

Romildo Olier Rodrigues

Zeros de Polinômios Ortogonais



1910000930





Zeros de Polinômios Ortogonais

Romildo Olier Rodrigues

Dissertação de Mestrado

**Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-051**



Zeros de Polinômios Ortogonais

Romildo Olier Rodrigues

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. DIMITAR KOLEV DIMITROV



930/00

São José do Rio Preto

Março - 2000

encadado



Este trabalho foi realizado no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto - São Paulo, durante o curso de Mestrado do candidato, sob a orientação do Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov.

Os novos resultados desta tese, os Teoremas 1.1 e 1.2, cujas demonstrações detalhadas são apresentadas no Capítulo 5, são as principais contribuições do artigo D. K. Dimitrov and R. O. Rodrigues, On the Behaviour of Zeros of Jacobi Polynomials, que foi submetido para publicação em *Journal of Approximation Theory*.



“Quanto mais rapidamente as máquinas se movem, tanto mais rapidamente o homem vive, e tanto maior é o tributo, em tensão nervosa, que ele paga as máquinas. A cultura o lazer e, com efeito, o próprio ato de viver, se tornam tão entrelaçados com às máquinas, que o homem, individualmente, tende a empobrecer-se interiormente. O indivíduo fica mais ou menos na posição do selvagem que faz um ídolo e depois o serve e venera.”

Mohandas K. Gandhi.



A Deus,
a meus amigos espirituais,
a meus pais,
a meus irmãos,
a meus amigos,
dedico.

Agradecimentos

À Deus, nosso criador.

Aos meus amigos e irmãos espirituais.

Aos meus pais e familiares.

À professora Eliana X. Linhares de Andrade, pela leitura das versões preliminares e a final, pelos inúmeros incentivos e valiosas sugestões que tornou o trabalho mais didático.

À todos os professores do Departamento de Computação, pelo ótimo convívio, por todas as vezes que prontamente me atenderam e me ajudaram. Em particular aos professores: Alagacone S. Ranga, Adriano M. Cansian, Cleonice de Fatima, Manoel F.C. Borges, Sebastião P. Martins e Walter J.C. Morales.

As secretárias do Departamento de Computação Karina e Olga.

Aos colegas de trabalho da STI e ao gerente professor Luis C. Baida.

Aos colegas de cachacada Cláudia Alves, Claudinéia, Clinton, Elisa, Érica, Fabrício, Graziela, José Arnaldo, João, Karina, Liberto, Lisandra, Marcelo Palin, Renam, Renata, Rosemeire, Patrícia, Paulo, Telma, Toninho e Vanessa.

À todos que direta ou indiretamente colaboraram para a realização deste trabalho.

Finalmente, agradeço aos funcionários da Seção de Pós-Graduação.



Resumo

O objetivo do nosso trabalho é estudar o comportamento dos zeros dos Polinômios de Jacobi e de Gegenbauer. Condições necessárias para que os zeros do polinômio de Jacobi $P_n^{(a,b)}(x)$ sejam menores (maiores) do que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são fornecidas.

O problema de caracterizar a melhor função possível $f_n(\lambda)$ de modo que os produtos $f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, \dots, [n/2]$, sejam funções crescentes de λ , para $\lambda > -1/2$, também é investigado. Elbert e Siafarikas provaram que $f_n(\lambda) = (\lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2))^{1/2}$ é uma dessas funções. Nós provamos que esse resultado é assintoticamente preciso.

A ferramenta básica de nossa abordagem é a teoria de estabilidade de Routh e Hurwitz.

Abstract

The behaviour of the zeros of Jacobi and Gegenbauer polynomials is studied. Necessary conditions on order that the zeros of the Jacobi polynomial $P_n^{(a,b)}(x)$ are smaller (greater) than the zeros of $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ are provided.

The problem of characterizing the best possible function $f_n(\lambda)$ that forces the products $f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, \dots, [n/2]$, to increase with λ for $\lambda > -1/2$, is also investigated. Elbert and Siafarikas proved that $f_n(\lambda) = (\lambda + (2n^2 + 1)/(4n + 2))^{1/2}$ obeys this property. We establish the sharpness of their result.

The basic tool of our approach is the stability theory of Routh and Hurwitz.

Índice

1	Introdução.....	1
2	Resultados Preliminares	14
2.1	Números Complexos	14
2.2	Funções Contínuas de uma Variável Complexa	15
2.2.1	Limite, Continuidade e Derivada	16
2.3	Funções Analíticas	17
2.3.1	Equações de Cauchy-Riemann	18
2.3.2	Zeros de Funções Analíticas	23
2.3.3	Singularidades de uma Função Analítica	24
2.3.4	Funções Racionais	26
2.4	Resultados Clássicos sobre Polinômios Algébricos	29
2.4.1	Regra de Lagrange	31
2.4.2	Sequência de Sturm	33
2.5	Outros Teoremas	37
2.5.1	Teorema de Rolle.....	37
2.5.2	Teorema do Valor Médio	37
2.5.3	Continuidade dos Zeros com Relação aos Coeficientes	38



2.5.4	Regra de Leibniz	38
3	Teoria de Estabilidade	39
3.1	Índices de Cauchy	40
3.2	Algoritmo de Routh	45
3.2.1	Critério de Routh	52
3.3	Teorema Routh-Hurwitz	53
3.3.1	Critério de Routh-Hurwitz	59
3.4	Polinômios Cujos Zeros se Entrelaçam	59
4	Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Jacobi.....	67
4.1	Polinômios Ortogonais	67
4.1.1	Função Peso Par	69
4.2	Polinômios de Jacobi	70
4.3	Polinômios de Gegenbauer	75
4.4	Interpretação Eletrostática	77
4.5	Teorema de Markov	80
5	Demonstrações dos Resultados Principais	87
5.1	Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais	87
5.2	Demonstrações dos Teoremas Principais	90
5.2.1	Demonstração do Teorema 1.1	90
5.2.2	Demonstração do Teorema 1.2	93
	Referências Bibliográficas	98



Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar alguns dos principais resultados sobre estabilidade de polinômios e aplicá-los na investigação do comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais de Jacobi e de Gegenbauer.

Os polinômios de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $n = 1, 2, \dots$, são ortogonais em $[-1, 1]$ com relação à função peso $w(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$, para α e β reais e maiores do que -1 . Sabe-se que todos os zeros, $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \dots, n$, do n -ésimo polinômio de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, são reais, distintos e pertencem ao intervalo $(-1, 1)$. A presença dos parâmetros α e β significa que estamos considerando uma família de polinômios ortogonais. Assim, a localização dos zeros, $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, depende dos valores de α e β . Portanto, para quaisquer n e k naturais tais que $1 \leq k \leq n$, o zero $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ é função das variáveis α e β , $\alpha, \beta > -1$.

A principal questão de nosso interesse neste trabalho é estudar o comportamento de $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ como função das variáveis α e β .

Esse problema vem sendo investigado desde 1886, quando, independentemente, Markov [16] e Stieltjes [20] forneceram duas brilhantes idéias para abordá-lo. Uma das motivações para esse interesse é o fato de que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ são os nós da fórmula de quadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(x) w(x; \alpha, \beta) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k(\alpha, \beta) f(x_k(\alpha, \beta)).$$

Outro fato que torna os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ funções importantes para serem pesquisadas é que, para α e β fixos, eles são os pontos de equilíbrio de n cargas unitárias livres no campo eletrostático gerado pelas cargas $(\alpha + 1)/2$ e $(\beta + 1)/2$ localizadas nos pontos 1 e -1, respectivamente. Este sistema satisfaz à regra do potencial logarítmico.

É fascinante que os pontos de equilíbrio das n cargas livres coincidem com os zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, \dots, n$, do polinômio de Jacobi, $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Apenas para exemplificar, consideremos $n = 7$, $\alpha = 2.0$, $\beta = 3.0$. Assim obtemos o gráfico do polinômio de Jacobi, $P_7^{(2.0, 3.0)}(x)$.

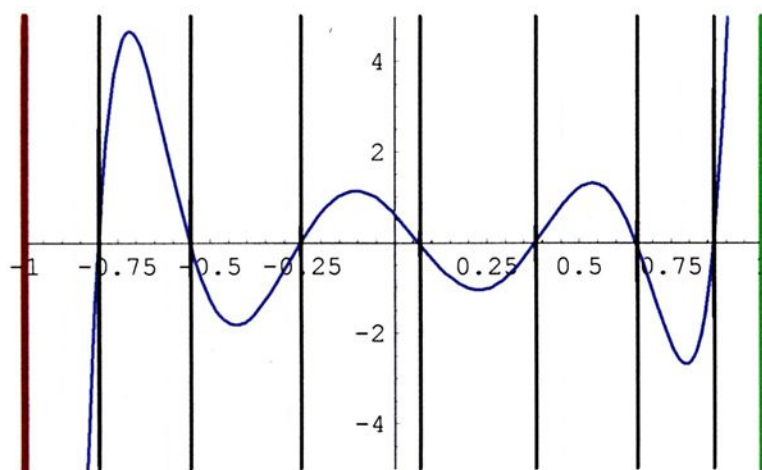


Figura 1

É intuitivamente claro que alterando os valores das cargas fixas nos pontos -1 e 1 , respectivamente, os pontos de equilíbrio desse sistema também vão mudar.

Consequentemente, no exemplo acima, Figura 1, os pontos de equilíbrio serão outros para $\alpha \neq 2.0$ e $\beta \neq 3.0$.

Fixando a carga α no ponto 1, e aumentando a carga em β , temos um deslocamento dos pontos de equilíbrio das n cargas da esquerda para à direita.

Analogamente, fixando a carga β no ponto -1 e aumentando a carga α , obtemos um deslocamento das n posições da direita para à esquerda.

Isso significa que os zeros do polinômio de Jacobi são funções crescentes de β e decrescentes de α .

Quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, os polinômios de Jacobi se reduzem aos polinômios de Gegenbauer, $C_n^{(\lambda)}(x)$, $n = 0, 1, \dots$, que são ortogonais em $(-1, 1)$ com relação à função peso $w(x; \lambda) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$. Consequentemente seus zeros são simétricos com relação ao ponto de origem. Assim, para se obter informações sobre eles, basta estudarmos somente os zeros positivos.

Analogamente, para $n = 7$, $\alpha = \beta = 0.5$, obtemos o gráfico do polinômio de Gegenbauer, $C_7^{(1.0)}(x)$.

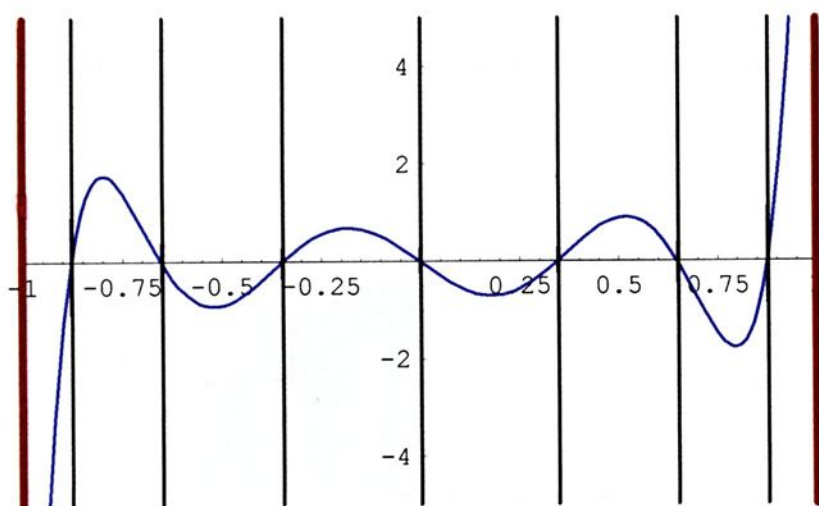


Figura 2

É intuitivamente claro que aumentando a carga de λ , teremos um deslocamento de todos os zeros para o ponto de origem, isto é, os zeros positivos são deslocados da direita para a esquerda. Analogamente, os zeros negativos se deslocaram da esquerda para a direita.

Uma demonstração rigorosa desse fato foi dada por Markov [16], em 1886. Ele forneceu condições suficientes para a monotonicidade dos zeros $x_{n,k}(\tau)$, $k = 1, \dots, n$, do n -ésimo polinômio, $P_n^{(\tau)}(x)$, de uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n^{(\tau)}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ que dependem do parâmetro τ .

O resultado de A. Markov [21, Teorema 6.21.1], demonstrado no Capítulo 4, afirma que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ são funções decrescentes de α e crescentes de β .

Consequentemente, para (α, β) fixo e $\alpha, \beta > -1$, as desigualdades

$$x_{n,k}(a, b) < x_{n,k}(\alpha, \beta), \quad n = 2, 3, \dots, 1 \leq k \leq n, \quad (1.1)$$

são satisfeitas para $a > \alpha$ e $b < \beta$ e

$$x_{n,k}(a, b) > x_{n,k}(\alpha, \beta), \quad n = 2, 3, \dots, 1 \leq k \leq n, \quad (1.2)$$

para $a < \alpha$ e $b > \beta$.

Graficamente, esse resultado pode ser visualizado pela Figura 3.

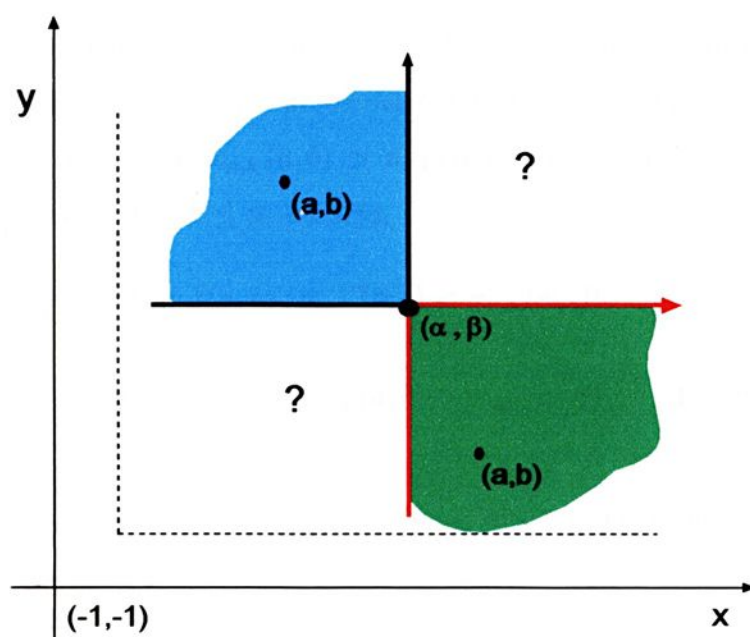


Figura 3

Se (a, b) pertence a região verde (azul) da Figura 3, então os zeros do polinômio $P_n^{(a,b)}(x)$ são menores (maiores) do que os zeros do polinômio $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall k$, $k = 1, \dots, n$.

Pouco se conhece sobre o comportamento de $x_{n,k}(a,b)$ quando (a,b) pertence ao ângulo $\{a > \alpha, b > \beta\}$ ou $\{a < \alpha, b < \beta\}$.

Suponha que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ estejam arranjados em ordem decrescente, $-1 < x_{n,n}(\alpha,\beta) < x_{n,n-1}(\alpha,\beta) < \dots < x_{n,1}(\alpha,\beta) < 1$.

As desigualdades

$$x_{n,1}(a,b) < x_{n,1}(\alpha,\beta), \quad \beta > \alpha, \quad a > \alpha, \quad b - \beta < a - \alpha,$$

$$x_{n,1}(a,b) < x_{n,1}(\alpha,\beta), \quad \beta < \alpha, \quad a > \alpha, \quad b < \beta + \frac{\beta+1}{\alpha+1}(a-\alpha)$$

para os maiores zeros de $P_n^{(a,b)}(x)$ e $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ foi recentemente demonstrado em [6].

Estamos interessados em duas importantes questões.

Problema 1 Dado um par (α,β) , $\alpha,\beta > -1$, encontrar todos os pares (a,b) , $a,b > -1$, para os quais os zeros de $P_n^{(a,b)}(x)$ são menores (maiores) do que os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Em outras palavras, o problema é determinar (a,b) , tais que as desigualdades $x_{n,k}(a,b) < x_{n,k}(\alpha,\beta)$ ou $x_{n,k}(a,b) > x_{n,k}(\alpha,\beta)$ sejam satisfeitas para todo n inteiro positivo e para todo k , $1 \leq k \leq n$, ou seja,

$$S_n^-(\alpha,\beta) := \{(a,b) : x_{n,k}(a,b) < x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad 1 \leq k \leq n\},$$

$$S_n^+(\alpha,\beta) := \{(a,b) : x_{n,k}(a,b) > x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad 1 \leq k \leq n\}.$$

Problema 2 Seja (α,β) um par dado, com $\alpha,\beta > -1$. Determinar todos os pares (a,b) , $a,b > -1$, tais que

$$S^-(\alpha,\beta) := \{(a,b) : x_{n,k}(a,b) < x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\},$$

$$S^+(\alpha,\beta) := \{(a,b) : x_{n,k}(a,b) > x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad \forall k = 1, \dots, n, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

É claro que as soluções do Problema 2 são

$$S^-(\alpha,\beta) := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^-(\alpha,\beta) \quad \text{e} \quad S^+(\alpha,\beta) := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^+(\alpha,\beta),$$

onde $S_n^-(\alpha,\beta)$ e $S_n^+(\alpha,\beta)$ são as soluções do Problema 1.

O teorema abaixo é a primeira importante contribuição deste trabalho, que responde, em parte, às indagações acima. Precisamente, ele mostra até onde as desigualdades (1.1) e (1.2) podem ser estendidas.

Teorema 1.1 *Seja n um inteiro positivo fixo.*

Se $x_{n,k}(a,b) < x_{n,k}(\alpha,\beta)$ para $k = 1, 2, \dots, n$, então

$$b < \min \left\{ \beta + \frac{n+\beta}{n+\alpha}(a-\alpha), \beta + \frac{n+\beta}{1+\alpha}(a-\alpha) \right\}. \quad (1.3)$$

Se $x_{n,k}(a,b) > x_{n,k}(\alpha,\beta)$ para $k = 1, 2, \dots, n$, então

$$b > \max \left\{ \beta + \frac{n+\beta}{n+\alpha}(a-\alpha), \beta + \frac{n+\beta}{1+\alpha}(a-\alpha) \right\}. \quad (1.4)$$

Tomemos o ponto (α, β) fixo e consideremos o ponto (a, b) pertencente à região (1.3) ou (1.4). A desigualdade (1.3) é verdadeira quando (a, b) pertence ao ângulo abaixo das retas l_1 e l_2 , onde l_1 passa por (α, β) e $(-n, -n)$, e l_2 passa por (α, β) e $(-1, -n)$. A desigualdade (1.4) é satisfeita quando (a, b) está no ângulo acima dessas retas.

Corolário 1.1 *Seja $\beta > \alpha$. Neste caso,*

$$\begin{aligned} 1a) \text{ se } x_{n,k}(a,b) > x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k, k = 1, 2, \dots, n, \text{ então} \\ a < \alpha \quad \text{e} \quad b > \beta + a - \alpha; \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} 1b) \text{ se } x_{n,k}(a,b) < x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k, k = 1, 2, \dots, n, \text{ então} \\ a > \alpha \quad \text{e} \quad b < \beta + a - \alpha. \end{aligned}$$

Seja $\beta < \alpha$. Neste caso,

$$\begin{aligned} 2a) \text{ se } x_{n,k}(a,b) > x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k, k = 1, 2, \dots, n, \text{ então} \\ a > \alpha \quad \text{e} \quad b > \beta + \frac{\beta+1}{\alpha+1}(a-\alpha). \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} 2b) \text{ se } x_{n,k}(a,b) < x_{n,k}(\alpha,\beta), \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } \forall k, k = 1, 2, \dots, n, \text{ então} \\ a > \alpha \quad \text{e} \quad b < \beta + \frac{\beta+1}{\alpha+1}(a-\alpha). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Esses resultados podem ser visualizados nas Figuras 4 e 5, respectivamente.

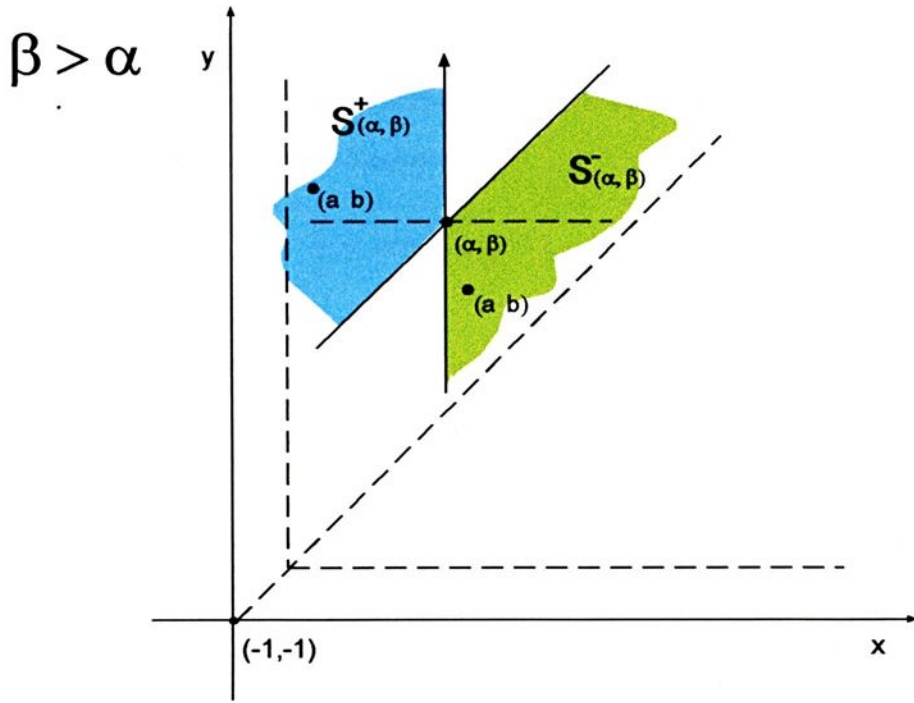


Figura 4

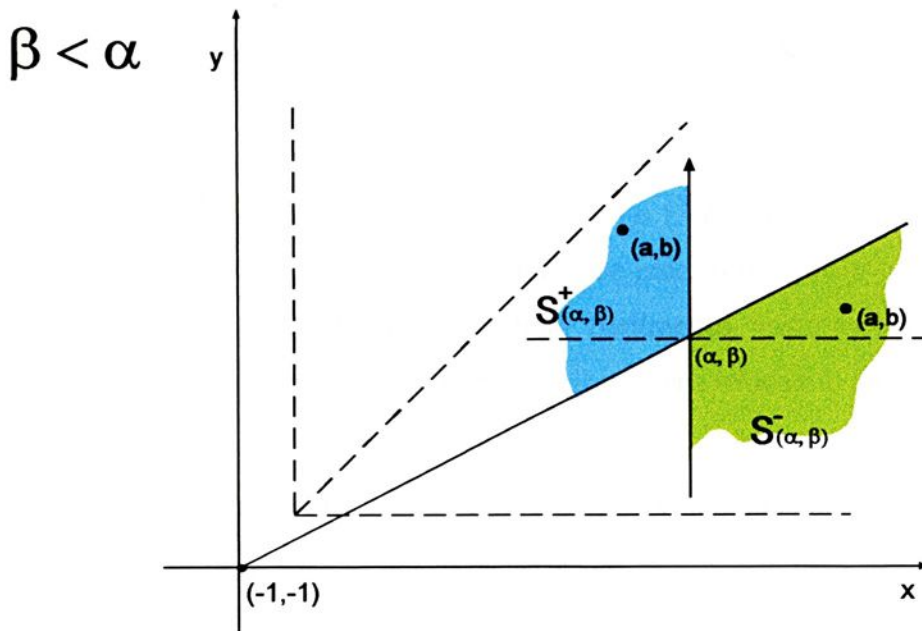


Figura 5

Para $\beta > \alpha$, as desigualdades (1.5) mostram que $x_{n,k}(a, b) > x_{n,k}(\alpha, \beta)$ pode ser estendido no máximo para o ângulo

$$\frac{\pi}{2} \leq \arg((a, b) - (\alpha, \beta)) < \frac{5\pi}{4}. \quad (1.8)$$

Essas subregiões, $S^-(\alpha, \beta)$ e $S^+(\alpha, \beta)$, são limitadas pela reta vertical que passa pelo ponto (α, β) e pela reta com coeficiente angular $\pi/4$, passando pelos pontos $(-n, -n)$ e (α, β) .

Analogamente, se $\beta < \alpha$, (1.7) mostram que as desigualdades $x_{n,k}(a, b) < x_{n,k}(\alpha, \beta)$ podem ser estendidas no máximo até

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arg((a, b) - (\alpha, \beta)) < \arg(\alpha + 1, \beta + 1). \quad (1.9)$$

Com raciocínio análogo, essas subregiões $S^-(\alpha, \beta)$ e $S^+(\alpha, \beta)$, também são limitadas pela reta que passa pelos pontos $(-1, -1)$ e (α, β) e pela reta vertical ao ponto (α, β) .

Resumindo, o Corolário 1.1 afirma que $S^-(\alpha, \beta)$ é subconjunto das regiões verdes nas Figuras 4 e 5, e $S^+(\alpha, \beta)$ é subconjunto das regiões azuis.

O resultado de Dimitrov [6], afirma que as correspondentes desigualdades para os maiores zeros são satisfeitas no ângulo (1.8) e em grande parte do ângulo (1.9). Só para mencionar a riqueza deste fato, as desigualdades (1.7) mostram que o resultado de A. Markov [16] [21, Teorema 6.21.1] é extremamente preciso quando β é pequeno, isto é, próximo de -1 , e α é suficientemente grande. Realmente, neste caso as regiões (1.6) e (1.9) estão próximas ao segundo e ao quarto quadrante em relação a (α, β) .

Vamos discutir agora, um problema sobre o comportamento dos zeros do polinômio de Gegenbauer, $C_n^{(\lambda)}(x)$, que é um caso especial dos polinômios de Jacobi quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, $\lambda > -1/2$.

Os polinômios ultraesféricos ou polinômios de Gegenbauer, $C_n^{(\lambda)}(x)$, são ortogonais em $(-1, 1)$ com respeito a função peso $w(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2}$.

Stieltjes [20] provou que, para $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq [n/2]$, os zeros positivos de $C_n^{(\lambda)}(x)$ são funções decrescentes de λ .

Seja $n = 4$ e $\lambda = 1.5$. Gráficamente os zeros positivos de $C_4^{(1.5)}(x)$ podem ser visualizados pela Figura 6.

