

MESTRADO



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Pós-Graduação em Engenharia Civil

**Análise não linear de chapas através de uma formulação do
método dos elementos de contorno com convergência
quadrática**

VINÍCIO DA CUNHA DÓRO

Ilha Solteira-SP

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**Análise Não Linear de Chapas Através de uma
Formulação do Método dos Elementos de Contorno com
Convergência Quadrática**

VINÍCIO DA CUNHA DÓRO

Orientadora :Prof.^a Dr.^a Gabriela Rezende Fernandes

Co-orientador:Prof. Dr. Rogério Oliveira Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada à
Faculdade de Engenharia do Campus de
Ilha Solteira – UNESP, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Mestre
em Engenharia Civil.

Área de Conhecimento: Estruturas

Ilha Solteira - SP

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

- D715a Dóro, Vinício da Cunha.
Análise não linear de chapas através de uma formulação do método dos elementos de contorno com convergência quadrática / Vinício da Cunha Dóro .
-- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
129 f. : il.
- Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Estruturas, 2015
- Orientador: Gabriela Rezende Fernandes
Co-orientador: Rogério Oliveira Rodrigues
Inclui bibliografia
1. Método dos elementos de contorno. 2. Análises não lineares. 3. Operador tangente consistente.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Análise não linear de chapas através de uma formulação do método dos elementos de contorno com convergência quadrática

AUTOR: VINÍCIO DA CUNHA DORO

ORIENTADORA: Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. ROGÉRIO DE OLIVEIRA RODRIGUES

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL, Área: ESTRUTURAS, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. GABRIELA REZENDE FERNANDES

Curso de Engenharia Civil - Campus Catalão / Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. RENATO BERTOLINO JUNIOR

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Prof. Dr. CARLOS HUMBERTO MARTINS

Departamento de Engenharia Civil - Centro de Tecnologia / Universidade Estadual de Maringá

Data da realização: 27 de janeiro de 2015.

DEDICO

Aos meus pais **Adair Doro** e **Carmen Maria da Cunha Doro**,
que sempre apoiaram os meus projetos e me deram suporte para
que eu os concretizasse.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por todas as oportunidades oferecidas para que eu possa me tornar uma pessoa melhor.

Aos meus pais, pela força e dedicação que me deram nessa jornada.

Aos irmãos Dario, Leone e Victor Kaye, pelo apoio e conselhos nos momentos de dificuldade.

Aos amigos Riterson, Marcus, Aurélio e Jairo, pelas descontrações tão necessárias.

Aos colegas de trabalho Luiz Gustavo e Leandro Contaddini, pelos trabalhos realizados em conjunto.

A orientadora Gabriela Rezende Fernandes, pela paciência e dedicação para que eu concluísse o mestrado.

Aos orientadores Renato Bertolino Junior e Rogerio Oliveira Rodrigues, pela orientação durante a graduação para que eu me interessasse pela área de estruturas na engenharia civil.

A minha companheira Bibiana Perdomo de Freitas, pela cumplicidade e amor.

RESUMO

No presente trabalho foi desenvolvida a formulação linear do método dos elementos de contorno para a análise estrutural de chapas com carregamento normais e tangenciais a sua superfície. A equação integral do deslocamento é deduzida a partir do Teorema de Reciprocidade de Betti, considerando espessura constante na chapa. Posteriormente foi detalhada a teoria para a análise não linear de chapas através do MEC (método dos elementos de contorno) introduzindo ao sistema de equações campos de esforços iniciais (ou plásticos) em células definidas no domínio. A solução não linear se obtém por uma formulação implícita, na qual as correções das deformações são feitas através do operador tangente consistente que se atualiza a cada nova iteração, levando a convergência quadrática do processo iterativo. Utilizou-se como critério de ruptura o de Von Misses. Exemplos foram analisados a fim de mostrar a convergência quadrática no processo iterativo e também a convergência dos resultados numéricos à medida que se refinava a discretização do contorno em elementos e do domínio em células.

Palavras-chave - Método dos elementos de contorno. Operador tangente consistente. Análises não lineares.

ABSTRACT

In this paper the linear formulation of the boundary element method (BEM) for analyzing the stretching plate problem written in terms of displacements and tractions in the normal and tangential directions to the boundary has been developed. The integral equation of displacement is derived from Betti's reciprocity theorem, considering constant thickness on the plate. Then the BEM nonlinear formulation has been obtained by considering an initial (or inelastic) force field over the plate domain, requiring therefore the plate domain discretization into cells. The nonlinear solution is obtained by an implicit formulation, where the strains correction to be computed for each iteration is obtained by considering the consistent tangent operator, leading to a quadratic convergence rate in the iterative procedure required to achieve the plate equilibrium. In the numerical examples, the Von Mises criterion has been adopted to model the material behavior, showing the quadratic convergence rate. Besides different discretizations have been analyzed in order to show as well the results convergence.

Keywords - Boundary element method. Consistent tangent operator. Nonlinear analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Fluxograma para resolução de problemas utilizando MEC.....	17
Figura 2- Domínio qualquer de estudo	18
Figura 3- Estado triplo de tensões para um elemento infinitesimal.....	18
Figura 4- Tensões e forças de superfície num elemento infinitesimal	21
Figura 5- Sólido sujeito a um estado plano de tensão.....	22
Figura 6- Inserção do contorno circular Γ_ξ centrado em S	31
Figura 7- Integração ao longo do contorno na região carregada	36
Figura 8 – Pontos p e q no domínio da chapa	37
Figura 9- Geometria do Elemento	40
Figura 10 – Elementos descontínuos.....	42
Figura 11 – Rotação da Chapa no plano (X1,X2)	47
Figura 12- Exemplo de uma chapa com um carregamento em p_n	49
Figura 13 – Malha dezesseis elementos ao longo do contorno	50
Figura 14- Deslocamentos ao longo da chapa	50
Figura 15- Exemplo de uma chapa com dois carregamentos em p_n	51
Figura 16- Malha com cento e oito pontos ao longo do contorno	51
Figura 17- Deslocamento X1 no eixo horizontal da chapa.....	52
Figura 18- Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa.....	52
Figura 19- Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa.....	53
Figura 20- Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa.....	53
Figura 21- Exemplo chapa com um carregamento em p_s	54
Figura 22- Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa.....	54
Figura 23- Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa.....	54
Figura 24- Exemplo chapa com um carregamento em os ao longo do contorno.....	55
Figura 25- Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa.....	56
Figura 26- Deslocamento X1 no eixo horizontal da chapa.....	56
Figura 27- Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa.....	57
Figura 28- Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa.....	57
Figura 29- Exemplo chapa com um carregamento em p_s e p_n	58

Figura 30 – Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa.....	58
Figura 31 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa.....	59
Figura 32 – Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa.....	59
Figura 33 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa.....	60
Figura 34 – Chapa de alumínio com furo quadrado	61
Figura 35 – Chapa de alumínio com furo em losango e cento e oitenta e cinco pontos no contorno	61
Figura 36 – Deslocamento X1 no eixo horizontal da chapa com furo em losango.....	62
Figura 37 – Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa da chapa com furo em losango...	62
Figura 38 – Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa da chapa com furo em losango	63
Figura 39 – Discretização no Ansys da chapa com furo em losango	63
Figura 40 – Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa da chapa com furo em losango	64
Figura 41 – Chapa de alumínio com furo quadrado	64
Figura 42 – Chapa de alumínio furo quadrado 100 elementos ou duzentos e seis pontos no contorno	65
Figura 43 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado	66
Figura 44 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado	66
Figura 45 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado	67
Figura 46 – Discretização no Ansys da chapa com furo quadrado	67
Figura 47 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado	68
Figura 48 – Chapa de alumínio com furo circular.....	68
Figura 49 – Chapa de alumínio com furo circular e 189 pontos ou noventa e dois elementos no contorno	69
Figura 50 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular	70
Figura 51 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular	70
Figura 52 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular	71
Figura 53 – Discretização no Ansys da chapa com furo quadrado	71
Figura 54 – Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular	72
Figura 55 - Modelo Elasto-Plástico com Encruamento Isótropo	73
Figura 56 - Correção da Tensão no Modelo Elasto-plástico Uniaxial com Encruamento Isótropo Positivo	78
Figura 57 - Representação Geométrica do Critério de Von Mises no caso biaxial.....	83

Figura 58 – Elemento representativo.....	90
Figura 59 – Domínio Ω_e e Ω_c	93
Figura 60 - Célula Triangular com Sistema de Coordenadas Homogêneas.....	96
Figura 61 - Sistema de coordenadas cilíndricas Fonte Fernandes 2003.....	98
Figura 62 - Célula cujos nós não são coincidentes com seus vértices.....	98
Figura 63 – Gráfico tensão x deformação do material do exemplo 4.8.1	110
Figura 64 – Malha 24(8) com vinte quatro células no domínio e oito elementos no contorno	111
Figura 65 – Deslocamento do ponto PC2 para análise não linear com carregamento em p_n	111
Figura 66 – Resíduo nos incrementos da malha 8(4).	113
Figura 67 – Evolução das reações nos apoios da malha 24(8).....	114
Figura 68 – Malha 96(52) com noventa e seis células no domínio e cinquenta e dois elementos no contorno	115
Figura 69 – Deslocamento do ponto PC2 para análise não linear com carregamento em p_s	115
Figura 70 – Variação de p_n ao longo dos treze incrementos.....	116
Figura 71 – Malha 192(52) com cinquenta e dois elementos no contorno e cento e noventa e duas células no domínio	117
Figura 72 – Deslocamento X1 do ponto P4 para análise não linear com carregamento em p_s e p_n	118
Figura 73 – Deslocamento X2 do ponto P4 para análise não linear com carregamento em p_s e p_n	118
Figura 74 – Força em X1 ao longo do eixo central da chapa	120
Figura 75 – Malha 250(100) com cem elementos no contorno e duzentos e cinquenta células no domínio.....	121
Figura 76 – Deslocamento do ponto 1 para malhas com 24,88 e 250 células.....	122
Figura 77 – Forças dos pontos cinquenta a sessenta da chapa com furo quadrado.....	123
Figura 78 – Malha 450(92) com noventa e dois elementos no contorno e quatrocentos e cinquenta células no domínio	124
Figura 79 – Deslocamento do ponto 1 para malhas 49,276,450 e Ansys.....	125
Figura 80 – Forças nos pontos de colocação para forças da chapa circular	126

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Convergência da malha 8(8) com carregamento em p_n

Tabela 2 – Convergência da malha 24(8) com carregamento em p_n

Tabela 3 – Convergência da malha 96(52) com carregamento em p_s

Tabela 4 – Convergência da malha 48(28) com carregamento em p_s e p_n

Tabela 5 – Convergência da malha 192(52) com carregamento em p_s e p_n

Tabela 6 – Convergência da malha 100(250) com furo quadrado

Tabela 7 – Convergência da malha 450(92) com furo circular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
1.1 Definição do problema.....	15
1.2 Objetivo.....	15
1.3 Justificativa.....	15
1.4 Apresentação da estrutura da dissertação.....	16
2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELÁSTICO LINEAR BIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MEC.....	17
2.1 Definição da equação diferencial e relações de tensão e deformação.....	18
2.1.1 <i>Equações de equilíbrio</i>	19
2.1.2 <i>Relações Tensão-Deformação</i>	20
2.1.3 <i>Forças de Superfície</i>	21
2.2 Estado Plano de Tensão (EPT).....	22
2.2.1 <i>Mudança de coordenadas</i>	23
2.3 Solução Fundamental para o problema de chapa.....	24
2.4 Equações Integrais.....	27
2.4.1 <i>Equação integral para pontos internos Através do Teorema de Reciprocidade de Betti</i>	27
2.4.2 <i>Equação Integral para um Ponto Externo</i>	30
2.4.3 <i>Equação Integral do Deslocamento para pontos sobre o contorno</i>	30
2.4.4 <i>Equação Integral da Derivada do Deslocamento para um ponto interno</i>	34
2.5 Cálculo da Integral de Domínio da carga bi.....	35
2.6 Equações Algébricas.....	39
2.6.1 <i>Aproximação das variáveis</i>	39
2.7 Sistema de Equações.....	44
2.8 Obtenção das Variáveis no Domínio.....	45
2.9 Propriedades da Matriz H.....	45
2.10 Exemplos numéricos.....	49
2.10.1 <i>Exemplo linear com carregamento em p_n</i>	49
2.10.2 <i>Exemplo linear com carregamento em p_s</i>	54
2.10.3 <i>Exemplo linear com carregamento em p_n e p_s</i>	58

2.10.4 <i>Exemplo linear de chapas com furos</i>	60
3 MODELO CONSTITUTIVO UTILIZADO	73
3.1 Introdução	73
3.2 Encruamento Isótropo Positivo caso uniaxial.....	73
3.2.1 <i>Processo incremental-iterativo para o caso uniaxial</i>	77
3.3 Encruamento Isótropo Positivo para caso multiaxial.....	79
3.2.2 <i>Processo incremental-iterativo para o caso multiaxial</i>	85
3.4 Critério de Von Mises.....	86
4 ANÁLISE NÃO LINEAR DE CHAPAS.....	89
4.1 Introdução.....	89
4.2 Problema Não linear para Chapas.....	89
4.3 Equação integral do deslocamento.....	91
4.3.1 <i>Calculo da integral de domínio envolvendo a força normal plástica</i>	93
4.3.2 <i>Discretização do domínio e integração das células triangulares</i>	95
4.4 Equações algébricas do MEC para análise não linear.....	102
4.5 Equação de Resíduos.....	106
4.6 Matriz tangente Consistente.....	106
4.7 Processo incremental iterativo.....	108
4.8 Exemplos não lineares.....	109
4.8.1 <i>Exemplo não linear com carregamento em p_n</i>	109
4.8.2 <i>Exemplo não linear com carregamento em p_s</i>	114
4.8.3 <i>Exemplo não linear com carregamento em p_s e p_n</i>	117
4.8.4 <i>Exemplo não linear de chapas de alumínio com furo circular e quadrado</i>	120
5 CONCLUSÕES.....	127
REFERÊNCIAS.....	128

1 INTRODUÇÃO

Problemas de Engenharia simulados numericamente é uma realidade em análises estruturais, de forma que cada vez mais o avanço tecnológico dos *hardwares* e *softwares* dão subsídios a simulações mais complexas.

Os métodos mais utilizados para a representação numérica a partir de problemas físicos são: o método dos elementos finitos (MEF), método das diferenças finitas (MDF) e o mais recente entre eles, o método dos elementos de contorno (MEC).

Embora o método dos elementos de contorno seja recente, estudos que deram subsídio para a existência deste começaram com Somigliana em 1886, que apresentou uma formulação tratada como direta para a obtenção de valores reais, sem aproximações, do deslocamento e forças no contorno.

A equação integral estabelece relação entre as forças e deslocamentos no contorno de um corpo e seus deslocamentos internos, relação esta que é conhecida como identidade Somigliana.(FOLTRAN, 1999)

Em 1903, Fredholm apresentou uma formulação indireta para as funções de densidade de uma equação integral dando início à solução de problemas físicos utilizando equações integrais, dando assim um importante subsídio para que o MEC fosse desenvolvido.

A primeira formulação indireta dos elementos de contorno foi apresentada por Kupradze em 1965, aplicado a problemas potenciais e elásticos na qual permitia o cálculo das variáveis físicas a partir de fontes fictícias aplicadas no contorno. (DENIPOTTI, 2007)

Em 1967, Rizzo publicou o primeiro artigo sobre a formulação direta do método das equações integrais de contorno. No mesmo ano, Jaswon propôs a solução da equação biarmônica por meio de equações integrais se tornando o pioneiro na aplicação do método à análise de placas.

Em 1978, com a publicação do primeiro livro, *The Boundary Element Method for engineers*, sobre o método pelo professor Carlos A. Brebbia (1978) ele passa a ser conhecido como “Método dos Elementos de Contorno” MEC) em que o autor formula o MEC a partir do método dos resíduos ponderados.

Posterior a formulação direta do MEC trabalhos foram feitos ampliando a utilização do método para diversos problemas como de vibrações, Bezine (1981) tal como variação de temperatura, conforme Hartman e Zotemantel (1986).

Van Der Weeen (1982) utilizou o método para desenvolver a formulação para o uso em placas com três graus de liberdade por nó. Bezine (1985) e Costa e Brebia (1985) introduziram células no domínio para o estudo de placas sujeitas a instabilidades. Relativo a integrais de domínio, citam-se Brebia (1986) e Neves e Brebia(1991) introduziram o método da reciprocidade dual - MRD e o método reciprocidade múltipla - MRM.

Ribeiro (1992) utilizou uma formulação em placas considerando não linearidade física, implementado também em Fernandes (1998).

Em Fernandes (2003) tem-se análises não lineares de estruturas de pavimentos através do método dos elementos de contorno utilizando o operador tangente consistente, sendo que Fernandes (2013) fez análises não lineares de chapas e placas com a convergência quadrática.

1.1 Definição do problema

A partir da formulação linear e não linear do método dos elementos de contorno, exemplos de chapas com diversas geometrias e carregamentos serão confeccionados para avaliar a convergência dos resultados, pela maior discretização do contorno, pela adição de elementos e maior quantidade de células no domínio.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo detalhar a teoria do método dos elementos de contorno, para a análise linear e não linear, utilizando o operador tangente consistente avaliando a convergência dos resultados à medida que se refina as discretizações do contorno e domínio. Além disso, tem como objetivo mostrar a convergência quadrática ao longo do processo iterativo, necessária para alcançar o equilíbrio.

1.3 Justificativa

A utilização do método dos elementos de contorno apresenta algumas particularidades sendo:

- A possibilidade de redução da dimensionalidade do problema, ocasionando menor quantidade de dados de entrada e assim, utilizar menos memória computacional;

- As equações integrais que servem de base para o cálculo, partem de uma representação exata das quantidades físicas do problema, sendo a aproximação adotada para deslocamentos da mesma ordem daquela dos esforços;
- Em casos de concentração de tensões apresenta bons resultados;
- Em caso de domínio infinito, pois não há necessidade de discretização do meio infinito, apenas o contorno da estrutura.

Em métodos numéricos, a solução é obtida a partir da discretização do domínio e contorno, em elementos e células respectivamente, de forma que um estudo sobre a quantidade necessária para a obtenção de bons resultados é importante para não haja uma sobrecarga computacional desnecessária.

O estudo da não linearidade física, cada vez mais se torna necessário, para o melhor entendimento do comportamento dos materiais, uma vez que a confecção da formulação que simule este comportamento é cada vez mais essencial.

1.4 Apresentação da estrutura da dissertação

No primeiro capítulo, será mostrada a visão geral do trabalho desenvolvido, descrevendo a definição do problema, a justificativa, seu objetivo, e finalizando, com a apresentação sucinta dos capítulos.

No segundo capítulo, será exposta toda a formulação do método dos elementos de contorno para o caso linear bidimensional, detalhando desde a definição da equação que governa o problema, até a obtenção das variáveis nodais. Exemplos foram rodados exemplificando a teoria.

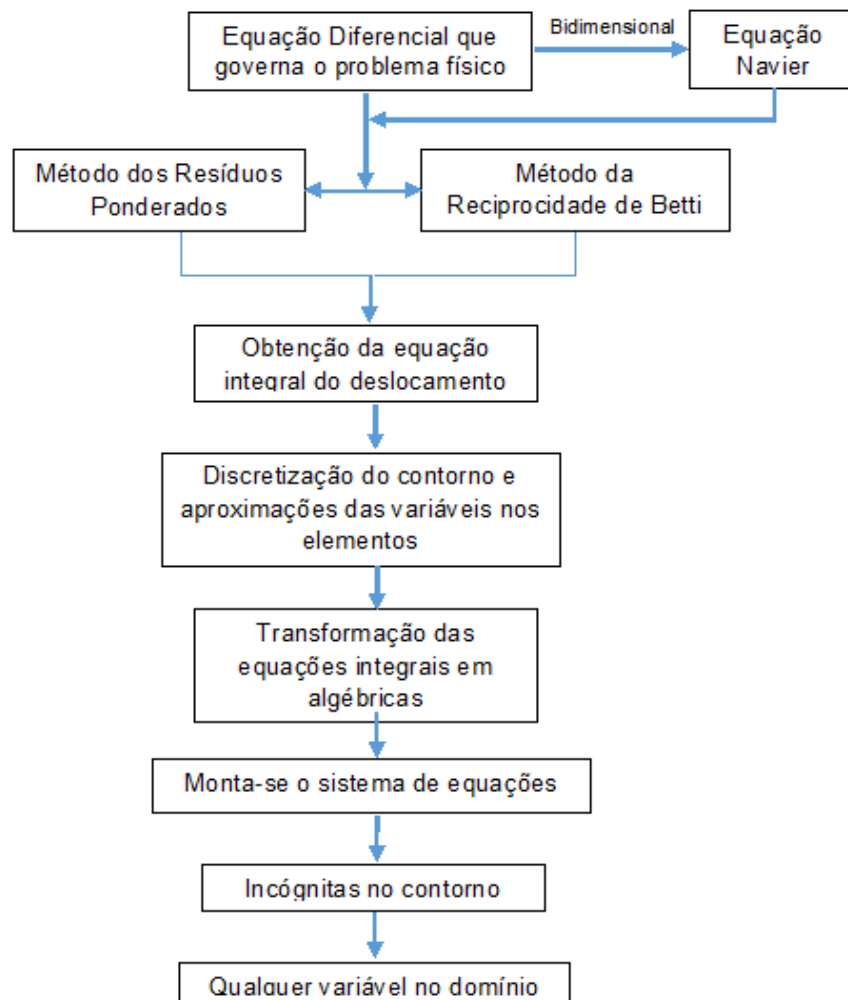
No terceiro capítulo, serão apresentados os modelos constitutivos elasto-plásticos utilizados no trabalho. Inicialmente será tratado o caso uniaxial, mostrando a formulação para o modelo elasto-plástico perfeito e elasto-plástico com encruamento positivo, na forma incremental iterativa.

No quarto capítulo, será detalhada a formulação para análise não linear de placas através do MEC, sendo demonstrada a equação de resíduos e a matriz consistente do problema, além do processo incremental iterativo. Exemplos foram rodados exemplificando a teoria.

2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA ELÁSTICO LINEAR BIDIMENSIONAL ATRAVÉS DO MEC

Para a resolução do problema elástico bidimensional é necessário definir as variáveis do problema relativo ao elemento infinitesimal, para posteriormente inseri-lo na formulação do MEC. A representação integral do deslocamento para um ponto interno será obtida considerando o Método dos Resíduos Ponderados e o Teorema de Reciprocidade de Betti. A partir dessa equação integral serão deduzidos aqueles referentes aos pontos externos ou sobre o contorno. Na figura 1, tem-se o fluxograma com os passos para a resolução do método.

Figura 1- Fluxograma para resolução de problemas utilizando MEC

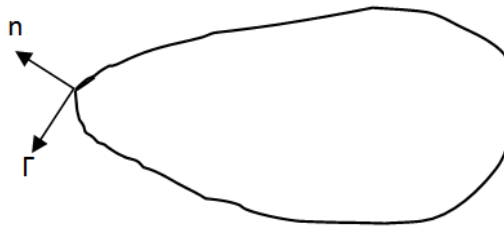


O problema possui quatro variáveis definidas sobre o contorno: os deslocamentos (u_1 e u_2) e as forças de superfície (p_1 e p_2) nas direções X_1 e X_2 , sendo que dois desses quatro valores são dados como condição de contorno. Logo, como se têm duas incógnitas por nó, para se obter o sistema de equações, deve-se escrever duas equações independentes para cada ponto nodal do contorno. Pode-se encontrar sobre o método dos elementos de contorno em Venturini (1988) em Brebia e Dominguez (1989), Aliabadi (2003) como em Fernandes (2005).

2.1 Definição da equação diferencial e relações de tensão e deformação

Seja o domínio Ω , de contorno Γ , em que se quer estudar o problema físico exemplificado na figura 2:

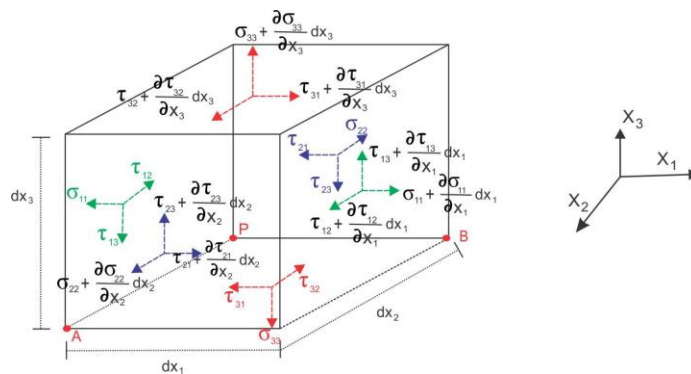
Figura 2- Domínio qualquer de estudo



Fonte: Do próprio autor

Partindo do estado tripló de tensões em elemento infinitesimal representado na figura 2.3, sujeito a forças volumétricas (b), chega-se à equação de equilíbrio escrita em termos de tensões.

Figura 3– Estado tripló de tensões para um elemento infinitesimal



Fonte: Do próprio autor

2.1.1 Equações de equilíbrio

Fazendo-se o equilíbrio de forças na direção X1 obtém-se:

$$\begin{aligned} \sum F_{x1} = & \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\tau_{21} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 + \\ & - \tau_{21} dx_1 dx_3 + \left(\tau_{31} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \tau_{31} dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 \end{aligned} \quad (1)$$

Portanto, a equação (1) pode ser escrita:

$$\sum F_{x1} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \quad (2)$$

Analogamente a equação (2) o equilíbrio das forças nas direções X2 e X3, têm-se as seguintes relações de equilíbrio para qualquer ponto do sólido:

$$\sum F_{x2} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + b_2 \quad (3)$$

$$\sum F_{x3} = \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 \quad (4)$$

Fazendo o equilíbrio dos momentos da figura 3 em relação a X1 no centro de gravidade do elemento, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum M_{x1} = & \left(\tau_{23} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \tau_{23} dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} + \\ & - \left(\tau_{32} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} - \tau_{32} dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando $\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} dx_2 dx_1 dx_3 \frac{dx_2}{2} = \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} dx_3 dx_1 dx_2 \frac{dx_3}{2} \cong 0$ se pode concluir que:

$$\tau_{23} = \tau_{32} \quad (6)$$

Fazendo o equilíbrio de momentos em todas as direções se pode escrever a equação (6) na forma indicial:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad i,j=1,2,3 \quad (7)$$

Considerando a igualdade (7), na forma indicial, tem-se a equação diferencial que representa o problema elástico:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad i,j=1,2,3 \quad (8)$$

2.1.2 Relações Tensão-Deformação

Para um material homogêneo e isotrópico, tem-se pela teoria da elasticidade a seguinte equação da lei de Hooke, na qual se tem a tensão em função da deformação:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad i,j,k = 1,2,3 \quad (9)$$

em que G é o Módulo de elasticidade transversal dado por $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ e δ_{ij} é o delta de Kronecher ($\delta_{ij} = 1$ se $i=j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$).

Seguindo o mesmo raciocínio, pode-se escrever a deformação do material em termos das tensões:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{(1+\nu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right] \quad i,j,k = 1,2,3 \quad (10)$$

Para pequenas deformações, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad i,j=1,2,3 \quad \text{sendo } u_{i,j} = u_{j,i} \quad (11)$$

Associando as equações (9), (10) e (11), tem-se a expressão da tensão em função dos deslocamentos:

$$\sigma_{ij} = G [u_{i,j} + u_{j,i}] + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k} \delta_{ij} \quad i,j,k=1,2,3 \quad (12)$$

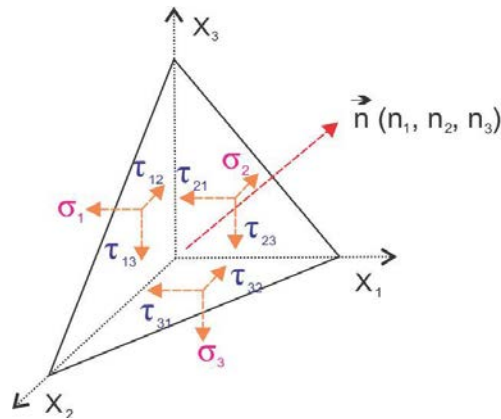
Derivando a equação (12) em relação a j e substituindo na equação (5) chega-se à equação diferencial do problema elástico, escrita em termos de deslocamentos, que é conhecida como equação de Navier:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad i,j,k=1,2,3 \quad (13)$$

2.1.3 Forças de Superfície

A partir do equilíbrio de forças do elemento infinitesimal representado na figura 4, conclui-se que:

Figura 4– Tensões e forças de superfície num elemento infinitesimal



Fonte: Do próprio autor

Fazendo o equilíbrio na direção X_1 :

$$p_1 = \sigma_1 n_1 + \tau_{21} n_2 + \tau_{31} n_3 \quad (14)$$

Analogamente se pode fazer o equilíbrio para as demais direções e considerando a relação (7), pode-se escrever a relação das forças de superfícies na forma indicial que também é conhecida como fórmula de Cauchy:

$$p_i = \sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j \quad i,j=1,2,3 \quad (15)$$

Substituindo a equação (12) na equação (15), tem-se a expressão das forças de superfície em função dos deslocamentos:

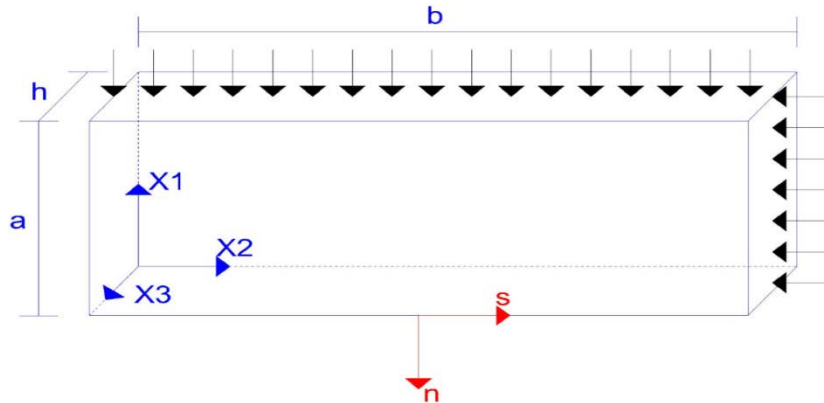
$$p_i = G \left[u_{n,i} + u_{i,n} \right] + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{k,k} n_i \quad i,j=1,2,3 \quad (16)$$

Em que $u_{i,n}$ é a derivada de u_i em relação à direção normal a superfície em que se calcula a força.

2.2 Estado Plano de Tensão (EPT)

Neste trabalho, estuda-se o comportamento de chapas, adotando o caso do estado plano de tensão. Define-se o EPT se as cargas são nas direções X_1 e X_2 e uniformemente distribuídas ao longo do comprimento como mostrado na figura 5.

