\sum_{g\in G}\alpha_g g)m=\sum_{g\in G}\alpha_g(gm)=\varepsilon(\alpha)m.$$

**(b)** *Todo $\mathbb{Z}$-módulo $M$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo se considerarmos em $M$ a $G$-ação trivial. Em particular, o anel $\mathbb{Z}$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial.*
**(c)** *Todo $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda) $M$ pode ser considerado como um $\mathbb{Z}G$-módulo (à direita), definindo a seguinte $G$-ação á direita em $M$:*

$$\begin{array}{rccl} \varphi: M\times G & \to & M \\ (m,g) & \longmapsto & m*g=g^{-1}.m, \forall g\in G, \forall m\in M. \end{array}$$

**Proposição 2.1.2** *Seja $X$ um $G$-conjunto livre e seja $E$ um conjunto de representantes para as $G$ órbitas em $X$. Então $\mathbb{Z}X$ ($\mathbb{Z}$-módulo livre gerado por $X$) é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base*

$E$.

**Demonstração:** Primeiramente, observe que, se $X = \dot{\bigcup_{i\in I}} X_i$ então,

$$\mathbb{Z}X = \mathbb{Z}[\dot{\bigcup_{i\in I}} X_i] = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}X_i \tag{2.1}$$

De fato,

$$\alpha \in \mathbb{Z}[\dot{\bigcup_{i\in I}} X_i] \Leftrightarrow \alpha = n_{r_1}\alpha_{r_1} + n_{r_2}\alpha_{r_2} + \ldots + n_{r_k}\alpha_{r_k},\ n_{r_i}\alpha_{r_i} \in \mathbb{Z}X_{r_i} \Leftrightarrow \alpha \in \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}X_i.$$

Pela Observação (1.1.1) (i), se $E$ é um conjunto de representantes para as $G$-órbitas em $X$, então $X = \dot{\bigcup_{x\in E}} G(x)$.
Pela igualdade 2.1, temos

$$\mathbb{Z}X = \bigoplus_{x\in E} \mathbb{Z}[G(x)]. \tag{2.2}$$

Mas, pela Observação (1.1.1) (ii), $G(x) = G/G_x$. Como a ação de $G$ em $X$ é livre, temos que $G_x = \{1\}$. Logo, $G(x) = G$.
Substituindo em 2.2, temos

$$\mathbb{Z}X = \bigoplus_{x\in E} \mathbb{Z}G.$$

Portanto, $\mathbb{Z}X$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $E$. □

**Corolário 2.1.1** *Seja $H$ subgrupo de $G$ e $E$ um conjunto de representantes para as classes laterais $gH$ de $H$ em $G$. Então, $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g\in E} \mathbb{Z}H$.*

**Demonstração:** A multiplicação à esquerda dos elementos de $H$ pelos elementos de $G$ faz de $G$ um $H$-conjunto livre, pois $g.h = h$ se e somente se $h = 1$. Portanto, o resultado segue da Proposição anterior. □

**Definição 2.1.2** *Sejam $R$ um anel comutativo com unidade e $M$ um $R$-módulo à esquerda. Uma resolução de $M$ sobre $R$, ou uma $R$-resolução de $M$, é uma sequência exata de $R$-módulos*

$$F : \ldots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

*A aplicação $\varepsilon : F_0 \to M$ é chamada* **aplicação aumentação.** *Se cada $F_i$ é livre, dizemos que a* **resolução** *é* **livre.** *Se cada $F_i$ é projetivo, dizemos que a* **resolução** *é* **projetiva.**

**Notação:** $\varepsilon : F \to M$ denotará uma $R$-resolução de $M$.

podemos ver $\varepsilon : C \to X$ como uma

**Exemplo 2.1.1** *Seja $G$ o grupo cíclico infinito com gerador $s$. Logo, $G =< s >\simeq \mathbb{Z}$. Então,*

$$0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0.$$

*é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $\partial(\alpha) = (s-1).\alpha$, para $\alpha \in \mathbb{Z}G$ e $\varepsilon$ a aplicação aumentação.*
*De fato, temos que mostrar que*
**(a)** *$\partial$ é injetora;*
**(b)** *$Im\partial = Ker(\varepsilon)$;*
**(c)** *$Im\varepsilon = \mathbb{Z}$.*
**(a)** *$\partial$ é injetora.*
*Seja $\alpha = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i \in \mathbb{Z}G$, com $n_i = 0$, para quase todo $i \in \mathbb{Z}$ (*).*
$\alpha \in ker\partial \implies \partial(\alpha) = 0 \implies (s-1)\alpha = 0 \implies \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^{i+1} - \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i = 0 \implies \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^{i+1} = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i \overset{reordenando}{\implies} \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_{i-1} s^i = \sum_{i\in\mathbb{Z}} n_i s^i \overset{\mathbb{Z}G \text{ é livre}}{\implies} n_{i-1} = n_i, \forall i \in \mathbb{Z} \overset{(*)}{\implies} n_i = 0, \forall i \in \mathbb{Z}$. *Logo,* $\alpha = 0$. *Assim,* $Ker\partial = \{0\}$.
**(b)** *Afirmação:* $Ker(\varepsilon) =< s-1 >$ *como $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda, isto é,* $\forall \alpha \in Ker\varepsilon, \alpha = \beta.(s-1)$, *para algum* $\beta \in \mathbb{Z}G$.
*Justificativa: Seja* $\alpha \in Ker(\varepsilon), \alpha = \sum_{i=1}^{k} n_i s^{r_i}$. *Então,* $\varepsilon(\alpha) = 0$. *Assim,* $\sum_{i=1}^{k} n_i = 0$. *Daí,*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} n_i s^{r_i} - \sum_{i=1}^{k} n_i.1 = \sum_{i=1}^{k} n_i(s^{r_i} - 1).$$

*Mas,* $s^{r_i} - 1 = (1 + s + \ldots + s^{r_i - 1})(s-1)$. *Logo,*

$$\alpha = (\sum_{i=1}^{k} n_i(1 + s + \ldots + s^{r_i-1}))(s-1).$$

*Assim, existe* $\beta = \sum_{i=1}^{k} n_i(1 + s + \ldots + s^{r_i-1}) \in \mathbb{Z}G$ *tal que* $\alpha = \beta(s-1)$.
$Im\partial = Ker(\varepsilon)$
$Im\partial = \{\partial(\alpha) | \alpha \in \mathbb{Z}G\} = \{(s-1)\alpha | \alpha \in \mathbb{Z}G\} \overset{G \text{cíclico}}{=} \{\alpha(s-1) | \alpha \in \mathbb{Z}G\} = Ker(\varepsilon)$.
**(c)** *É claro, pois a aplicação aumentação é sobrejetora.*

**Teorema 2.1.1** *Todo $R$-módulo $M$ tem uma resolução livre (e portanto projetiva). Além disso duas resoluções projetivas do mesmo módulo $M$ são homotopicamente equivalentes.*

**Demonstração:**Ver [15] □

**Observação 2.1.2** *O Teorema anterior pode ser enunciado da seguinte forma: Duas R-resoluções de um mesmo módulo M são "iguais", a menos de uma equivalência de homotopia.*

**Observação 2.1.3** *Se M é um G-módulo e M′ é um G′-módulo então M ⊗ M′ é um G × G′-módulo de maneira natural:*

$$(g, g')(m \otimes m') = gm \otimes g'm'$$

*Note que se M é um ℤG-módulo projetivo e M′ um ℤG′-módulo projetivo então M ⊗ M′ é um ℤ[G × G′]-módulo projetivo.*
*De fato, basta verificar quando M = ℤG e M′ = ℤG′, e neste caso, segue do isomorfismo natural:*

$$\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G' \simeq \mathbb{Z}[G \times G'], (g \otimes g') \mapsto (g, g')$$

**Observação 2.1.4** *Dados dois complexos de cadeia $(X, \partial)$ e $(Y, \delta)$, podemos fazer o produto tensorial dos complexos de cadeia, onde obtemos um complexo de cadeia $C = X \otimes Y$ dado por $C_n = \bigoplus_{p+q=n} X_p \otimes Y_q$ e $d_n(x, y) = (\partial_p(x) + (-1)^p x, y + \delta_q(y))_{p+q=n}$. Usando isso e a Observação anterior, pode-se mostrar que, se G e G′ são grupos, F é uma ℤG-resolução projetiva de ℤ e P é uma ℤG′-resolução projetiva de ℤ então F ⊗ P é uma ℤ[G × G′]-resolução projetiva de ℤ ⊗ ℤ ≃ ℤ.*

### 2.1.1 Resoluções via topologia

Seja $X$ um $G$-complexo. Podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X)$, onde $C_n(X)$ é o $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelas $n$-células de $X$. A ação de $G$ em $X$ induz uma ação em $C_*(X)$ da seguinte forma:

$$g \cdot (a_1\sigma_1 + \ldots + a_n\sigma_n) := a_1 g \cdot \sigma_1 + \ldots + a_n g \cdot \sigma_n.$$

Assim, $C_*(X)$ torna-se um complexo de cadeias de $\mathbb{Z}G$-módulos. Definimos a aplicação $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{Z}$ por $\varepsilon(\sigma^0) = 1$, nas 0-células $\sigma^0$ de $X$, e a estendemos por linearidade.
Temos que $\varepsilon$ é uma aplicação de $\mathbb{Z}G$-módulos, pois, $g \cdot \sigma^0$ também é 0-célula e, a ação de $G$ em $\mathbb{Z}$ é trivial.

**Proposição 2.1.3** *Se X é um G-complexo livre contrátil, então o complexo de cadeia celular aumentado de X:*

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*é uma resolução livre de ℤ sobre ℤG.*

**Demonstração:** Seja $X_n = \{\sigma \in X;\ \sigma \text{ é uma } n\text{-célula}\}$. Temos que $C_n(X) = \mathbb{Z}X_n$ ($\mathbb{Z}$-módulo livre gerado pelas $n$-células).

Agora, como $X_n \subset X$ e $X$ é um $G$-complexo livre, temos que $X_n$ é um $G$-conjunto livre, logo, pela Proposição 2.1.2, $C_n(X)$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $E$, onde $E$ é um conjunto de representantes para as $G$-órbitas em $X_n$.
Sabemos que, se $X$ é contrátil, então tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e, deste modo

$$H_n(X) \simeq H_n(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se} \quad n = 0 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas,

$$0 = H_n(X) = \frac{Ker\, \partial_n}{Im\, \partial_{n+1}} \Rightarrow Ker\, \partial_n = Im\, \partial_{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Resta mostrar que $Im\, \partial_1 = Ker\, \varepsilon$. Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_1(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_0} & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Temos que

$$\mathbb{Z} = H_0(X) = \frac{Ker\, \partial_0}{Im\, \partial_1} = \frac{C_0(X)}{Im\, \partial_1}$$

Como $\varepsilon$ é sobrejetora, pelo Teorema do homomorfismo, temos

$$\frac{C_0(X)}{Ker\, \varepsilon} \simeq Im\, \varepsilon = \mathbb{Z}.$$

Como $Im\, \partial_1 \subset Ker\, \varepsilon$, podemos fazer o quociente:

$$\mathbb{Z} \simeq \frac{C_0(X)}{Ker\, \varepsilon} = \frac{\dfrac{C_0(X)}{Im\, \partial_1}}{\dfrac{Ker\, \varepsilon}{Im\, \partial_1}} \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\dfrac{Ker\, \varepsilon}{Im\, \partial_1}}$$

Logo,

$$\frac{Ker\, \varepsilon}{Im\, \partial_1} = 0.$$

Temos $Im\, \partial_1 = Ker\, \varepsilon$.
Assim, o complexo

$$\cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é exato e, então, temos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. □

**Observação 2.1.5** *O Teorema anterior é válido também se considerarmos um espaço topológico contrátil $X$ no qual $G$ atua propriamente descontinuamente. Podemos mostrar então*

*que o complexo de cadeias singular aumentado $C_*(X) \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Para maiores detalhes ver [16], IV.11.*

Como consequência imediata desses resultados, temos a seguinte Proposição:

**Proposição 2.1.4** *Se Y é um K(G,1)-complexo, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y: $\ldots \to C_2(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\tilde{Y}, R) \xrightarrow{\partial_0} \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*

**Demonstração:**Como Y é um K(G,1), então $\tilde{Y}$ é um G-complexo livre contrátil. Logo, pela Proposição 2.1.3, temos que o complexo acima é uma resolução livre $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. □

**Exemplo 2.1.2** *Sejam $G = F(S)$ (grupo livre gerado por um conjunto S) e $Y = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ (bouquet de círculos indexados por um conjunto S).*

*Vimos no Exemplo 1.3.8 que Y é um $K(F(S), 1)$-complexo. Sabemos que $C_n(\tilde{Y})$ tem um elemento básico para cada n-célula de Y (pois, $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , logo, regular).*

*Tomemos um ponto base $\tilde{y_0}$ em $\tilde{Y}$ ($\tilde{y_0}$: vértice em $\tilde{Y}$).Temos que $\tilde{y_0}$ representa a única G-órbita de vértices de $\tilde{Y}$ (existe uma 0-órbita de vértices em $\tilde{Y}$ para cada vértice em Y ). Daí, $\tilde{y_0}$ gera o RG-módulo livre $C_0(\tilde{Y})$, e assim, $C_0(\tilde{Y}) \simeq \mathbb{Z}G$.*

*Como base para $C_1(\tilde{Y})$, tomamos para cada $s \in S$ uma 1-célula orientada $e_s$ de $\tilde{Y}$, que é projetada sobre $S^1_s$ (orientada no sentido positivo). Temos uma 1-órbita em $\tilde{Y}$ para cada 1-célula em Y.*

*Podemos supor que $e_s$ tem $\tilde{y_0}$ como ponto inicial e, caso isto não ocorra, tomamos outro representante $e_r$ com ponto inicial $\tilde{y_0}$ (isto é, se $e_r$ tem um ponto inicial $\tilde{y_0}$, então, existe g em G tal que $g.e_s = e_r$, pois G atua livremente e transitivamente, permutando as células de $\tilde{Y}$), onde o ponto final de $e_s$ será $s.\tilde{y_0}$.*

*Note que podemos identificar o grupo das transformações de recobrimento $G(\tilde{Y})$ com $\pi_1(Y, y_0)$ da seguinte maneira: seja $\alpha : I \to Y$ um laço em Y ($[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$). Temos que existe um único levantamento $\tilde{\alpha}$ de $\alpha$, começando em $\tilde{y_0}$. Mais ainda, seja*

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \pi_1(Y, y_0) & \to & G(\tilde{Y}) \\ [\alpha] & \mapsto & f_\alpha \end{array}$$

*onde $f_\alpha$ é a única transformação de recobrimento tal que $f_\alpha(\tilde{y_0}) = \tilde{\alpha(1)}$. Temos que $\varphi$ é isomorfismo e, daí, $G(\tilde{Y}) \simeq \pi_1(Y, y_0)$. Além disso, $G(\tilde{Y})$ atua livremente em $\tilde{Y}$, com ação:*

$$\begin{array}{rcl} G(\tilde{Y}) \times \tilde{Y} & \to & \tilde{Y} \\ (f_\alpha, \tilde{y}) & \mapsto & f_\alpha(\tilde{y}) \end{array}$$

*Olhando esta ação como uma ação de $\pi_1(Y)$ em $\tilde{Y}$, temos $[\alpha]\tilde{y} = f_\alpha(\tilde{y}) = \tilde{\alpha}(1)$. Como cada $S^1_s$ representa um gerador em $\pi_1(Y, y_0) \simeq F(S)$, identificamos $S^1_s$ com s através deste*

*isomorfismo. Assim, temos que existe um único levantamento $\tilde{s}$ de $s$, começando em $\tilde{y_0}$ e o ponto final deste levantamento é $\tilde{s}(1) = f_s(\tilde{y_0}) = s.\tilde{y_0}$.*

*Tal levantamento é a 1-célula $e_s$, onde $p(e_s) = S^1_s \equiv s$ ( a célula $e_s$ é aplicada homeomorficamente em $S^1_s$ ).*
*Note que $G = F(S) \simeq G(\tilde{Y})$, com $s \simeq f_s$.*
*Agora, voltando ao Exemplo, temos $\partial(e_s) = s.\tilde{y_0} - \tilde{y_0} = (s-1).\tilde{y_0}$. Daí,*

$$0 \to \bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Z}G)_s \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

*é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, onde $\bigoplus_{s\in S}(\mathbb{Z}G)_s$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $(e_s)_{s\in S}$, $\partial(e_s) = s - 1$ e $\epsilon(g) = 1$, para $g \in G$.*

## 2.2 Alguns resultados sobre $\mathbb{Z}G$-produto tensorial e $\mathbb{Z}G$-homomorfismos

**Definição 2.2.1** *Se $G$ é um grupo e $M$ é um $\mathbb{Z}G$ -módulo então o grupo dos **coinvariantes** de $M$, denotado por $M_G$, é definido como sendo o quociente $M/A$ onde $A$ é o subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $gm - m$ com $g \in G$, $m \in M$.*

**Observação 2.2.1** *O nome 'coinvariantes' vem do fato de $M_G$ ser o maior quociente de $M$ no qual $G$ atua trivialmente.*

**Definição 2.2.2** *O grupo dos **invariantes**, denotado por $M^G$, é dado por $M^G = \{m \in M; gm = m, \forall g \in G\}$.*

**Observação 2.2.2** *Se $M$ é um $R$-módulo à direita e $N$ é um $R$-módulo à esquerda então $M \otimes_R N$ denotará o produto tensorial de $M$ e $N$ sobre $R$. Se $R = \mathbb{Z}$ o produto tensorial será denotado simplesmente por $M \otimes N$. Agora, se $M$ e $N$ são $R$-módulos à esquerda denotaremos por $Hom_R(M, N)$ o grupo (aditivo) de $R$-homorfismos de $M$ em $N$. Novamente, se $R = \mathbb{Z}$ esse grupo será denotado simplesmente por $Hom(M, N)$. Observe que, quando $R = \mathbb{Z}G$, em vista da Observação 2.1.1 (c), podemos considerar um $\mathbb{Z}G$-modulo à esquerda como um $\mathbb{Z}G$-modulo à direita e assim, o produto tensorial sobre $\mathbb{Z}G$ e o grupo de $\mathbb{Z}G$-homorfismos estão bem definidos para $\mathbb{Z}G$-modulos (à esquerda).*

**Proposição 2.2.1** *$M_G \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G$, onde $\mathbb{Z}$ é visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo com $G$ ação trivial.*

**Demonstração:** Note que em $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ temos a identidade: $1 \otimes gm = 1g \otimes m = 1 \otimes m$. Então existe a aplicação $M_G \to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ dada por $\overline{m} \mapsto 1 \otimes m$, onde m denota a imagem em $M_G$ de algum elemento $m \in M$. Por outro lado, usando a propriedade de produto tensorial, podemos

definir uma aplicação $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}G} M \to M_G$ por $a\otimes m \mapsto a\overline{m}$. Estas duas aplicações são inversas uma da outra. Agora, definindo $\psi : Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \to M^G$ por $\psi(f) := f(1)$, mostra-se facilmente que $\psi$ é um isomorfismo. □

**Observação 2.2.3** *Em vista da Proposição 2.2.1 e algumas propriedades do produto tensorial, obtemos imediatamente as duas seguintes propriedades do funtor coinvariante:*
• *Exatidão à direita: Dada uma sequência exata $M' \to M \to M'' \to 0$ de G-módulos, a sequência induzida $M'_G \to M_G \to M''_G \to 0$ é exata.*
• *Se F é um $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $(e_i)$, então $F_G$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $(\overline{e_i})$.*

**Proposição 2.2.2** *Sejam M e N $\mathbb{Z}G$-módulos (à esquerda). Temos*

$$M \otimes_{\mathbb{Z}G} N = (M \otimes N)_G := \frac{M \otimes N}{A},$$

*onde* $A =< g.m \otimes g.n - m \otimes n; \forall m \otimes n \in M \otimes N, \forall g \in G >$ .

**Demonstração:** Vamos ver como obtemos $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ de $M \otimes N$.
Consideremos a seguinte relação em $M \otimes N$:

$$(m * g) \otimes n \; m \otimes g.n, \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Mas, vendo M como um $\mathbb{Z}G$-módulo (à direita), temos pela Observação 2.1.1, que

$$m * g = g^{-1}.m, \forall m \in M, \forall g \in G.$$

Assim, $(m * g) \otimes n = (g^{-1}.m) \otimes n$. Logo,

$$\overline{(g^{-}1.m) \otimes n} = \overline{m \otimes g.n}. \tag{2.3}$$

Portanto, $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N = \frac{M \otimes N}{\sim}$. Substituindo m por gm, tem-se

$$\overline{m \otimes n} = \overline{gm \otimes gn} \tag{2.4}$$

Definimos, então a G-ação diagonal de G em em $M \otimes N$, $g(m \otimes n) = gm \otimes gn$. Consideremos em $M \otimes N$ tal ação e A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos $g.(m \otimes n) - m \otimes n$. Assim, em $(M \otimes N)_G := \frac{M \otimes N}{A}$, estamos identificando elementos da forma $g.m \otimes g.n$ com $m \otimes n$, $\forall m \in M, \forall n \in N, \forall g \in G$. Isto é o mesmo que identificar $(g^{-}1.m) \otimes n = (m * g) \otimes n$ com $m \otimes n$ (por 2.3 e 2.4). Deste modo,

$$(M \otimes N)_G = \frac{M \otimes N}{\sim} = M \otimes_{\mathbb{Z}G} N.$$

□

**Observação 2.2.4** *A passagem entre módulo à esquerda e à direita como acima é conveniente, mas às vezes pode causar confusão, por Exemplo se M admite G-ação à direita e à esquerda. Em tais casos usamos a notação padrão $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ quando queremos indicar que o produto tensorial é para ser formado com respeito a ação à direita de G em M do que com a ação à direita obtida da ação à esquerda.*

**Corolário 2.2.1** $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}G} M$.

**Demonstração:**

$$M \otimes_{\mathbb{Z}G} N \simeq (M \otimes N)_G \simeq (N \otimes M)_G \simeq N \otimes_{\mathbb{Z}G} M.$$

□

Sejam M e N $\mathbb{Z}G$-módulos (à esquerda), e consideremos $Hom(M, N)$. A ação de G em M e N induz uma ação de G em $Hom(M, N)$, dada por

$$\begin{array}{rcl} G \times Hom(M,N) & \to & Hom(M,N) \\ (g, f) & \longmapsto & g.f \end{array}$$

tal que $g.f(x) = g.f(g^{-1}.x); g \in G, f \in Hom(M, N)$ e $x \in M$. Note que o uso de $g^{-1}$ para definir a ação é necessário devido a contravariância de Hom na promeira variável. Compensamos esta contravariância, convertendo M a um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita, considerando $m * g = g^{-1}.m$. Deste modo, a ação fica:

$$g.f(m) = g.f(g^{-1}.m) = gf(m * g).$$

Assim, $Hom(M, N)$ será um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda).

**Proposição 2.2.3** $Hom_{\mathbb{Z}G}(M, N) = Hom(M, N)^G$

**Demonstração:** Seja

$$Hom_{\mathbb{Z}G}(M, N) = \{f \in Hom(M, N); g.f(x) = f(g.x)\},$$

ou seja, f é equivariante. Assim,

$$\begin{array}{rcl} f \in Hom_{\mathbb{Z}G}(M,N) & \Leftrightarrow & g.f(x) = f(g.x), \forall g \in G, x \in M \\ & \Leftrightarrow & f(x) = g^{-1}f(g.x), \forall g \in G, x \in M \\ & \Leftrightarrow & f(x) = g^{-1}.f(x), \forall g^{-1} \in G, x \in M \\ & \Leftrightarrow & gf = f, \forall g \in G \\ & \Leftrightarrow & f \in Hom(M,N)^G. \end{array}$$

Logo, $Hom_{\mathbb{Z}G}(M,N) = Hom(M,N)^G$. □

## 2.3 A definição de $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$

Veremos agora a definição de (co)homologia de um grupo $G$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo $M$.

**Definição 2.3.1** *Sejam* $\ldots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$ *uma resolução projetiva de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$ *e* $M$ *um* $\mathbb{Z}G$*-módulo à esquerda. Podemos formar os* ***complexos de cadeia*** *e* ***cocadeia****, respectivamente:*

$$F \otimes_{\mathbb{Z}G} M : \ldots \to F_n \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\partial_n}} F_{n-1} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to \ldots \to F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\partial_1}} F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to 0$$

$$Hom_{\mathbb{Z}G}(F,M) : 0 \to Hom_{\mathbb{Z}G}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{\mathbb{Z}G}(F_1,M) \xrightarrow{\delta^1} \ldots \to Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n,M) \to \ldots$$

*com* ***operador bordo*** *dado por* $\overline{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ *e* ***operador cobordo***

$$\begin{aligned} \delta^n : Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n,M) &\to Hom_{\mathbb{Z}G}(F_{n+1},M) \\ f &\to \delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1} \end{aligned}$$

*(a) O* $n$*-ésimo* ***grupo de homologia*** *de* $G$ *com coeficientes em* $M$ *é definido por*

$$H_n(G,M) := H_n(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M).$$

*(b) O* $n$*-ésimo* ***grupo de cohomologia*** *de* $G$ *com coeficientes em* $M$ *é definido por*

$$H^n(G,M) := H^n(Hom_{\mathbb{Z}G}(F,M)).$$

**Observação 2.3.1** *As definições de* $H_*(G,M)$ *e* $H^*(G,M)$ *independem da resolução projetiva* $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ *escolhida (a menos de isomorfismo canônico). De fato: Tendo em vista o Teorema 2.1.1, se* $\epsilon' : F' \to \mathbb{Z}$ *uma outra resolução projetiva de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$ *mostra-se que os complexos* $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ *e* $F' \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ *são homotopicamente equivalentes. Deste modo,*

$$H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \simeq H_*(F' \otimes_{\mathbb{Z}G} M).$$

*Analogamente, os complexos* $Hom_{\mathbb{Z}G}(F,M)$ *e* $Hom_{\mathbb{Z}G}(F',M)$ *são homotopicamente equivalentes e assim,*

$$H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(F,M)) \simeq H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(F',M)).$$

**Observação 2.3.2** *Tomando $M = \mathbb{Z}$, com G-ação trivial, temos*

$$H_*(G, \mathbb{Z}) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) = H_*((F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F_G)$$

**Proposição 2.3.1** *Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então*
*(a)* $H_0(G, M) \simeq M_G$
*(b)* $H^0(G, M) \simeq M^G$.