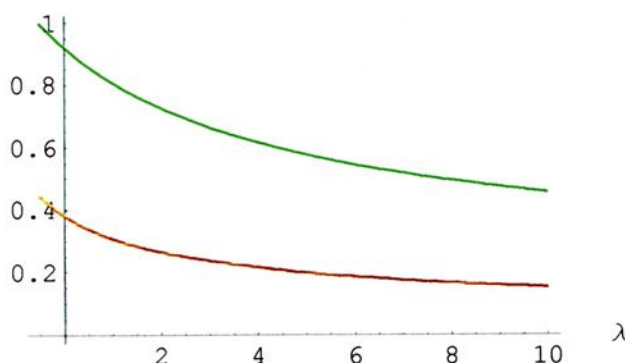


Figura 6

É importante saber qual a velocidade com que estes zeros decrescem.

Consideremos o problema de caracterizar a função extrema $f(\lambda)$, que força $f(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ a crescer quando λ cresce. Para esclarecer o que significa “função extrema”, precisamos de uma definição formal de extremalidade, que pode ser encontrada em [4]. Ahmed, Muldoon e Spigler [1] sugeriram que o problema deveria ser considerado de uma forma geral, ou seja, procurar funções $f_{n,k}(\lambda)$ tais que

$$Z_{n,k}(\lambda) := f_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda) \quad (1.10)$$

seja uma função crescente de λ , para todo n e para todo k , $1 \leq k \leq [n/2]$. Naturalmente $f_{n,k}(\lambda)$ deve ser positiva e diferenciável. Derivando (1.10), obtemos

$$0 \leq Z'_{n,k}(\lambda) = f'_{n,k}(\lambda)x_{n,k}(\lambda) + f_{n,k}(\lambda)x'_{n,k}(\lambda).$$

Sabemos que $x_{n,k}(\lambda)$ é uma função positiva e decrescente, logo $x'_{n,k}(\lambda) < 0$. Portanto, se $x_{n,k}(\lambda) > 0$, $f_{n,k}(\lambda) > 0$ e $x'_{n,k}(\lambda) < 0$, então

$$\frac{f'_{n,k}(\lambda)}{f_{n,k}(\lambda)} \geq -\frac{x'_{n,k}(\lambda)}{x_{n,k}(\lambda)}, \quad \text{para } \lambda > -1/2. \quad (1.11)$$

Assim, enunciaremos os seguintes problemas:

P1. Para todo n fixo e $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ determinar a função $f_{n,k}(\lambda)$ positiva para $\lambda > -1/2$, tal que $Z_{n,k}(\lambda)$ seja função crescente de λ e $f'_{n,k}(\lambda)/f_{n,k}(\lambda)$ seja mínima.

Decorre imediatamente de (1.11) que o problema é equivalente ao problema de encontrar $x'_{n,k}(\lambda)/x_{n,k}(\lambda)$. Se procurarmos funções $f_n(\lambda)$ que dependem somente de n , mas não de k , então o problema P1 pode ser reformulado.

P2. Para todo inteiro $n \geq 2$, determinar a função $f_n(\lambda)$, positiva para $\lambda > -1/2$, tal que, para todo k , $1 \leq k \leq [n/2]$, o produto $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ seja função crescente de λ e $f'_n(\lambda)/f_n(\lambda)$ seja mínima.

Se estivermos interessados em uma função universal, o problema pode ser reescrito da seguinte forma:

P3. Qual é a função $f(\lambda)$, positiva para $\lambda > -1/2$, tal que, para todo $n \geq 2$ fixo, $1 \leq k \leq [n/2]$, o produto $f(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ e $f'(\lambda)/f(\lambda)$ seja mínima.

A noção “extrema” para os problemas enunciados é equivalente à minimização dos quocientes $f'_{n,k}(\lambda)/f_{n,k}(\lambda)$, $f'_n(\lambda)/f_n(\lambda)$, $f'(\lambda)/f(\lambda)$, respectivamente. Obviamente essas exigências determinam uma função conhecida a menos de um fator constante.

Se encontramos a solução geral $f_{n,k}(\lambda)$ de P1, que é a mais difícil, então as soluções $f_n(\lambda)$ de P2 e $f(\lambda)$ de P3 podem ser consequentemente obtidas, para qualquer $\lambda > -1/2$ fixo, através das fórmulas

$$\frac{f'_n(\lambda)}{f_n(\lambda)} = \max_{1 \leq k \leq [n/2]} \frac{f'_{n,k}(\lambda)}{f_{n,k}(\lambda)}$$

e

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \sup_{n \geq 2} \frac{f'_n(\lambda)}{f_n(\lambda)}.$$

Entretanto, para resolver esses problemas necessitamos de limites superiores para $-x'_{n,k}(\lambda)/x_{n,k}(\lambda)$.

O problema de encontrar a função extrema $f_n(\lambda)$ que força o produto $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$ a crescer, foi recentemente discutida por vários pesquisadores.

Em 1981, Laforgia [15] mostrou que $\lambda x_{n,k}(\lambda)$ é uma função crescente de λ para $0 \leq \lambda \leq 1$, e $k = 1, 2, \dots, [n/2]$. Ahmed, Muldoon e Spigler [1] refinaram, em 1986, o resultado de Spigler [19] demonstrando que, se $n \geq 2$ e $f_n(\lambda) = (\lambda + (2n^2 + 1) / (4n + 1))^{1/2}$, cada $f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$ cresce com λ para $-1/2 \leq \lambda \leq 3/2$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$.

Ismail e Letessier [14] conjecturaram, em 1988, que $\sqrt{\lambda} x_{n,k}(\lambda)$ cresce com λ , $\lambda \geq 0$ e $k = 1, 2, \dots, [n/2]$, e Askey observou que $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + 1}$ poderia ser a solução de P3. A sugestão de Askey foi reformulada como uma conjectura por Ismail, Letessier e Askey em 1989, no artigo [13], denominada ILA. Esta conjectura afirma que, se $n > 2$ e $1 \leq k \leq [n/2]$, a função $\sqrt{\lambda + 1} x_{n,k}(\lambda)$ é crescente com relação a λ , para $\lambda > -1/2$.

Consequentemente, $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + 1}$ seria a solução de P3, pois $x_{2,1}(\lambda) = \sqrt{2(\lambda + 1)}$. Em 1989, Ifantis e Siafarikas [11] demonstraram a conjectura denominada ILA para o maior zero positivo, $x_{n,1}(\lambda)$, quando $\lambda > -1/2$, usando técnicas de funções analíticas.

Recentemente, Dimitrov [4] demonstrou a mesma conjectura para os zeros positivos $x_{n,k}(\lambda)$, $\lambda \in (-1/2, 9/2]$, e, também, para $\lambda \in (-1/2, 3/2 + \nu]$ e $n > 1 + (\nu^2 + 3\nu + 3/2)^{1/2}$ com $\nu \in \mathbb{N}$. Além disso, demonstrou essa conjectura para o maior zero, $x_{n,1}(\lambda)$, tal como Ifantis e Siafarikas, mas usando métodos diferentes.

Finalmente, em 1999, Elbert e Siafarikas [9] demonstraram que a função

$$\left(\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \right)^{1/2} x_{n,k}(\lambda), \quad k = 1, \dots, [n/2], \quad (1.12)$$

é crescente em λ , $\lambda > -1/2$, demonstrando finalmente a conjectura ILA.

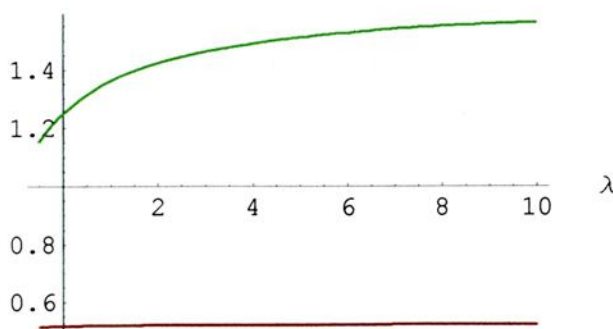


Figura 7

A Figura 7, exemplifica o caso particular para os zeros positivos do polinômio de Gegenbauer, $C_4^{(1.5)}(x)$, multiplicado pela função $f_4(1.5)$ de Elbert e Siafarikas, isto é, as funções se tornam crescentes, quando λ cresce.

É interessante saber até onde podemos estender a função $f_n(\lambda) = (\lambda + (2n^2 + 1) / (4n + 2))^{1/2}$ para que ela se aproxime o máximo possível da função extrema.

Esta é a segunda questão de nosso interesse.

Existem fortes indícios de que $f_n(\lambda)$ deve ter a forma $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + c_n}$, onde c_n depende somente de n . Por outro lado, foi proposto em P3 que a melhor função $f_n(\lambda)$ possível que força $f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$, $1 \leq k \leq [n/2]$, a crescer, é aquela que torna $f'_n(\lambda) / f_n(\lambda)$ mínima. Assim, $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + c_n}$ será uma função extrema se c_n for o maior possível.

O teorema abaixo é a segunda contribuição deste trabalho. Ele mostra que o resultado (1.12) é assintoticamente preciso.

Teorema 1.2 *Seja n um inteiro positivo.*

Se $f_n(\lambda)$ é positiva e $f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$, são funções crescentes de λ , para $\lambda > -1/2$, então

$$\frac{f'_{2n}(\lambda)}{f_{2n}(\lambda)} > \frac{1}{2(\lambda + n)} \quad (1.13)$$

e

$$\frac{f'_{2n+1}(\lambda)}{f_{2n+1}(\lambda)} > \frac{1}{2(\lambda + n + 1)}. \quad (1.14)$$

Além disso, se $(\lambda + c_n)^{1/2} x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$, são funções crescentes de λ , para $\lambda > -1/2$, então

$$c_{2n} < \frac{4n^2 + n + 1}{4n + 2}, \quad (1.15)$$

e

$$c_{2n+1} < \frac{4n^2 + 7n + 9}{4n + 6}. \quad (1.16)$$

As desigualdades (1.13) e (1.14) fornecem limites superiores para a derivada do logaritmo da função extrema para o problema discutido acima.

Obviamente as desigualdades (1.15) e (1.16) são equivalentes a

$$c_{2n} < n - \frac{1}{4} + \frac{3}{2(4n+2)}$$

e

$$c_{2n+1} < n + \frac{1}{4} + \frac{15}{4(2n+3)}.$$

Por outro lado, como já mencionamos, Elbert e Siafarikas [9] mostraram que $f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$, crescem com λ se

$$f_n(\lambda) = \left(\lambda + \frac{2n^2 + 1}{4n + 2} \right)^{1/2}. \quad (1.17)$$

Então, dependendo da paridade de n , a função $f_n(\lambda)$, no resultado deles, pode ser escrita como

$$f_{2n}^2(\lambda) = \lambda + n - \frac{1}{4} + \frac{3}{4(4n+1)} = \lambda + c_{2n}$$

ou,

$$f_{2n+1}^2(\lambda) = \lambda + n + \frac{1}{4} + \frac{3}{4(4n+3)}.$$

Por outro lado, as desigualdades (1.15) e (1.16) mostram que as funções $f_n^2(\lambda)$, são limitadas superiormente por

$$f_{2n}^2(\lambda) < \lambda + n - \frac{1}{4} + \frac{3}{2(4n+2)}$$

e

$$f_{2n+1}^2(\lambda) < \lambda + n + \frac{1}{4} + \frac{15}{4(2n+3)}.$$

Consequentemente, o multiplicador (1.17) é assintoticamente preciso.

O Teorema 1.1 e o Teorema 1.2, são as principais contribuições deste trabalho, expostos no artigo [7].

Capítulo 2

Resultados Preliminares

Neste capítulo, daremos algumas definições e teoremas importantes da matemática, alguns seguidos de demonstração outros não, que serão diretamente aplicados no decorrer deste trabalho. Maiores informações podem ser encontradas em [3] e [22].

2.1 Números Complexos

Um número complexo z pode ser definido como um par ordenado (x, y) de números reais x e y , ou seja, $z = (x, y)$. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos, isto é,

$$\mathbb{C} := \{z = (x, y) = x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

O conjugado complexo ou, simplesmente, conjugado de um número complexo $z = x + iy$ é o número $\bar{z} = x - iy$. O ponto $\bar{z}$ é a reflexão do ponto z , isto é, a posição do ponto $\bar{z}$ é simétrica à do ponto z com relação ao eixo x . Se x e y são números reais, o número real não negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ é chamado valor absoluto, ou módulo, do número complexo $z = x + iy$, isto é, por definição $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Geometricamente, o valor absoluto de z é o comprimento do vetor z , que é a distância do ponto z à origem.

Sejam r e θ as coordenadas polares do ponto z , com $r \geq 0$. Então, $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

Portanto, o número complexo $z = x + iy$ pode ser escrito na forma polar por

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}, \quad r \geq 0,$$



sendo r o raio, isto é, $r = \sqrt{x^2 + y^2} := |z|$. O ângulo θ é chamado argumento de z e é denotado por $\arg(z)$. Quando $z \neq 0$ os valores de θ são determinados por

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} \quad \implies \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}.$$

Algumas vezes é conveniente usar a representação polar em torno de um certo ponto z_0 ao invés da origem, $z - z_0 = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, sendo ρ a distância entre z e z_0 ($\rho = |z - z_0|$) e θ , o ângulo de inclinação do vetor. O produto de dois números complexos $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1)$, e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2)$ se reduz, na forma polar, a $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$.

Dai, conclui-se que $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 + \theta_2$. Por indução matemática sobre n , decorre imediatamente, que o produto dos números complexos $z_1, z_2, \dots, z_n$ será

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)].$$

Consequentemente, $\arg(z_1 z_2 \dots z_n) = \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n$.

Definição 2.1.1 *Uma vizinhança de um ponto z_0 é o conjunto de todos os pontos para os quais $|z - z_0| < \varepsilon$, onde ε é uma constante positiva. Assim, uma vizinhança consiste de todos os pontos de um disco, ou região circular, inclusive o centro z_0 , mas sem os pontos da fronteira.*

2.2 Funções Contínuas de uma Variável Complexa

Nesta seção e em todo trabalho, consideraremos apenas as funções que são no mínimo injetoras, contínuas e n -vezes diferenciáveis, definidas em uma região do plano complexo que será denominada de domínio da função.

Seja $f(z)$ uma função contínua de uma variável complexa z , que também pode ser representada por $f(z) := u(x, y) + iv(x, y)$, onde $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são funções reais contínuas com x e y variáveis reais. Assim, $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ e $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$ são as partes real e imaginária de $f(z)$, respectivamente.

2.2.1 Limite, Continuidade e Derivada

Definição 2.2.1 (*Limite*). Seja $f(z)$ uma função definida em todos os pontos de uma vizinhança de um ponto z_0 do plano complexo, exceto, eventualmente, no próprio ponto z_0 . A afirmação

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

significa que, para cada número positivo ε , existe um número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad |z - z_0| < \delta, \quad z \neq z_0.$$

Definição 2.2.2 (*Continuidade*). Uma função $f(z)$ é contínua em um ponto $z_0 \in \mathbb{C}$ se, e somente se, as três seguintes condições são satisfeitas:

- (1) $f(z_0)$ existe;
- (2) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe; —
- (3) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Definição 2.2.3 (*Derivada*). Seja z um ponto arbitrário de uma vizinhança de um ponto fixo z_0 contida no domínio de definição de uma certa função $f(z)$. Seja $\Delta z = z - z_0$. A derivada, $f'(z_0)$, de $f(z)$ em z_0 é definida por

$$f'(z_0) := \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

se o limite existe, isto é, se o número complexo $f'(z_0)$ (derivada) existe. Então, para cada número positivo ε , existe um número positivo δ tal que

$$\left| \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad \text{sempre que} \quad 0 < |\Delta z| < \delta.$$

Definição 2.2.4 O limite à esquerda de um ponto $\alpha \in \mathbb{R}$ do domínio de $f(z)$ é definido por

$$f(\alpha-) := \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^-} f(x).$$

Analogamente, o limite à direita do ponto $\alpha \in \mathbb{R}$ é dado por

$$f(\alpha+) := \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x).$$

Definição 2.2.5 O ponto α do eixo real é denominado de salto positivo da função, $f(z)$ se $f(\alpha-) = -\infty$ e $f(\alpha+) = +\infty$ e, salto negativo, se $f(\alpha-) = +\infty$ e $f(\alpha+) = -\infty$.

Denotemos por $N_+(f; (a, b))$ o número de saltos positivos da função $f(z)$ no subintervalo real (a, b) e por $N_-(f; (a, b))$, o número de saltos negativos.

Definição 2.2.6 Se um ponto (x, y) se desloca continuamente através de uma curva $y = f(x)$ de modo que pelo menos uma de suas coordenadas tenda ao infinito e a distância deste ponto a uma determinada reta tenda a zero, esta reta recebe o nome de assíntota da curva. Se existe um número α tal que $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \infty$, a reta $x = \alpha$ (paralela ao eixo OY) é a assíntota vertical.

Citamos como exemplo a função $f(x) = 1/(x - 2)$. É claro que $\alpha \in \mathbb{R}$ é ponto de salto de $f(z)$ somente quando seu gráfico tem assíntota vertical $x = \alpha$. Além disso, observamos que nem todos os pontos α onde o gráfico de $f(z)$ tem assíntota vertical são pontos de salto. Se $f(\alpha-)$ e $f(\alpha+)$ têm o mesmo sinal, então α não é salto negativo e tampouco positivo.

2.3 Funções Analíticas

Definição 2.3.1 (Função Analítica). A função $f(z)$ na variável complexa z é analítica no ponto z_0 , se sua derivada $f'(z)$ existe não só em z_0 mas também em todo ponto z de

uma vizinhança de z_0 . Uma função é analítica em uma região se for analítica em todos pontos dessa região.

2.3.1 Equações de Cauchy-Riemann

Seja $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ com $\operatorname{Re}(f(z)) = u(x, y)$ e $\operatorname{Im}(f(z)) = v(x, y)$.

Suponha que $z - z_0$ é real. Logo, $z = x + iy_0$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\{u(x, y_0) + iv(x, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Se esta expressão tende para um limite quando $x \rightarrow x_0$, então suas partes real e imaginária também tendem a limites, independentemente. Isso significa que $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ existem no ponto (x_0, y_0) . Portanto,

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0} \quad (2.1)$$

Por outro lado, suponha que $z - z_0$ tenha somente com a parte imaginária, isto é, $z = x_0 + iy$ e $z_0 = x_0 + iy_0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{\{u(x_0, y) + iv(x_0, y)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{iy - iy_0} \\ &= \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}. \end{aligned}$$

Assim, as derivadas parciais $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ existem no ponto (x_0, y_0) e

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0} \quad (2.2)$$

Comparando (2.1) e (2.2) e igualando as partes real e imaginária, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (x = x_0, y = y_0) \quad (2.3)$$

Definição 2.3.2 As equações (2.3) são denominadas *Equações de Cauchy-Riemann*.

Se existem as derivadas parciais de primeira ordem em uma região e são contínuas em todos os pontos dessa região, então as equações de Cauchy-Riemann são uma condição



necessária e suficiente para que $f(z)$ seja analítica nessa região. Sendo assim, existe uma série de potências que representa essa função no círculo de convergência, isto é,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

é convergente para $|z| < r$.

Definição 2.3.1 *Um arco contínuo é definido como um conjunto de pontos (x, y) tais que*

$$x = \phi(t), \quad y = \mu(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2.4)$$

onde $\phi(t)$ e $\mu(t)$ são funções contínuas do parâmetro real t .

Essa definição estabelece uma transformação contínua dos pontos t do intervalo (x, y) no arco e uma orientação dos pontos (x, y) de acordo com o sentido de crescimento de t . Se nenhum par de valores distintos de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) , o arco é chamado arco de Jordan. Mas, se $\phi(a) = \phi(b)$, $\mu(a) = \mu(b)$ e nenhum outro par de valores distintos de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) , então o arco contínuo é uma *curva simples fechada*, ou curva de Jordan.

O círculo

$$x = r_0 \cos t, \quad y = r_0 \sin t \quad \text{com } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

é um exemplo de curva simples fechada. Se as funções $\phi(t)$ e $\mu(t)$ na equação (2.4) têm derivadas contínuas $\phi'(t)$ e $\mu'(t)$, que não se anulam simultaneamente para qualquer valor de t , então o arco tem uma tangente que varia continuamente de posição. O arco (ou a curva) é, então, suave. Entendemos por *caminho* a curva contínua formada por um número finito de arcos suaves.

Definição 2.3.3 *Define-se contorno como a curva consistindo de um número finito de arcos definidos por $x = \phi(t)$, $y = \mu(t)$, onde $\phi'(t)$ e $\mu'(t)$ são contínuas.*

O contorno é fechado se o ponto final da curva coincide com o ponto inicial. Por exemplo, calcular a integral

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{dz}{z}$$

onde $\mathcal{F}$ é um círculo com centro na origem e raio ρ .

Seja $z = x + iy$ um número complexo qualquer. Mudando para coordenadas polares, temos que $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}$, com

$$x = \rho \cos\theta =: \phi(\theta) \text{ e } y = \rho \sin\theta =: \mu(\theta), \text{ onde } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2.5)$$

Assim, $z = \rho(\phi(\theta) + i\mu(\theta)) = \rho e^{i\theta}$. Derivando z com relação a θ , obtemos

$$\phi'(\theta) = -\rho \sin\theta \text{ e } \mu'(\theta) = \rho \cos\theta.$$

Por outro lado, $dz/d\theta = \phi'(\theta) + i\mu'(\theta) = -\rho \sin\theta + i\rho \cos\theta = i\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho i e^{i\theta}$, ou seja, $dz = \rho i e^{i\theta} d\theta$. Finalmente,

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{dz}{z} = \int_{\mathcal{F}} \frac{\rho i e^{i\theta}}{\rho e^{i\theta}} d\theta = i \int_{\mathcal{F}} d\theta = 2\pi i.$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{dz}{z} = 2\pi i. \quad (2.6)$$

Um dos principais resultados da Teoria das Funções Analíticas é o teorema de Cauchy, que pode ser encontrado no livro do Churchill [3] juntamente com sua demonstração.

Teorema 2.3.1 (Cauchy). *Se a função $f(z)$ é analítica e injetora no interior e sobre um contorno $\mathcal{F}$ simples e fechado, então*

$$\int_{\mathcal{F}} f(z) dz = 0. \quad (2.7)$$

Teorema 2.3.2 (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja $f(z)$ uma função analítica no interior e sobre um contorno $\mathcal{F}$. Se z é um ponto interior qualquer de $\mathcal{F}$, então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{w - z} dw. \quad (2.8)$$

Demonstração: Consideremos a função $\frac{f(w)}{w - z}$ analítica exceto em $w = z$, onde o

denominador se anula. Assim,

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (2.9)$$

onde γ é um outro contorno fechado dentro de $\mathcal{F}$ que inclui o ponto $w = z$. Tomemos γ como o círculo com centro em z e raio ρ . Como $f(w)$ é contínua, podemos escolher ρ suficientemente pequeno tal que $|f(w) - f(z)| < \varepsilon/\rho$ em γ , sempre que $|w - z| < \rho$. Por outro lado, sabemos que se M é a cota superior de $|f(z)|$ sobre a curva $\mathcal{F}$ e L é o comprimento de $\mathcal{F}$, então

$$\left| \int_{\mathcal{F}} f(z) dz \right| \leq ML. \quad (2.10)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw &= f(z) \int_{\gamma} \frac{dw}{w-z} + \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \\ &= 2\pi i f(z) + \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw, \end{aligned} \quad (2.11)$$

que decorre da igualdade (2.6). Substituindo (2.9) em (2.11) e aplicando o módulo em ambos os lados de (2.11) obtemos

$$\left| \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \right| = \left| \int_{\gamma} \frac{f(w) - f(z)}{w-z} dw \right|.$$

Por (2.10), conclui-se que

$$\left| \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{w-z} dw - 2\pi i f(z) \right| < \frac{\varepsilon 2\pi \rho}{\rho} = 2\pi \varepsilon.$$

Mas, o lado esquerdo da desigualdade acima é independente de ε . Como ε pode tender a zero, obtemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{w-z} dw. \quad (2.12)$$

Esta é a fórmula da integral de Cauchy, que expressa o valor de $f(z)$ em qualquer ponto interior de $\mathcal{F}$. ■

Teorema 2.3.3 (Derivada de Cauchy). Seja z um ponto qualquer no interior de $\mathcal{F}$ e $z+h$ uma vizinhança de z contida em $\mathcal{F}$. Então,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw.$$

Demonstração: Pela igualdade (2.12), temos que

$$f(z+h) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{w-z-h} dw. \quad (2.13)$$

Subtraindo (2.12) de (2.13) e dividindo por h , segue que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)} dw. \quad (2.14)$$

Quando $h \rightarrow 0$, o integrando tende a $f(w)/(w-z)^2$. Mostremos que é possível passar o limite sob o sinal da integral. Consideremos a diferença

$$\int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)(w-z-h)} dw - \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw = h \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)} dw$$

Sejam M o máximo valor de $|f(w)|$ em $\mathcal{F}$ e L o comprimento do arco $\mathcal{F}$. Seja δ a distância mínima de z a $\mathcal{F}$. Se $|h| < \delta$, então

$$\left| \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)} dw \right| \leq \frac{|h|ML}{\delta^2(\delta-|h|)},$$

que é limitado quando $|h| \rightarrow 0$. Como o lado direito da última desigualdade tende a zero com $|h|$, consequentemente

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw,$$

que é a formula de Cauchy para $f'(z)$. ■

Usando o mesmo raciocínio obtém-se $f''(z)$, que é a derivada de $f'(z)$, dada por

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw.$$

Repetindo esse processo n vezes obtemos $f^{(n)}(z)$, que é representada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

Definição 2.3.4 (*Série de Taylor*). Suponhamos que $f(z)$ é analítica dentro e sobre o contorno simples $\mathcal{F}$. Seja a um ponto interior de $\mathcal{F}$. Então,

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

Esta série será convergente se $|z-a| < \delta$, onde δ é a menor distância entre a e $\mathcal{F}$.

2.3.2 Zeros de Funções Analíticas

Definição 2.3.5 O elemento $z \in \mathbb{C}$ é um zero da função analítica $f(z)$ se $f(z) = 0$. Se $f(z)$ é analítica numa vizinhança de $z = a$ então $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-a)^k$ para $|z-a|$ suficientemente pequeno e, se $z = a$ é um zero, então um ou mais coeficientes a_k , $k = 1, 2, \dots$, se anulam. Se $a_k = 0$ para $k < m$, mas $a_m \neq 0$, então dizemos que $f(z)$ tem um zero de ordem m .