Figura 5– Sólido sujeito a um estado plano de tensão



Fonte: Do próprio autor

Neste caso, despreza-se σ_{13} , σ_{23} e σ_{33} , assim se têm deslocamentos somente nas direções u_1 e u_2 :

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad (17)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (18)$$

Levando em conta (17) e, tem-se que a deformação (11) para o estado plano configura-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad i,j=1,2 \quad (19)$$

A tensão para o estado plano de tensão pode ser obtida a partir da equação (9) substituindo ν por ν' :

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu'}{(1-2\nu')} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i,j,k=1,2 \quad (20)$$

$$\text{sendo } \nu' = \frac{\nu}{(1+\nu)}$$

Integra-se a equação (20) ao longo da espessura do elemento (h), obtendo o esforço normal na chapa:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz = \sigma_{ij} \times h \quad i,j=1,2 \quad (21)$$

$$N_{ij} = 2\bar{G}\varepsilon_{ij} + \frac{2\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i,j=1,2 \quad (22)$$

sendo que $\bar{G} = G \times h$

Substituindo (19) em (21), chega-se à expressão das forças normais N_{ij} em função dos deslocamentos:

$$N_{ij} = \bar{G} [u_{i,j} + u_{j,i}] + \frac{2\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} u_{k,k} \delta_{ij} \quad (23)$$

Considerando (21) e (8), pode-se escrever a equação de equilíbrio que rege ao problema de chapas:

$$N_{ij,j} + b_i = 0 \quad i,j=1,2 \quad (24)$$

Derivando-se (23) e substituindo em (24) obtém a equação diferencial para o estado plano de tensão:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu')} u_{j,ij} + \frac{b_i}{\bar{G}} = 0 \quad (25)$$

2.2.1 Mudança de coordenadas

Para o caso do estado plano de tensão, têm-se os seguintes vetores do deslocamento e forças de superfície:

$$u_i = \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$p_i = \begin{pmatrix} p1 \\ p2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Na formulação do MEC considerada nesse trabalho as variáveis são definidas segundo as direções normal(\vec{n}) e tangencial(\vec{s}) ao contorno, ou seja, em vez do sistema de coordenadas (X_1, X_2) considera-se o sistema (s, n) como mostrado na figura 5. Definido p_i em (15) e variando o índice $i=1,2$, têm-se as forças de superfície e os deslocamentos no contorno da chapa:

$$p_n = p_i n_i \quad (28)$$

$$p_s = p_i s_i \quad (29)$$

$$u_n = u_i n_i \quad (30)$$

$$u_s = u_i s_i \quad (31)$$

Considerando as equações (28) a (31), têm-se as seguintes expressões para a transformação de coordenadas:

$$u_i = u_n n_i + u_s s_i \quad i=1,2 \quad (32)$$

$$p_i = p_n n_i + p_s s_i \quad i=1,2 \quad (33)$$

2.3 Solução Fundamental para o problema de chapa

A solução fundamental $u_{ki}^*(s, p)$ que será apresentada foi desenvolvida por Lord Kelvin (LOVE, 1944 citado por FENANDES, 2005) e representa o deslocamento em um ponto p , na direção i , em razão da carga concentrada unitária aplicada na direção k em um ponto de colocação s de um domínio infinito. Para o problema tridimensional, a solução fundamental $u_{ki}^*(s, p)$ é obtida de tal forma que satisfaça a equação diferencial de equilíbrio (14) e se substitui a força b_i pela função delta de Dirac.

$$u_{ki,jj}^* + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{kj,ij}^* + \frac{\delta(s, p) \delta_{ki}}{G} = 0 \quad k, i, j=1,2,3 \quad (34)$$

u_{ki}^* é a solução fundamental do problema elástico e representa o deslocamento por causa da carga unitária aplicada na direção k , no ponto de colocação s ; p é ponto de campo em que se mede o valor da variável; $\delta(s, p)$ é a função delta de Dirac que têm as seguintes propriedades:

$$\delta(s, p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq s \\ \infty & \text{se } p = s \end{cases} \quad (35)$$

$$\int_{\Omega} \delta(s, p) d\Omega = 1 \quad (36)$$

Para o estado plano de tensão o raciocínio é semelhante à (34), porém, substitui-se a função delta de Dirac (35) na expressão (25) obtendo assim:

$$u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu')} u_{j,ij} + \frac{\delta(s, p) \delta_{ki}}{\bar{G}} = 0 \quad k, i, j = 1, 2 \quad (37)$$

Para o caso bidimensional a equação $u_{ki}^*(s, p)$ é tal que satisfaz a equação (37) é:

$$u_{ki}^*(s, p) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left[-(3-4\nu') \ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad k, i = 1, 2 \quad (38)$$

A deformação fundamental em um ponto p é obtido a partir da equação (11), em que a derivada do deslocamento é obtida derivando a equação (38):

$$\frac{\partial u_{ki}^*(s, p)}{\partial x_j(p)} = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left[-(3-4\nu') \frac{\partial \ln r}{\partial x_j(p)} \delta_{ki} + \frac{\partial (r_{,i} r_{,k})}{\partial x_j(p)} \right] \quad (39)$$

Sendo $\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(p)}$ dado pela expressão (40):

$$\frac{\partial r_{,k}}{\partial x_j(p)} = \frac{\partial}{\partial x_j(p)} \left(\frac{x_k(p) - x_k(s)}{r} \right) = \frac{1}{r} \delta_{ij} + [x_k(p) - x_k(s)] \left(-\frac{1}{r^2} \right) r_{,i} = \frac{1}{r} (\delta_{ij} - r_{,k} r_{,i}) \quad (40)$$

Assim relacionando as equações (11), (39) e (40), tem-se a deformação fundamental:

$$\varepsilon_{ki}^*(s, p) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\bar{G}r} \left\{ (1-2\nu') [r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}] - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad k, i, j = 1, 2 \quad (41)$$

Encontrada as expressões do deslocamento e deformação fundamental, pode-se determinar a tensão fundamental no ponto p. Como neste item o índice k está relacionado com a solução fundamental vamos substituir na equação (20) k por l. Assim a expressão fundamental para a tensão em um ponto p se configura:

$$\sigma_{kij}^* = 2\bar{G}\varepsilon_{kij}^* + \frac{2\bar{G}\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kqq}^* \delta_{ij} \quad k, i, j, l = 1, 2 \quad (42)$$

Sendo $i = j = q$ na equação (42) e considerando que: $\delta_{kq}r_{,q} = r_{,k}$; $\delta_{qq} = \delta_{11} + \delta_{22} = 2$ e $r_{,l}r_{,l} = r_{,1}^2 + r_{,2}^2 = (\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = 1$, obtém-se:

$$\varepsilon_{kqq}^*(s, p) = \frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left\{ (1-2\nu') [r_{,k} + r_{,k}] - 2r_{,k} + 2r_{,k} \right\} = -\frac{(1-2\nu')r_{,k}}{4\pi(1-\nu')\bar{G}r} \quad (43)$$

Substituindo-se (43) e (40) em (42) se pode obter a expressão fundamental da tensão:

$$\sigma_{ki}^*(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ (1-2\nu') [\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad k, i=1,2 \quad (44)$$

Considerando agora a equação (9), tem-se a expressão da força de superfície fundamental:

$$p_{ki}^*(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ [(1-2\nu')\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu') [n_{,i}r_{,k} - n_{,k}r_{,i}] \right\} \quad k, i=1,2 \quad (45)$$

Obtidas as expressões fundamentais no sistema (x1,x2), pode-se ter as mesmas no sistema (s,n) no contorno do elemento. Levando-se em conta as equações (28) à (31), as expressões fundamentais configuram-se:

$$p_{kn}^*(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ [(1-2\nu')n_{,k} + 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu')r_{,k} \right\} \quad (46)$$

$$p_{ks}^*(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ [(1-2\nu')s_{,k} + 2r_{,i}s_{,i}r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu')n_{,k}r_{,i}s_{,i} \right\} \quad (47)$$

$$u_{kn}^*(s, p) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left[-(3-4\nu') \ln(r)n_{,k} + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right] \quad (48)$$

$$u_{ks}^*(s, p) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \left[-(3-4\nu') \ln(r)s_{,k} + r_{,i}s_{,i}r_{,k} \right] \quad (49)$$

2.4 Equações Integrais

A solução aproximada do problema elástico com o MEC pode ser obtida escrevendo a equação do deslocamento u_i , ou do da força de superfície p_i em pontos sobre o contorno ou em pontos de colocação externos. No entanto, usualmente se usa apenas a equação do deslocamento u_i , pois os resultados ficam mais precisos. É importante também obter as equações integrais da derivada do deslocamento ($u_{i,j}(s)$) em pontos internos e sobre o contorno.

Conhecido os valores de $u_{i,j}$ para o ponto s , basta aplicar as equações (2.12) e (2.11), para obter, respectivamente, os valores das tensões e deformações no ponto s .

2.4.1 Equação integral para pontos internos Através do Teorema de Reciprocidade de Betti

Sejam dois estados distintos de σ e ε existentes em um sólido de domínio Ω de tal forma que relacionado ao estado 1 (problema real) se tem : $u_i^1, \sigma_{ij}^1, \varepsilon_{ij}^1, b_i^1$ e referente ao estado 2 (problema fundamental) se tem: $u_i^2, \sigma_{ij}^2, \varepsilon_{ij}^2, b_i^2$ Pode-se nesse caso, definir a seguinte relação:

$$\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 = \varepsilon_{ij}^1 \left[2G \varepsilon_{ij}^2 + \frac{2G\nu'}{(1-2\nu')} \varepsilon_{kk}^2 \delta_{ij} \right] \quad (50)$$

ou

$$\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 = 2G \varepsilon_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1 + \frac{2G\nu'}{(1-2\nu')} \varepsilon_{kk}^2 \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^1 \quad (51)$$

Sendo $\varepsilon_{kk}^2 = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^2$ e $\varepsilon_{kk}^1 = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^1$, tem-se:

$$\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 = \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 \quad (52)$$

Integrando (52) ao longo do domínio Ω se tem o Primeiro Teorema de Betti:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 d\Omega \quad (53)$$

No caso do MEC, adota-se um estado como sendo o problema real e outro como sendo o problema fundamental. O teorema é dado pela equação (53).

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} \, d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{kij}^* \, d\Omega \quad k, i, j = 1, 2 \quad (54)$$

Sendo o segundo termo da equação (54) denominado $I_2 = \int_{\Omega} \varepsilon_{ij} \sigma_{kij}^* \, d\Omega$, e considerando a equação (11):

$$I_2 = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \frac{1}{2} [u_{i,j} + u_{j,i}] \, d\Omega \quad (55)$$

Em que $u_{i,j} = u_{j,i}$, assim

$$I_2 = \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} \, d\Omega \quad (56)$$

Integrando por partes (56) em relação a x_j :

$$I_2 = \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i \, d\Omega \quad (57)$$

Considerando a equação de equilíbrio (8) escrita para o problema fundamental, como a carga fundamental é dada pela função Delta de Dirac, a equação (57) se torna:

$$I_2 = \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i \, d\Gamma - \int_{\Omega} u_i \delta(s, p) \delta_{ki} \, d\Omega \quad (58)$$

Substituindo em (58) a relação (32) se tem:

$$I_2 = \int_{\Gamma} (p_{ki}^* n_i u_n + p_{ks}^* s_i u_s) d\Gamma - \int_{\Omega} [u_n \delta(s, p) \delta_{ki} n_i + u_s \delta(s, p) \delta_{ki} s_i] d\Omega \quad i=1,2 \quad (59)$$

sendo m e l os vetores que indicam as direções das cargas fundamentais que particularmente no trabalho são, respectivamente as direções n e s referentes ao contorno do ponto s , em que se aplica a solução fundamental.

Escrevendo as variáveis considerando as equações (28) e (29) para a transformação de coordenadas, chega-se a:

$$I_2 = \int_{\Gamma} (p_{kn}^* u_n + p_{ks}^* u_s) d\Gamma - \int_{\Omega} [u_n \delta(s, p) \delta_{kn} + u_s \delta(s, p) \delta_{ks}] \, d\Omega \quad (60)$$

Aplicando as propriedades da função Delta de Dirac (35) e (36) chega-se a:

$$I_2 = \int_{\Gamma} (p_{kn}^* u_n + p_{ks}^* u_s) d\Gamma + u_k(s) \quad k=l,m \quad (61)$$

Seja agora o primeiro membro da equação (54) denominado $I_1 = \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega$, considerando a equação (11) e que $u_{i,j} = u_{j,i}$, assim:

$$I_1 = \int_{\Omega} \sigma_{ij} u_{kij}^* d\Omega \quad (62)$$

Integrando por partes em relação a x_j :

$$I_1 = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \sigma_{ij,j} d\Omega \quad (63)$$

Substituindo (8) em (63) chega-se a:

$$I_1 = \int_{\Gamma} p_i u_{ki}^* d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (64)$$

Considerando a transformação de coordenadas descrita em (32) e (33) a equação (64) se configura em:

$$I_1 = \int_{\Gamma} (p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*) d\Gamma - \int_{\Omega} (u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s) d\Omega \quad (65)$$

Substituindo I_1 (65) e I_2 (61) no primeiro Teorema de Betti (2.36) chega-se à equação integral do deslocamento u_i em um ponto interno:

$$u_k(s) = - \int_{\Gamma} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma + \int_{\Omega} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] d\Omega \quad (66)$$

Ou considerando que as variáveis relacionadas ao problema fundamental dependem do ponto fonte s e do ponto campo p e aquelas relacionadas ao problema real dependem apenas do ponto p , a equação (2.66) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} u_k(s) = & - \int_{\Gamma} [u_n(P) p_{kn}^*(s, P) + u_s(p) p_{ks}^*(s, P)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p_n(P) u_{kn}^*(s, P) + p_s(P) u_{ks}^*(s, P)] d\Gamma + \\ & + \int_{\Omega} [u_{kn}^*(s, p) b_n(p) + u_{ks}^*(s, p) b_s(p)] d\Omega \end{aligned} \quad (67)$$

2.4.2 Equação Integral para um Ponto Externo

No problema elástico, a equação integral do deslocamento para um ponto externo (A) é obtida de forma análoga àquela do ponto interno. Valendo-se das propriedades da função delta de Dirac, tem-se que se $s \neq p \rightarrow \delta(s, p) = 0$. Assim, como $A=s$ é sempre um ponto externo a função sempre será zero. Desta forma, a equação integral para um ponto externo resulta em:

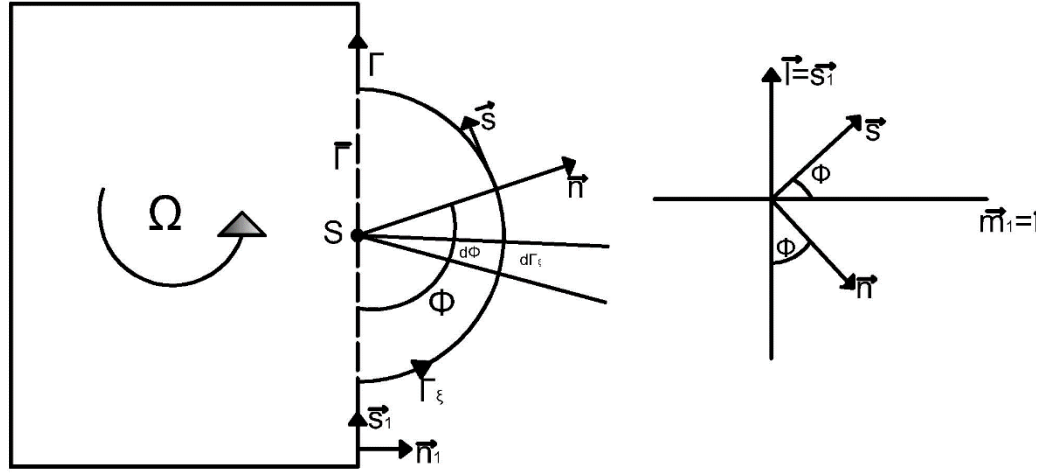
$$\begin{aligned}
 -\int_{\Gamma} \left[u_n(P) p_{kn}^*(s, P) + u_s(p) p_{ks}^*(s, P) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[p_n(P) u_{kn}^*(s, P) + p_s(P) u_{ks}^*(s, P) \right] d\Gamma + \\
 + \int_{\Omega} \left[u_{kn}^*(s, p) b_n(p) + u_{ks}^*(s, p) b_s(p) \right] d\Omega = 0
 \end{aligned}
 \tag{68}$$

2.4.3 Equação Integral do Deslocamento para pontos sobre o contorno

Quando se escreve a equação integral do deslocamento (66) em um ponto sobre o contorno, as expressões apresentam singularidades, isto é, indeterminações do tipo: $\frac{1}{r}, \ln(r)$ já que nesse caso o raio r é nulo quando o ponto de colocação coincide com o ponto campo ($se S=P: r=0$). Para eliminar as singularidades existentes nas integrais e calcular o valor de K, procede-se da seguinte maneira:

- Acrescenta-se o contorno circular Γ_{ξ} de raio infinitesimal ($r = \xi$) e centro em S (ver figura 6);
- Retira-se o trecho $\bar{\Gamma}$ do contorno, que contém a singularidade.
- Obtém-se o novo contorno: $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_{\xi}$
- Faz-se um limite com $\xi \rightarrow 0$ e outro limite com $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$, para que S possa ser considerado sobre o contorno.

Figura 6– Inserção do contorno circular Γ_ξ centrado em S



Fonte: Do próprio autor

No domínio Γ_ε valem as seguintes relações:

$$0 \leq \phi \leq \pi \quad (69)$$

$$r = n \rightarrow \frac{\partial r}{\partial n} = 1 \quad (70)$$

Como $d\phi \cong 0$ se tem que $\tan d\phi \cong \sin d\phi = d\phi$, assim:

$$d\Gamma_\xi = r d\phi \rightarrow d\Gamma_\xi = \varepsilon d\phi \therefore r = \xi \quad (71)$$

Escrevendo-se a equação integral de $u(s)$ em S com esse novo contorno, a equação então fica:

$$\begin{aligned} u_k(s) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma_\xi = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma + \\ + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma_\xi + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] d\Omega_\xi + \int_{\Omega} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] d\Omega \end{aligned} \quad (72)$$

A fim de estudar os termos da equação (72) os mesmos serão numerados para melhor entendimento:

$$E_1 = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma \quad (73)$$

$$E_2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma_\xi \quad (74)$$

$$E_3 = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma \quad (75)$$

$$E_4 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma_\xi \quad (76)$$

$$E_5 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] d\Omega_\xi \quad (77)$$

As equações de E_1 (73) e E_3 (75) resultam no valor principal das mesmas resultando:

$$E_1 = \int_{\Gamma} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma \quad (78)$$

$$E_3 = \int_{\Gamma} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma \quad (79)$$

Na expressão de E_4 (76), tem-se singularidade do tipo $\ln(r)$. Assim, fazendo a mudança de coordenadas ($d\Gamma_\xi = \xi d\phi$) e determinando o limite de ξ tender a zero, conclui-se que:

$$E_4 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\phi} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] \xi d\phi = 0 \quad (80)$$

Com o raciocínio análogo de mudança de coordenadas para E_5 ($d\Omega_\xi = r dr d\phi = \xi dr d\phi$) e fazendo o limite de ξ tender a zero, conclui-se que.

$$E_5 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega_\xi} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] \xi dr d\phi = 0 \quad (81)$$

Resta agora apenas analisar E_2 a integral sobre o contorno circular envolvendo a expressão de p_{ki}^* , que fornecerá os valores dos termos livres. Considerando a figura 6 as direções dos vetores n e s que são dados por:

$$\vec{s} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (82)$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{Bmatrix} \quad (83)$$

Escrevendo as forças de superfície (46) e (47) no novo domínio, tem-se:

$$p_{kn}^* = -\frac{(3-2\nu)n_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (84)$$

$$p_{ks}^* = -\frac{(3-2\nu)s_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (85)$$

Considerando que a direção da carga fundamenta k seja igual a m, nesse caso as expressões (84) e (85) resultam:

$$p_{kn}^* = -\frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{sen}\phi \quad (86)$$

$$p_{ks}^* = -\frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos\phi \quad (87)$$

As integrais sobre os contorno (Γ_ξ) são dadas por:

$$E_2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \left[-u_n(P) p_{kn}^*(S, P) \right] + \left[-u_s(P) p_{ks}^*(S, P) \right] \right\} d\Gamma_\xi \quad (88)$$

Substituindo as expressões (84) e (87)

$$E_2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \left[-u_n(P) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{sen}\phi \right] + \left[-u_s(P) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos\phi \right] \right\} d\Gamma_\xi \quad (89)$$

As expressões de p_{kn}^* e p_{ks}^* é função de l/r . Para resolvê-la, soma-se ao integrando $[u_n(S) - u_n(S)]$ e $[u_s(S) - u_s(S)]$. Como $(u_i(P) - u_i(S) = 0)$ pois P e S estão separados por uma distância infinitesimal, pode-se escrever a equação da seguinte forma:

$$E_2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \left[-u_n(S) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{sen}\phi \right] + \left[-u_s(S) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos\phi \right] \right\} d\Gamma_\xi \quad (90)$$

Escrevendo as variáveis u_n e u_s em função de suas componentes no sistema (m, l) (ver figura 6) e do ângulo ϕ as seguintes relações são obtidas:

$$u_s = s_m u_m + s_l u_l = \cos(\phi) u_m + \text{sen}(\phi) u_l \quad (91)$$

$$u_s = s_m u_m + s_l u_l = \text{sen}(\phi) u_m - \cos(\phi) u_l \quad (92)$$

Substituindo as relações (91) e (92) em E_2 (90) se obtém:

$$E_2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} ((3-2\nu)u_m(S) \int_0^\pi \sin^2 \phi d\phi - (3-2\nu)u_l(S) \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi + (1-2\nu)u_m(S) \int_0^\pi \cos^2 \phi d\phi + (1-2\nu)u_l(S) \int_0^\pi \sin \phi \cos \phi d\phi) \quad (93)$$

Fazendo integração em ϕ chega-se a:

$$E_2 = \frac{1}{2} u_m \quad (94)$$

Considerando $k=m$ e substituindo E_1 (78), E_2 (94), E_3 (79), E_4 (80) e E_5 (81) em (72) se tem a equação integral do deslocamento para um ponto sobre o contorno:

$$\frac{1}{2} u_k(s) = - \int_{\Gamma} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma + \int_{\Omega} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] d\Omega \quad k=l,m \quad (95)$$

Para $k=l$ o raciocínio é análogo e se chega na expressão (95).

2.4.4 Equação Integral da Derivada do Deslocamento para um ponto interno

Reescrevendo a equação (66), obtém-se:

$$Ku_k(s) = - \int_{\Gamma} [u_l p_{kl}^*] + \int_{\Gamma} [p_l u_{kl}^*] d\Gamma + \int_{\Omega} [u_{kl}^* b_l] d\Omega \quad l=s,n \quad (96)$$

A equação integral de u_k é obtida derivando a equação (96) em relação à direção m (ver figura 6):

$$\frac{\partial u_k(s)}{\partial m} = - \int_{\Gamma} \left[u_l(P) \frac{\partial p_{kl}^*(s,P)}{\partial m} \right] + \int_{\Gamma} \left[p_l(P) \frac{\partial u_{kl}^*(s,P)}{\partial m} \right] d\Gamma + \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u_{kl}^*(s,P)}{\partial m} b_l(P) \right] d\Omega \quad l=s,n \quad (97)$$

De acordo com Fernandes, 2003 as expressões da derivada (46) a (49) se configuram:

$$\frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) r_{,j} m_j s_k - r_{,k} (m_i s_i - 2r_{,i} s_i m_j) - m_k r_{,i} s_i \right] \quad (98)$$

$$\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m} = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu)r} \left[(3-4\nu) r_{,j} m_j n_k - r_{,k} (m_i s_i - 2r_{,i} n_i m_j) - m_k r_{,i} n_i \right] \quad (99)$$

$$\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\bar{G}(1-\nu)r^2} [(r_i n_i)^2 [8r_{,k} r_{,j} m_j - 2m_k] - 4r_{,k} r_{,i} m_j n_j + 2(1-2\nu)r_{,j} m_j [2r_{,i} n_i n_k - r_{,k}] + (1-2\nu)[-2m_i n_i n_k + m_{,k}]] \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi\bar{G}(1-\nu)r^2} [2r_{,k} r_{,i} s_i (1-2\nu) \left[4r_{,j} m_j \frac{\partial r}{\partial n} - m_i n_i \right] + 2(1-2\nu)r_{,j} m_j \left[r_{,i} s_k n_k + \frac{\partial r}{\partial n} s_k \right] \\ - 2 \frac{\partial r}{\partial n} [r_{,k} m_i s_i - r_{,i} m_k s_i] - (1-2\nu)[m_i n_i s_k - m_i s_i n_k]] \end{aligned} \quad (101)$$

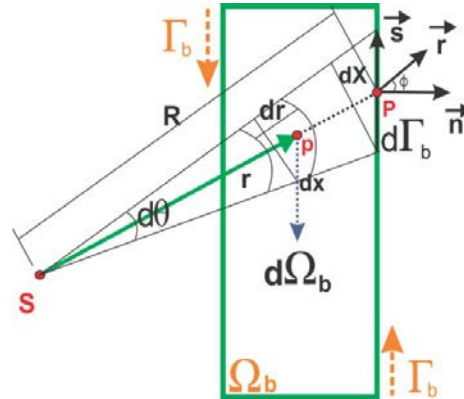
Depois de calculadas as derivadas dos deslocamentos através da equação (98) e (99), podem-se obter as deformações em um ponto interno qualquer utilizando a equação (11). Conhecidas as deformações, as tensões em um ponto interno qualquer podem ser calculadas através da expressão (12).

2.5 Cálculo da Integral de Domínio da carga b_i

As integrais de domínio envolvendo as cargas b_i , que aparece nas equações integrais das variáveis, é resolvida transformando-a em integral de contorno, como será detalhado a seguir. Nesse caso, como no integrando não há variáveis do problema, não há necessidade de discretizar o domínio em células. Na formulação não linear, a ser vista mais adiante, há integrais de domínio, em que no integrando aparecem as forças N_{ij} , que são variáveis do problema e, portanto, nesse caso é necessário a discretização em células.

Para obter as relações da transformação da integral sobre o domínio em integral de contorno, considera-se a figura 7 que mostra a integração ao longo do contorno na região carregada Ω_b .

Figura 7- Integração ao longo do contorno na região carregada



Fonte: Do próprio autor

Na figura 7, tem-se:

- Ω_b : região retangular cujo contorno é definido por Γ_b
- p: qualquer ponto do domínio e P: ponto qualquer no contorno
- s: ponto de colocação
- r: distância entre p e s
- R: distancia entre P e s

Assim, pode-se deduzir da figura 7 que:

$$d\Omega_b = drdx = r dr d\theta \quad (102)$$

$$d\theta = \frac{dX}{R} = \frac{\cos(\phi)d\Gamma_b}{R} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_b \quad (103)$$

Portanto, considerando (102) e (103) se tem:

$$d\Omega_b = r dr \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_b \quad (104)$$

Seja a integral de domínio da equação (66). e realizando a mudança de coordenadas dada por (104) se chega a:

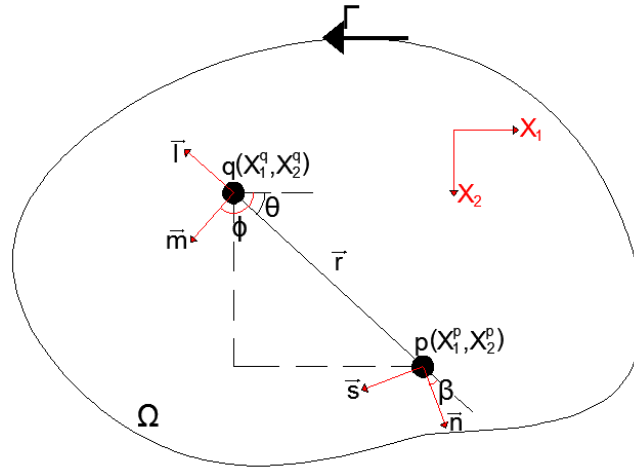
$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_b} \left[u_{kn}^*(S, p) b_n(p) + u_{ks}^*(S, p) b_s(p) \right] d\Omega_b = \\
& = \int_{\Gamma_b} \left(\int_0^R b_n(p) u_{kn}(s, p) r dr \right) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_b + \int_{\Gamma_b} \left(\int_0^R b_s(p) u_{ks}(s, p) r dr \right) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_b \quad k=m, l
\end{aligned} \quad (105)$$

Admitindo-se que fonte $b(p)$ varie linearmente na região Ω_b a mesma é expressa por:

$$b_h(p) = A_h X_1^p + B_h X_2^p + C \quad h=s, n \quad (106)$$

As coordenadas cartesianas do ponto $p(X_1^p, X_2^p)$, podem ser escritas em função de suas coordenadas cilíndricas, para a implementação desse esquema, adota-se um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) , centrado no ponto de carregamento q , conforme a figura 8

Figura 8 – Pontos p e q no domínio da chapa



Fonte: Do próprio autor

Onde:

$$r = \sqrt{[X_1^p - X_1^q]^2 + [X_2^p - X_2^q]^2} \quad (107)$$

Derivando (107) em relação à x_1 se obtém:

$$\frac{\partial r(q, p)}{\partial X_1(p)} = \frac{1}{2r} 2[X_1^p - X_1^q] \frac{\partial X_1^q}{\partial X_1^q} = \frac{1}{r} [X_1^p - X_1^q] = \cos \theta \quad (108)$$

Assim, pode-se descrever o ponto p em sistemas de coordenadas cilíndricas tais como:

$$X_1^p = X_1^q + rr_{,1} \quad (109)$$

$$X_2^p = X_2^q + rr_{,2} \quad (110)$$

Escrevendo (109) e (110) a forma inicial chega-se a:

$$X_i^p = X_i^q + rr_{,i} \quad i=1,2 \quad (111)$$

sendo $r_{,1} = \cos \theta$ e $r_{,2} = \sin \theta$.

Substituindo (111) em (106) resulta em:

$$b_h(p) = A_h(X_1^q + r \cos \theta) + B_h(X_2^q + r \sin \theta) + C \quad h=s,n \quad (112)$$

sendo $b_h(q) = A_h X_1^q + B_h X_2^q + C$, (112) se transforma em:

$$b_h(p) = A_h r \cos(\theta) + B_h r \sin(\theta) + b_h(q) \quad (113)$$

Considerando (113) nas expressões fundamentais (48) e (49) e integrando em relação a r chega-se a:

$$\int_{\Omega_b} [u_{kn}^*(S, p) b_n(p) + u_{ks}^*(S, p) b_s(p)] d\Omega_b = \frac{1}{8\pi \bar{G}(1-\nu)} \int_{\Gamma_b} [D1 + D2] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (114)$$

Significando:

$$D1 = (A_n \cos \theta + B_n \sin \theta) \frac{R^2}{3} \left[-(3-4\nu) n_k \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) + r_{,i} n_{,i} r_{,k} \right] + \\ + \left\{ (A_s \cos \theta + B_s \sin \theta) \frac{R^2}{3} \left[-(3-4\nu) s_k \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) + r_{,i} s_{,i} r_{,k} \right] \right\} \quad (115)$$

$$D2 = b_n(q) \frac{R}{2} \left[-(3-4\nu) n_k \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) + r_{,i} n_{,i} r_{,k} \right] + b_s(q) \frac{R}{2} \left[-(3-4\nu) s_k \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) + r_{,i} s_{,i} r_{,k} \right] \quad (116)$$

Considerando agora a derivada das expressões fundamentais dadas em (98) e (99), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m} b_n + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m} b_s \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ C_s \left[\left(A_s \cos \theta + B_s \sin \theta \right) \frac{R}{2} + b_s(q) \right] + C_n \left[\left(A_n \cos \theta + B_n \sin \theta \right) \frac{R}{2} + b_n(q) \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad k=l,m \quad (117)$$

Significando:

$$C_s = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) r_{,j} m_{,j} s_{,k} - r_{,k} (m_{,i} s_{,i} - 2r_{,i} s_{,i} r_{,j} m_{,j}) - m_k r_{,i} s_{,i} \right] \quad (118)$$

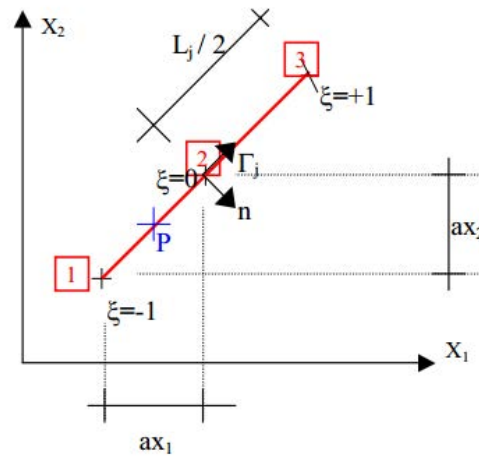
$$C_n = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) r_{,j} m_{,j} n_{,k} - r_{,k} (m_{,i} n_{,i} - 2r_{,i} s_{,i} r_{,j} m_{,j}) - m_k r_{,i} n_{,i} \right] \quad (119)$$

2.6 Equações Algébricas

As equações integrais descritas no capítulo 2 item 2.4 são transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno em elementos, na qual há aproximação das variáveis usando funções interpoladoras. Após essa aproximação a equação integral pode ser escrita em função dos valores nodais u_s, u_n, p_s, p_n no contorno.

2.6.1 Aproximação das variáveis

Assim, considere o elemento j da figura 9 em que se define três nós:

Figura 9- Geometria do Elemento

Fonte: Fernandes (2003)

Sendo ξ a coordenada local adimensional e $-1 \leq \xi \leq 1$; 1 é o nó inicial; 2 o nó do meio; 3 o nó final; L_j o comprimento do elemento j ;

A equação (66) do deslocamento u_k de um ponto S sobre o contorno não coincidente com o canto pode ser escrito sem aproximação da seguinte maneira:

$$Ku_k(s) = - \int_{\Gamma} [u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*] d\Gamma + \int_{\Gamma} [p_n u_{kn}^* + p_s u_{ks}^*] d\Gamma + \int_{\Omega} [u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s] d\Omega \quad (120)$$

Com a aproximação das variáveis em um elemento j do contorno, os valores dos deslocamentos e das forças em um ponto P qualquer são escritos respectivamente em função dos valores nodais:

$$\underline{u}(P) = \phi^T(P) \underline{U} \quad (121)$$

$$\underline{p}(P) = \phi^T(P) \underline{P} \quad (122)$$

Sendo ϕ^T funções polinomiais quadráticas de interpolação

Como a aproximação das variáveis é dada por funções polinomiais quadráticas, precisa-se de três pontos em cada elemento, pode-se reescrever (121) e (122) de tal forma que resultam em:

$$U(P) = \begin{Bmatrix} u_n^P \\ u_s^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{n(j)}^1 \\ u_{s(j)}^1 \\ u_{n(j)}^2 \\ u_{s(j)}^2 \\ u_{n(j)}^3 \\ u_{s(j)}^3 \end{Bmatrix} \quad (123)$$

$$P(P) = \begin{Bmatrix} p_n^P \\ p_s^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{n(j)}^1 \\ p_{s(j)}^1 \\ p_{n(j)}^2 \\ p_{s(j)}^2 \\ p_{n(j)}^3 \\ p_{s(j)}^3 \end{Bmatrix} \quad (124)$$

Em que $u_{n(j)}^N, u_{s(j)}^N$ e $p_{n(j)}^N, p_{s(j)}^N$ são os deslocamentos e esforços do nó N na direção s e n do elemento j e as funções ϕ_N são dadas pelas funções abaixo, sendo que os nós um e três foram adotados nas extremidades como mostrado na figura 9:

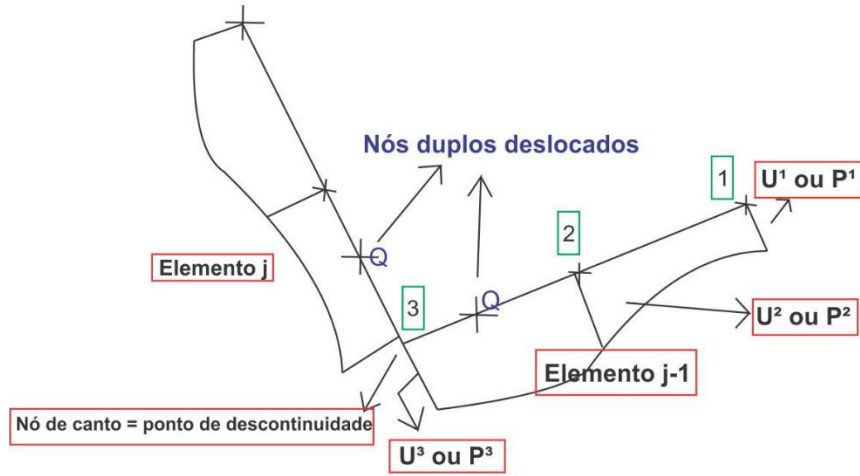
$$\phi_1(P) = -0,5\xi(1-\xi) \quad (125)$$

$$\phi_2(P) = 1-\xi^2 \quad (126)$$

$$\phi_3(P) = 0,5\xi(1+\xi) \quad (127)$$

Sendo que a coordenada adimensional ξ é nula no meio e igual a um (positivo ou negativo) nas extremidades.

Para representar a descontinuidade das variáveis nos cantos, definem-se nós duplos, que são dois nós definidos com coordenadas iguais, porém com valores nodais associados independentes, como demonstrado na figura 10.

Figura 10 – Elementos descontinuos

Fonte: Do próprio autor

Deve-se então escrever duas equações independentes para o ponto descontinuo. Isso é feito, internalizando o nó duplo recalculando as coordenadas de tal forma que ele se torne não mais coincidente com um nó extremo. O cálculo das coordenadas do nó duplo será feito a partir das equações (126) e considerando $0,4 \leq \xi \leq 0,6$. Como o ponto não mais coincide com o nó de um elemento, deve-se escrever o deslocamento do mesmo em função dos deslocamentos nodais do elemento ao qual pertence, utilizando a expressão (123).