**Demonstração:** Consideremos a resoluçao projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\ldots \to F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \to \ldots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

(a) Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos o seguinte complexo:

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots \longrightarrow & F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \xrightarrow{\overline{\partial_1}} & F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} & \xrightarrow{\overline{\epsilon}} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle \overline{\partial_0}} & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à direita, temos que $Im\overline{\partial_1} = ker\overline{\epsilon}$ e $\overline{\epsilon}$ é sobrejetora. Assim,

$$H_0(G, M) = \frac{Ker\overline{\partial_0}}{Im\overline{\partial_1}} = \frac{F_0 \otimes_{\mathbb{Z}G} M}{Ker\overline{\epsilon}} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G$$

Logo, $H_0(G, M) \simeq M_G$.
(b) Aplicando o funtor $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) & \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}} & Hom_{\mathbb{Z}G}(F_0, M) & \xrightarrow{\delta^0} & Hom_{\mathbb{Z}G}(F_1, M) & \longrightarrow \ldots \\ & & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{-1}} & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

Como tal funtor é exato à esquerda, temos que $Im\widetilde{\epsilon} = Ker\delta^0$ e $\widetilde{\epsilon}$ é injetora. Assim,

$$H^0(G, M) = \frac{Ker\delta^0}{Im\delta^{-1}} = Ker\delta^0 = Im\widetilde{\epsilon} \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M) \simeq M^G.$$

Logo, $H^0(G, M) \simeq M^G$. □

**Exemplo 2.3.1** *Sejam M um $\mathbb{Z}G$-módulo e G o grupo cíclico infinito com gerador t. Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$. Vimos no Exemplo 2.1.1 que $0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$, é uma resolução livre (portanto, projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ onde $\partial_1 = t - 1$. Aplicando o funtor $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$, obtemos o complexo de cadeias*

$$0 \to \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\overline{\partial_1}} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to 0$$

*onde* $\overline{\partial_1} = \partial \otimes id$. *Agora, temos os seguintes isomorfismos:*

$$\begin{array}{ccccccc} M & \simeq & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \overset{\overline{\partial_1}}{\to} & \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \simeq & M \\ m & \mapsto & 1 \otimes m & \mapsto & (t-1) \otimes m & \mapsto & (t-1)m \end{array}$$

*Deste modo, podemos considerar*

$$\begin{array}{rcl} \overline{\partial_1} : M & \to & M \\ m & \mapsto & (t-1)m \end{array}$$

*Portanto,* $H_*(G,M)$ *é a homologia do complexo:*

$$0 \to M \overset{\partial_1}{\to} M \to 0$$

*Assim,* $H_1(G,M) = \dfrac{Ker\partial_1}{\{0\}} = Ker\partial_1$. *Mas,*

$$Ker\partial_1 = Ker(t-1) = \{m \in M; (t-1).m = 0\} = \{m \in M; t.m = m\} = M^G$$

*Portanto,*

$$\begin{cases} H_0(G,M) = M_G \\ H_1(G,M) = M^G \\ H_i(G,M) = 0, i \geq 2. \end{cases}$$

*Note que* $H_1(G,M) = M^G =^{2.3.1} H^0(G,M)$. *Calculemos* $H^*(G,M)$. *Aplicando o funtor* $Hom_{\mathbb{Z}G}(-,M)$, *obtemos*

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \overset{\delta^0}{\to} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \to 0$$

*onde* $\delta^0(f)(x) = (f \circ \partial_1)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1).(x)) = (t-1)f(x)$.
*Logo,* $\delta^0$ *é a multiplicação por* $(t-1)$. *E ainda*

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) & \simeq & M \\ f & \mapsto & f(1) \end{array}$$

*Assim,* $H^*(G,M)$ *é a cohomologia do complexo:*

$$0 \to M \overset{t-1}{\to} M \to 0$$

*Agora,* $H^1(G,M) = \dfrac{Ker\delta^1}{Im\delta^0} = \dfrac{M}{(t-1)M} = M_G$.

*Portanto,*

$$\begin{cases} H^0(G,M) = M^G \\ H^1(G,M) = M_G \\ H^i(G,M) = 0, \ \textit{para } i \geq 2. \end{cases}$$

*Note que* $H^1(G,M) = M_G = H_0(G,M)$.

## 2.4 Módulos Induzidos e Coinduzidos e Lema de Shapiro

Começamos esta seção fazendo um estudo sobre extensão e coextensão de escalares. Sejam $R$ e $S$ anéis e, $\alpha : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Consideremos $M$ um $S$-módulo (à esquerda). Podemos ver $M$ como um $R$-módulo (à esquerda), definindo em $M$ a $R$-ação:

$$\begin{array}{rccl} \mu: & R \times M & \to & M \\ & (r,m) & \mapsto & r \cdot m = \alpha(r)m \end{array}$$

Obtemos, desta forma, um funtor da categoria dos $S$-módulos (à esquerda) para a categoria dos $R$-módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares**. Neste caso, $M$ é denotado por $Res^S_R M$.
Agora, estamos interessados em construir $S$-módulos a partir de $R$-módulos.
Seja $M$ um $R$-módulo (à esquerda). Através do homomorfismo $\alpha : R \to S$, vamos obter, a partir de $M$, os $S$-módulos (à esquerda): $S \otimes_R M$ e $Hom_R(S,M)$, da forma a seguir.
Podemos ver $S$ como um $R$-módulo (à direita), por restrição de escalares, através da ação:

$$\begin{array}{rccl} \eta: & S \times R & \to & S \\ & (s,r) & \mapsto & s \cdot r = s\alpha(r) \end{array}$$

onde $s\alpha(r)$ é a multiplicação do anel.
Assim, podemos considerar o produto tensorial $S \otimes_R M$.
Nosso objetivo é definir em $S \otimes_R M$ uma $S$-ação (à esquerda), para que este se torne um $S$-módulo. Definimos, então

$$\begin{array}{rccl} \psi: & S \times (S \otimes_R M) & \to & S \otimes_R M \\ & (s, s' \otimes m) & \mapsto & s \cdot (s' \otimes m) := ss' \otimes m. \end{array}$$

Pode-se provar que $\psi$ está bem definida e é uma $S$-ação. O $S$-módulo (à esquerda) $S \otimes_R M$ é dito ser obtido de $M$ por **extensão de escalares** de $R$ para $S$ (via $\alpha$).

Consideremos, agora, uma construção dual, utilizando $Hom$ ao invés de $\otimes$. Dado um $R$-módulo $M$ (à esquerda), vamos ver $S$ como um $R$-módulo (à esquerda) por restrição de escalares, através da ação:

$$\begin{array}{rccc} \xi: & R\times S & \to & S \\ & (r,s) & \mapsto & r\cdot s=\alpha(r)s \end{array}$$

onde $\alpha(r)s$ é a multiplicação do anel. Assim, podemos considerar $Hom_R(S,M)$. Nosso objetivo é definir em $Hom_R(S,M)$ uma $S$-ação (à esquerda), para que este se torne um $S$-módulo. Definimos, então

$$\begin{array}{rccc} \psi: & S\times Hom_R(S,M) & \to & Hom_R(S,M) \\ & (s,f) & \mapsto & s\cdot f;\ (s\cdot f)(s^{'}):=f(s^{'}s) \end{array}$$

Pode-se provar que $\psi$ está bem definida e é uma $S$-ação. O $S$-módulo (à esquerda) $Hom_R(S,M)$ é dito ser obtido de $M$ por **coextensão de escalares** de $R$ para $S$ (via $\alpha$).

**Observação 2.4.1** *Sejam $\varepsilon:\mathbb{Z}G\to\mathbb{Z}$ a aplicação aumentação e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então, o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}G}M$, obtido de $M$ por extensão de escalares de $\mathbb{Z}G$ para $\mathbb{Z}$, é simplesmente $M_G$ e, o $R$-módulo $Hom_{\mathbb{Z}G}(R,M)$, obtido de $M$ por coextensão de escalares de $\mathbb{Z}G$ para $\mathbb{Z}$, é simplesmente $M^G$.*

Sejam $G$ um grupo e $H$ um subgrupo de $G$. Consideremos a aplicação inclusão $\alpha:\mathbb{Z}H\hookrightarrow\mathbb{Z}G$. Assim, se $M$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo, podemos vê-lo como um $\mathbb{Z}H$-módulo através da inclusão, neste caso, denotamos o $\mathbb{Z}H$-módulo $M$ por $Res^G_HM$ (módulo restrição).
Seja $M$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo então O $\mathbb{Z}G$-módulo obtido de $M$ por extensão de escalares será denotado por $Ind^G_HM$, assim

$$Ind^G_HM=\mathbb{Z}G\otimes_{\mathbb{Z}H}M.$$

Neste caso, a extensão de escalares é chamada **indução**.
Da mesma forma, o $\mathbb{Z}G$-módulo obtido de $M$ por coextensão de escalares será denotado por $Coind^G_HM$. Assim,

$$Coind^G_H=Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G,M).$$

Neste caso, a coextensão de escalares é chamada **coindução**.

**Observação 2.4.2** *Se $H=\{1\}$, temos $\mathbb{Z}H\simeq\mathbb{Z}$. Deste modo*

$$Ind^G_{\{1\}}M=\mathbb{Z}G\otimes M\quad e\quad Coind^G_{\{1\}}M=Hom(\mathbb{Z}G,M).$$

*Tais $\mathbb{Z}G$-módulos são chamados, respectivamente,* **módulo induzido** *e* **módulo coinduzido**.

**Proposição 2.4.1** *Se $(G:H)<\infty$, então $Ind^G_HM\simeq Coind^G_HM$.*

**Demonstração:** [6], III.5.9. □

**Proposição 2.4.2** *Seja $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Existem $\mathbb{Z}G$-isomorfismos naturais:*
*(i)* $Ind_H^G\left(Res_H^G M\right) \simeq \mathbb{Z}(G/H) \otimes M$ *(com $G$-ação diagonal).*
*(ii)* $Coind_H^G\left(Res_H^G M\right) \simeq Hom(\mathbb{Z}(G/H), M)$ *(com $G$-ação diagonal).*

**Demonstração:** [6], III.5.9. □

**Corolário 2.4.1** $Ind_H^G\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}(G/H)$.

**Proposição 2.4.3** *Se $G$ é um grupo, $\mathcal{S}$ um subgrupo de $G$ com $[G:\mathcal{S}] = \infty$ então $(Ind_{\mathcal{S}}^G M)^G = 0$ para qualquer $\mathbb{Z}\mathcal{S}$-módulo $M$.*

**Demonstração:** [2], 1.2.11 □

Agora vamos relacionar a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de seu subgrupo H.

**Proposição 2.4.4** ***(Lema de Shapiro)****Sejam $G$ um grupo, $H$ um subgrupo de $G$ e $M$ um $\mathbb{Z}H$-módulo. Então:*
*(a)* $H_*(H,M) \simeq H_*(G, Ind_H^G M)$
*(b)* $H^*(H,M) \simeq H^*(G, Coind_H^G M)$

**Demonstração:** Seja $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Como $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}H - livre$, então $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ pode ser vista como uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.
(a) Temos que
$F \otimes_{\mathbb{Z}H} M \simeq (F \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}H} M = F \otimes_{\mathbb{Z}G} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M) = F \otimes_{\mathbb{Z}G} Ind_H^G M$.
Assim,
$H_*(H,M) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}H} M) \simeq H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} Ind_H^G M) = H_*(G, Ind_H^G M)$.
(b) Temos que
$Hom_{\mathbb{Z}H}(F_n, M) \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(F_n, Hom_{\mathbb{Z}H}(\mathbb{Z}G, M))$, $\forall n$.
Deste modo,
$Hom_{\mathbb{Z}H}(F, M) \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(F, Coind_H^G M)$.
Assim,
$H^*(H,M) = H^*(Hom_{\mathbb{Z}H}(F,M)) \simeq H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(F, Coind_H^G M)) = H^*(G, Coind_H^G M)$.
Portanto,
$H^*(H,M) \simeq H^*(G, Coind_H^G M)$. □

**Exemplo 2.4.1** *Se $M = \mathbb{Z}$, então $H_*(H,\mathbb{Z}) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H))$.*
*De fato:*

$$H_*(H,\mathbb{Z}) \overset{Shapiro}{\simeq} H_*(G, Ind_H^G\mathbb{Z}) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H)).$$

**Exemplo 2.4.2** *Sejam $G$ um grupo e $H$ um subgrupo de $G$, com $(G:H)<\infty$. Então,*
*(i) $H^*(H,\mathbb{Z})\simeq H^*(G,\mathbb{Z}(G/H))$*
*(ii) $H^*(H,\mathbb{Z}H)\simeq H^*(G,\mathbb{Z}G)$.*
*De fato :*
*(i) $H^*(H,\mathbb{Z}) \overset{Shapiro}{\simeq} H^*(G,Coind_H^G\mathbb{Z})\simeq H^*(G,Ind_H^G\mathbb{Z})\simeq H^*(G,\mathbb{Z}(G/H))$. Logo, $H^*(H,\mathbb{Z})\simeq H^*(G,\mathbb{Z}(G/H))$.*
*(ii) $H^*(H,\mathbb{Z}H) \overset{Shapiro}{\simeq} H^*(G,Coind_H^G\mathbb{Z}H)\simeq H^*(G,Ind_H^G\mathbb{Z}H)\simeq H^*(G,\mathbb{Z}G)$*

Veremos agora uma outra versão do Lema de Shapiro para $\mathbb{Z}G$-módulos. Para isso precisamois do seguinte lema.

**Lema 2.4.1** *Se $F$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$, e $H$ é um subgrupo de $G$, então $F$ também é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$.*

**Demonstração:**Consideremos uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0.$$

Como cada $F_n$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo, temos que $F_n$ é um somando direto de um $\mathbb{Z}G$-módulo livre. Deste modo,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i\in I}(\mathbb{Z}G)_i.$$

Vimos no Corolário 2.1.1 que $\mathbb{Z}G$ é $\mathbb{Z}H$-módulo livre, ou seja,

$$\mathbb{Z}G \simeq \bigoplus_{j\in J}(\mathbb{Z}H)_j.$$

Portanto,

$$F_n \oplus Q_n \simeq \bigoplus_{i,j}(\mathbb{Z}H)_{i,j}$$

e temos que $F_n$ é um $\mathbb{Z}H$-módulo projetivo.
Logo, $F$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$. □

**Proposição 2.4.5** *(**Lema de Shapiro - outra versão**) Sejam $G$ um grupo, $H$ um subgrupo de $G$ e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Temos os seguintes isomorfismos:*
*(i) $H_*(H,Res_H^GM)\simeq H_*(G,\mathbb{Z}(G/H)\otimes_{\mathbb{Z}}M)$*
*(ii) $H^*(H,Res_H^GM)\simeq H^*(G,Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H),M))$.*

**Demonstração:** (i) Pelo Lema 2.4.4, item (a) temos:

$$H_*(H, Res^G_H M) \simeq H_*(G, Ind^G_H(Res^G_H M)).$$

Como $Ind^G_H(Res^G_H M) \simeq \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M$, então $H_*(G, Ind^G_H(Res^G_H M)) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M)$. Logo,

$$H_*(H, Res^G_H M) \simeq H_*(G, \mathbb{Z}(G/H) \otimes_{\mathbb{Z}} M).$$

(ii) Novamente pelo Lema 2.4.4, item (b) temos:

$$H^*(H, Res^G_H M) \simeq H^*(G, Coind^G_H(Res^G_H M)).$$

Como $Coind^G_H(Res^G_H M) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), M)$, então $H^*(G, Coind^G_H(Res^G_H M)) \simeq H^*(G, Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), M))$. Logo,

$$H^*(H, Res^G_H M) \simeq H^*(G, Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}(G/H), M)).$$

□

## 2.5 $H_*$ e $H^*$ como Funtores de duas variáveis

Seja $\mathcal{C}$ uma categoria cujos objetos são pares $(G; M)$, onde $G$ é um grupo e $M$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo. Um morfismo em $\mathcal{C}$ de $(G; M)$ em $(G'; M')$ é um par $(\alpha, f)$, onde $\alpha : G \to G'$ é um homomorfismo de grupos, e $f : M \to M'$ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos, considerando $M'$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo via $\alpha$, isto é, um homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos satisfazendo: $f(g * m) = \alpha(g).f(m)$.

Consideremos $(\alpha, f) : (G; M) \to (G'; M')$, $F$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $F'$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G'$ (podemos ver $F'$ como uma resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ via $\alpha$, pois cada $F_n$ pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo, definindo a ação: $g * x' = \alpha(g).x'$).

Como $F$ é $\mathbb{Z}G$-projetiva e $F'$ é acíclica para $i \geq 1$ (pois $F'$ é $\mathbb{Z}G'$-resolução), temos por [6], II.6.2., que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \to F'$, estendendo a identidade de $\mathbb{Z}$, única a menos de homotopia.

Temos que $\tau(g.x) = g * \tau(x) = \alpha(g).\tau(x)$, pois $\tau$ é homomorfismo de $\mathbb{Z}G$-módulos.

Consideremos agora:

$$\begin{array}{rccc} \tau \otimes f : & F \otimes_{\mathbb{Z}G} M & \to & F' \otimes_{\mathbb{Z}G'} M' \\ & x \otimes m & \mapsto & \tau(x) \otimes f(m). \end{array}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ e $F' \otimes_{\mathbb{Z}G'} M$. Assim, $\tau \otimes f$ induz uma aplicação bem definida:

$$H_*(\alpha, f) \overset{not.}{=} (\alpha, f)_* : \begin{array}{rcl} H_*(G;M) & \to & H_*(G';M') \\ [x \otimes m] & \mapsto & [(\tau \otimes f)(x \otimes m)] = [\tau(x) \otimes f(m)]. \end{array}$$

Verifica-se facilmente que:

**(a)** Se $M = M'$, $G = G'$, $\alpha = id_G$ e $fl = id_M$, então

$$(\alpha, f)_* = id_{H_*(G;M)}.$$

**(b)** Se $(\alpha, f) : (G;M) \to (G';M')$ e $(\alpha', f') : (G';M') \to (G'';M'')$, então

$$(\alpha', f')_* \circ (\alpha, f)_* = (\alpha' \circ \alpha, f' \circ f)_* \overset{not.}{=} ((\alpha', f') \circ (\alpha, f))_*.$$

Logo, $H_*(\_;\_)$ é um funtor covariante em $\mathcal{C}$.

Para a cohomologia, vamos considerar uma categoria $\mathcal{D}$ cujos objetos são os mesmos que em $\mathcal{C}$, e os morfismos são pares $(\alpha, f)$, onde $\alpha : G \to G'$ e $f : M' \to M$ ($f$ é desta forma pois $Hom$ é contravariante na primeira variável).

Sejam $F$ e $F'$ resoluções de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}G'$, respectivamente. Pelos mesmos argumentos usados anteriormente, temos que existe uma aplicação de cadeia $\tau : F \to F'$, única a menos de homotopia. Temos que $\tau(g.x) = g * \tau(x)$ (pois $\tau$ é a aplicação de $\mathbb{Z}G$-módulos).

Consideremos a aplicação de cocadeias:

$$Hom(\alpha, f) : \begin{array}{rcl} Hom_{\mathbb{Z}G'}(F', M') & \to & Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M) \\ \phi & \mapsto & f \circ \phi \circ \tau. \end{array}$$

Tal aplicação é uma aplicação de cadeia entre os complexos $Hom_{\mathbb{Z}G'}(F', M')$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M)$. Assim, $Hom(\tau, f)$ induz uma aplicação bem definida:

$$Hom(\alpha, f)^* \overset{not.}{=} (\alpha, f)^* : \begin{array}{rcl} H^*(G';M') & \to & H^*(G;M) \\ [\phi] & \mapsto & [f \circ \phi \circ \tau]. \end{array}$$

Verifica-se facilmente que:

**(a)** Se $\alpha = id_G : G \to G$ e $f = id_M : M \to M$, então

$$(\alpha, f)^* = id_{H^*(G;M)}.$$

**(b)** Se $(\alpha, f) : (G;M') \to (G', M)$ e $(\beta, g) : (G';M'') \to (G'';M')$, então

$$((\beta, g) \circ (\alpha, f))^* = (\alpha, f)^* \circ (\beta, g)^*.$$

Logo, $H^*(\_;\_)$ é um funtor contravariante em $\mathcal{D}$.

**Observação 2.5.1** *Sejam $G$ um grupo e $H$ um subgrupo de $G$. Consideremos $\alpha : H \hookrightarrow G$ a inclusão e as $\mathbb{Z}H$-aplicações canônicas $i : M \to Ind_H^G M$ e $\pi : Coind_H^G M \to M$. Por [6], p.80, ex.2, temos que os isomorfismos do Lema de Shapiro, são dados, respectivamente, por*

$$(\alpha, i)_* : H_*(H; M) \to H_*(G; Ind_H^G M)$$

$$(\alpha, \pi)^* : H^*(G; Coind_H^G M) \to H^*(H; M).$$

*Tais isomorfismos são chamados* **isomorfismos de Shapiro**.

**Observação 2.5.2** *Sejam $G$ um grupo e $M$, $M'$ $\mathbb{Z}G$-módulos. Consideremos a aplicação $\alpha = id : G \to G$ e seja $f : M \to M'$ um $\mathbb{Z}G$-homomorfismo. Usando a teoria anterior, temos que existem homomorfismos induzidos*

$$(id, f)_* : H_*(G; M) \to H_*(G; M')$$

*e,*

$$(id, f)^* : H^*(G; M) \to H^*(G; M').$$

*Temos, então, que $H_*(G; \_)$ e $H^*(G; \_)$ são funtores covariantes na categoria dos $\mathbb{Z}G$-módulos $M$.*

Usando isto, mostra-se o seguinte resultado:

**Proposição 2.5.1** *Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de $\mathbb{Z}G$-módulos. Temos:*

**(i)** *Para todo inteiro $n$, existe uma aplicação natural $\partial_n : H_n(G; M'') \to H_{n-1}(G; M')$, tal que a sequência:*

$$\cdots \longrightarrow H_1(G; M) \xrightarrow{j_1} H_1(G; M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G; M') \xrightarrow{i_0} H_0(G; M) \xrightarrow{j_0} H_0(G; M'') \longrightarrow 0$$

*é exata, onde as aplicações $i_k$ e $j_k$ são as induzidas em homologia, isto é,*

$$i_k = (id, i)_* : H_k(G; M') \to H_k(G; M)$$

$$j_k = (id, j)_* : H_k(G; M) \to H_k(G; M'').$$

**(ii)** *Para todo inteiro $n$, existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G; M'') \to H^{n+1}(G; M)$, tal que a sequência:*

$$0 \longrightarrow H^0(G; M') \xrightarrow{i^0} H^0(G; M) \xrightarrow{j^0} H^0(G; M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G; M') \xrightarrow{i^1} H^1(G; M) \longrightarrow \cdots$$

*é exata, onde as aplicações $i^k$ e $j^k$ são as induzidas em cohomologia, isto é,*

$$i^k = (id, i)^* : H^k(G; M') \to H^k(G; M)$$

$$j^k = (id, j)^* : H^k(G; M) \to H^k(G; M'').$$

**Demonstração:** [6], III.6.1.

## 2.6 Interpretação Topológica para $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$

Nesta seção, relacionaremos a (co)homologia de um grupo $G$ com a (co)homologia de um $K(G,1)$-complexo, definido no capítulo 1. Para isso necessitaremos de alguns resultados.

**Proposição 2.6.1** *Seja $X$ um $G$-complexo livre e seja $Y$ a o complexo de órbitas $X/G$. Então $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$.*

**Demonstração:** Seja $X \xrightarrow{p} Y$, a projeção canônica. Isto é, $p(x) = G(x) = \{gx; g \in G\}$, onde $G(x)$ denota a $G$-órbita de $x$. A nível de complexo de cadeias temos a aplicação induzida $p_\# : C_*(X) \to C_*(Y)$, dada por $p_\#(\sum a_i\sigma_i) = \sum a_i G(\sigma_i)$. Agora, seja $\theta : C_*(X) \to C_*(X)_G = \frac{C_*(X)}{A}$, onde $A =< g\alpha - \alpha; g \in G, \alpha \in C_*(X) >$, dada por $\theta(\alpha) = \overline{\alpha} = \alpha + A$. Temos então o seguinte diagrama :

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{p_\#} & C_*(Y) \\ \downarrow{\scriptstyle \theta} & \nearrow_{\varphi} & \\ C_*(X)_G & & \end{array}$$

Defina $\varphi : C_*(X)_G \to C_*(Y)$ por $\varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{\sum a_i\sigma_i}) = p_\#(\alpha) = \sum a_i G(\sigma_i)$. Para ver que $\varphi$ está bem definida, observe que $A \subset Kerp_\#$ pois se $\sigma$ é uma n-célula, $p_\#(g\sigma - \sigma) = p_\#(g\sigma) - p_\#(\sigma) = G(\sigma) - G(\sigma) = 0$. Agora, $x \in A$, então $x = \sum g_i\alpha_i - \alpha_i$, $\alpha_i \in C_*(X)$. E assim, $p_\#(x) = p_\#(\sum g_i\sigma_j^i - \sigma_j^i) = 0$. Daí, se $\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2}$ então $\alpha_1 - \alpha_2 \in A$ o que nos dá $\varphi(\overline{\alpha_1}) = \varphi(\overline{\alpha_2})$. Além disso, $\varphi$ é homomorfismo de grupos e bijetora. □

**Teorema 2.6.1** *Se $M$ é um $RG$-módulo trivial, então*
*(a) $H_*(G;M) \simeq H_*(K(G,1);M)$;*
*(b) $H^*(G;M) \simeq H^*(K(G,1);M)$.*

**Demonstração:**Seja $Y = K(G,1)$ e $X$ o recobrimento universal de $Y$ . Então, o complexo celular aumentado do recobrimento universal $X$ de $Y$ , $\epsilon : C_*(X) \to R$ é uma resolução livre de $R$ sobre $RG$. ( ver Teorema 2.1.4 ).