Segue imediatamente da série de Taylor, Definição 2.3.4, que, se a é um zero de ordem m , então $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0$, enquanto que $f^{(m)}(a) \neq 0$. Os zeros de uma função analítica são pontos isolados, a menos que a função seja identicamente nula, e existe uma vizinhança desse ponto onde a função não tem zeros, exceto, eventualmente, o próprio ponto. Consideremos agora, $z^* \in \mathbb{C}$, um ponto arbitrário de qualquer um dos dois círculos concêntricos γ_1 e γ_2 , $|z^* - a| = r_1$ e $|z^* - a| = r_2$, com centro num ponto a , onde $r_2 < r_1$.

Definição 2.3.6 (*Série de Laurent*). Seja $f(z)$ uma função analítica sobre γ_1 e γ_2 e na região entre esses dois círculos, então, em cada ponto z entre os círculos $f(z)$ é representada por uma série convergentes de potências positivas e negativas de $(z-a)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}, \quad (2.15)$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z^*)}{(z^* - a)^{n+1}} dz^*, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots,$$

e

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} (z^* - a)^{n-1} f(z^*) dz^*, \quad \text{para } n = 1, 2, \dots$$

Quando $f(z)$ é analítica no interior de γ_1 , todos os coeficientes b_n são nulos, assim essa série se reduz à série de Taylor.

2.3.3 Singularidades de uma Função Analítica

Suponhamos $f(z)$ analítica em uma vizinhança de a , digamos para $|z - a| < r$, exceto no ponto a . Então, a é chamado uma singularidade isolada de $f(z)$. Consideremos $f(z)$ em termos da série de Laurent (2.15). Existem três casos possíveis:

- (1) todos os coeficientes b_n são nulos;
- (2) a série das potências negativas de $z - a$ contém somente um número finito de termos. Então, dizemos que $f(z)$ tem um pólo no ponto $z = a$. Se b_m é o último coeficiente que não se anula, então

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^m \frac{b_n}{(z-a)^n},$$

e dizemos que $z = a$ é um pólo de ordem m ou, um pólo simples, duplo, ..., de acordo com $m = 1, 2, \dots$.

O coeficiente b_1 é denominado resíduo de $f(z)$ no ponto $z = a$ é de particular importância pois, pela fórmula de Laurent 2.3.6,

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

onde γ é um círculo com centro $z = a$, que exclui todas as outras singularidades da função. Assim, se $z = a$ é um polo simples, então $b_1 = \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z)$;

- (3) a série das potências negativas de $z - a$ tem um número infinito de termos. O ponto $z = a$ é então chamado uma singularidade essencial de $f(z)$.

No caso particular em que $f(z)$ é analítica em $\mathcal{F}'$, todos os coeficientes b_n são nulos pelo Teorema 2.3.1. Portanto, a série reduz-se à série de Taylor.

Toda função tem um resíduo em cada um de seus pontos singulares isolados, já que a série de Laurent representa a função numa vizinhança do ponto, exceto o próprio ponto. O valor do resíduo, pode ser zero. Se a função tem apenas um número finito de pontos singulares num domínio, então esses pontos são necessariamente isolados. Assim, a função que não tem singularidades, a menos de pólos, é chamada função racional.

Teorema 2.3.4 (Teorema do Resíduo). Seja $f(z)$ injetora e analítica sobre e no interior do contorno fechado $\mathcal{F}$, exceto em um número finito de pontos singulares, $z_1, z_2, \dots, z_n$, interiores à $\mathcal{F}$. Se $b_1, b_2, \dots, b_n$ são os resíduos nesses pontos, então

$$\int_{\mathcal{F}} f(z) dz = 2\pi i (b_1 + b_2 + \dots + b_n). \quad (2.16)$$

Definição 2.3.7 (Funções Meromórficas). Diz-se que uma função é meromórfica em uma região, se ela é analítica na região exceto em um número finito de pólos.

Teorema 2.3.5 (Zeros e Pólos de Funções Analíticas). Seja $f(z)$ injetora e analítica sobre e no interior do contorno fechado $\mathcal{F}$, exceto em um número finito de pólos. Se $f(z)$ não tem zeros no contorno, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$

onde N é o número de zeros no interior de $\mathcal{F}$ (zeros de ordem m sendo contados m vezes) e P é o número de pólos (pólos de ordem m , contados m vezes).

Demonstração: Seja $z = a$ um zero de ordem m . Tem-se, então, que, nas vizinhanças desse ponto, $f(z) = (z - a)^m g(z)$, onde $g(z)$ é analítica e $g(a) \neq 0$. Assim,

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1} g(z) + (z - a)^m g'(z).$$

Portanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

onde o último termo é analítico em $z = a$. Daí, $f'(z)/f(z)$ tem pólo simples em $z = a$ com resíduo m . Temos, então, que a soma dos resíduos nos zeros de $f(z)$ é N . Suponha que $z = a_p$ é um polo de ordem m . A função $h(z) = (z - a_p)^m f(z)$ pode ser definida em a_p de modo a se tornar analítica nesse ponto. Assim, em alguma vizinhança de a_p ,

exceto no próprio ponto,

$$f(z) = (z - a_p)^{-m} h(z), \quad \text{com } h(a_p) \neq 0,$$

e

$$f'(z) = -m(z - a_p)^{-m-1} h(z) + (z - a_p)^{-m} g'(z).$$

Portanto,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - a_p} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Temos, então, que $f'(z)/f(z)$ tem um pólo simples em a_p com resíduo $-m$.

Logo, a soma dos resíduos nos pólos de $f(z)$ é $-P$. ■

Corolário 2.3.2 *Seja $f(z)$ injetora e analítica em $\mathcal{F}$, então o Teorema 2.3.5 reduz-se*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{F}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N. \quad (2.17)$$

2.3.4 Funções Racionais

Entendemos por função racional toda função que pode ser expressa por quociente de polinômios. Mostraremos, nesta seção, que toda fração racional, ou seja, todo quociente de polinômios, pode ser decomposta de maneira única em uma soma de um número finito de frações simples.

Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios com coeficientes reais. Seja $\psi(x) = p(x)/q(x)$ uma fração racional irredutível.

Teorema 2.3.6 *Uma fração racional irredutível $\psi(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ cujo denominador admite zeros de multiplicidade r , sendo, portanto, divisível por $(x - a)^r$, sempre pode ser decomposta em outras duas frações: uma, que tem por numerador uma constante A_0 e por denominador $(x - a)^r$, e a outra, que tem por numerador um polinômio p_1 , e cujo denominador se obtém ao se diminuir de uma unidade o expoente de $x - a$ em $q(x)$.*

Demonstração: Suponhamos que a é um zero de $q(x)$ com multiplicidade r . Logo, $q(x) = (x - a)^r q_1(x)$, onde $q_1(x)$ é um novo polinômio em x que não se anula para $x = a$.

Por hipótese, $p(x)/q_1(x)$ é uma fração racional irredutível. Logo, $p(x)/q(x)$ também será. Seja

$$A_0 = \frac{p(a)}{q_1(a)} \implies p(a) - A_0 q_1(a) = 0.$$

Daqui, resulta que a função $p(x) - A_0 q_1(x)$ se anula em $x = a$. Então, é divisível por $x - a$. Assim, podemos escrever $p(x) - A_0 q_1(x) = (x - a)p_1(x)$, sendo $p_1(x)$ um novo polinômio em x . Assim, $p(x) = A_0 q_1(x) + (x - a)p_1(x)$.

Dividindo-se ambos os membros por $q(x)$ resulta em

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_0}{(x - a)^r} + \frac{p_1(x)}{(x - a)^{r-1} q_1(x)}. \quad \blacksquare$$

Aplicando sucessivamente o raciocínio acima em $p_1(x)/[(x - a)^{r-1} q_1(x)]$ obtemos

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_0}{(x - a)^r} + \frac{A_1}{(x - a)^{r-1}} + \dots + \frac{A_{r-1}}{(x - a)} + \frac{p_r(x)}{q_1(x)},$$

onde $A_0, A_1, \dots, A_{r-1}$ são constantes e $p_r(x)$ é um polinômio em x . Assim, a não é um zero de $q_1(x)$. Se considerarmos que o denominador $q(x)$ da função racional tem outro zero b cuja multiplicidade é s , podemos escrever $q(x) = (x - a)^r (x - b)^s q_2(x)$.

Seja $q_1(x) = (x - b)^s q_2(x)$. Consequentemente, a fração racional $p_r(x)/q_1(x)$ poderá ser decomposta em $s + 1$ frações da seguinte forma

$$\frac{p_r(x)}{q_1(x)} = \frac{B_0}{(x - b)^s} + \frac{B_1}{(x - b)^{s-1}} + \dots + \frac{B_{s-1}}{(x - b)} + \frac{p_s(x)}{q_2(x)}.$$

Seja, então $q(x) = (x - a_1)^{n_1} (x - a_2)^{n_2} \dots (x - a_l)^{n_l} q_l(x)$, onde $a_1, \dots, a_l$, são todos os zeros reais de $q(x)$. Neste caso,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^{n_j} \frac{A_{k,j}}{(x - a_j)^k} + \frac{p_m(x)}{q_l(x)},$$

onde $q_l(x)$ é uma constante, ou só tem zeros complexos.

O Teorema 2.3.6 é geral, aplicável, também, quando o polinômio $q(x)$ tem zeros imaginários. Como os coeficientes de $q(x)$ são reais, os zeros imaginários só podem aparecer em pares conjugados. O teorema a seguir nos dá uma regra para esses casos.

Teorema 2.3.7 *Seja $q(x)$ um polinômio com coeficientes reais que admite zeros complexos $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ com multiplicidade k . Então, a fração $p(x)/q(x)$ poderá ser decomposta em outras duas: a primeira, cujo numerador é uma função linear em x e por denominador $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k$ e a segunda com numerador um polinômio e denominador a expressão que resulta ao se diminuir de uma unidade o expoente do fator $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]$ em $q(x)$.*

Demonstração: Sendo $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ zeros de $q(x)$ de multiplicidade k , podemos escrever

$$\begin{aligned} q(x) &= [(x - \alpha + i\beta)(x - \alpha - i\beta)]^k q_1(x) \\ &= [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k q_1(x), \end{aligned}$$

onde $q_1(x)$ é um polinômio real em x que não admite zeros complexos $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$. Como $p(x)$ também não admite esses zeros por não ter fatores comuns com $q(x)$, a fração

$$\frac{p(x)}{q_1(x)} \neq 0, \quad \text{para } x = \alpha + i\beta.$$

Portanto,

$$\frac{p(\alpha + i\beta)}{q_1(\alpha + i\beta)} = M_0(\alpha + i\beta) + N_0, \quad (2.18)$$

sendo M_0 e N_0 constantes, cujos valores podem ser determinados através da equação

$$p(\alpha + i\beta) - [M_0(\alpha + i\beta) + N_0]q_1(\alpha + i\beta) = 0.$$

Igualando-se as partes reais e imaginárias, obtemos $p(x) - (M_0x + N_0)q_1(x) = 0$. Esta equação tem coeficientes reais e admite como zero o número complexo $\alpha + i\beta$. Logo, admite, também, o número complexo $\alpha - i\beta$, de modo que o primeiro membro admitirá como fatores $(x - (\alpha + i\beta))$ e $(x - (\alpha - i\beta))$ cujo produto é $(x - \alpha)^2 + \beta^2$. Portanto,

$$p(x) - (M_0x + N_0)q_1(x) = [(x - \alpha)^2 + \beta^2]p_1(x),$$

ou seja,

$$p(x) = (M_0x + N_0)q_1(x) + [(x - \alpha)^2 + \beta^2]p_1(x)$$

onde $p_1(x)$ é um novo polinômio inteiro em x . Dividindo-se ambos os membros por $q(x)$, obtém-se

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{M_0x + N_0}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k} + \frac{p_1(x)}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{k-1}q_1(x)}. \quad \blacksquare$$

Aplicando sucessivamente o raciocínio acima na última fração de modo que os números complexos conjugados $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ sejam zeros de $q(x)$ com multiplicidade k , podemos escrever

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{M_0x + N_0}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^k} + \frac{M_1x + N_1}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{k-1}} + \dots + \frac{M_kx + N_k}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{p_k(x)}{q_1(x)},$$

onde $q_1(x)$ é um polinômio que não admite $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$ como zeros. Se $p_k(x)/q_1(x)$ tiver outros zeros complexos aplica-se novamente a técnica descrita acima, caso contrário aplica-se o Teorema 2.3.6.

2.4 Resultados Clássicos sobre Polinômios Algébricos

A regra de Cauchy é uma ferramenta poderosa para se determinar um círculo que contém todos os zeros, ou raízes, de um polinômio com coeficientes complexos. Se $p(z)$ é um polinômio de grau n , ele tem exatamente n zeros no plano complexo. É muito importante achar uma região, por exemplo um círculo, que contém todos os zeros de $p(z)$.

Teorema 2.4.1 *Seja $p(z) = z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_n$ um polinômio algébrico com coeficientes complexos e $a_n \neq 0$. Então, qualquer zero x de $p(z)$ satisfaz à desigualdade $|x| < R$, onde R é o único zero positivo da equação*

$$t^n - |a_1|t^{n-1} - \dots - |a_{n-1}|t - |a_n| = 0. \quad (2.19)$$

Em outras palavras, todos os zeros da equação $p(z) = 0$ pertencem ao círculo de centro na origem e raio R .



Demonstração: Demonstraremos, primeiramente de uma maneira direta, que a equação (2.19) tem, de fato, um único zero positivo.

É claro que, para $t > 0$, (2.19) é equivalente à equação

$$t^n = |a_1|t^{n-1} + \dots + |a_{n-1}|t + |a_n|.$$

Dividindo ambos os membros por t^n , obtemos

$$1 = |a_1|\frac{1}{t} + \dots + |a_{n-1}|\frac{1}{t^{n-1}} + |a_n|\frac{1}{t^n}.$$

A função do lado direito é estritamente decrescente em $(0, \infty)$, tem valores arbitrariamente grandes quando t está próximo de zero e converge para 0 quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, o gráfico desta função cruza o gráfico da função $y(t) = 1$ uma única vez em um ponto t de $(0, \infty)$, que é obviamente positivo.

Denotemos por $\varphi(t)$ a função

$$\varphi(t) := t^n - |a_1|t^{n-1} - \dots - |a_{n-1}|t - |a_n|.$$

Pela observação acima, $\varphi(t)$ tem um único zero positivo que é o ponto R . Então, se $\varphi(t) \leq 0$ para algum $x > 0$, temos $x \leq R$.

Vamos supor, agora, que $p(z) = 0$ para algum z . Então, $z^n = -a_1z^{n-1} - \dots - a_{n-1}z - a_n$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} |z|^n &= |a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n| \\ &\leq |a_1||z|^{n-1} + \dots + |a_{n-1}||z| + |a_n|. \end{aligned}$$

A última desigualdade mostra que $\varphi(|z|) \leq 0$ e, de acordo com a afirmação já demonstrada $|z| \leq R$. ■

Daremos, agora, uma regra, proposta por Lagrange, para se determinar um limite superior para os zeros positivos de uma equação algébrica com coeficientes reais. Esta regra pode ser utilizada para se determinar, por exemplo, um limite superior para o R do Teorema 2.4.1. O cálculo de uma boa aproximação para R exige outros métodos numéricos.



2.4.1 Regra de Lagrange

Teorema 2.4.2 *Seja $f(x) = a_0x^n + \dots + a_{n-1}x + a_n$ um polinômio algébrico com coeficientes reais e $a_0 \neq 0$. Suponha que $a_0 > 0$. Sejam k o índice do primeiro coeficiente negativo e A o valor absoluto do coeficiente negativo de maior valor absoluto da sequência $a_0, a_1, \dots, a_n$. Então, qualquer zero positivo x de $f(t) = 0$ satisfaz à desigualdade*

$$x < 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}}.$$

Demonstração: Vamos supor que $x \geq 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}} := \rho$. Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0x^n + \dots + a_kx^{n-k} + \dots + a_n \\ &\geq a_0x^n + a_kx^{n-k} + \dots + a_n \quad (a_i \geq 0, \quad i = 0, \dots, k-1) \\ &\geq a_0x^n - A(x^{n-k} + \dots + x + 1) \quad (\text{pela escolha de } A) \\ &= a_0x^n - A \frac{x^{n-k+1} - 1}{x - 1} \\ &> a_0x^n - A \frac{x^{n-k+1}}{x - 1} \quad \left(\frac{1}{x - 1} > 0 \right) \\ &= \frac{x^{n-k}}{x - 1} (a_0x^{k-1}(x - 1) - A) \\ &> \frac{x^{n-k}}{x - 1} (a_0(x - 1)^k - A) \quad (x > x - 1). \end{aligned}$$

Como, de acordo com o a hipótese,

$$x \geq 1 + \sqrt[k]{\frac{A}{a_0}},$$

então $(x - 1)^k \geq A/a_0$ e, conseqüentemente, $a_0(x - 1)^k - A \geq 0$. Assim, mostramos que para $x \geq \rho$ temos $f(x) > 0$, isto é, $f(x)$ é diferente de zero para $x \geq \rho$. Conseqüentemente, todos os zeros positivos da equação $f(t) = 0$ são menores do que ρ . ■

Notemos que, tendo à disposição um método para se determinar um limite superior para os zeros positivos, podemos achar um limite inferior para os zeros negativos, isto é, localizar em um intervalo $[m, M]$ todos os zeros reais de uma equação algébrica. Isto pode ser feito, reduzindo-se o segundo problema (sobre os zeros negativos) ao primeiro problema (sobre os zeros positivos), através da mudança de variáveis $x = -t$.



De fato, sejam $-x_1 < \dots < -x_j < 0$ os zeros negativos de $f(x) = 0$.

Introduzimos o polinômio $g(t) := f(-t)$.

É claro que $0 < x_j < \dots < x_1$ serão os zeros positivos da equação $g(t) = 0$. Por algum dos métodos conhecidos podemos achar um limite superior ρ para seus zeros,

$$x_j < \dots < x_1 < \rho.$$

Portanto, $-\rho < -x_1 < \dots < -x_j < 0$ e, conseqüentemente, $-\rho$ será um limite inferior para os zeros negativos de $f(x)$. Analogamente, pelas mudanças

$$x = \frac{1}{t}, \quad x = -\frac{1}{t},$$

obtemos um limite inferior para os zeros positivos e limite superior para os zeros negativos da equação $f(x) = 0$.

Agora, tratemos de um problema um pouco mais difícil, que é o de se determinar o número dos zeros reais da equação algébrica $f(x)$ que pertencem ao intervalo $[a, b]$. O seguinte lema, que vale não somente para polinômios mas para funções suficientemente suaves, tem um papel importante em todos os métodos para se achar limites para este número.

Lema 2.4.3 *Seja $f(z)$ uma função que tem derivadas contínuas até a ordem k em uma vizinhança $\mathcal{U}$ do ponto c . Sejam*

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(k-1)}(c) = 0 \quad \text{e} \quad f^{(k)}(c) \neq 0.$$

Então, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$f(c + \varepsilon)f'(c + \varepsilon) > 0,$$

$$f(c - \varepsilon)f'(c - \varepsilon) < 0.$$

Demonstração: A afirmação do lema diz que antes de qualquer zero c da equação $f(t) = 0$, a função $f(z)$ e sua derivada têm sinais opostos antes e depois dos zeros. A demonstração é baseada na fórmula de Taylor. Para todo h suficientemente pequeno, tal que $c + h, c - h \in \mathcal{U}$, temos

$$f(c + h) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}h + \frac{f''(c)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-1)!}h^{k-1} + \frac{f^{(k)}(c + \theta h)}{k!}h^k,$$

onde $\theta \in (0, 1)$. Analogamente,

$$f'(c+h) = f'(c) + \frac{f''(c)}{1!}h + \dots + \frac{f^{(k-1)}(c)}{(k-2)!}h^{k-2} + \frac{f^{(k)}(c+\theta_1h)}{(k-1)!}h^{k-1},$$

onde $\theta_1 \in (0, 1)$. Como $f^{(j)}(c) = 0$, para $j = 0, \dots, k-1$, então

$$\frac{f(c+h)}{f'(c+h)} = \frac{f^{(k)}(c+\theta h)}{f^{(k)}(c+\theta_1h)} \frac{h}{k}.$$

Mas, $f^{(k)}(t) \neq 0$. Desde que $f^{(k)}(t)$ é função contínua, existe uma vizinhança $\mathcal{U}_1$ de c tal que $f^{(k)}(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathcal{U}_1$. Além disso, sinal $f^{(k)}(t) = \text{sinal } (f^{(k)}(c))$ para todo $t \in \mathcal{U}_1$. Em particular, para h suficientemente pequeno, temos

$$\text{sinal } (f^{(k)}(c+\theta h)) = \text{sinal } (f^{(k)}(c+\theta_1h)).$$

Consequentemente,

$$\text{sinal } \left(\frac{f(c+h)}{f'(c+h)} \right) = \text{sinal } (h).$$

Assim, fazendo $h = \varepsilon$ e $h = -\varepsilon$, obtemos a afirmação do lema. ■

2.4.2 Sequência de Sturm

Seja $f(x)$ um polinômio algébrico arbitrário de grau exatamente n , isto é, $f(x) = a_0x^n + \dots + a_n$ e $a_0 \neq 0$. Aplicando o algoritmo de Euclides, para se achar o maior fator comum entre $f(x)$ e $f'(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(x) &= f'(x)q_0(x) - r_1(x) \\ f'(x) &= r_1(x)q_1(x) - r_2(x) \\ r_1(x) &= r_2(x)q_2(x) - r_3(x) \\ &\dots = \dots \\ r_{i-1}(x) &= r_i(x)q_i(x) - r_{i+1}(x) \\ &\dots = \dots \\ r_{k-2}(x) &= r_{k-1}(x)q_{k-1}(x) - r_k(x). \end{aligned}$$

Neste processo, tomamos os restos da divisão com sinal "−". Podemos observar que os graus dos polinômios $r_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$, são estritamente decrescentes. A divisão

é repetida até obtermos o resto $r_k(x)$ de grau zero, isto é, uma constante. Se esta constante é 0, então $r_{k-1}(x)$ é o fator comum entre $f(x)$ e $f'(x)$. Se $r_k(x) = \text{const} \neq 0$, então $f(x)$ e $f'(x)$ não têm fatores em comum diferentes de constante. Por exemplo, se $f(x)$ não tem zeros múltiplos, então $f(x)$ e $f'(x)$ não têm fatores comuns diferentes de constante e, conseqüentemente, o algoritmo de Euclides produz a sequência

$$f(x), f'(x), r_1(x), \dots, r_k(x), \quad \text{com } r_k(x) = \text{const} \neq 0.$$

Seja (a, b) um dado intervalo. Vamos supor que $r_k(x)$ é um fator comum entre $f(x)$ e $f'(x)$ e que $r_k(x) \neq 0$ em (a, b) . Por outro lado, $r_k(x) \neq 0$ em (a, b) se, e somente se, $f(x)$ não tem zeros múltiplos em (a, b) .

De fato, se $f(x)$ tiver um zero ξ com multiplicidade p em (a, b) , então ξ é um zero com multiplicidade $(p-1)$ de $f'(x)$ e, conseqüentemente, $f(x)$ e $f'(x)$ têm um fator comum $(x-\xi)^{p-1}$, onde o ponto $\xi \in (a, b)$. Reciprocamente, se $f(x)$ não tem zeros múltiplos em (a, b) , então o fator comum entre $f(x)$ e $f'(x)$ não tem zeros em (a, b) .

Definição 2.4.1 Dizemos que

$$f(x), f'(x), r_1(x), \dots, r_k(x) \tag{2.20}$$

é a sequência de Sturm gerada pelo algoritmo de Euclides, aplicado em $f(x)$ e $f'(x)$.

Denotemos por $V(x) := V(f(x), f'(x), r_1(x), \dots, r_k(x))$, o número de mudanças de sinal na sequência (2.20), no ponto $x \in (a, b)$.

Lema 2.4.1 A sequência (2.20) satisfaz às seguintes propriedades:

- (1) Se $f(c) = 0$, então $f(c-\varepsilon)$ e $f'(c-\varepsilon)$ têm sinais opostos e $f(c+\varepsilon)$ e $f'(c+\varepsilon)$ têm o mesmo sinal para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.
- (2) Se $r_i(c) = 0$ para algum i , $i = 0, 1, \dots, k-1$, então $r_{i-1}(c) \neq 0$, $r_{i+1}(c) \neq 0$, $r_{i-1}(c)$ e $r_{i+1}(c)$ têm sinais opostos, onde $r_{-1}(x) := f(x)$, $r_0(x) := f'(x)$.
- (3) $r_k(x) \neq 0$ em (a, b) .

Demonstração: A primeira condição segue do Lema 2.4.3. A afirmação em (2) é consequência imediata da relação $r_{i-1}(x) = r_i(x)q_i(x) - r_{i+1}(x)$ para $x = c$. Então, obtemos $r_{i-1}(c) = -r_{i+1}(c)$. Se supusermos que um desses dois números é zero, então, pela relação de recorrência, obtemos $r_{i-1}(c) = r_{i-2}(c) = \dots = r_1(c) = f'(c) = f(c) = 0$. Assim, c seria zero múltiplo de $f(x)$, o que leva a uma contradição.

A afirmação em (3) é consequência de termos exigido que $f(x)$ não tenha zeros múltiplos em (a, b) .

Teorema 2.4.4 (Sturm). *Seja $f(x)$ um polinômio algébrico de grau n que não tem zeros múltiplos em (a, b) . Então, o número de zeros de $f(x)$ em (a, b) é igual a $V(a) - V(b)$.*

Demonstração: Vamos acompanhar a variação do número $V(x)$ de mudanças de sinal na sequência de Sturm (2.20) quando x se move de a até b . Desde que todas as funções desta sequência são polinômios algébricos e, portanto, são funções contínuas, então a mudança do número $V(x)$ pode ocorrer somente quando x passa por um zero de uma das funções $f(x), f'(x), r_1(x), \dots, r_{k-1}(x)$. Vamos supor que $c \in (a, b)$ e $f(c) = 0$. Então, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $f(c - \varepsilon)$ e $f'(c - \varepsilon)$ têm sinais opostos e $f(c + \varepsilon)$ e $f'(c + \varepsilon)$ têm o mesmo sinal. Consequentemente, entre $f(x)$ e $f'(x)$ existe uma mudança de sinal antes de c e esta mudança desaparece depois de c . Em outras palavras, o número $V(x)$ diminui de um quando x passa por um zero de $f(x)$.