2.6.2 Transformação das equações integrais em algébricas

Fazendo a discretização do contorno em N_e elementos, e substituindo as variáveis por suas aproximações em cada elemento a equação (96) se torna:

$$Ku_k = - \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{p}_{kl}^*(S, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] U_j + \sum_{j=1}^{N_e} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{u}_{kl}^*(S, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] P_j + \int_{\Omega} b_l u_{kl}^*(S, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \quad l=s,n \quad (128)$$

Destrinchando o primeiro termo da equação (128) se tem:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{Ne} \left[\int_{\Gamma_j} \tilde{p}_{kl}^*(S, P) \phi^T(P) d\Gamma_j \right] \tilde{U}_j = \\
& = \sum_{j=1}^{Ne} \left[\int_{\Gamma_j} \begin{Bmatrix} p_{kn}^* & p_{ks}^* \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 & \phi_3(P) \end{Bmatrix} d\Gamma_j \right] \begin{Bmatrix} u_{n(j)}^1 \\ u_{s(j)}^1 \\ u_{n(j)}^2 \\ u_{s(j)}^2 \\ u_{n(j)}^3 \\ u_{s(j)}^3 \end{Bmatrix} \quad (129)
\end{aligned}$$

Fazendo a multiplicação em (129) chega-se a:

$$\sum_{j=1}^{Ne} \begin{Bmatrix} h_{kn}^1 & h_{ks}^1 & h_{kn}^2 & h_{ks}^2 & h_{kn}^3 & h_{ks}^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{n(j)}^1 \\ u_{s(j)}^1 \\ u_{n(j)}^2 \\ u_{s(j)}^2 \\ u_{n(j)}^3 \\ u_{s(j)}^3 \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{Ne} h_{kl}^N \begin{Bmatrix} u_{n(j)}^1 \\ u_{s(j)}^1 \\ u_{n(j)}^2 \\ u_{s(j)}^2 \\ u_{n(j)}^3 \\ u_{s(j)}^3 \end{Bmatrix} \quad (130)$$

Assim, pode-se definir na equação (128) os seguintes termos:

$$h_{kl}^{N(j)}(S) = \int_{\Gamma_j} p_{kl}^*(S, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \quad l=s, n \quad (131)$$

$$g_{kl}^{N(j)}(S) = \int_{\Gamma_j} u_{kl}^*(S, P) \phi_N(P) d\Gamma_j \quad l=s, n \quad (132)$$

Em que k é a direção da carga fundamental, N é o local do elemento j ; l é a direção na qual se calcula o coeficiente

Portanto, a equação (128) pode ser escrita como:

$$Ku_k(S) = - \sum_{j=1}^{Ne} [h_{kl}^{N(j)}(S)] u_{l(j)}^N + \sum_{j=1}^{Ne} [g_{kl}^{N(j)}(S)] p_{l(j)j}^N + \int_{\Omega} b_l(p) u_{kl}^*(S, p) d\Omega \quad l=s, n \quad (133)$$

Calculando os vetores de todos os elementos, agrupando os coeficientes ao mesmo valor nodal e resolvendo a integral de domínio, pode se escrever (133) matricialmente:

$$Ku_k(S) + \tilde{H}(S) \tilde{U} = \tilde{G}(S) \tilde{P} + T(S) \quad (134)$$

Para o caso de nó simples somar o valor da constante K à coluna do vetor \tilde{H} . Para nós duplos, soma-se o valor da constante K e o coeficiente ϕ nos deslocamentos nodais do elemento ao qual o ponto de colocação pertence. Supondo que o ponto de colocação pertence aos nós 1, 2 e 3 e $k=n$ então se chega a:

$$Ku_n = 0,5(\phi_1 u_{n(j)}^1 + \phi_2 u_{n(j)}^2 + \phi_3 u_{n(j)}^3) \quad (135)$$

Reescrevendo a equação (134) como:

$$\tilde{H}(S) \tilde{U} = \tilde{G}(S) \tilde{P} + T(S) \quad (136)$$

De forma análoga, podem-se obter a equação algébrica do deslocamento no ponto interno e da derivada do deslocamento num ponto interno:

$$u_k(s) + \tilde{H}(s) \tilde{U} = \tilde{G}(s) \tilde{P} + T(s) \quad (137)$$

$$u_{k,m}(s) + \tilde{H}'(s) \tilde{U} = \tilde{G}'(s) \tilde{P} + T'(s) \quad (138)$$

2.7 Sistema de Equações

No exemplo bidimensional cada nó apresenta 4 incógnitas, sendo dois deslocamentos (u_n, u_s) e duas forças (p_n, p_s). Em cada nó devem ser prescritas 2 variáveis, portanto, o número total de equações do sistema é duas vezes o número de nós do contorno ($N_{eq} = 2 \times N_{noc}$). Essas equações podem ser escritas em pontos de colocação que podem ser somente sobre o contorno, pontos externos ou ambos. Nesse trabalho, serão adotados apenas pontos de colocação sobre o contorno coincidente com os nós dos elementos, em que serão escritas as equações dos deslocamentos u_n e u_s . Escrevendo todas as equações necessárias para a solução do problema, tem-se o seguinte sistema de equações:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} \quad (139)$$

Em que: $\{U\}$ é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos no contorno; $\{P\}$ é o vetor dos valores nodais de forças no contorno; $\{T\}$ é o vetor da carga externa.

Após a imposição das condições de contorno, o sistema pode ser resolvido, obtendo-se as incógnitas nos nós do contorno:

$$AX = C \quad (140)$$

Em que $\{X\}$ é o vetor solução, composto pelas forças(p) e deslocamentos(u) incógnitos nos nós do contorno $C = GP + T$.

2.8 Obtenção das Variáveis no Domínio

A equação algébrica de uma variável qualquer para um ponto do domínio s é escrita em função das variáveis nos nós do contorno. Para se obter o seu valor, basta escrever sua respectiva equação no ponto desejado e fazer a multiplicação dos vetores definidos na equação, como descrito na equação (137).

Com a solução do sistema de equações (item 2.7) todos os valores do contorno são conhecidos $[U]$ e $\{P\}$ além dos vetores $[G]$ e $\{H\}$ que são obtidos pelas integrações numéricas nos elementos. A carga B é conhecida pela carga externa aplicada. Assim é possível se obter qualquer variável no domínio através das equações (137) e (138).

2.9 Propriedades da Matriz H

Sejam os sistemas de equações:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} \quad (141)$$

Através de configurações particulares de equilíbrio de um sólido, que são obtidas aplicando movimentos de corpo rígido às equações, podem-se estabelecer propriedades para a matriz H , que servem para verificar se a mesma está correta.

Seja inicialmente um deslocamento u_{x1} de corpo rígido nas direções s, n :

$$u_{nj} = u_{x1} \text{sen} \alpha_j \quad (142)$$

$$u_{sj} = u_{x1} \cos \alpha_j \quad (143)$$

Admitindo-se que o carregamento em quaisquer direções seja nulo, tem-se:

$$\{P\}^T = \{0 \quad \dots \quad 0 \quad \dots \quad 0\} \quad (144)$$

Portanto, o sistema se torna:

$$[H]\{U\} = 0 \quad (145)$$

Como $[H]$ é singular, para que seja possível obter a solução, deve-se prescrever o deslocamento em ao menos um nó do contorno. Impondo um deslocamento u_1 de corpo rígido na direção n , o vetor de deslocamentos $\{U\}$ fica utilizando as transformações das coordenadas (142) e (143) :

$$u_{nj} = u_{x1} \{ \cos \alpha_1 \quad \text{sen} \alpha_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \cos \alpha_{Noc} \quad \text{sen} \alpha_{Noc} \} \quad (146)$$

Portanto para uma determinada linha i do sistema de equações, obtém a seguinte propriedade para a linha I : a soma de todas as colunas ímpares deve ser nula:

$$\sum_{j=1}^{N_{noc}} H_{I,2j-1} \cos \alpha + \sum_{j=1}^{N_{noc}} H_{I,j} \text{sen} \alpha = 0 \quad 1 \leq I \leq 2 \times N_{NOC} \quad (147)$$

sendo $H_{I,2j-1}$: coeficiente da linha I e coluna $2j-1$

Impondo-se um deslocamento u_2 de corpo rígido na direção s , o vetor de deslocamentos $\{U\}$ fica:

$$u_{sj} = u_{x1} \text{sen} \{ \cos \alpha_1 \quad -\cos \alpha_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \text{sen} \alpha_{Noc} \quad -\cos \alpha_{Noc} \} \quad (148)$$

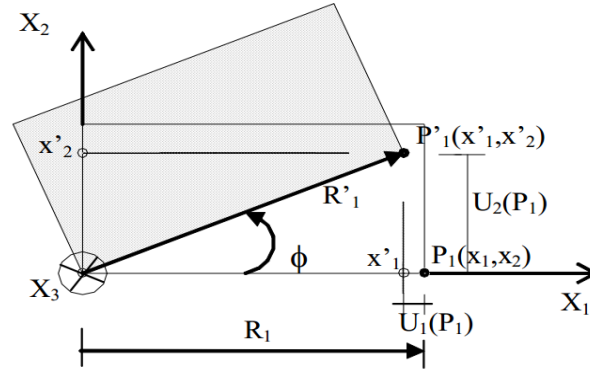
Portanto, para uma determinada linha i do sistema de equações, obtém a seguinte propriedade para a linha I : a soma de todas as colunas pares deve ser nula:

$$\sum_{j=1}^{N_{noc}} H_{I,2j-1} \text{sen} \alpha - \sum_{j=1}^{N_{noc}} H_{I,j} \cos \alpha = 0 \quad 1 \leq I \leq 2 \times N_{noc} \quad (149)$$

sendo $H_{I,2j}$: coeficiente da linha I e coluna $2j$.

Considere uma rotação de um corpo rígido ϕ no plano (X1,X2) em torno do eixo X3 perpendicular a esse plano como indicado na figura 11:

Figura 11 – Rotação da Chapa no plano (X1,X2)



Fonte: Fernandes (2005).

Sendo (x_1^P, x_2^P) e $(x_1'^P, x_2'^P)$ coordenadas iniciais e finais de um ponto P qualquer do sólido e R a distância desse ponto ao eixo de rotação X3.

Pela figura 10 os deslocamentos nas direções são dadas por:

$$u_1(P) = x_1'^P - x_1^P = R \cos(\phi + \gamma) - x_1^P \quad (150)$$

$$u_2(P) = x_2'^P - x_2^P = R \sin(\phi + \gamma) - x_2^P \quad (151)$$

Em que γ é o ângulo formado entre R e o eixo X1 e, portanto, $x_1^P = R \cos \gamma$ e $x_2^P = R \sin \gamma$.

Na figura 11, tem-se que $\gamma = 0$, no ponto P1 os deslocamentos u_1 e u_2 podem ser escritos como:

$$u_1(P) = (\cos \phi - 1)x_1^P - \sin \phi x_2^P \quad (152)$$

$$u_2(P) = (\sin \phi)x_1^P + (\cos \phi - 1)x_2^P \quad (153)$$

Considerando pequenos deslocamentos as propriedades da matriz H são válidas para um giro (ϕ) muito pequeno e neste caso, pode-se dizer que $\cos \phi = 1$ e $\sin \phi = \phi$, desse modo os deslocamentos resultam em:

$$u_1(P) = -\phi x_2^P \quad (154)$$

$$u_2(P) = \phi x_1^P \quad (155)$$

Os deslocamentos nas direções n e s considerando (154) e (155) ficam expressos por:

$$u_s = \phi(-x_2 \cos \alpha + x_1 \operatorname{sen} \alpha) \quad (156)$$

$$u_n = -\phi(-x_2 \operatorname{sen} \alpha + x_1 \cos \alpha) \quad (157)$$

Os deslocamentos $u_{s,n}$ e $u_{n,n}$ são determinados a partir das seguintes expressões:

$$u_{s,n} = u_{1,n} s_1 + u_{2,n} s_2 \quad (158)$$

$$u_{n,n} = u_{1,n} n_1 + u_{2,n} n_2 \quad (159)$$

Derivando-se as expressões (154) e (155) se obtém:

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = -\phi \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_1} n_2 \right) = \phi \cos \alpha \quad (160)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = -\phi \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} n_2 \right) = \phi \operatorname{sen} \alpha \quad (161)$$

Substituindo-se as equações (160) e (161) em (158) e (159) respectivamente, tem-se:

$$u_{n,n} = 0 \quad (162)$$

$$u_{s,n} = \phi \quad (163)$$

Considerando (158), (157), (162) e (163) se obtém a seguinte propriedade da matriz H:

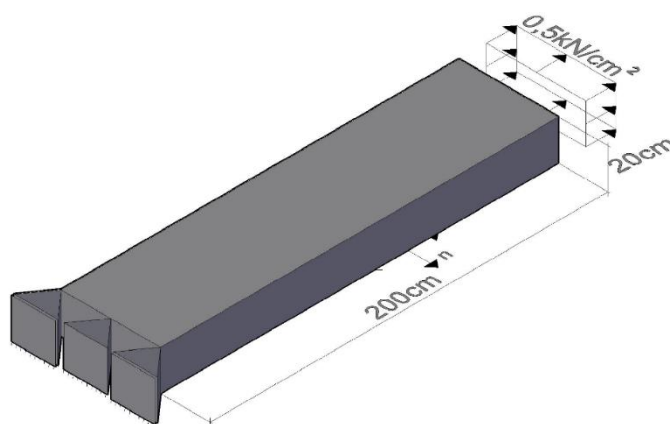
$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{Nnoc} h_{i,2j-1} (-x_2 \operatorname{sen} \alpha + x_1 \cos \alpha) + \sum_{j=1}^{Nnoc} h_{i,2j} (-x_2 \operatorname{sen} \alpha + x_1 \cos \alpha) + \\ \sum_{j=1}^{Nnoc} h_{i,2j-1} (-x_2 \operatorname{sen} \alpha + x_1 \cos \alpha) + \sum_{j=1}^{Nnoc} h_{i,2j-1} = 0 \end{aligned} \quad 1 \leq i \leq 2Nnoc \quad (164)$$

2.10 Exemplos numéricos

Exemplificando a teoria apresentada no capítulo 2, foram confeccionados exemplos utilizando o método dos elementos de contorno. Analisando a convergência dos resultados pela discretização da malha.

2.10.1 Exemplo linear com carregamento em p_n

Figura 12– Exemplo de uma chapa com um carregamento em p_n

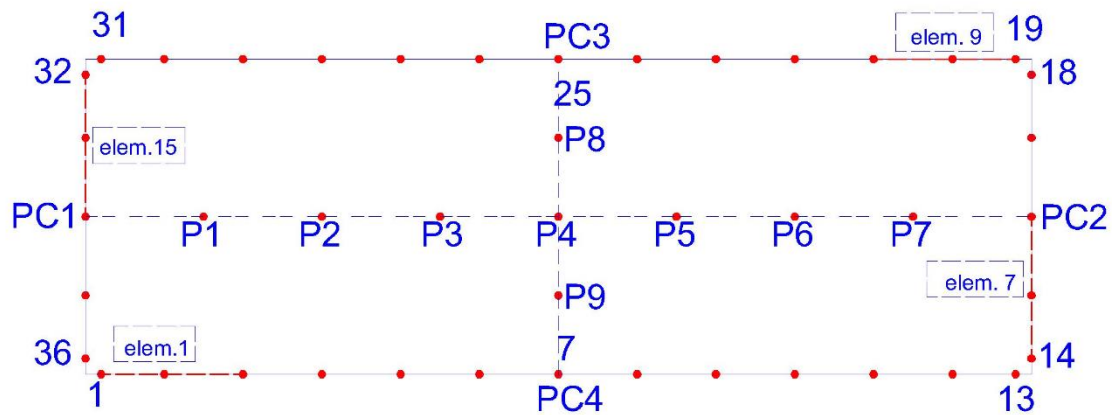


Fonte: Do próprio autor

Como visto na figura 12, tem-se uma chapa de comprimento e largura de 200x50 cm e espessura de 20 cm. A mesma está submetida a força de 0,5kN/cm² sendo que multiplicando pela espessura se tem a carga de 10kN/cm. O módulo de elasticidade adotado foi de $E=1000\text{kN/cm}^2$ e Poisson de 0,3.

Neste exemplo, propõem-se três malhas: a primeira com quatro elementos ao longo do contorno a segunda com oito e a terceira com dezesseis elementos. Na figura 13, tem-se a malha com tinta e seis pontos ao longo do contorno e também os pontos de estudo a serem analisados.

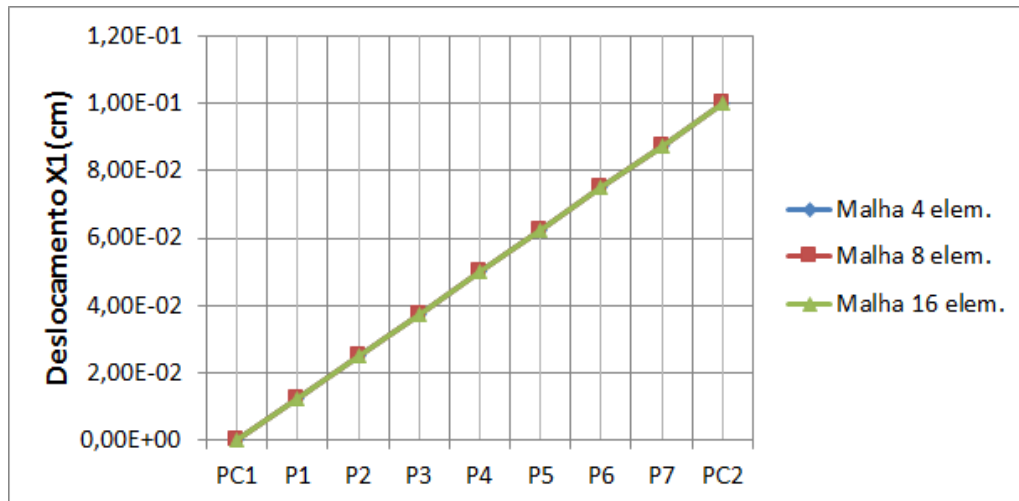
Figura 13 – Malha dezesseis elementos ao longo do contorno



Fonte: Do próprio autor

Como este é um exemplo relativamente simples, percebe-se que a convergência das malhas se dá com pouca nenhuma adição de elementos, tem-se que a convergência se dá na malha com doze pontos no contorno, sendo que esta é o mínimo de pontos para o exemplo. Pode-se observar na figura 14 o deslocamento dos pontos de estudo nas três malhas.

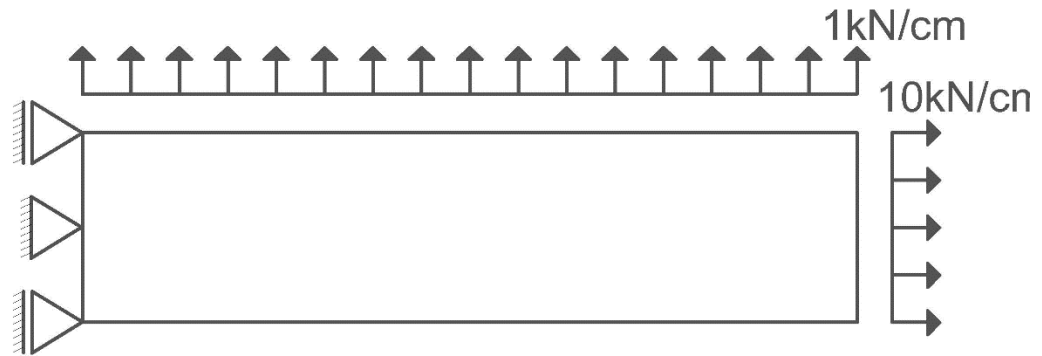
Figura 14– Deslocamentos ao longo da chapa



Fonte: Do próprio autor

Adiciona-se na figura 12 uma força normal de um quilo newtons por centímetro no lado superior da chapa, ou seja, uma força na direção de p_n como demonstrado na figura 15.

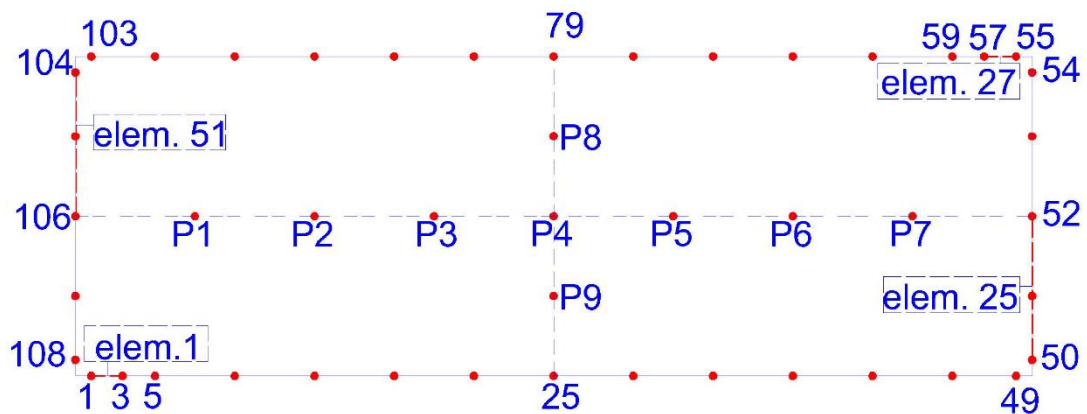
Figura 15– Exemplo de uma chapa com dois carregamentos em p_n



Fonte: Do próprio autor

Para este exemplo foi utilizado a malha de quatro, dezesseis elementos (figura 13) e mais duas malhas, uma de vinte e oito e outra de cinquenta e dois elementos (figura 16).

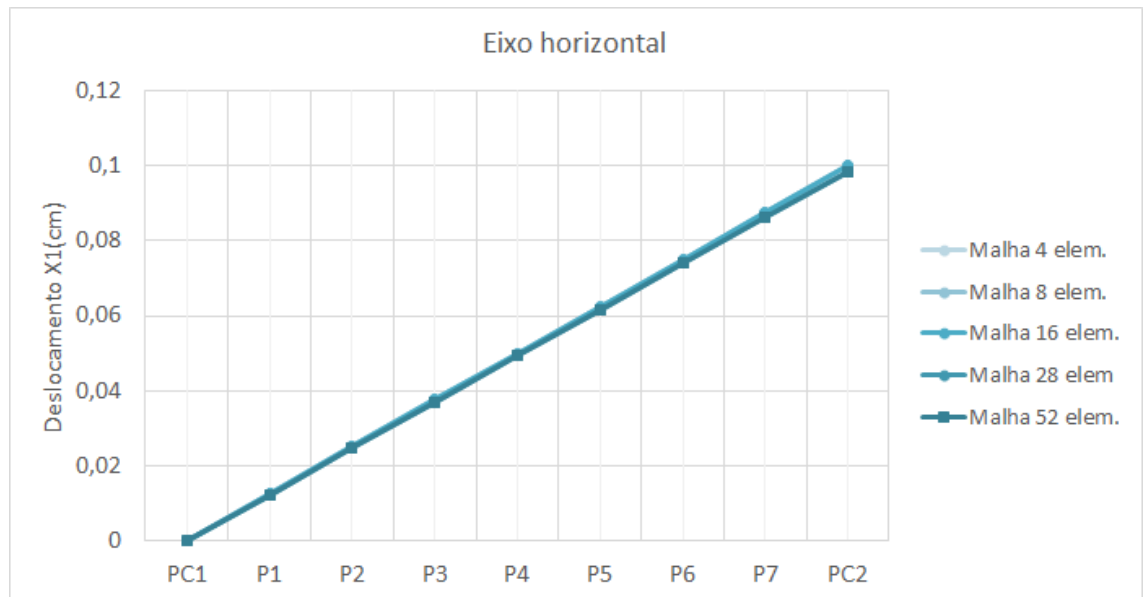
Figura 16– Malha com cento e oito pontos ao longo do contorno



Fonte: Do próprio autor

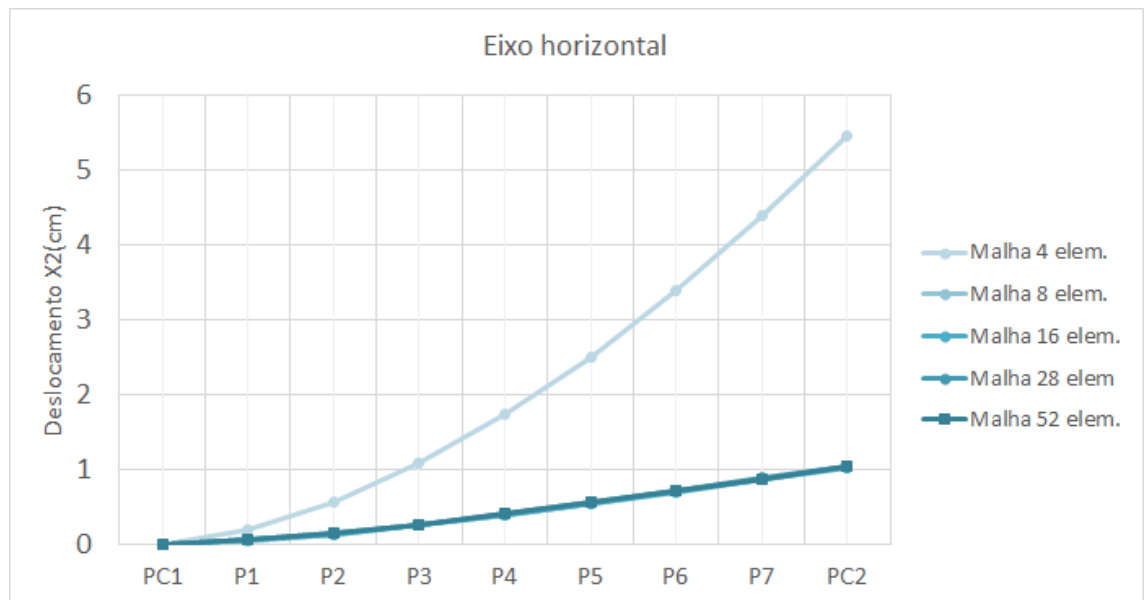
Por causa do acréscimo de carregamento, o exemplo necessitou de mais duas malhas para chegar a convergência, sendo que nas figuras (17) ate (21) estão os deslocamentos nos dois eixos um horizontal e outro vertical para a visualização da convergência da malha nas direções X_1 e X_2 .

Figura 17– Deslocamento X1 no eixo horizontal da chapa



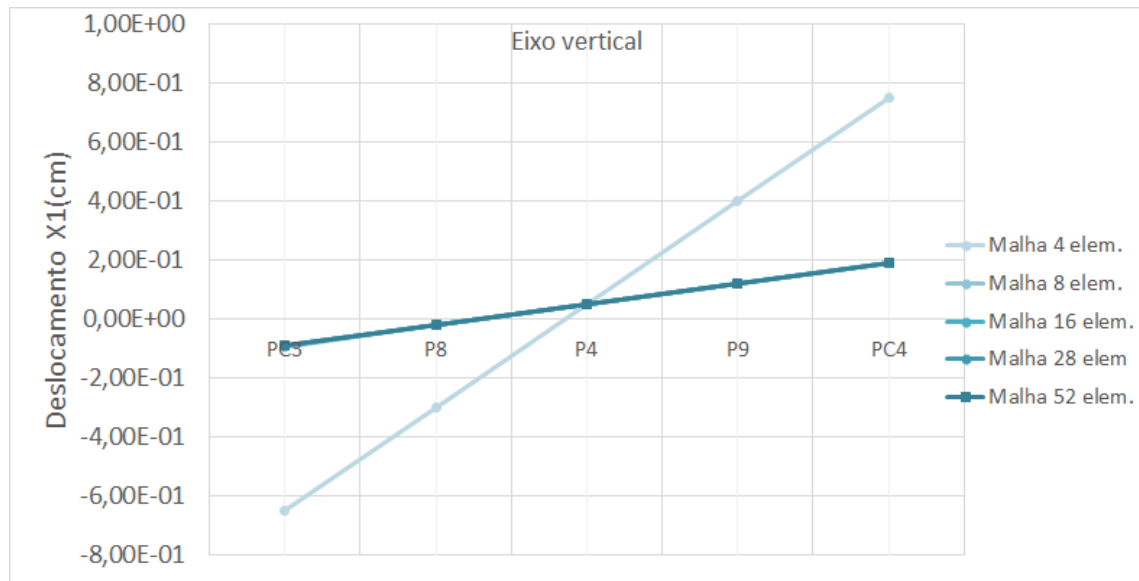
Fonte: Do próprio autor

Figura 18– Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa

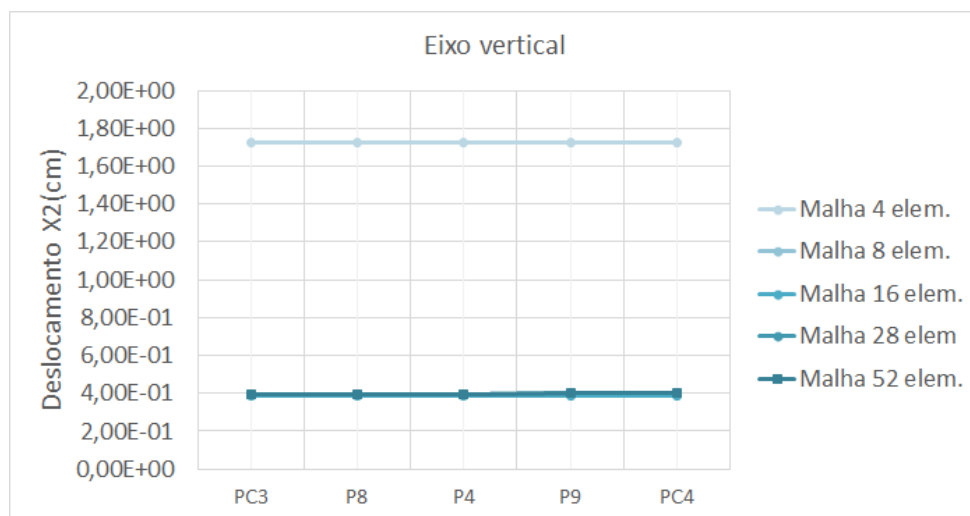


Fonte: Do próprio autor

Percebe-se na figura 18, que a malha de quatro elementos apresenta resultados discrepantes se comparados as demais malhas, indicando que esta é uma malha muito pobre para este exemplo.

Figura 19– Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa

Fonte: Do próprio autor

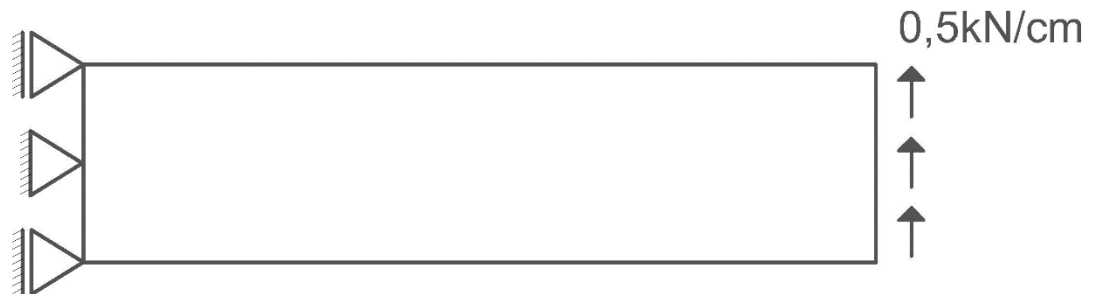
Figura 20– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa

Fonte: Do próprio autor

Percebe-se que a malha com quatro elementos obteve resultados ruins em três dos quatro gráficos acima, confirmando que esta é muito pobre para este problema, sendo que a malha de dezesseis elementos obtém bons resultados, ou seja, convergidos.

2.10.2 Exemplo linear com carregamento em p_s

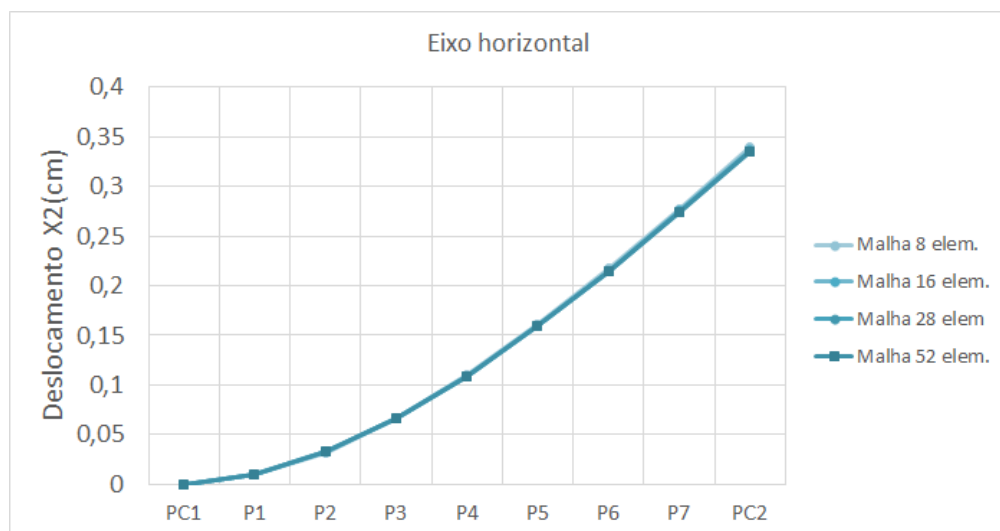
Figura 21– Exemplo chapa com um carregamento em p_s



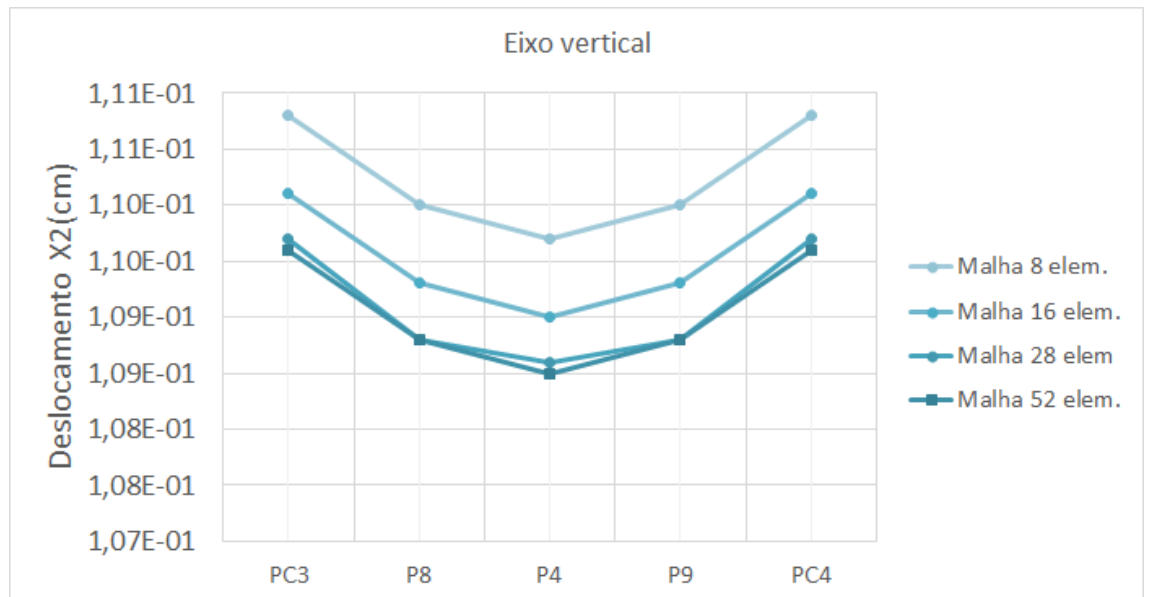
Fonte: Do próprio autor

Neste exemplo, tem-se a mesma chapa e da figura 12 com as mesmas vinculações e Poisson 0,3, porém, muda-se a força aplicada que neste caso é tangencial ou na direção de p_s no valor de meio quilo newtons por centímetro como demonstrado na figura 22. Para este exemplo foi adotado a malha de oito, dezesseis (figura 13), vinte e oito e cinquenta e dois elementos no contorno (figura 16). Nas figuras 22 e 23 estão os resultados obtidos.