Deste modo, $H_*(G;M) = H_*(C_*(X) \otimes_{RG} M)$. Como $Y \simeq X/G$, pela Proposição 2.6.1, $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$. Daí,
(a)

$$\begin{aligned} H_*(G;M) = H_*(C_*(X) \otimes_{RG} M) &\simeq H_*(C_*(X)_G \otimes M) \\ &\simeq H_*(C_*(Y) \otimes M) \\ &= H_*(Y;M) \end{aligned}$$

Portanto, $H_*(G;M) \simeq H_*(K(G,1);M)$;.

(b)

$$\begin{aligned} H^*(G;M) = H^*(Hom_{RG}(C_*(X),M)) &\simeq H^*(Hom_R(C_*(X)_G,M)) \\ &\simeq H^*(Hom_R(C_*(Y),M)) \\ &= H^*(Y;M) \end{aligned}$$

Portanto, $H^*(G;M) \simeq H^*(K(G,1);M)$. □

**Exemplo 2.6.1** *Consideremos o bouquet de círculos* $Y = \bigvee_{s\in S} S^1_s$.

*Pelo Exemplo 1.3.8, temos que Y é um K(F(S),1), onde F(S) é o grupo livre gerado pelo conjunto S. Assim, pela Proposição anterior*

$$H_i(Y,\mathbb{Z}) = H_i(F(S),\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & se\ i=0 \\ \bigoplus_{s\in S}\mathbb{Z} & se\ i=1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

**Exemplo 2.6.2** *Seja Y a soma conexa de n toros.*

*Pelo Exemplo 1.3.9, Y é um K(G,1), onde* $G = \left\langle a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g, \prod_{i=1}^{g}[a_i,b_i]=1 \right\rangle$

*Portanto, pela Proposição anterior*

$$H_i(Y,\mathbb{Z}) = H_i(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & se\ i{=}0 \\ \mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z} & (2g\ vezes)\ se\ i{=}1 \\ \mathbb{Z} & se\ i{=}2 \\ 0 & se\ i\geq 2 \end{cases}$$

**Exemplo 2.6.3** *Sejam* $G \simeq \mathbb{Z}^{(n)} \simeq \mathbb{Z}\oplus\ldots\oplus\mathbb{Z}$ *e* $Y = T^n = S^1\times\ldots\times S^1$ *(toro n-dimensional). Pelo Exemplo 1.3.7,* $T^n$ *é um K(G,1). Logo,*

$$H_i(G,\mathbb{Z}) = H_i(T^n,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{k_i},\ k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

**Proposição 2.6.2** *Se Y é um K(G,1)-complexo, então* $H_*(G,\mathbb{Z}) \simeq H_*(Y,\mathbb{Z})$. *onde o* $\mathbb{Z}G$*-módulo* $\mathbb{Z}$ *é visto com G-ação trivial.*

**Demonstração :** Como $Y$ é um $K(G,1)$, pela Proposição 2.1.4, temos que o complexo celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de $Y$, $\epsilon : C_*(\tilde{Y}) \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Deste modo, $H_*(G,\mathbb{Z}) \simeq H_*(C_*(\tilde{Y})_G)$. Além disso, $\tilde{Y}$ é um G-complexo livre, e por [9], 5.5.14, temos que o complexo de órbitas é dado por $\tilde{Y}/G \simeq Y$. Assim, pela Proposição 2.6.1,

$C_*(\tilde{Y})_G \simeq C_*(Y)$. Logo,

$$H_*(G,\mathbb{Z}) \simeq H_*(C_*(\tilde{Y})_G) \simeq H_*(C_*(Y)) \simeq H_*(Y,\mathbb{Z}).$$

□

## 2.7 Cohomologia de Grupos Finitos

Nesta seção veremos alguns resultados específicos para a (co)homologia de grupos finitos.

### 2.7.1 Grupos atuando em esferas

**Proposição 2.7.1** *Sejam $G$ um grupo e $X$ um $G$-complexo livre. Se $X$ é compacto então $G$ é finito.*

**Demonstração:** Como $X$ é um $G$-complexo livre, segue por ([6], pág. 17) que a ação de $G$ em $X$ é propriamente descontínua. Da Proposição 1.2.7 segue que $(X,p)$ é um recobrimento regular de $X/G$ onde a projeção $p$ é definida por

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \to & X/G \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

e $G$ atua livremente em $X$ como o grupo das transformações de recobrimento. Agora, dado $\overline{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\overline{x}_0) &= \{x \in X;\ p(x) = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ \overline{x} = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ x \in G(x_0)\}. \end{aligned}$$

Como a ação de $G$ em $X$ é livre, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com $G$. De fato,

$$p^{-1}(\overline{x}_0) = G(x_0) \simeq G/G_{x_0} \simeq G/\{1\} \simeq G.$$

Além disso, a fibra $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta e fechada ([18], pag.165). Suponhamos que $p^{-1}(\overline{x}_0)$ seja infinita. Como $X$ é compacto, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta. Deste modo, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é finita e, portanto, $G$ é finito. □

**Proposição 2.7.2** *O grupo com dois elementos $\mathbb{Z}_2$ é o único grupo não trivial que atua livremente em uma esfera de dimensão par $S^{2k}$.*

**Demonstração:** Sejam $G$ um grupo atuando livremente em $S^{2k}$ e $f, g \neq id$. Como a ação é livre, segue que $f$ não tem pontos fixos e ainda, como $f$ é um homeomorfismo, temos $f \circ f^{-1} = id$.

Daí $deg(f).deg(f^{-1}) = 1$ (ver § (1.4)) e assim $deg(f) = \pm 1$. Mais ainda, $deg(f) = -1$, visto que se $deg(f) = 1$, então o número de Lefschetz $\Lambda(f) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k tr(f_k) = \sum_{k=0}^{2k}(-1)^k tr(f_k) = (-1)^0 tr(f_0)+(-1)^{2k} tr(f_{2k}) = 1deg(f)+(-1)^{2k} deg(f) = 1+(-1)^{2k} \neq 0$ pois ($S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$). Pelo Teorema 1.5.1, segue que f tem ponto fixo. Agora, $deg(f \circ f) = deg(f).deg(f) = deg(f^2) =$ 1 ou seja, $\Lambda(f^2) = 0$ e portanto $f^2$ tem ponto fixo. Como a ação é livre segue que $f^2 = id$. Analogamente $g^2 = id$. Assim, se $\deg(f \circ g) = 1$ então $\Lambda(f \circ g) = 0$ e assim $f \circ g = id$, contudo $f^2 = id = g^2$, concluímos então que $f = g^{-1} = f^{-1} = g$ Logo $f = g$ e assim $G \simeq \mathbb{Z}_2$. □

**Observação 2.7.1** *Segue da Proposição anterior que se G é um grupo não trivial, $G \neq \mathbb{Z}_2$, atuando livremente em uma esfera $S^m$ então m é ímpar.*

**Proposição 2.7.3** *Seja X um G-complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $S^{2k-1}$. Então a ação de G sobre $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$ é trivial.*

**Demonstração:**A aplicação $\varphi_g : X \to X$, dada por $\varphi_g(x) = g.x$, é um homeomorfismo sem pontos fixos se $g = 1$ (pois a G-ação sobre X é livre). Seja $\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^i tr(\varphi_g)_{*,i}$ o número de Lefschetz de $\varphi_g$, onde a aplicação $(\varphi_g)_{*,i} : H_i(X) \to H_i(X)$ é induzida de $\varphi_g$ no nível i de homologia. Pelo Teorema 1.5.1, temos que $\Lambda_{\varphi_g} = 0$, já que $\varphi_g$ não tem pontos fixos se $g \neq 1$. Por outro lado, como $S^{2k-1}$ é composta por uma 0-célula e uma $(2k-1)$-célula ($S^{2k-1} = e^0 \cup e^{2k-1}$), temos

$$\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1}(-1)^i tr(\varphi_g)_{*,i} = tr(\varphi_g)_{*,0} - tr(\varphi_g)_{*,2k-1}$$

ou seja, $tr(\varphi_g)_{*,0} - tr(\varphi_g)_{*,2k-1} = 0$.
Além disso, como X é conexo por caminhos segue que $\varphi_{*,0} = id$. Daí, $tr(\varphi_g)_{*,0} = 1$, pois $H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$. Deste modo, $tr(\varphi_g)_{*,2k-1} = 1$ e, então, $(\varphi_g)_{*,2k-1} = id$, já que $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto, G atua trivialmente em $H_{2k-1}(X)$. □

### 2.7.2 Resoluções Periódicas via ações livres em esferas

Veremos agora que, se um grupo finito $G$ atua em uma esfera de dimensão ímpar podemos construir, através dessa ação, uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ e assim obtermos uma ferramenta para calcularmos a (co)homologia desse grupo.

**Teorema 2.7.1** *Seja X um G-complexo livre homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $S^{2k-1}$. Considere o complexo de cadeia celular aumentado de X, $C_*(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$. Então, a sequência*

$$\ldots \to C_{2k-1}(X) \to \ldots \to C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{n\circ\epsilon} C_{2k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{2k-1}} \ldots \to C_0(X) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

*onde $n : \mathbb{Z} = H_{2k-1}(X) \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ que é periódica de período 2k.*

**Demonstração:** A sequência

$$0 \to \mathbb{Z} \stackrel{n}{\to} C_{2k-1}(X) \stackrel{\partial_{2k-1}}{\to} \ldots \to C_1(X) \stackrel{\partial_1}{\to} C_0(X) \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

onde $n : \mathbb{Z} \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, e $C_i(X)$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo livre gerado pelas células de dimensão $i$ (uma em cada órbita de células), é exata. De fato, consideremos a sequência abaixo

$$0 \to Ker\partial_{2k-1} \stackrel{n}{\to} C_{2k-1}(X) \stackrel{\partial_{2k-1}}{\to} \ldots \to C_1(X) \stackrel{\partial_1}{\to} C_0(X) \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

Temos que $\partial_{2k} : C_{2k}(X) = 0 \to C_{2k-1}(X)$ é aplicação nula (pois a dimensão é $2k-1$), e $H_{2k-1}(X) \simeq \mathbb{Z}$. Agora, $H_{2k-1}(X) = \dfrac{Ker\partial_{2k-1}}{Im\partial_{2k}}$. Assim, $Ker\partial_{2k-1} \simeq \mathbb{Z}$. Como $H_i(X) = 0$, para $0 < i < 2k-1$, temos $Ker\partial_i = Im\partial_{i+1}$, para $0 < i < 2k-1$. Mais ainda, $\dfrac{C_0(X)}{Ker\epsilon} \simeq Im\epsilon = \mathbb{Z}$ (pois $\epsilon$ é sobrejetora). Consideremos agora o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \longrightarrow & C_1(X) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial_0} & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Temos $\mathbb{Z} \simeq H_0(X) = \dfrac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} = \dfrac{C_0(X)}{Im\partial_1}$. Logo, $\mathbb{Z} \simeq \dfrac{C_0(X)}{Ker\epsilon} \simeq \dfrac{C_0(X)}{Im\partial_1}$. Como $Im\partial_1 \subset Ker\epsilon$, pois

$$\epsilon(\partial_1(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1\sigma_1^1)) = \epsilon(\sum_{i=0}^{n} \alpha_1(\partial_1(\sigma_1^1))) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_1(\epsilon(\partial_1(\sigma_1^1))) = 0$$

temos $Im\partial_1 = Ker\epsilon$. A partir da sequência dada anteriormente, obtemos uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$G, de período $2k$, do modo a seguir. Vamos denotar $C_*(X)$ por $C_*$ e considerar o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & & & \mathbb{Z} & & & & & & \\ & & & & & & \uparrow{\scriptstyle \epsilon} & \searrow & & & & & \\ \ldots & \longrightarrow & C_1 & \longrightarrow & C_0 & \xrightarrow{n\circ\epsilon} & C_{2k-1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

onde $n : \mathbb{Z} \to C_{2k-1}(X)$ é a inclusão, e $C_i(X)$ é o $\mathbb{Z}$G-módulo livre gerado pelas células de dimensão i (uma para cada órbita de células). Observe que a inclusão n é possível pois $H_{2k-1}(X) = \mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo com a $G$-ação trivial. Assim, construímos a seguinte sequência:

$$\ldots \to C_{2k-1} \to \ldots \to C_1 \stackrel{\epsilon}{\to} C_0 \stackrel{n\circ\epsilon}{\to} C_{2k-1} \stackrel{\partial_{2k-1}}{\to} \ldots \to C_0 \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

Já vimos que $Im\partial_1 = Ker\epsilon$, além disso, $Ker\epsilon = Ker(n \circ \epsilon)$ e $Im(n \circ \epsilon) = Imn = Ker\partial_{2k-1}$. Deste modo,a sequência é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. □

**Exemplo 2.7.1** *Sejam $G =< t >\simeq \mathbb{Z}_n$ um grupo cíclico finito de ordem n e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Vamos calcular $H_*(G, M)$ e $H^*(G, M)$.*

*Consideremos $S^1$ vista como um CW-complexo com n vértices (que podem ser identificados com as raízes n-ésimas da unidade) e n 1-células. Vamos denotar por $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ os vértices e por $e_i = (v_i, v_{i+1})$ as 1-células de $S^1$, e definir a ação de G em $S^1$ por $t^k \Delta v_i = v_{k+i}$ e $t^k.e_i = e_{k+i}$, k, $i = 0, \ldots, n-1$. O grupo G atua em $S^1$ como o grupo de rotações e, tal ação permuta livremente as células. Além disso, $v_i = t^i.v_0$ e $e_i = t^i.e_0$, $i = 0, \ldots, n$. Assim, existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células. Portanto, $C_0(S^1) \simeq \mathbb{Z}G \simeq C_1(S^1)$. Deste modo, temos a sequência exata*

$$0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

*Mas* $\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = \dfrac{Ker\partial_1}{Im\partial_2} = Ker\partial_1$. *Então, obtemos a sequência exata*

$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$ *e, daí*

$$\ldots \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{n\circ\epsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{n\circ\epsilon} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

*é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Agora, vamos determinar $\partial_1$ e $n \circ \epsilon$. Temos*

$$\partial_1(e_0) = v_1 - v_0 = t.v_0 - v_0 = (t-1).v_0.$$

*Logo, $\partial_1$ é a multiplicação por t - 1. Se $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$, então $Ne_0$ gera $H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Temos $\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = Ker\partial_1$. Além disso,*

$$\begin{aligned} \partial_1(e_0 + t.e_0 + \ldots + t^{n-1}.e_0) &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})\partial_1(e_0) \\ &= (1 + t + \ldots + t^{n-1})(t-1).v_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

*Portanto, $e_0 + t.e_0 + t^2.e_0 + \ldots + t^{n-1}.e_0 \in Ker\partial_1$. Agora, se $x = a_0e_0 + a_1t.e_0 + \ldots + a_{n-1}t^{n-1}.e_0 \in Ker\partial_1$, temos*

$$\begin{aligned} \partial_1(a_0e_0 + \ldots + a_{n-1}t^{n-1}.e_0) = 0 \;&\Rightarrow\; (a_0 + a_1t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1})\partial_1(e_0) = 0 \\ &\Rightarrow\; (a_0 + a_1t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1})(t-1).v_0 = 0 \end{aligned}$$

*o que nos dá: $(a_{n-1} - a_0)v_0 + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1}.v_0 = 0$. Mas, como $C_0(X)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre que tem como base as 0-células $v_0, t.v_0, \ldots, t^{n-1}.v_0$, então, $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n-1}$. Assim,*

$x = a_0(e_0 + t.e_0 + \ldots + t^{n-1}.e_0) = a_0 N e_0$. *Portanto,*

$$\mathbb{Z} \simeq H_1(S^1) = Ker\partial_1 =< Ne_0 > .$$

*Como* $Im(n \circ \epsilon) = Ker\partial_1$, *segue que* $(n \circ \epsilon)(v_0) = Ne_0$ *e, deste modo,*

$$(n \circ \epsilon)(1_{\mathbb{Z}G}) = N.$$

*Logo,* $n \circ \epsilon$ *é a multiplicação por N. Temos então*
*a) Um epimorfismo* $\epsilon : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *tal que* $\epsilon(\sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i) := \sum_{i=0}^{n-1} r_i$.
*b) Um homomorfismo* $N : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ *dada por* $N(\alpha) := (1 + t + \ldots + t^{n-1}).\alpha$.
*c) Um homomorfismo* $(t-1) : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}G$ *tal que* $\alpha \longmapsto (t-1)\alpha$ *(multip. por* $(t-1)$*) tal que* $ker\epsilon = Im(t-1) = kerN$ *e* $Ker(t-1) = ImN$.
*Consequentemente, obtemos a seguinte resolução periódica, de período 2, de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}G$*:*

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

*Vamos calcular* $H_*(G; M)$. *onde* $M$ *é um* $\mathbb{Z}G$*-módulo. Tensorizando a resolução por* $M$*, obtemos o complexo:*

$$\ldots \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to 0.$$

*Através dos isomorfismos* $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M$ *e* $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq M_G$, *este complexo toma a seguinte forma:*

$$\ldots \to M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{t-1} M_G \to 0$$

*Daí,*

$$H_i(G; M) = \begin{cases} M_G, \text{ se } i = 0; \\ \dfrac{Ker(t-1)}{ImN}, \text{ se } i \text{ for ímpar;} \\ \dfrac{KerN}{Im(t-1)}, \text{ se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

*Analogamente calculamos a cohomologia de G* $H^*(G, M)$, *aplicando o funtor* $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, M)$ *à resolução e obtendo o complexo de co-cadeias*

$$0 \to Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^1} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \xrightarrow{\delta^2} \ldots$$

*onde* $\delta^n(f)(x) := (f \circ \delta_{n+1})(x)$. *E pelo isomorfismo* $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) \simeq M$, *temos*

$$0 \to M \xrightarrow{\delta^0} M \xrightarrow{\delta^1} M \xrightarrow{\delta^2} \ldots$$

*onde* $\delta^{2k} = t-1$ *e* $\delta^{2k-1} = N$, $k \geq 0$. *Logo,*

$$H^i(G,M) = \begin{cases} M^G, & \text{se } i\text{=}0 \\ \dfrac{KerN}{Im(t-1)} = \dfrac{KerN}{(t-1)M}, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \dfrac{Ker(t-1)}{ImN} = \dfrac{M^G}{NM}, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

*Em particular, para o caso* $M = \mathbb{Z}$ *(com G-ação trivial), temos que* $(t-1)$ *é a função nula, pois* $(t-1).m = t.m - m = 0$, $\forall m \in M$, *e N é a multiplicação por n, pois* $(1 + t + \ldots + t^{n-1}).m = m + t.m + \ldots + t^{n-1}.m = n.m$. *Assim,* $ker(t-1) = \mathbb{Z}$, $Im(t-1) = 0 = KerN$ *e* $ImN = n\mathbb{Z}$. *Deste modo,*

$$H_i(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i\text{=}0 \\ \mathbb{Z}_n, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ 0, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases} \quad e \quad H^i(G,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } i\text{=}0 \\ 0, & \text{se } i \text{ é ímpar} \\ \mathbb{Z}_n, & \text{se } i \text{ é par} \end{cases}$$

**Proposição 2.7.4** *Se G é um grupo cíclico finito não trivial, então* $\mathbb{Z}$ *não admite resolução projetiva sobre* $\mathbb{Z}G$ *de comprimento finito.*

**Demonstração:** Suponhamos que

$$F' : 0 \to F'_n \to F'_{n-1} \to \ldots \to F'_1 \to F'_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito. Pelo Exemplo 2.7.1,

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

também é resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.Assim,

$$H_*(G,\mathbb{Z}) = H_*(F' \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \overset{2.3.1}{=} H_*((F' \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z})_G) \simeq H_*(F'_G) \simeq H_*(F_G).$$

Mas, $H_*(F'_G) = 0$, para $i > n$ e $H_*(F_G)$ não são todos nulos para $i > n$, como no Exemplo anterior, que é uma contradição. Deste modo, não podemos ter resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito. □

## 2.8 Alguns resultados importantes da Teoria de (Co)homologia de Grupos

Nesta seção faremos um breve resumo de alguns resultados da teoria de (co)homologia de grupos que serão úteis no desenvolvimento deste trabalho.

### 2.8.1 Produto Cross e Cup

Sejam $M$ e $N$ dois $\mathbb{Z}G$-módulos. Se $F \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Então $F \otimes F \xrightarrow{\epsilon\otimes\epsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(G \times G)$(ver [6], V.1.2). Sejam $f \in Hom_G(F, M)$ e $g \in Hom_G(F, N)$. Definimos $f \times g \in Hom_{G\times G}(F \otimes F, M \otimes N)$ por $(f \times g)(x \otimes y) = (-1)^{pq} f(x) \otimes g(y)$ com $x \in F_p$ e $y \in F_q$.

**Definição 2.8.1** *Em cohomologia temos um produto induzido, chamado* ***produto cross***

$$\begin{array}{ccc} H^p(G, M) \otimes H^q(G, N) & \to & H^{p+q}(G \times G, M \otimes N) \\ u \otimes v & \to & u \times v \end{array}$$

*com* $u = [f]$, $v = [g]$ *e* $u \times v = [f \times g]$.

Sejam $G$ um grupo e $d : G \to G \times G$ definida por $d(g) = (g, g)$ (aplicação diagonal).

**Definição 2.8.2** *A composta*

$$H^p(G, M) \otimes H^q(G, N) \xrightarrow{x} H^{p+q}(G \times G, M \otimes N) \xrightarrow{d^*} H^{p+q}(G, M \otimes N)$$

*é chamado de* ***produto cup*** *e é denotado por* $\cup$. *Assim dados* $u \in H^p(G, M)$ *e* $v \in H^q(G, N)$ *temos* $u \cup v := d^*(u \times v)$.

### 2.8.2 Deslocamento de dimensões (dimension-shifting)

Dado um $\mathbb{Z}G$-módulo $M$, considere $\bar{M} = \mathbb{Z}G \otimes M$ e a aplicação sobrejetora $\varphi : \bar{M} \to M$ dada por $\varphi(\alpha \otimes m) = \alpha m$. Seja $K = ker\varphi$. Pode-se mostrar (usando sequência exata longa de homologia, ver [6] III.7.1) que

$$H_n(G, M) \simeq \begin{cases} H_{n-1}(G, K), \text{ se } n > 1; \\ KerH_0(G, K) \to H_0(G, \bar{M}), \text{ se n=1.} \end{cases}$$

Assim para calcularmos $H_n$, podemos, a princípio, nos reduzir a calcular $H_{n-1}$, desde que estejamos dispostos a mudar o módulo dos coeficientes. Se continuarmos este processo, ao final reduziremos o problema ao calculo de $H_0$. Analogamente, considerando $\bar{\bar{M}} = Hom(\mathbb{Z}G, M)$ e a aplicação injetora $\psi : M \to \bar{\bar{M}}$ dada por $\psi(m) = (\alpha) = \alpha m$. Seja $C = coker\psi$. Obtemos

$$H^n(G, M) \simeq \begin{cases} H^{n-1}(G, C), \text{ se n>1;} \\ cokerH^0(G, \bar{\bar{M}}) \to H^0(G, C), \text{ se n=1.} \end{cases}$$

## 2.9 Os funtores torção e extensão

Existem generalizações de $H_*(G,M)$ e $H^*(G,M)$ dadas, respectivamente, por

$$Tor_*^{\mathbb{Z}G}(-,-) \qquad e \qquad Ext^*_{\mathbb{Z}G}(-,-)$$

sem a exigência de que $\varepsilon : F \to A$ seja uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$.

**Definição 2.9.1** *Sejam $\varepsilon : F \to M$ e $\eta : P \to N$ resoluções projetivas dos $\mathbb{Z}G$-módulos $M$ e $N$. Definimos*

$$Tor_*^{\mathbb{Z}G}(M,N) := H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} N) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} P) = H_*(M \otimes_{\mathbb{Z}G} P),$$

*(Ver [6], III.2).*

**Observação 2.9.1** *Segue da definição que $H_*(G,-) = Tor_*^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-)$. De fato, se $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva, temos*

$$Tor_*^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) = H_*(F \otimes_{\mathbb{Z}G} A) = H_*(G,A).$$

**Definição 2.9.2** *Seja $\varepsilon : F \to M$ uma resolução projetiva de $M$ sobre $\mathbb{Z}G$. Definimos*

$$Ext^*_{\mathbb{Z}G}(M,N) := H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(F,N)).$$

**Observação 2.9.2** *Segue que $H^*(G,-) = Ext^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},-)$.De fato, seja $\varepsilon : F \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva, temos*

$$Ext^*_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A) = H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(F,A)) = H^*(G,A).$$

**Proposição 2.9.1** *Sejam $M$ e $N$ $\mathbb{Z}G$-módulos. Se $M$ é $\mathbb{Z}$-livre de torção, então*

$$Tor_*^{\mathbb{Z}G}(M,N) \simeq H_*(G, M \otimes N),$$

*onde $G$ atua diagonalmente em $M \otimes N$.*

*Se $M$ é $\mathbb{Z}$-livre, então*

$$Ext^*_{\mathbb{Z}G}(M,N) \simeq H^*(G, Hom(M,N)),$$

*onde $G$ atua diagonalmente em $Hom(M,N)$.*

**Demonstração:** [6], III.2.2. □

### 2.9.1 Teorema dos Coeficientes Universais

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [14].