Vamos observar, agora, o que acontece quando x passa por um zero de $r_i(x)$ para algum $i = 0, \dots, k - 1$. Seja, então, $r_i(c) = 0$. Neste caso, pela propriedade (1) da sequência de Sturm,

$$r_{i-1}(c) \neq 0, r_{i+1}(c) \neq 0 \quad \text{e} \quad r_{i-1}(c)r_{i+1}(c) < 0.$$

Isso significa que $r_{i-1}(x)r_{i+1}(x) < 0$ para todo x em uma vizinhança suficientemente pequena de c e, portanto,

$$V(r_{i-1}(x), r_i(x), r_{i+1}(x)) = 1,$$

para todo x desta vizinhança. Isso mostra que quando x passa por um zero de uma função



intermediária de (2.20) o número das mudanças $V(x)$ não se altera. Assim, mostramos que $V(x)$ diminui de um somente quando x passa por zero de $f(x)$. Consequentemente, o número de mudanças de sinal perdidas quando x percorre o intervalo (a, b) é exatamente igual a número de zeros de $f(x)$ em (a, b) . ■

Vamos considerar agora, a sequência dos polinômios

$$f(x) \equiv p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x) \quad (2.21)$$

que satisfaz as seguintes exigências:

1. Para todo $x \in (a, b)$, se $p_j(x) = 0$, então $p_{j-1}(x)p_{j+1}(x) < 0$.
2. O último polinômio $p_k(x)$ não se anula no intervalo (a, b) , isto é, $p_k(x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Qualquer sequência de polinômios que satisfaz essas condições é chamada sequência de Sturm generalizada.

Dado dois polinômios $f(x) \equiv p_0(x)$ e $p_1(x)$ sem zeros em comum, tal que o grau de $p_1(x)$ é menor ou igual do que o grau de $f(x)$, podemos construir uma sequência de Sturm generalizada através do algoritmo de Euclides

$$\begin{aligned} f(x) &= q_0(x)p_1(x) - p_2(x) \\ \dots &= \dots \\ p_{j-1}(x) &= q_j(x)p_j(x) - p_{j+1}(x) \\ \dots &= \dots \\ p_{k-1}(x) &= q_k(x)p_k(x). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Podemos verificar que realmente essa sequência é de Sturm generalizada. De fato, se $p_j(x) = 0$ (2.22) implica que, neste ponto x , os valores dos polinômios $p_{j-1}(x)$ e $p_{j+1}(x)$ são não nulos e têm sinais opostos. Além disso, se $f(x)$ e $p_1(x)$ não têm zeros em comum, $p_k(x)$ é constante.

Assim, dados $f(x)$ e $p_1(x)$ sem zeros em comum e com $\text{grau}(p_1) \leq \text{grau}(f)$, por $V(f, p_1; x)$ denotaremos o número de mudanças de sinal na sequência de Sturm generalizada, gerada pelos polinômios $f(x)$ e $p_1(x)$ através do algoritmo de Euclides, no ponto x .



Vale a pena mencionar que a demonstração do Teorema 2.4.4 está baseada somente nas propriedades 1. e 2. da sequência de Sturm gerada pelos polinômios $f(x)$ e $f'(x)$. Portanto, podemos usar os mesmos argumentos para demonstrar a seguinte generalização do Teorema 2.4.4.

Teorema 2.4.5 *Sejam $f(x)$ e $p_1(x)$ polinômios reais sem zeros em comum, tal que o grau de $p_1(x)$ menor ou igual do que o grau de $f(x)$. Então,*

$$Z(f; (a, b)) = V(f, p_1; a) - V(f, p_1; b).$$

2.5 Outros Teoremas

2.5.1 Teorema de Rolle

Teorema 2.5.1 *Seja $f(z)$ uma função contínua no segmento $[a, b]$ com $f(a) = f(b) = 0$. Se $f(z)$ é derivável em todos os pontos de (a, b) , então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

2.5.2 Teorema do Valor Médio

Teorema 2.5.2 *Seja $f(z)$ uma função contínua no segmento $[a, b]$. Se $f(z)$ é derivável em todos os pontos de (a, b) , então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



2.5.3 Continuidade dos Zeros com Relação aos Coeficientes

O teorema a seguir é de relevante importância, porém sua demonstração é extremamente complicada, pois utiliza topologia e esta além dos objetivos deste trabalho.

Teorema 2.5.3 *Se os coeficientes de um polinômio $g_n(z; \mu) = a_0(\mu) + a_1(\mu)z + \dots + a_n(\mu)z^n$, $a_n(\mu) \neq 0$, são funções contínuas de μ , os zeros de $g_n(z; \mu)$ também são funções contínuas de μ .*

2.5.4 Regra de Leibniz

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$. A n -ésima derivada do produto $f(x)g(x)$ é dada por

$$\frac{d^n}{dx^n} [f(x)g(x)] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{d^i}{dx^i} (f(x)) \right] \left[\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} [g(x)] \right]. \quad (2.23)$$



Capítulo 3

Teoria de Estabilidade

Temos por objetivo principal neste capítulo, obter um critério para que os zeros de dois polinômios de mesmo grau se entrelacem. Esse objetivo será atingido através de condições necessárias e suficientes para que os zeros de um polinômio algébrico real se localizem no plano complexo à esquerda do eixo imaginário. O último critério, caracteriza o que conhecemos por estabilidade, que é de grande importância na física, mais especificamente em sistemas elétricos e mecânicos.

Na Seção 3.1, introduziremos e estudaremos os índices de Cauchy de uma função racional real $\psi(x)$. O Teorema 3.1.1 mostra que o número de zeros de um polinômio $p(x)$ em um intervalo (a, b) é igual ao índice de Cauchy de uma função racional associada ao polinômio $p(x)$. Por outro lado, o número dos zeros simples de $p(x)$ é fornecido pelo teorema de Sturm em termos das variações da correspondente sequência de Sturm. Com isso, temos a relação entre os índices de Cauchy e o número de variações.

Esta variação é uma das ferramentas principais na demonstração do teorema de Routh, que é dada na Seção 3.2. O teorema de Routh tem, por seu lado, como consequência imediata o critério de Routh, que fornece a primeira condição necessária e suficiente para que todos os zeros de um polinômio tenham parte real negativa. Na Seção 3.3, nosso interesse é mostrar o teorema de Hurwitz, que é o segundo critério, equivalente ao de Routh, para que um polinômio seja estável.

Como consequência do critério de Hurwitz, forneceremos uma condição necessária e suficiente para que os zeros de dois polinômios sejam reais, negativos e se entrelacem. A fonte principal do nosso estudo neste capítulo é o livro de Gantmacher [10].



3.1 Índices de Cauchy

Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios algébricos reais de grau m e n , respectivamente. Estudaremos os índices de Cauchy de $\psi(x) = f(x)/g(x)$. Para introduzi-los precisaremos da noção de salto de uma função racional, dada na Definição 2.2.5.

Definição 3.1.1 *O índice de Cauchy da função racional real $\psi(x)$ entre os limites a e b é a diferença entre o número de saltos positivos $N_+(\psi; (a, b))$ e o número de saltos negativo $N_-(\psi; (a, b))$ de $\psi(x)$ em (a, b) , ou seja,*

$$I_a^b \psi(x) = N_+(\psi; (a, b)) - N_-(\psi; (a, b)),$$

com $a, b \in \mathbb{R}$, ou $a = -\infty$ e $b = +\infty$.

O sinal de um número A é definido naturalmente por

$$\text{sign}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } A > 0; \\ 0 & \text{se } A = 0; \\ -1 & \text{se } A < 0. \end{cases}$$

Consideremos que o grau do polinômio $f(x)$ é maior ou igual ao do polinômio $g(x)$. Logo,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Assim, o grau de $r(x)$ é menor do que o grau de $g(x)$. Quando $m < n$, o polinômio $q(x)$ é identicamente nulo.

Logo,

$$\psi(x) := q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Suponhamos que os polinômios $f(x)$ e $g(x)$ não tenham zeros em comum.

Sejam $x_1, \dots, x_p$ os zeros reais simples de $g(x)$. Logo, pelo teorema fundamental da álgebra, temos que $g(x) = g_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_p)g^*(x)$, onde o grau de $g^*(x)$ é $n - p$ e tem somente zeros não-reais. Aplicando os Teoremas 2.3.6 e 2.3.7 em $\psi(x)$, segue que

$$\psi(x) = q(x) + \sum_{k=1}^p \frac{A_k}{(x - x_k)}, \quad p < n. \quad (3.1)$$

Lema 3.1.1 *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ polinômios algébricos reais de graus m e n , respectivamente, com $m \geq n$. Então,*

$$I_a^b \frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{a < x_k < b} \text{ sinal } (A_k), \text{ com } A_k \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Aplicando a Definição 3.1.1 e (3.1), temos que

$$I_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) = N_+ \left(\frac{r}{g}; (-\infty, +\infty) \right) - N_- \left(\frac{r}{g}; (-\infty, +\infty) \right),$$

pois, $q(x)$ não tem saltos positivos e negativos.

Por outro lado, é claro que a função $A_k/(x - x_k)$ tem salto positivo em x_k se $A_k > 0$ e salto negativo se $A_k < 0$. Logo,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) = \sum_{A_k > 0} \text{ sinal } (A_k) - \sum_{A_k < 0} \text{ sinal } (A_k).$$

Seja $\beta = \max \{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_p|\} + 1$.

Pelo Teorema 2.4.2, podemos afirmar que existe um círculo centrado na origem e de raio β , tal que $r(x)/g(x)$ não tem saltos fora desse círculo. Consequentemente, para $a = -\beta$ e $b = \beta$, temos que

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left(\frac{r(a)}{g(a)} \right) &= \text{sinal} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{r(x)}{g(x)} \right) \\ \text{sinal} \left(\frac{r(b)}{g(b)} \right) &= \text{sinal} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{g(x)} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Com isso, podemos limitar o intervalo de $(-\infty, +\infty)$ para (a, b) , de tal forma que contenha todos os pontos $x_1, x_2, \dots, x_p$. Portanto,

$$I_a^b \psi(x) = \sum_{a < x_k < b} \text{ sinal } (A_k), \text{ com } a < b. \quad \blacksquare$$

Corolário 3.1.1 *Seja $p(x) = a_0(x - \alpha_1)^{n_1}(x - \alpha_2)^{n_2} \dots (x - \alpha_m)^{n_m}$, com $\alpha_i \neq \alpha_k$, $i, k = 1, 2, \dots, m$, um polinômio algébrico real. Então,*

$$I_a^b \frac{p'(x)}{p(x)} = N_+ \left(\frac{p'}{p}; (a, b) \right) - N_- \left(\frac{p'}{p}; (a, b) \right).$$

Demonstração: A derivada de $p(x)$ é dada por

$$p'(x) = a_0 \left\{ \sum_{k=1}^m n_k (x - \alpha_1)^{n_1} \dots (x - \alpha_k)^{n_k-1} \dots (x - \alpha_m)^{n_m} \right\}.$$

Dividindo $p'(x)$ por $p(x)$, obtemos

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^m \frac{n_k}{(x - \alpha_k)}.$$

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ os zeros reais com multiplicidades $n_1, n_2, \dots, n_p$, respectivamente, de $p(x)$. Pelo Teorema 2.3.7, temos que

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = r(x) + \sum_{k=1}^p \frac{n_k}{(x - \alpha_k)},$$

onde $r(x)$ é uma função racional real sem saltos reais.

Pelo mesmo raciocínio de (3.2), podemos considerar o intervalo (a, b) finito de tal forma que contenha os pontos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$. Logo,

$$I_a^b \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{A_k > 0} \text{ sinal } (A_k) - \sum_{A_k < 0} \text{ sinal } (A_k).$$

Portanto, é natural que

$$\sum_{A_k > 0} \text{ sinal } (A_k) = N_+ \left(\frac{p'}{p}; (a, b) \right)$$

e

$$\sum_{A_k < 0} \text{ sinal } (A_k) = N_- \left(\frac{p'}{p}; (a, b) \right).$$

Assim,

$$I_a^b \frac{p'(x)}{p(x)} = N_+ \left(\frac{p'}{p}; (a, b) \right) - N_- \left(\frac{p'}{p}; (a, b) \right). \quad \blacksquare \quad (3.3)$$

Trataremos agora de um caso mais geral. Consideremos os polinômios algébricos reais $g_n(x)$ e $g_{n-1}(x)$ que geram a sequência de Sturm quando aplicamos o algoritmo de Euclides, isto é, $g_n(x), g_{n-1}(x), r_2(x), \dots, r_k(x)$. Assim, o Teorema 2.4.5 implica que $V(g_n, g_{n-1}; a) - V(g_n, g_{n-1}; b)$ é igual ao número de zeros reais simples do polinômio $g_n(x)$ em (a, b) .

Teorema 3.1.1 *Sejam*

$$g_n(x) = a_0(x - \alpha_1)^{n_1} \dots (x - \alpha_m)^{n_m} (x - \alpha_{m+1})^{n_{m+1}} \dots (x - \alpha_s)^{n_s},$$

onde $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ são seus zeros reais e $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_s$ os zeros não-reais, e $g_{n-1}(x)$ polinômios algébricos reais satisfazendo às considerações expostas acima. Então,

$$I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = Z(g_n; (a, b)),$$

onde $Z(g_n; (a, b))$ é igual ao número de zeros reais, simples e distintos de $g_n(x)$ no intervalo (a, b) .

Demonstração: Pelos Teoremas 2.3.6 e 2.3.7 podemos decompor qualquer função racional real $g_{n-1}(x)/g_n(x)$ em somas de frações simples, ou seja, em uma somatória de frações com saltos reais e em outra somatória sem saltos reais da seguinte forma:

$$\frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = r(x) + \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{A_{i,1}}{x - \alpha_i} + \dots + \frac{A_{i,n_i}}{(x - \alpha_i)^{n_i}} \right\}, \quad (3.4)$$

onde α_i e A_{i,n_i} são números reais, $A_{i,n_i} \neq 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$. A função racional real $r(x)$ não tem saltos reais.

Seja x pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de α_i . Para tais x temos

$$\begin{cases} (x - \alpha_i)^{n_i} > 0, & \text{se } x > \alpha_i, \\ \text{sinal}((x - \alpha_i)^{n_i}) = \text{sinal}((-1)^{n_i}), & \text{se } x < \alpha_i. \end{cases} \quad (3.5)$$

Logo, multiplicando (3.4) por $(x - \alpha_i)^{n_i}$, obtemos

$$(x - \alpha_i)^{n_i} \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = \sum_{i=1}^m \{ A_{i,1}(x - \alpha_i)^{n_i-1} + \dots + A_{i,n_i-1}(x - \alpha_i) + A_{i,n_i} \} + (x - \alpha_i)^{n_i} r(x).$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \alpha_i} (x - \alpha_i)^{n_i} \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = A_{i,n_i}. \quad (3.6)$$

Portanto, quando n_i for par, temos que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_i \\ x < \alpha_i}} \frac{A_{i,n_i}}{(x - \alpha_i)^{n_i}} = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_i \\ x > \alpha_i}} \frac{A_{i,n_i}}{(x - \alpha_i)^{n_i}} = +\infty,$$

e, por essa razão, $A_{i,n_i}/(x - \alpha_i)^{n_i}$ não terá saltos positivos nem negativos. Logo, de (3.5) e (3.6), concluímos que

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = \sum_{n_i: \text{impar}} \text{sin}al(A_{i,n_i}).$$

Assim, se os zeros reais de $g(x)$ pertenceram ao intervalo (a, b) , então

$$I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = \sum_{\substack{a < \alpha_i < b \\ n_i: \text{impar}}} \text{sin}al(A_{i,n_i}),$$

ou, equivalentemente,

$$I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = \sum_{A_{i,n_i} > 0} \text{sin}al(A_{i,n_i}) - \sum_{A_{i,n_i} < 0} \text{sin}al(A_{i,n_i}).$$

É importante ressaltar que teremos salto positivo ou negativo em $A_{i,n_i}/(x - \alpha_i)^{n_i}$ se, e somente se, x for um zero de $g_n(x)$ de multiplicidade ímpar. Assim, $I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)}$ é igual ao número de zeros reais simples de $g_n(x)$ em (a, b) .

Portanto,

$$I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = Z(g_n; (a, b)). \quad \blacksquare \quad (3.7)$$

Corolário 3.1.2

$$I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = V(g_n, g_{n-1}; a) - V(g_n, g_{n-1}; b).$$

Demonstração: Um outro método para se calcular o número de zeros reais simples de $g_n(x)$ em (a, b) é o teorema clássico de Sturm. Sejam $g_n(x), g_{n-1}(x), r_2(x), \dots, r_k(x)$ a sequência de Sturm gerada por $g_n(x)$ e $g_{n-1}(x)$, quando aplicamos o algoritmo de Euclides. Assim, pelo Teorema 2.4.5, temos que

$$V(g_n, g_{n-1}; a) = V(g_n(a), g_{n-1}(a), r_2(a), \dots, r_k(a))$$

e

$$V(g_n, g_{n-1}; b) = V(g_n(b), g_{n-1}(b), r_2(b), \dots, r_k(b)).$$

Logo,

$$V(g_n, g_{n-1}; a) - V(g_n, g_{n-1}; b) \quad (3.8)$$

é o número de zeros reais simples de $g_n(x)$ no segmento (a, b) .



Portanto, pelo Teorema 3.1.1 e por (3.8), temos que

$$I_a^b \frac{g_{n-1}(x)}{g_n(x)} = V(g_n, g_{n-1}; a) - V(g_n, g_{n-1}; b). \quad \blacksquare$$

3.2 Algoritmo de Routh

Definição 3.2.1 *Um polinômio real $f(z)$ cujos zeros têm a parte real negativa é denominado de Polinômio de Hurwitz.*

Os polinômios de Hurwitz também são denominados de polinômios estáveis.

Em 1875 o matemático britânico Routh, usando o Teorema 2.4.4 e a teoria dos índices de Cauchy, elaborou um algoritmo para se determinar o número de zeros à direita do eixo imaginário ($\operatorname{Re}(z) > 0$) de um polinômio algébrico com coeficientes reais. Em particular, o algoritmo fornece critérios para que um polinômio real seja polinômio de Hurwitz.

Seja $f(z) := a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$, com $a_0 \neq 0$, um polinômio algébrico de grau exatamente n , com coeficientes reais. Pelo teorema fundamental da álgebra

$$f(z) = a_0 \prod_{j=1}^n (z - z_j).$$

Trataremos, primeiramente, do caso em que $f(z)$ não tem zeros no eixo imaginário, isto é, $f(z) \neq 0, \forall z = iw : w \in \mathbb{R}$.

Sejam $r \in \mathbb{R}$ e

$$\mathfrak{S} := \{z = \rho e^{i\varphi} : \rho \in (0, r); \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)\},$$

um semi-disco do plano complexo. Para r suficientemente grande, todos os zeros do polinômio $f(z)$ com parte real positiva pertencerão a $\mathfrak{S}$.

Denotaremos por $Z(f; \operatorname{Im}(z) > 0)$ o número de zeros do polinômio $f(z)$ à direita do eixo imaginário, e por $\Delta_{\partial\mathfrak{S}}$ a variação do argumento ao longo do contorno $\partial\mathfrak{S}$ de $\mathfrak{S}$.

Lema 3.2.1 Se $Z(f; \text{Im}(z) > 0) = k$, então $\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg\{f(iw)\} = n - 2k$.

Demonstração: Suponhamos $f(z)$ analítica em $\mathfrak{S}$. Assim, pelo Corolário 2.17, segue

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\mathfrak{S}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = k, \quad (3.9)$$

onde k é o número de zeros de $f(z)$ em $\mathfrak{S}$. Por outro lado, a forma polar de $f(z)$ é dada por $f(z) = |f(z)|\{\cos\theta + i\sin\theta\}$. Aplicando o logaritmo em $f(z)$, segue que

$$\begin{aligned} \ln\{f(z)\} &= \ln\{|f(z)|e^{i\theta}\} \\ &= \ln\{|f(z)|\} + i\theta \ln e = \ln\{|f(z)|\} + i\theta \\ &= \ln\{|f(z)|\} + i \arg\{f(z)\}. \end{aligned}$$

Como o valor de $\ln\{|f(z)|\}$ é real então $\Delta_{\partial\mathfrak{S}} \ln\{|f(z)|\} = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \Delta_{\partial\mathfrak{S}} \ln\{f(z)\} &= \Delta_{\partial\mathfrak{S}} \ln\{|f(z)|\} + i\Delta_{\partial\mathfrak{S}} \arg\{f(z)\} \\ &= i\Delta_{\partial\mathfrak{S}} \arg\{f(z)\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Sabemos que $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d}{dz} \ln\{f(z)\}$. Integrando esta igualdade em z , obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathfrak{S}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \int_{\partial\mathfrak{S}} \frac{d}{dz} \ln\{f(z)\} dz \\ &= \Delta_{\partial\mathfrak{S}} \ln\{f(z)\}. \end{aligned}$$

Substituindo (3.10) na igualdade acima, obtemos

$$\int_{\partial\mathfrak{S}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = i\Delta_{\partial\mathfrak{S}} \arg\{f(z)\}. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.11) em (3.9), é imediato que $\Delta_{\partial\mathfrak{S}} \arg\{f(z)\} = 2k\pi$.

A variação do $\arg\{f(z)\}$ ao longo do semi-círculo $\partial\mathfrak{S}$, quando $r \rightarrow \infty$, é determinado pela variação do argumento do elemento de maior grau de $f(z)$, isto é dado por $\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg\{f(z)\} = n\pi$.

Portanto, a variação ao longo do eixo imaginário, quando $r \rightarrow \infty$, é dado por

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg\{f(iw)\} = n - 2k. \quad \blacksquare \quad (3.12)$$

Substituindo $z = iw$ no polinômio $f(z)$, podemos escrever $f(iw) = u(w) + iv(w)$, como veremos a seguir. Fazendo $n = 1, 2, \dots$, temos

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow f(iw) = +b_0 + i\{a_0w\} \\ n = 2 &\Rightarrow f(iw) = -a_0w^2 + a_1 + i\{b_0w\} \\ n = 3 &\Rightarrow f(iw) = -b_0w^2 + b_1 + i\{-a_0w^3 + a_1w\} \\ n = 4 &\Rightarrow f(iw) = +a_0w^4 - a_1w^2 + a_2 + i\{-b_0w^3 + b_1\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se n é par, então

$$\begin{aligned} u(w) &= (-1)^{\frac{n}{2}} \{a_0w^n - a_1w^{n-2} + a_2w^{n-4} - \dots\} \\ v(w) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1} \{b_0w^{n-1} - b_1w^{n-3} + b_2w^{n-5} - \dots\}. \end{aligned}$$

e, n ímpar,

$$\begin{aligned} u(w) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{b_0w^{n-1} - b_1w^{n-3} + b_2w^{n-5} - \dots\}, \\ v(w) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \{a_0w^n - a_1w^{n-2} + a_2w^{n-4} - \dots\}. \end{aligned}$$

Assim, $u(w) = \operatorname{Re}\{f(iw)\}$ e $v(w) = \operatorname{Im}\{f(iw)\}$, isto é,

$$f(iw) = \operatorname{Re}\{f(iw)\} + i \operatorname{Im}\{f(iw)\}. \quad (3.13)$$

Lema 3.2.2 Dado um polinômio algébrico real de grau n

$$f(z) = a_0z^n + b_0z^{n-1} + a_1z^{n-2} + b_1z^{n-3} + \dots, \quad a_0 \neq 0,$$

então,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = \frac{b_0z^{n-1} + b_1z^{n-3} + \dots}{a_0z^n + a_1z^{n-2} + \dots} = n - 2k.$$

Demonstração: Escrevendo $f(iw)$ na forma polar, temos que $f(iw) = |f(iw)| e^{i\theta}$, com

$$\theta = \arg\{f(iw)\} \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\theta = \frac{v(w)}{u(w)} \\ \operatorname{cotg}\theta = \frac{u(w)}{v(w)} \end{cases}.$$

Quando n é par, o grau do polinômio $u(w)$ é maior do que o grau do polinômio $v(w)$. Logo, $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{v(w)}{u(w)} = 0$. Por outro lado, se n é ímpar, segue que $\lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u(w)}{v(w)} = 0$, pois o

grau de $u(w)$ é menor do que o grau de $v(w)$.

Dáí,

$$\arg\{f(iw)\} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{v(w)}{u(w)}, & \text{se } \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{v(w)}{u(w)} = 0, \\ \operatorname{arccotg} \frac{u(w)}{v(w)}, & \text{se } \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u(w)}{v(w)} = 0. \end{cases}$$

Assim, mostramos que

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg\{f(iw)\} = \begin{cases} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{v(w)}{u(w)}, \\ \Delta_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arccotg} \frac{u(w)}{v(w)}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Sabemos que os polinômios $v(w)$ e $u(w)$ não têm zeros em comum. Logo, para todo zero de $u(w)$, a fração $v(w)/u(w)$ terá um salto positivo ou negativo. Sejam a_i esses zeros. Assim,

$$\lim_{w \rightarrow a_i^-} \frac{v(w)}{u(w)} = -\infty \iff \lim_{w \rightarrow a_i^-} \operatorname{arctg} \frac{v(w)}{u(w)} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{w \rightarrow a_i^+} \frac{v(w)}{u(w)} = +\infty \iff \lim_{w \rightarrow a_i^+} \operatorname{arctg} \frac{v(w)}{u(w)} = -\frac{\pi}{2}.$$

Portanto, para cada a_i , a variação de $-\pi/2$ até $\pi/2$ é π . Logo

$$\Delta_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{v(w)}{u(w)} = \pi I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)}. \quad (3.15)$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{v(w)}{u(w)} = n - 2k. \quad (3.16)$$

Logo, de (3.15) e (3.16), temos que

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = n - 2k. \quad (3.17)$$

Quando n for ímpar o raciocínio é análogo, bastando considerar $\operatorname{arccotg} \frac{u(w)}{v(w)}$

e, então, obtemos

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg\{f(iw)\} = \begin{cases} I_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(w)}{v(w)}, & \text{se } \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{u(w)}{v(w)} = 0, \\ -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)}, & \text{se } \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{v(w)}{u(w)} = 0. \end{cases}$$

Portanto, mostramos que para qualquer n par ou ímpar

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = \frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = n - 2k. \quad \blacksquare \quad (3.18)$$

O índice (3.18) também pode ser obtido através do teorema de Sturm. Apesar desse resultado ser análogo ao anterior, ressaltamos sua extrema importância pois faz uso dos coeficientes dos polinômios gerados pelo algoritmo de Euclides.