Figura 22– Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa



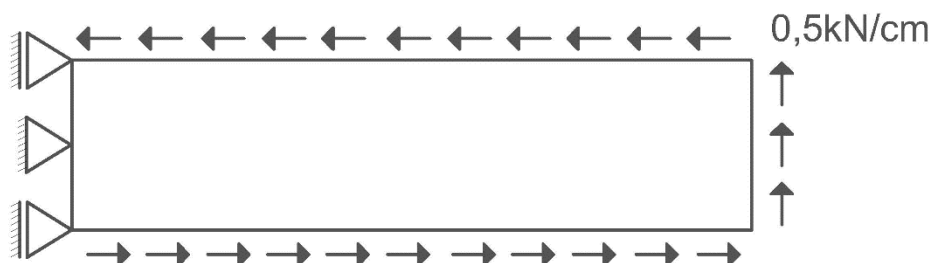
Fonte: Do próprio autor

Figura 23– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa

Fonte: Do próprio autor

Neste exemplo houve a convergência da malha com vinte e oito elementos ao longo do contorno como visto nas figuras 22 e 23, as curvas das Malha 28 e Malha 52 quase coincidem. A malha de quatro elementos foi desprezada por obter resultados ruins como visto anteriormente.

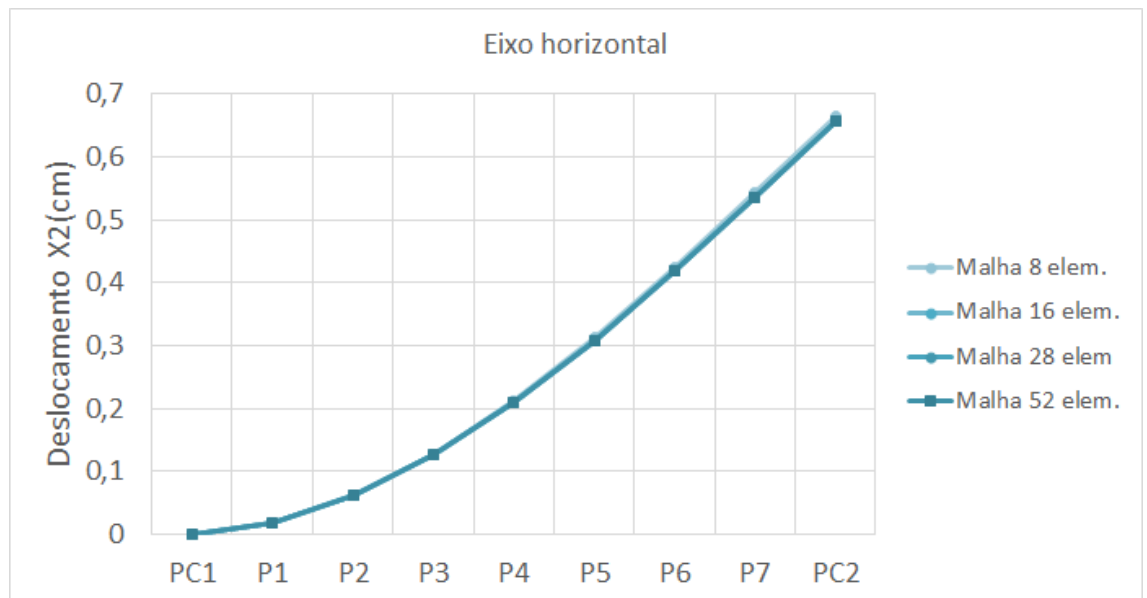
Adicionam-se na figura 21, mais carregamentos tangenciais ao longo do contorno da chapa, menos nas vinculações, como visto na figura 24.

Figura 24– Exemplo chapa com um carregamento em os ao longo do contorno

Fonte: Do próprio autor

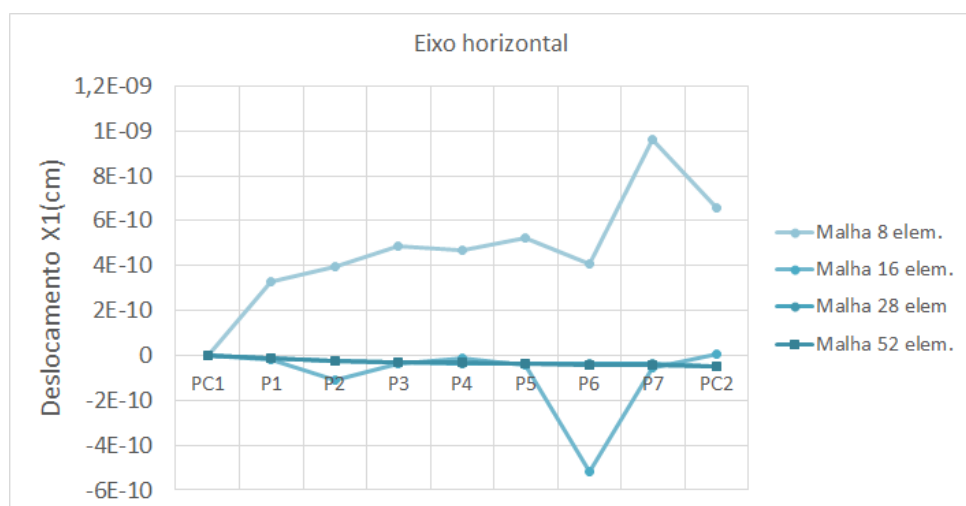
Nas figuras 25 e 26, estão os deslocamentos nos pontos de estudo no eixo horizontal, sendo que nas figuras 27 e 28, estão dos deslocamentos para o eixo vertical.

Figura 25– Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa



Fonte: Do próprio autor

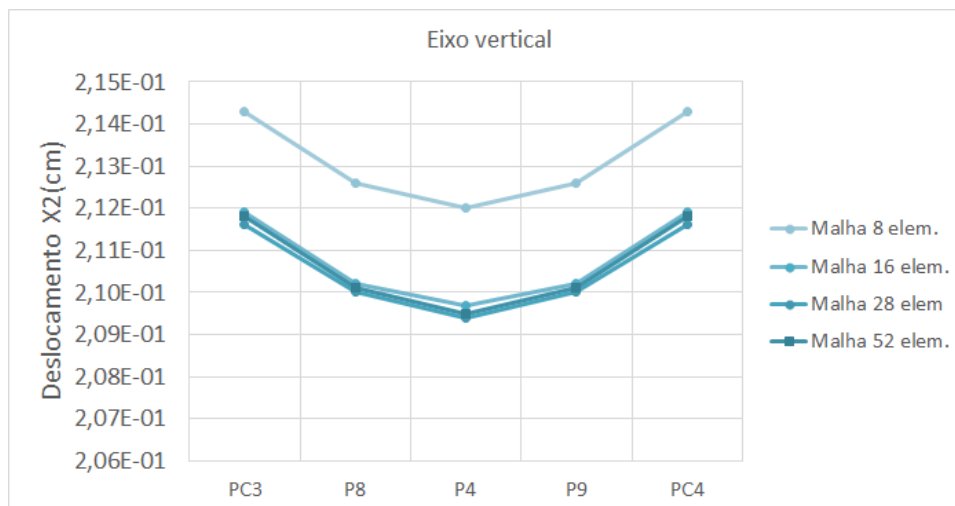
Figura 26– Deslocamento X1 no eixo horizontal da chapa



Fonte: Do próprio autor

Na figura 26, os resultados das malhas com 8 e 16 elementos parecem discrepantes, mas a grandeza dos resultados é da ordem E-10, sendo que a diferença entre todas as malhas são pequenas.

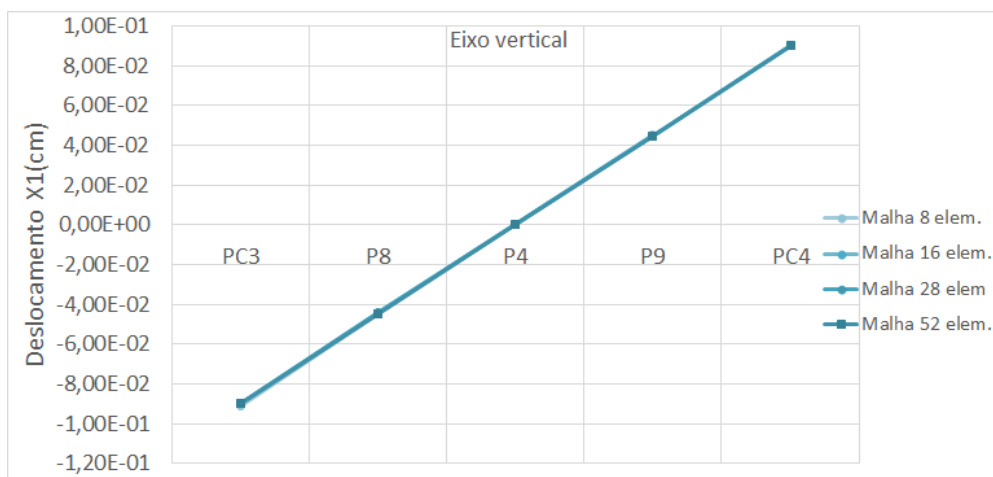
Figura 27– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa



Fonte: Do próprio autor

Na figura 27, percebe-se nitidamente como se dá a convergência dos resultados pela discretização do contorno, há a tendência dos deslocamentos não se alterarem com a adição de novos elementos.

Figura 28– Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa



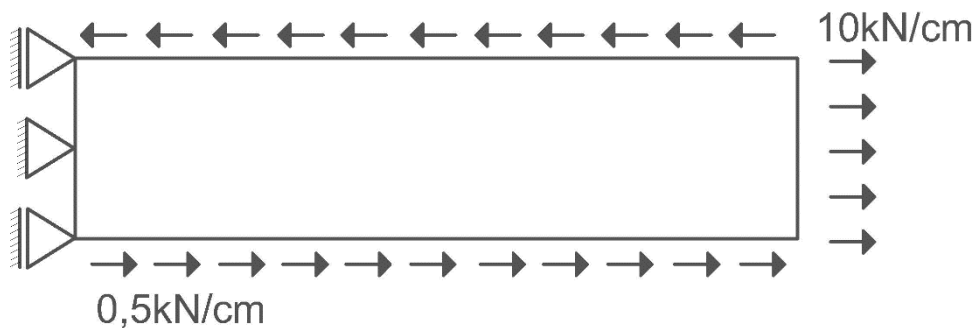
Fonte: Do próprio autor

Neste exemplo, nota-se novamente a convergência que foi na malha de vinte e oito elementos ao longo do contorno.

2.10.3 Exemplo linear com carregamento em p_n e p_s

Nos exemplos anteriores, os carregamentos eram somente normais ou tangenciais nas chapas, sendo que os resultados mostram que é necessária a malha de cento e oito pontos para gerar bons resultados. Neste exemplo, foi considerada a chapa da figura 32 com carregamento em p_n e p_s .

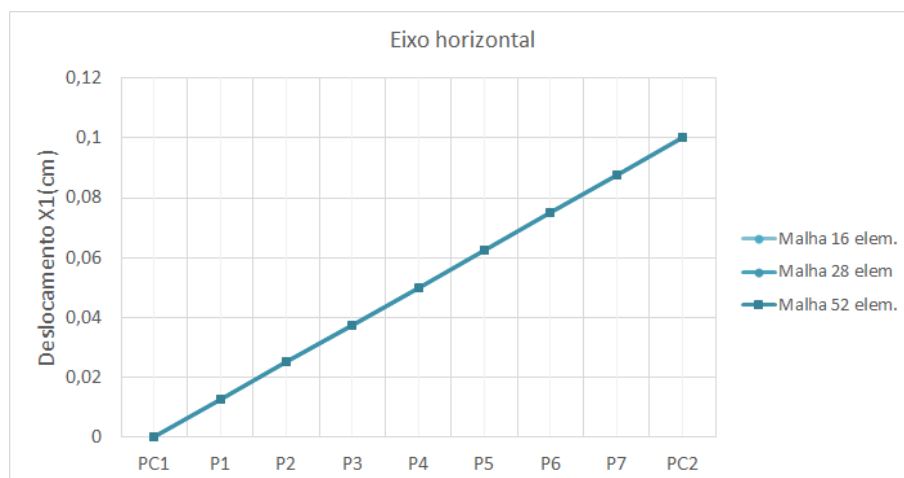
Figura 29– Exemplo chapa com um carregamento em p_s e p_n



Fonte: Do próprio autor

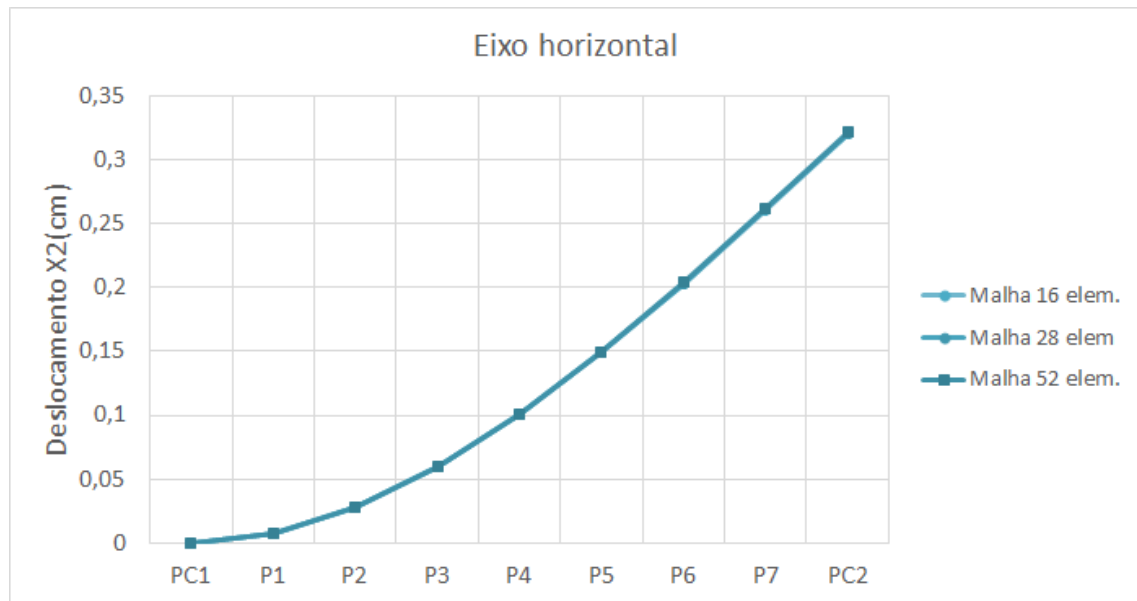
Nas figuras 30 e 31, estão os deslocamentos nos pontos de estudo no eixo horizontal, sendo que nas figuras 32 e 33, estão dos deslocamentos para o eixo vertical.

Figura 30– Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa



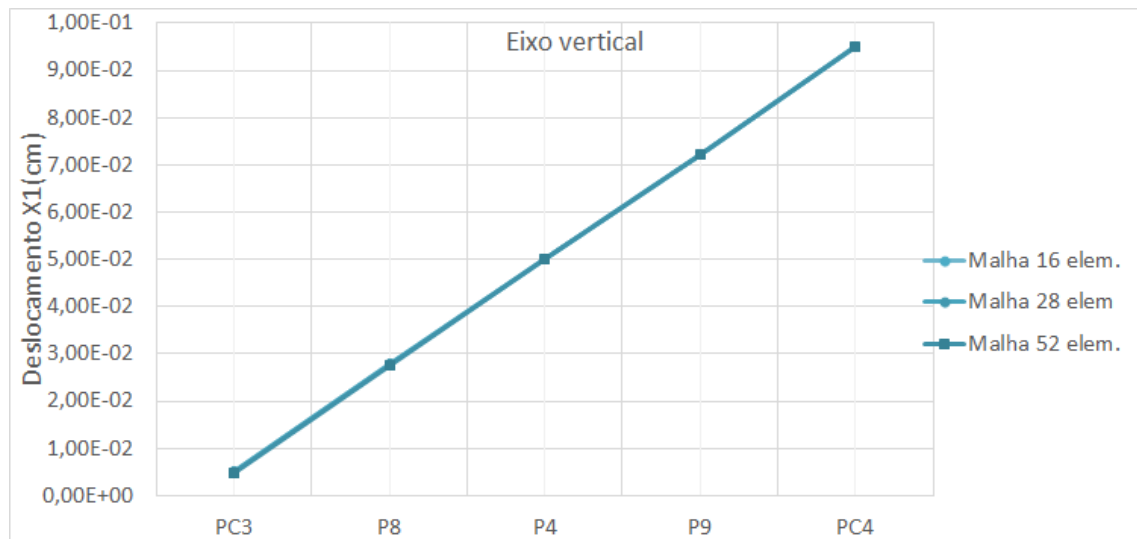
Fonte: Próprio do próprio autor

Figura 31– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa

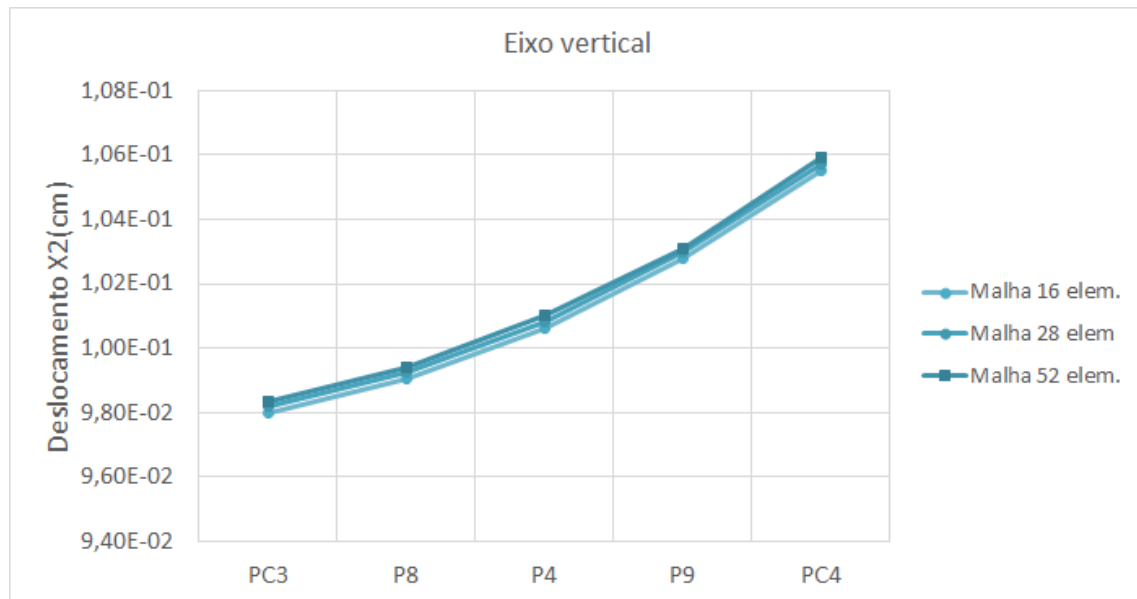


Fonte: Do próprio autor

Figura 32– Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa



Fonte: Do próprio autor

Figura 33– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa

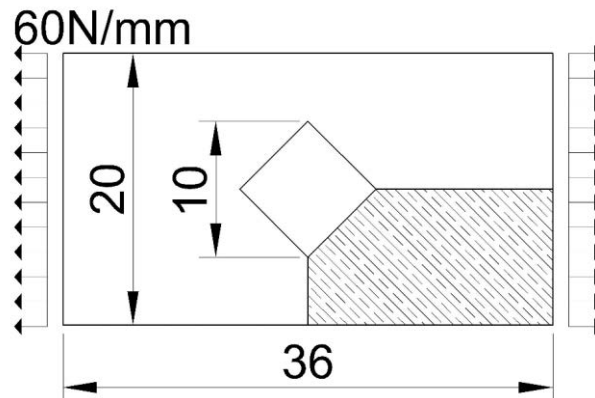
Fonte: Do próprio autor

Na figura 33, há uma alteração na malha com cento e oito pontos porém com base nos exemplos rodados, pode-se concluir que para o problema de chapa retangular com carregamentos normal e tangencial é necessário discretizar o contorno sessenta pontos, para gerar bons resultados.

2.10.4 Exemplo linear de chapas com furos

Nestes exemplos, adota-se a chapa de alumínio com dimensão de 20x36mm com furos diversos de 10 mm e espessura de 1 mm. O carregamento é normal (p_n) de valor 60N/mm aplicado nas duas extremidades da chapa. O módulo de elasticidade adotado foi de $E=70\text{GPa}$. Como há simetria no problema somente um quarto da placa será discretizada como mostrado na hachura da figura 34, sendo válido para todos os tipos de furos a serem analisados.

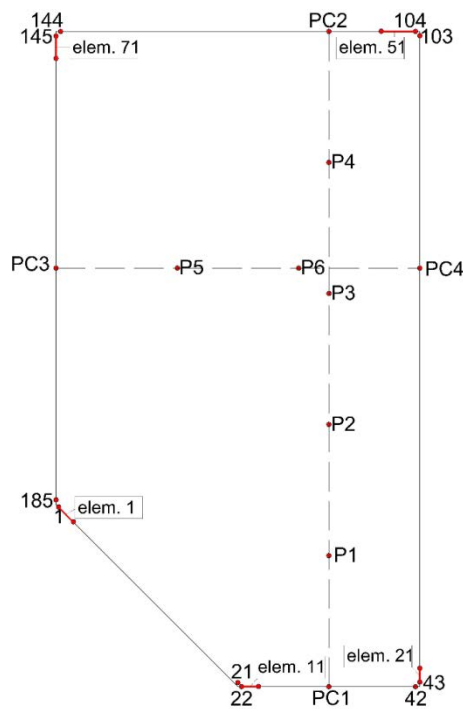
Figura 34– Chapa de alumínio com furo quadrado



Fonte: Do próprio autor

O primeiro tipo de furo a ser analisado é o da figura 34 que consiste em um losango de diagonal igual a dez milímetros no centro da chapa. Para este exemplo, propõe três discretizações de malhas, uma de vinte e sete elementos, outra de cinquenta e quatro e por fim uma malha com noventa elementos ao longo do contorno, como visto na figura 35.

Figura 35– Chapa de alumínio com furo em losango e cento e oitenta e cinco pontos no contorno



Fonte: Do próprio autor

Nas figuras 36 e 37, estão os deslocamentos nos pontos de estudo no eixo horizontal, sendo que nas figuras 38 e 39, estão dos deslocamentos para o eixo vertical.

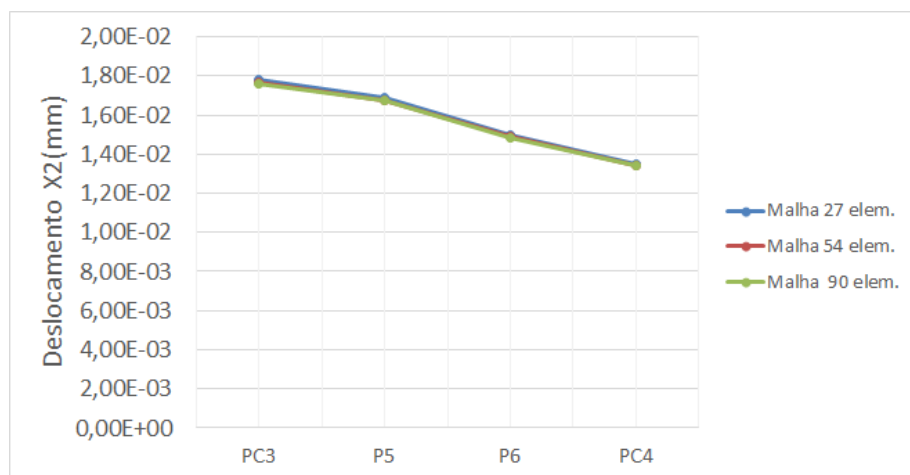
Figura 36– Deslocamento X1 no eixo horizontal da chapa com furo em losango



Fonte: Do próprio autor

Percebe-se que no ponto PC3 o deslocamento é zero, isso se dá pela simetria do problema com o carregamento numericamente igual, mas em direções opostas.

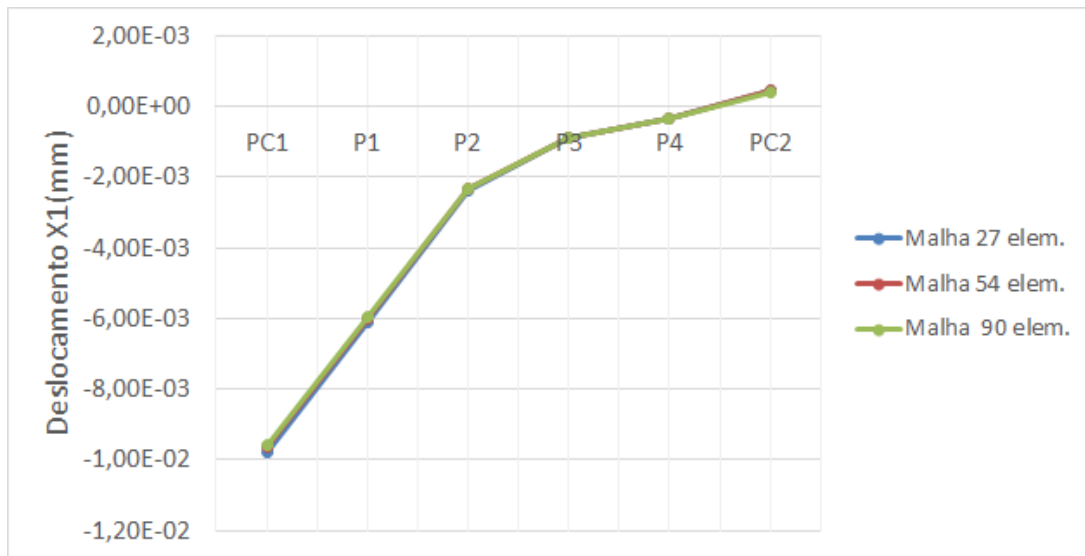
Figura 37– Deslocamento X2 no eixo horizontal da chapa da chapa com furo em losango



Fonte: Próprio do próprio autor

No eixo horizontal, a malha de vinte e três pontos se altera um pouco em relação as demais, sendo que há pouca alteração no deslocamento com a malha de sessenta e três pontos, indicando que a malha pode ser malha convergida.

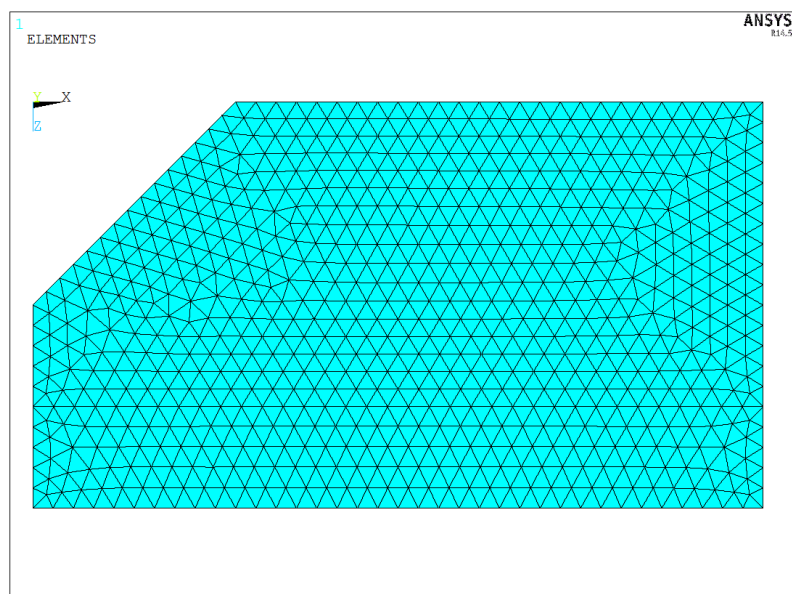
Figura 38– Deslocamento X1 no eixo vertical da chapa da chapa com furo em losango



Fonte: Do próprio autor

Para complementar o estudo do deslocamento, na direção de X2, foi feita a seguinte discretização no *software* de elementos finitos Ansys, utilizando o elemento sólido 185, presente na biblioteca do programa. Na figura 39 está a discretização proposta.

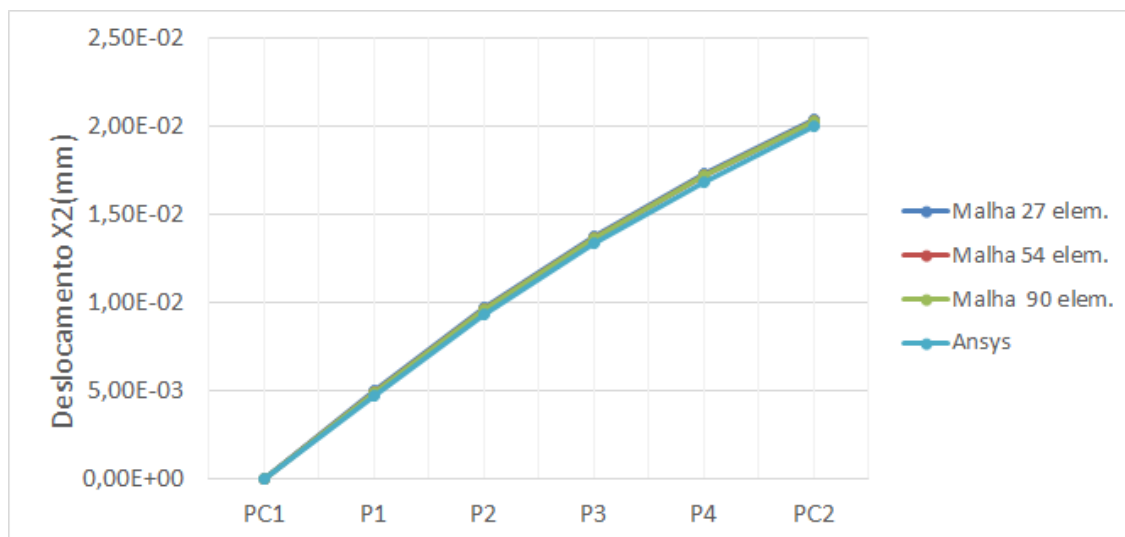
Figura 39 – Discretização no Ansys da chapa com furo em losango



Fonte: Do próprio autor

Na figura 40, tem-se a comparação do deslocamento X_2 do eixo vertical com o *software* de elementos finitos Ansys.

Figura 40– Deslocamento X_1 no eixo vertical da chapa da chapa com furo em losango

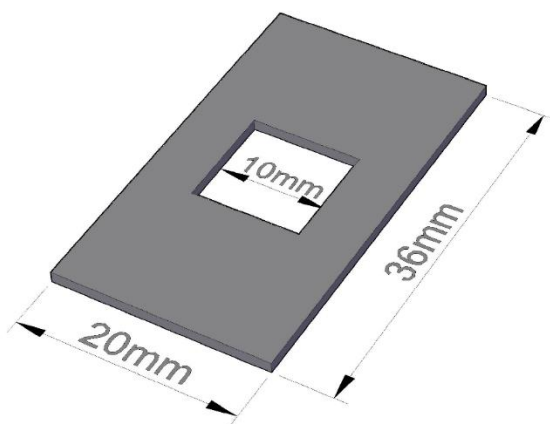


Fonte: Próprio do próprio autor

Para a chapa com furo em losango, tem-se que a malha com vinte e sete elementos, ao longo do contorno, é suficiente para gerar bons resultados.

Analisa-se agora a chapa com furo quadrado no centro, como demonstrado na figura 41.

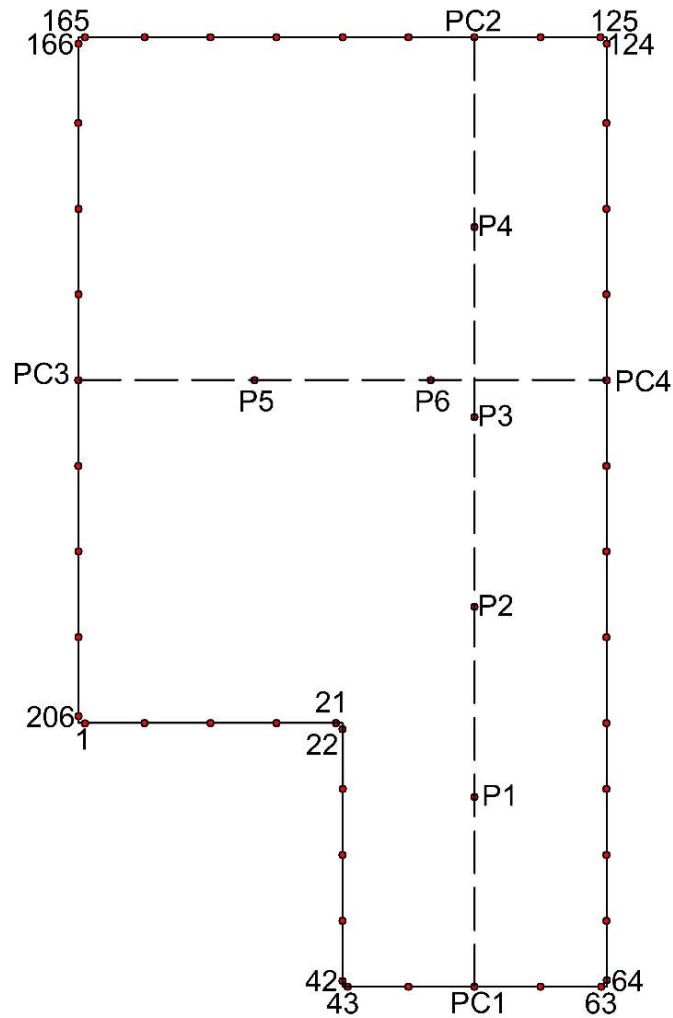
Figura 41– Chapa de alumínio com furo quadrado



Fonte: Do próprio autor

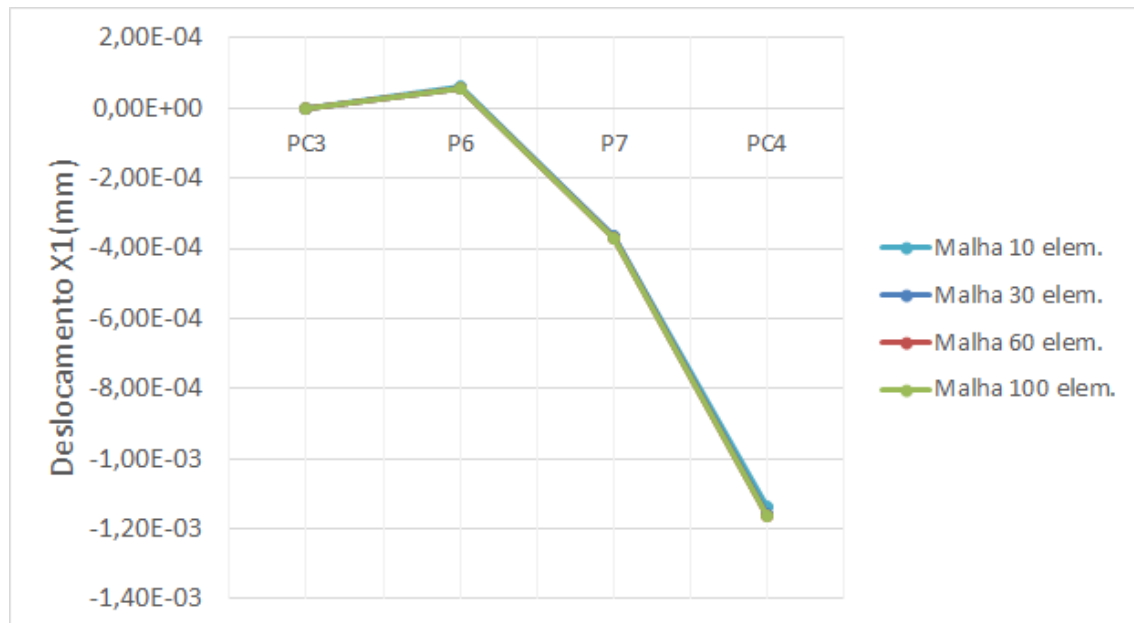
Para este exemplo, propõe três discretizações de malhas uma de trinta, outra de sessenta e seis e por fim uma malha com cem elementos ao longo do contorno como visto na figura 42.