**Teorema 2.9.1** *Sejam $C$ um complexo de cadeia de grupos abelianos com grupos de homologia $H_n(C)$ e $Hom(C_n, M)$ o complexo de co-cadeias com grupos de cohomologia $H^n(C, M)$. Então, para cada nivel, a sequência*

$$0 \to Ext(H_{n-1}(C), M) \to H_n(C, M) \to Hom(H_n(C), M) \to 0$$

*é exata e cinde.*

**Observação 2.9.3** *Este Teorema é conhecido por Teorema dos Coeficientes Universais para cohomologia porque é formalmente análogo ao Teorema dos Coeficientes universais para Homologia ([14] 3A.3.) que expressa a homologia com coeficientes arbitrários em termos da homologia com coeficientes em $\mathbb{Z}$.*

**Corolário 2.9.1** *Se $H_{n-i}(C)$ é finitamente gerado e livre, então $H^n(C, M) \simeq Hom(H_n(C), M)$.*

**Corolário 2.9.2** *Seja $G$ um grupo finito e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Então*

$$H^m(G, M) \simeq Hom(H_m(G, \mathbb{Z}), M) \oplus Ext(H_{m-1}(G, \mathbb{Z}), M).$$

**Corolário 2.9.3** *Se os grupos de homologia $H_n$ e $H_{n-1}$ do complexo de cadeia de grupos abelianos $C$ são finitamente gerados, com grupos de torção $T_n \subset H_n$ e $T_{n-1} \subset H_{n-1}$, então*

$$H^n(C, \mathbb{Z}) \simeq (H_n/T_n) \oplus T_{n-1}.$$

**Corolário 2.9.4** *Seja $G$ um grupo. Considere $T_k$ o grupo de torção de $H_k(G, \mathbb{Z})$. Seja $L_k$ a parte livre de $H_k(G, \mathbb{Z})$ ( $L_k \simeq H_k(G, \mathbb{Z})/T_k$). Então*

$$H^{m+1}(G, \mathbb{Z}) = L_{m+1} \oplus T_m.$$

Capítulo

3

# Condições de Finitude - Grupos de Dualidade

Neste capítulo, estudaremos algumas condições de finitude sobre um grupo $G$ e veremos sob quais condições $G$ satisfaz certas propriedades de dualidade. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados na referência [6]

## 3.1 Dimensão Cohomológica

**Definição 3.1.1** *Sejam $R$ um anel e $M$ um $R$-módulo. A **dimensão projetiva** de $M$, denotada por projdim $M$ ou proj $dim_R$ $M$, é definida como sendo o ínfimo do conjunto de inteiros $n$, tal que $M$ admite uma resolução projetiva:*

$$0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

*de comprimento $n$. Em particular, se $M$ não admite uma resolução projetiva de comprimento finito, projdim $M = \infty$.*

**Lema 3.1.1** *Se $M$ é um $R$-módulo então projdim $M \leq n$ se, e somente se, para qualquer sequência exata $0 \to K \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$ de $R$-módulos com cada $P_i$ projetivo tem-se $K$ é projetivo.*

**Demonstração:** Vamos supor $projdim M \leq n$. Em vista da definição de $Ext_R^*$ e da definição de resolução projetiva, segue que $Ext_R^{n+1}(M, -) = 0$. Consideremos a seguinte sequência exata de $R$-módulos com cada $P_i$ projetivo:

$$0 \to K \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

Vamos completá-la para obter uma uma resolução projetiva. Seja $P_n$ o $R$-módulo livre gerado por $K$. Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\partial_n} & P_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & \nearrow & \\ K & & \end{array}$$

onde $q$ é a sobrejeção natural de $P_n$ sobre $K$, $i$ é a inclusão e $\partial_n = i \circ q$. Sejam $L = Ker\partial_n$ e $P_{n+1}$ o $R$-módulo livre gerado por $L$. Novamente, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle q} & \overset{i}{\nearrow} & \\ K & & \end{array}$$

onde $p$ é a sobrejeção, $j$ a inclusão e $\partial_{n+1} = j \circ p$. É claro que $Im\partial_{n+1} = L = Ker\partial_n$. Procedendo deste modo, obtemos a seguinte resolução projetiva

$$\ldots \to P_{n+2} \overset{\partial_{n+2}}{\to} P_{n+1} \overset{\partial_{n+1}}{\to} P_n \to \ldots \to P_0 \to M \to 0$$

Aplicando o funtor $Hom_R(-, N)$ a esta resolução, obtemos:

$$0 \to Hom_R(M,N) \to Hom_R(P_0,N) \to \ldots \to Hom_R(P_{n-1},N) \overset{\delta^{n-1}}{\to} Hom_R(P_n,N) \overset{\delta^n}{\to} \ldots$$

Como $Ext_R^{n+1}(M,-) = H^{n+1}(Hom_R(P,-)) = 0$ temos $\dfrac{Ker\delta^{n+1}}{Im\delta^n} = 0$, isto é, todo cociclo em $Hom_R(P_{n+1}, N)$ é também um cobordo. Agora, $f \in ker\delta^{n+1} \Leftrightarrow \delta^{n+1}(f) = 0 \Leftrightarrow f \circ \partial_{n+2} = 0$. Consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n \\ & \searrow^{0} & \downarrow{\scriptstyle f} & \swarrow_{p} & \\ & & N & \xleftarrow[\varphi]{} & L \end{array}$$

A partir do cociclo $f$, podemos definir uma aplicação $\varphi : L \to N$, da seguinte forma: Como $p$ é sobrejetora, temos que para todo $u \in L$, existe $x \in P_{n+1}$ tal que $p(x) = u$. Deste modo, definimos $\varphi(u) := f(x)$. Vamos mostrar que $\varphi$ está bem definida. De fato, se existir um outro elemento $x' \in P_{n+1}$ tal que $p(x') = u$, então $p(x - x') = u - u = 0$. Logo, $x - x' \in Kerp = Im\partial_{n+2}$. Assim, existe $v \in P_{n+2}$, tal que $\partial_{n+2}(v) = x - x'$. Daí, $f(x - x') = f(\partial_{n+2}(v)) = 0$. Então, $f(x) = f(x')$. Note também que $f = \varphi \circ p$.

**Afirmação 1:** $f$ é um cobordo se, e somente se, a aplicação $\varphi : L \to N$ se estende a uma aplicação $\widetilde{\varphi} : P_n \to N$.

De fato, se $f$ é cobordo, então $f \in Im\delta^n$. Logo, existe $\widetilde{\varphi} : P_n \to N$, tal que $f = \delta^n(\widetilde{\varphi}) = \widetilde{\varphi} \circ \partial_{n+1}$. Provemos que $\widetilde{\varphi}$ estende $\varphi$, isto é, $\widetilde{\varphi}(l) = \varphi(l), \forall l \in L$. Seja $l \in L$. Como $L = Ker\partial_n = Im\partial_{n+1}$, temos que existe $x \in P_{n+1}$ tal que $l = \partial_{n+1}(x)$. Assim, $\widetilde{\varphi}(l) = \widetilde{\varphi}(\partial_{n+1}(x)) = f(x) = \varphi(l)$. Reciprocamente, se $\varphi : L \to N$ se estende a uma aplicação $\widetilde{\varphi} : P_n \to N$, consideremos $p(x) = l \in L$, $L = Ker\partial_{n+1}, \forall x \in P_{n+1}$. Deste modo, $f(x) = \varphi(l) = \widetilde{\varphi}(l) = \widetilde{\varphi}(j(l)) = \widetilde{\varphi}((j \circ p)(l)) = \widetilde{\varphi}(\partial_{n+1}(x)) = \delta^n(\widetilde{\varphi}(x))$. Portanto, $f = \delta^n((\widetilde{\varphi})$, ou seja, f é um cobordo.

**Afirmação 2:** Toda aplicação $\varphi : L \to N$ se estende a uma aplicação $\widetilde{\varphi} : P_{n+1} \to N$.
De fato, basta construir um cociclo $f : P_{n+1} \to N$, usar a hipótese de que todo cociclo é cobordo, e aplicar a Afirmação 1. Seja $\varphi : L \to N$ uma aplicação qualquer. Consideremos $f : P_{n+1} \to N$ dada por $f = \varphi \circ p$.

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \longrightarrow & P_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & P_n & \longrightarrow & \ldots \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & \searrow^{p} & & & \\ & & & & N & \xleftarrow[\varphi]{} & L & & \end{array}$$

Mostremos que $f$é um cociclo. Temos $\delta^{n+1}(f)(x) = (f \circ \partial_{n+2})(x) = (\varphi \circ p \circ \partial_{n+2})(x) = \varphi(p(\partial_{n=2}(x))) = 0$, pois $\partial_{n+2}(x) \in Ker\partial_{n+1} = Kerp$. Como f também é cobordo, por hipótese, temos pela Afirmação 1, que $\varphi$ se estende a uma aplicação $\widetilde{\varphi}$, o que prova a Afirmação 2.
Aplicando tal Afirmação para $N = L$ e $\varphi = id$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{j} & P_n & \xrightarrow{q} & K \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & \swarrow_{\tilde{\varphi}} & & & \\ & & L & & & & \end{array}$$

segue que existe $\widetilde{\varphi} : P_n \to L$ tal que $\widetilde{\varphi} \circ j = id$, isto é, a sequência exata $0 \to L \xrightarrow{j} P_n \xrightarrow{q} K$ cinde. Logo, $P_n = L \oplus K$. Como $P_n$ é livre, temos que $K$ é projetivo. □

A partir de agora, nesta seção, a menos que se especifique o contrário, vamos considerar o caso $R = \mathbb{Z}G$, $M = \mathbb{Z}$, e tratar $\mathbb{Z}G$-módulos por G-módulos.

**Definição 3.1.2** *Sejam G um grupo. A* ***dimensão cohomológica*** *de G sobre $\mathbb{Z}G$, denotado por cd(G), é definida como sendo o menor inteiro n tal que o Lema anterior seja satisfeito. Caso contrário, temos $cd(G) = \infty$. Isto é equivalente ao seguinte: Se $\mathcal{H} = \{n \in \mathbb{N} \mid H^n(G; M) \neq 0$, para algum $\mathbb{Z}G$ módulo $M\}$. Se $\mathcal{H}$ for limitado superiormente, a* **dimensão cohomológica** *de G, é dada por: $cd(G) = \max \mathcal{H}$. Caso $\mathcal{H}$ não seja limitado superiormente, $cd(G) = \infty$.*

**Observação 3.1.1** *(i) Se $cd(G) < \infty$ então*

$$\begin{aligned} cd(G) &= inf\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z} \text{ admite } \mathbb{Z}G - \text{ resolução projetiva de comprimento } n\} \\ &= inf\{n \in \mathbb{Z} \mid H^i(G, -) = 0, \text{ para } i > n\}. \end{aligned}$$

*(ii) Temos* $cd(G) \geq 0$ *pois* $H^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z} \neq 0$.
*(iii) Pode-se mostrar que, se* $cd(G) < \infty$ *, então* $cd(G) = \{n \in \mathbb{N} \mid H^n(G; F) \neq 0$, *para algum* $\mathbb{Z}G -$ *módulolivre* $F\}$ *(para detalhes ver [6], VIII.2.3).*
*(iv)A dimensão homológica, denotada por* $hd(G)$*, é definida similarmente.*

Existe um análogo topológico da dimensão cohomológica de $G$ dada pela dimensão geométrica, definida a seguir.

**Definição 3.1.3** *A* ***dimensão geométrica*** *do grupo G, denotada por* $gd(G)$*, é definida como sendo a dimensão mínima de um K(G,1)-complexo.*

**Proposição 3.1.1** $cd(G) \leq gd(G)$.

**Demonstração:** Vimos que o complexo de cadeia celular do recobrimento universal de um $K(G, 1)$-complexo $Y$ dá origem a uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (de comprimento igual a dimensão de $Y$), e o resultado segue das definições. □

**Exemplo 3.1.1** *Seja G um grupo cíclico infinito. Vimos no Exemplo 2.3.1 que* $H^i(G, M) = 0$ *para* $i \geq 2$. *Assim,* $cd(G) \leq 1$. *Como* $H^1(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$*, segue que cd(G)=1.*

**Exemplo 3.1.2** *Seja G um grupo cíclico de ordem n. Pelo Exemplo 2.7.1 temos que*

$$H^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } i=0 \text{ ;} \\ 0, \text{ se } i \text{ é ímpar ;} \\ \mathbb{Z}_n, \text{ se } i \text{ é par.} \end{cases}$$

*Logo,* $cd(G) = \infty$.

**Proposição 3.1.2** *Seja H um subgrupo de G. Então,* $cd(H) \leq cd(G)$. *A igualdade é válida se* $cd(G) < \infty$ *e* $[G : H] < \infty$.

**Demonstração:** Considere $cd(H) = n$. Então, da definição segue que, existe M tal que $H^n(H, M) \neq 0$ e $H^k(H, M) = 0$, $k > n$. Mas, pelo Lema de Shapiro 2.4.4, temos $0 \neq H^n(H, M) \approx H^n(G, Coind_H^G M)$. Deste modo, $H^n(G, Coind_H^G M) \neq 0$, ou seja, existe $N = Coind_H^G M$ tal que $H^n(G, N) \neq 0$. Assim, $cd(G) \geq n$. Portanto, $cd(H) \leq cd(G)$.
Consideremos agora o caso em que $cd(G) < \infty$ e $[G : H] < \infty$. Considere $cd(G) = n$. Então, pela Observação 3.1.1 (iii), existe um $\mathbb{Z}G$-módulo livre $F$ tal que $H^n(G, F) \neq 0$ e $H^k(G, F) = 0$, para $k > n$. Seja $F'$ um $\mathbb{Z}H$-módulo livre de mesmo posto que $F$. Assim, podemos escrever $F = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G)_j$ e $F' = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}H)_j$. Temos então

$$Ind_H^G F' = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} F' = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} (\bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}H)_j) = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} \mathbb{Z}H)_j = \bigoplus_{j \in J} (\mathbb{Z}G)_j = F.$$

Deste modo,

$$H^n(G,F) = H^n(G, Ind_H^G F') = H^n(G, Coind_H^G F') \overset{2.4.4}{=} H^n(H,F').$$

Como $H^n(G,F) \neq 0$, temos $H^n(H,F') \neq 0$. Logo, $cd(H) = n$. □

**Corolário 3.1.1** *Se $cd(G) < \infty$ então $G$ é livre de torção.*

**Demonstração:** Suponhamos que $G$ não seja livre de torção. Dessa forma, $G$ contém um subgrupo $H$ cíclico, finito e não trivial. Pelo Exemplo 3.1.2, temos $cd(H) = \infty$. Então pela Proposição anterior, $cd(G) = \infty$, o que nos dá uma contradição. Portanto, $G$ é livre de torção. □

**Observação 3.1.2** *Se $H$ é um subgrupo de $G$ tal que $[G:H] < \infty$, então a Proposição anterior garante a igualdade cd(H)=cd(G), a menos que ocorra o seguinte : $cd(G) = \infty$ e $cd(H) < \infty$.*

**Exemplo 3.1.3** *Seja $G = \mathbb{Z}_2$ e $H = \{1\}$. Temos [G:H]=2, $cd(G) = \infty$ e cd(H)=0.*

**Exemplo 3.1.4** *$cd(G) = 0$ se, e somente se, $G$ é o grupo trivial. De fato, se $G = \{1\}$ então*

$$H^i(G,M) = \begin{cases} M^G, \text{ se } i=0 \text{ ;} \\ 0, \text{ se } i \neq 0. \end{cases}$$

*Agora, como $H^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$ (pois a $G$-ação é trivial), temos $cd(G) = 0$.*
*Reciprocamente, suponhamos que $cd(G) = 0$. Então, pelo Corolarío 3.1.1 $G$ é livre de torção e da Observãção 3.1.1(i) segue que existe uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 0, ou seja,*

$$0 \to F_0 \to \mathbb{Z} \to 0.$$

*Segue então que $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}G$-projetivo.*

*Consideremos $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ a aplicação aumentação Como $\mathbb{Z}$ é $\mathbb{Z}G$-projetivo, temos por definição, que existe uma aplicação $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$ tal que $\varepsilon \circ \varphi = id$. Temos: $\varphi(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}G$ e $\varphi(\mathbb{Z}) \neq \{0\}$. Seja $\alpha \in \varphi(\mathbb{Z}), \alpha \neq 0$. Então, $\alpha = \varphi(n)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Agora, $g\alpha = g\varphi(n) = \varphi(gn) = \varphi(n) = \alpha$. Assim, $\alpha \in (\mathbb{Z}G)^G$, ou seja, $\varphi(\mathbb{Z}) \subset (\mathbb{Z}G)^G$. Logo,*

$$(\mathbb{Z}G)^G = (Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z})^G \neq 0.$$

*Pela Proposição 2.4.3, $G$ é finito. Como $G$ não tem torção, temos $G = \{1\}$.*

**Exemplo 3.1.5** *$G$ é livre de posto finito e não trivial se, e somente se, $cd(G) = 1$*
*De fato, seja $G = F(S)$ grupo livre gerado por um conjunto finito $S$. Pelo Exemplo 2.1.2, e pela Proposição 2.1.4 temos que*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(S)} \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 1. Assim, temos $cd(G) \leq 1$. Se $cd(G) = 0$ teríamos, pelo Exemplo anterior, $G = \{1\}$. Portanto, $cd(G) = 1$.*
*Reciprocamente, um Teorema de Stallings e Swan garante que todo grupo cuja dimensão cohomológica é igual a 1 é livre ([24] e [25]).*

**Exemplo 3.1.6** *Seja $G$ o grupo fundamental de uma superfície conexa fechada $Y$ (exceto $S^2$ ou $P^2$). Então, $cd(G) = 2$. De fato, pelos Exemplos 1.3.9 e 1.3.10, $Y$ é um $K(G,1)$ 2-dimensional, e assim, $cd(G) \leq 2$. Agora, pela Proposição 2.6.2, temos que $H^2(G, \mathbb{Z}_2) \simeq H^2(Y, \mathbb{Z}_2)$. Além disso, por [13], III.22.30, $H^2(Y, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Logo, $cd(G) = 2$.*

**Exemplo 3.1.7** *Seja $Y = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (toro n-dimensional). Vimos no Exemplo 1.3.7 que $Y$ é um $K(G,1)$-complexo, e temos que $H^n(Y, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \neq 0$ ([13], III.22.28). Portanto, $cd(G) = n$.*

## 3.2 Grupos de tipo $FP_n$

**Definição 3.2.1** *Uma resolução (ou resolução parcial) $P \xrightarrow{\epsilon} M$ é dita de **tipo finito** se cada $P_i$ é finitamente gerado.*

**Definição 3.2.2** *Seja $G$ um grupo e $n$ um inteiro. Dizemos que um grupo $G$ é de **tipo** $FP_n$ $(0 \leq n \leq \infty)$ se existe uma resolução projetiva parcial, de tipo finito,*

$$P_n \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

*de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.*

**Exemplo 3.2.1** *Todo grupo é de tipo $FP_0$, pois $\mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$, onde $\epsilon$ é a aplicação aumentação, é uma resolução parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 0.*

**Proposição 3.2.1** *$G$ é de tipo $FP_1$ se, e somente se, $G$ é finitamente gerado.*

**Demonstração:**Ver [6], página 197. □

**Proposição 3.2.2** *Se $G$ é finitamente apresentado então $G$ é de tipo $FP_2$*

**Demonstração:**Para G finitamente apresentado, é possível construir um CW-complexo finito Y de dimensão 2, com $\pi_1(Y) = G$.([6], página 44). Pela Proposição 2.1.3, temos que o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\tilde{Y}$ de Y é uma resolução livre parcial de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 2 e de tipo finito. Logo, G é de tipo $FP_2$. □

**Observação 3.2.1** *A recíproca da Proposição anterior é falsa. Um contra-exemplo foi dado em [4].*

## 3.3 Grupos de Tipo FP e FL

**Definição 3.3.1** *Um grupo $G$ é de **tipo FP (tipo FL)** sobre $\mathbb{Z}$ se $\mathbb{Z}$ admite uma resolução projetiva (livre) finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:*

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

*com cada $P_i$ finitamente gerado como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

**Proposição 3.3.1** *$G$ é de tipo FP se, e somente se,*
*(i) cd(G)$< \infty$*
*(ii) $G$ é de tipo $FP_\infty$*

**Demonstração:**($\Rightarrow$) Imediata.
($\Leftarrow$) Se cd(G)$< \infty$ e G é de tipo $FP_\infty$, podemos construir uma resolução finita da seguinte forma:

$$P_{n-1} \overset{\partial_{n-1}}{\to} \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

de tipo finito, onde $n = cd(G)$ e, consideremos $P_n = Ker\partial_{n-1}$. Pelo Lema 3.1.1 $P_n$ é projetivo. Além disso, $P_n$ é finitamente gerado. Deste modo, temos a resolução projetiva finita:

$$0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

Assim, $G$ é de tipo $FP$. □

**Exemplo 3.3.1** *Seja $G$ é um grupo finitamente apresentado, com cd(G)=2. Então, $G$ é de tipo FP. Pela Proposição 3.2.2, temos que $G$ é de tipo $FP_2$. Assim, pela Proposição anterior segue que $G$ é de tipo FP.*

**Observação 3.3.1** *É claro que, se $G$ é de tipo FL, então $G$ é de tipo FP.*

**Proposição 3.3.2** *Se $G$ é de tipo FP, então cd(G)=max$\{n : H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0\}$.*

## 3.4 Grupos de Dualidade

**Definição 3.4.1** *Um grupo $G$ de tipo FP é chamado Grupo de Dualidade de dimensão $n$ ($n \in \mathbb{N}$), ou simplesmente um $D^n$-grupo, se existirem isomorfismos $H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ e todos os $G$-módulos $M$, onde n=cd$(G)$. $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é chamado de módulo dualizante de $G$. Se o módulo dualizante $D$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ como grupo abeliano, então $G$ é chamado de* **grupo de dualidade de Poincaré** *de dimensão $n$, ou simplesmente $PD^n$-grupo. Se $G$ é um $PD^n$-grupo e a $G$-ação no módulo dualizante é trivial, então dizemos que o $PD^n$-grupo é orientável. Caso contrário o $PD^n$-grupo é dito não orientável.*

A seguir veremos um Teorema que caracteriza tais grupos:

**Teorema 3.4.1** *As seguintes condições são equivalentes para um grupo G de tipo FP:*
*(i) Existem um inteiro n e um G-módulo D tais que* $H^i(G,M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$*, para todo G-módulo M e todo inteiro i.*
*(ii) Existe um inteiro n tal que* $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$ *para todo* $i \neq n$ *e todo grupo abeliano A.*
*(iii) Existe um inteiro n tal que* $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ *para todo* $i \neq n$ *e* $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ *é livre de torção (como grupo abeliano)*
*(iv) Existem isomorfismos naturais* $H^i(G,-) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes -)$*, onde n=cd(G) e* $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$*.*

**Demonstração:** (i)⇒(ii) Por hipótese, $H^i(G,M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$. Consideremos o módulo induzido $M = \mathbb{Z}G \otimes A = Ind_{\{1\}}^G A$, onde A é um grupo abeliano. Então $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes (\mathbb{Z}G \otimes A))$. Temos que $D \otimes (\mathbb{Z}G \otimes A) = D \otimes Ind_{\{1\}}^G A \simeq Ind_{\{1\}}^G (D \otimes A) = \mathbb{Z}G \otimes (D \otimes A)$, ou seja, $(D \otimes M)$ também é módulo induzido.
De fato, temos o isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \psi : D \otimes (\mathbb{Z}G \otimes A) & \to & \mathbb{Z}G \otimes (D \otimes A) \\ d \otimes (\alpha \otimes a) & \longmapsto & \alpha \otimes (d\alpha \otimes a) \end{array}$$

com inversa

$$\begin{array}{rcl} \psi^{-1} : \mathbb{Z}G \otimes (D \otimes A) & \to & D \otimes (\mathbb{Z}G \otimes A) \\ g \otimes (d \otimes a) & \longmapsto & dg^{-1} \otimes (g \otimes a) \end{array}$$

definida nos geradores e estendida por linearidade. Agora, a G-ação em $D \otimes (\mathbb{Z}G \otimes A)$ é dada por $g(d \otimes (\alpha \otimes a)) = dg^{-1} \otimes g\alpha \otimes a$ e em $\mathbb{Z}G \otimes (D \otimes A)$ é dada por $g(\alpha \otimes (d \otimes a)) = g\alpha \otimes (d \otimes a)$. Logo, $\psi$ é uma aplicação de G-módulos.
Deste modo, para $L = D \otimes A$, temos para $i \neq n$

$$H_{n-i}(G, \mathbb{Z}G \otimes L) = H_{n-i}(G, Ind_{\{1\}}^G L) \overset{2.4.4}{\simeq} H_{n-i}(\{1\}, L) = 0$$

Daí,

$$\begin{array}{rcl} H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) & \simeq & H_{n-i}(G, D \otimes (\mathbb{Z}G \otimes A)) \\ & \simeq & H_{n-i}(G, \mathbb{Z}G \otimes (D \otimes A)) \\ & = & H_{n-i}(G, \mathbb{Z}G \otimes L) \\ & = & 0 \end{array}$$

Portanto, $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$ para $i \neq n$. Logo, $(i) \Rightarrow (ii)$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Por hipótese, $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes A) = 0$, para $i \neq n$, onde A é um grupo abeliano. Tomando $A = \mathbb{Z}$, temos $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}) \simeq H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$, $i \neq n$. Consideremos agora $A = \mathbb{Z}_k$, $k > 0$. Assim, $H^i(G, \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}_k) = 0$, $i \neq n$. Temos a sequência exata curta:

$$0 \to \mathbb{Z}G \xrightarrow{k} \mathbb{Z}G \xrightarrow{j} \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}_k \to 0$$

onde $k(\alpha) = k.\alpha$ e $j(\sum n_i g_i) = \sum(g_i \otimes \overline{n_i}) = (\sum n_i g_i) \otimes \overline{1}$. Aplicando a sequência exata de cohomologia, temos :

$$0 = H^{n-1}(G, \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}_k) \xrightarrow{j_*} H^n(G, \mathbb{Z}G) \xrightarrow{k_*} H^{n+1}(G, \mathbb{Z}G)$$

Assim, $K_*$ é injetora para todo $k$ e $k * x = kx$. Deste modo, se $x \in H^n(G, \mathbb{Z}G)$, com kx=0, temos x=0. Portanto, $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é um grupo abeliano livre de torção. Logo, $(ii) \Rightarrow (iii)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Seja $D = H^n(G, \mathbb{Z}G)$. Como $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ , para $i > n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G) \neq 0$ temos, pela Proposição 2.6.1, cd (G)=n. Como, por hipótese, $G$ é de tipo $FP$, temos que

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & P_n & \longrightarrow & P_{n-1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & P_0 & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & & & & & & 0 & & \end{array}$$

é resolução projetiva de comprimento n. Aplicando $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, \mathbb{Z}G)$ a esta sequência, temos

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}G) & \longrightarrow & Hom_{\mathbb{Z}G}(P_0, \mathbb{Z}G) & \xrightarrow{\delta^0} & \ldots & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & Hom_{\mathbb{Z}G}(P_n, \mathbb{Z}G) & \xrightarrow{\delta^n} & 0 \\ & & & & \uparrow{\scriptstyle \delta^{-1}} & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Como $H^i(G, \mathbb{Z}G) = H^i(Hom_{\mathbb{Z}G}(P, \mathbb{Z}G)) = 0$ para $i \neq n$ e $H^i(G, \mathbb{Z}G) = D$ para $i = n$, obtemos a resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$,

$$0 \to P_0^* \to \ldots \to P_n^* \to D \to 0$$

onde $P_i^* = Hom_\Gamma(P_i, \mathbb{Z}\Gamma)$. Mais precisamente através da suspensão $\Sigma^n P^*$, onde $(\Sigma^n P^*)_j = P_{n-j}^*$, a resolução pode ser reescrita da seguinte forma:

$$0 \to (\Sigma^n P^*)_n \to \ldots \to (\Sigma^n P^*)_0 \to D \to 0 \tag{3.1}$$

Agora, se $P$ é projetivo finitamente gerado, então $P^*$ também é projetivo finitamente gerado. De fato, como P é projetivo, temos $F = P \oplus Q$, onde F é livre. Deste modo, $Hom_{\mathbb{Z}G}(F, \mathbb{Z}G) = Hom_{\mathbb{Z}G}(P, \mathbb{Z}G) \oplus Hom_{\mathbb{Z}G}(Q, \mathbb{Z}G)$. Além disso, por hipótese, $P$ é finitamente gerado, então

$F = \oplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G$. Portanto,

$$Hom_{\mathbb{Z}G}(\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G) \simeq \oplus_{i=1}^{n} Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}G) \simeq \oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}G$$

Logo, $P^*$ é projetivo finitamente gerado. Daí, temos o isomorfismo de dualidade $Hom_{\mathbb{Z}G}(P, M) \simeq P^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M$. Tensorizando 3.1 por M, obtemos o complexo de cadeias

$$\ldots \to (\Sigma^n P_1)^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to (\Sigma^n P_0)^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to D \otimes_{\mathbb{Z}G} M \to 0$$

com $(\Sigma^n P_{n-i})^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(P_i, M)$. Assim,

$$H^i(G, M) = H^i(Hom_{\mathbb{Z}G}(P, M)) \simeq H_{n-i}(\Sigma^n P^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M) = Tor^G_{n-i}(D, M)$$

para qualquer G-módulo M. Como $D$ é livre de torção, pela Proposição 2.9.1, temos $Tor^G_{n-i}(D, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$. Portanto, $H^i(G, M) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes M)$, para qualquer G-módulo M. Logo, (iii)⇒(iv).
(iv)⇒(i) É imediato. □

Segue do Teorema anterior que um grupo $G$ é de dualidade se qualquer uma das condições do Teorema são satisfeitas.