Lema 3.2.3 *Seja $f(z)$ um polinômio algébrico real que satisfaz (3.13). Então,*

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = V(u, v; -\infty) - V(u, v; +\infty).$$

Demonstração: Os polinômios $u(w)$ e $v(w)$ satisfazem às condições da sequência de Sturm. Pelo Teorema 2.4.5, temos que $V(u, v; -\infty) - V(u, v; +\infty) = n - 2k$. Por outro lado, por (3.18), segue que

$$\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = V(u, v; -\infty) - V(u, v; +\infty). \quad \blacksquare$$

O Teorema 2.4.5 implica imediatamente no teorema de Routh, como veremos a seguir.

Sejam $f_1(w) := u(w)$ e $f_2(w) := v(w)$. Logo,

$$\begin{aligned} f_1(w) &= a_0 w^n - a_1 w^{n-2} + \dots, \\ f_2(w) &= b_0 w^{n-1} - b_1 w^{n-3} + \dots \end{aligned}$$

Pelo algoritmo de Euclides, segue que

$$f_1(w) = q_2(w)f_2(w) - f_3(w) \Rightarrow f_3(w) = q_2(w)f_2(w) - f_1(w)$$

$$f_2(w) = q_3(w)f_3(w) - f_4(w) \Rightarrow f_4(w) = q_3(w)f_3(w) - f_2(w)$$

$\vdots$

$$f_{n-2}(w) = q_{n-1}(w)f_{n-1}(w) - f_{n+1}(w) \Rightarrow f_{n+1}(w) = q_{n-1}(w)f_{n-1}(w) - f_n(w).$$

Daí,

$$\begin{aligned} f_3(w) &= \frac{a_0}{b_0} w f_2(w) - f_1(w) \\ &= c_0 w^{n-2} - c_1 w^{n-4} + c_2 w^{n-6} - \dots, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0} b_1 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0}, \\ c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0} b_2 = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{b_0}, \dots \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} f_4(w) &= \frac{b_0}{c_0} w f_3(w) - f_2(w) \\ &= d_0 w^{n-3} - d_1 w^{n-5} + d_2 w^{n-7} - \dots \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde

$$\begin{aligned} d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0} c_1 = \frac{c_0 b_1 - b_0 c_1}{c_0}, \\ d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0} c_2 = \frac{c_0 b_2 - b_0 c_2}{c_0}, \dots \end{aligned}$$

Os coeficientes dos polinômios restantes, $f_5(w), f_6(w), \dots, f_{n+1}(w)$, são obtidos pelo mesmo raciocínio. Cada um dos polinômios

$$f_1(w), f_2(w), f_3(w), \dots, f_k(w), \dots, f_{n+1}(w) \quad (3.21)$$

é uma função par ou ímpar e dois polinômios adjacentes sempre têm paridades opostas. Portanto, (3.21) é uma sequência de Sturm.

Definição 3.2.2 *Chama-se tabela de Routh a tabela*

$$T_r = \begin{cases} a_0, a_1, a_2, \dots \\ b_0, b_1, b_2, \dots \\ c_0, c_1, c_2, \dots \\ d_0, d_1, d_2, \dots \\ \dots \end{cases} \quad (3.22)$$

formada pelos coeficientes dos polinômios da sequência (3.21) acima.

As equações (3.19) e (3.20) mostram que toda linha deste esquema é determinada pelas duas linhas precedentes, obedecendo o algoritmo de Euclides. O caso



regular é obviamente caracterizado pelo fato de que a aplicação repetida desse processo nunca gera zeros na primeira coluna, ou seja, a sequência

$$T_{r_1} = \{a_0, b_0, c_0, d_0, f_0, \dots\},$$

formada pela primeira coluna da tabela (3.22), não conterá nenhum elemento nulo. É importante salientar que os polinômios $f_1(w)$ e $f_2(w)$ têm como maior divisor comum $f_{n+1}(w) = cte \neq 0$. Portanto, os polinômios $f_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n+1$, nunca se anulam simultaneamente. Assim,

$$f(iw) = f_1(w) + if_2(w) \neq 0, \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$

Vamos resumir os resultados já apresentados:

- a) Pelo Lema 3.2.1, temos $Z(f; \text{Im}(z) > 0) = k \Rightarrow \frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \arg\{f(iw)\} = n - 2k$.
- b) Pelo Lema 3.2.2, $I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = n - 2k$.
- c) Pelo Lema 3.2.3, $\frac{1}{\pi} \Delta_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = V(u, v; -\infty) - V(u, v; +\infty)$.

Teorema 3.2.1 (Routh). *O número de zeros do polinômio real $f(z)$ localizados do lado direito do plano complexo ($\text{Re}(z) > 0$) é igual ao número de variações de sinal da primeira coluna da tabela de Routh, isto é,*

$$Z(f; \text{Im}(z) > 0) = V(T_{r_1}; +\infty).$$

Demonstração: Seja $V(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots) := V(a_0, b_0, c_0, d_0, \dots)$, onde $a_0, b_0, c_0, d_0, \dots$, são os elementos da primeira coluna da tabela de Routh gerados por $f_1(w)$ e $f_2(w)$. Consideremos o k -ésimo elemento de (3.21), dado por

$$f_k(w) = \alpha_k w^{n+1-k} + \dots$$

Daí,

$$\lim_{w \rightarrow +\infty} \frac{f_k(w)}{w^{n+1-k}} = \alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots, n+1$$

e, assim, $f_k(+\infty) = \text{sinal}(\alpha_k)$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. Logo,

$$V(f_1, f_2; +\infty) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots). \quad (3.23)$$



Por outro lado, quando $w \rightarrow -\infty$ temos que

$$\lim_{w \rightarrow -\infty} \frac{f_k(w)}{w^{n+1-k}} = (-1)^{n+1-k} \alpha_k$$

e, assim, $f_k(-\infty) = \text{sinal} [(-1)^{n+1-k} \alpha_k]$, $k = 1, 2, \dots, n+1$. Então,

$$V(f_1, f_2; -\infty) = ((-1)^n \alpha_1, (-1)^{n-1} \alpha_2, (-1)^{n-2} \alpha_3, \dots, (-1)^0 \alpha_{n+1}).$$

Pelo Teorema 2.4.5, temos que

$$-V(f_1, f_2; -\infty) + V(f_1, f_2; +\infty) = -n + 2k. \quad (3.24)$$

Sendo o polinômio $f(z)$ de grau n , o número máximo de mudanças de sinal na primeira coluna da tabela T_{r_1} é n , ou seja,

$$V(T_{r_1}; -\infty) + V(T_{r_1}; +\infty) = n. \quad (3.25)$$

Somando (3.24) e (3.25), obtemos $V(f_1, f_2; +\infty) = V(T_{r_1}; +\infty) = k$.

Portanto,

$$Z(f; \text{Im}(z) > 0) = V(T_{r_1}; +\infty) = k. \quad \blacksquare$$

3.2.1 Critério de Routh

Corolário 3.2.1 *Todos os zeros do polinômio $f(z)$ têm parte real negativa se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh são diferentes de zero e têm o mesmo sinal.*

Demonstração: O caso de estabilidade é caracterizado pelo fato de todos os zeros do polinômio $f(z)$ se localizarem do lado esquerdo do eixo imaginário. Assim, k tem que ser nulo, isto é, $k = 0$. Logo, $V(T_{r_1}; +\infty) = 0$.

Portanto, $V(T_{r_1}; +\infty) = 0$ se, e somente se, todos os elementos da primeira coluna da tabela de Routh são não nulos e tem o mesmo sinal.

Portanto, $Z(f; \text{Im}(z) < 0) = n. \quad \blacksquare$

A análise anterior levou em conta que $f(z)$ não tem zeros no eixo imaginário.

Um caso mais geral será aquele em que o polinômio $f(z)$ tem k zeros do lado direito do plano complexo ($\operatorname{Re}(z) > 0$) e s zeros no eixo imaginário, isto é,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{b_0 x^{n-1} - b_1 x^{n-3} + \dots}{a_0 x^n - a_1 x^{n-2} + \dots} = n - 2k - s. \quad (3.26)$$

As observações a seguir são consequências imediatas dos lemas, corolários e teoremas anteriores. Como $f(z)$ tem s zeros no eixo imaginário, consideremos o polinômio real $d(z) = z^s + \dots$ de grau s , com s zeros no eixo imaginário. Assim, podemos escrever $f(z) = d(z)f^*(z)$, onde o polinômio $f^*(z)$ é de grau $n^* = n - s$ e não tem zeros no eixo imaginário. Sem perda de generalidade, consideremos s par (para s ímpar, a análise é análoga). Logo,

$$f(iw) = u(w) + iv(w) = d(iw)\{u^*(w) + iv^*(w)\}.$$

Sendo $d(iw)$ um polinômio real em w , segue que

$$\frac{v(w)}{u(w)} = \frac{d(iw)v^*(w)}{d(iw)u^*(w)} = \frac{v^*(w)}{u^*(w)}.$$

Como s é par então n e n^* têm a mesma paridade, conclui-se que

$$\frac{v(w)}{u(w)} = \frac{v^*(w)}{u^*(w)}.$$

Portanto,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v(w)}{u(w)} = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{v^*(w)}{u^*(w)} = n^* - 2k = n - 2k - s.$$

Não será abordado, neste trabalho, o caso singular, que é caracterizado pela ocorrência de zeros na primeira coluna da tabela de Routh (detalhes [10, pag. 181]).

3.3 Teorema Routh-Hurwitz

A técnica estudada nesta seção foi enunciada em 1895 por A. Hurwitz e está fundamentada nos trabalhos de Hermite. Hurwitz forneceu condições equivalentes às de Routh para que todos os zeros de um polinômio algébrico real tenham a parte real negativa. Como observaremos, o critério de Hurwitz pode ser obtido através do resultado de Routh. Além disso, ele tem vantagens sobre o de Routh pois não trabalha com divisões de polinômios. As condições de Hurwitz são dadas em termos de sequência



de determinantes positivos formados pelos coeficientes do polinômio $f(z)$ e, portanto, são muito mais claros. Devido às contribuições essenciais de Routh e Hurwitz, essas condições são, às vezes, chamadas condições de Routh-Hurwitz.

Seja

$$f(z) := a_0 z^n + b_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + b_1 z^{n-3} + \cdots + a_{m-1} z + b_{m-1}, \quad a_0 \neq 0 \quad (3.27)$$

um polinômio com coeficientes reais de grau $n = 2m + 1$.

Definição 3.3.1 *A matriz*

$$H(f) := \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-2} & a_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} \end{pmatrix}$$

onde $a_k = 0$ para $k > \frac{n}{2}$ e $b_k = 0$ para $k > \frac{n-1}{2}$, é denominada matriz de Hurwitz de grau $2m+1$ associada ao polinômio $f(z)$.

Mostraremos, agora, a relação entre os elementos da tabela de Routh e os elementos da matriz de Hurwitz. A tabela de Routh foi obtida através dos coeficientes das divisões dos polinômios gerados pelo algoritmo de Euclides. Por outro lado, Hurwitz descobriu que esses coeficientes também poderiam ser obtidos por meio do escalonamento de Gauss sem pivotamento. Veremos, a seguir, que os menores principais da matriz de Routh são positivos se, e somente se, os menores principais da matriz de Hurwitz são positivos.

Definição 3.3.2 *Para quaisquer dois conjuntos de índices $1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq n$, $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$, denotaremos por*

$$A \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_p \\ i_1 & \cdots & i_p \end{pmatrix}$$

o determinante da submatriz de A composta pelas linhas $k_1, \dots, k_p$ e colunas $i_1, \dots, i_p$,

isto é,

$$A \begin{pmatrix} k_1 & \cdots & k_p \\ i_1 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{k_1, i_1} & a_{k_1, i_2} & \cdots & a_{k_1, i_p} \\ a_{k_2, i_1} & a_{k_2, i_2} & \cdots & a_{k_2, i_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k_p, i_1} & a_{k_p, i_2} & \cdots & a_{k_p, i_p} \end{vmatrix}.$$

Definição 3.3.3 Duas matrizes $A_{n \times n} = (a_{ij})$ e $B_{n \times n} = (b_{ij})$ ambas de ordem n , são σ -equivalentes se, para todo $p \leq n$ e para quaisquer índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$,

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

O processo de Gauss, também chamado escalonamento sem pivotamento, transforma a matriz A em uma matriz B que é σ -equivalente a A .

Seja $A^{(1)}$ a matriz obtida de A , depois do primeiro passo do escalonamento. Temos $A^{(1)} = (a_{i,j}^{(1)})$ onde

$$\begin{aligned} a_{1,j}^{(1)} &= a_{1,j} \\ a_{k,j}^{(1)} &= a_{k,j} - \frac{a_{k,1}}{a_{1,1}} a_{1,j}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

caso $a_{1,1}$ seja não-nulo. Se $p = 1$, então $A^{(1)}(i_1) = a_{1,i_1}$ e $A^{(1)}(i_1) = a_{1,i_1}$. Portanto, (3.28) vale para $p = 1$. Desde que, através das fórmulas (3.29) não muda o valor de qualquer determinate de uma submatriz de A , composta pelas primeiras p linhas e quaisquer p colunas, então (3.28) é satisfeito para todo $2 \leq p \leq n$.

Suponhamos que $A^{(2)}, \dots, A^{(q-1)}$, obtidas por escalonamento sem pivotamento, são σ -equivalentes a A .

Seja $A^{(q)}$ a matriz obtida de A depois do q -ésimo passo do escalonamento. Temos $A^{(q)} = (a_{k,j}^{(q)})$, onde

$$a_{k,j}^{(q)} = a_{k,j}^{(q-1)}, \text{ para } k = 1, \dots, q, j = 1, \dots, n \quad (3.30)$$

$$a_{k,j}^{(q)} = a_{k,j}^{(q-1)} - \frac{a_{k,q}^{(q-1)}}{a_{q,q}^{(q-1)}} a_{q,j}^{(q-1)}, \text{ } k = q+1, \dots, n, j = 1, \dots, n. \quad (3.31)$$

As igualdades (3.30) implicam imediatamente que

$$A^{(q)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = A^{(q-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}, \text{ para } p \leq q.$$

Pelo fato de $A^{(q-1)}$ ser σ -equivalente a A , segue que

$$A^{(q)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & q \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_q \end{pmatrix}.$$

As igualdades (3.31) mostram que as transformações efetuadas são equivalentes, isto é, não mudam os valores dos determinantes. Portanto,

$$A^{(q)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = A^{(q-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix}, \text{ para } p > q.$$

Consequentemente,

$$A^{(q)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix},$$

para todo $1 \leq p \leq n$ e para qualquer sequência de índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$.

Essas considerações mostram que, em geral, multiplicando a k -ésima linha da matriz A por um número e acrescentando o produto à linha com índice s , onde $s > k$, obteremos uma matriz que é σ -equivalente à matriz A .

O objetivo, agora, é escalonar a matriz $H(f)$ até se obter uma matriz triangular superior.

Para se anular o elemento a_0 da segunda linha de $H(f)$, multiplica-se a primeira linha por $-a_0/b_0$ e soma-se à segunda linha, isto é, $c_{k-1} = a_{k-1} - \frac{a_0}{b_0}b_k$, $k = 1, 2, \dots, m-1$. Pela estrutura da matriz $H(f)$, essa operação pode ser efetuada nas linhas $4, 6, \dots, 2m$, assim

$$H^{(m)}(f) = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-3} & c_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-3} & c_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{m-3} & c_{m-2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{m-3} & c_{m-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{m-2} & b_{m-1} \end{pmatrix}$$

Para se anular o elemento b_0 da terceira linha de $H^{(m)}(f)$ basta multiplicar a segunda linha por $-b_0/c_0$ e soma-la à terceira linha, isto é, $d_{k-1} = b_{k-1} - \frac{b_0}{c_0}c_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, m-2$. Essa operação pode ser realizada nas linhas $5, 7, \dots, 2m+1$. Continuando com esse processo, obteremos uma matriz triangular superior que

denotaremos por

$$T_r(f) := \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & d_0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & e_0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \quad (\text{matriz de Routh}).$$

A matriz $T_r(f)$ também pode ser obtida da tabela de Routh. Primeiro eliminamos a primeira linha da tabela de Routh. Em seguida, cada linha deve ser deslocada uma posição para a direita até o primeiro elemento ficar na diagonal principal, completando com zeros os elementos abaixo da diagonal da tabela T_r . Como estamos considerando o caso regular, isso implica que todos elementos da diagonal principal da matriz $T_r(f)$ são não-nulos.

De acordo com a Definição 3.32 e com o raciocínio acima, obtemos

$$H(f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix} = T_r(f) \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p \end{pmatrix},$$

para quaisquer índices $i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$ e para todo p , $1 \leq p \leq n$. Portanto, a σ -equivalência das matrizes $H(f)$ e $T_r(f)$ nos permite expressar todos os elementos de $T_r(f)$ em termos dos menores de $H(f)$, ou seja,

$$\begin{cases} H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_0, & H\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b_1, & H\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = b_2, & \cdots \\ H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = b_0 c_0 & H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = b_0 c_1 & H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = b_0 c_2 & \cdots \\ H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = b_0 c_0 d_0 & H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = b_0 c_0 d_1 & H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = b_0 c_0 d_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_0 = H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & b_1 = H\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & b_2 = H\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \cdots \\ c_0 = \frac{H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} & c_1 = \frac{H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}} & c_2 = \frac{H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} & \cdots \\ d_0 = \frac{H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} & d_1 = \frac{H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} & d_2 = \frac{H\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}{H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{cases}$$

Definição 3.3.4 Os menores principais da matriz de Hurwitz são denominados determinantes de Hurwitz e serão denotados por

$$\Delta_1 = H\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = b_0, \quad \Delta_2 = H\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \cdots,$$



$$\Delta_n = H \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \\ a_0 & a_0 & \cdots & a_{n-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-2} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}. \quad (3.32)$$

Teorema 3.3.1 (Routh-Hurwitz). O número de zeros reais do polinômio $f(z)$ localizados do lado direito do plano complexo ($\operatorname{Re}(z) > 0$) é determinado por

$$k = V \left(\frac{a_0}{1}, \frac{\Delta_1}{1}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_1} \right) \quad \text{ou}$$

$$k = V(a_0, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_n). \quad (3.33)$$

Demonstração: Decorre da Definição 3.32 que $H(f)$ e $T_r(f)$ são equivalentes. Isso significa que os determinantes dos menores principais têm o mesmo valor. Portanto,

$$\Delta_1 = b_0, \quad \Delta_2 = b_0 c_0, \quad \Delta_3 = b_0 c_0 d_0, \quad \dots \quad (3.34)$$

Por outro lado,

$$\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \Delta_3 \neq 0, \dots \iff b_0 \neq 0, c_0 \neq 0, d_0 \neq 0, \dots$$

que é característica do caso regular. Logo,

$$b_0 = \Delta_1, \quad c_0 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad d_0 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \quad e_0 = \frac{\Delta_4}{\Delta_3}, \quad \dots$$

Por (3.23), temos que

$$\begin{aligned} k &= V(a_0, b_0, c_0, d_0, \dots) = V \left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right) \\ &= V(a_0, \Delta_1) + V \left(\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1} \right) + V \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2} \right) + \dots + V \left(\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right) \\ &= V(a_0, \Delta_1) + V(\Delta_1, \Delta_3) + \dots + V(\Delta_{n-3}, \Delta_{n-1}) + \\ &\quad V(1, \Delta_1) + V(\Delta_2, \Delta_4) + \dots + V(\Delta_{n-2}, \Delta_n) \\ &= V(a_0, \Delta_1, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}) + V(1, \Delta_2, \Delta_4, \dots, \Delta_n), \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} k &= V \left(\frac{a_0}{\Delta_1}, \frac{\Delta_1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_1} \right) + V \left(\frac{1}{\Delta_1}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_4}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_1} \right) \\ &= V \left(a_0, \Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_1} \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$



3.3.1 Critério de Routh-Hurwitz

No caso de todos os zeros do polinômio $f(z)$ estarem do lado esquerdo do eixo imaginário ($\operatorname{Re}(z) < 0$), pelo critério de Routh, todos elementos $a_0, b_0, c_0, d_0, \dots$ são diferentes de zeros e têm o mesmo sinal. Como estamos tratando somente com o caso regular, temos por (3.33) que $k = 0$. Portanto este fato caracteriza o critério seguinte.

Coralário 3.3.1 *Todos os zeros do polinômio real $f(z)$ têm a parte real negativa se, e somente se, as seguintes desigualdades são satisfeitas*

$$a_0 \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad a_0 \Delta_3 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \dots, \quad a_0 \Delta_n > 0, \quad \text{se } n \text{ é ímpar.}$$

Se $a_0 > 0$, então as condições de Routh-Hurwitz podem ser escritas como desigualdades de determinantes, isto é,

$$|b_0| > 0, \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0, \quad \dots, \quad \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \dots & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & b_{m-1} \end{vmatrix} > 0.$$

Definição 3.3.5 *O polinômio real $f(z)$ que satisfaz ao critério de Routh-Hurwitz também é chamado de Polinômio de Hurwitz.*

3.4 Polinômios Cujos Zeros se Entrelaçam

Nesta seção, forneceremos mais uma condição necessária e suficiente para que um polinômio algébrico real $f_n(z)$ seja um polinômio de Hurwitz. Esta nova condição é de fato um critério para que dois polinômios tenham zeros reais que se entrelaçam. Faremos uso do índice de Cauchy para demonstrar um dos principais resultados deste capítulo. O critério obtido com esta técnica será a principal ferramenta nas demonstrações futuras.

Sejam

$$f_n(z) := g_0 z^{2m+1} + h_1 z^{2m} + g_2 z^{2m-1} + h_3 z^{2m-2} + \dots + g_{2m} z + h_{2m+1},$$

de grau ímpar $n = 2m + 1$, e $g_0 > 0$, onde

$$f_n(z) := h(z^2) + zg(z^2) \quad (3.35)$$

com

$$h(u) = h_1 u^m + h_3 u^{m-1} + \cdots + h_{2m-1} u + h_{2m+1}, \quad (3.36)$$

$$g(u) = g_0 u^m + g_2 u^{m-1} + \cdots + g_{2m-2} u + g_{2m}. \quad (3.37)$$

Pelo teorema fundamental da álgebra, podemos escrever

$$\begin{aligned} h(u) &= h_1 (u - u_1) (u - u_2) \cdots (u - u_m) \\ g(u) &= g_0 (u - u'_1) (u - u'_2) \cdots (u - u'_m) \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde $u_1, u_2, \dots, u_m$ e $u'_1, u'_2, \dots, u'_m$, são os zeros de $h(u)$ e $g(u)$, respectivamente.

Logo, a matriz de Hurwitz associada ao polinômio $f_n(z)$ é dada por

$$H(f_n) = \begin{pmatrix} h_1 & h_3 & \cdots & h_{2m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ g_0 & g_2 & \cdots & g_{2m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1 & h_3 & \cdots & h_{2m+1} & \cdots & 0 \\ 0 & g_0 & g_2 & \cdots & g_{2m} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Definição 3.4.1 Dizemos que os polinômios $h(u)$ e $g(u)$ definidos por (3.38), cujos coeficientes dos termos de maior grau, h_1 e g_0 , têm o mesmo sinal, formam um par positivo se seus zeros são todos reais, negativos e satisfazem às desigualdades

$$u'_1 < u_1 < u'_2 < u_2 < \cdots < u'_m < u_m < 0.$$

Lembremos algumas propriedades dos índices de Cauchy.

1. $I_a^b R(x) = -I_b^a R(x)$;
2. $I_a^b R_1(x) R(x) = \text{ sinal } (R_1(x)) I_a^b R(x)$, se $R_1(x) \neq 0, \infty$ no intervalo (a, b) ;
3. Se $a < c < b$, então $I_a^b R(x) = I_a^c R(x) + I_c^b R(x) + \eta_c$, onde $\eta_c = 0$ se $R(c)$ for finito e $\eta_c = \pm 1$ se $R(x)$ se tornar infinito em c . Onde $\eta_c = +1$ corresponde ao salto de $-\infty$ para $+\infty$ em c (incrementando x) e, onde $\eta_c = -1$ ao salto de $+\infty$ para $-\infty$;
4. Se $R(-x) = -R(x) \implies I_{-a}^0 R(x) = I_0^a R(x)$. Se $R(-x) = R(x) \implies I_{-a}^0 R(x) = -I_0^a R(x)$;
5. $I_a^b R(x) + I_a^b \left(\frac{1}{R(x)} \right) = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{2}$, onde, no intervalo (a, b) , ε_a é o sinal de $R(x)$ próximo

de a e ε_b é o sinal de $R(x)$ próximo de b .

As quatro primeiras propriedades seguem imediatamente da Definição 3.1.1. A propriedade 5. segue do fato de que a soma dos índices $I_a^b R(x)$ e $I_a^b \frac{1}{R(x)}$ é igual à diferença $n_1 - n_2$, onde n_1 é o número de vezes que $R(x)$ muda do sinal negativo para o positivo quando x varia de a a b , e n_2 é o número de vezes que $R(x)$ muda do positivo para o negativo.

Seja

$$\varrho = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h_1 z^{n-1} - h_3 z^{n-3} + \dots}{g_0 z^n - g_2 z^{n-2} + \dots} = n - 2k - s, \quad (3.40)$$

onde k é o número de zeros de $f_n(z)$ em $\operatorname{Re}(z) > 0$ e s é o número de zeros no eixo imaginário. Devemos investigar quais condições devem ser impostas sobre $h(u)$ e $g(u)$ para que $f_n(z)$ seja um polinômio de Hurwitz. Fazendo $k = s = 0$ obtemos uma condição necessária e suficiente para que $f_n(z)$ seja um polinômio de Hurwitz.