Figura 42– Chapa de alumínio furo quadrado 100 elementos ou duzentos e seis pontos no contorno

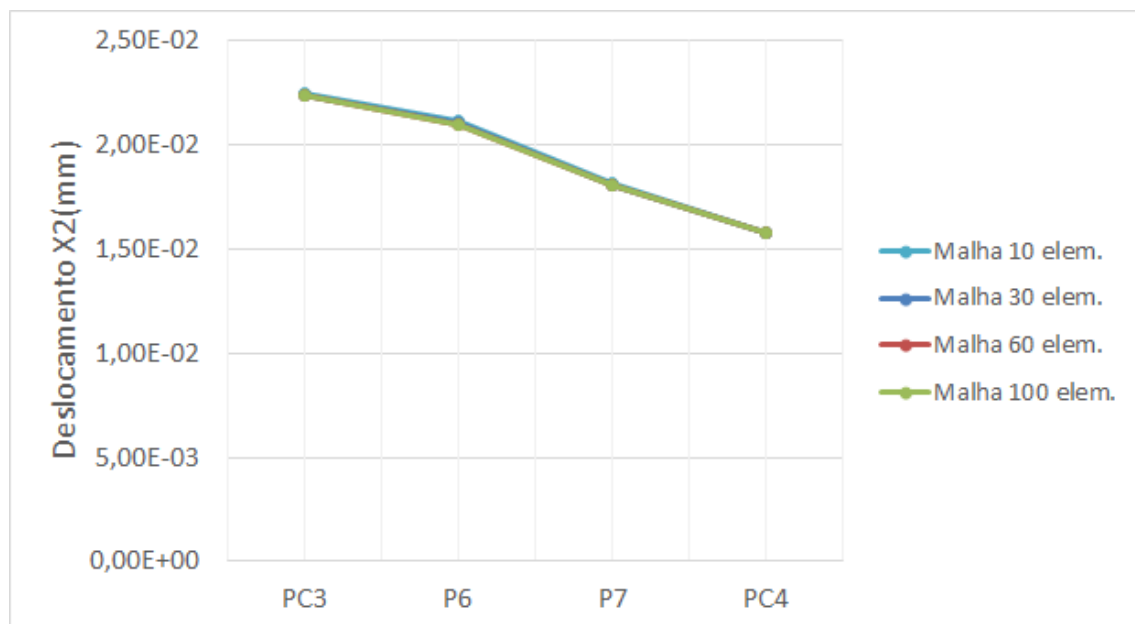


Fonte: Do próprio autor

Nas figuras 43 e 44, estão os deslocamentos nos pontos de estudo no eixo horizontal, sendo que nas figuras 45 e 46, estão dos deslocamentos para o eixo vertical.

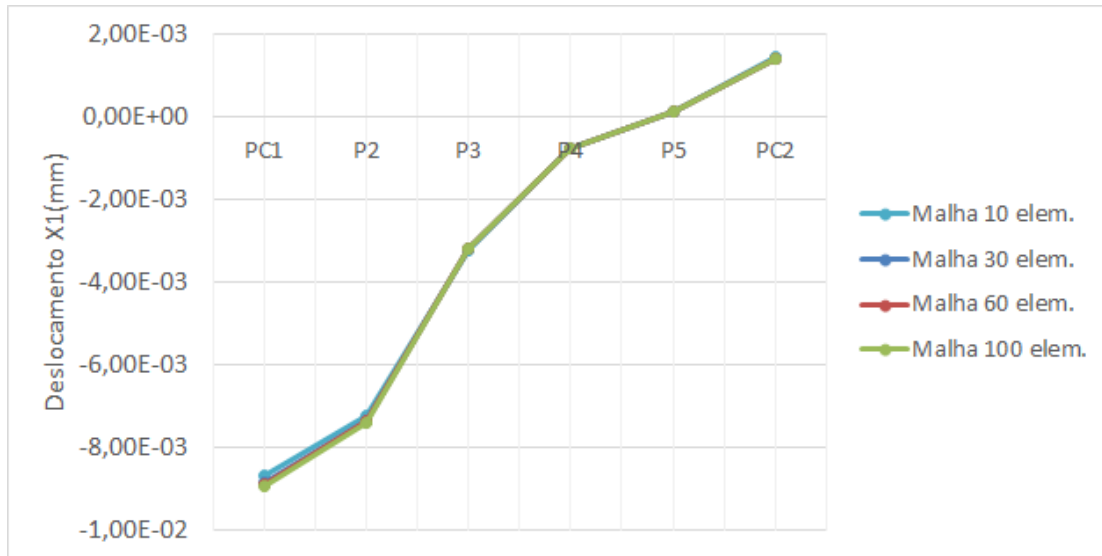
Figura 43– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado

Fonte: Do próprio autor

Figura 44– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado

Fonte: Do próprio autor

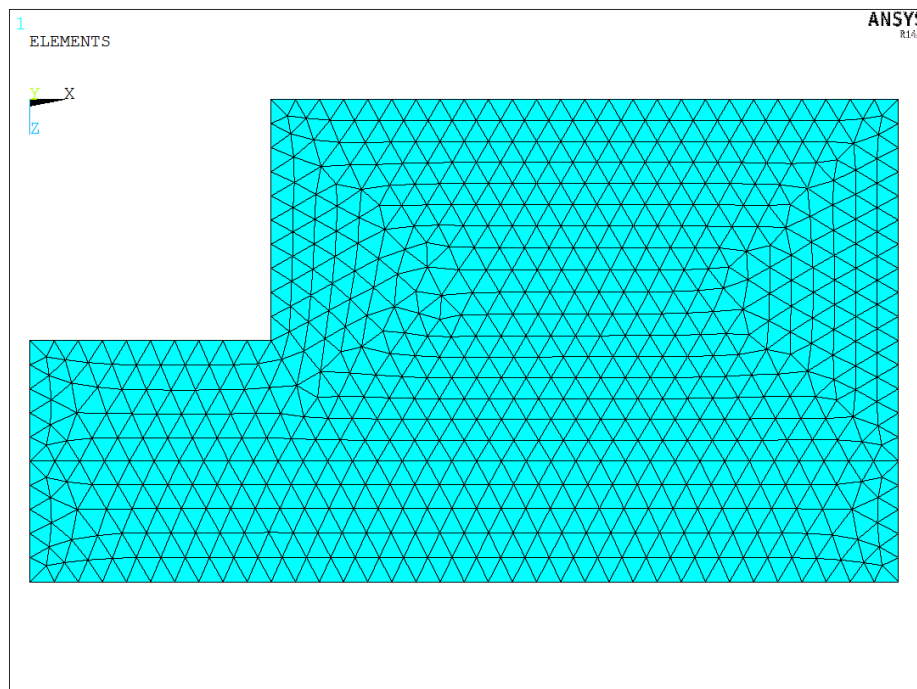
Figura 45– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado



Fonte: Do próprio autor

Assim, como feito com o furo em losango, foi analisado no furo retangular o deslocamento utilizando no *software* de elementos finitos Ansys, discretizando com o elemento sólido 185, presente na biblioteca do programa. Na figura 46 está a discretização proposta.

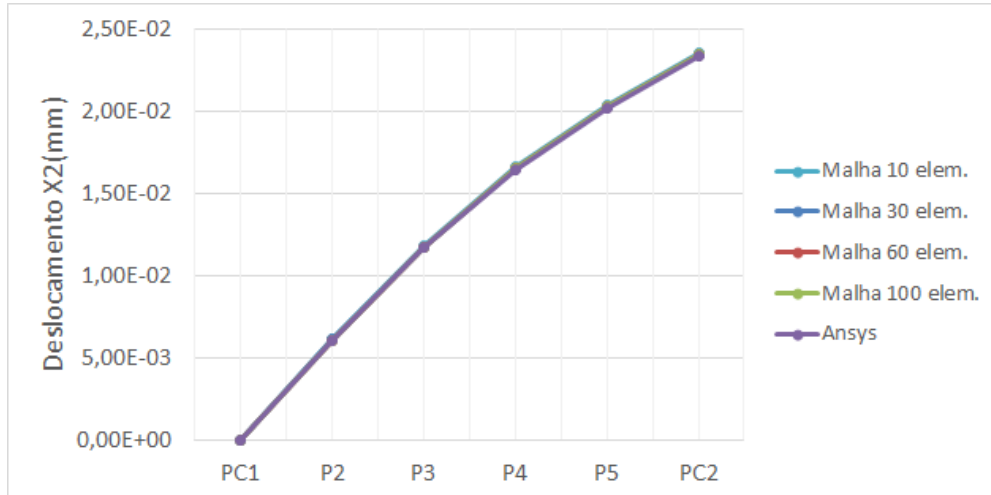
Figura 46– Discretização no Ansys da chapa com furo quadrado



Fonte: Do próprio autor

Na figura 47, tem-se a análise do deslocamento na direção X2.

Figura 47– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo quadrado

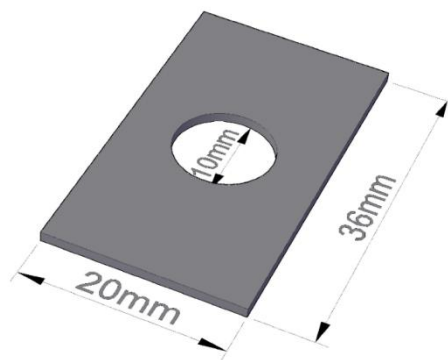


Fonte: Do próprio autor

Nota-se que no exemplo com furo quadrado, a malha dez elementos, obteve convergência como vista nas figuras 43 até 47, pouco se alterou nos deslocamentos com o acréscimo de mais pontos ao longo do contorno.

Por fim, foi analisada a chapa com furo circular (figura 48), as condições de contorno são as mesmas sendo que o furo tem raio 10mm.

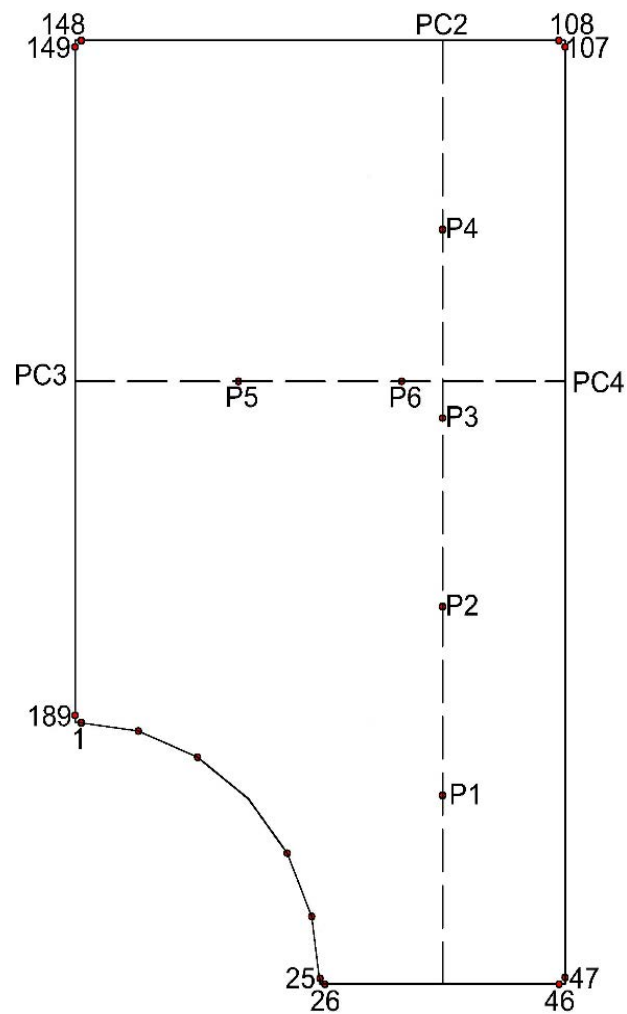
Figura 48– Chapa de alumínio com furo circular



Fonte: Do próprio autor

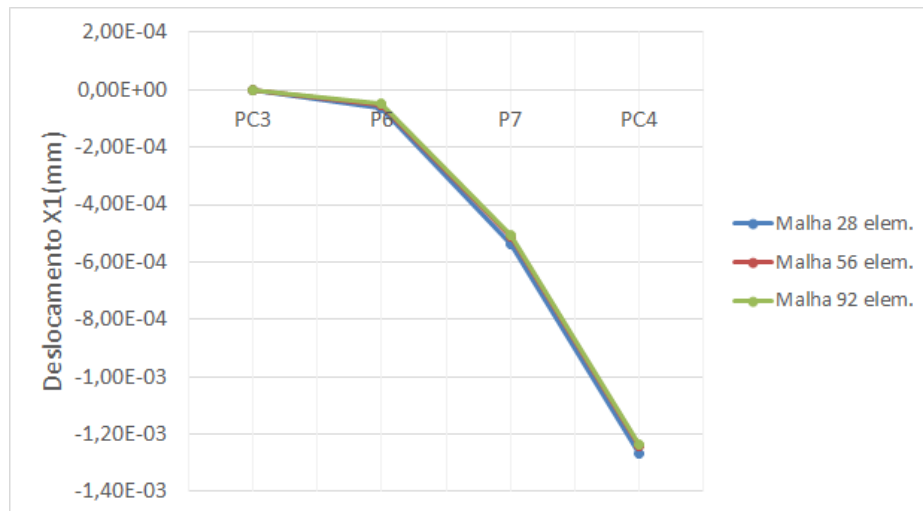
Para o estudo da convergência da malha, adotaram-se três discretizações uma malha com vinte e oito, outra com cinquenta e seis e a última noventa e dois elementos no contorno (figura 49).

Figura 49– Chapa de alumínio com furo circular e 189 pontos ou noventa e dois elementos no contorno



Fonte: Do próprio autor

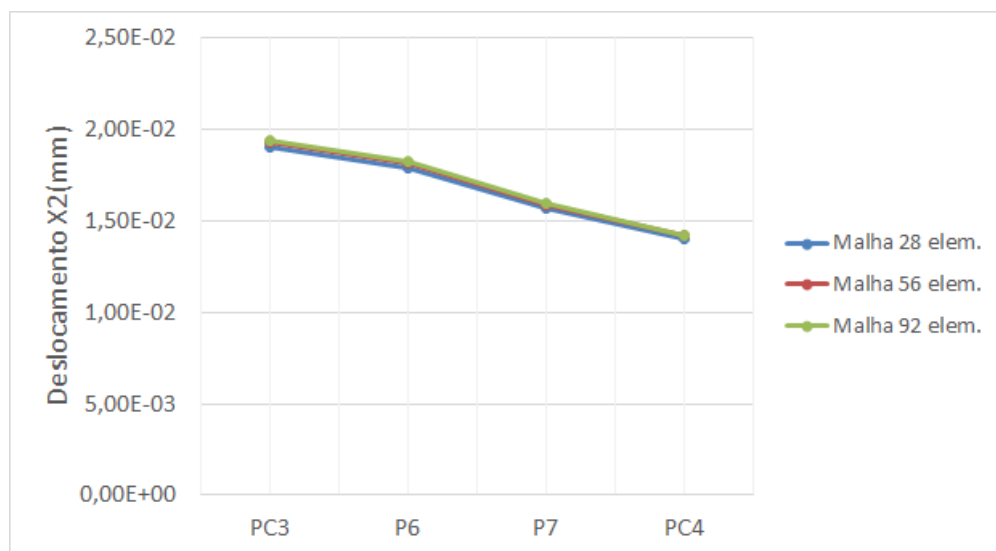
Figura 50– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular



Fonte: Do próprio autor

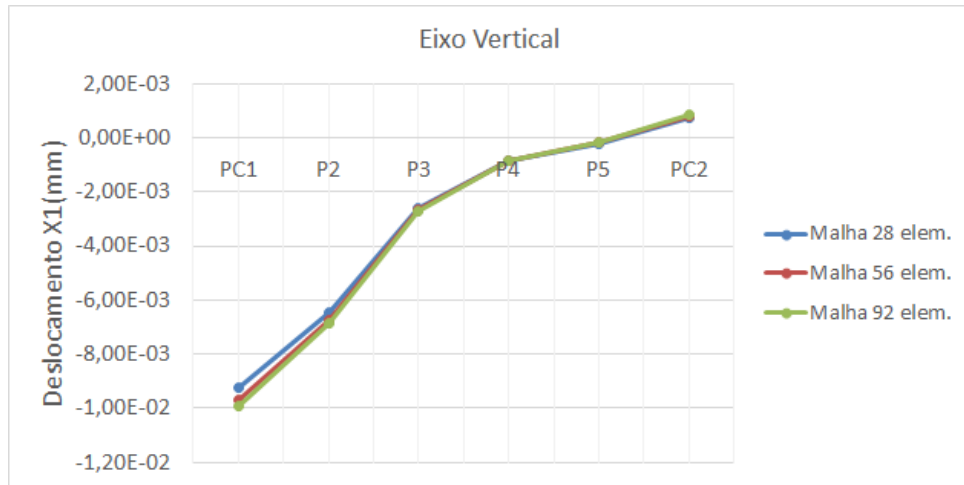
Na figura 50, observa-se que há uma pequena variação nos deslocamentos diferenciando dos outros dois exemplos de furos, isso se dá pelo problema da chapa com furo circular ser um pouco mais complexa na análise.

Figura 51– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular



Fonte: Do próprio autor

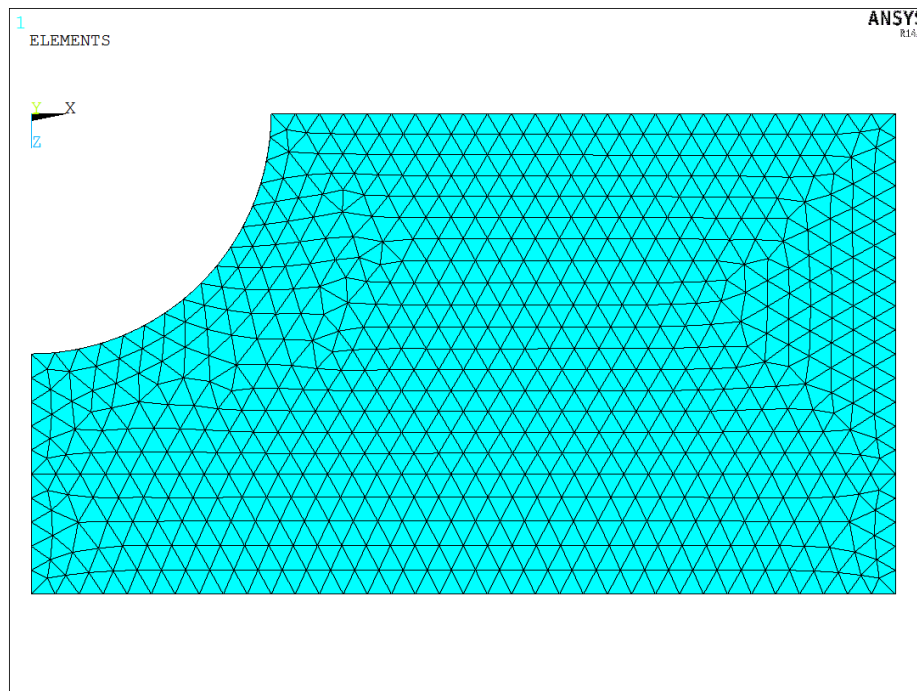
Figura 52– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular



Fonte: Do próprio autor

No gráfico da figura 52, há uma pequena alteração nas curvas das malhas, contudo a variação do deslocamento é muito pequena. Na figura 53, está a discretização proposta no Ansys, para ao caso circular.

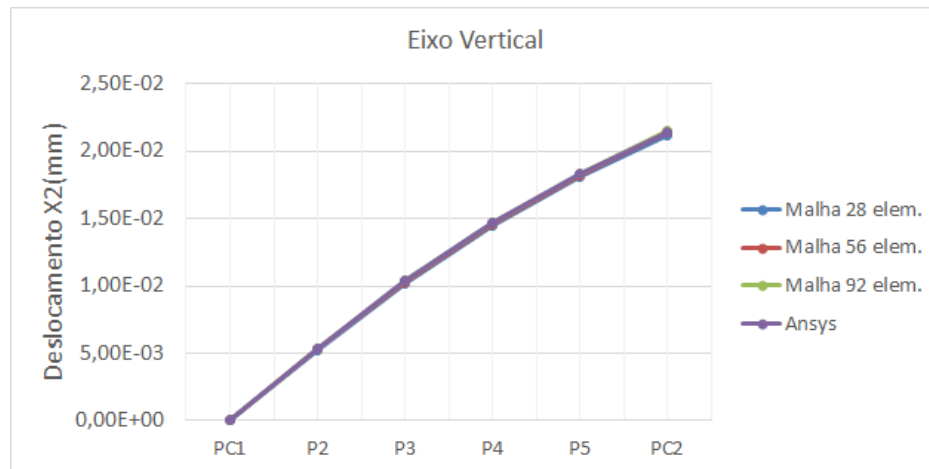
Figura 53– Discretização no Ansys da chapa com furo quadrado



Fonte: Do próprio autor

Na figura 54, tem-se a análise do deslocamento na direção X2.

Figura 54– Deslocamento X2 no eixo vertical da chapa com furo circular



Fonte: Do próprio autor

Para o exemplo com furo circular, há variações nas curvas das malhas, porém são tão pequenas que a malha de vinte e oito elementos obteve convergência, concluindo que para estes tipos de furos analisados malhas em torno de sessenta pontos ou trinta elementos ao longo do contorno são suficientes para gerar bons resultados.

Assim, em um dado incremento **n+1**, o ponto poderá sofrer carregamento plástico (caminho **2** da figura 55), isto é, o ponto é submetido a tensão maior que o limite elástico; ou sofrer descarregamento elástico (caminho **1**), e o ponto é submetido a uma tensão menor que aquela do incremento anterior.

A partir da figura 55, pode-se concluir as seguintes relações para esse modelo:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (165)$$

Sendo ε a deformação total, ε^e é a deformação elásticas; e ε^p é a deformação plástica.

Pela lei de Hooke se tem:

$$\sigma = E\varepsilon^e \quad (166)$$

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (167)$$

Admitindo que as variáveis são funções do tempo, define-se que:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \quad (168)$$

Como visto na figura 55, quando $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ se tem deformações irreversíveis, assim a deformação plástica acumulada num certo intervalo de tempo t_1, t_2 é dado por:

$$\varepsilon^p = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varepsilon}^p dt \quad (169)$$

Escrevendo as relações de tensão deformação em termos de taxas ou variação do tempo se tem:

$$\dot{\sigma} = E\dot{\varepsilon}^e \quad (170)$$

$$\dot{\sigma} = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (171)$$

Pode-se definir o critério de plastificação da figura 55, na seguinte inequação:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0 \quad (172)$$

Sendo, $\alpha > 0$, $K > 0$ e $\sigma_y > 0$ em que K é denominado módulo plástico ou parâmetro de endurecimento, dado pela tangente à curva ($\sigma \propto \varepsilon^p$).

Pode-se definir $\dot{\lambda}$ como sendo o valor absoluto da velocidade de deformação plástica ($\dot{\varepsilon}$), ou seja:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} > 0 \text{ se } \sigma = \sigma_y \quad (173)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = -\dot{\lambda} > 0 \text{ se } \sigma = -\sigma_y \quad (174)$$

Assim, afirma-se que $\dot{\varepsilon}^p$ é caracterizado pela velocidade de deformação plástica $\dot{\lambda}$ e o sinal da tensão σ :

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{ sinal}(\sigma) \quad (175)$$

Sendo que se o encruamento for exclusivamente por deformação se tem:

$$\dot{\alpha} = |\dot{\varepsilon}^p| \quad (176)$$

Observa-se que $\dot{\lambda}$ e $f(\sigma)$ respeitam certas condições unilaterais isto é, $\dot{\lambda} > 0$ e $f(\sigma) \leq 0$. Entende-se que não se admite $f(\sigma) > 0$ e caso contrário seria um descarregamento, pode-se afirmar que:

$$\dot{\lambda} = 0 \text{ se } f(\sigma) < 0 \quad (177)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \text{ se } f(\sigma) = 0 \quad (178)$$

Portanto vale a relação $\dot{\lambda} f(\sigma) = 0$, denominada condição de complementariedade.

Além disso $\dot{f} < 0$ (caminho 1 da figura 55) configura um descarregamento, com $\dot{\lambda} = 0$. Desse modo $\dot{\lambda} > 0$ só é possível se $f(\sigma) = 0$ e $\dot{f}(\sigma) = 0$. Em resumo se tem:

$$\dot{f}(\sigma) = 0 \rightarrow \dot{\lambda} > 0 \quad (179)$$

$$\dot{f}(\sigma) < 0 \rightarrow \dot{\lambda} = 0 \quad (180)$$

Assim se constrói a condição de consistência:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0 \quad (181)$$

A condição de consistência possibilita a obtenção de uma relação para explicita para $\dot{\lambda}$. Tem-se que \dot{f} é a variação de f no tempo

$$\dot{f} = \frac{\partial f(\sigma)}{\partial t} \quad (182)$$

Assim, deriva-se a função por partes como segue:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \quad (183)$$

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \dot{\alpha} \quad (184)$$

Deriva-se (172) em relação à σ, α e substituindo (171) em (184) chega-se a:

$$\dot{f} = \sin(\sigma) E (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - K \dot{\alpha} \quad (185)$$

Substituindo (173) e (175) se tem:

$$\dot{f} = \sin(\sigma) E \dot{\varepsilon} - \sin(\sigma) E \dot{\lambda} \sin(\sigma) - K \dot{\lambda} \quad (186)$$

$$\dot{f} = \sin(\sigma) E \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} (E + K) \leq 0 \quad (187)$$

Impondo $\dot{f} = 0$, condição que garante $\dot{\lambda} \geq 0$ resulta em:

$$\dot{\lambda} = \dot{\alpha} = \frac{E \dot{\varepsilon}}{(E + K)} \sin(\sigma) \quad (188)$$

Assim:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \sin(\sigma) = \frac{E \dot{\varepsilon}}{(E + K)} \quad (189)$$

$$\dot{\sigma} = E \left(\dot{\varepsilon} - \frac{E \dot{\varepsilon}}{(E + K)} \right) \quad (190)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{EK}{(E+K)} \dot{\varepsilon} \quad (191)$$

Assim, tem-se a seguinte relação:

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} E\dot{\varepsilon}, \dot{\lambda} < 0 \\ \frac{EK}{(E+K)}, \dot{\lambda} \neq 0 \end{cases} \quad (192)$$

Sendo $\frac{EK}{(E+K)}$ como modulo elasto-plástico tangente (E^{ep}).

3.2.1 Processo incremental-iterativo para o caso uniaxial

O modelo constitutivo expresso em termos de “taxas”, ou velocidades de tensão e deformação, exige, para solução numérica, uma integração discreta dentro do intervalo de tempo de interesse. Isto é, dentro do intervalo $[0,T]$, definem-se uma série de instantes t em relação aos quais os valores das variáveis $\varepsilon, \varepsilon^p, \sigma e \alpha$ devem ser atualizados de acordo com as relações do modelo.

Assim, é necessário obter uma forma “incremental” do modelo constitutivo de modo a passar, através de um passo finito Δt , dos valores das variáveis no instante genérico t_n para t_{n+1} .

Para se obter o valor da tensão verdadeira σ_{n+1}^v , procede-se da seguinte maneira no processo incremental iterativo:

- 1) Sendo, n o incremento e i a iteração, inicialmente, supõe-se que o incremento de força (**n+1**) é elástico e portanto, têm-se:

$$\varepsilon_{n+1}^i = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_{n+1}^{(i)} \quad (193)$$

$$\sigma_{n+1}^{e(i)} = \sigma_n + \Delta \sigma_{n+1}^{(i)} \quad (194)$$

- 2) Verifica-se então o critério:

$$f_{n+1}^{(i)} = \left| \sigma_{n+1}^{e(i)} \right| - (\sigma_y + K \alpha_{n+1}) \leq 0 \quad (195)$$

3) Considerando que a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$\Delta \lambda f_{n+1} = 0 \quad (196)$$

3.1) Se $f_{n+1} \leq 0$, tem-se que $\Delta \lambda = 0$ e portanto: $\sigma_{n+1}^v = \sigma_{n+1}^e$

3.2) Se $f_{n+1} > 0$, tem-se que $\Delta \lambda > 0$. Portanto, deve-se procurar um novo estado de tensão tal que $f_{n+1} = 0$, como está mostrado na figura 56. Calcula-se então $\Delta \lambda$, através da equação (188) e o incremento de deformação plástica $\Delta \varepsilon_{n+1}^p$, com a equação (175).

3.3) Atualizam-se, então, os valores de ε_{n+1}^p e α_{n+1}

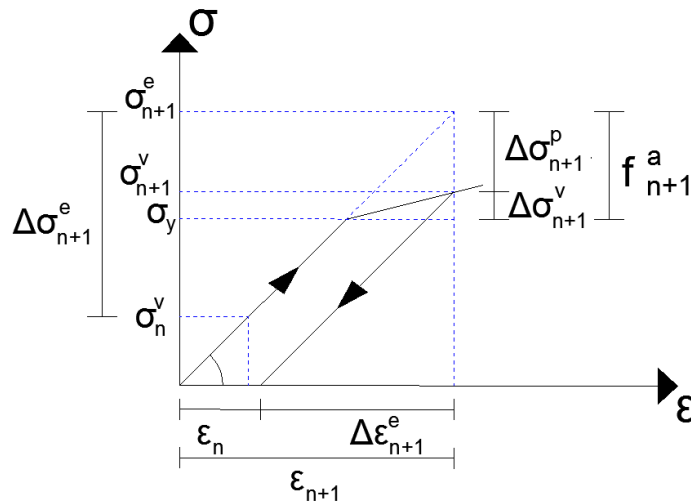
$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \varepsilon_{n+1}^p \quad (197)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta \lambda \quad (198)$$

4) A tensão verdadeira σ_{n+1}^v é dada por:

$$\sigma_{n+1}^v = E(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (199)$$

Figura 56- Correção da Tensão no Modelo Elasto-plástico Uniaxial com Encruamento Isótropo Positivo



Fonte: Próprio do próprio autor

Em que:

$\Delta\sigma^e$ é o incremento de tensão suposto elástico,

σ^e é a tensão total suposta elástica,

σ^v é a tensão verdadeira,

$\Delta\sigma^p$ é a parcela plástica de $\Delta\sigma^e$, ou o excesso de tensão,

$\Delta\sigma^v$ é o incremento verdadeiro de tensão,

$f_{t+\Delta t}^a$ é o valor do critério no início da iteração correspondente ao instante $t+\Delta t$.

3.3 Encruamento Isótropo Positivo para caso multiaxial

O critério de plastificação, ou de escoamento, no caso bidimensional ou tridimensional, é dado por:

$$f(\bar{\sigma}, p) = \bar{\sigma} - \sigma_y(p) \leq 0 \quad (200)$$

Sendo $\bar{\sigma}$ é a tensão efetiva, isto é, a tensão equivalente ao estado uniaxial, que é calculada a partir do critério adotado, que, no caso desse trabalho, será o Von Mises e $\sigma_y(p)$ é a nova tensão de plastificação, após o encruamento, dada por:

$$\sigma_y(p) = (\sigma_y - p) \quad (201)$$

Em que:

$$p = -\lambda h(\sigma, p) \quad (202)$$

p é a variável relacionada ao encruamento, sendo que h define o tipo de encruamento e que, nesse caso, é:

$$p = -K\bar{\varepsilon}^p \quad (203)$$

Sendo que (203) pode ser escrita na forma de taxa:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \dot{p} = -K\dot{\bar{\varepsilon}}^p \quad (204)$$

Em que $\bar{\varepsilon}^p$ é a deformação plástica efetiva e $\dot{\bar{\varepsilon}}^p$ representa a taxa.

No caso multiaxial, o critério de plastificação será representado por uma superfície de plastificação (ver figura 57), sendo que após dado o incremento de carga ou seja, na iteração **n+1**, pode ocorrer os casos seguintes:

- Se $\dot{f} < 0$, tem-se descarregamento elástico e o ponto está dentro da superfície de plastificação.
- Se $\dot{f} = 0$ pode-se ter $\dot{\lambda} \geq 0$. Na primeira possibilidade, tem-se carregamento plástico (o ponto cai fora da superfície de plastificação, quando se soma o incremento de tensão elástico à tensão verdadeira da iteração anterior), com evolução da deformação plástica e do encruamento; e na segunda, tem-se um carregamento neutro, que ocorre em materiais perfeitamente plásticos, em que não há evolução da deformação plástica, ou seja, tem-se $f = 0$ ao final de dois incrementos consecutivos, sem ocorrer encruamento no último incremento considerado, ou seja, a superfície de plastificação permanece inalterada e o ponto ‘anda’ sobre a mesma.

Pode-se decompor o tensor de deformações como feito em (165) e calcula-se a lei de plastificação semelhante feita a (175) se tem:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r(\sigma, p) \quad (205)$$

Em que r é dado por:

$$r = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \quad (206)$$

Sendo que r representa o gradiente de tensão do potencial plástico Q e estabelece a “direção” do fluxo plástico.