**Observação 3.4.1** *Bieri e Eckmann definiram, originalmente, um grupo de dualidade como sendo um grupo G, não necessariamente de tipo FP, tal que existam isomorfismos dados pelo produto cap :*

$$\cap z : H^i(G, M) \xrightarrow{\simeq} H_{n-i}(G, D \otimes M)$$

*para todo i e todo M, onde n é um inteiro fixo, D um G-módulo fixo, e z um elemento fixo de $H_n(G, D)$. Como estes isomorfismos são naturais, segue do item (iv) do Teorema que, um grupo de dualidade, do modo em que estamos considerando, é também um grupo de dualidade no sentido em que foram definidos por esses autores. Reciprocamente, se G é um grupo de dualidade, no sentido dos mesmos, então o produto cap implica que existem isomorfismos naturais*

$$H^i(G, -) \simeq H_{n-i}(G, D \otimes -).$$

*e pode-se mostrar que G é de tipo FP, e portanto, G é um grupo de dualidade, no sentido em que estamos considerando.*

**Proposição 3.4.1** *Seja G um $D^n$-grupo com módulo dualizante D, então:*
**i)** $H^n(G; \mathbb{Z}G) \simeq D$
**ii)** $H_n(G; D) \simeq \mathbb{Z}$
**iii)** $cd(G) = n$

**Demonstração:**
**i)** $H^n(G;\mathbb{Z}G) \overset{3.4.1}{\simeq} H_0(G; D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G) \overset{prop.2.3.1}{\simeq} (D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G)_G \overset{prop.2.2.2}{\simeq} D \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \simeq D$.
**ii)** $H_n(G;D) \simeq H_n(G; D \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \overset{3.4.1}{\simeq} H^0(G;\mathbb{Z}) \overset{prop.2.3.1}{\simeq} \mathbb{Z}^G \simeq \mathbb{Z}$.
**iii)** Para todo $\mathbb{Z}G$-módulo $A$, temos $H^k(G;A) \overset{3.4.1}{\simeq} H_{n-k}(G; D \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$ para $k > n$ e $H^n(G;\mathbb{Z}G) = D \neq 0$. Logo $cd(G) = n$. □

**Observação 3.4.2** *O resultado acima nos mostra que tanto o módulo dualizante $D$ quanto a dimensão cohomológica $n$ é determinada pelo grupo $G$.*

**Exemplo 3.4.1** *Se $G$ é trivial então, $G$ é um $PD^0$-grupo.*

**Exemplo 3.4.2** *Se $G = \mathbb{Z}$ (grupo cíclico infinito), então $G$ é um $PD^1$-grupo.*

**Exemplo 3.4.3** *Se $G \simeq \mathbb{Z}_n$ (grupo cíclico finito de ordem $n$) então, $G$ não é um grupo de dualidade de Poincaré. De fato, se $G$ fosse um $PD^n$-grupo, para algum $n$, teríamos $H^k(G,M) \simeq H_{n-k}(G,M)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}G$-módulo $M$. Em particular, para $M = \mathbb{Z}$, teríamos $H^k(G,\mathbb{Z}) \simeq H_{n-k}(G,\mathbb{Z})$ $(*)$ Mas temos $H^{2k}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n, \forall k \in \mathbb{Z}$. Se $(*)$ for verdadeira, teremos $H_{n-2k}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r, \forall k \in \mathbb{Z}$. Seja $k_0 \in \mathbb{Z} : 2k_0 > n$. Logo, $n - 2k_0 < 0$ e, assim, $H_{n-2k_0}(G,\mathbb{Z}) = \{0\}$, o que nos dá uma contradição.*

**Proposição 3.4.2** *Seja $G$ um $PD^n$-grupo. Então,*

(i) $H^k(G,\mathbb{Z}G) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } k = n; \\ 0, \text{ se } k \neq n\ . \end{cases}$

(ii) $cd(G) = n$.

(iii) $G$ é livre de torção.

**Demonstração:**(i) Temos que, como $G$ é um $PD^n$-grupo, $H^k(G,\mathbb{Z}G) \simeq H_{n-k}(G,\mathbb{Z}G)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Mas, $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Assim,

$$H_{n-k}(G,\mathbb{Z}G) = H_{n-k}(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) \overset{Shapiro}{=} H_{n-k}(\{1\},\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } k = n; \\ 0, \text{ se } k \neq n\ . \end{cases}$$

Logo, $H^k(G,\mathbb{Z}G) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, \text{ se } k = n; \\ 0, \text{ se } k \neq n\ . \end{cases}$
(ii) Seja $k > n$. Como $G$ é um $PD^n$-grupo, para todo $\mathbb{Z}G$-módulo $M$, temos $H^k(G,M) = H_{n-k}(G,M) = 0$, pois $n - k < 0$. Daí, $cd(G) \leq n$. Mas, por [(i)], $H^n(G,\mathbb{Z}G) = \mathbb{Z} \neq 0$. Logo, $cd(G) = n$.
(iii) Se $G$ tiver torção, então, pelo corolário 4.1, $cdG = \infty$, o que não ocorre (por (ii)). □

## 3.5 Interpretação Topológica dos Grupos de Dualidade

Segue da Dualidade de Poincaré para variedades fechadas (compacta e sem bordo) a seguinte interpretação topológica para os Grupos de Dualidade de Poincaré:

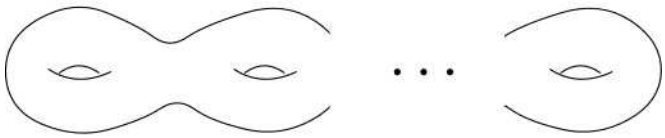
**Teorema 3.5.1** *Se $G$ é o grupo fundamental de uma $n$-variedade asférica fechada $X$, então $G$ é Grupo de Dualidade de Poincaré de dimensão $n$, orientável ou não, dependendo da orientação de $X$.*

**Demonstração:** Ver [6], VIII, p.222. □

**Exemplo 3.5.1** *Seja $X$ uma superfície fechada. Então, pelo Teorema de Classificação das Superfícies, temos as seguintes possibilidades para $X$:*

1. $X = S^2$
2. $X = T^2$
3. $X = RP^2$
4. $X = T^2 \# \ldots \# T^2$ *(soma conexa de n toros)*
5. $X = RP^2 \# \ldots \# RP^2$ *(soma conexa de n planos projetivos)*

*Destes, apenas $S^2$ e $RP^2$ não são asféricos. Então $\pi_1(T^2)$, $\pi_1(T^2 \# \ldots \# T^2)$ e $\pi_1(RP^2 \# \ldots \# RP^2)$ são Grupos de Dualidade de Poincaré de dimensão 2*



## 3.6 Noções Virtuais

Até agora nos preocupamos com grupos livres de torção. Baseados em [6], vemos que grupos com torção necessariamente têm dimensão cohomologica infinita, e assim certamente não podem satifazer as condiçoes FP, FL ou ser grupo de dualidade. Nesta seção, veremos alguns exemplos de grupos com torção que tem subgrupo livre de torção.

**Definição 3.6.1** *Seja $G$ um grupo. Dizemos que $G$* ***virtualmente*** *tem uma dada propriedade se algum subrupo de índice finito tem a mesma propriedade.*

**Exemplo 3.6.1** *$G$ um grupo virtualmente livre de torção se $G$ tem um subgrupo de índice finito livre de torção.*

**Definição 3.6.2** *Seja G um grupo. Dizemos que G tem* ***dimensão cohomológica virtual finita*** *e denotamos por vcd(G)$< \infty$, se existe um subgrupo S de G de índice finito e cd(S)$< \infty$.*

**Exemplo 3.6.2** *Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ e $S = \mathbb{Z}$ subgrupo de G. Temos que [G:S]=n$< \infty$ e cd(S)=1. Logo, vcd(G)$< \infty$.*

**Observação 3.6.1** *Similarmente, G é de tipo VFP (ou VFL) se algum subgrupo de índice finito é de tipo FP (ou FL).*

**Exemplo 3.6.3** *vcd(G)=0 se, e somente se, G é finito.*

**Definição 3.6.3** *Um grupo G é dito* ***grupo de dualidade virtual*** *de dimensão n, ou simplesmente $VD^n$, se algum subgrupo de índice finito de G é um grupo de dualidade de dimensão n.*

**Exemplo 3.6.4** *$G \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ é grupos de dualidade virtual de dimensão* 1*.*

**Proposição 3.6.1** *G é um grupo de dualidade virtual se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*
*(i) G é de tipo VFP*
*(ii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção.*
*Neste caso, cada subgrupo livre de torção de índice finito é um grupo de dualidade com módulo dualizante $H^n(G, \mathbb{Z}G)$.*

**Demonstração:** Suponhamos que $G$ é um grupo de dualidade virtual. Então existe $H$ subgrupo de G, de índice finito, que é grupo de dualidade. Como $H$ é grupo de dualidade segue que é de tipo $FP$. Daí $G$ é de tipo $VFP$. E pelo Teorema 3.4.1, existe um inteiro $n$ tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção. Agora, seja $G$ um grupo de tipo $VFP$e existe um inteiro $n$ tal que $H^i(G, \mathbb{Z}G) = 0$ para $i \neq n$ e $H^n(G, \mathbb{Z}G)$ é livre de torção. Então $G$ tem um subgrupo $H$ de tipo $FP$, de índice finito e pelo Exemplo 2.4.2 existe um inteiro $n$ tal que $0 = H^i(G, \mathbb{Z}G) = H^i(H, \mathbb{Z}H)$ para $i \neq n$ e $H^n(H, \mathbb{Z}H)$ é livre de torção. Pelo Teorema 3.4.1 e pela 3.4.1 temos que $H$ é grupo de dualidade. Logo, G é grupo de dualidade virtual. □

Capítulo

4

# As Teorias de Cohomologia de Tate e de Farrell

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre a Teoria de Cohomologia de Tate para grupos finitos e uma generalização dessa teoria denominada Cohomologia de Farrell. As principais referências usadas neste capítulo são [6] e [10].

## 4.1 Um pouco de Álgebra Homologica Relativa

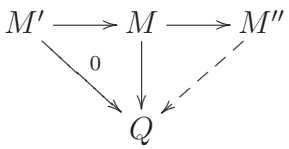
Nesta seção, veremos brevemente alguns conceitos de Àlgebra Homológia relativa. Para maiores detalhes ver [6], VI.2. Considere $G$ um grupo fixo, não necessariamente finito e $H \subset G$ um subgrupo fixo.

**Definição 4.1.1** *Uma aplicação injetora $i : M' \hookrightarrow M$ de $\mathbb{Z}G$-módulos é dita* ***admissível*** *se é uma aplicação injetora separável quando considerada como uma injeção de $\mathbb{Z}H$-módulos, isto é, se existe uma aplicação $\pi : M \to M'$ de $\mathbb{Z}H$-módulos tal que $\pi \circ i = id_{M'}$.*
*Uma sequência exata $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$ é dita admissível se a inclusão $Imj \hookrightarrow M''$ é admissível. Um complexo de cadeia $C$ de $\mathbb{Z}G$-módulos é dito admissível se cada sequência exata $C_{i+1} \to C_i \to C_{i-1}$ é admissível.*

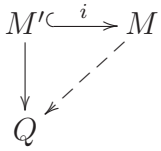
**Observação 4.1.1** *A definição de um complexo de cadeia ser admissível é equivalente a dizer que $C$ é contrátil quando consideramos como um $\mathbb{Z}H$-módulo, (ver [6], Proposição 0.3, página 5).*

**Definição 4.1.2** *Um $\mathbb{Z}G$-módulo $Q$ é* ***relativamente injetivo*** *se satisfaz as seguintes condições equivalentes:*

*(I) Qualquer diagrama de $\mathbb{Z}G$-módulos*




*onde cada linha exata é admissível, pode ser resolvido, isto é, existe um $\mathbb{Z}G$-homomorfismo de $M''$ em $Q$ que faz comutar o diagrama.*
*(II) Qualquer diagrama*




*onde i é uma injeção admissível, pode ser resolvido.*
*(III) O functor contravariante $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, Q)$ leva injeções admissíveis de $\mathbb{Z}G$-módulos em sobrejeções de grupos abelianos.*

**Observação 4.1.2** *(a) Todo módulo injetivo é relativamente injetivo.*
*(b) Para qualquer $\mathbb{Z}H$-módulo $N$, o $\mathbb{Z}G$-módulo $Coind_H^G N$ é relativamente injetiva ([6], VI.2.1).*
*(c) Se $[G : H] < \infty$ então qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo é relativamente injetivo ([6], VI.2.3).*

**Definição 4.1.3** *Uma **resolução relativamente injetiva** de um $\mathbb{Z}G$-módulo $M$ é um complexo de cadeias não negativo $Q$ de módulos relativamente injetivos junto com uma equivalência fraca $\eta : M \to Q$ tal que o complexo de cadeia aumentado*

$$0 \to M \to Q^0 \to Q^1 \to \cdots$$

*é admissível.*

**Observação 4.1.3** *Pode-se mostrar que quaisquer duas resoluções relativamente injetivas de $M$ são homotopicamente equivalentes.([6], VI.2.5).*

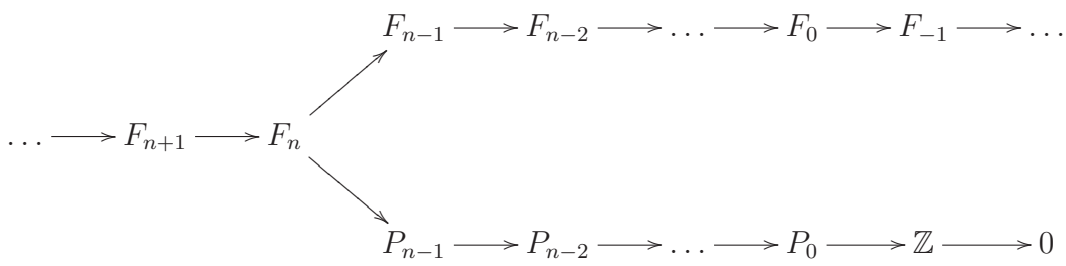
**Proposição 4.1.1** *Suponha $[G : H] < \infty$. Se $M$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo que é projetivo (respectivamente finitamente gerado e projetivo) como um $\mathbb{Z}H$-módulo, então $M$ admite uma resolução relativamente injetiva $\eta : M \to Q$ tal que cada $Q^n$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo (finitamente gerado e projetivo).*

**Demonstração:** Ver [6], VI.2.6. □.

## 4.2 Resoluções Completas

**Definição 4.2.1** *Seja $G$ um grupo com $vcd(G) = n$. Dizemos que $(F, P, \epsilon)$ é uma **resolução completa** para $G$ se $F$ é um complexo de cadeia acíclico de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos, $\epsilon : P \to \mathbb{Z}$ é*

*uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ tal que $F$ e $P$ coincidem em dimensões suficientemente altas.*




Vamos precisar do seguinte Lema, para provar o item (b) da Proposição 4.2.1:

**Lema 4.2.1** *Se $cd(G) < \infty$ então qualquer complexo de cadeia acíclico de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos é contrátil.*

**Demonstração:** Note primeiro que qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo $M$ que é $\mathbb{Z}G$-livre tem $projdim_{\mathbb{Z}G}M \leq n = cd(G)$. De fato, se $P$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ de comprimento $n$, então $P \otimes M$ (com $G$-ação diagonal ) é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z} \otimes M = M$ de comprimento $n$. Suponha agora que $F$ é um complexo acíclico de módulos projetivos e seja $Z_k$ para algum k, o módulo de k-ciclos. Então temos uma sequência exata

$$0 \to Z_k \to F_k \to \ldots \to F_{k-n+1} \to F_{k-n} \to 0$$

com cada $F_i$ projetivo. Desde que $projdim_{\mathbb{Z}G}Z_{k-n} \leq n$, segue que $Z_k$ é projetivo. Assim, $F_{k+1} \to Z_k$ cinde para todo $k$ e $F$ é contrátil (ver [6], Proposição 0.3, página 5). □

**Proposição 4.2.1** *(a) Existe uma resolução completa $(F, P, \epsilon)$ de $G$ tal que $F$ coincide com $P$ em dimensões $\geq n = vcd(G)$. Se $G$ é de tipo VFP, então $F$ pode ser tomado de tipo finito.*
*(b) Se $(F,P,\epsilon)$ e $(F', P', \epsilon')$ são resoluções completas, então existe uma única classe de homotopia de aplicações de $(F,P,\epsilon)$ em $(F', P', \epsilon')$, e estas aplicações são homotopicamente eqivalentes.*

**Demonstração:**( a) Como $vcd(G) = n$ então existe um subgrupo $H \subset G$ tal que $[G : H] < \infty$ e $cd(H) = n$ . Pelo Corolário 3.1.1, temos que $H$ é um subgrupo livre de torção. Seja $\epsilon : P \to \mathbb{Z}$ uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$G

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

e seja $K = ker\{P_{n-1} \to P_{n-2}\}$. Então $(P_i)_{i \geq n}$ fornece uma resolução projetiva de K

$$\ldots \to P_{n+1} \to P_n \xrightarrow{\alpha} K \to 0$$

Desde que $n = cd(H)$ temos que $K$ é $\mathbb{Z}$H-projetivo por 3.1.1. Assim, pela Proposição 4.1.1 temos uma resolução injetiva relativa correspondente.

$$0 \to K \xrightarrow{\beta} Q^0 \to Q^1 \to \dots$$

onde cada $Q^i$ é projetivo. Unindo $(P_i)_{i\geq n}$ e $(Q^i)i \geq 0$, obtemos a resolução completa desejada.

$$\cdots \longrightarrow P_{n+1} \longrightarrow P_n \longrightarrow Q^0 \longrightarrow Q^1 \longrightarrow Q^2 \longrightarrow Q^3 \longrightarrow Q^4 \longrightarrow \cdots$$
$$P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Se $G$ é de tipo VFP os complexos $P$ e $Q$ podem ser tomados de tipo finito.
(b) O Lema 4.2.1 mostra que qualquer resolução completa $F$ é $H$-contrátil e daí é admissível, pela Observação 4.1.1. Além disso, pela Observação 4.1.2 cada módulo $F_i$ é relativamente injetivo. Considere duas resoluções completas como em (b). Podemos construir uma aplicação de cadeias preservando a aumentação $P \to P'$. Segue de [6], VI.2.4 que podemos definir uma aplicação de cadeia $\tau : F \to F'$ em todas as dimensões. Da mesma forma, a equivalência de homotopia entre $P$ e $P'$ pode ser estendida para todas as dimensões. E assim,as aplicações entre resoluções completas são homotopicamente equivalentes. □

Vamos agora ver um método para a construção de uma resolução completa quando $\Gamma$ é um grupo particular.

**Exemplo 4.2.1** *(Construção de Resolução Completa) Sejam $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$, onde $cd(\Gamma_1) < \infty$ e $vcd(\Gamma_2) < \infty$. Considere $X$ uma resolução projetiva finita para $\Gamma_1$ e $Y$ uma resolução completa para $\Gamma_2$.*

$$X : 0 \to X_r \to X_{r-1} \to \dots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

$$Y : \dots \longrightarrow Y_{n+1} \longrightarrow Y_n \longrightarrow \dots \longrightarrow Y_k \longrightarrow Y_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow Y_0 \longrightarrow Y_{-1} \longrightarrow \dots$$
$$P_{k-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

*Tensorizando $X \otimes Y$ como na Observação 2.1.4 obtemos um complexo de cadeia acíclico*

$$C : \dots \to C_n \to C_{n-1} \to \dots \to C_{r+k} \to \dots \to C_0 \to C_{-1} \to \dots$$

*Analogamente, tensorizando $X \otimes P$ como na Observação 2.1.4, obtemos uma resolução projetiva $Q$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}\Gamma$:*

$$Q : \dots \to Q_n \to Q_{n-1} \to \dots \to Q_{r+k} \to \dots \to Q_0 \to \mathbb{Z} \to 0$$

*Note que $Q_n = C_n$, para $n \geq r+k$. E assim, temos uma resolução completa para $\Gamma$:*

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & C_{r+k} & \longrightarrow & C_{r+k-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & C_0 & \longrightarrow & C_{-1} \longrightarrow \ldots \\ & & & & & & & \searrow & & & & & \\ & & & & & & & & Q_{r+k-1} & \longrightarrow \ldots \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Finalizando esta seção veremos a seguinte Observação que será útil no capítulo seguinte.

**Observação 4.2.1** *(a) Seja $P$ um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo finitamente gerado. Então, por [6],I.8.3, temos que $P^*$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo finitamente gerado. E para qualquer $\mathbb{Z}G$-módulo $M$, existe um isomorfismo*

$$\varphi : P^* \otimes_{\mathbb{Z}G} M \xrightarrow{\simeq} Hom_{\mathbb{Z}G}(P, M)$$

*dado por $\varphi(u \otimes m)(x) = u(x).m$, para $u \in P^*, m \in M$ e $x \in P$. Onde $P^* = Hom_{\mathbb{Z}G}(P, \mathbb{Z}G)$.*
*(b) Seja $F$ um complexo de cadeia, o dual de $F$ é o complexo $\overline{F} = Hom_R(F, R)$ tal que $\overline{F}^n = (Hom_R(F, R))^n = (Hom_R(F_n, R)) = \overline{F}_{-n} = (F_n)^*$.*

## 4.3 Cohomologia de Tate

A homologia e a cohomologia de um grupo são usualmente pensadas com tendo propriedades duais uma da outra. No caso do grupo ser finito, mais que propriedades duais, a homologia e a cohomologia tem propriedades bastante similares. Tate descobriu uma maneira ingênua de explorar essas similaridades entre $H_*(G)$ e $H^*(G)$ para G finito. A saber, ele mostrou que existe um quociente de $\widetilde{H}^0$ de $H^0$ e um subgrupo de $\widetilde{H}_0$ de $H_0$ tal que a sequência $\ldots, H_2, H_1, \widetilde{H_0}, \widetilde{H^0}, H^1, H^2, \ldots$ forma uma teoria (unificada) de cohomologia, denotada por $\widehat{H}^*$, denominada Cohomologia de Tate.

Nesta secção faremos um estudo introdutório da Cohomologia de Tate para grupos finitos.