Teorema 3.4.1 Os polinômios $h(u)$ e $g(u)$, ambos de grau m , formam um par positivo se, e somente se,

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = m, \quad I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} = -m \text{ e } \varepsilon_{\infty} \left(\frac{g(u)}{h(u)} \right) = \operatorname{sinal} \left[\frac{g(u)}{h(u)} \right]_{+\infty} = 1. \quad (3.41)$$

Demonstração: Provaremos primeiramente a necessidade. Seja

$$\eta = \begin{cases} \operatorname{sinal} \left(\frac{g(u)}{h(u)} \right)_{u=0-}, & \text{se } \lim_{u=0-} \frac{g(u)}{h(u)} = 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\operatorname{sinal} (g(u)/h(u))_{u=0-}$ denota o sinal de $g(u)/h(u)$ para valores negativos de u de módulos significativamente pequenos. Pelas propriedades 1. a 4. do índice de Cauchy e por (3.40), segue que

$$\begin{aligned} \varrho &= I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} \\ &= I_{-\infty}^0 \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} + I_0^{+\infty} \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} + \eta \\ &= I_{-\infty}^0 \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} + I_{-\infty}^0 \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} + \eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2I_{-\infty}^0 \frac{h(-z^2)}{zg(-z^2)} + \eta \\
&= -2I_{-\infty}^0 \frac{h(-z^2)}{g(-z^2)} + \eta \\
&= -2I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{g(u)} + \eta \\
&= 2I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{ug(u)} + \eta \\
&= I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{g(u)} + \eta \\
&= I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{ug(u)} + I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} + \eta \\
&= I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{ug(u)} + I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^0 \frac{h(u)}{g(u)} - I_0^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} + \eta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$n = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)}. \quad (3.42)$$

Pela propriedade 5. do índice de Cauchy, obtemos

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{ug(u)} = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} + \frac{\varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{ug(u)} \right) - \varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{ug(u)} \right)}{2} \quad (3.43)$$

e

$$I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} = -I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} + \frac{\varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) - \varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right)}{2}. \quad (3.44)$$

Substituindo (3.43) e (3.44) em (3.42), segue que

$$n = I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} - I_{-\infty}^{+\infty} \frac{ug(u)}{h(u)} + \varepsilon_{\infty} \left(\frac{g(u)}{h(u)} \right),$$

com

$$\varepsilon_{\infty} \left(\frac{g(u)}{h(u)} \right) = \frac{-\varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) + \varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) + \varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{ug(u)} \right) - \varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{ug(u)} \right)}{2}.$$

Mas,

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \frac{h(u)}{g(u)} = \frac{h_1}{g_0} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) = \text{sinal} \left(\frac{h_1}{g_0} \right), \\ \varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) = \text{sinal} \left(\frac{h_1}{g_0} \right). \end{cases} \quad (3.45)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) &= \varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) = \text{senal} \left(\frac{h_1}{g_0} \right) \\ &= +1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{-\infty} \left(\frac{h(u)}{ug(u)} \right) &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \text{senal}(u) \cdot \text{senal} \left(\frac{h_1}{g_0} \right) \\ &= -1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{+\infty} \left(\frac{h(u)}{ug(u)} \right) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \text{senal}(u) \cdot \text{senal} \left(\frac{h_1}{g_0} \right) \\ &= +1,\end{aligned}$$

Consequentemente, $\varepsilon_{\infty} \left(\frac{h(u)}{g(u)} \right) = 1$.

Sabemos que $g(u)$ é de grau m . Por outro lado, o índice de Cauchy de uma função racional não pode exceder o grau do denominador. Por hipótese, $k = s = 0$. Logo, equação é válida (3.41) se, e somente se, as equações (3.41) são simultaneamente satisfeitas.

Provaremos agora que as condições (3.41) são suficientes para que $h(u)$ e $g(u)$ formem um par positivo.

Sabemos que $n = 2m + 1$, então

$$\begin{aligned}\text{se } m \text{ par} &\implies \begin{cases} \lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = +\infty \end{cases} \\ \text{se } m \text{ ímpar} &\implies \begin{cases} \lim_{u \rightarrow +\infty} h(u) = +\infty \\ \lim_{u \rightarrow -\infty} h(u) = -\infty. \end{cases}\end{aligned} \tag{3.46}$$

Por hipótese $I_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(u)}{h(u)} = m$, o que significa que $h(u)$ tem m zeros reais e distintos $u_1 < u_2 < \dots < u_m$. Pelo Teorema 2.3.7, a fração própria irredutível $\frac{g(u)}{h(u)}$ pode ser representada por

$$\frac{g(u)}{h(u)} = \frac{g_0}{h_1} + \sum_{i=1}^m \frac{R_i}{u - u_i} \quad \text{com } \frac{g_0}{h_1} \neq 0$$

onde

$$R_i = \frac{g(u_i)}{h'(u_i)} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Por hipótese, temos $\varepsilon_{\infty}(h(u)/g(u)) = +1$. Consequentemente h_1 e g_0 têm

o mesmo sinal. Logo, $g_0/h_1 > 0$. Assim, em cada intervalo $(-\infty, u_1)$, $(u_1, u_2), \dots$, (u_{m-1}, u_m) , o polinômio $g(u)$ troca de sinal. Pelo teorema de Rolle, para todo $i = 2, 3, \dots, m$, existe um número $u'_i \in (u_{i-1}, u_i)$ tal que $g(u'_i) = 0$. Além disso,

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = \lim_{u \rightarrow -\infty} h(u),$$

o que implica que existe $u'_1 \in (-\infty, u_1)$ tal que $g(u'_1) = 0$.

Portanto,

$$u'_1 < u_1 < u'_2 < u_2 < \dots < u_{m-1} < u'_m < u_m.$$

Por hipótese, o grau do polinômio $g(u)$ é m e além disso, $I_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(u)}{g(u)} = m$, o que significa que seus zeros são reais e negativos. Consequentemente $u_m < 0$. Portanto, os zeros de $h(u)$ e $g(u)$ se entrelaçam e são negativos. Logo, pela Definição 3.3.5, $h(u)$ e $g(u)$ formam um par positivo. ■

Teorema 3.4.2 (Hurwitz) *O polinômio $f_n(z) = h(z^2) + zg(z^2)$ é um polinômio de Hurwitz se, e somente se, $h(u)$ e $g(u)$ formam um par positivo.*

Demonstração: Seja $f_n(z)$ um polinômio de Hurwitz. O Teorema 3.4.1 implica imediatamente que $h(u)$ e $g(u)$ formam um par positivo.

Suponhamos, agora, que os polinômios $h(u)$ e $g(u)$ formam um par positivo. Quando introduzimos os números positivos $v_i = -u_i$ e $v'_i = -u'_i$ e multiplicamos $h(u)$ e $g(u)$ por $+1$ ou -1 para que os coeficientes de maior grau se tornem positivos, podemos escrevê-los como

$$h(u) = h_1 \prod_{i=1}^m (u + v_i), \quad g(u) = g_0 \prod_{i=1}^m (u + v'_i),$$

com $h_1 > 0$, $g_0 > 0$ e

$$0 < v_m < v'_m < v_{m-1} < v'_{m-1} < \dots < v_1 < v'_1.$$

Portanto, $h(u)$ e $g(u)$ satisfazem ao critério de Routh-Hurwitz. Consequentemente, pela Definição 3.3.5, $f_n(z)$ é um polinômio de Hurwitz. ■



Definição 3.4.2 *Sejam $h(u)$ e $g(u)$ polinômios de grau m e $u_k(h)$, $k = 1, 2, \dots, m$, os zeros de $h(u)$ e $u_k(g)$, $k = 1, 2, \dots, m$ os zeros de $g(u)$. Dizemos que $g \prec h$, se os polinômios $h(u)$ e $g(u)$ formam um par positivo. Assim seus zeros satisfazem à desigualdade*

$$u_k(g) < u_k(h), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.47)$$

O critério de Routh-Hurwitz e o Teorema 3.4.2 implicam imediatamente no seguinte resultado.

Teorema 3.4.3 *Os polinômios $h(u)$ e $g(u)$ definidos por (3.35) formam um par positivo se, e somente se, todos os menores principais da matriz (3.39) associados ao polinômio $f_n(z)$ definido por (3.37) são positivos.*

A afirmação deste teorema pode ser formalmente escrita da seguinte forma:

$$g \prec h \iff H(f) \begin{pmatrix} 1 & \dots & k \\ 1 & \dots & k \end{pmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.48)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} f_n(z) &= g_0 z^{2m+1} + h_1 z^{2m} + g_2 z^{2m-1} + h_3 z^{2m-2} + \dots + g_{2m} z + h_{2m+1} \\ &= \frac{1}{z^{2m+1}} \{ h_{2m+1} z^{2m+1} + g_{2m} z^{2m} + h_{2m-1} z^{2m-1} + \\ &\quad + g_{2m-2} z^{2m-2} + \dots + h_1 z + g_0 \}. \end{aligned}$$

Seja $F_n(z) := z^{2m+1} f_n\left(\frac{1}{z}\right)$, o polinômio invertido de $f_n(z)$. Temos que

$$\begin{aligned} F_n(z) &= h_{2m+1} z^{2m+1} + g_{2m} z^{2m} + h_{2m-1} z^{2m-1} + g_{2m-2} z^{2m-2} + \dots \\ &\quad + h_3 z^3 + g_2 z^2 + h_1 z + g_0 \\ &= z^{2m} g\left(\frac{1}{z^2}\right) + z^{2m+1} h\left(\frac{1}{z^2}\right) \\ &= \tilde{g}(z^2) + z \tilde{h}(z^2), \end{aligned}$$

onde

$$\tilde{g}(z) = g_{2m} z^m + g_{2m-2} z^{m-1} + \dots + g_2 z + g_0$$

e

$$\tilde{h}(z) = h_{2m+1} z^m + h_{2m-1} z^{m-1} + \dots + h_3 z + h_1. \quad (3.49)$$

Logo, a matriz de Hurwitz associada ao polinômio invertido, $F_n(z)$, é dada por

$$\tilde{H}(f_n) = \begin{pmatrix} g_{2m} & g_{2m-2} & \cdots & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ h_{2m+1} & h_{2m-1} & \cdots & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{2m} & g_{2m-2} & \cdots & g_0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{2m+1} & h_{2m-1} & \cdots & h_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Portanto, de (3.36) e (3.49), obtemos

$$\tilde{g}(z) := z^m g\left(\frac{1}{z}\right) \quad \text{e} \quad \tilde{h}(z) := z^m h\left(\frac{1}{z}\right). \quad (3.50)$$

Lema 3.4.1 *Sejam $g(u)$, $\tilde{g}(u)$, $h(u)$ e $\tilde{h}(u)$ definidos por (3.50). Então, $g \prec h$ se, e somente se, $\tilde{h} \prec \tilde{g}$.*

Demonstração: Sejam $u_k(g)$, $u_k(h)$, $u_k(\tilde{g})$ e $u_k(\tilde{h})$ os zeros de $g(u)$, $h(u)$, $\tilde{g}(u)$ e $\tilde{h}(u)$ respectivamente. Segue, de (3.50), que

$$u_k(\tilde{g}) = \frac{1}{u_{m+1-k}(g)} \quad \text{e} \quad u_k(\tilde{h}) = \frac{1}{u_{m+1-k}(h)}.$$

Logo,

$$u_k(\tilde{g}) - u_k(\tilde{h}) = \frac{u_{m+1-k}(h) - u_{m+1-k}(g)}{u_{m+1-k}(g) u_{m+1-k}(h)}. \quad (3.51)$$

Por (3.47), temos que o numerador é positivo. Então

$$u_k(\tilde{g}) > u_k(\tilde{h}), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (3.52)$$

Portanto, $u_k(\tilde{h}) < u_k(\tilde{g})$, $k = 1, 2, \dots, m$, ou seja, $\tilde{h} \prec \tilde{g}$. Em outras palavras, $\tilde{g}(u)$ e $\tilde{h}(u)$ formam um par positivo. ■

Teorema 3.4.4 *i) $\tilde{h} \prec \tilde{g}$ se, e somente se, F_n é de Hurwitz;*

ii) F_n é de Hurwitz se, e somente se, $\tilde{H}(f_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Assim, o Lema 3.4.1 e o Teorema 3.4.4 implicam no importante teorema:

Teorema 3.4.5 *$g \prec h$ se, e somente se, $\tilde{H}(f_n) \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k \\ 1 & \cdots & k \end{pmatrix} > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.*



Capítulo 4

Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios de Jacobi

Os sistemas de polinômios ortogonais de Hermite, Laguerre e Jacobi são inquestionavelmente, os sistemas mais exhaustivamente estudados e amplamente aplicados. Esses três sistemas são coletivamente denominados de Polinômios Ortogonais Clássicos. O sistema de polinômios de Jacobi contém, em particular, os polinômios de Tchebichef, Legendre e Gegenbauer. Nesta seção, enunciaremos algumas propriedades básicas e alguns teoremas importantes sobre os polinômios ortogonais e, em particular, estudaremos os polinômios de Jacobi e Gegenbauer. As principais fontes que contém informações completas e demonstrações detalhadas sobre os polinômios ortogonais são os livros de Chihara [2] e de Szegő [21]. A tese de mestrado de Lisandra Érica de Sousa [18], também é uma importante fonte de consulta, pois os principais resultados sobre polinômios ortogonais estão cuidadosamente demonstrados.

4.1 Polinômios Ortogonais

Definição 4.1.1 *Seja $w(x)$ uma função não negativa, integrável e não identicamente nula no intervalo (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$, tal que os momentos*

$$\mu_n = \int_a^b x^n w(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$



existem. Então, $w(x)$ é uma função peso e os μ_n são os seus momentos.

Sejam $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios e $x_{n,k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, os zeros de $P_n(x)$, tal que $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$.

Definição 4.1.2 Dizemos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é um sistema de polinômios ortogonais (SPO) com relação à função peso $w(x)$ no intervalo $[a, b]$ se:

i) $P_n(x)$ é de grau exatamente n , isto é, se

$$P_n(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,0}, \text{ então } a_{n,n} \neq 0;$$

$$\text{ii) } \int_a^b P_m(x) P_n(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \gamma_n > 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Se $\gamma_n = 1$, dizemos que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é um sistema de polinômios ortonormais e, quando $a_{n,n} = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é um SPO mônicos.

Teorema 4.1.1 (Fórmula de Recorrência de Três Termos). Seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ um sistema de polinômios ortogonais mônicos. Então, existem constantes c_n e $v_n \neq 0$, tais que

$$P_n(x) = (x - c_n) P_{n-1}(x) - v_n P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

com $P_{-1}(x) := 0$ e $P_0(x) := 1$.

Teorema 4.1.2 $P_n(x) \in \text{SPO}$ é o n -ésimo polinômio ortogonal com relação à função peso $w(x)$ em $[a, b]$ se

$$\int_a^b P_n(x) Q_{n-1}(x) w(x) dx = 0$$

para qualquer polinômio $Q_{n-1}(x)$ de grau menor ou igual a $n - 1$.

Teorema 4.1.3 Os zeros do polinômio ortogonal $P_n(x)$, associado à função peso $w(x)$ no intervalo $[a, b]$, são reais, distintos e estão localizados no interior de $[a, b]$.

Teorema 4.1.4 Os zeros dos polinômios $P_n(x)$ e $P_{n+1}(x)$ se entrelaçam, isto é,

$$x_{n+1,k} < x_{n,k} < x_{n+1,k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

4.1.1 Função Peso Par

Estudemos o caso em que o intervalo de definição de ortogonalidade é simétrico com relação à origem, isto é, $a = -b$.

Consideremos uma função peso $w(x)$ que satisfaça $w(x) = w(-x)$, ou seja, ela é par. Então, $P_m(-x) = (-1)^m P_m(x)$, isto é, $P_m(x)$ é um polinômio par se m for par ou ímpar, se m for ímpar.

Teorema 4.1.5 *Seja $\{P_m(x)\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais em $[-a, a]$ com relação à função peso par $w(x)$. Então, $\{P_{2n}(\sqrt{x})\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais em $(0, a^2)$ com relação à função peso $x^{-1/2}w(\sqrt{x})$ e $\{x^{-1/2}P_{2n+1}(\sqrt{x})\}_{n=0}^\infty$ é SPO em $(0, a^2)$ com relação à função peso $x^{1/2}w(\sqrt{x})$.*

Demonstração: Seja m par. Logo $m = 2n$. Como $P_{2n}(x) = P_{2n}(-x)$, temos que

$$P_{2n}(x) = a_{2n,0} + a_{2n,1}x^2 + \cdots + a_{2n,2n}x^{2n}. \quad (4.1)$$

Seja $q(x)$ um polinômio qualquer de grau menor ou igual a $n-1$, dado por $q(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_{n-1}x^{n-1}$. Logo, $Q(x) = q(x^2) = q_0 + q_1x^2 + \cdots + q_{n-1}x^{2n-2} \in \pi_{2n-2}$ e é uma função par. Daí,

$$0 = \int_{-a}^a P_{2n}(x) Q(x) w(x) dx = 2 \int_0^a P_{2n}(x) Q(x) w(x) dx, \quad (4.2)$$

pois $P_{2n}(x) \in SPO$.

Substituiremos a variável x por $\sqrt{x}$ e, portanto, dx por $(x^{-1/2}dx)/2$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_0^a P_{2n}(x) Q(x) w(x) dx = \int_0^{a^2} P_{2n}(\sqrt{x}) Q(\sqrt{x}) x^{-1/2} w(\sqrt{x}) dx \\ &= \int_0^{a^2} P_{2n}(\sqrt{x}) q(x) x^{-1/2} w(\sqrt{x}) dx. \end{aligned}$$

Portanto, por (4.1), $g_n(x) := P_{2n}(\sqrt{x})$ é um polinômio de grau n e, para todo $q(x) \in \pi_{n-1}$,

$$\int_0^{a^2} g_n(x) q(x) x^{-1/2} w(\sqrt{x}) dx = 0,$$

é o que queríamos demonstrar.

O caso ímpar demonstra-se de forma análoga. Portanto, $\{g_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{h_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ formam um sistema de polinômios ortogonais com relação às funções peso $x^{-1/2}w(\sqrt{x})$ e $x^{1/2}w(\sqrt{x})$, respectivamente, em $(0, a^2)$. ■

4.2 Polinômios de Jacobi

Nesta seção, definiremos os polinômios de Jacobi e provaremos alguns teoremas específicos que serão de primordial importância neste trabalho.

Consideremos os polinômios de Jacobi definidos pela fórmula de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right], \quad (4.3)$$

com α e β parâmetros.

Seja $\varphi(x) := n! (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ uma função auxiliar. Então,

$$(-2)^n \varphi(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta} \right].$$

Usando a fórmula de Leibniz 2.23 para a n -ésima derivada do produto, segue que

$$\begin{aligned} (-2)^n \varphi(x) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k} \left[(1-x)^{n+\alpha} \right] \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \left[(1+x)^{n+\beta} \right] \\ &= (-1)^n \varphi(x) \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos a fórmula explícita

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{n+\beta}{k} (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

Se $\alpha, \beta > -1$, então $\{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ forma um sistema de polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$, com relação à função peso $w(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Sua normalização é dada por

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(1) &= \binom{n+\alpha}{n} \\ &= \frac{(n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)}{n!}. \end{aligned}$$

Seja

$$(c)_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 0 \\ c(c+1) \dots (c+n-1), & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

o símbolo de Pochhammer.

Assim, temos

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}. \quad (4.4)$$

Como $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ é de grau exatamente n , o coeficiente do termo de maior grau é expresso por

$$2^{-n} \binom{2n+\alpha+\beta}{n} = 2^{-n} \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{k} \binom{n+\beta}{n-k}.$$

As seguintes propriedades seguem imediatamente das fórmulas anteriores

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(-x) \quad \text{e} \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-1) = (-1)^n \binom{n+\beta}{n}.$$

Quando $\alpha = \beta$ obtemos os polinômios ultrasféricos, que são funções pares ou ímpares, caso m seja par ou ímpar.

Teorema 4.2.1 Para $n = 0, 1, \dots$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} P_{2n}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \binom{2n+\alpha}{2n} P_n^{(\alpha, -1/2)}(2x^2-1) \\ &= (-1)^n \binom{n+\alpha}{n}^{-1} \binom{2n+\alpha}{2n} P_n^{(-1/2, \alpha)}(1-2x^2) \end{aligned} \quad (4.5)$$

e

$$\begin{aligned} P_{2n+1}^{(\alpha, \alpha)}(x) &= \binom{2n+\alpha}{2n} \binom{n+\alpha}{n}^{-1} (\alpha+2) x P_n^{(\alpha, 1/2)}(2x^2-1) \\ &= (-1)^n \binom{2n+\alpha}{2n} \binom{n+\alpha}{n}^{-1} (\alpha+2) x P_n^{(1/2, \alpha)}(1-2x^2). \end{aligned}$$

Teorema 4.2.2 O polinômio de Jacobi $Y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisfaz à equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$(1-x^2)Y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x]Y' + n(n + \alpha + \beta + 1)Y = 0, \quad (4.6)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} Y' \right\} + n(n + \alpha + \beta + 1) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta Y = 0. \quad (4.7)$$

Demonstração: Consideremos $Y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \in \pi_n$. Obviamente a última forma da equação diferencial é obtida multiplicando-se (4.6) por $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

Para mostrar que $Y(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ satisfaz (4.7), primeiramente mostraremos que

$$\frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right\} = c (1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

onde c é uma constante. Daí, segue imediatamente que

$$(1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right\} = c P_n^{(\alpha, \beta)}(x).$$

Pelo Teorema 4.1.2, temos que mostrar que

$$g(x) := (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^{\alpha+1} (1+x)^{\beta+1} \frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right\}$$

é ortogonal, com relação à função peso $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ em $(-1, 1)$ a qualquer polinômio $Q_{n-1}(x)$ de grau menor ou igual a $n-1$, ou seja,

$$\int_{-1}^{+1} g(x) Q_{n-1}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0.$$

Para mostrar este resultado basta substituir $g(x)$ e integrar sucessivamente por partes. Portanto, $g(x) = c P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Determinaremos c igualando os coeficientes de maior grau. Temos que

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots$$

Logo,

$$c P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = c \{ a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots \},$$

$$[\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] (P_n^{(\alpha, \beta)})'(x) = [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] n a_{n,n} x^{n-1} + \dots$$

$$(1-x^2) (P_n^{(\alpha, \beta)})''(x) = (1-x^2) n(n-1) a_{n,n} x^{n-2} + \dots$$

Assim,

$$c a_{n,n} + n a_{n,n} [-(\alpha + \beta + 2)] - n(n-1) a_{n,n} = 0.$$

Portanto, $c = n(n + \alpha + \beta + 1)$. ■

Teorema 4.2.3 *Sejam $\alpha > -1$ e $\beta > -1$. A equação diferencial*

$$(1 - x^2) Y'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] Y' + \gamma Y = 0, \quad (4.8)$$

onde γ é um parâmetro, tem solução polinomial não identicamente nula se, e somente se, γ é dada por $n(n + \alpha + \beta + 1)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. A solução é $cP_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, e não existe solução polinomial que seja linearmente independente de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Definição 4.2.1 *A série hipergeométrica de Gauss ${}_2F_1(a, b; c; z)$ é dada por*

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}.$$

Ela é convergente para $|z| < 1$ quando $\operatorname{Re}(c - a - b) > 0$.

Além disso, $y(z) = {}_2F_1(a, b; c; z)$ satisfaz à equação diferencial

$$z(1 - z) \frac{d^2 y}{dz^2} + [c - (a + b + 1)z] \frac{dy}{dz} - aby = 0. \quad (4.9)$$

O polinômio de Jacobi pode ser definido em termos da função hipergeométrica com argumento $z = (1 - x)/2$.

De fato: seja $Y(x) = y\left(\frac{1-x}{2}\right)$. Derivando, obtemos

$$Y'(x) = \frac{-1}{2} y' \left(\frac{1-x}{2} \right) \quad \text{e} \quad Y''(x) = \frac{1}{4} y'' \left(\frac{1-x}{2} \right).$$

Substituindo z por $(1 - x)/2$ em (4.9), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{2} \left(1 - \frac{1-x}{2} \right) y'' \left(\frac{1-x}{2} \right) + \left[c - (a + b + 1) \frac{1-x}{2} \right] y' \left(\frac{1-x}{2} \right) \\ - ab \left[y \left(\frac{1-x}{2} \right) \right] = 0, \end{aligned}$$

ou,

$$\begin{aligned} (1 - x^2) \left[\frac{y''}{4} \left(\frac{1-x}{2} \right) \right] + [2c - (a + b + 1) + (a + b + 1)x] \left[\frac{1}{2} y' \left(\frac{1-x}{2} \right) \right] \\ - ab \left[y \left(\frac{1-x}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$(1 - x^2) Y''(x) - (2c - (a + b + 1) + (a + b + 1)x) Y'(x) - abY(x) = 0.$$

Em particular, para $a = -n$, $b = n + \alpha + \beta + 1$ e $c = \alpha + 1$, obtemos a equação

diferencial (4.6) o que significa que

$$Y(x) = {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}), \quad (4.10)$$

é solução da mesma equação diferencial (4.6) satisfeita pelos polinômios de Jacobi. Além disso, $(-n)_k = -n(-n+1)\dots(-n+k-1) = 0$, para $k > n$. Portanto, a série (4.10) tem n termos e representa um polinômio de grau n .

Por outro lado, a segunda afirmação do Teorema 4.2.3 diz que as únicas soluções polinômiais de (4.10) são $cP_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Assim,

$$cP_n^{(\alpha, \beta)}(x) = Y(x) = {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}).$$

Para $x = 1$, temos que ${}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; 0) = 1$. Por outro lado, de (4.4), segue que $P_n^{(\alpha, \beta)}(1) = (\alpha + 1)_n / k$. Então,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}). \quad (4.11)$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{(-n)_k}{k!} &= \frac{-n(-n+1)\dots(-n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \\ &= (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= (-1)^k \binom{n}{k}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Portanto, pela Definição 4.2.1 temos

$${}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{k! (\alpha + 1)_k} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k,$$

e, pela igualdade (4.12), obtemos

$${}_2F_1(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1-x}{2}) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k} \binom{n}{k} \left(\frac{1-x}{2} \right)^k.$$

Seja a transformação linear $(1-x)/2 = -y$. Assim, $x \in (-1, 1)$ se, e somente se, $y \in (-1, 0)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k &= \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k} (-y)^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_k}{k!(\alpha+1)_k} (y)^k. \end{aligned}$$

Seja

$$q_n^{(\alpha, \beta)}(y) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k} y^k.$$

Consequentemente, todos os coeficientes de $q_n^{(\alpha, \beta)}(y)$ são positivos e seus zeros se localizam no segmento $(-1, 0)$ do eixo real. Denotando por $y_{n,k}(\alpha, \beta)$ os zeros de $q_n^{(\alpha, \beta)}(y)$. Assim, temos que $y_{n,k}(\alpha, \beta) = (x_{n,k}(\alpha, \beta) - 1)/2$.

4.3 Polinômios de Gegenbauer

Um caso especial dos polinômios de Jacobi ocorre quando $\alpha = \beta = \lambda - 1/2 > 0$, $\lambda > -1/2$, que são denominados de polinômios ultraesféricos ou polinômios de Gegenbauer. Esses polinômios são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$, com relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$. Sua notação usual, para $\alpha = \lambda - 1/2$ é

$$\begin{aligned} C_n^{(\lambda)}(x) &= \binom{n+2\alpha}{n} \binom{n+\alpha}{n}^{-1} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) \\ &= \binom{n+2\lambda-1}{n} \binom{n+\lambda-1/2}{n}^{-1} P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2)}(x). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Se $\alpha = \lambda - 1/2$ ou $\lambda = 0$, então o polinômio $C_n^{(\lambda)}(x)$ se torna identicamente nulo para $n \geq 1$. Fazendo $x = 1$ em (4.13) e usando (4.4) obtemos sua normalização

$$C_n^{(\lambda)}(1) = \binom{n+2\lambda-1}{n}.$$

De (4.13), segue imediatamente que $C_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n C_n^{(\lambda)}(x)$.