Na fase elástica, a lei incremental é dada por:

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^e \quad (207)$$

Em que C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas para materiais isotrópicos.

Na fase plástica, o caso multiaxial é associado ao caso uniaxial através da tensão e da deformação plásticas efetivas. Assim, a lei incremental é dada por:

$$\Delta \bar{\sigma} = K \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (208)$$

A relação elasto-plástica entre tensão e deformação é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}^{ep} \varepsilon_{kl} \quad (209)$$

Em que C^{ep} é o tensor dos módulos elasto-plásticos tangentes é dado por(ver mais detalhes em Fernandes,2003):

$$C_n^{ep} = \frac{\partial \sigma_n^{(i+1)}}{\partial \varepsilon_n^i} \quad (210)$$

Pode-se obter a relação para \dot{f} que é a variação de f no tempo como mostrado em (182), deriva-se \dot{f} (200) em relação a $\bar{\sigma}$ e p semelhante (183) e (184):

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (211)$$

$$\dot{f} = f_{\sigma} \dot{\bar{\sigma}} + f_p \dot{p} \quad (212)$$

Considerando(202),(205) e (209) em (212) chega-se a:

$$\dot{f} = f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} (f_{\sigma} \cdot C r + f_p h) \quad (213)$$

Considerando a lei de consistência, $\dot{\lambda} > 0$ só é possível se $\dot{f} = 0$. Logo, igualando a equação (213) a zero, obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon}}{f_{\sigma} \cdot Cr + f_p h} \quad (214)$$

Substituindo as equações (214) e (205) em (208) obtém-se C^{ep} :

$$C^{ep} = \begin{cases} C & se \ \dot{\lambda} = 0 \\ C - \frac{(Cr \otimes Cf_{\sigma})}{f_{\sigma} Cr + f_p h} & se \ \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (215)$$

Considere certo instante t , em que ocorreu a mudança incremental na função de escoamento, dada por (211), em virtude do incremento de tensão. Considerando que $d\sigma$ é tangente à superfície, conclui-se que f_{σ} deve ser normal à superfície para que se tenha $f_t = 0$.

Para um r arbitrário a matriz das constantes elastoplásticas C^{ep} é, em geral, não simétrica, de forma que somente é recuperada quando se faz $r = f_{\sigma}$ equação (206), ou seja, o potencial plástico Q coincide com a função de escoamento f . Nesse caso, a lei de fluxo é dita associativa. Essa situação implica na chamada regra da normalidade, pois o tensor taxa de deformação plástica passa a ter a direção da normal à superfície de plastificação, ou seja,

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} f_{\sigma} \quad (216)$$

Admitindo na equação (214) que $f_{\sigma} \cdot Cr + f_p h > 0$, ter-se-á $\dot{\lambda} \geq 0$ somente se $f_{\sigma} \cdot C \dot{\varepsilon} \geq 0$. Tendo-se em vista que f_{σ} é normal à superfície, conclui-se que o ângulo entre f_{σ} e $C \dot{\varepsilon}$ deve ser menor ou igual a 90° . Considerando que $r = f_{\sigma}$, a hipótese $f_{\sigma} Cr + f_p h > 0$, só é verificada quando se tem:

$$h = K f_p \quad (217)$$

Tendo em vista que C é definido positivo.

Assim, considerando a lei associativa e a relação (217), as equações (202), (205), (214) e (215) resultam em:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} f_{\sigma} \quad (218)$$

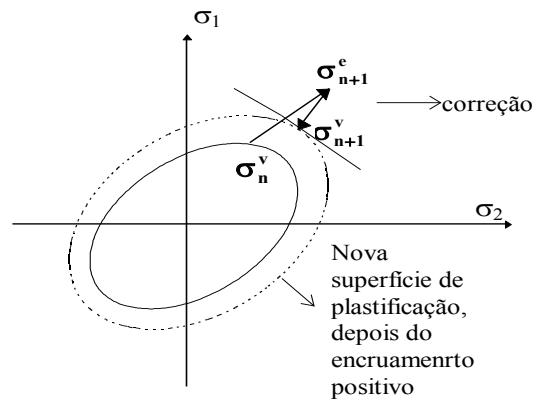
$$\dot{p} = -\dot{\lambda} K f_p = -\dot{\lambda} K \quad (219)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{f_\sigma C \dot{\epsilon}}{f_\sigma C f_\sigma + K} \quad (220)$$

$$C^{ep} = \begin{cases} C & \text{se } \dot{\lambda} = 0 \\ C - \frac{(C f_\sigma \otimes C f_\sigma)}{f_\sigma C f_\sigma + K} & \text{se } \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (221)$$

Assim, considerando um algoritmo implícito no cálculo das tensões, o critério de plastificação de Von-Mises, a lei da normalidade e o encruamento isótropo positivo, pode-se dar a interpretação geométrica ao problema no sistema principal, que é mostrada na figura (57). No caso de um algoritmo implícito, a correção do estado de tensões é feita segundo a normal à superfície na posição atual (**n+1**) e num algoritmo explícito, a mesma é feita segundo a normal à superfície do incremento anterior (**n**).

Figura 57- Representação Geométrica do Critério de Von Mises no caso biaxial.



Fonte: Fernandes, 2003

Em que:

σ_n^v é o estado de tensão verdadeiro do ponto, no incremento **n**,

σ_{n+1}^e é o estado de tensão, suposto elástico, no incremento **n + 1**,

σ_{n+1}^v é o estado de tensão verdadeiro do ponto, no incremento $n+1$.

Escrevendo as relações (218), (220) e (221) através da notação indicial e considerando:

$$f_\sigma = \frac{\mathcal{J}(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = a_{ij} \quad (222)$$

$$d_{ij} = a_{ij} C_{ijkl} \quad (223)$$

Obtêm-se:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} a_{ij} \quad (224)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{a_{ij} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}}{a_{ij} d_{ij} + K} = \frac{a_{ij} \dot{\sigma}_{ij}}{a_{ij} d_{ij} + K} \quad (225)$$

Sendo $\dot{\sigma}_{ij}$ o incremento de tensão acima do limite elástico.

$$C^{ep} = \begin{cases} C_{ijkl} & se \quad \dot{\lambda} = 0 \\ C_{ijkl} - \frac{(d_{ij} a_{mn} C_{mnkl})}{a_{mn} d_{mn} + K} & se \quad \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (226)$$

Assim, o incremento verdadeiro de tensão é dado por:

$$d\sigma_{ij}^v = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij}^p \quad (227)$$

Em que:

$$d\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} d\varepsilon_{kl} \quad (228)$$

$$d\sigma_{ij}^p = \frac{d_{ij} a_{mn}}{a_{mn} d_{mn} + K} d\sigma_{mn}^e = d_{ij} d\lambda \quad (229)$$

A lei de evolução do encruamento é dada em função do trabalho plástico W_p realizado durante as deformações, segundo a hipótese de *work hardening*:

$$\Delta W_p = \Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p \bar{\sigma}_{n+1}^v = \Delta \varepsilon_{ij(n+1)}^p \sigma_{ij(n+1)}^v \quad (230)$$

Escrevendo a equação (224), em termos de incrementos e substituindo-a em (230), obtém-se o incremento de deformação plástica efetiva:

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \frac{\Delta \lambda a_{ij} \sigma_{ij(n+1)}^v}{\bar{\sigma}_{n+1}^v} \quad (231)$$

O Teorema de Euler para funções homogêneas diz que se f é uma função homogênea, tem-se que $f_s s = n f$, e n é o grau de homogeneidade da função. Assim, no caso do critério de Von Mises, tem-se que f é uma função de grau unitário, e, portanto, pode-se dizer que $\sigma_{ij} a_{ij} = f(\sigma_{ij})$. Logo, conclui-se que:

$$\Delta \bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \Delta \lambda \quad (232)$$

E portanto, para os casos em que o parâmetro de endurecimento K é constante, a equação (219) resulta em:

$$\Delta p = -K \Delta \bar{\varepsilon}^p \quad (233)$$

3.2.2 Processo incremental-iterativo para o caso multiaxial

Assim, para se obter a tensão verdadeira $\sigma_{ij(n+1)}^v$ em uma determinada iteração it de um incremento $(n+1)$, procede-se da seguinte maneira:

- 1) Sendo, n o incremento e it a iteração, inicialmente, supõe-se que o incremento de força $(n+1)$ é elástico e portanto, têm-se:

$$\varepsilon_{ij(n+1)}^{it} = \varepsilon_{ij(n)} + \Delta \varepsilon_{ij(n+1)}^{e(it)} \quad (234)$$

$$\sigma_{ij(n+1)}^{e(it)} = E \left(\varepsilon_{ij(n+1)}^{(it)} - \varepsilon_{ij(n)}^p \right) = \sigma_{ij(n)}^v + \Delta \sigma_{ij(n+1)}^{e(it)} \quad (235)$$

$$\bar{\varepsilon}_{n+1}^p = \bar{\varepsilon}_n^p \quad (236)$$

1.1) Com $\sigma_{ij(n+1)}^{v(it)}$ calcula-se $\bar{\sigma}_{(n+1)}^{v(it)}$ acordo com o critério especificado.

2) Verifica-se o critério de plastificação:

$$f_{n+1}^{(it)} = \bar{\sigma}_{n+1}^{e(it)} - (\sigma_y + K \bar{\varepsilon}_{n+1}^p) \leq 0 \quad (237)$$

3) Condição a ser satisfeita:

$$\Delta \lambda f_{n+1}^{(it)} = 0 \quad (238)$$

3.1) Se $f_{n+1} \leq 0$, tem-se $\Delta \lambda = 0$ e, portanto: $\sigma_{ij(n+1)}^v = \sigma_{ij(n+1)}^{e(it)}$

3.2) Se $f_{n+1} > 0$, tem-se $\Delta \lambda > 0$ e, portanto, deve-se procurar um novo estado de tensão tal que $f_{n+1}^{(it)} = 0$, como está mostrado na figura (56).

3.3) Calcula-se então $\Delta \lambda$, através da equação (225), o incremento de deformação plástica $\Delta \varepsilon_{n+1}^p$, com a equação (231). Atualiza-se o valor de ε_{n+1}^p :

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \varepsilon_{n+1}^{p(it)} \quad (239)$$

4) A tensão verdadeira σ_{n+1}^v é dada por:

$$\sigma_{ij(n+1)}^v = \sigma_{ij(n+1)}^v + \Delta \sigma_{ij(n+1)}^{v(it)} = \sigma_{ij(n)}^v + \Delta \sigma_{ij}^{e(it)} - \Delta \lambda d_{ij} \quad (240)$$

em que $\sigma_{ij(n)}^v$ são as tensões correspondentes ao limite elástico σ_y^{n+1} .

Note que se o equilíbrio da estrutura não for verificado para uma determinada iteração, os valores de tensões verdadeiras ou das variáveis internas do modelo relacionadas a essa iteração são descartados. Ou seja, a cada iteração os valores das tensões de tentativa, assim como os valores atualizados das variáveis internas são obtidos tendo como referência seus respectivos valores no incremento anterior convergido.

3.4 Critério de Von Mises

O objetivo de um critério de resistência é a interpretação do efeito de solicitações combinadas sobre o comportamento do material. Baseando-se em hipóteses relacionadas à

ruptura, o critério vem escrito na forma de expressão matemática que pode ser colocado em termos de tensões principais.

No critério de Von Mises, o escoamento ocorre quando a tensão octaédrica de cisalhamento atinge um valor limite k . Sendo assim, o critério é dado em função dos invariantes de tensão, ou seja:

$$\sqrt{J_2} = k \quad (241)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (242)$$

sendo S_{ij} a parte antiesférica do vetor de tensões, que é dada por:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m \quad (243)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (244)$$

Expressando (242) em função das tensões principais, obtém-se:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (245)$$

Considerando um caso bidimensional ($\sigma_3 = 0$), o critério, que é dado pela equação (241), pode ser escrito na forma:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 \leq 3k^2 \quad (246)$$

que é a equação de uma elipse, como está representado na figura (57).

Do ensaio uniaxial, obtêm-se uma relação entre K e $\sigma_y(p)$, dado pela equação (201), e o critério passa a ser:

$$f(\bar{\sigma}, p) = \sqrt{3J_2} - \sigma_y(p) = 0 \quad (247)$$

Logo, a tensão efetiva é dada por:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (248)$$

Escrevendo agora a equação (242) de J_2 , para o sistema $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$, obtém-se;

$$J_2 = \sigma_{12}^2 + \frac{1}{2}[(\sigma_{11} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{22} - \sigma_m)^2 + \sigma_m^2] \quad (249)$$

Desse modo, os valores de \mathbf{a}_{ij} , dados pela equação (222), resultam em:

$$a_{ij} = \frac{\partial}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} \quad (250)$$

Para o caso plano pode-se expressar o critério em termos das tensões ao invés do invariante J_2 como feito em (248), assim, tem-se que:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3x_i} \quad (251)$$

Sendo:

$$x_i = \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{2} + 2a_3 \quad (252)$$

$$a_1 = [\sigma_x + \sigma_y]^2 \quad (253)$$

$$a_2 = [\sigma_x - \sigma_y]^2 \quad (254)$$

$$a_3 = \tau_{xy}^2 \quad (255)$$

4 ANÁLISE NÃO LINEAR DE CHAPAS

4.1 Introdução

Inicialmente, mostram-se as equações integrais e algébricas do MEC para análise não linear. Então, é deduzida a equação de resíduos em termos de esforços normais verdadeiros (N_n) e deformações planas (ε), a partir da qual se define a matriz tangente do problema. Posteriormente, mostra-se o processo incremental-iterativo na qual há a atualização das variáveis tendo como referência o incremento anterior convergido.

A formulação não linear do MEC a ser usada na análise na macroescala foi desenvolvida por Fernandes (2013), tendo sido obtida através da inclusão de um campo de forças normais iniciais, na formulação linear do MEC para análise de deslocamentos em placas. Para aproximar esses esforços normais iniciais no domínio, este deve ser discretizado em células, que no caso será em elementos triangulares. Pode-se encontrar mais sobre análises de placas em Ribeiro (1992) e Chueri(1994).

A solução não linear da chapa é dada por um processo incremental-iterativo, e o equilíbrio é alcançado quando o resíduo de esforços se anula, de acordo com a tolerância adotada, (FERNANDES, 1998).

A solução é obtida a partir da formulação implícita, na qual as correções que devem ser dadas aos estados de curvatura ou deformações planas em uma determinada iteração, são obtidas através do operador tangente consistente, que é atualizado a cada iteração, e do resíduo de esforços. Em Bonnet (1995) considerou o operador tangente consistente em função das deformações iniciais, já Fernandes(2003), o operador tangente foi implementado em formulação que é em função dos momentos e forças normais, que no caso será o adotado neste trabalho.

Após a verificação do modelo constitutivo considerado, a distribuição das tensões em uma seção qualquer da placa é aproximada por pontos discretos, que seguindo um esquema gaussiano, permite a integração numérica para o cálculo dos esforços.

4.2 Problema Não linear para Chapas

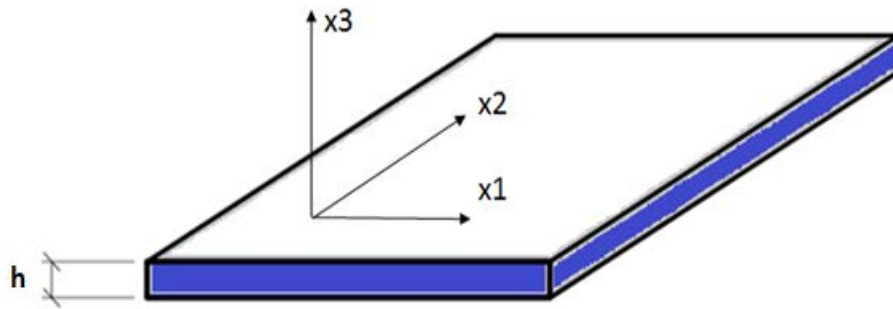
Considerando uma placa qualquer de espessura h , domínio Ω como mostrado na figura 58 e com carregamento somente nos eixo x_1 e x_2 , tem-se que o equilíbrio de um ponto na placa

é dada pela equação (24) e a escrevendo em termos de taxas como mostrado em (3.4), a equação de equilíbrio da chapa se configura:

$$\dot{N}_{ij,j} + \dot{b}_i = 0 \quad i,j=1,2 \quad (256)$$

Em que \dot{b}_i representa as forças distribuídas no plano da chapa e $\dot{N}_{ij,j}$ a derivada da força normal na chapa

Figura 58– Elemento representativo



Fonte: Do próprio autor

No contexto não linear os valores da tensão serão sempre calculados por um modelo constitutivo como descrito no capítulo 3, para modelos elasto-plásticos. No entanto, a formulação do MEC aqui desenvolvida pode ser usada com qualquer tipo de modelo constitutivo. Assim a deformação total será dividida em suas partes elásticas e plásticas, como apresentado na equação (3.1),sendo que a escrevendo em taxas resulta em:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (257)$$

A partir do incremento de tensão inicialmente considerado elástico ($\Delta\sigma^e$)(ver figura 55) tem-se a deformação total que a partir do critério adotado se encontra a tensão verdadeira (σ^v), sendo que esta se relaciona com a deformação elástica via lei de Hooke. Assim as tensões elásticas resultantes das deformações totais são dadas por:

$$\dot{\sigma}^e = \dot{\sigma} + \dot{\sigma}^p \quad (258)$$

As forças normais elásticas N_{ij}^e (ou forças normais de tentativa) são dadas por:

$$\dot{N}_{ij}^e = \dot{N}_{ij}^p + \dot{N}_{ij} \quad i,j=1,2 \quad (259)$$

Em que: N_{ij}^e são forças normais elásticas; N_{ij} as forças normais verdadeiras (2.23) obtidas integrando as tensões verdadeiras ao longo da espessura; N_{ij}^p as forças normais plásticas.

Utilizando o mesmo raciocínio para se obter a equação (2.25), chega-se a equação diferencial do estado plano para análises não lineares:

$$\dot{u}_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu')} \dot{u}_{j,ij} + \frac{(b_i - \dot{N}_{ij,j}^e)}{\bar{G}} \quad (260)$$

$$\text{Em que } \nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$$

Completando as relações impõem-se algumas condições ao longo do contorno, então, divide-se em duas partes Γ_1 e Γ_2 sendo que $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Admitindo que em Γ_1 se prescreva o deslocamento u_i e Γ_2 a tensão p_i , assim tem-se:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_1 \text{ (condição de contorno essencial),}$$

$$p_i = \bar{p}_i \text{ em } \Gamma_2 \text{ (condição de contorno natural).}$$

4.3 Equação integral do deslocamento

A equação integral do deslocamento no plano da placa u_i é obtida a partir do teorema de Betti (2.4j8). Integrando ao longo da espessura da chapa(h) tem-se:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{N}_{jk}^e d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\varepsilon}_{jk} N_{ijk}^* d\Omega \quad i,j,k=1,2 \quad (261)$$

em que os termos com * representam o problema fundamental.

Considerando a relação (259), pode-se reescrever a equação (261):

$$\int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^* \dot{N}_{jk} d\Omega = \int_{\Omega_m} \dot{\varepsilon}_{jk} \dot{N}_{ijk}^* d\Omega - \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^* \dot{N}_{jk}^p d\Omega \quad (262)$$

Assim, como feito na parte linear no item 2.3.2 integra-se a equação (262) por partes duas vezes, obtendo-se a representação dos deslocamentos para pontos de colocação internos e sobre o contorno, na qual o resultado é uma equação integral exata da variável (u_i).

$$K_{ii} \dot{u}_i = - \int_{\Gamma} [\dot{u}_n p_{in}^* + \dot{u}_s p_{is}^*] d\Gamma + \int_{\Gamma} [\dot{p}_n u_{in}^* + \dot{p}_s u_{is}^*] d\Gamma + \int_{\Omega} [u_{in}^* \dot{b}_n + u_{is}^* \dot{b}_s] d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \dot{N}_{jk}^p d\Omega \quad (263)$$

Em que: Ω é a área carregada da placa; o termo livre $K(q)$ pode assumir vários valores dependendo da posição do ponto de colocação como segue: $K(q) = 1$, $K(q) = 1/2$ para pontos internos e pontos no contorno não coincidentes com um canto.

A equação (263) é uma representação exata do deslocamento na chapa. Este trabalho lida com análises elasto-plásticas, requerendo então o uso de um processo incremental iterativo. Então, todos os valores escritos na forma de taxas devem ser transformados em incrementos. Considerara-se o passo de tempo $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ como um passo típico de tempo. A solução do problema consiste em procurar a solução no passo de tempo t_{n+1} quando se conhece a solução no passo t_n . Seja o incremento de uma variável (Δa), dado por:

$$\Delta a = a_{n+1} - a_n = \Delta t \dot{a}_{n+1} \quad (264)$$

$$\text{Sendo } \Delta a_{n+1} = \frac{\Delta a_{n+1}}{\Delta t}$$

Assim não há a necessidade de reescrever as integrais já deduzidas, de forma que para escrever as equações na forma incremental, é preciso substituir os valores das taxas pelos incrementos correspondentes. Para construir o sistema de equações no caso de chapas serão consideradas somente as integrais dos deslocamentos no plano. Após resolver este sistema, os valores no contorno da rotação, tensão e forças, podem ser obtidos escrevendo a respectiva equação algébrica em um ponto interno. A equação que representa a rotação da chapa é dada derivando (263):

$$\begin{aligned}
\Delta u_{i,\ell} = & - \int_{\Gamma_m} (\Delta u_n p_{in,\ell}^* + \Delta u_s p_{is,\ell}^*) d\Gamma + \int_{\Gamma} (u_{in,\ell}^* \Delta p_n + u_{is,\ell}^* \Delta p_s) d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega_b} (u_{in,\ell}^* \Delta b_n + u_{is,\ell}^* \Delta b_s) d\Omega + \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \Delta N_{jk}^p d\Omega + \int_{\Gamma} (u_{in,\ell}^* \Delta p_n + u_{is,\ell}^* \Delta p_s) d\Gamma
\end{aligned} \quad (265)$$

A integral de domínio envolvendo a força normal plástica (ΔN_{jk}^p) apresenta singularidades quando o ponto de colocação pertence à célula a ser integrada. Então para se obter o incremento do deslocamento, tem-se que eliminar essa singularidade.

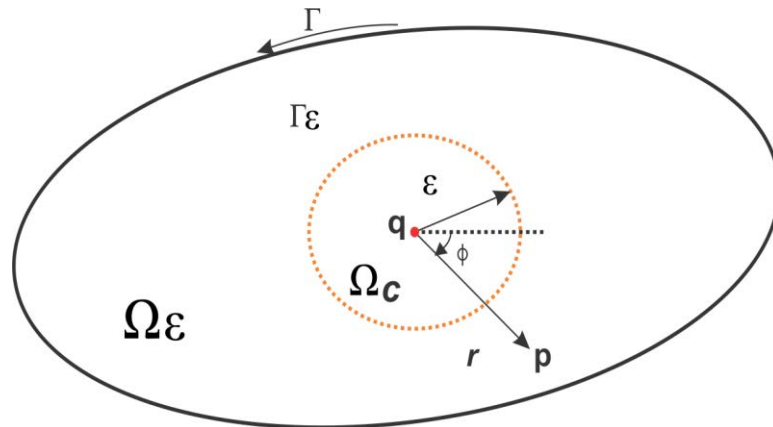
4.3.1 Cálculo da integral de domínio envolvendo a força normal plástica

Seja a última integral da equação (265) denominada I , na qual se tem que retirar a singularidade.

$$I = \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \Delta N_{jk}^p d\Omega \quad (266)$$

Como se pode observar na equação da deformação fundamental (2.19), a integral de domínio da equação (266) apresenta singularidade do tipo $(\frac{1}{r})$. Para retirá-la adotam-se os domínios da figura 59 com centro no ponto q , sendo que Ω_c é o domínio que contém a singularidade.

Figura 59– Domínio Ω_ε e Ω_c



Fonte: Do próprio autor

Sendo que:

$$\Omega_c = r dr d\phi \quad (267)$$

$$d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\phi \quad (268)$$

Para eliminar a singularidade, retira-se do domínio Ω um domínio circular Ω_c , de pequeno raio ε e com origem no ponto q , obtendo o domínio Ω_ε , que é dado por: $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_c$. Portanto, a integral sobre o domínio não singular Ω_ε é dada por:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega_\varepsilon = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega - \int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega_c \quad (269)$$

Assume-se que a função $\Delta N_{jk}^p(p)$ e suas primeiras e segundas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto q . Assim, expandindo a mesma, em torno do ponto q , através da série de Taylor, tem-se que:

$$\Delta N_{jk}^p(p) = \Delta N_{jk}^p(q) + [x_m(p) - x_m(q)] \Delta N_{jk,m}^p(q) + \dots \quad k, l, m = 1, 2 \quad (270)$$

$$\text{Em que } x_m(p) - x_m(q) = \pi_{m,1}.$$

Substituindo na integral sobre o domínio Ω_c da equação (269) a equação (270) fica:

$$\int_{\Omega_c} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega_c = \int_{\Omega_c} [\Delta N_{jk}^p(q) + [x_m(p) - x_m(q)] \Delta N_{jk,m}^p(q)] \varepsilon_{ijk}^*(q, p) d\Omega_c \quad (271)$$

Levando em conta a equação (2.25) e que $r = \varepsilon$; $\varepsilon \rightarrow 0$, conclui-se que a expressão (270) tende à zero, podendo então desprezá-la. Portanto, pode-se dizer que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega_\varepsilon(p) = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega(p) \quad (272)$$

Voltando na equação (266) e considerando a (272) chega-se a:

$$I = \frac{\partial}{\partial x_1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega_\varepsilon(p) \quad (273)$$

Para resolver a expressão (273) aplica-se a lei de Leibnitz para diferenciação de integrais:

$$I = \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{ijk}^*}{\partial x_1} (q, p) \Delta N_{jk}^p(p) d\Omega(p) - \Delta N_{jk}^p(q) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) r_{,l} d\Gamma_\varepsilon \quad (274)$$

Em que:

$$\varepsilon_{ijk}^* = \frac{1}{r^2} f(\theta) \quad (275)$$

Sendo

$$f(\theta) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \left\{ (1-2\nu') [\delta_{jl}\delta_{ik} + \delta_{kl}\delta_{ij} - 2\delta_{ik}r_{,j}r_{,l} - 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] \right. \\ \left. + \delta_{kj} (2r_{,i}r_{,l} - \delta_{il}) + 2\delta_{il}r_{,k}r_{,j} + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} + 2\delta_{jl}r_{,k}r_{,i} - 8r_{,k}r_{,j}r_{,i}r_{,l} \right\} \quad (276)$$

Com $\nu' = \nu / (1 + \nu)$ no caso de estado plano de tensão.

Seja o segundo termo da expressão (274), considerando as equações (2.25) e (268) e fazendo $r = \varepsilon$, o mesmo pode ser escrito como:

$$-\Delta N_{jk}^p(q) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) r_{,l} d\Gamma_\varepsilon = \frac{\Delta N_{kj}^p(q)}{8\pi G(1-\nu')} \int_0^{2\pi} [(1-2\nu')(r_{,i}\delta_{kj} + r_{,j}\delta_{ki}) - r_{,k}\delta_{ji} + 2r_{,k}r_{,i}r_{,j}] r_{,l} d\phi \quad (277)$$

Admitindo que $r_{,1}^2 = \cos^2 \varphi = (1 + \cos 2\varphi) / 2$, $r_{,2}^2 = \sin^2 \varphi = (1 - \cos 2\varphi) / 2$ e $r_{,1} r_{,2} = \cos \varphi \sin \varphi = (\sin 2\varphi) / 2$, faz-se a integração em relação à ϕ , obtendo-se:

$$-\Delta N_{jk}^p(q) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{ijk}^*(q, p) r_{,l} d\Gamma_\varepsilon = \frac{1}{16G(1-\nu')} \left[(6-8\nu') \Delta N_{il}^p(q) + \Delta N_{mm}^p(q) \delta_{kl} \right]_{j,k,l,m=1,2} \quad (278)$$

Logo, considerando-se a equação (278) e (274) a integral de domínio da equação da derivada direcional de u_k , definida em (266) pode ser escrita como:

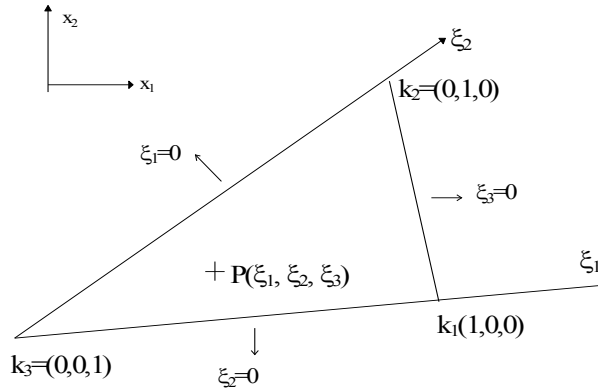
$$I = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \Delta N_{jk}^p d\Omega = \frac{1}{16\mu(1-\nu')} \left[(6-8\nu') \Delta N_{il}^p + \Delta N_{mm}^p(q) \delta_{kl} \right]_{i,j,k,l,m=1,2} \quad (279)$$

4.3.2 Discretização do domínio e integração das células triangulares

Para calcular as integrais de domínio das equações (263) e (265) que envolvem os esforços plásticos, deve-se discretizar o domínio em células, nas quais os momentos e forças

normais iniciais de um ponto p da placa serão aproximados nos nós por funções interpoladoras. Para este trabalho foi adotado células triangulares representada na figura 60 (ver mais detalhes em Fernandes, 2003).

Figura 60- Célula Triangular com Sistema de Coordenadas Homogêneas



Fonte: Do próprio autor

A célula representada na figura 60 é adotada quando os três vértices K_1, K_2, K_3 , são pontos internos no domínio, assim as forças normais plásticas de um ponto p qualquer da célula, de maneira aproximada, é dado por:

$$\underset{\sim}{N}^P_{ij}(p) = \underset{\sim}{\Psi}^T(p) \underset{\sim}{N}^{P(N)} \quad (280)$$

Em que Ψ é a função interpoladora e $\underset{\sim}{N}^P_{ij}$ o vetor das forças normais nodais, dadas por:

$$\underset{\sim}{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \quad (281)$$

$$\underset{\sim}{N}^{P(N)T} = \left\{ \underset{\sim}{N}^{P(k1)} \underset{\sim}{N}^{P(k2)} \underset{\sim}{N}^{P(k3)} \right\} \quad (282)$$

Considerando a matriz (281), tem-se que para um ponto p qualquer da célula suas coordenadas homogêneas (ξ_a^p) são:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_0^1 & b^1 & a^1 \\ 2A_0^2 & b^2 & a^2 \\ 2A_0^3 & b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^p \\ X_2^p \end{Bmatrix} \quad (283)$$

Em que:

$$a^\alpha = X_1^k - X_1^j \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad j = 2, 3, 1; \quad k = 3, 1, 2 \quad (284)$$

$$b^\alpha = X_2^k - X_2^j \quad (285)$$

$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (286)$$

A é a área da célula triangular, que é dado por:

$$A = 0.5(b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (287)$$

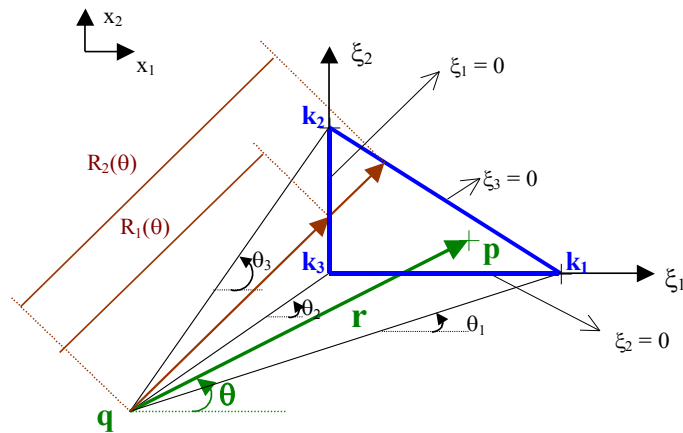
Para a integração sobre as células do domínio será adotado um esquema semianalítico de integração, utilizado por Telles e Brebbia (1979) e Venturini (1982) no qual apresenta resultado mais preciso do que a integração através da quadratura de Gauss. Para a implementação desse esquema, adota-se um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ) , centrado no ponto de carregamento q , conforme a figura 8, que torna possível calcular analiticamente a integral sobre a coordenada r . As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (X_1^p, X_2^p) e polares (r, θ) do ponto p , esta descrito na equação (2.111), que substituindo em (283), obtém-se:

$$\xi_\alpha^p = \xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (288)$$

Sendo ξ_α^q as coordenadas homogêneas relativas ao ponto q e que são dadas por:

$$\xi_\alpha^q = \frac{1}{2A} (2A_0^\alpha + b^\alpha X_1^q + a^\alpha X_2^q) \quad (289)$$

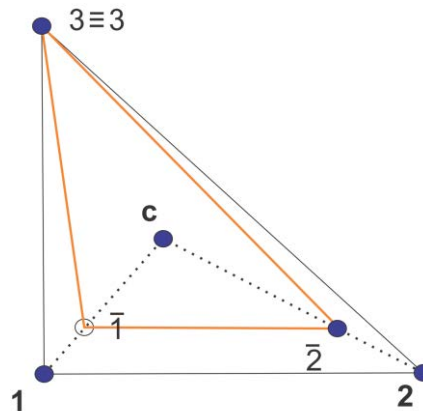
Figura 61- Sistema de coordenadas cilíndricas



Fonte: Fernandes, 2003

Caso a célula compartilhe pontos que estão sobre o contorno os nós correspondentes são definidos como pontos internos como demonstrado na figura 62.

Figura 62- Célula cujos nós não são coincidentes com seus vértices



Fonte: Fernandes, 2003

Em que os pontos **1**, **2**, **3** são vértices da célula e se faz a integração das funções sendo que **1** e **2** estão sobre uma interface e **3** é um ponto interno; os pontos $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$ são os nós das células, que nesse caso são coincidentes com os pontos de colocação para cálculo das forças plásticas.

Se o lado da célula não for um ponto interno, ou seja, o ponto esteja sobre o contorno, deve-se atualizar suas coordenadas para o cálculo de momentos calculando o centroide *c* da célula triangular (ver figura 63) e, então, determina-se uma reta ligando este ponto aos lados no

contorno (ver figura 63). O ponto de cálculo de momento P_M é definido sobre essa reta de acordo com a sua coordenada adimensional ξ , adota-se $\xi=0,4$ (o centroide tem $\xi=1$).