Se $G$ é um grupo finito então $vcd(G) = 0$. Daí, pela Proposição 4.2.1, existe uma resolução completa $(F, P, \epsilon)$ para $G$ tal que $F$ e $P$ coincidem em todas as dimensões não negativas. Assim, para grupos finitos podemos pensar em resoluções completas no seguinte sentido:

**Definição 4.3.1** *Seja $G$ um grupo finito. Uma **resolução completa** para $G$ é um complexo acíclico $\widehat{F} = (F_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de $\mathbb{Z}G$-módulos projetivos, junto com uma aplicação $\epsilon : F_0 \to \mathbb{Z}$ tal que $\epsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ é uma resolução no sentido usual, onde $F_+ = (F_i)_{i \geq 0}$.*

**Observação 4.3.1** *Segue da definição que $\delta_0 : F_0 \to F_{-1}$ se fatora unicamente como $\delta_0 = \eta\epsilon$, onde $\eta : \mathbb{Z} \to F_{-1}$ é um monomorfismo. Uma maneira de obter uma resolução completa de*

*G é o seguinte. Considere uma resolução $\epsilon : F \hookrightarrow \mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Tomemos o dual de $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ adotando $F_{-i} = Hom(F_{i-1}, \mathbb{Z})$ para $i > 0$. Isto nos fornece a seguinte resolução projetiva contrária $\eta : \mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{F}$. Ao unirmos $\epsilon : F \to \mathbb{Z}$ com sua dual $\eta : \mathbb{Z} \hookrightarrow \widehat{F}$ obtemos uma resolução completa de G.*

$$\widehat{F} : \ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_{-1} \longrightarrow F_{-2} \longrightarrow \ldots \quad (*)$$

$$F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} F_{-1}$$

**Exemplo 4.3.1** *Seja $G = \mathbb{Z}_n$ um grupo cíclico finito, com gerador $t$, e considere $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$. Segue da Observação anterior e do Exemplo 2.7.1 que o complexo*

$$\ldots \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \ldots \xrightarrow{t-1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{N} \mathbb{Z}G \xrightarrow{t-1} \ldots$$

$$\mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} \mathbb{Z}G$$

*é uma resolução completa de G.*

**Definição 4.3.2** *Seja $G$ um grupo finito e $\widehat{F}$ é uma resolução completa para $G$. A **cohomologia de Tate** com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo $M$ é definida por*

$$\widehat{H}^i(G, M) = H^i(Hom_{\mathbb{Z}G}(F, M))$$

*para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

**Observação 4.3.2** *Se $G$ é finito então existe uma resolução completa de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de tipo finito, isto é, na qual os módulos projetivos $\widehat{F}_i$ são todos finitamente generados (ver [6], Proposição VI.3.5). Segue então que os grupos $\widehat{H}^i(G, \mathbb{Z})$ são finitamente gerados.*

**Exemplo 4.3.2** *Seja $G = \mathbb{Z}_n =< t >$ e $\widehat{F}$ é uma resolução completa para $G$, como no Exemplo 4.3.1. Aplicando o functor $Hom_{\mathbb{Z}G}(-, \mathbb{Z})$, obtemos o seguinte complexo:*

$$\ldots \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \ldots$$

*onde $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ e $N = 1 + t + \ldots + t^{n-1}$. Note que $\partial_{2n} = 0$ e $\partial_{2n+1} = n = |G|$. Portanto,*

$$\widehat{H}^i(G, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \dfrac{Kern}{Im0} = \dfrac{0}{0} = 0, \textit{se } i \textit{ é ímpar}; \\ \dfrac{Ker0}{Imn} = \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n, \textit{se } i \textit{ é par}. \end{cases}$$

Sejam $G = \{1 = t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\}$ um grupo finito de ordem $n$ e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. Considere a aplicação $N : M \to M$ dada por $N(m) = (\sum_{i=0}^{n-1} t_i)m$ para todo $m \in M$. Considere também os conjuntos

$$M_G = M/ < gm - m | g \in G, m \in M > \text{ e } M^G = \{m \in M | gm = m, \forall g \in G\}.$$

**Proposição 4.3.1** *Com as notações anteriores, para todo $g \in G$ e $m \in M$ temos $N(gm) = N(m)$. Assim temos induzido um homomorfismo de grupos abelianos $\overline{N} : M_G \to M^G$ definido por $\overline{N}(\overline{u}) = N(u), u \in M_G$.*

**Demonstração:** Seja $g \in G$, aplicação $\varphi_g : G \to G$ definida por $\varphi_g(t_i) = t_i g$ para $i = 0, \ldots, n-1$ é bijetora. Logo para cada $i = 0, \ldots, n-1$ existe um único k tal que $t_i g = t_k$, e para cada $k = 0, \ldots, n-1$, existe um único i tal que $t_i g = t_k$. Assim para cada $g \in G$ e $m \in M$

$$N(gm) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i(gm) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_i g)m = (\sum_{i=0}^{n-1} t_k)m = N(m)$$

Agora considere $\overline{N} : M_G \to M^G$ definido por $\overline{N}(\overline{u}) = N(u)$. $\overline{N}$ está bem definida, pois

$$\overline{x_1} = \overline{x_2} \Rightarrow x_1 - x_2 \in < gm - m | g \in G, m \in M > \Rightarrow x_1 - x_2 = \sum_{j=0}^{s} n_j(gm_j - m_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N(x_1 - x_2) = \sum_{j=0}^{s} n_j(N(gm_j) - N(m_j)) = 0 \Rightarrow N(x1) = N(x2)$$

□

**Definição 4.3.3** *A aplicação $\overline{N} : M_G \to M^G$ dada por $\overline{N}(\overline{u}) = N(u)$ é chamada de **aplicação norma**.*

**Proposição 4.3.2** *Sejam $G$ um gupo finito e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo. A Cohomologia de Tate de $G$ com coeficientes em $M$ é dada por*

$$\widehat{H}^i = \begin{cases} H^i, \text{ para } i > 0; \\ coker\overline{N}, \text{ para i=0;} \\ ker\overline{N}, \text{ para i=-1;} \\ H_{-i-1}, \text{ para } i < \text{-1,} \end{cases}$$

*onde $\overline{N} : M_G \to M^G$ é a aplicação norma.*

**Demonstração:** Seja $\widehat{F}$ uma resolução completa para G. Considere $F_+ = (F_i)_{i\geq 0}$ e $F_- = (F_i)_{i<0}$, e seja $C^+$ (resp. $C^-$) o complexo $Hom_G(F_+, M)$ (resp. $Hom_G(F_-, M)$). Então temos,

$$\widehat{H}^i(G,M) = \begin{cases} H^i(C^+), i > 0 \\ H^i(C^-), i < -1 \end{cases}$$

e existe uma sequência exata

$$0 \to \widehat{H}^{-1}(G,M) \to H^{-1}(C^-1) \xrightarrow{\alpha} H^0(C^+) \to \widehat{H}^0(G,M) \to 0$$

onde $\alpha$ é induzido pelo operador cobordo $\delta : C^{-1} \to C^0$. É determinado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} C^{-1} & \xrightarrow{\delta} & C^0 \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^{-1}(C^-) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(C^+) \end{array} \qquad (*)$$

Agora, $\epsilon : F_+ \to \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$, então $H^i(C^+) \simeq H^i(G,M)$. E assumindo que $F$ é de tipo finito, então por [6], VI.3.5, temos $F_- = \overline{\Sigma P}$ para alguma resolução projetiva $P \to \mathbb{Z}$ de tipo finito. Existe um isomorfismo, tal que

$$C^- = Hom_G(F_-, M) = Hom_G(\overline{\Sigma P}, M) \simeq \Sigma P \otimes_G M.$$

Assim, $H^i(C^-) \simeq H_{-1}(\sum P \otimes_G M) = H_{-i-1}(P \otimes_G M) = H_{-i-1}(G,M)$. Portanto,

$$\widehat{H}^i = \begin{cases} H^i, \text{ para i} > 0; \\ H_{-i-1}, \text{ para i} < \text{-1}, \end{cases}$$

e existe uma sequência exata

$$0 \to \widehat{H}^{-1}(G,M) \to H_0(G,M) \xrightarrow{\alpha} H^0(G,M) \to \widehat{H}(G,M) \to 0$$

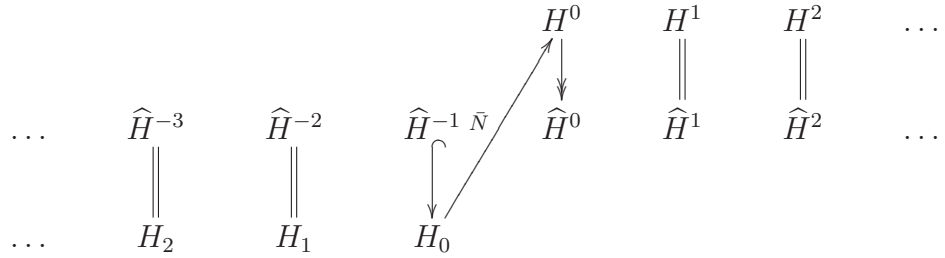
Afirmamos que $\alpha$ é a aplicação norma definida anteriormente. Para provar isto, é conveniente assumirmos que as resoluções projetivas $F_+$ e $P$ ambas tem $\mathbb{Z}G$ na dimensão 0 e ambas começam com a aumentação canônica $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$, (podemos assumir isto, pois a resolução pode ser tomada arbitráriamente como resolução projetiva de tipo finito). Então $\eta = \epsilon^* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}G$ é dado por $\eta(1) = \sum_{g\in G} g$. Como $Hom_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G, M) = M$, o diagrama $(*)$ fica:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{N} & M \\ \downarrow & & \uparrow \\ H_0(G,M) & \xrightarrow{\alpha} & H^0(G,M) \end{array}$$

onde as aplicações verticais são aplicações canonicas $M \to M_G$ e $M^G \hookrightarrow M$. O que prova a afirmação. Portanto,

$$\widehat{H}^i = \begin{cases} coker\overline{N}, \text{ para i=0;} \\ ker\overline{N}, \text{para i=-1;} \end{cases}$$

Resumindo os resultados acima por meio do seguinte diagrama:




□

**Exemplo 4.3.3** *Se $G$ é um grupo finito então $\widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$ onde $n = |G|$. De fato, como a ação de $G$ é livre,temos $\overline{N} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ com $\overline{N}(r) = \sum(t_i)r = nr$ . Assim, $\widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = coker\overline{N} = \dfrac{\mathbb{Z}}{Im\overline{N}} = \dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_n$.*

### 4.3.1 Algumas Propriedades da Cohomologia de Tate

Nesta seção veremos algumas propriedades da Cohomologia de Tate que são análogas às da cohomologia usual.

**1)** Uma sequência exata curta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ de $\mathbb{Z}G$-módulos dá origem a uma sequência exata longa

$$\ldots \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^i(G,M') \to \widehat{H}^i(G,M) \to \widehat{H}^i(G,M'') \xrightarrow{\delta} \widehat{H}^{i+1}(G,M') \to \ldots$$

**2)** Desde que uma resolução completa para $G$ pode ser considerada como uma resolução completa para qualquer $H \subseteq G$, e a indução e a coindução coincidem pois $G$ é finito, o Lema de Shapiro, assume a forma: Se $H \subseteq G$ e $M$ é um $H$-módulo, então

$$\widehat{H}^*(H,M) \simeq \widehat{H}^*(G, \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M).$$

**3) (Dimensão Shifting)** Observamos que existe um processo de deslocamento de dimensões para a Cohomologia de Tate, ou seja: Dado um $G$-módulo $M$ é possível encontrar $G$-módulos $K$ e $C$ (como em 2.8.2) tais que

$$\widehat{H}^i(G,M) \simeq \widehat{H}^{i+1}(G,K) \text{ e } \widehat{H}^i(G,M) \simeq \widehat{H}^{i-1}(G,C)$$

para todo $i \in \mathbb{Z}$ ([6] VI.5.).

**4) (Produto Cup)** Existe um produto cup na cohomologia de Tate,

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}^p(G,M) \otimes \widehat{H}^q(G,N) & \to & \widehat{H}^{p+q}(G, M \otimes N) \\ u \otimes v & \longmapsto & u \cup v \end{array}$$

com propriedades similares às propriedades do produto cup para cohomologia ordinária $H^*(G,\mathbb{Z})$ (ver 2.8.1). Por exemplo, o produto cup tem elemento identidade $1 \in \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} = \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z})$ e é associativo $((u \cup v) \cup w = u \cup (v \cup w))$. Assim $\widehat{H}^*(G,\mathbb{Z})$ é um anel graduado com identidade. Além disso $\widehat{H}^*(G,M)$ é um módulo sobre $\widehat{H}^*(G,\mathbb{Z})$ para todo M.

**5)** Para $i \in \mathbb{Z}$, considere o produto cup

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \otimes \widehat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z}) & \to & \widehat{H}^0(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z} \\ u \otimes v & \longmapsto & u \cup v \end{array}$$

Então existe um isomorfismo

$$\rho : \widehat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \to Hom(\widehat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z}), \mathbb{Z}/|G|\mathbb{Z})$$

definido por $\rho(u)(v) = u \cup v$ para $v \in \widehat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z})$ (ver [6] Teorema VI.7.4).

**Observação 4.3.3** *Considere o $\mathbb{Z}$-módulo $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{N}, n > 1$, o elemento $1/n + \mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ gera um subgrupo que é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$. Assim $\mathbb{Z}_n \simeq n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Além disso, se $A$ é um grupo abeliano tal que $nA = 0$ para algum $n > 0$ então*

$$Hom(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq Hom(A, n^{-1}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) \simeq Hom(A, \mathbb{Z}_n)$$

*Se $A$ é finito, $Hom(A,\mathbb{Z}_n) \simeq A$. Segue então, da propriedade (5), que existe um isomorfismo*

$$\rho : \widehat{H}^i(G,\mathbb{Z}) \to \widehat{H}^{-i}(G,\mathbb{Z})$$

*para todo $i \in \mathbb{Z}$.*

**Proposição 4.3.3** *Seja $G$ um grupo finito tal que $H^{m+1}(G,\mathbb{Z}) \neq 0$ para algum $m \geq 1$, e seja $p$ um primo que divide a ordem de $H^{m+1}(G,\mathbb{Z})$. Então a cohomologia $H^m(G,\mathbb{Z}_p)$ é não trivial.*

**Demonstração:** Pelo Corolário 2.9.4, temos

$$H^{m+1}(G,\mathbb{Z}) = \mathcal{L}(H_{m+1}(G,\mathbb{Z})) \oplus \mathcal{T}(H_m(G,\mathbb{Z})) \quad (*)$$

onde $\mathcal{L}$ denota a parte livre e $\mathcal{T}$ denota a parte de torção. Como $G$ é um grupo finito, pela Observação 4.3.2, a $\mathbb{Z}$-homologia de $G$ é um grupo de torção em dimensões maiores que zero, isto é, $H_m(G,\mathbb{Z}) = \mathcal{T}(H_m(G,\mathbb{Z}))$ e $\mathcal{L}(H_m(G,\mathbb{Z}))$ é igual a $\{0\}$. Assim, por $(*)$ temos que $H_m(G,\mathbb{Z}) \simeq H^{m+1}(G,\mathbb{Z})$. Pelo Corolário 2.9.2 temos que a sequência

$$0 \to Ext(H_{m-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \to H^m(G,\mathbb{Z}_p) \to Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \to 0$$

é exata e cinde. Logo,

$$H^m(G,\mathbb{Z}_p) \simeq Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{m-1}(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p)$$

Como $p$ divide a ordem de $H^{m+1}(G,\mathbb{Z})$, existe um subgrupo $F$ de $H^{m+1}(G,\mathbb{Z})$ tal que $F \simeq \mathbb{Z}_p$. Entretanto, $H_m(G,\mathbb{Z}) \simeq H^{m+1}(G,\mathbb{Z})$ e assim existe um subgrupo $H$ de $H_m(G,\mathbb{Z})$ tal que $H \simeq F$, i.e., $H \simeq \mathbb{Z}_p$. Agora seja $i : \mathbb{Z}_p \to H_m(G,\mathbb{Z})$ a inclusão. Então $i$ induz uma aplicação $i_\# : Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p) \to Hom(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p)$, que é sobrejetora. Porém $Hom(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$. De fato, a aplicação $\psi : Hom(\mathbb{Z}_p,\mathbb{Z}_p) \to \mathbb{Z}_p$ tal que $\psi(f) = f(\overline{1})$ é um isomorfismo. Portanto $Hom(H_m(G,\mathbb{Z}),\mathbb{Z}_p)$ possui um somando isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Assim $H^m(G,\mathbb{Z}_p)$ é não trivial. □

**Exemplo 4.3.4** *Se $G = \mathbb{Z}_r$ e $p$ é um primo que divide $r$ então, para todo $m$ ímpar, $H^m(G,\mathbb{Z}_p) \neq 0$. De fato, pelo Exemplo 2.7.1, $H^{m+1}(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_r$. Como $p$ divide $r$, pela Proposição anterior, $H_m(G,\mathbb{Z}_p) \neq 0$. Observe que $H_m(G,\mathbb{Z})$ é trivial, pelo Exemplo 2.7.1*

## 4.4 Grupos com Cohomologia Periódica

Nesta seção veremos alguns resultados sobre grupos com cohomologia periódica que serão úteis no próximo capítulo. A referência principal para essa seção é [6].

**Definição 4.4.1** *Um grupo finito $G$ tem **cohomologia periódica** se para algum $d \neq 0$ existe um elemento $u \in \widehat{H}^d(G,\mathbb{Z})$ que é invertível no anel $\widehat{H}^*(G,\mathbb{Z})$.*

**Observação 4.4.1** *Se $G$ tem cohomologia periódica então o produto cup com $u$*

$$u \cup - : \widehat{H}^n(G,M) \to \widehat{H}^{n+d}(G,M) \quad (*)$$

*é um isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $G$-módulo $M$. De fato,*
*i)* $u \cup v_1 = u \cup v_2 \overset{u^{-1}}{\Rightarrow} v_1 = v_2$ *e portanto* $u \cup -$ *é injetora.*
*ii) Seja* $z \in \widehat{H}^{n+d}(G, M)$, *existe* $v = u^{-1} \cup z \in \widehat{H}^n(G, M)$ *tal que* $u \cup v = z$, *pois* $u^{-1} \in \widehat{H}^{-d}(G, M)$. *Assim* $u \cup -$ *é sobrejetora. Em particular, tomando* $n = 0$ *e* $M = \mathbb{Z}$, *temos que* $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \simeq \dfrac{\mathbb{Z}}{|G|.\mathbb{Z}}$ *e que* $u$ *gera* $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z})$.
*O isomorfismo* $(*)$ *é chamado de isomorfismo de periodicidade.*

Se sabemos que um grupo $G$ tem cohomologia periódica, então a tarefa de computar $\widehat{H}^*(G)$ se torna bem mais simples. Assim é interessante termos um critério para decidir quando $G$ tem cohomologia periódica.

**Teorema 4.4.1** *Seja $G$ um grupo finito. As seguintes condições são equivalentes:*
*(i) $G$ tem cohomologia periódica.*
*(ii) Existem inteiros $n$ e $d$, com $d \neq 0$, tais que $\widehat{H}^n(G, M) \simeq \widehat{H}^{n+d}(G, M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo $M$.*
*(iii) Para algum $d \neq 0$, $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \simeq \dfrac{\mathbb{Z}}{|G|.\mathbb{Z}}$.*
*(iv) Para algum $d \neq 0$, $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z})$ contêm um elemento $u$ de ordem $|G|$.*

**Demonstração:** $(i) \Rightarrow (ii)$ segue direto de (*).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se $(ii)$ é verdadeiro então, pela técnica de deslocamento de dimensões (dimension-shifting), temos que $\widehat{H}^k(G, N) \simeq \widehat{H}^{k+d}(G, N)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}G$-módulo $N$. De fato, se existem inteiros $n$ e $d$, com $d \neq 0$, tais que $\widehat{H}^n(G, M) \simeq \widehat{H}^{n+d}(G, M)$ para todo $\mathbb{Z}G$-módulo, então pelo deslocamento de dimensão temos

$$\widehat{H}^k(G, N) \simeq \ldots \simeq \widehat{H}^n(G, M) \simeq \widehat{H}^{n+d}(G, M) \simeq \ldots \simeq \widehat{H}^{k+d}(G, N)$$

que é válido para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}G$-módulo $N$. Tomando $k = 0$ e $N = \mathbb{Z}$, nós obtemos $(iii)$.
$(iii) \Rightarrow (iv)$ Segue direto de $d \neq 0$, $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$.
$(iv) \Rightarrow (i)$ Seja $u \in \widehat{H}^d(G, \mathbb{Z})$ tal que a ordem de $u$ é $|G|$. Então o subgrupo $\mathbb{Z}_{|G|}$ de $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z})$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_{|G|} \simeq \dfrac{|G|^{-1}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}}$. Considere $f : \mathbb{Z}_{|G|} \to \frac{|G|^{-1}\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \subset \dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ tal que $f(u) = \frac{1}{|G|} + \mathbb{Z} \equiv 1 \in \mathbb{Z}_{|G|}$. Como $\dfrac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ é um $\mathbb{Z}$-módulo injetivo (ver [6] ), existe uma extensão de $f$:

$$\bar{f} : \widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \to \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$$

tal que $\bar{f}(u) = 1 \in \mathbb{Z}_{|G|}$. Mas $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \simeq \widehat{H}^{-d}(G, \mathbb{Z})$. Assim existe $v \in \widehat{H}^{-d}(G, \mathbb{Z})$, $v = \bar{\rho}(u)$ com ordem $|G|$. Considerando a aplicação dada pelo produto cup $\widehat{H}^d(G, \mathbb{Z}) \to \widehat{H}^0(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|} \hookrightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$, segue que $\bar{f}(u) \equiv u \cup v = u.v$. Daí temos $u.v \equiv 1 \in \mathbb{Z}_{|G|}$ e assim $u$ é invertível. Da Definição 4.4.1 segue que $G$ tem cohomologia periódica. □

**Exemplo 4.4.1** *Se $G$ é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo $X$ homeomorfo a uma esfera de dimensão ímpar $S^{2k-1}$ então $G$ tem cohomologia periódica. De fato, pelo Teorema 2.7.1, $G$ admite uma resolução periódica de período $d = 2k$ e assim, a condição (ii) do Teorema anterior é verdadeira logo $G$ tem cohomologia periódica.*

O próximo resultado será útil na demonstração da Aplicação 1 do próximo capítulo.

**Lema 4.4.1** *Sejam $G$ um grupo finito atuando livremente em $S^{2n+1}$ e $p$ um primo que divide a ordem de $G$. Então a cohomologia $H^i(G, \mathbb{Z}_p)$ contêm $\mathbb{Z}_p$ como um somando para $i = 2n + 1$ e $i = 2n + 2$.*

**Demonstração:** Pelo Exemplo anterior temos que $G$ tem cohomologia periódica e daí pelo Teorema 4.4.1, item $(iii)$ temos que $H^{2n+2}(G, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_{|G|}$, o grupo cíclico de ordem $|G|$. Como $G$ é um grupo finito, a $\mathbb{Z}$-homologia de $G$ é um grupo de torção em dimensões maiores que zero, isto é, $H^i(G, \mathbb{Z}) = \mathcal{T}(H^i(G, \mathbb{Z}))$ e $\mathcal{L}(H^i(G, \mathbb{Z})) = 0$. Pelo Corolário 2.9.4, temos

$$\mathbb{Z}_{|G|} \simeq H^{2n+2}(G, \mathbb{Z}) = \mathcal{L}(H^{2n+2}(G, \mathbb{Z})) \oplus \mathcal{T}(H^{2n+1}(G, \mathbb{Z})) = H_{2n+1}(G, \mathbb{Z})$$

E pelo Corolário 2.9.2, temos

$$H^{2n+1}(G, \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(H_{2n+1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{2n}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$$

$$H^{2n+2}(G, \mathbb{Z}_p) \simeq Hom(H_{2n+2}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p) \oplus Ext(H_{2n+1}(G, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}_p)$$

Como p divide $|G|$, então $H^{2n+2}(G, \mathbb{Z}_p)$ possui um somando direto que é $Ext(\mathbb{Z}_{|G|}, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$ (ver [14] 3.1) e $H^{2n+1}(G, \mathbb{Z}_p)$ tem um somando direto que é $Hom(\mathbb{Z}_{|G|}, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$.
Logo o resultado segue. □

## 4.5 Cohomologia de Farrell: Uma extensão da cohomologia de Tate para uma classe de grupos infinitos

Thomas Farrell definiu uma nova teoria de cohomologia que generaliza a teoria de cohomologia de Tate para uma certa classe de grupos infinitos, ou seja, grupos de dimensão cohomológica virtualmente finita. A construção da teoria de Farrell foi motivado por uma tentativa de entender por que a dualidade de Bieri-Eckmann falhava para grupos de dualidade virtuais.

Nesta seção introduziremos a teoria de cohomologia de Farrell, que generaliza a cohomologia de Tate. As principais referências usadas foram [6] e [10].

**Definição 4.5.1** *Seja $G$ um grupo com $vcd(G) = n < \infty$ e considere uma resolução completa $(F,P,\epsilon)$ de $G$. Os grupos de* ***cohomologia de Farrell*** *de $G$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-*

*módulo $M$ são definidos por*

$$\widehat{H}^*(G,M) = H^*(Hom_G(F,M)).$$

**Observação 4.5.1** *(a) Pela Proposição 4.2.1 temos que $\widehat{H}^*$ está bem definido.*
*(b) Seja $G$ um grupo finito. Logo, $vcd(G) = 0$. Obtemos então uma resolução completa para $G$, $(F, P, \epsilon)$ com $P_i = F_i$ para $i > 0$. Ou seja, temos o complexo acíclico:*

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow F_{-1} \longrightarrow F_{-2} \longrightarrow \ldots$$
$$F_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} F_{-1}$$

*Então, $\widehat{H}^i(G,M) = H^i(Hom_G(F,M))$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Neste caso, a presente definição é obviamente consistente com a Cohomologia de Tate. Isso mostra que a cohomologia de Farrell generaliza a cohomologia de Tate.*

### 4.5.1 Algumas Propriedades da Cohomologia de Farrell

**Proposição 4.5.1** *(Lema de Shapiro) Sejam $G$ um grupo com $vcd(G) < \infty$, $H$ um subgrupo de $G$ e $M$ um $\mathbb{Z}H$-módulo. Então: $\widehat{H}_*(H,M) \simeq \widehat{H}^*(G, Coind_H^G M)$*

**Demonstração:** A demonstração é análoga ao caso de cohomologia ordinária. (Ver 2.4.4 ) □

**Proposição 4.5.2** *Seja $G$ um grupo com $vcd(G) < \infty$ e $M$ um $\mathbb{Z}G$-módulo.*
*(a) Se $G$ é livre de torção então $\widehat{H}^*(G,M) = 0$.*
*(b) Se $M$ é um módulo induzido $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M'$, onde $H$ é um subgrupo livre de torção de índice finito, e $M'$ um $H$-módulo arbitrário então $\widehat{H}^*(G,M) = 0$.*

**Demonstração:** (a) De fato, se $G$ é livre de torção e $vcd(G) < \infty$ então existe $H \subseteq G$ tal que $[G : H] < \infty$ e pela Observação 3.1.2 temos $cd(G) = cd(H) = n$. Logo existe uma resolução projetiva de comprimento $n$. E para este caso tomamos $F = 0$.