Consequentemente, os polinômios de Gegenbauer satisfazem à seguinte equação

diferencial de segunda ordem

$$(1-x^2)Y'' + (2\lambda+1)xY' + n(n+2\lambda)Y = 0, \text{ para } Y(x) = C_n^{(\lambda)}(x).$$

Pelo mesmo raciocínio acima, podemos também definir os polinômios ultraesféricos em termos da função hipergeométrica ${}_2F_1(-a, b; c; z)$. Logo,

$$\begin{aligned} C_n^{(\lambda)}(x) &= \binom{n+2\lambda-1}{n} {}_2F_1\left(-n, n+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right) \\ &= 2^n \binom{n+\lambda-1}{n} (x-1)^n {}_2F_1\left(-n, -n-\lambda + \frac{1}{2}; -2n-2\lambda+1; \frac{2}{1-x}\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Finalmente, combinando (4.5) e (4.14), obtemos algumas fórmulas especiais envolvendo as funções hipergeométricas:

$$\begin{aligned} C_{2n}^{(\lambda)}(x) &= \binom{2n+2\lambda-1}{2n} {}_2F_1\left(-2n, 2n+\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; 1-x^2\right) \\ &= (-1)^n \binom{n+\lambda-1}{n} {}_2F_1\left(-n, n+\lambda; \frac{1}{2}; x^2\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

e

$$\begin{aligned} C_{2n+1}^{(\lambda)}(x) &= \binom{2n+2\lambda}{2n+1} x {}_2F_1\left(-n, n+\lambda+1; \lambda + \frac{1}{2}; 1-x^2\right) \\ &= (-1)^n 2\lambda \binom{n+\lambda}{n} x {}_2F_1\left(-n, n+\lambda+1; \frac{3}{2}; x^2\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pela Definição 4.2.1 e por (4.15), obtemos

$${}_2F_1\left(-n, n+\lambda; \frac{1}{2}; x\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n+\lambda)_k}{(1/2)_k} x^k,$$

e, por (4.16), segue que

$${}_2F_1\left(-n, n+\lambda+1; \frac{3}{2}; x\right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n+\lambda+1)_k}{(3/2)_k} x^k.$$

Denotemos por $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$ os polinômios hipergeométricos de grau n

acima, isto é,

$$g_n^{(\lambda)}(x) := {}_2F_1\left(-n, n + \lambda; \frac{1}{2}; x\right) \quad (4.17)$$

e

$$h_n^{(\lambda)}(x) := {}_2F_1\left(-n, n + \lambda + 1; \frac{3}{2}; x\right). \quad (4.18)$$

Sabemos que $C_{2n}^{(\lambda)}(x^{1/2})$ e $x^{-1/2}C_{2n+1}^{(\lambda)}(x^{1/2})$ são múltiplos de $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$, respectivamente. Pelo Teorema 4.1.5, $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$, $n = 0, 1, \dots$, são ortogonais em $(0, 1)$ com relação à função peso $w_g(x) = x^{-1/2}(1-x)^{\lambda-1/2}$ e $w_h(x) = x^{1/2}(1-x)^{\lambda-1/2}$, respectivamente. Outro fato simples é que os zeros de $g_n^{(\lambda)}(x)$ são $x_{2n,k}^2(\lambda)$ e, os de $h_n^{(\lambda)}(x)$ são $x_{2n+1,k}^2(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

4.4 Interpretação Eletrostática

Uma das importantes razões para o interesse nos zeros dos polinômios de Jacobi é que eles admitem uma interpretação eletrostática bem interessante (ver artigo [5]).

Sejam $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, $\alpha, \beta > -1$, o polinômio de Jacobi de grau n e $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, 2, \dots, n$, seus zeros enumerados em ordem decrescente, $-1 < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < \dots < x_{n,1}(\alpha, \beta) < 1$.

Imaginemos as cargas $\frac{\beta+1}{2}$ e $\frac{\alpha+1}{2}$ distribuídas ao longo de fios infinitos perpendiculares ao eixo real nos pontos -1 e 1 , respectivamente, e n fios infinitos dispostos perpendicularmente ao eixo real nos pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$, e $-1 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$, com cargas unitárias distribuídas uniformemente em cada fio. Esses fios podem se mover livremente através do intervalo $(-1, 1)$. As cargas são positivas e, portanto, se repelem. É intuitivamente claro que, mudando os valores de α e β , após um certo tempo as n cargas livres vão se equilibrar em novas posições do segmento -1 e 1 , $-1 < x_1^* < x_2^* < \dots < x_n^* < 1$. A notável beleza dos zeros $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ do polinômio $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ está no fato deles coincidirem com as posições de equilíbrio das n cargas livres, isto é,

$$x_n^* = x_{n,n}(\alpha, \beta), \quad x_{n-1}^* = x_{n,n-1}(\alpha, \beta), \dots, \quad x_1^* = x_{n,1}(\alpha, \beta).$$

Consideremos o campo eletrostático descrito acima. Sabe-se que a energia do campo é dada por

$$L(x_1, \dots, x_n) = \frac{\alpha+1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|1-x_i|} + \frac{\beta+1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|1+x_i|} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \frac{1}{|x_j - x_i|},$$

onde $L(x_1, \dots, x_n)$ será mínima se $e^{-L(x_1, \dots, x_n)}$ for máxima, pois $e^{-L(x_1, \dots, x_n)}$ é função decrescente de $L(x_1, \dots, x_n)$.

Seja

$$T(x) := e^{-L(x_1, \dots, x_n)}, \quad x = (x_1, \dots, x_n),$$

uma função auxiliar. Usando as propriedades dos logaritmos, $\log a + \log b = \log ab$ e $c \log a = \log a^c$, segue que

$$\begin{aligned} T(x) &= \exp \left(-\frac{\alpha+1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|1-x_i|} - \frac{\beta+1}{2} \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{|1+x_i|} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \log \frac{1}{|x_j - x_i|} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \exp \left(-\log \left(\frac{1}{|1-x_i|} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \right) \prod_{i=1}^n \exp \left(-\log \left(\frac{1}{|1+x_i|} \right)^{\frac{\beta+1}{2}} \right) \\ &\quad \prod_{i=1}^n \exp \left(-\log \frac{1}{|x_j - x_i|} \right) \\ &= \prod_{i=1}^n (|1-x_i|)^{\frac{\alpha+1}{2}} \prod_{i=1}^n (|1+x_i|)^{\frac{\beta+1}{2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i|. \end{aligned}$$

Mas, $\log(T^{-1}(x))$ é a energia do sistema eletrostático das n cargas. Elas exercem forças repulsivas de acordo com a lei do potencial logarítmico. O máximo de $T(x)$ corresponde à condição eletrostática de equilíbrio. Ele existe e é unicamente determinado, pois $T(x)$ é uma função contínua de $x_1, x_2, \dots, x_n$, para $-1 < x_k < 1$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Então, a energia desse sistema será mínima se, e somente se, a função

$$T(x) = \prod_{i=1}^n (1-x_i)^{(\alpha+1)/2} (1+x_i)^{(\beta+1)/2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_j - x_i| \quad (4.19)$$

é máxima.

Teorema 4.4.1 *Sejam $\alpha > -1$, $\beta > -1$ e $\{x_i\}_{i=1}^n$, $-1 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$, um sistema de valores tal que a expressão (4.19) se torna máxima. Então, $\{x_i\}_{i=1}^n$ são os zeros do polinômio de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.*

Demonstração: O valor máximo de $T(x_1, \dots, x_n)$ será obtido nos pontos onde $\frac{\partial}{\partial x_k} T(x_1, \dots, x_n) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Suponhamos que a função $T^2(x_1, \dots, x_n)$ esteja definida no simplex $\Xi := \{-1 < x_1 < \dots < x_n < 1\}$.

$$\begin{aligned} T^2(x) &= \tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) (1-x_k)^{\alpha+1} (1+x_k)^{\beta+1} \prod_{i \neq k} (x_k - x_i)^2 \\ &= \tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) (1-x_k)^{\alpha+1} (1+x_k)^{\beta+1} \omega_k^2(x_k), \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde a função $\tau(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) = \tau(\bar{x} \setminus x_k)$ não depende de x_k e $\omega_k(x) := \omega(x)/(x - x_k)$ com $\omega(x) := \prod_{i=1}^n (x - x_i) \in \pi_n$.

Derivando a identidade (4.20) com relação a x_k e utilizando a igualdade

$$\omega^{(l+1)}(x_k) = (l+1)\omega_k^{(l)}(x_k), \quad l = 0, 1, 2,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} T^2(x) &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) \frac{\partial}{\partial x_k} ((1-x_k)^{\alpha+1} (1+x_k)^{\beta+1} \omega_k^2(x_k)) \\ &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) (1-x_k)^\alpha (1+x_k)^\beta \omega_k(x_k) \\ &\quad \times \{2(1-x_k^2) \omega_k'(x_k) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k) \omega_k(x_k)\} \\ &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) (1-x_k)^\alpha (1+x_k)^\beta \omega'(x_k) \\ &\quad \times \{(1-x_k^2) \omega''(x_k) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x_k) \omega'(x_k)\}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Portanto, para cada x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, a função $T^2(x)$ será máxima. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} T^2(x) &= \tau(\bar{x} \setminus x_k) (1-x_k)^\alpha (1+x_k)^\beta \omega'(x_k) \Omega(x_k) \\ &= 0, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

com $\Omega(x) = (1-x^2)\omega''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x) \omega'(x)$.

Mas, $\Omega(x) \in \pi_n$ e $\Omega(x_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$. Pelo teorema fundamental da

álgebra,

$$\Omega(x) \equiv -\gamma(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$

isto é,

$$\Omega(x) \equiv -\gamma w(x).$$

Logo,

$$(1-x^2)\omega''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)\omega'(x) + \gamma w(x) = 0.$$

Pelo Teorema 4.2.3, temos que, se $\gamma = n(n + \alpha + \beta + 1)$, a única solução polinomial é $cP_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Consequentemente, $w(x) = cP_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Portanto, existe um único $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tal que $\partial T^2(x)/\partial x_k = 0$.

Equivalentemente existe um único ponto $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de Ξ , onde todas as derivadas de $T^2(x)$ se anulam e as coordenadas deste ponto são os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Por outro lado, o máximo global de qualquer função de n variáveis em um conjunto convexo e fechado pode ser atingido ou na fronteira desta região, ou nos pontos de máximo local. Mas $T^2(x)$ se anula na fronteira de Ξ e é estritamente positiva em Ξ . Além disso, a condição necessária para que um ponto de Ξ seja de máximo local é que todas as derivadas neste ponto sejam nulas. Então, o único ponto de máximo local, e portanto, global é $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ com coordenadas $x_k = x_{n,k}(\alpha, \beta)$, $k = 1, 2, \dots, n$. ■

4.5 Teorema de Markov

Suponha que, para todo $\tau \in (p, q)$, existe a distribuição $d\psi(x; \tau)$ definida para $x \in (a, b)$. Assim, para todo $\tau \in (p, q)$, a sequência de polinômios ortogonais parametrizados $P_n(x; \tau)$ com relação à $d\psi(x; \tau)$, existe, isto é,

$$\int_a^b x^k P_n(x; \tau) d\psi(x; \tau) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Denotemos os zeros de $P_n(x; \tau)$ por $x_{n,k}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots, n$, e suponhamos que estejam arranjados em ordem decrescente, isto é,

$$x_{n,1}(\tau) > x_{n,2}(\tau) > \dots > x_{n,n}(\tau).$$

O teorema a seguir, fornece uma condição suficiente para que os zeros $x_{n,k}(\tau)$ sejam funções crescentes (ou decrescentes) do parâmetro τ .

Teorema 4.5.1 (Markov). *Seja $P_n(x; \tau)$ o n -ésimo polinômio ortogonal com relação à distribuição $d\psi(x; \tau)$, dada por*

$$d\psi(x; \tau) = \omega(x; \tau)d\psi(x),$$

onde $\omega(x; \tau)$ é positiva e tem a primeira derivada contínua com relação a τ para $x \in (a, b)$ e $\tau \in (p, q)$. Suponhamos que as integrais

$$\int_a^b x^j \frac{\partial \omega(x; \tau)}{\partial \tau} d\psi(x), \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1 \quad (4.22)$$

convergem uniformemente em todo subintervalo compacto de (p, q) . Se

$$\frac{\partial \ln \omega(x; \tau)}{\partial \tau}$$

é uma função crescente (decrescente) de x no intervalo (a, b) , então todo zero $x_{n,k}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots, n$, de $P_n(x; \tau)$ é uma função crescente (decrescente) de τ .

Demonstração: Para toda distribuição $\psi(x)$ existe uma única fórmula de quadratura $\int_a^b f(x)d\psi(x) \approx \sum_{i=1}^n A_i f(x_i)$ que é exata para todo $f(x) \in \pi_{2n-1}$. Além disso, os nós x_i , $i = 1, \dots, n$, dessa regra de quadratura coincidem com os zeros de $P_n(x; \tau)$ e seus pesos A_i são positivos. Assim,

$$\int_a^b f(x)\omega(x; \tau)d\psi(x) = \sum_{i=1}^n A_i(\tau)f(x_{n,i}(\tau)) \quad (4.23)$$

quando $f(x) \in \pi_{2n-1}$. Seja $f(x)$ um polinômio de grau $2n-1$. Derivando (4.23) com relação a τ e mudando a ordem entre diferenciação e integração, (isso é possível devido a convergência uniforme da integral (4.22)), obtemos

$$\int_a^b f(x) \frac{\partial \omega(x; \tau)}{\partial \tau} d\psi(x) = \sum_{i=1}^n \{A'_i(\tau)f(x_{n,i}(\tau)) + A_i(\tau)f'(x_{n,i}(\tau))x'_{n,i}(\tau)\}, \quad (4.24)$$

para todo $f(x) \in \pi_{2n-1}$.

Tomemos

$$\begin{aligned} f(x) &: = \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \\ &= (const)^2 (x - x_{n,1}(\tau))^2 \dots (x - x_{n,k-1}(\tau))^2 (x - x_{n,k}(\tau)) \\ &\quad \times (x - x_{n,k+1}(\tau))^2 \dots (x - x_{n,n}(\tau))^2. \end{aligned}$$

Obviamente,

$$f(x_{n,i}(\tau)) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.25)$$

Além disso, se $i \neq k$, então

$$f'(x_{n,i}(\tau)) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, n. \quad (4.26)$$

Seja

$$\begin{aligned} w_k^2(x) &: = (const)^2 [(x - x_{n,1}(\tau)) \dots (x - x_{n,k-1}(\tau)) \\ &\quad \times (x - x_{n,k+1}(\tau)) \dots (x - x_{n,n}(\tau))]^2. \end{aligned}$$

Logo, $f(x) = [x - x_{n,k}(\tau)] w_k^2(x)$. Derivando $f(x)$ temos

$$f'(x) = w_k^2(x) + 2[x - x_{n,k}(\tau)] w'_k(x) w_k(x).$$

Portanto, $f'(x_{n,k}(\tau)) = w_k^2(x_{n,k}(\tau))$.

Por outro lado, $P_n(x; \tau) = [x - x_{n,k}(\tau)] w_k(x)$ e, portanto,

$$P'_n(x; \tau) = (x - x_{n,k}(\tau)) w'_k(x) + w_k(x).$$

Logo, $P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau) = w_k(x_{n,k}(\tau))$. Então, $[P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau)]^2 = [w_k(x_{n,k}(\tau))]^2$. Finalmente, obtemos

$$f'(x_{n,k}(\tau)) = [P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau)]^2. \quad (4.27)$$

Desde que $f(x) \in \pi_{2n-1}$, (4.24) vale.

Por outro lado, (4.26) e (4.27) implicam que $f'(x_{n,i}(\tau)) = [P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau)]^2 \delta_{ik}$ para $i = 1, \dots, n$. Logo, a igualdade (4.24) se reduz à

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \frac{\partial \omega(x; \tau)}{\partial \tau} d\psi(x) = A_k(\tau) (P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x'_{n,k}(\tau). \quad (4.28)$$

Seja $g(x; \tau)$ uma função auxiliar definida por $g(x; \tau) := \frac{\partial \omega(x; \tau)/\partial \tau}{\omega(x; \tau)}$. Então,

$$g(x_{n,k}(\tau); \tau) = \frac{\partial \omega(x_{n,k}(\tau); \tau)/\partial \tau}{\omega(x_{n,k}(\tau); \tau)}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Com esta notação podemos reescrever a igualdade (4.28) da forma

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} g(x; \tau) \omega(x; \tau) d\psi(x) = A_k(\tau) [P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau)]^2 x'_{n,k}(\tau).$$

Por outro lado, $P_n(x; \tau)$ é ortogonal em (a, b) , com relação à $d\psi(x; \tau)$, a todo polinômio de grau $n - 1$. Então,

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{(x - x_{n,k}(\tau))} \omega(x; \tau) d\psi(x) = 0. \quad (4.29)$$

Multiplicando (4.29) pela constante $g(x_{n,k}(\tau); \tau)$ segue que

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{(x - x_{n,k}(\tau))} g(x_{n,k}(\tau); \tau) \omega(x; \tau) d\psi(x) = 0.$$

Subtraindo da igualdade (4.28), obtém-se

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x; \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} (g(x; \tau) - g(x_{n,k}(\tau); \tau)) d\psi(x; \tau) = A_k(\tau) (P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x'_{n,k}(\tau), \quad (4.30)$$

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b P_n^2(x; \tau) \left(\frac{g(x; \tau) - g(x_{n,k}(\tau); \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)} \right) d\psi(x; \tau) = A_k(\tau) (P'_n(x_{n,k}(\tau); \tau))^2 x'_{n,k}(\tau). \quad (4.31)$$

Desde que $g(x; \tau)$ tem derivada contínua com relação a x , o teorema do valor médio, Teorema 2.5.2, implica que

$$g'(y; \tau) = \frac{g(x; \tau) - g(x_{n,k}(\tau); \tau)}{x - x_{n,k}(\tau)},$$

onde y é um ponto entre x e $x_{n,k}(\tau)$. Então, se $g'(y; \tau) > 0$ para todo x em (a, b) , a

função integrante em (4.31) é não negativa. Portanto, $x'_{n,k}(\tau) > 0$.

Analogamente, se $g'(y; \tau) < 0$ para todo x pertencente ao intervalo (a, b) , então $x'_{n,k}(\tau) < 0$. ■

Corolário 4.5.1 *Sejam $x_{n,k}(\alpha, \beta)$ os zeros do polinômio $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Então,*

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração: Temos que $w(\alpha, \beta; x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$. Seja β um número fixo. É imediato que

$$\ln w(x) = \ln \left[(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \right] = \alpha \ln(1-x) + \beta \ln(1+x). \quad (4.32)$$

Derivando com relação a α , temos $\frac{\partial \ln w(x)}{\partial \alpha} = \ln(1-x)$ que é uma função decrescente em x , pois $\frac{d}{dx} [\ln(1-x)] = -1/(1-x) < 0$ para todo $x \in (-1, 1)$. Consequentemente, pelo Teorema 4.5.1, segue que

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Considerando α um número fixo e usando o mesmo raciocínio acima obtemos

$$\frac{\partial x_{n,k}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad \blacksquare$$

É interessante observar o que acontece com os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ quando variamos os parâmetros α e β simultaneamente. Um exemplo típico é o comportamento dos zeros do polinômio ultraesférico (Gegenbauer) no subintervalo $(-1, 1)$ com relação à função $w(x; \lambda) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$. Pela interpretação eletrostática, é intuitivamente claro que os zeros positivos decrescem. Devido à simetria, os zeros negativos crescem quando λ cresce. Não podemos aplicar diretamente o Teorema 4.5.1 para demonstrar este resultado, pois $\partial \ln w(x, \lambda) / \partial \lambda = \ln(1-x^2)$ não é monótona em $[-1, 1]$. Consideremos os polinômios hipergeométricos $g_n^{(\lambda)}(x)$ e $h_n^{(\lambda)}(x)$ ambos de grau n .

Pelo Teorema 4.1.5, temos que $\{g_n^{(\lambda)}\}_{n=0}^\infty$ e $\{h_n^{(\lambda)}\}_{n=0}^\infty$ formam sistemas de polinômios ortogonais no intervalo $(0,1)$ com relação às funções peso $w_g(x; \lambda) = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ e $w_h(x; \lambda) = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, respectivamente.

Corolário 4.5.2 *Sejam $x_{n,k}(\lambda)$ os zeros do n -ésimo polinômio de Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$, ortogonal com relação à função peso $w(x; \lambda) = (1-x^2)^{\lambda-1/2}$, arranjados em ordem decrescente. Então,*

$$\frac{\partial x_{n,k}(\lambda)}{\partial \lambda} < 0, \quad k = 1, 2, \dots, [n/2].$$

Demonstração: Consideremos o polinômio $g_n^{(\lambda)}(x)$ definido em (4.17). Por (4.14) e pelo Teorema 4.1.5, $g_n^{(\lambda)}(x)$ é o n -ésimo polinômio ortogonal com relação a função peso $w_g(x) = x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}$. Logo,

$$\begin{aligned} \ln w_g(x; \lambda) &= \ln \left[x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}} \right] \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x) + \left(\lambda - \frac{1}{2} \right) \ln(1-x) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Derivando (4.33) com relação a λ , obtemos

$$\frac{\partial \ln w_g(x; \lambda)}{\partial \lambda} = \ln(1-x),$$

que é decrescente, pois $\frac{d}{dx} [\ln(1-x)] = -\frac{1}{1-x} < 0$ para todo $x \in (0,1)$. O Teorema 4.5.1, implica que os zeros de $g_n^{(\lambda)}(x)$, isto é, $x_{2n,k}^2(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$, são funções decrescentes de λ . Acabamos de mostrar que $\frac{\partial x_{2n,k}^2(\lambda)}{\partial \lambda} < 0$ para $\lambda \in (0,1)$ e $k = 1, 2, \dots, n$.

Por outro lado,

$$\frac{\partial x_{2n,k}^2(\lambda)}{\partial \lambda} = 2x_{2n,k}(\lambda) x'_{2n,k}(\lambda).$$

Portanto,

$$2x_{2n,k}(\lambda) x'_{2n,k}(\lambda) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.34)$$

Então, se $x_{2n,k}(\lambda)$ é um zero positivo, a primeira derivada é negativa, isto é, $x'_{2n,k}(\lambda)$ é decrescente. Analogamente, (4.34) implica que se o zero $x_{2n,k}(\lambda)$ é negativo, então a primeira derivada é positiva, isto é, $x'_{2n,k}(\lambda)$ é crescente.

Com raciocínio análogo para o polinômio $h_n^{(\lambda)}(x)$, definido em (4.18) com relação à função peso $w_h(x; \lambda) = x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}$ no subintervalo $(0, 1)$, obtemos

$$\ln w_h(x; \lambda) = \frac{1}{2} \ln(x) + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \ln(1-x). \quad (4.35)$$

Derivando a última igualdade com relação à λ , segue que

$$\frac{\partial \ln w_h(x; \lambda)}{\partial \lambda} = \ln(1-x).$$

Consequentemente, chegamos à mesma conclusão anterior. ■



Capítulo 5

Demonstrações dos Resultados Principais

Nesta seção, nosso objetivo é ajustar as notações do teorema de Routh-Hurwitz e demonstrar dois resultados importantes com os quais estaremos aptos a demonstrar os Teoremas 1.1 e 1.2.

5.1 Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios

Ortogonais

Consideremos a sequência $\{p_n(x; \tau)\}_{n=0}^{\infty}$ de polinômios ortogonais parametrizados no intervalo (c, d) , com $\tau \in (p, q)$, sendo seus coeficientes funções contínuas de τ .

Suponhamos que o coeficiente do termo de maior grau de $p_n(x; \tau)$ seja positivo, e denotemos por $x_{n,k}(\tau)$,

$$c < x_{n,n}(\tau) < x_{n,n-1}(\tau) < \dots < x_{n,1}(\tau) < d,$$

seus zeros arranjados em ordem decrescente.

Vamos aplicar a expansão de Taylor em $p_n(x; \tau)$ no ponto d . Com essa técnica, podemos tomar um outro polinômio $q_n(x; \tau)$ com todos os coeficientes positivos, mas com seus zeros localizados no intervalo $(c - d, 0)$.



Seja

$$p_n(x; \tau) = a_0(\tau) + a_1(\tau)(x - d) + \cdots + a_n(\tau)(x - d)^n, \quad \text{com } a_n(\tau) > 0, \quad (5.1)$$

a expansão de Taylor do polinômio $p_n(x; \tau)$ no ponto d , com $a_k(\tau) = p_n^{(k)}(d; \tau) / k!$. Desde que os zeros $x_{n,k}(\tau)$, $k = 1, 2, \dots, n$, de $p_n(x; \tau)$ são distintos e estão localizados no interior do segmento (c, d) , então todos os coeficientes $a_j(\tau)$, $j = 0, 1, \dots, n$, são positivos.

Consideremos o polinômio

$$q_n(x; \tau) := a_0(\tau) + a_1(\tau)x + \cdots + a_n(\tau)x^n$$

e o seu “inverso” definido por

$$\tilde{q}_n(x; \tau) := a_n(\tau) + \cdots + a_1(\tau)x^{n-1} + a_0(\tau)x^n.$$

O Lema 3.4.1, mostra a relação entre os zeros de $q_n(x; \tau)$ e $\tilde{q}_n(x; \tau)$.