Na figura 62, as forças normais iniciais no ponto p $\{N_{ij}^p(p)\}$ são dadas por:

$$N_{ij}^p(p) = \bar{\Psi}_{ij}^T(p) N_{ij}^{p(\bar{N})} \quad (290)$$

Em que $\{N_{ij}^{p(\bar{N})}\}$ são as forças normais plásticas dos nós $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$ e $\bar{\Psi}^T$ a função interpoladora referente ao triângulo de vértices $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$, que é dada por:

$$\bar{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_2^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_3^p & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_2^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_3^p & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_1^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_2^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_3^p \end{bmatrix} \quad (291)$$

Sendo:

$$\bar{\xi}_\alpha^p = \bar{\xi}_\alpha^q + \frac{r}{2A} (\bar{b}^\alpha \cos \theta + \bar{a}^\alpha \sin \theta) \quad \alpha = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \quad (292)$$

em que \bar{A} é a área do triângulo menor, definido pelos nós $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$ (figura 63).

Através da equação (290), aproxima-se as forças normais plásticas e as coordenadas homogêneas são calculadas adotando as características do triângulo formado pelos nós da célula. Desta forma, pode-se concluir que a figura (60) seria um caso particular daquele apresentado na figura (60) em que os nós da célula coincidem com os vértices da mesma. A expressão (292) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\xi}_\alpha^p = \bar{\xi}_\alpha^q + \bar{\xi}_\alpha^r \quad (293)$$

Em que:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1^q \\ \bar{\xi}_2^q \\ \bar{\xi}_3^q \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2\bar{A}_0^1 & \bar{b}^1 & \bar{a}^1 \\ 2\bar{A}_0^2 & \bar{b}^2 & \bar{a}^2 \\ 2\bar{A}_0^3 & \bar{b}^3 & \bar{a}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^q \\ X_2^q \end{Bmatrix} \quad (294)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1' \\ \bar{\xi}_2' \\ \bar{\xi}_3' \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & \bar{b}^1 & \bar{a}^1 \\ 0 & \bar{b}^2 & \bar{a}^2 \\ 0 & \bar{b}^3 & \bar{a}^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (295)$$

Definida a função de aproximação dos esforços, pode-se realizar o cálculo das integrais de domínio, que envolvem os esforços plásticos. Discretizando o domínio em N_{ce} células e aproximando as forças normais plásticas nas mesmas, através da equação (290) pode-se escrever a integral de domínio que aparece na equação (266) do deslocamento de chapa u_k como:

$$I = \sum_{cel=1}^{N_{cel}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \mathbf{k}^*(q, p) \bar{\Psi}_{\sim}^T(p) d\Omega_{cel}(p) \right] N_{\sim}^{P(\bar{N})} \quad (296)$$

Sendo: $\mathbf{k}_{\sim}^*(q, p) = \{ \varepsilon_{k11}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22}^*(q, p) \}$ ($k=1, m$); $N_{\sim}^{P(N)}$ são as forças normais plásticas nodais da célula.

A expressão de ε_{kij}^* é dada pela equação (2.41), onde $k, i, j=1, 2$. Porém, no caso da equação do deslocamento u_k a carga fundamental é aplicada nas direções l e m . Assim, a solução fundamental é dada por:

$$\varepsilon_{kij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')} \overline{Gr} \left[(1-2\nu') (r_{,j} k_i + r_{,i} k_j) - r_{,p} k_p \delta_{ij} + 2r_{,p} k_p r_{,i} r_{,j} \right] \quad (297)$$

Sendo $k = l, m$ e $i, j, p = 1, 2$.

Pode-se chamar e^{cel} sendo a integral sobre cada célula da equação (296)

$$e_{kij}^{cel} = \int_{\Omega_{cel}} \varepsilon_{kij}^* \bar{\xi}_{\alpha}^p d\Omega_{cel} \quad (298)$$

Substituindo (297) e (293) em (298) chega-se a:

$$e_{kij}^{cel} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')} \overline{G} \int_{\Omega_{cel}} \frac{f_{kij}(\theta)}{r} \left(\bar{\xi}_{\alpha}^q + \frac{r}{2A} \left(\bar{b}^{\alpha} \cos \theta + \bar{a}^{\alpha} \sin \theta \right) \right) d\Omega_{cel} \quad (299)$$

Em que:

$$f_{kij}(\theta) = \left[(1-2\nu') (r_{,j} k_i + r_{,i} k_j) - r_{,p} k_p \delta_{ij} + 2r_{,p} k_p r_{,i} r_{,j} \right] \quad (300)$$

Considerando em (299) a transformação de coordenadas dado pela equação (2.102), tem-se:

$$e_{kij}^{cel} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\overline{G}} \int_{\theta} \int_r \frac{f_{kij}(\theta)}{r} \left(\overline{\xi}_{\alpha}^q + \frac{r}{2A} \left(\overline{b}^{\alpha} \cos \theta + \overline{a}^{\alpha} \sin \theta \right) \right) r dr d\theta \quad (301)$$

Integrando (301) em relação a r , obtém-se:

$$e_{kij}^{cel} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\overline{G}} \int_{\theta} r f_{kij} \overline{\xi}_{\alpha}^q + f_{kij}(\theta) \frac{r^2}{4A} \left(\overline{b}^{\alpha} \cos \theta + \overline{a}^{\alpha} \sin \theta \right) d\theta \quad (302)$$

Realizando outra mudança de coordenadas dado por (2.103) na qual a integral de domínio será transformada em uma integral de contorno (item 2.5) e adotando $R=r$, obtém-se:

$$e_{kij}^{cel} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\overline{G}} \int_{\Gamma} f_{kij} \overline{\xi}_{\alpha}^q + f_{kij} \frac{R}{4A} \left(\overline{b}^{\alpha} \cos \theta + \overline{a}^{\alpha} \sin \theta \right) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (303)$$

Considerando (292) em (303) com $r=R$, chega-se a:

$$e_{kij}^{cel} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\overline{G}} \int_{\Gamma} f_{kij} \left[\overline{\xi}_{\alpha}^q + \frac{1}{2} \overline{\xi}_{\alpha}^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad k = l, m \quad i, j = 1, 2 \quad (304)$$

Após a transformação da integral (296) sobre o domínio Ω_{cel} de uma determinada célula em integral ao longo do contorno da mesma e considerando-se um determinado nó α da célula, o coeficiente relativo ao componente $N_{ij}^{P(\alpha)}$ é dado por:

$$e_{kij}^{cel}(q) = -\frac{1}{8\pi\overline{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} f_{kij}(\theta) \left[\overline{\xi}_{\alpha}^q + \frac{1}{2} \overline{\xi}_{\alpha}^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad \alpha=1,2,3 \quad k=l,m \quad i,j=1,2 \quad (305)$$

Em que:

$$f_{kij}(\theta) = \left[(1-2\nu') (r_{,j} k_i + r_{,i} k_j) - r_{,p} k_p \delta_{ij} + 2r_{,p} k_p r_{,i} r_{,j} \right] \quad (306)$$

Considere a integral sobre o domínio das células da equação da derivada do deslocamento de chapa $u_{k,l}$ definida na equação (279). Após a discretização do domínio em células, a mesma é dada por:

$$I = \sum_{cel=1}^{N_{ce}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \bar{k}^*(q, p) \bar{\Psi}^T(p) d\Omega_{cel}(p) \right] N_{cel}^{P(\bar{N})} \quad (307)$$

Sendo: $\bar{k}^*(q, p) = \{ \varepsilon_{k11}^*(q, p) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(q, p) \quad \varepsilon_{k22}^*(q, p) \}$ ($k, l=1, 2$) e a expressão fundamental ε_{kijl}^* é dada pela equação (275).

Em uma célula, calculam-se 36 coeficientes, pois são 9 coeficientes para cada equação de $u_{k,l}$. Procedendo-se de forma análoga, o coeficiente da equação (307) relativo ao componente $N_{ij}^{P(\alpha)}$ de um nó α , pertencente a uma célula qualquer, pode ser escrito como:

$$\bar{e}_{kijl}^{cel}(q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} \frac{f_{kijl}(\theta)}{R} \left[\ln R \bar{\xi}_{\alpha}^q + \bar{\xi}_{\alpha}^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \right\} \quad \alpha=1, 2, 3 \quad k, l, i, j=1, 2 \quad (308)$$

Sendo $f_{kijl}(\theta)$ indicada na equação(276)

4.4 Equações algébricas do MEC para análise não linear

As equações integrais apresentadas no item 4.2 podem ser transformadas em equações algébricas pelas discretização do contorno em elementos (ver capítulo 2) e do domínio em células (ver item 4.3), nas quais as variáveis são aproximadas nos pontos nodais.

Após a integração numérica ao longo de todos os elementos do contorno as equações de deslocamentos referentes aos problemas de chapa (equação de u_k ou $u_{k,l}$) de um ponto interno ou sobre o contorno externo, podem ser escritas, em suas formas matriciais, semelhante como feito na análise linear no item 2.7. Escrevendo-se então as equações dos deslocamentos u_s e u_n em cada nó do contorno, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[H]\{\Delta U\} = [G]\{\Delta P\} + \{\Delta T\} + [E]\{\Delta N^P\} \quad (309)$$

Em que: $\{\Delta U\}$ é o vetor dos incrementos dos deslocamentos no contorno; $\{\Delta P\}$ é o vetor dos incrementos das forças no contorno; $\{\Delta T\}$ é o vetor da carga externa; $[E]$ é a matriz obtida integrando as células (ver item 4.3); $\{\Delta N^P\}$ é vetor do incremento de forças plásticas.

A equação (309) pode ser representada da seguinte forma:

$$\tilde{H}\Delta\tilde{U} = \tilde{G}\Delta\tilde{P} + \Delta\tilde{T} + \tilde{E}\Delta\tilde{N}^P \quad (310)$$

Para a resolução numérica da análise não linear, são feitas operações matriciais sobre a equação (310), visando deixar os termos referentes aos esforços iniciais ou plásticos isolados. Assim, armazenam-se todas as incógnitas do contorno externo e cantos num vetor $\{X\}$, trocando as respectivas colunas entre as matrizes $[H]$ e $[G]$. Então, somam-se em $\{B\}$ os efeitos dos deslocamentos ou esforços prescritos no contorno externo, ao efeito do carregamento que atua na chapa (ver item 2.7), obtendo-se:

$$\tilde{A}\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{B} + \tilde{E}\Delta\tilde{N}^P \quad (311)$$

Sendo:

$$\Delta\tilde{B} = \tilde{G}\Delta\tilde{P} + \Delta\tilde{T} \quad (312)$$

Multiplicando-se os dois lados dessa equação por $[A]^{-1}$, obtêm-se as incógnitas do problema:

$$\Delta\tilde{X} = \Delta\tilde{L} + \tilde{R}_N\Delta\tilde{N}^P \quad (313)$$

$$\text{Sendo:} \quad (314)$$

$$\Delta\tilde{L} = A^{-1}\Delta\tilde{B}$$

$$\tilde{R}_N = \tilde{A}^{-1}\tilde{E}_S \quad (315)$$

Assim o termo \tilde{R}_N representa a influência das forças normais plásticas nos valores dos deslocamentos do contorno e $[\tilde{L}]$ representa a resposta elástica sem considerar os esforços iniciais ou plásticos. No caso da análise não linear em que a chapa é sujeita a esforços iniciais, os deslocamentos e esforços finais são obtidos somando às incógnitas da análise linear, os valores devido aos esforços iniciais. Os resultados finais são obtidos após se fazer o processo incremental-iterativo e, no final de um incremento, o vetor dos esforços iniciais ou plásticos corresponde aos valores obtidos na iteração onde o equilíbrio foi alcançado.

Analogamente se faz para os pontos internos, utilizando-se o vetor $[\tilde{L}]$ calcula-se o deslocamento elástico devido ao carregamento, então se acrescenta ao valor desses, a parcela referente aos esforços iniciais:

$$\Delta \tilde{U}(q) = -\tilde{H} \Delta \tilde{U} + \tilde{G} \Delta \tilde{P} + \Delta \tilde{T} + \tilde{E}_N \Delta \tilde{N}^P \quad (316)$$

$$\Delta \tilde{U} = -\tilde{A} \Delta \tilde{X} + \Delta \tilde{B} + \tilde{E}_N \Delta \tilde{N}^P \quad (317)$$

Substituindo (313) em (316):

$$\Delta \tilde{U}(q) = -\tilde{A} \left(\frac{\Delta \tilde{L} + \tilde{R}_N \Delta \tilde{N}^P}{\tilde{N}} \right) + \Delta \tilde{B} + \tilde{E}_N \Delta \tilde{N}^P \quad (318)$$

$$\Delta \tilde{U}(q) = \left[-\tilde{A}(q) \frac{\Delta \tilde{L} + \Delta \tilde{B}(q)}{\tilde{N}} \right] - \Delta \tilde{N}^P \left[\tilde{A}(q) \tilde{R}_N + \tilde{E}_N(q) \right] \quad (319)$$

Assim, pode-se escrever a equação (319) da seguinte maneira:

$$\Delta \tilde{U}(q) = \frac{\Delta \tilde{L}'(q) + \tilde{R}_N'(q) \Delta \tilde{N}^P}{\tilde{N}} \quad (320)$$

Em que:

$$\tilde{R}_N'(q) = -\tilde{A} \tilde{R}_N' + \tilde{E}_N \quad (321)$$

$$\Delta \tilde{L}'(q) = -\tilde{A} \Delta \tilde{L}' + \Delta \tilde{B} \quad (322)$$

Após a obtenção das incógnitas do contorno, podem-se obter as derivadas dos deslocamentos da placa para qualquer ponto interno utilizando a equação (2.126), através da seguinte equação matricial:

$$u_{i,j}(q) + \tilde{H}'(q) \Delta \tilde{U} = \tilde{G}'(q) \Delta \tilde{P} + \Delta \tilde{T}'(q) + \tilde{E}'(q) \Delta \tilde{N}^P \quad (323)$$

Considerando-se as equações (259), (323), obtém-se a equação matricial relativa à força normal elástica de um ponto q . Escrevendo essa equação em todos os pontos nodais das células, chega-se a:

$$\Delta \tilde{N}^{e(MEC)} = -\tilde{H}^* \Delta \tilde{U} + \tilde{G}^* \Delta \tilde{P} + \Delta \tilde{T} + \tilde{E} \Delta \tilde{N}^P \quad (324)$$

Semelhante ao que foi feito no item 2.7, a equação (324) pode ser expressa por:

$$\Delta \tilde{N}^{e(MEC)} = \Delta \tilde{B} - \tilde{A} \Delta \tilde{X} + \tilde{E}_N \Delta \tilde{N}^P \quad (325)$$

$$\Delta \tilde{N}^{e(MEC)} = \Delta \tilde{K}_N + \tilde{S}_N \Delta N^P \quad (326)$$

Em que:

$$\Delta \tilde{K} = \Delta \tilde{B} - \tilde{A} \Delta \tilde{L} \quad (327)$$

$$\tilde{S}_N = \tilde{E}_N - \tilde{A} \tilde{R}_N \quad (328)$$

Considerando todos os nós da placa define o vetor $\Delta \tilde{N}^e$ (ou forças normais de tentativa) através da lei de Hooke é definido como:

$$\Delta \tilde{N}^e = \tilde{C}_N \Delta \tilde{\varepsilon} \quad (329)$$

Em que $\Delta \tilde{\varepsilon}$ é o vetor de deformações no plano em todos os pontos da placa;

$$[C_N] = \begin{bmatrix} [C_n]_1 & [0] & \dots & \dots & [0] \\ [0] & \dots & \dots & \dots & [0] \\ \dots & \dots & [C_n]_i & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C_n]_N \end{bmatrix} \quad (330)$$

Em que \tilde{C}_N é a matriz quadrada, cuja diagonal é composta pelas matrizes elásticas, sendo que os demais termos são nulos.

A fim de deduzir uma equação algébrica do MEC para o esforço normal N , escrita em função das forças nodais plásticas na placa, considere a equação (4.4). Pode-se escrever que:

$$\Delta \tilde{N}^{MEC} = \Delta \tilde{N}^e - \Delta \tilde{N}^{P(MEC)} \quad (331)$$

Levando-se em conta a expressão das forças normais de tentativa escritas em função das deformações planas (329), têm-se:

$$\Delta \tilde{N}^{(MEC)} = \tilde{C}_N \Delta \tilde{\varepsilon} - \Delta \tilde{N}^{P(MEC)} \quad (332)$$

Substituindo a equação (326) em (332), pode-se dizer que:

$$\Delta \tilde{N}^{P(MEC)} = \Delta \tilde{K}_N + \tilde{S}_N \Delta \tilde{N}^P - \Delta \tilde{N} \quad (333)$$

Substituindo (333) em (332), obtém-se a equação algébrica para o incremento de forças normais verdadeiras da placa:

$$\Delta N^{(MEC)} = C_N \Delta \varepsilon - \Delta K_N - S_N \Delta N^P + \Delta N \quad (334)$$

4.5 Equação de Resíduos

Para o problema bidimensional, a equação de resíduos é dada por:

$$R_N = \Delta K_n - \Delta N^{MEC} \quad (335)$$

Em que R_N é o resíduos das forças normais; ΔK o incremento de forças normais elástico; ΔN^{MEC} é o incremento de forças normais verdadeiro

O vetor de forças ΔK é obtido através da formulação linear do MEC para a análise do problema bidimensional, sendo que ΔN_n^{MEC} é calculado levando em consideração a formulação não linear do MEC. Quando a equação (335) for aproximadamente igual a zero se tem o equilíbrio, obtendo-se os valores reais das incógnitas.

No processo iterativo serão dadas à placa correções de deformação plana. Então, deve-se escrever (335) em termos do incremento de deformação plana $\Delta \varepsilon_n$ e das forças normais verdadeiras ΔN que está relacionado a $\Delta \varepsilon_n$ através do tensor elasto-plástico C_N^{ep} .

A equação de resíduos é obtida substituindo (334) em (335), ou seja:

$$R_N(\Delta \varepsilon) = 2\Delta K_N - C_N \Delta \varepsilon + S_N (C_N \Delta \varepsilon - \Delta N) - \Delta N = 0 \quad (336)$$

4.6 Matriz tangente Consistente

A matriz tangente do problema bidimensional é obtida linearizando-se a equação (336) de resíduos, através do Método de Newton-Raphson. Para uma determinada iteração i a correção no estado de deformações planas $\delta \Delta(\varepsilon)_n^i$ é calculada a partir da seguinte equação:

$$\{R_N\}_n^{i-1} + \frac{\partial \{R_N\}_n^{i-1}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}_n^{i-1}} \{\delta \Delta \varepsilon\}_n^i = 0 \quad (337)$$

Ou ainda:

$$\{\delta\Delta\epsilon\}_n^i = \left[-\frac{\partial\{R_N\}_n^{i-1}}{\partial\{\Delta\epsilon\}_n^{i-1}} \right]^{-1} \{R_N\}_n^{i-1} \quad (338)$$

Ou seja, a matriz tangente consistente é dada por:

$$[K^{TC}]^i = -\frac{\partial\{R_N\}_n^{i-1}}{\partial\{\Delta\epsilon\}_n^{i-1}} \quad (339)$$

Derivando-se a equação (336) de resíduos em relação ao incremento de deformação plana, chega-se a:

$$[K^{TC}]_n^i = [S'_N] \left([C_N^{ep}]_n^{i-1} - [C_N] \right) + [C_N] + [C_N^{ep}]_n^{i-1} \quad (340)$$

Sendo $[C_N^{ep}]_n^{i-1}$ é uma matriz quadrada, cuja diagonal é composta pelas matrizes elásto-plásticas, e os outros termos são nulos, isto é:

$$[C_N^{ep}] = \begin{bmatrix} [C_n^{ep}]_1 & [0] & \dots & \dots & [0] \\ [0] & \dots & \dots & \dots & [0] \\ \dots & \dots & [C_n^{ep}]_k & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C_n^{ep}]_N \end{bmatrix} \quad (341)$$

Sendo N o número de nós de célula e para um ponto qualquer k da placa, $[C_n^{ep}]_k$ é dado por:

$$[C_n^{ep}]_{k(n)}^{i-1} = \frac{\partial N_n^{(i-1)}}{\partial \Delta(\epsilon^{2D})_n^{i-1}} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial(\sigma)_n^{i-1}}{\partial \Delta(\epsilon)_n^{i-1}} dx_3 = \int_{-h/2}^{h/2} [C_n^{ep}]_{k(n)}^{i-1} dx_3 = hC_n^{ep} \quad (342)$$

em que $[C_n^{ep}]_{k(n)}^{i-1}$, que é obtido a partir do modelo constitutivo adotado, é a matriz tangente que relaciona a tensão real com o incremento de deformação.

4.7 Processo incremental iterativo

O algoritmo é o seguinte: para uma iteração i de um incremento n , segue-se os seguintes passos:

- 1) Calculam-se os incrementos de forças normais elásticas ΔK_n , referentes a todos os pontos nodais das células.
- 2) Quando $i = 0$ é feito o cálculo dos incrementos de deformações totais $\{\Delta \varepsilon\}_n^{i+1}$ através da lei de Hooke(329).). Caso a equação de resíduo (336) não for satisfeita, houve a plastificação de algum ponto, devendo fazer o processo iterativo ($i \geq 1$) descrito abaixo para alcançar o equilíbrio da chapa.
- 3) Se $i \geq 1$: atualiza-se a matriz tangente global $[K_{(n)}^{TC(i)}]$ (340) e se calculam as correções que devem ser dadas ao incremento de deformações planas $\{\delta \Delta \varepsilon\}_n^i$ (338), obtendo-se o novo estado de deformações na chapa:

$$\{\Delta \varepsilon\}_n^{i+1} = \{\Delta \varepsilon\}_n^i + \{\delta \Delta \varepsilon\}_n^i \quad (343)$$

- 4) Para cada ponto nodal das células, procede-se da seguinte maneira:

4.1) Verifica-se o modelo constitutivo para o ponto de Gauss ig definido ao longo da espessura da chapa, seguindo os seguintes passos:

4.1.1) Obtém-se o incremento de tensões elásticas, ou de tentativa, $\{\Delta \sigma^e\}_n^{i+1}$ através da equação:

$$\{\Delta \sigma^e\}_n^{i+1} = [C] \{\Delta(\varepsilon)\}_n^{i+1} \quad (344)$$

sendo $[C]$ o tensor elástico dado pela lei de Hooke

4.1.2) Soma-se esse último ao estado de tensão verdadeiro do incremento anterior convergido, obtendo-se as tensões totais:

$$\{\sigma^e\}_n^{i+1} = \{\sigma\}_{n-1} + \{\Delta \sigma^e\}_n^{i+1} \quad (345)$$

4.1.3) Com as tensões totais, verifica-se o modelo constitutivo (ver capítulo 3), obtendo-se o vetor de tensão verdadeiro $\{\sigma\}_n^{i+1}$ e o incremento de tensão verdadeiro $\{\Delta \sigma\}_n^{i+1} = \{\sigma\}_n^{i+1} - \{\sigma\}_{n-1}$ para o ponto em questão. Se a iteração não for elástica, deve-se atualizar também a relação constitutiva elasto-plástica $[C^{ep}]$ (342).

4.2) Calcula-se o vetor dos incrementos de forças normais verdadeiras do (346) e o vetor dos incrementos de forças normais plásticas (347) do ponto k, além da matriz quadrada $[C_n^{ep}]_k$ composta das matrizes elasto-plásticas (341) :

$$\{\Delta N^{(i+1)}\}^k = h \Delta \sigma_n^{i+1} \quad (346)$$

$$\Delta N = [C_N] \{\varepsilon\} - \Delta N^{(p)} \quad (347)$$

5) Segue-se o mesmo procedimento para todos os pontos nodais das células. Através da equação (336) calculam-se os resíduos de forças normais R_N^i . Se os resíduos não forem nulos, de acordo com a tolerância adotada, passa-se à iteração $i+1$, voltando ao passo 3. Caso o critério de convergência seja verificado, passa-se ao incremento $(n+1)$ seguinte ao passo 1 com $i=0$.

Ao final de um incremento de carga, os incrementos dos deslocamentos e forças de superfície que são incógnitos no contorno da chapa são dados por:

$$\{\Delta X\}_n = \{\Delta L\}_n + [R_N] \{\Delta N^p\}_n \quad (348)$$

e ΔL representa a resposta elástico linear e $\{\Delta N^p\}_n$ contém os vetores $\{\Delta N^p\}^k$ de todos os pontos da placa.

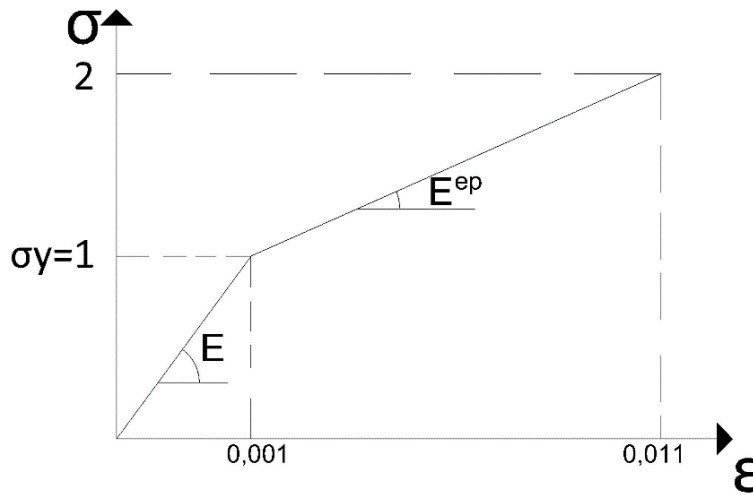
O incremento de força normal real na chapa é dado pela equação(333).

4.8 Exemplos não lineares

Exemplificando a teoria apresentada no capítulo 4 as análises não lineares foram rodadas no programa de (FERNANDES,2013) a partir dos exemplos do capítulo 2 com a malha no contorno já convergida. O domínio desses exemplos foram discretizado em células triangulares e se fez o estudo dessa convergência do domínio pela adição de mais células.

4.8.1 Exemplo não linear com carregamento em p_n

Como o exemplo 4.8.1 é simples, inicialmente foi resolvido analiticamente, para posteriormente efetuar a análise não linear pelo MEC. Na figura 63 está o gráfico tensão deformação do material.

Figura 63 – Gráfico tensão x deformação do material do exemplo 4.8.1

Fonte: Do próprio autor

De acordo com a figura (63), adotou-se módulo de elasticidade $E=1000\text{kN/cm}^2$, tensão de escoamento de $\sigma_y=1 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$ e $E^{ep}=100 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$. Sendo nesse caso, $E^{ep} = \frac{EK}{E+K}$, chega-se ao seguinte valor para o encruamento $K=111,11 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$. A partir do exemplo linear com carregamento em p_n feito no item 2.10.1 foram inseridas células triangulares ao longo do domínio para a análise não linear. As vinculações e condições de contorno são as mesmas apresentadas na figura 12 com a exceção da carga ser de 20kN/cm na direção de p_n , aplicada ao longo de oito incrementos, adotando $\Delta\beta=1$ para o primeiro, $\Delta\beta=0,5$ para o segundo e $\Delta\beta=0,25$ para os outros. Como o deslocamento em um ponto qualquer da placa é dado por $u_n^p = u_{n-1}^p + \Delta\epsilon x_1^p$ obtêm-se os seguintes deslocamentos no ponto PC2 (ver figura 13) para os fatores de carga $\beta=1, \beta=2$ e $\beta=3$:

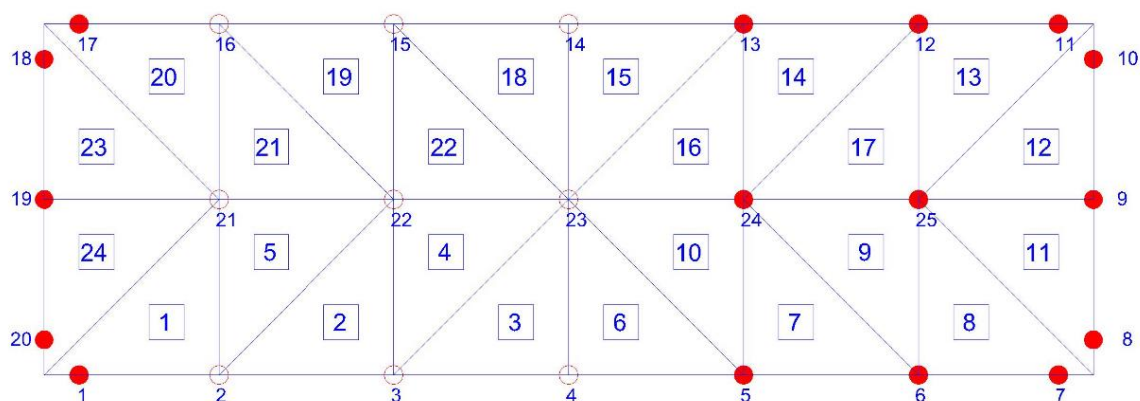
$$u_{\beta=1} = \epsilon l = 0,001 * 200 = 0,2\text{cm} \quad (349)$$

$$u_{\beta=2} = \epsilon l = 0,011 * 200 = 2,2\text{cm} \quad (350)$$

$$u_{\beta=3} = \epsilon l = 0,021 * 200 = 4,2\text{cm} \quad (351)$$

A partir do exemplo linear com carregamento em p_n feito no item 2.10.1 foram inseridas células triangulares ao longo do domínio para a análise não linear. As vinculações e condições de contorno são as mesmas apresentadas na figura 12 com a exceção da carga ser de 20kN/cm na direção de p_n , aplicada ao longo de nove incrementos. Para este exemplo o domínio foi discretizado com oito e vinte quatro células, visto na figura 64.

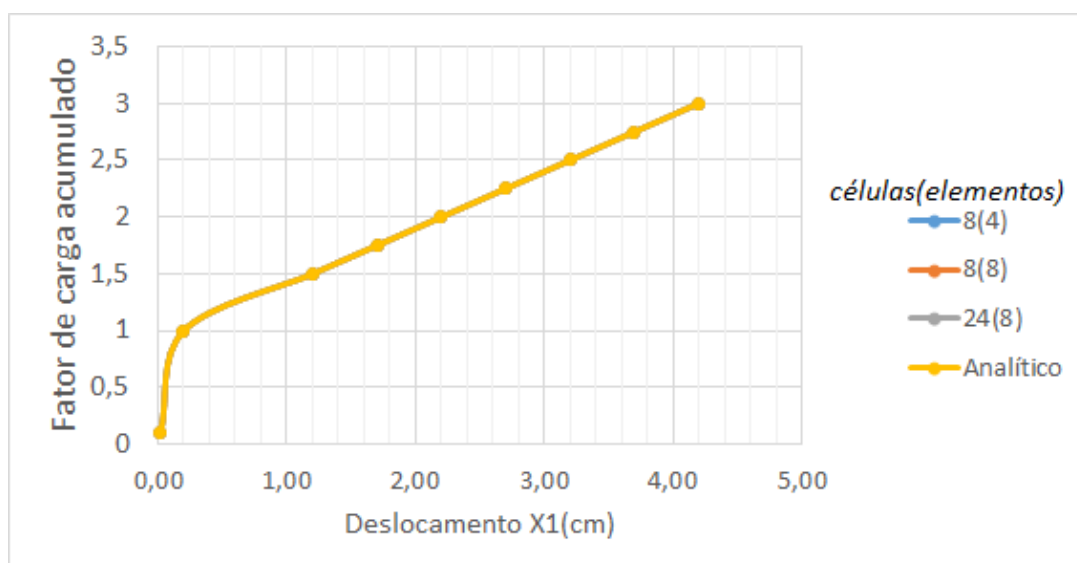
Figura 64– Malha 24(8) com vinte quatro células no domínio e oito elementos no contorno



Fonte: Do próprio autor

Na legenda da figura 65 o valor fora do parêntese corresponde a quantidade de células no domínio e o valor dentro do parêntese a quantidade de elementos no contorno.

Figura 65 – Deslocamento do ponto PC2 para análise não linear com carregamento em p_n



Fonte: Do próprio autor

Percebe-se na figura 66, que nada se alterou na adição de mais células no domínio sendo então que oito células seriam suficientes para a produção de bons resultados. Isso acontece pela simplicidade do exemplo, cuja resposta analítica é conhecida.

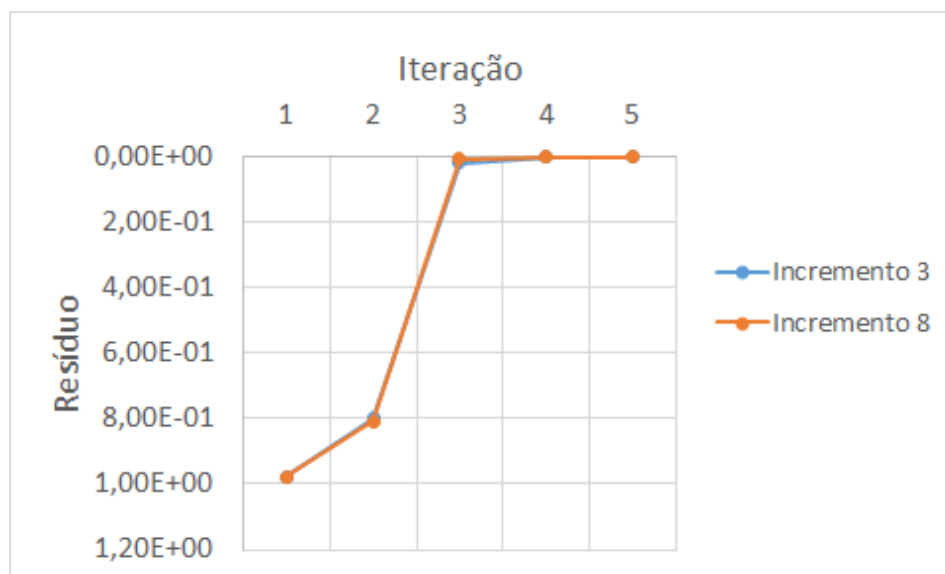
Na tabela 1, está demonstrada a convergência do exemplo para a malha de quatro elementos no contorno e oito células no domínio. O coeficiente β corresponde ao fator de carga acumulado visto na figura 64 e $\Delta\beta$ o fator de carga naquele incremento.

Tabela 1 – Convergência da malha 8(8) com carregamento em p_n

Iteração	Incremento 4	Incremento 8
	$\Delta\beta=0,25$	$\Delta\beta=0,25$
	$\beta=2$	$\beta=3$
	Resíduo	
1	9,78E-01	9,78E-01
2	8,00E-01	8,09E-01
3	1,89E-02	7,57E-03
4	7,61E-05	2,93E-05
5	4,89E-11	1,06E-11

Fonte: Do próprio autor

No gráfico 4.9, estão os valores da tabela 1. Percebe-se como o resíduo diminui significativamente entre uma iteração e outra, isso se dá pela ocorrência da convergência quadrática no problema advinda da formulação empregada.

Figura 66 – Resíduo nos incrementos da malha 8(4).