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$
$$P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Portanto, $\widehat{H}^*(G,M) = 0$.
(b) Pela Proposição 4.5.1 temos que $\widehat{H}^*(H,M') \simeq \widehat{H}^*(G, Coind_H^G M')$. Como $M$ é um módulo induzido $\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} M'$ e $[G : H] < \infty$ temos $\widehat{H}^*(H,M') \simeq \widehat{H}^*(G, Ind_H^G M')$. Daí, por $H$ ser livre de torção, e pelo item (a), segue que $\widehat{H}^*(H,M') = \widehat{H}^*(G,M) = 0$. □

Antes de fazermos um Exemplo precisamos da seguite Observação.

**Observação 4.5.2** *Seja $R$ um anel comutativo e considere um $R$-homorfismo $d : R^2 \to R^2$. Aplicando o functor $Hom_R(-, \mathbb{Z})$ obtemos o homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \delta: & Hom_R(R^2,\mathbb{Z}) & \to & Hom_R(R^2,\mathbb{Z}) \\ & f & \mapsto & \delta(f) = f \circ d \end{array}$$

*Considere as aplicações*

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & Hom_R(R^2,\mathbb{Z}) & \to & Hom_R(R,\mathbb{Z}) \times Hom_R(R,\mathbb{Z}) \\ & f & \mapsto & \varphi(f) = (f_1, f_2) \end{array}$$

*onde $f_1(a) = f(a,0)$ e $f_2(b) = f(0,b)$, e*

$$\begin{array}{rccc} \psi: & Hom_R(R,\mathbb{Z}) \times Hom_R(R,\mathbb{Z}) & \to & Hom_R(R^2,\mathbb{Z}) \\ & (f_1, f_2) & \mapsto & \psi(f_1, f_2) = f_{12} \end{array}$$

*onde $f_{12} : R^2 \to \mathbb{Z}$ tal que $f_{12}(a,b) = f_1(a) + f_2(b)$. Temos o diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_R(R^2,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\quad\delta\quad} & Hom_R(R^2,\mathbb{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ Hom_R(R,\mathbb{Z}) \times Hom_R(R,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & Hom_R(R,\mathbb{Z}) \times Hom_R(R,\mathbb{Z}) \end{array}$$

*onde $\bar{\delta} = \varphi \circ \delta \circ \psi$. Assim,*

$$\bar{\delta}(f_1, f_2) = \varphi \circ \delta \circ \psi(f_1, f_2) = \varphi \circ \delta(f_{12}) = \varphi(f_{12} \circ d) = ((f_{12} \circ d)_1, (f_{12} \circ d)_2). \quad (*)$$

*Considere agora, o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} Hom_R(R,\mathbb{Z}) \times Hom_R(R,\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\bar{\delta}} & Hom_R(R,\mathbb{Z}) \times Hom_R(R,\mathbb{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)} & & \downarrow{\scriptstyle\beta=(\beta_1,\beta_2)} \\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \xrightarrow{\quad\tilde{\delta}\quad} & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \end{array}$$

*onde $\tilde{\delta} = \beta \circ \bar{\delta} \circ \alpha$ e*

$$\begin{array}{rccc} \beta_i: & Hom_R(R,\mathbb{Z}) & \to & \mathbb{Z} \\ & f & \mapsto & \beta_i(f) = f(1_R) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \alpha_i: & \mathbb{Z} & \to & Hom_R(R,\mathbb{Z}) \\ & n & \mapsto & \alpha_i(n) = f_n : R \to \mathbb{Z} \end{array}$$

*onde $f_n(r) = r.n$. Então $\beta(f_1, f_2) = (f_1(1_R), f_2(1_R))$ e $\alpha(m_1, m_2) = (f_{m_1}, f_{m_2})$.*

*Daí, $\tilde{\delta}(m_1, m_2) = \beta \circ \bar{\delta} \circ \alpha(m_1, m_2) = \beta \circ \bar{\delta}(f_{m_1}, f_{m_2}) \overset{(*)}{=} \beta((f_{m_1 m_2} \circ d)_1, (f_{m_1 m_2} \circ d)_2) =$*

$= ((f_{m_1m_2} \circ d)_1(1_R), (f_{m_1m_2} \circ d)_2(1_R)).$ $(**)$
*Assim, dado* $d : R^2 \to R^2$ *obtemos um homorfismo* $\tilde{\delta} : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ *definido como em* $(**)$.

Finalizando esse capítulo, vejamos um Exemplo de cálculo da Cohomologia de Farrell

**Exemplo 4.5.1** *Considere* $G = \mathbb{Z}_2 =< t >$ *e* $L = \mathbb{Z} =< s >$ *e seja* $\Gamma = G \times L$. *Para construir uma resolução completa de* $\Gamma$ *vamos aplicar a construção vista no Exemplo 4.2.1. Vimos no Exemplo 4.3.1, que* $X$ *é uma resolução completa para* $G = \mathbb{Z}_2 =< t >$

$$X : \ldots \stackrel{N}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{N}{\to} \ldots$$

*Para* $L = \mathbb{Z} =< s >$, *temos uma resolução completa*

$$Y : \ldots 0 \to 0 \to \mathbb{Z}L \stackrel{s-1}{\to} \mathbb{Z}L \to 0 \to \ldots$$

*Fazendo o produto tensorial de complexo de cadeia, como na Observação 2.1.4, obtemos o seguinte complexo acíclico:*

$$\ldots \stackrel{d_2}{\to} (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 \stackrel{d_1}{\to} (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 \stackrel{d_0}{\to} (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 \ldots$$

*Considerando as resoluções projetivas de* $G$ *e de* $L$

$$\ldots \stackrel{N}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{t-1}{\to} \mathbb{Z}G \stackrel{\epsilon}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

$$\ldots 0 \to 0 \to \mathbb{Z}L \stackrel{s-1}{\to} \mathbb{Z}L \stackrel{\epsilon'}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

*e calculando o produto tensorial, temos uma resolução projetiva de* $G \times L$:

$$\ldots \stackrel{d_3}{\to} (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 \stackrel{d_2}{\to} (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 \stackrel{d_1'}{\to} (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L) \stackrel{\epsilon\otimes\epsilon'}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

*E, portanto, uma resolução completa*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 & \xrightarrow{d_2} & (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 & \xrightarrow{d_1} & (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 & \xrightarrow{d_0} & (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L)^2 & \xrightarrow{d_{-1}} & \ldots \\ & & & & & \searrow^{d_1'} & & & & & \\ & & & & & & (\mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}L) & \xrightarrow{\epsilon\otimes\epsilon'} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Pela Observação 2.1.4 temos* $\mathbb{Z}(G \times L) \simeq \mathbb{Z}(G) \otimes \mathbb{Z}(L)$. *Considerando* $R = \mathbb{Z}(G) \otimes \mathbb{Z}(L)$, *pelo Exemplo 4.5.2, vimos que é suficiente aplicarmos o operador bordo na unidade do anel* $1_R = (\bar{1}, 1)$. *Considere* $d_i : R \times R \to R \times R, \forall i$. *Fazendo os calculos temos*

$$d_{2n+1}(1_R, 0) = ((N.\bar{1}, 1); (\bar{1}, (s-1)1)) \ , \ d_{2n+1}(0, 1_R) = ((0, 0); ((t-1)\bar{1}, 1))$$

$$d_{2n}(1_R,0)=(((t-1)\bar{1},1);(\bar{1},(s-1)1))\ ,\ d_{2n}(0,1_R)=((0,0);(N\bar{1},1))$$

*Aplicando o functor* $Hom_R(-,\mathbb{Z})$*, obtemos*

$$\ldots\to\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\overset{\tilde{\delta}_2}{\to}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\overset{\tilde{\delta}_1}{\to}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\ldots$$

*Voltando a (**) da Observação anterior, obtemos o operador* $\tilde{\delta}$ *da seguinte forma :*

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta_{2n}}(m_1,m_2) &= ((f_{m_1m_2}\circ d_{2n})_1(1_R),(f_{m_1m_2}\circ d_{2n})_2(1_R))\\
&= ((f_{m_1m_2}\circ d_{2n})(1_R,0),(f_{m_1m_2}\circ d_{2n})(0,1_R))\\
&= ((f_{m_1m_2})(((t-1)\bar{1},1);(\bar{1},(s-1)1));(f_{m_1m_2})((0,0);(N\bar{1},1)))\\
&= (f_{m_1}((t-1)\bar{1},1)+f_{m_2}(\bar{1},(s-1)1);f_{m_1}(0,0)+f_{m_2}(N\bar{1},1))\\
&= (((t-1)\bar{1},1).m_1+(\bar{1},(s-1)1).m_2;(0,0).m_1+(N\bar{1},1)m_2)\\
&= ([(t,1)-(\bar{1},0)].m_1+[(\bar{1},s)-(0,1)].m_2;[(\bar{1},1)+(t,0)].m_2)\\
&= (0;2.m_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta_{2n+1}}(m_1,m_2) &= ((f_{m_1m_2}\circ d_{2n+1})_1(1_R),(f_{m_1m_2}\circ d_{2n+1})_2(1_R))\\
&= ((f_{m_1m_2}\circ d_{2n+1})(1_R,0),(f_{m_1m_2}\circ d_{2n+1})(0,1_R))\\
&= ((f_{m_1m_2})(N\bar{1},1);(\bar{1},(s-1)1));(f_{m_1m_2})((0,0);((t-1)\bar{1},1)))\\
&= (f_{m_1}(N\bar{1},1)+f_{m_2}(\bar{1},(s-1)1);f_{m_1}(0,0)+f_{m_2}((t-1)\bar{1},1))\\
&= ((N\bar{1},1).m_1+(\bar{1},(s-1)1).m_2;(0,0).m_1+((t-1)\bar{1},1)m_2)\\
&= ([(\bar{1},1)+(t,0)].m_1+[(\bar{1},s)-(0,1)].m_2;[(t,1)-(1,0)].m_2)\\
&= (2m_1;0)
\end{aligned}$$

*Assim, a cohomologia de Farrell de* $\Gamma$ *é a cohomologia do complexo*

$$\ldots\xrightarrow{(0,2)}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{(2,0)}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{(0,2)}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{(2,0)}\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\xrightarrow{(0,2)}\ldots$$

*Agora, calculando a cohomologia de Farrell, temos*

$$\widehat{H}^i(\Gamma,\mathbb{Z})=\begin{cases}\dfrac{\{0\}\times\mathbb{Z}}{\{0\}\times 2\mathbb{Z}}\simeq\{0\}\times\mathbb{Z}_2=\mathbb{Z}_2;\ se\ i\ é\ ímpar\\[2ex]\dfrac{\mathbb{Z}\times\{0\}}{2\mathbb{Z}\times\{0\}}\simeq\mathbb{Z}_2\times\{0\}=\mathbb{Z}_2;\ se\ i\ é\ par\end{cases}$$

*Portanto,* $\widehat{H}^i(\Gamma,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_2,\forall i\in\mathbb{Z}$.

Capítulo

5

# Aplicações

## 5.1 Aplicação 1: Um critério para $(H, G)$-coincidência de aplicações

Nesta seção apresentamos em detalhes a demonstração, que se encontra em [11], de um critério de $(H, G)$-coincidência de aplicações (Teorema 5.1.1 abaixo). A demonstração desse critério segue do fato que um certo homomorfimo $c^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é não trivial (Lema 5.1.1 abaixo) e para demonstrar esse fato aplicamos alguns resultados vistos no capítulo 2, seção 7 (cohomologia de grupos finitos) e no capítulo 4, seção 4 (grupos com cohomologia periódica).

Antes de demonstrarmos o resultado principal vejamos alguns resultados preliminares.

**Definição 5.1.1** *Seja $X$ um CW-complexo. Se $X$ tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera, então ele é chamado de* ***esfera de homotopia****.*

**Definição 5.1.2** *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre $G$-espaços. Dizemos que $f$ possui uma* ***$G$-coincidência*** *se aplica uma órbita de algum elemento $x \in X$ em um único ponto, ou seja, existe $x \in X$ tal que $f(gx) = f(x)$, $\forall g \in G$.*

Seja $X$ um $G$-espaço. Para cada $x \in X$, considere $G(x)$ a órbita do elemento $x$. Se $H$ é um subgrupo de $G$, então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} G(x) \times H & \to & G(x) \\ (gx, h) & \longmapsto & ghx \end{array}$$

fornece uma ação à direita de $H$ na órbita $G(x)$ de $G$. Para cada $y \in G_x$ temos $yH = \{yh | h \in H\}$ a órbita da ação de H em $G(x)$.

**Definição 5.1.3** *Suponha que $X$ é um $G$-espaço e $H$ é um subgrupo de $G$. Dizemos que uma aplicação $f : X \to Y$ possui uma* ***(H,G)-coincidência*** *se existe um ponto $x \in X$ tal que $f$ manda cada órbita da ação de $H$ na $G$-órbita de $x$ em um único ponto, isto é, $f(ghx) = f(gx), \forall h \in H$.*

**Observação 5.1.1** *(a) Nas condições da definição, se $H$ é o subgrupo trivial, então todo ponto de $X$ é uma (H,G)- coincidência. De fato, $f$ é uma função.*
*(b) Se $H = G$ então $f$ tem uma $G$-coincidência. De fato, seja $x \in X$ um ponto de (H,G)-coincidência. Considere $x = ex \in G(x)$, onde $e$ é o elemento neutro de $G$. Assim f(xh) = f(x) para todo $h \in H$, ou seja f(exh) = f(x) o que implica que f(hx) = f(ehx) = f(x). Entretanto H=G. Logo f(Gx) =f(x) e portanto $x$ é um ponto de G-coincidência.*

Seja $\Sigma^m$ uma esfera de homotopia na qual $G$ atua livremente. Em vista dos resultados apresentados nas Proposições 2.7.1 e 2.7.2, a partir de agora, vamos assumir que $G$ é finito e $m$ é ímpar, $m = 2n + 1$.

Considere $\pi : \Sigma^{2n+1} \to \Sigma^{2n+1}/G$ a aplicação quociente e seja $c : \Sigma^{2n+1}/G \to B(G)$ a aplicação classificante para o $G$-fibrado principal $\pi : \Sigma^{2n+1} \to \Sigma^{2n+1}/G$.

**Lema 5.1.1** *Seja $p$ um primo que divide $|G|$. Então o homomorfismo $c^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é não trivial.*

**Demonstração:** Considere o $G$-fibrado $E(G) \to B(G)$, dado pelo Teorema 1.7.2. Temos o fibrado $\Sigma^{2n+1} \to E(G) \times_G \Sigma^{2n+1} \xrightarrow{\rho} B(G)$ com espaço base $B(G)$ e fibra $\Sigma^{2n+1}$ (ver [8] III.4 ou [5] II.2.4). Como $G$ é um grupo finito e atua livremente em $\Sigma^{2n+1}$, então $E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}$ é homotopicamente equivalente a $\Sigma^{2n+1}/G$ (ver [5] pag 208). Seja $t : \Sigma^{2n+1}/G \to E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}$ uma equivalência de homotopia. Logo $\rho \circ t : \Sigma^{2n+1}/G \to B(G)$ também classifica o $G$-fibrado principal $\pi : \Sigma^{2n+1} \to \Sigma^{2n+1}/G$, e assim, pelo Teorema 1.7.2, ela é homotópica a $c$. Logo, $c^* = t^* \circ \rho^*$. Como $H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p) \neq 0$ basta mostrar que $c^*$ é sobrejetora. Como $t^*$ é isomorfismo, basta mostrar que

$$\rho^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$$

é sobrejetora. Para isto considere a sequência exata de cohomologia de Gysin associada ao fibrado $\rho : E(G) \times_G \Sigma^{2n+1} \to B(G)$ ( Teorema 1.7.3 ou ver [23] 9.5.2).

$$H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^{2n+1}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \to H^0(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\psi}$$

$$\xrightarrow{\psi} H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\rho^*} H^{2n+2}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p).$$

Como $E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}$, é homotopicamente equivalente a $\Sigma^{2n+1}/G$ temos que $H^{2n+2}(E(G) \times_G \Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) = 0$. Assim $\psi$ é sobrejetora. Porém $H^0(B(G), \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}_p$ e como $B(G)$ é um $K(G,1)$-complexo então pelo Lema 4.4.1 $H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) \supset \mathbb{Z}_p$ e daí $H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) \neq 0$. Logo a única possibilidade é que $H^{2n+2}(B(G), \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p$, o que implica que $\psi$ é um isomorfismo. Daí $\rho^*$ é sobrejetora e o fato está provado. □

Considere $G$ um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo $\Sigma^m$ que tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera $m$-dimensional, $Y$ um CW-complexo $k$-dimensional e uma aplicação $f : \Sigma^m \to Y$ . Seja $G = \{g_1, g_2, \ldots, g_r\}$ uma enumeração fixa dos elementos de $G$, onde $r$ é a ordem de $G$. Vamos definir uma ação de $G$ em $Y^r$, onde $Y^r = Y \times Y \times \ldots \times Y$ (r vezes). Para cada $g \in G$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_r) \in Y^r$, seja

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_r) = (y_{\sigma_g(1)}, y_{\sigma_g(2)}, \ldots, y_{\sigma_g(r)}) \qquad (*)$$

onde a permutação $\sigma_g$ é definida por $g_i g = g_{\sigma_g(i)}$. Vamos verificar que a fórmula $(*)$ realmente define uma ação à esquerda de $G$ em $Y^r$.
Primeiramente, se $e$ é o elemento neutro de $G$ então $g_i e = g_i$ e $\sigma_e(i) = i$. Portanto

$$e(y_1, y_2, \ldots, y_r) = (y_{\sigma_e(1)}, y_{\sigma_e(2)}, \ldots, y_{\sigma_e(r)}) = (y_1, y_2, \ldots, y_r).$$

Agora, se $g,\ h \in G$ temos

$$(gh)(y_1, y_2, \ldots, y_r) = (y_{\sigma_{gh}(1)}, y_{\sigma_{gh}(2)}, \ldots, y_{\sigma_{gh}(r)})$$

onde $g_i gh = g_{\sigma_{gh}(i)}$. Por outro lado

$$g(h(y_1, y_2, \ldots, y_r)) = g(y_{\sigma_h(1)}, y_{\sigma_h(2)}, \ldots, y_{\sigma_h(r)}) = g(x_1, x_2, \ldots, x_r)$$

onde $x_i = y_{\sigma_h(i)}$. Logo

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_r) = (x_{\sigma_g(1)}, x_{\sigma_g(2)}, \ldots, x_{\sigma_g(r)}) = (y_{\sigma_h(\sigma_g(1))}, y_{\sigma_h(\sigma_g(2))}, \ldots, y_{\sigma_h(\sigma_g(r))}).$$

Observe que $g_{\sigma_h(\sigma_g(i))} = g_{\sigma_g(i)} h = g_i gh = g_{\sigma_{gh}(i)}$ e assim $\sigma_h(\sigma_g(i)) = \sigma_{gh}(i)$ o que implica que

$$(gh)(y_1, y_2, \ldots, y_r) = g(h(y_1, y_2, \ldots, y_r).$$

Para facilitar o entendimento dessa ação de $G$ em $Y^r$ vejamos um Exemplo.

**Exemplo 5.1.1** *Considere* $G = \{1 = g_1, t = g_2, t^2 = g_3\}$ *atuando em um espaço* $Y^3$ *como*

*em* $(*)$. *Assim temos as permutações* $g_1t^2 = g_3, g_2t^2 = g_1, g_3t^2 = g_2, g_1t = g_2, g_2t = g_3, g_3t = g_1, g_11 = g_1, g_21 = g_2$ *e* $g_31 = g_3$. *Temos então* $1(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, y_3)$, $t(y_1, y_2, y_3) = (y_2, y_3, y_1)$ *e* $t^2(y_1, y_2, y_3) = (y_3, y_1, y_2)$

**Lema 5.1.2** *Seja* $H \subset G$ *e* $(Y^r)^H = \{x \in Y^r | hx = x, \forall h \in H\}$ *o conjunto dos pontos fixos pela ação de* $H$ *em* $Y^r$. *Se* $F = \bigcup_H (Y^r)^H$ *com* $H$ *percorrendo todos os subgrupos não triviais de* $G$ *então ação de* $G$ *em* $Y_0^{(r)} = Y^r - F$ *é livre.*

**Demonstração:** Seja $x_0 \in F = \bigcup_H (Y^r)^H$. Então existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ tal que $x_0 \in (Y^r)^H$. Assim $hx_0 = x_0$ para todo $h \in H$, o que implica que existe $h_0 \neq e = id$, $h_0 \in H \subset G$ tal que $h_0x_0 = x_0$, ou seja a ação de $G$ em $F$ não é livre.
Agora, se $x \in Y^r$ e $gx = x$ onde $g \neq e$, considere $H =< g >$. Então $H$ é um subgrupo não trivial de $G$ e $g^jx = x$ para todo $g^j \in H$. Logo, $x \in (Y^r)^H \subset F$.
Concluímos então que se $x \in Y_0^{(r)}$ então $gx \neq x$ para todo $g \in G,\ g \neq e$. □

**Lema 5.1.3** *Seja* $X$ *um* $G$*-espaço e* $f : X \to Y$ *uma aplicação contínua. A aplicação* $\phi : X \to Y^r$ *definida por* $\phi(x) = (f(g_1x), f(g_2x), \ldots, f(g_rx))$ *é equivariante.*

**Demonstração:** Sejam $g \in G$ e $x \in X$. Então

$$\phi(gx) = (f(g_1gx), f(g_2gx), \ldots, f(g_rgx)) = (f(g_{\sigma_g(1)}x), f(g_{\sigma_g(2)}x), \ldots, f(g_{\sigma_g(r)}x)).$$

Por outro lado

$$g\phi(x) = g(f(g_1x), f(g_2x), \ldots, f(g_rx)) = g(y_1, y_2, \ldots, y_r),$$

onde $y_i = f(g_ix)$. Assim

$$g\phi(x) = (y_{\sigma_g(1)}, y_{\sigma_g(2)}, \ldots, y_{\sigma_g(r)}) = (f(g_{\sigma_g(1)}x), f(g_{\sigma_g(2)}x), \ldots, f(g_{\sigma_g(r)}x)).$$

Logo $g\phi(x) = \phi(gx)$, ou seja $\phi$ é equivariante. □

**Lema 5.1.4** *Seja* $f : \Sigma^{2n+1} \to Y$ *uma aplicação contínua e seja* $\phi : \Sigma^{2n+1} \to Y^r$ *a aplicação do Lema anterior. Se f não possui (H,G)-coincidências para todo subgrupo não trivial* $H \subset G$, *então a ação de* $G$ *em* $\phi(\Sigma^{2n+1})$ *é livre, ou seja* $\phi(\Sigma^{2n+1}) \subset Y_0^{(r)}$.

**Demonstração:** Vamos supor que a ação de $G$ em $\phi(\Sigma^{2n+1})$ não seja livre. Logo, existe $t \in G$, $t \neq id$ tal que $t\phi(x) = \phi(x)$, para algum $x \in \Sigma^{2n+1}$. Portanto $\phi(x) \in F$. Segue que $\phi(x) \in (Y^r)^H$ para algum $H \subset G$. Assim $h\phi(x) = \phi(x)$ para todo $h \in H$. Como $\phi$ é uma aplicação equivariante então $h\phi(x) = \phi(hx) = \phi(x)$, $\forall h \in H$. Temos então

$(f(g_1hx), \ldots, f(g_rhx)) = (f(g_1x), \ldots, f(g_rx))$, para todo $h \in H$. Deste modo $f(ghx) = f(gx)$, $\forall h \in H, \forall g \in G$ de onde concluímos que $f$ tem uma $(H, G)$-coincidência, o que contraria a hipótese. Portanto a ação de $G$ em $\phi(\Sigma^{2n+1})$ é livre. □

Vamos aplicar todos os Lemas anteriores na demonstração do resultado principal dessa seção que fornece um critério para uma aplicação ter uma $(H, G)$-coincidência.