Denotemos por $H(p_n; \tau_1, \tau_2)$ a matriz de Hurwitz associada ao polinômio $f_{2n+1}(x) := q_n(x^2; \tau_1) + xq_n(x^2; \tau_2)$. De acordo com a Definição 3.3.1,

$$H(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) & a_{n-2}(\tau_1) & \cdots & 0 \\ a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) & a_{n-2}(\tau_2) & \cdots & 0 \\ 0 & a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) & \cdots & 0 \\ 0 & a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Analogamente, $\tilde{H}(p_n; \tau_1, \tau_2)$ denota a matriz de Hurwitz associada ao polinômio $f_{2n+1}^*(x) := \tilde{q}_n(x^2; \tau_1) + x\tilde{q}_n(x^2; \tau_2)$. Assim,

$$\tilde{H}(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{pmatrix} a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) & a_2(\tau_1) & \cdots & 0 \\ a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) & a_2(\tau_2) & \cdots & 0 \\ 0 & a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) & \cdots & 0 \\ 0 & a_1(\tau_2) & a_2(\tau_2) & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}.$$

Para todo j , $1 \leq j \leq 2n + 1$, denotemos por $\Delta_j(p_n; \tau_1, \tau_2)$ e $\tilde{\Delta}_j(p_n; \tau_1, \tau_2)$ o j -ésimo menor principal de $H(p_n; \tau_1, \tau_2)$ e de $\tilde{H}(p_n; \tau_1, \tau_2)$, respectivamente. Para os

primeiros 3, temos

$$\Delta_1(p_n; \tau_1, \tau_2) = a_n(\tau_1), \quad \Delta_2(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) \\ a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) \end{vmatrix}$$

e

$$\Delta_3(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) & a_{n-2}(\tau_1) \\ a_n(\tau_2) & a_{n-1}(\tau_2) & a_{n-2}(\tau_2) \\ 0 & a_n(\tau_1) & a_{n-1}(\tau_1) \end{vmatrix}$$

e

$$\tilde{\Delta}_1(p_n; \tau_1, \tau_2) = a_0(\tau_1), \quad \tilde{\Delta}_2(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) \\ a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) \end{vmatrix}$$

e

$$\tilde{\Delta}_3(p_n; \tau_1, \tau_2) = \begin{vmatrix} a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) & a_2(\tau_1) \\ a_0(\tau_2) & a_1(\tau_2) & a_2(\tau_2) \\ 0 & a_0(\tau_1) & a_1(\tau_1) \end{vmatrix}.$$

Teorema 5.1.1 *Seja o coeficiente $a_k(\tau)$, na representação (5.1) do polinômio ortogonal parametrizado $p_n(x, \tau)$, função contínua com relação à τ . Então, as desigualdades*

$$x_{n,k}(\tau_2) < x_{n,k}(\tau_1), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

são satisfeitas para todo τ_2 em uma vizinhança suficientemente pequena de τ_1 se, e somente se, $\Delta_j(p_n; \tau_1, \tau_2) > 0$ para $j = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Demonstração: Sabemos que $p_n(x; \tau)$ são polinômios ortogonais parametrizados no segmento (c, d) . Portanto, seus zeros pertencem ao intervalo (c, d) . Isto implica que os zeros de $q_n(x; \tau)$ são reais, negativos, distintos e estão localizados em $(c - d, 0)$. Pelo Teorema 2.5.3, esses zeros são funções contínuas do parâmetro τ , pois os coeficientes dependem continuamente de τ . Então, os zeros de $q_n(x; \tau_2)$ precedem os zeros de $q_n(x; \tau_1)$ quando $|\tau_1 - \tau_2| < \varepsilon$ para ε suficientemente pequeno se, e somente se, os polinômios $q_n(x; \tau_1)$ e $q_n(x; \tau_2)$ formam um par positivo. Logo, pelo Teorema 3.4.4, satisfazem

$$x_{n,k}(\tau_2) < x_{n,k}(\tau_1), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

se, e somente se, $\Delta_j(p_n; \tau_1, \tau_2) > 0$ para $j = 1, 2, \dots, 2n + 1$. ■



Teorema 5.1.2 *Seja o coeficiente $a_k(\tau)$, na representação (5.1) do polinômio ortogonal parametrizado $p_n(x, \tau)$, função contínua de τ . Então, as desigualdades*

$$x_{n,k}(\tau_1) < x_{n,k}(\tau_2), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

são satisfeitas para todo τ_2 em uma vizinhança suficientemente pequena de τ_1 se, e somente se, $\tilde{\Delta}_j(p_n; \tau_1, \tau_2) > 0$ para $j = 1, 2, \dots, 2n + 1$.

Demonstração: A demonstração deste resultado é similar à demonstração do teorema anterior, usando ao invés do Teorema 3.4.4, o Teorema 3.4.5. ■

5.2 Demonstrações dos Teoremas Principais

5.2.1 Demonstração do Teorema 1.1

Teorema 1.1 *Seja n um inteiro positivo fixo.*

Se $x_{n,k}(a, b) < x_{n,k}(\alpha, \beta)$ para $k = 1, 2, \dots, n$, então

$$b < \min \left\{ \beta + \frac{n + \beta}{n + \alpha} (a - \alpha), \beta + \frac{n + \beta}{1 + \alpha} (a - \alpha) \right\}.$$

Se $x_{n,k}(a, b) > x_{n,k}(\alpha, \beta)$ para $k = 1, 2, \dots, n$, então

$$b > \max \left\{ \beta + \frac{n + \beta}{n + \alpha} (a - \alpha), \beta + \frac{n + \beta}{1 + \alpha} (a - \alpha) \right\}.$$

Demonstração: Usaremos a representação do polinômio de Jacobi em termos da função hipergeométrica, isto é,

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(-n, n + \alpha + \beta + 1; \alpha + 1; \frac{1 - x}{2} \right).$$

Pelos resultados da Seção 4.4, vamos considerar

$$q_n^{(\alpha, \beta)}(y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k} y^k,$$

cujos zeros são $(x_{n,k}(\alpha, \beta) - 1)/2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Analogamente, os zeros de

$$q_n^{(a,b)}(y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(n+a+b+1)_k}{(a+1)_k} y^k$$

são $(x_{n,k}(a, b) - 1)/2$.

Consideremos a matriz quadrada $H(p_n; \alpha, \beta; a, b)$ de ordem $2n+1$, cujos elementos não nulos são

$$\begin{aligned} h_{1,j} &= \binom{n}{j-1} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_{n+1-j}}{(\alpha+1)_{n+1-j}} \\ h_{2,j} &= \binom{n}{j-1} \frac{(n+a+b+1)_{n+1-j}}{(a+1)_{n+1-j}}, \end{aligned}$$

para $j = 1, 2, \dots, n$, e $h_{2k+1,j+k} = h_{1,j}$, $h_{2k+2,j+k} = h_{2,j}$.

Em outras palavras, $H_{2n+1}(P_n; \alpha, \beta; a, b)$ é a matriz de Hurwitz associada ao polinômio

$$f_{2n+1}(y) = q_n^{(\alpha,\beta)}(y^2) + yq_n^{(a,b)}(y^2).$$

Suponhamos (a, b) pertencente a uma vizinhança suficientemente pequena de (α, β) .

Pelo Teorema 3.4.2, os zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ precedem os zeros de $P_n^{(a,b)}(x)$ se, e somente se, os menores principais $\Delta_j(\alpha, \beta; a, b)$ de $H_{2n+1}(P_n; \alpha, \beta; a, b)$ são positivos. Em particular, para $j = 2$, temos

$$\Delta_2(\alpha, \beta; a, b) = \begin{vmatrix} \frac{(2n+\alpha+\beta)(n+\alpha+\beta+1)_{n-1}}{(\alpha+n)(\alpha+1)_{n-1}} & \frac{n(n+\alpha+\beta+1)_{n-1}}{(\alpha+1)_{n-1}} \\ \frac{(2n+a+b)(n+a+b+1)_{n-1}}{(a+n)(a+1)_{n-1}} & \frac{n(n+a+b+1)_{n-1}}{(a+1)_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Portanto,

$$\Delta_2(\alpha, \beta; a, b) = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)_{n-1}}{(\alpha+1)_{n-1}} \frac{(n+a+b+1)_{n-1}}{(a+1)_{n-1}} \left(\frac{2n+\alpha+\beta}{\alpha+n} - \frac{2n+a+b}{a+n} \right).$$

Como $\Delta_2(\alpha, \beta; a, b)$ é positivo para todo n , temos que

$$\frac{2n+\alpha+\beta}{\alpha+n} - \frac{2n+a+b}{a+n} > 0.$$

Logo, $(n+\beta)(a-\alpha) + (-b+\beta)(n+\alpha) > 0$. Dividindo por $n+\alpha$, obtemos

$$b-\beta < \frac{n+\beta}{n+\alpha}(a-\alpha).$$

Em outras palavras, (a, b) tem que estar no semi-plano inferior com relação à reta que passa pelos pontos (α, β) e $(-n, -n)$. Observe que $\Delta_2(\alpha, \beta; a, b) = -\Delta_2(a, b; \alpha, \beta)$. Assim, para (a, b) próximo de (α, β) , os zeros de $P_n^{(a,b)}(x)$ precedem os zeros $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Então, (a, b) tem que pertencer ao semi-plano oposto ao de (α, β) .

Por outro lado, seja $\tilde{H}(P_n; \alpha, \beta; a, b)$ a matriz de Hurwitz de ordem $2n + 1$ associada a

$$f_{2n+1}^*(y) = \tilde{q}_n^{(\alpha,\beta)}(y^2) + y\tilde{q}_n^{(a,b)}(y^2).$$

Tomemos o menor principal de ordem 2 da matriz $\tilde{H}(P_n; \alpha, \beta; a, b)$

$$\tilde{\Delta}_2(\alpha, \beta; a, b) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)} \\ 1 & \frac{n(n+a+b+1)}{(a+1)} \end{vmatrix}.$$

Logo,

$$\tilde{\Delta}_2(\alpha, \beta; a, b) = n \left(\frac{n+a+b+1}{a+1} - \frac{n+\alpha+\beta+1}{\alpha+1} \right).$$

O Teorema 3.4.2 implica que se (a, b) está suficientemente próximo de (α, β) e $x_{n,k}(\alpha, \beta) < x_{n,k}(a, b)$ para $k = 1, 2, \dots, n$, então $\tilde{\Delta}_2(\alpha, \beta; a, b)$ tem que ser positivo, o que é equivalente a

$$\frac{n+a+b+1}{a+1} - \frac{n+\alpha+\beta+1}{\alpha+1} > 0.$$

Resolvendo, obtemos

$$b - \beta > \frac{n+\beta}{\alpha+1}(a - \alpha).$$

Isto significa que (a, b) tem que pertencer ao semi-plano superior à reta que passa pelos pontos (α, β) e $(-1, -n)$. O argumento $\tilde{\Delta}_2(\alpha, \beta; a, b) = -\tilde{\Delta}_2(a, b; \alpha, \beta)$ implica que, se as desigualdades $x_{n,k}(a, b) < x_{n,k}(\alpha, \beta)$ para $k = 1, 2, \dots, n$, são satisfeitas para todos os zeros de $P_n^{(a,b)}(x)$ e $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ quando (a, b) está próximo a (α, β) , então (a, b) tem que pertencer ao semi-plano inferior à reta que passa por (α, β) e $(-1, -n)$. ■

5.2.2 Demonstração do Teorema 1.2

Teorema 1.2 *Seja n um inteiro positivo.*

Se $f_n(\lambda)$ é positiva e $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$, são funções crescentes de λ , para $\lambda > -1/2$, então

$$\frac{f'_{2n}(\lambda)}{f_{2n}(\lambda)} > \frac{1}{2(\lambda + n)}$$

e

$$\frac{f'_{2n+1}(\lambda)}{f_{2n+1}(\lambda)} > \frac{1}{2(\lambda + n + 1)}.$$

Além disso, se $(\lambda + c_n)^{1/2}x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, [n/2]$, são funções crescentes de λ , para $\lambda > -1/2$, então

$$c_{2n} < \frac{4n^2 + n + 1}{4n + 2},$$

e

$$c_{2n+1} < \frac{4n^2 + 7n + 9}{4n + 6}.$$

Demonstração: Mostraremos primeiramente, o caso par. Sabemos, por (4.17), que

$$g_n^{(\lambda)}(x) := {}_2F_1(-n, n + \lambda; 1/2; x)$$

é um polinômio hipergeométrico de grau n , cujos zeros são $x_{2n,k}^2(\lambda)$. Em outras palavras, eles coincidem com o quadrado dos zeros positivos de $C_{2n}^{(\lambda)}(x)$. Seja $G_n(x; \lambda) := g_n(-x/f_{2n}^2(\lambda); \lambda)$. Assim, para toda função não nula $f_{2n}(\lambda)$, os zeros de

$$G_n(x; \lambda) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n + \lambda)_j}{(1/2)_j} \frac{1}{f_{2n}^{2j}(\lambda)} x^j,$$

são $-(f_{2n}(\lambda)x_{2nk}(\lambda))^2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Logo, os produtos $f_{2n}(\lambda)x_{2n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$, são funções crescentes de λ se, e somente se, para todo ε suficientemente pequeno, os polinômios $G_n(x; \lambda)$ e $G_n(x; \lambda + \varepsilon)$ formam um par positivo. Isto é, evidentemente, equivalente ao fato de $\tilde{G}_n(x; \lambda + \varepsilon)$ e $\tilde{G}_n(x; \lambda)$ formarem um par positivo, onde $\tilde{G}_n(x; \lambda)$

denota o “inverso” de $G_n(x; \lambda)$.

Seja $\tilde{H}_n(C_{2n}; \lambda, \varepsilon)$ a matriz de Hurwitz associada ao polinômio

$$\tilde{G}_n(x^2; \lambda + \varepsilon) + x\tilde{G}_n(x^2; \lambda).$$

Temos, então, que

$$\tilde{H}_n(C_{2n}; \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+\varepsilon)_1}{(1/2)_1 f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon)} & \binom{n}{2} \frac{(n+\lambda+\varepsilon)_2}{(1/2)_2 f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon)} & \cdots & 0 \\ 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda)_1}{(1/2)_1 f_{2n}^2(\lambda)} & \binom{n}{2} \frac{(n+\lambda)_2}{(1/2)_2 f_{2n}^2(\lambda)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+\varepsilon)_1}{(1/2)_1 f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon)} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda)_1}{(1/2)_1 f_{2n}^2(\lambda)} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

O Teorema 5.1.2, implica que os produtos $f_{2n}(\lambda) x_{2n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$ são funções crescentes de λ se, e somente se, todos os menores principais $\tilde{\Delta}_j(C_{2n}; \lambda, \varepsilon)$, $j = 1, 2, \dots, 2n+1$, de $\tilde{H}_n(C_{2n}; \lambda, \varepsilon)$ são positivos para todo ε positivo suficientemente pequeno.

Observe que $\tilde{\Delta}_2(C_{2n}; \lambda, \varepsilon)$ é positivo se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+\varepsilon)_1}{(1/2)_1 f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon)} \\ 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda)_1}{(1/2)_1 f_{2n}^2(\lambda)} \end{vmatrix} > 0.$$

Isto é,

$$\frac{2n(n+\lambda)}{f_{2n}^2(\lambda)} - \frac{2n(n+\lambda+\varepsilon)}{f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon)} > 0,$$

ou seja,

$$(n+\lambda) \{ f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon) - f_{2n}^2(\lambda) \} - \varepsilon f_{2n}^2(\lambda) > 0.$$

Resolvendo, temos

$$\frac{1}{f_{2n}^2(\lambda)} \frac{f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon) - f_{2n}^2(\lambda)}{\varepsilon} > \frac{1}{n+\lambda}.$$

Fazendo ε tender a zero e tendo em mente que $f_{2n}(\lambda)$ é positivo, segue que

$$\frac{1}{f_{2n}^2(\lambda)} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_{2n}^2(\lambda+\varepsilon) - f_{2n}^2(\lambda)}{\varepsilon} > \frac{1}{n+\lambda}. \quad (5.2)$$

Portanto,

$$\frac{f'_{2n}(\lambda)}{f_{2n}(\lambda)} > \frac{1}{2(n+\lambda)}. \quad (5.3)$$

Vamos restringir nossas considerações às funções da forma $f_{2n}(\lambda) = (\lambda + c_{2n})^{1/2}$. Então, (5.3) é verdadeira se $c_{2n} < n$. Assim, $f_{2n}^2(\lambda) = \lambda + n + d$ com $d = d_{2n} < 0$. Segue, pelo processo de eliminação de Gauss, que

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3(C_{2n}; \lambda, \varepsilon) &= \frac{(n-1)(n+\lambda+\varepsilon)(n+1+\lambda+\varepsilon)}{3(n+\lambda+\varepsilon+d)^2} \\ &\quad + \frac{2n(n+\lambda)(n+\lambda+\varepsilon)}{(n+\lambda+d)(n+\lambda+\varepsilon+d)} - \frac{(n-1)(n+\lambda)(n+1+\lambda)}{3(n+\lambda+d)^2} \\ &\quad - \frac{2n(n+\lambda+\varepsilon)^2}{(n+\lambda+\varepsilon+d)^2} \\ &= \frac{-\varepsilon \{A_e(n, d)\lambda^2 + B_e(n, d)\lambda + C_e(n, d)\}}{3(n+\lambda+d)^2(n+\lambda+\varepsilon+d)^2}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde

$$\begin{aligned} A_e(n, d) &= 2d(2n+1) + n - 1, \\ B_e(n, d) &= d^2(2+4n) + (-1+n)(2n+\varepsilon) + 2d(1+2n)(2n+\varepsilon), \\ C_e(n, d) &= n(-1+n)(n+\varepsilon) + 2dn(1+2n)(n+\varepsilon) + \\ &\quad d^2(1+\varepsilon+n(1+4n+5\varepsilon)). \end{aligned}$$

Desde que o denominador de (5.4) e ε são positivos, então $\tilde{\Delta}_3(C_{2n}; \lambda, \varepsilon)$ é positivo para λ suficientemente grande. Mas, isso ocorre somente quando o coeficiente do termo de maior grau, $A_e(n, d)$, da expressão (5.4) for negativo, ou seja, $2d(2n+1) + n - 1 < 0$. Logo,

$$d < -\frac{1}{4} + \frac{3}{2(4n+2)}.$$

Portanto,

$$f_{2n}^2(\lambda) < \lambda + n - \frac{1}{4} + \frac{3}{2(4n+2)}.$$

A demonstração para o caso ímpar é feita utilizando-se a mesma técnica. Desde que, por meio da fórmula (4.18), os zeros do polinômio

$$h_n^{(\lambda)}(x) = {}_2F_1(-n, n + \lambda + 1; 3/2; x)$$

são $x_{2n+1,k}^2(\lambda)$, então os zeros de

$$\begin{aligned} H_n(x; \lambda) &= h_n^{(\lambda)}(-x/f_{2n+1}^2(\lambda)) \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n + \lambda + 1)_j}{(3/2)_j} \frac{1}{f_{2n+1}^{2j}(\lambda)} x^j \end{aligned}$$

são $-(f_{2n+1}(\lambda) x_{2n+1,k}(\lambda))^2$, $k = 1, 2, \dots, n$. Logo, os produtos $f_{2n+1}(\lambda) x_{2n+1,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, n$, são funções crescentes de λ se, e somente se, todos os menores principais $\tilde{\Delta}_j(C_{2n+1}; \lambda, \varepsilon)$ de

$$\tilde{H}(C_{2n+1}; \lambda, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+\varepsilon+1)_1}{(3/2)_1 f_{2n+1}^2(\lambda+\varepsilon)} & \binom{n}{2} \frac{(n+\lambda+\varepsilon+1)_2}{(3/2)_2 f_{2n+1}^4(\lambda+\varepsilon)} & \dots & 0 \\ 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+1)_1}{(3/2)_1 f_{2n+1}^2(\lambda)} & \binom{n}{2} \frac{(n+\lambda)_2}{(3/2)_2 f_{2n+1}^4(\lambda)} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+\varepsilon+1)_1}{(3/2)_1 f_{2n+1}^2(\lambda+\varepsilon)} & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+1)_1}{(3/2)_1 f_{2n+1}^2(\lambda)} & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

e ε são positivos, para ε suficientemente pequeno. Então, $\tilde{\Delta}_2(C_{2n+1}; \lambda, \varepsilon) > 0$ se, e somente se,

$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+\varepsilon+1)_1}{(3/2)_1 f_{2n+1}^2(\lambda+\varepsilon)} \\ 1 & \binom{n}{1} \frac{(n+\lambda+1)_1}{(3/2)_1 f_{2n+1}^2(\lambda)} \end{vmatrix} > 0,$$

ou seja,

$$\frac{(n+\lambda+1)_1}{f_{2n+1}^2(\lambda)} - \frac{(n+\lambda+\varepsilon+1)_1}{f_{2n+1}^2(\lambda+\varepsilon)} > 0.$$

Consequentemente,

$$\frac{1}{f_{2n+1}^2(\lambda)} \frac{f_{2n+1}^2(\lambda+\varepsilon) - f_{2n+1}^2(\lambda)}{\varepsilon} > \frac{1}{n+\lambda+1}.$$

Pelo mesmo raciocínio exposto em (5.2), segue que

$$\frac{f'_{2n+1}(\lambda)}{f_{2n+1}(\lambda)} > \frac{1}{2(n+\lambda+1)}. \quad (5.5)$$

Nossa intenção é encontrar multiplicadores da forma $f_{2n+1}(\lambda) = (\lambda + c_{2n+1})^{1/2}$.

Neste caso, segue, de (5.5), que $c_{2n+1} < n+1$. Seja $c_{2n+1} < n+d$ com $d = d_{2n+1} < 1$.

Substituindo $f_{2n+1}^2(\lambda) = \lambda + n + d$ em $\tilde{H}(C_{2n+1}; \lambda, \varepsilon)$ e aplicando a técnica de eliminação de Gauss, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_3(C_{2n+1}; \lambda, \varepsilon) &= -\frac{(-1+n)(1+n+\lambda)}{5(d+n+\lambda)^2} - \frac{2n(1+n+\lambda+\varepsilon)^2}{(d+n+\lambda+\varepsilon)^2} \\ &\quad + \frac{(-1+n)(1+n+\lambda+\varepsilon)(2+n+\lambda+\varepsilon)}{5(d+n+\lambda+\varepsilon)^2} \\ &\quad + \frac{2n(1+n+\lambda)(1+n+\lambda+\varepsilon)}{3(d+n+\lambda)(d+n+\lambda+\varepsilon)} \\ &= \frac{-\varepsilon \{A_0(n, d)\lambda^2 + B_0(n, d)\lambda + C_0(n, d)\}}{15(n+\lambda+d)^2(n+\lambda+\varepsilon+d)^2}, \end{aligned}$$

onde

$$A_0(n, d) = 2(2n+3)d - (n+9),$$

$$B_0(n, d) = -12 - 2n(8+n) + 2d^2(3+2n) - (9+n)\varepsilon + 2d(3+2n)(2n+\varepsilon),$$

$$\begin{aligned} C_0(n, d) &= -6\varepsilon - n(3+n)(-4+n+\varepsilon) + 2d(-1+n)(6+n(5+2n+2\varepsilon)) \\ &\quad + d^2(3(3+\varepsilon) + n(7+4n+7\varepsilon)). \end{aligned}$$

Sabemos que o denominador $15(n+\lambda+d)^2(n+\lambda+\varepsilon+d)^2$ e ε são positivos.

Sendo assim, para λ suficientemente grande, segue que $A_0(n, d)$ é negativo. Logo,

$$d < \frac{n+9}{2(2n+3)}.$$

Mas $c_{2n+1} < n+d$. Daí, $c_{2n+1} < n + \frac{n+9}{2(2n+3)}$ ou, equivalentemente,

$$c_{2n+1} < n + \frac{1}{4} + \frac{15}{4(2n+3)}.$$

Portanto,

$$f_{2n+1}^2(\lambda) < \lambda + n + \frac{1}{4} + \frac{15}{4(2n+3)}. \quad \blacksquare$$

Referências Bibliográficas

- [1] S. AHMED, M.E MULDOON E R. SPIGLER, Inequalities and numerical bounds for the zeros of ultraspherical polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **17**(1986), 1000-1007.
- [2] T.S. CHIHARA, "An introduction to orthogonal polynomials", *Gordon and Breach*, New York, 1978.
- [3] R.V. CHURCHILL, "Variáveis complexas e suas aplicações", McGrall Hill, 1975.
- [4] D.K. DIMITROV, On a conjecture concerning monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials, *J. Approx. Theory* **85**(1996), 88-97.
- [5] D.K. DIMITROV, Electrostatic interpretation and bounds for the extreme zeros of classical orthogonal polynomials, *Bull. Greek Math. Soc.* **40**(1997), 43-48.
- [6] D.K. DIMITROV, Connections coefficients and zeros of othogonal polynomials, preprint.
- [7] D.K. DIMITROV E R.O. RODRIGUES, On the behaviour of zeros of Jacobi polynomial, submetido.
- [8] A. ELBERT E A. LAFORGIA, A note to the paper of Ahmed, Muldoon and Spigler, *SIAM J. Math. Anal.* **17**(1986), 1008-1009.
- [9] A. ELBERT E P.D. SIAFARIKAS, Monotonicity properties of the zeros of ultraspherical polynomials, *J. Approx. Theory* **97**(1999), 31-39.
- [10] F.R. GANTMACHER, "The theory of matrices, Vol. 2," *Chelsea, New York*, 1959.
- [11] E.K. IFANTIS E P.D. SIAFARIKAS, Differential inequalities on the greatst zero of Laguerre and ultraespherical polynomials, in "*Actas del VI Simposium on Polinomios Ortogonales Y Aplicaciones, Gijon*", 1989, pp. 187-197.
- [12] M.E.H. ISMAIL, The variation of zeros of certain orthogonal polynomials, *Advances in Appl. Math.* **8**(1987), 111-118.
- [13] M.E.H. ISMAIL, Monotonicity of zeros of orthogonal polynomials, in "q-Series and Partitions" (D. Stanton, Ed.), Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 177-190.
- [14] M.E.H. ISMAIL E J. LETESSIER, Monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials, in "Ortgoghonal polynomials and their applications" (M. Alfaro, J.S. Dehesa, F.J. Marcellan, J.L. Rubio de Francia, and J. Vinuesa, Eds), *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. **1329**, Springer Verlag, Berlin, 1988, pp. 329-330.



- [15] A. LAFORGIA, A monotonic property for the zeros of ultraspherical polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **83**(1981), 757-758.
- [16] A. MARKOV, Sur les racines de certaines équations (second note), *Math. Ann.* **27**(1866), 177-182.
- [17] M.E. MULDOON, Properties of zeros of orthogonal polynomials and related functions, *J. Comput. Appl. Math.* **48**(1993), 167-186.
- [18] L.E. SOUSA, "Um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais", Dissertação de mestrado, IBILCE-UNESP-BR, 1999.
- [19] R. SPIGLER, On the monotonic variation of the zeros of ultraspherical polynomials with parameter, *Canad. Math. Bull.* **27**(1984), 472-477.
- [20] T.J. STIELTJES, Sur les racines de l'équations $X_n = 0$, *Acta Math.* **9**(1886), 385-400.
- [21] G. SZEGŐ, "Orthogonal polynomials", 4th ed., *Amer. Math. Soc. Coll. Publ.*, Vol. 23 , Providence, RI, 1975.
- [22] E.C. TITCHMARSH, "The theory of functions", 2th ed., Oxford University Press, 1939.