**Teorema 5.1.1** *Suponha que $G$ é um grupo finito que atua livremente em um CW-complexo $\Sigma^{2n+1}$ que tem o mesmo tipo de homotopia de uma esfera 2n+1-dimensional e $f : \Sigma^{2n+1} \to Y$ é uma aplicação contínua. Suponha ainda que uma das condições abaixo é verdadeira,*
*a) $\Sigma^{2n+1}$ é um CW-complexo finito 2n+1-dimensional e $Y$ é um CW-complexo k-dimensional.*
*b) $Y$ é um CW-complexo k-dimensional finito.*
*Então, se $2n + 1 \geq |G|k$, existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ e uma (H,G)-coincidência para f.*

**Demonstração:** Seja $p$ um número primo que divide a ordem de $G$ e vamos supor que $f$ não tenha uma $(H, G)$-coincidência.
Considere a aplicação $\phi : \Sigma^{2n+1} \to Y^r$ dada pelo Lema 5.1.2. Do Lema 5.1.3 segue que $\phi(\Sigma^{2n+1}) \subset Y_0^{(r)}$ . Assim $\phi$ se fatora em $Y_0^{(r)}$ da seguinte forma

$$\Sigma^{2n+1} \xrightarrow{\phi_0} Y_0^{(r)} \xrightarrow{i} Y^r,$$

onde $\phi_0 : \Sigma^{2n+1} \to Y_0^{(r)}$ é a própria $\phi$ com restrição do contradomínio e $i : Y_0^{(r)} \to Y^r$ é a inclusão. Como $\phi$ é equivariante é claro que $\phi_0$ é uma aplicação equivariante. Seja $\gamma : Y_0^{(r)} \to Y_0^{(r)}/G$ a aplicação quociente e $\bar{\phi_0} : \Sigma^{2n+1}/G \to Y_0^{(r)}/G$ a aplicação induzida por $\phi_0$. Seja $c_Y : Y_0^{(r)}/G \to B(G)$ uma aplicação classificante para o G-fibrado principal $\gamma : Y_0^{(r)} \to Y_0^{(r)}/G$. Então $c = c_Y\bar{\phi_0} : \Sigma^{2n+1}/G \to B(G)$ é uma aplicação classificante para o $G$-fibrado principal $\pi : \Sigma^{2n+1} \to \Sigma^{2n+1}/G$ da seção anterior.
Temos por hipótese que $2n + 1 \geq |G|k = rk$. Assim temos dois casos a considerar.
Primeiro, se $2n + 1 > rk$ e (a) ou (b) são verdadeiros, então a dimensão de $Y_0^{(r)}/G$ é menor que $2n + 1$. Assim $c_Y^* : H^{2n+1}(B(G), \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p)$ é nula e $c^* = \bar{\phi_0}c_Y^* = 0$, o que contradiz o Lema 5.1.1.
Vamos supor então que $2n+1 = rk$. Se a hipótese (a) for verdadeira então $f(\Sigma^{2n+1})$ é compacto e daí está contido em um subcomplexo finito de $Y$. Se a hipótese (b) for verdadeira então já temos que $Y$ é um CW-complexo finito. Assim, sem perda de generalidade, em ambos os casos podemos assumir que $Y$ é um CWcomplexo finito (caso contrário substituiríamos $Y$ por $Y' = f(\Sigma^{2n+1})$). A aplicação $i^* : H^{2n+1}(Y^r, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p)$ é uma parte da sequência de cohomologia do par $(Y^r, Y_0^{(r)})$

$$\ldots \to H^{2n+1}(Y^r, \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{i^*} H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+2}(Y^r, Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \to \ldots$$

Como $H^{2n+2}(Y^r, Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) = 0$, segue que $i^*$ é sobrejetora. Observe agora que $\phi$ pode ser escrita como:

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma^{2n+1} & \stackrel{\psi}{\to} & \Sigma^{2n+1} \times \ldots \times \Sigma^{2n+1} & \stackrel{f^r}{\to} & Y \times \ldots \times Y \\ x & \longmapsto & (g_1 x, \ldots, g_r x) & \longmapsto & (f(g_1 x), \ldots, f(g_r x)). \end{array}$$

Aplicando o Teorema 1.6.1 iterativamente e usando a Observação 1.6.1, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+1}(Y^r, \mathbb{Z}_p) & \stackrel{\cup}{\simeq} & \displaystyle\sum_{p_1+\ldots+p_r=2n+1} H^{p_1}(Y, \mathbb{Z}_p) \otimes \ldots \otimes H^{p_r}(Y, \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow{\scriptstyle (f^r)^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^* \otimes \ldots \otimes f^*} \\ H^{2n+1}((\Sigma^{2n+1})^r, \mathbb{Z}_p) & \stackrel{\cup}{\simeq} & \displaystyle\sum_{p_1+\ldots+p_r=2n+1} H^{p_1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \otimes \ldots \otimes H^{p_r}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi^*} & & \\ H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) & & \end{array}$$

Usando os fatos que $\dim Y < 2n+1$, $H^s(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) = 0$ para $0 < s < 2n+1$ e o diagrama é comutativo, segue que $(f^r)^* = 0$ e daí $\phi^* = \psi^* \circ (f^r)^* = 0$. Do fato que $i \circ \phi_0 = \phi$ segue que $\phi_0^* : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p)$ é nula. Agora, como $\pi : \Sigma^{2n+1} \to \Sigma^{2n+1}/G$ e $\sigma : Y_0^{(r)} \to Y_0^{(r)}/G$ são projeções de recobrimento, existem homomorfismos transfer $\tau : H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ e $\tau_0 : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p)$. Além disso, pela Observação 1.8.1, temos que o seguinte retângulo comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}, \mathbb{Z}_p) & \stackrel{\tau}{\longrightarrow} & H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p) \\ \uparrow{\scriptstyle \phi_0^*} & & \uparrow{\scriptstyle \bar{\phi}_0^*} \\ H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) & \stackrel{\tau_0}{\longrightarrow} & H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p) \end{array}$$

Assim $\tau \circ \phi_0^* = \bar{\phi_0}^* \circ \tau_0$ e $\phi_0^* = 0$ o que implica que $\bar{\phi_0}^* \circ \tau_0$ é nula. Como $Y_0^{(r)}$ é um CW-complexo (2n+1)-dimensional, pela Proposição 1.8.1 o homomorfismo transfer $\tau_0 : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p)$ é sobrejetor. Isto implica que $\bar{\phi_0}^* : H^{2n+1}(Y_0^{(r)}/G, \mathbb{Z}_p) \to H^{2n+1}(\Sigma^{2n+1}/G, \mathbb{Z}_p)$ é o homomorfismo nulo. Logo $c^* = \bar{\phi_0}^* \circ c_Y^* = 0$, o que contradiz o Lema 5.1.1. A contradição foi possível porque supomos que $f$ não tem $(H, G)$-coincidência.
Assim existem um subgrupo não trivial $H \subset G$ e uma $(H, G)$-coincidência para $f$. □

Como consequência do resultado anterior, segue o seguinte critério para $\mathbb{Z}_p$-coincidência de uma aplicação de uma esfera $S^{2n+1}$ em um CW-complexo $k$-dimensional $Y$. Este resultado está no artigo [12], que temos como consequência do Terorema anterior.

**Corolário 5.1.1** *Sejam $G = \mathbb{Z}_p$, onde $p$ é um primo ímpar e $Y$ um CW-complexo $k$-*

*dimensional finito. Se $G$ atua livremente em $S^{2n+1}$ e $2n+1 > pk$, então toda aplicação $f : S^{2n+1} \to Y$ possui uma $\mathbb{Z}_p$-coincidência.*

**Demonstração:** Pelo Teorema anterior, existe um subgrupo não trivial $H \subset G$ e uma $(H, G)$-coincidência para $f$. Entretanto como $p$ é primo, o único subgrupo não trivial de $\mathbb{Z}_p$ é ele mesmo. Logo $H = G$, Daí $f$ tem uma $(G, G)$-coincidência, o que corresponde à definição de $G$-coincidência. □

**Observação 5.1.2** *O resultado do Teorema anterior é o melhor possível se consideramos todos os grupos finitos. De fato, para cada $K > 1$ e $m < 2k$, um exemplo de um poliedro k-dimensional $Y^k$ e uma aplicação $f : S^r \to Y^k$ que não tem coincidências antipodais foi construído em [17]. É uma questão interessante se um exemplo similar pode ser construído para $G = \mathbb{Z}_r$, $r > 2$.*

## 5.2 Aplicação 2: Uma obstrução cohomológica para um $VD^n$-grupo satisfazer o isomorfismo de dualidade de Bieri-Eckmann

Nesta seção apresentamos (baseados nas referências [6] e [10] ) uma aplicação da teoria de Cohomologia de Farrell a grupos de dualidade virtual. Essa aplicação fornece uma obstrução para um $VD^n$-grupo satisfazer o isomorfismo de dualidade de grupos devido a Bieri e Eckmann.

Antes de apresentarmos o Teorema principal necessitamos de alguns resultados preliminares. Em toda esta seção $\Gamma$ denotará um grupo de dualidade virtual de dimensão $n$ ($VD^n$-grupo) com módulo dualizante $D = H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$.

**Definição 5.2.1** *Consideremos dois complexos de cadeia:*

$$C : ... \xrightarrow{\partial'_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial'_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial'_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial'_{n-1}} ...$$

$$D : ... \xrightarrow{\partial''_{n+2}} D_{n+1} \xrightarrow{\partial''_{n+1}} D_n \xrightarrow{\partial''_n} D_{n-1} \xrightarrow{\partial''_{n-1}} ...$$

*e uma aplicação de cadeia $f : C \longrightarrow D$. Para todo inteiro $n$, seja $E_n = C_{n-1} \oplus D_n$ e defina um homomorfismo $\partial_n : E_n \to E_{n-1}$ por $\partial_n(x, y) = (-\partial'_{n-1}(x), \partial''_n(y) + f_{n-1}(x))$, para cada $x \in C_{n-1}$ e cada $y \in D_n$. Temos que $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$. O complexo de cadeia obtido*

$$E : ... \xrightarrow{\partial_{n+2}} E_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} E_n \xrightarrow{\partial_n} E_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} ...$$

*é chamado de* **mapping cone** *de $f$.*

**Observação 5.2.1** *Denotaremos a mapping cone de $f$ por $E = E(f)$.*

**Definição 5.2.2** *Consideremos o complexo de cadeia:*

$$C : ... \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} ...$$

*Definimos* $\Sigma C^1_n = C_{n-1}$ *e o homomorfismo* $\bar{\partial}_n : (\Sigma C)^1_n \to (\Sigma C)^1_{n-1}$ *por* $\bar{\partial}_n = \partial_{n-1}$. *O complexo de cadeia* $\Sigma C^1$ *é chamado de* **suspensão do complexo** $C$.

**Observação 5.2.2** *Para facilitar a notação denotaremos apenas por* $\Sigma C$.

**Proposição 5.2.1** *Seja* $\Gamma$ *um grupo de dualidade virtual com módulo dualizante* $D$, *seja* $\epsilon : P \to \mathbb{Z}$ *resolução projetiva de tipo finito de* $\mathbb{Z}$ *sobre* $\mathbb{Z}\Gamma$, *e seja* $\eta : Q \to D$ *uma resolução projetiva de tipo finito de* $D$ *sobre* $\mathbb{Z}\Gamma$. *Então existe uma resolução completa* $F$ *tal que o complexo dual* $\bar{F} = Hom_{\mathbb{Z}\Gamma}(F, \mathbb{Z}\Gamma)$ *é a mapping cone de uma aplicação de cadeia* $f : \Sigma^{-n}Q \to \bar{P}$. *Em particular,* $F_i = P_i$ *para* $i \geq n$ *e* $F_i = (Q_{n-i-1})^*$ *para* $i \leq -1$.

**Demonstração:** Considere $(P_i, d_i)$ uma resolução projetiva de tipo finito para o $\mathbb{Z}\Gamma$-módulo trivial $\mathbb{Z}$.

$$\cdots \to P_{n+1} \to P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0$$

Aplicando o funtor $Hom_\Gamma(-, \mathbb{Z}\Gamma)$, obtemos $P_i^* = Hom_\Gamma(P_i, \mathbb{Z}\Gamma)$ e o complexo de cocadeias:

$$0 \to P_0^* \xrightarrow{d_0^*} \cdots \xrightarrow{d_{n-1}^*} P_n^* \to \cdots$$

O complexo de cocadeias dual $(P_i^*, d_i^*)$ é exato, exceto na dimensão n, onde $H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = D$. Isto segue do Teorema 3.4.1. Seja $(Q_i, k_i)$ uma resolução projetiva de D .

$$\cdots \to Q_m \xrightarrow{k_m} \cdots \xrightarrow{k_1} Q_1 \xrightarrow{k_0} Q_0 \to D \to 0 \quad (1)$$

Considere $K$ o cokernel de $d^*_{n-1} : P^*_{n-1} \to P^*_n$. Ou seja $K = P^*_n / Im(d^*_{n-1})$. Como $D = H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma) = \ker(d^*_n)/Im(d^*_{n-1}$ temos $D \subset K$. Considere agora o complexos de cadeias

$$\cdots \to S_m \to \cdots \to S_1 \to S_0 \xrightarrow{\partial_0} K \to 0 \quad (2)$$

onde $S_j = P^*_{n-j}$, $j \in \mathbb{Z}$ e $\partial_0$ é a projeção $\bar{d}^*_{n-1} : P^*_{n-1} \to K = P^*_n / Im(d^*_{n-1})$. Por [6], Lema I.7.4, a inclusão $i : D \to K$ se estende aplicação de cadeias, do complexo (1) no complexo (2), $f_i : Q_i \to P^*_{n-i}$, $i \geq 0$. Agora definimos, para todo $i < 0$, $Q_i = P^*_i = 0$ e $f_i = 0$ e obtemos uma aplicação $f : \Sigma^{-n}Q \to P^*$, onde $\Sigma^{-n}Q$ denota a suspensão de grau $-n$ de $Q$, conforme mostra o diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_0^* & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P^*_{n-1} & \longrightarrow & P^*_n & \longrightarrow & P^*_{n+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \uparrow{\scriptstyle f_n} & & \uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle f_0} & & \uparrow{\scriptstyle f_{-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & Q_{n+1} & \longrightarrow & Q_n & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & Q_1 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Observe que na primeira linha do diagrama temos um complexo de cocadeias e na segunda linha um complexo de cadeias. Para consertar isso considere o complexo dual $\bar{P}$ tal que $\bar{P}_i = P^*_{-i}$. Obtemos então o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_0^* & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & P^*_{-n+1} & \longrightarrow & P^*_{-n} & \longrightarrow & P^*_{-n-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle f_{n+1}} & & \uparrow{\scriptstyle f_n} & & \uparrow{\scriptstyle f_1} & & \uparrow{\scriptstyle f_0} & & \uparrow{\scriptstyle f_{-1}} & & \\
\cdots & \longrightarrow & \Sigma_1 & \longrightarrow & \Sigma_0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & \Sigma_{-n+1} & \longrightarrow & \Sigma_{-n} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

de complexos de cadeias, onde $\Sigma_j = (\Sigma^{-n}Q)_j$ e $f : \Sigma^{-n}Q \to \bar{P}$. Como $H_s(\Sigma Q) \simeq H_s(\bar{P})$ para todo $s$, segue de [6],p.5, que $f$ é uma equivalência fraca. Daí, por [6], Proposição 0.6, a aplicação cone $C$ de $f$ é um complexo acíclico de módulos projetivos finitamente gerados. Lembre que, para cada $i$, $C_i = P_i^* \oplus (\Sigma^{-n}Q)_{i-1}$. Seja $F$ o complexo dual $\bar{C}$ dado por $F_i = (C_{-i})^*$. Então

$$F_i = (\bar{P}_{-i} \oplus (\Sigma^{-n}Q)_{-i-1})^* = P_i^{**} \oplus (Q_{n-i-1})^* = P_i \oplus (Q_{n-i-1})^*.$$

Note que $F_i = P_i$, para $i \geq n$ e $F_i = (Q_{n-i-1})^*$ para $i \leq -1$. Resta mostrar que $F$ é acíclico. Como $vcd(\Gamma) < \infty$ existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ um subgrupo de $\Gamma$ livre de torção e de índice finito. Então $[\Gamma : \Gamma'] < \infty$ e segue da igualdade entre módulo induzido e coinduzido que $F = Hom_{\mathbb{Z}\Gamma}(C, \mathbb{Z}\Gamma) \simeq Hom_{\mathbb{Z}\Gamma'}(C, \mathbb{Z}\Gamma')$. Daí, como $cd(\Gamma') < \infty$, temos pelo Lema 4.2.1 que $C$ é $\mathbb{Z}\Gamma'$-contrátil. E assim, o dual $F$ é também $\mathbb{Z}\Gamma'$-contrátil e portanto, acíclico. □

**Observação 5.2.3** *Considere o complexo $C = \bar{F}$ como na demonstração da Proposição anterior. Temos $C = \Sigma^{1-n}Q$ em dimensões maiores que 1. Assim $\Sigma^{n-1}C$ coincide com $Q$ em dimensões maiores que $n$.*

**Teorema 5.2.1** *Seja $\Gamma$ um grupo de dualidade virtual de dimensão $n$ e módulo dualizante $D = H^n(\Gamma, \mathbb{Z}\Gamma)$. Então $\hat{H}^p(\Gamma, -) \simeq H_{n-p-1}(\Gamma, D \otimes -)$, $\forall p < -1$.*

**Demonstração :** Considere uma resolução completa $F$ como na Proposição 5.2.1 e seja $E = \Sigma^{n-1}\bar{F}$ (ver Observação 5.2.3). Então, lembrando que $P^* \otimes_\Gamma M \simeq Hom_\Gamma(P, M)$ quando $P$ é modulo projetivo finitamente gerado e usando a Observação 4.2.1, temos

$$\hat{H}^p(\Gamma, -) = H^p(Hom_{\mathbb{Z}\Gamma}(F, -)) = H_{-p}(\bar{F} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} -) = H_{n-1-p}(E \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} -).$$

Agora, da construção de $E$ (ver Proposição 5.2.1 e Observação 5.2.3) existe uma resolução projetiva $Q$ de $D$ e uma aplicação de cadeia $E \to Q$ que é a aplicação identidade em dimensões maiores ou igual a $n$. Daí existe uma aplicação $H_j(E \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} -) \to Tor_j^\Gamma(D, -)$ que é um isomorfismo para $j > n$ e monomorfismo para $j = n$. Desde que $D$ é livre de torção, segue da Proposição 2.9.1 que $Tor_j^\Gamma(D, -) = H_j(\Gamma, D \otimes -)$. Considerando $j = n - 1 - p$. Assim $\hat{H}^p(\Gamma, -) \simeq H_{n-p-1}(\Gamma, D \otimes -)$. □

**Teorema 5.2.2** *Seja $\Gamma$ um grupo de dualidade virtual de dimensão n módulo dualizante D. Existe uma sequência exata longa de homologia*

$$\ldots \to H_{n-p}(\Gamma, D \otimes -) \to H^p(\Gamma, -) \to \hat{H}^p(\Gamma, -) \to H_{n-p-1}(\Gamma, D \otimes -) \to \ldots.$$

**Demonstração:** Considere $F$ como na Proposição 5.2.1. Da construção da aplicação cone na demonstração de 5.2.1 obtemos, para cada $j$, a seguinte sequência exata de $\mathbb{Z}\Gamma$-módulos finitamente gerados:

$$0 \to \bar{P}_j \to C_j \to (\Sigma^{-n}Q)_{j-1} \to 0.$$

que nos fornece uma sequência exata de complexos

$$0 \to \bar{P} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \to \bar{F} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \to \Sigma^{-n}Q \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \to 0,$$

que nos fornece a seguinte sequência exata longa de homologia:

$$\ldots \to H_k(\bar{P} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M) \to H_k(\bar{F} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M) \to H_k(\Sigma^{-n}Q \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M) \to H_{k-1}(\bar{P} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M) \to \ldots.$$

Agora, segue de [6], Proposição I.8.3, que $\bar{F} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \simeq Hom_{\mathbb{Z}\Gamma}(F, M)$ e $\bar{P} \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} M \simeq Hom_{\mathbb{Z}\Gamma}(P, M)$ e considerando a Observação 4.2.1 obtemos a seguinte sequência exata longa:

$$\ldots \to H_{n+k}(\Gamma, D \otimes -) \to H^{-k}(\Gamma, -) \to \hat{H}^{-k}(\Gamma, -) \to H_{n+k-1}(\Gamma, D \otimes -) \to \ldots.$$

Trocando $-k$ po $p$ obtemos a sequência exata

$$\ldots \to H_{n-p}(\Gamma, D \otimes -) \to H^p(\Gamma, -) \to \hat{H}^p(\Gamma, -) \to H_{n-p-1}(\Gamma, D \otimes -) \to \ldots.$$

□

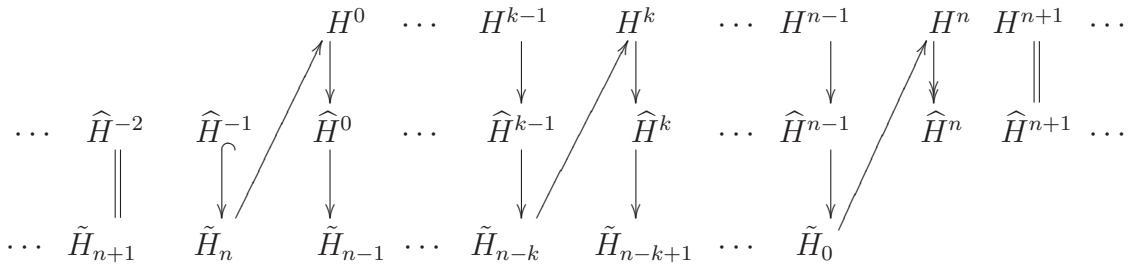
Para simplificar, vamos denotar $H^p(\Gamma, D \otimes -)$ por $\tilde{H}^p$, $\hat{H}^p(\Gamma, -)$ por $\hat{H}^p$ e $H^p(\Gamma, -)$ por $H^p$.

**Corolário 5.2.1** *Com as hipóteses do Teorema anterior temos a seguinte sequência exata*

$$0 \to \hat{H}^{-1} \to \tilde{H}_n \to H^0 \to \hat{H}^0 \to \tilde{H}_{n-1} \to H^1 \to \cdots \to \tilde{H}_0 \to H^n \to \hat{H}^n \to 0.$$

**Demonstração:** É consequência do Teorema anterior lembrando que $\tilde{H}_{-1} = H^{-1} = 0$. □

Juntando os resultados anteriores obtemos o seguite diagrama:




Observe que só teremos o isomorfismo de Bieri e Eckmann $\tilde{H}_{n-k} \simeq H^k$ para todo $0 \leq k \leq n$ se $\widehat{H}^j = 0$, para $-1 \leq j \leq n$. Assim a cohomologia de Farrell é a obstrução para esse isomorfismo ocorrer.

**Exemplo 5.2.1** *Considere o grupo $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ que é um $VD^1$-grupo pois $\Gamma' = 0 \times \mathbb{Z}$ é um $PD^1$-grupo de $\Gamma$ de índice finito, com módulo dualizante $D = \mathbb{Z}$ (com ação trivial). Vamos determinar a sequência exata dada no Corolário anterior, para $n = 1$.*

$$0 \to \hat{H}^{-1} \to \tilde{H}_1 \to H^0 \to \hat{H}^0 \to \tilde{H}_0 \to H^1 \to \hat{H}^1 \to 0.$$

*No Exemplo 4.5.1, vimos que $\widehat{H}^k(\Gamma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$, $\forall k$. Temos $\tilde{H}_*(\Gamma, \mathbb{Z}) = H_*(\Gamma, D \otimes \mathbb{Z}) = H_*(\Gamma, \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) = H_*(\Gamma, \mathbb{Z})$. Usando Fórmulas de Kunneth, obtemos $H_1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$ e $H^1(\Gamma, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Temos então a seguinte sequência exata*

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

*Note que não temos isomorfismos de dualidade entre $H^0(\Gamma, \mathbb{Z})$ e $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})$ e também entre $H^1(\Gamma, \mathbb{Z})$ e $H_0(\Gamma, \mathbb{Z})$ pois as cohomologias de Farrell $\widehat{H}^{-1} = \widehat{H}^0 = \widehat{H}^1 = \mathbb{Z}_2 \neq 0$.*

# Referências Bibliográficas


[1] Adem, A.; Milgram, R.J.; *Cohomology of finite groups*, Springer-Verlag, 1994.

[2] Andrade, M.G.C. *Invariantes Relativos e Dualidade*. 1992. Tese (Doutorado em Matemática), IMECC-UNICAMP, Campinas.

[3] Bieri, R.; Eckmann, B. *Relative homology and Poincaré duality for Group Pairs*.

[4] Bestvina, M.; and Brady, N.*Morse theory and finiteness properties of groups.* Inventiones mathematicae 129.3; 1997: 445-470.

[5] Bredon, G. E., *Introdution to Compact Transformation Groups*, Pure and Applied Mathematics-Academic Press, New York and London, 1972

[6] Brown, K. S., *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Spring-Verlag, New York, 1982.

[7] Davis, J. F.; Kirk, P. *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Graduate studies in mathematics, vol. 35, 2001.

[8] Dieck, T.; *Transformation Groups*, Berlin-New York, 1987.

[9] Lima, E.L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, SBM, 2006.

[10] Farrell, F. T., *An extension of Tate cohomology to a class of infinite groups*, Journal of Pure and Applied Math. 10, (1977) 153-161.

[11] Gonçalves, D.L.; Jaworowski, J.: Pergher, P. L. Q.; *G-coincidences for maps of homotopy spheres into CW-complexes*, Proc. Amer. Math. Soc. 130, pp. 3111-3115, 2002.

[12] Gonçalves, D.L.; Jaworowski, J.: Pergher, P. L. Q.; $\mathbb{Z}_p$*-coincidences for maps of homotopy spheres into CW-complexes*, Kobe Journal of Math 15, pp. 191-195, 1998.

[13] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamin, Inc., 1966.

[14] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2001.

[15] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*. São Francisco: Holden-Day Series in Mathematics, 1968.

[16] MacLane, S., *Homology*, Spring-Verlag, Berlin, 1967.

[17] Marek Izydorek and Jan Jaworowski; *Antipodal coincidence for maps of spheres into complexes* . Proc. Amer. Math. Soc. 123(6) (1995), 1947-1950.

[18] Massey, W.S. *Algebraic Topology: An Introduction*. New York: Springer-Verlag, 1967.

[19] Massey, W. S., *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer Verlag, New York, 1991.

[20] Massey, W.S.; *Singular Homology Theory*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1980.

[21] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.

[22] Schubert, H.; *Topology*, MacDonald & Co. (Publishers) LTD,1968.

[23] Spanier, E.H. *Algebraic Topology*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[24] Stallings, J.R.; *On torsion free groups with infinitely many ends*, Ann. of Math. 88, pp. 312-334, 1968.

[25] Swan, R.; *Groups of cohomological dimension one*, J. of Algebra 12, pp. 585-610, 1969.

[26] Vick, J.W. *Homology Theory*. New York: Academic Press, Inc., 1973.

# Índice Remissivo