Fonte: Do próprio autor

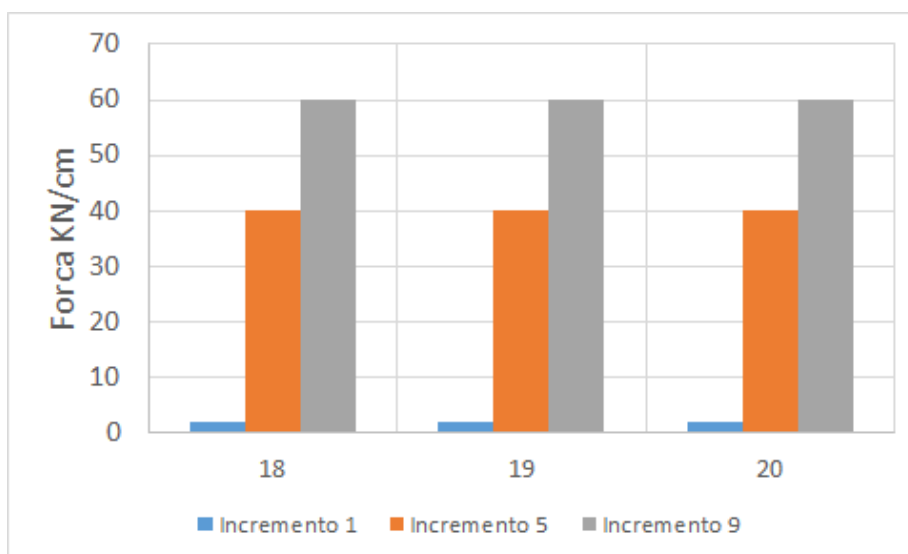
Na tabela 2, está demonstrada a convergência do exemplo para a malha de oito elementos no contorno e vinte e quatro células no domínio.

Tabela 2 – Convergência da malha 24(8) com carregamento em p_n

	Incremento 3	Incremento 8
	$\Delta\beta=0,5$	$\Delta\beta=0,25$
	$\beta=1,5$	$\beta=3$
	Resíduo	
Iteração		
1	9,78E-01	9,78E-01
2	8,09E-01	8,20E-01
3	7,57E-03	3,91E-04
4	2,93E-05	1,19E-07
5	1,06E-11	2,08E-15

Fonte: Do próprio autor

Além dos deslocamentos, na análise não linear foi plotado o gráfico das forças nas vinculações da chapa (ver figura 12) para três incrementos da malha 24(8), como visto na figura 66.

Figura 67– Evolução das reações nos apoios da malha 24(8)

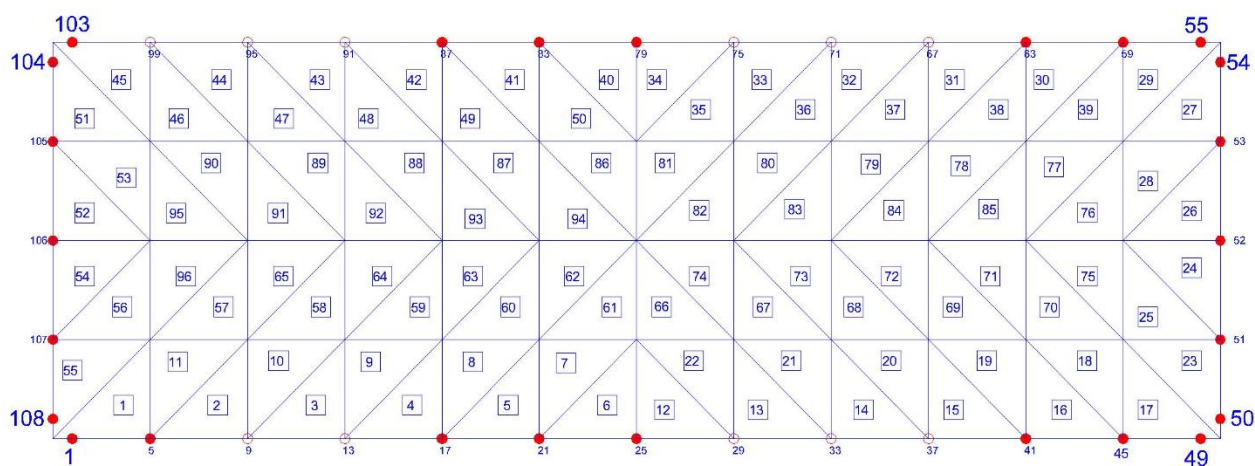
Fonte: Do próprio autor

4.8.2 Exemplo não linear com carregamento em p_s .

No item 2.10.2, tem-se a análise linear da chapa com carregamento em p_s , aqui foi usado o mesmo procedimento do item 4.8.1 para a análise não linear. As vinculações e condições de contorno são as mesmas apresentadas na figura 21. O coeficiente de encruamento e tensão de escoamento foi o mesmo utilizado no exemplo 4.8.1

Para este exemplo, tem-se a discretização do domínio em vinte e quatro e quarenta e oito células para contorno com vinte e oito elementos, feito o mesmo para o contorno com cinquenta e dois elementos com adicional da malha de noventa e seis células, como visto na figura 68.

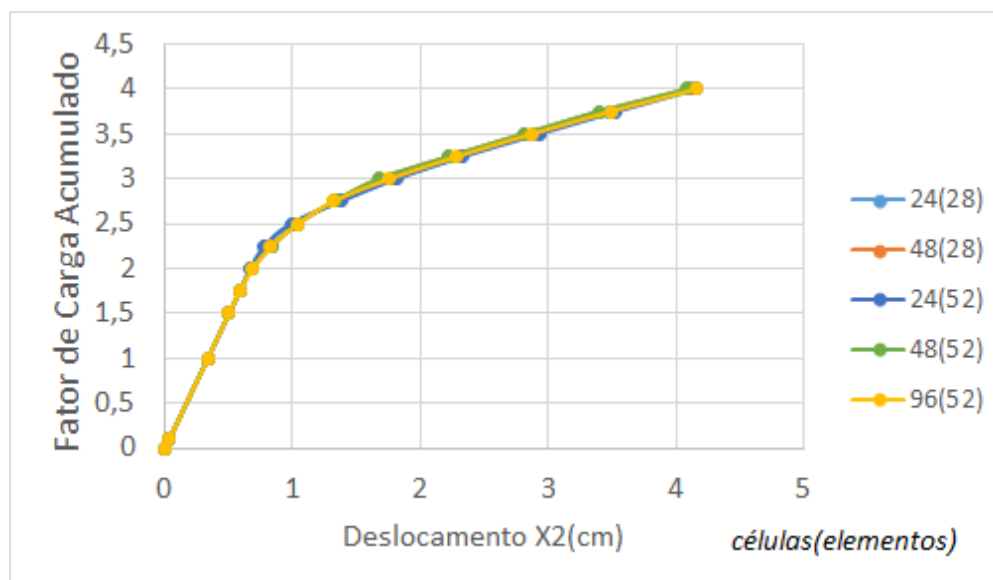
Figura 68 – Malha 96(52) com noventa e seis células no domínio e cinquenta e dois elementos no contorno



Fonte: Do próprio autor

Na figura 69, está o deslocamento do ponto médio da chapa PC2(ver figura 12).

Figura 69 – Deslocamento do ponto PC2 para análise não linear com carregamento em p_s



Fonte: Do próprio autor

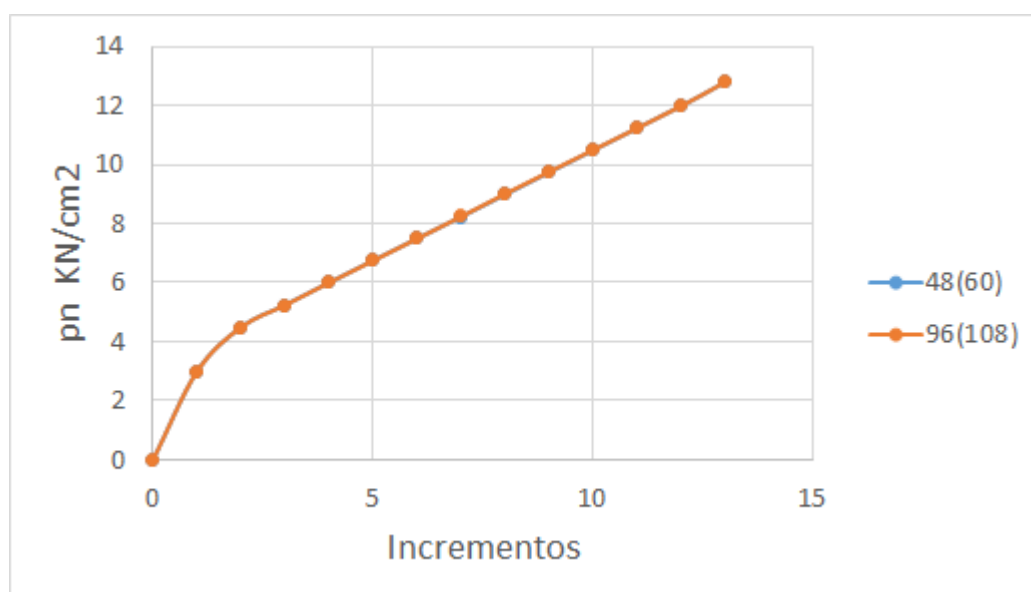
Na tabela 3, está demonstrada a convergência do exemplo para a malha 96(52).

Tabela 3 – Convergência da malha 96(52) com carregamento em p_s

Iteração	Incremento 3	Incremento 13
	$\Delta\beta=0,5$	$\Delta\beta=0,25$
	$\beta=1,5$	$\beta=4$
	Resíduo	
1	9,63E-01	9,36E-01
2	4,72E-32	7,55E-01
3		6,25E-05
4		4,42E-09

Fonte: Do próprio autor

Na figura 70, está variação de p_n no ponto PC1 ao longo dos treze incrementos.

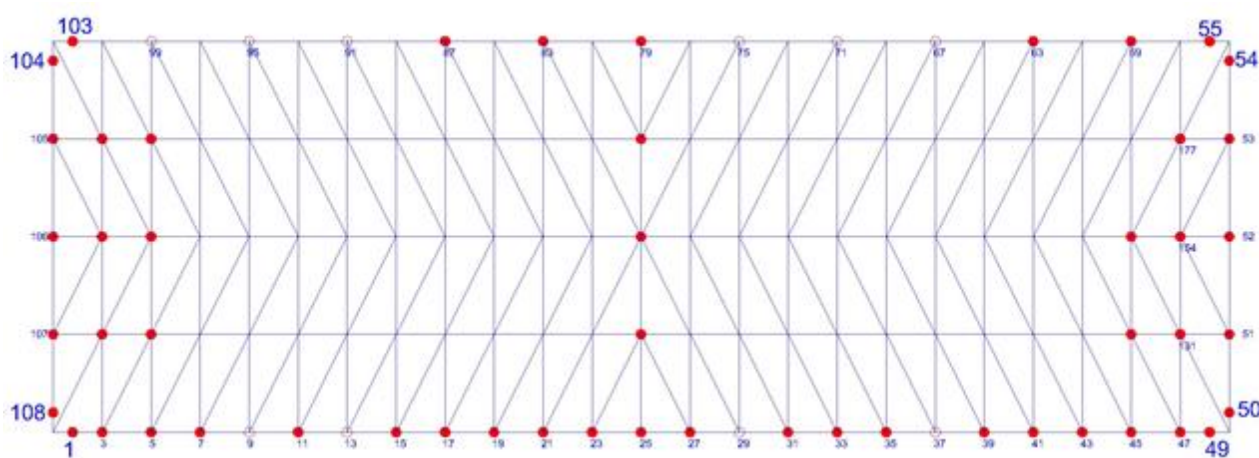
Figura 70– Variação de p_n ao longo dos treze incrementos

Percebe-se que pouco, nada se variou a força com a discretização do contorno em mais elementos e do domínio em células.

4.8.3 Exemplo não linear com carregamento em p_s e p_n

No item 2.10.3, foi realizada a análise linear da chapa com carregamento em p_n e p_s . O coeficiente de encruamento e tensão de escoamento foi o mesmo utilizado em 4.8.1. Para este exemplo, tem-se a discretização do domínio em vinte e quatro e quarenta e oito células para a contorno com sessenta pontos, feito o mesmo para o contorno com cento e oito pontos com adicional da malha cento e noventa e seis células (figura 70).

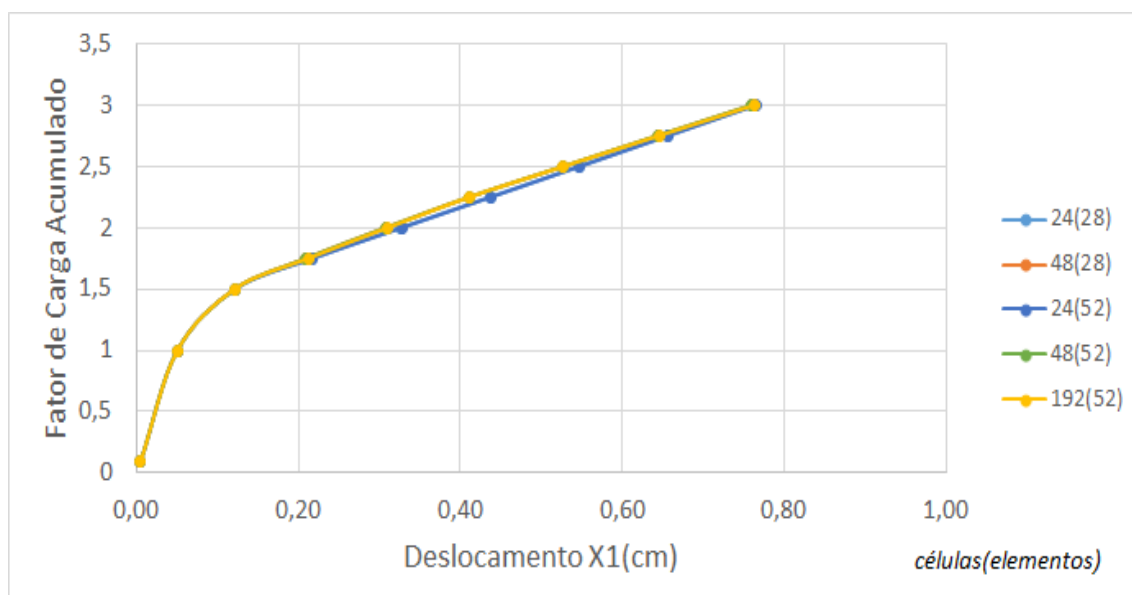
Figura 71– Malha 192(52) com cinquenta e dois elementos no contorno e cento e noventa e duas células no domínio



Fonte: Do próprio autor

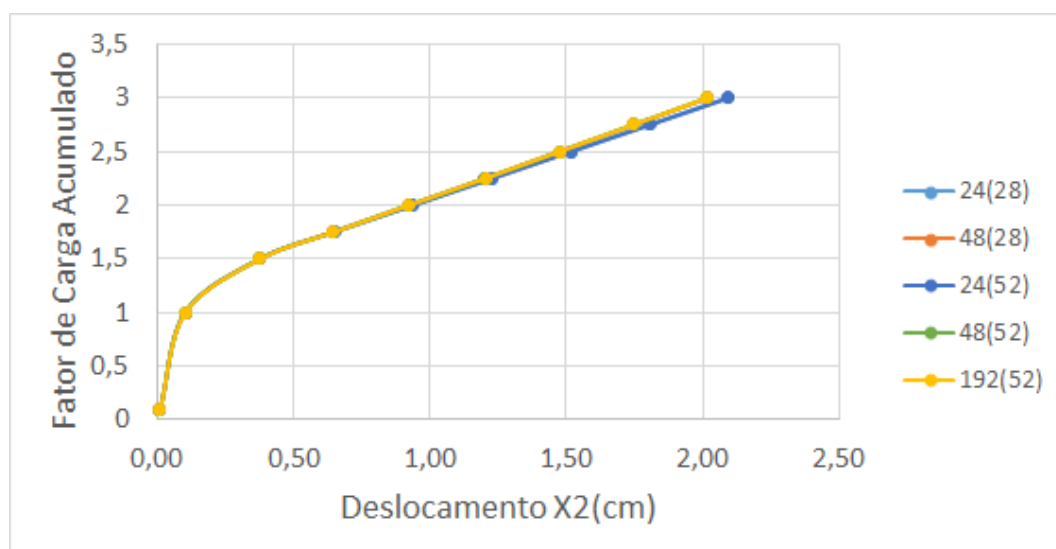
Na figura 72 e 73, são para a análise não linear, os deslocamentos para o ponto médio P4(ver figura 13):

Figura 72– Deslocamento X1 do ponto P4 para análise não linear com carregamento em p_s e p_n



Fonte: Do próprio autor

Figura 73– Deslocamento X2 do ponto P4 para análise não linear com carregamento em p_s e p_n



Fonte: Do próprio autor

Note que ambas as malhas de quarenta e oito células apresentam bons resultados. Na tabela 4, está demonstrado a convergência do exemplo para a malha 48(28).

Tabela 4 – Convergência da malha 48(28) com carregamento em p_s e p_n

	Incremento 3	Incremento 9
	$\Delta\beta=0,5$	$\Delta\beta=0,25$
	$\beta=1,5$	$\beta=3$
Iteração	Resíduo	
1	9,51E-01	9,51E-01
2	4,76E-01	7,82E-01
3	5,23E-03	8,93E-04
4	2,24E-06	9,47E-08
5	2,51E-11	

Fonte: Do próprio autor

Na tabela 5, está demonstrada a convergência do exemplo para a malha 192(52).

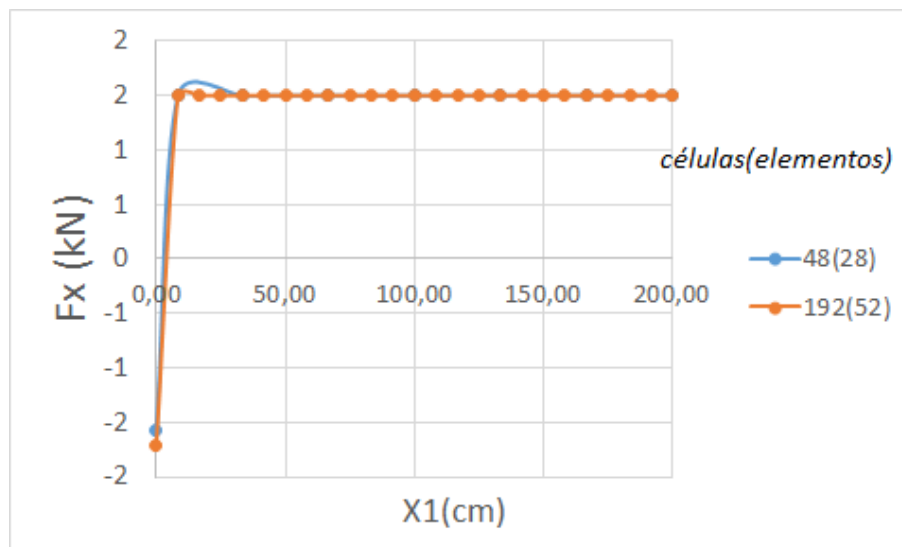
Tabela 5 – Convergência da malha 192(52) com carregamento em p_s e p_n

	Incremento 3	Incremento 9
	$\Delta\beta=0,5$	$\Delta\beta=0,25$
	$\beta=1,5$	$\beta=3$
Iteração	Resíduo	
1	9,85E-01	9,85E-01
2	5,41E-01	8,11E-01
3	5,35E-03	1,35E-04
4	2,31E-06	1,59E-08
5	2,63E-11	

Fonte: Do próprio autor

Na figura 74, tem-se o gráfico de força na direção de X_1 ao longo de todo eixo central da chapa.

Figura 74– Força em X1 ao longo do eixo central da chapa



Fonte: Do próprio autor

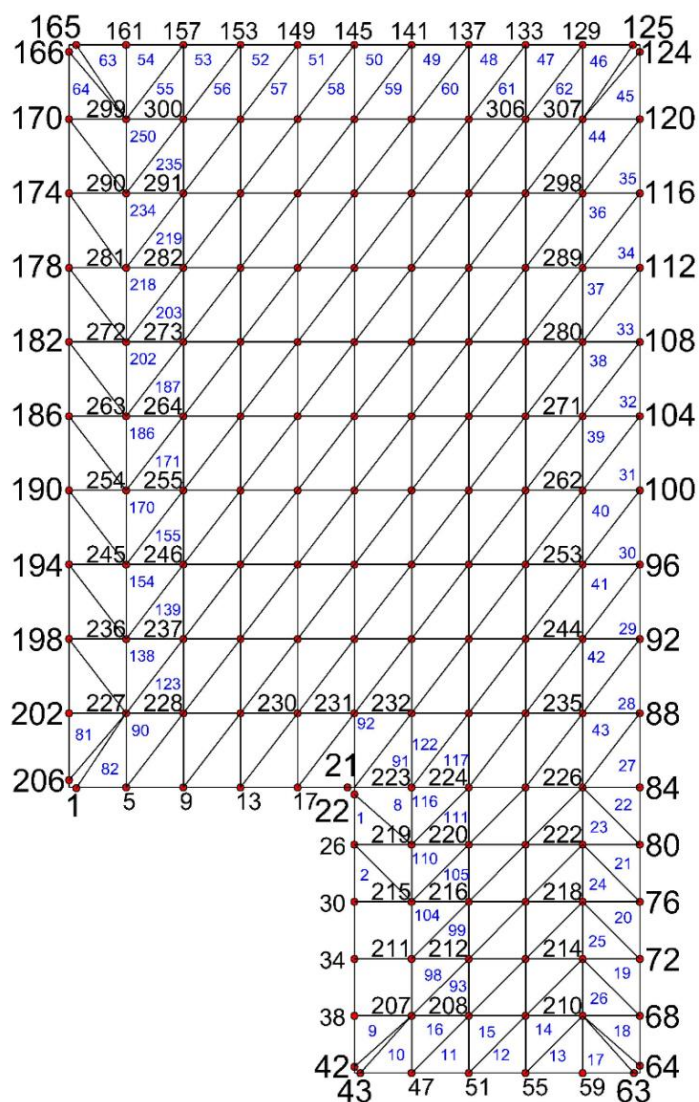
4.8.4 Exemplo não linear de chapas de alumínio com furo circular e quadrado

Para a análise não linear do furo quadrado, utiliza-se a malha de duzentos e seis pontos no contorno como visto na figura (41). A partir desta malha foram inseridas células triangulares ao longo do domínio para a análise não linear, para avaliar a convergência. Os deslocamentos e as forças foram comparados com o *software* de elementos finitos Ansys.

As vinculações e condições de contorno são as mesmas apresentadas na figura 34, com a exceção da carga ser de 121,5 N/mm na direção de p_n . As características do material são: tensão de escoamento adotada foi de $\sigma_y = 243 \text{ MPa}$; o coeficiente de encruamento $K = 0,032E$; coeficiente de Poisson de 0,2; módulo de elasticidade de $E = 70 \text{ GPa}$.

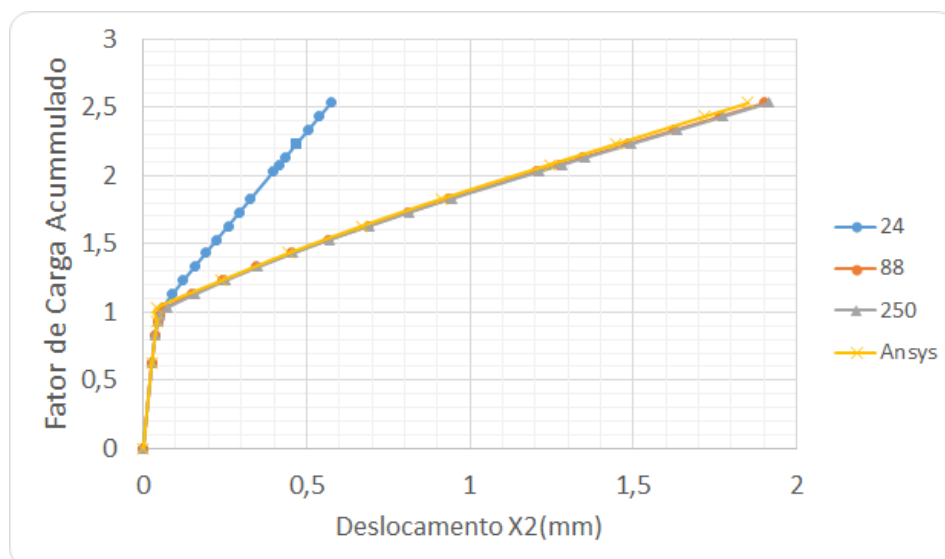
Propôs-se três diferentes discretizações do domínio, contendo vinte e quatro, oitenta e oito e duzentos e cinquenta células, esta última visto na figura 75.

Figura 75– Malha 250(100) com cem elementos no contorno e duzentos e cinquenta células no domínio



Fonte: Do próprio autor

Na figura 76, está o deslocamento do ponto 1 da aplicação da carga para o método dos elementos de contorno e o deslocamento obtido no *software* de elementos finitos Ansys:

Figura 76– Deslocamento do ponto 1 para malhas com 24,88 e 250 células

Fonte: Do próprio autor

Percebe-se que a malha de vinte e quatro células apresenta resultados ruins, sendo que a convergência se dá na malha com oitenta e oito células no domínio. Um pouco acima do fator de carga um, ou seja, a carga de 121,5 N/mm muda-se comportamento do material ocorrendo a plastificação, comportamento que se repete na análise no Ansys, como visto na figura 76.

Na tabela 6, está demonstrada a convergência do exemplo:

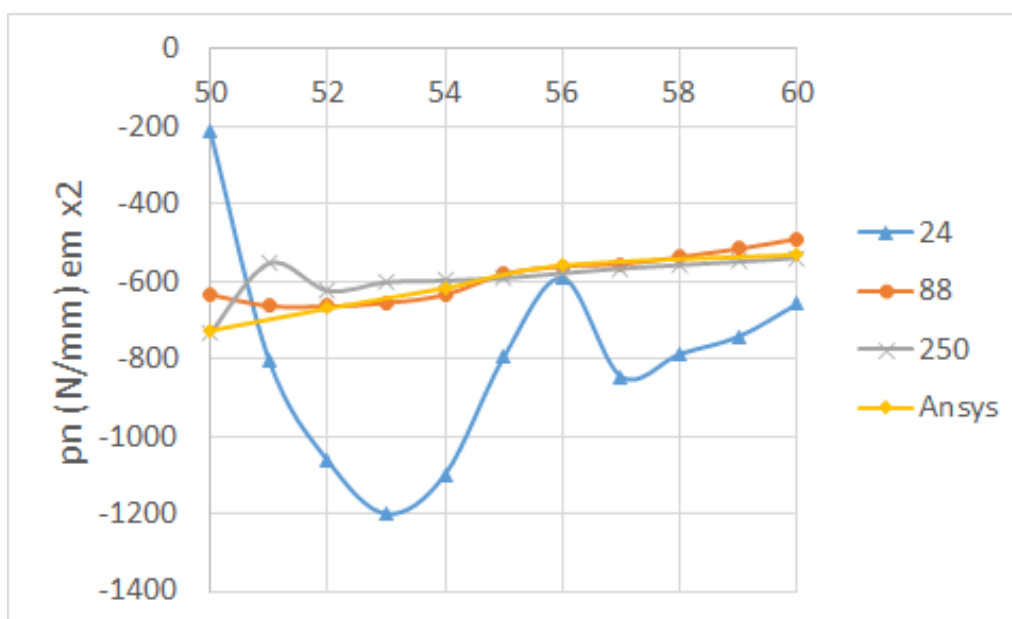
Tabela 6 – Convergência da malha 100(250) com furo quadrado

	Incremento 2	Incremento 20
	$\Delta\beta=0,2$	$\Delta\beta=0,05$
	$\beta=0,83$	$\beta=2,53$
	Resíduo	
Iteração		
1	9,80E-01	9,80E-01
2	1,12E-01	9,24E-01
3	1,96E-02	1,19E-04
4	3,26E-03	6,56E-07
5	1,65E-06	4,49E-12

Fonte: Do próprio autor

Percebe-se que o exemplo converge rapidamente como demonstrado na iteração quatro para as cinco restando pouco resíduo entre as iterações. Plotou-se um eixo de forças compostos dos pontos cinquenta até o ponto sessenta (ver figura 41) para analisar o caminhamento das forças ao longo das células no último incremento.

Figura 77 – Forças dos pontos cinquenta a sessenta da chapa com furo quadrado



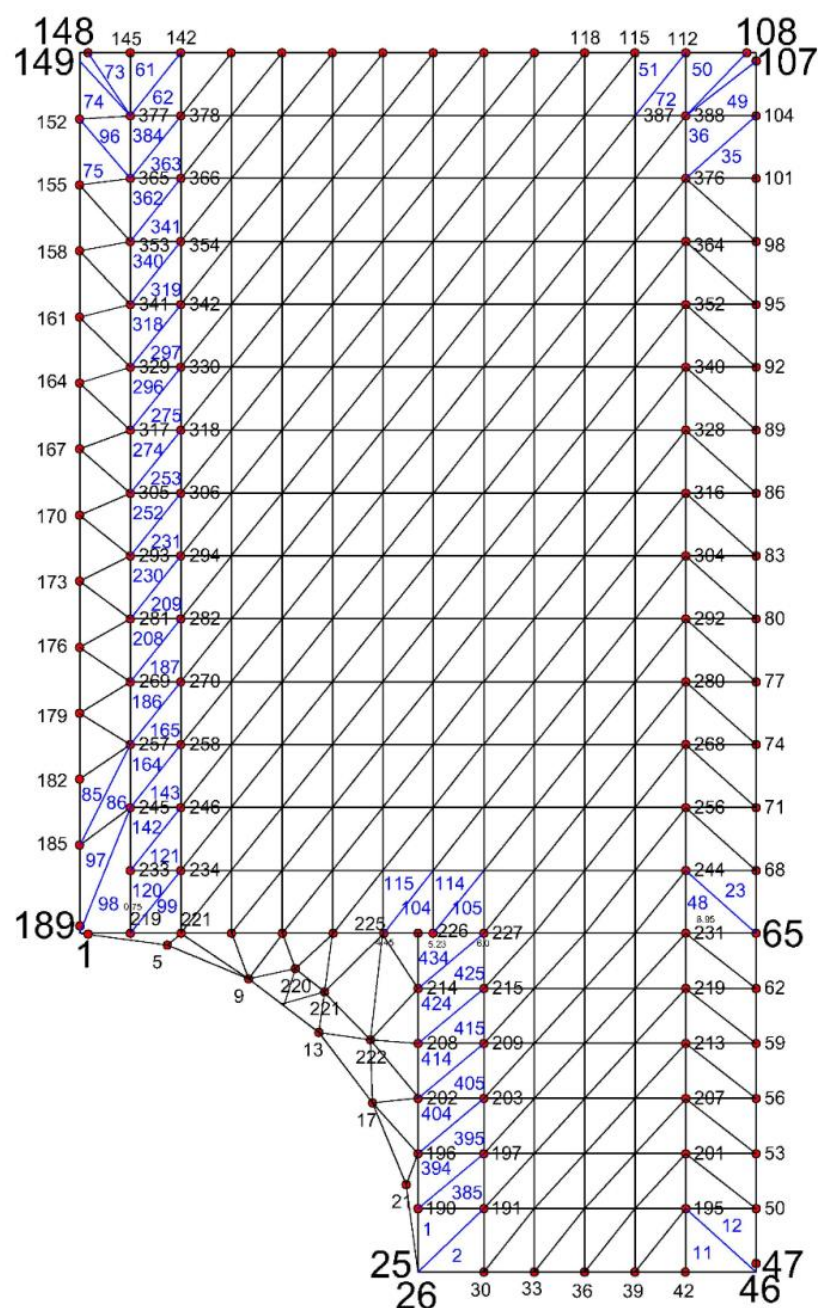
Fonte: Do próprio autor

Assim, como no gráfico do deslocamento (4.20) as forças de superfície plotadas também obteve sua convergência na malha com oitenta e oito células, sendo que o domínio com vinte e quatro células apresenta resultados ruins.

No item 2.10.4, tem-se a análise linear do furo circular na qual se adota a malha de cento e oitenta e seis pontos no contorno (figura 37) para o estudo da convergência. As vinculações e condições de contorno são as mesmas apresentadas na figura 34, com a exceção da carga ser de 121.5N/mm na direção de p_n . Como se trata do mesmo material, alterando somente a geometria do furo as características já foram apresentadas.

Para a análise não linear, propuseram-se quatro discretizações: quarenta e nove, oitenta e oito, duzentos e setenta e seis e quatrocentos e cinquenta células no contorno, sendo esta última vista na figura 78.

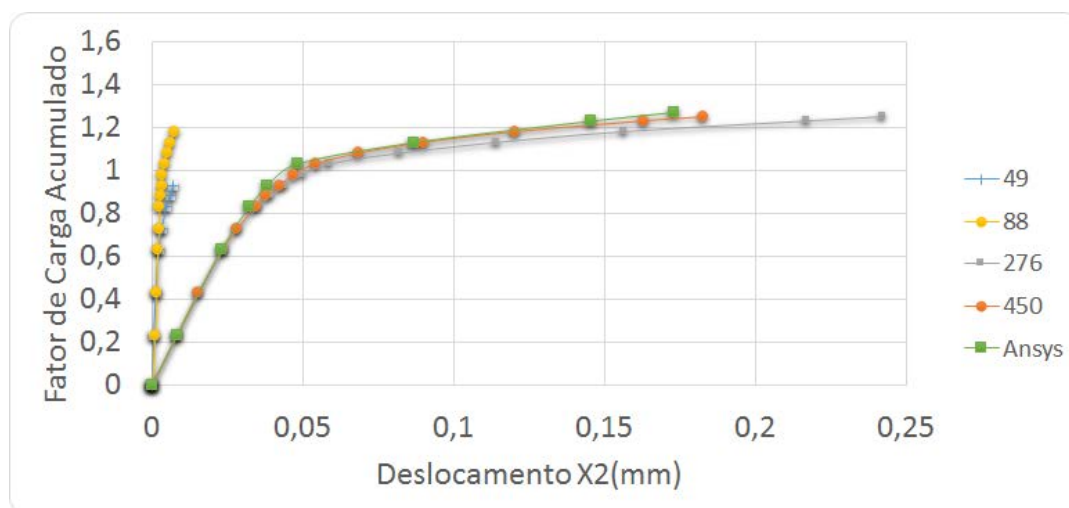
Figura 78– Malha 450(92) com noventa e dois elementos no contorno e quatrocentos e cinquenta células no domínio



Fonte: Do próprio autor

Na figura 79, está o deslocamento do ponto 1 para as diversas malhas analisadas e também o deslocamento no Ansys para os diversos fatores de carga.

Figura 79– Deslocamento do ponto 1 para malhas 49,276,450 e Ansys



Fonte: Do próprio autor

Assim, pode-se observar que para o furo circular, necessita-se de uma maior discretização do domínio para a obtenção de melhores resultados em comparação ao furo quadrado. Na tabela 7, está demonstrado a convergência do exemplo:

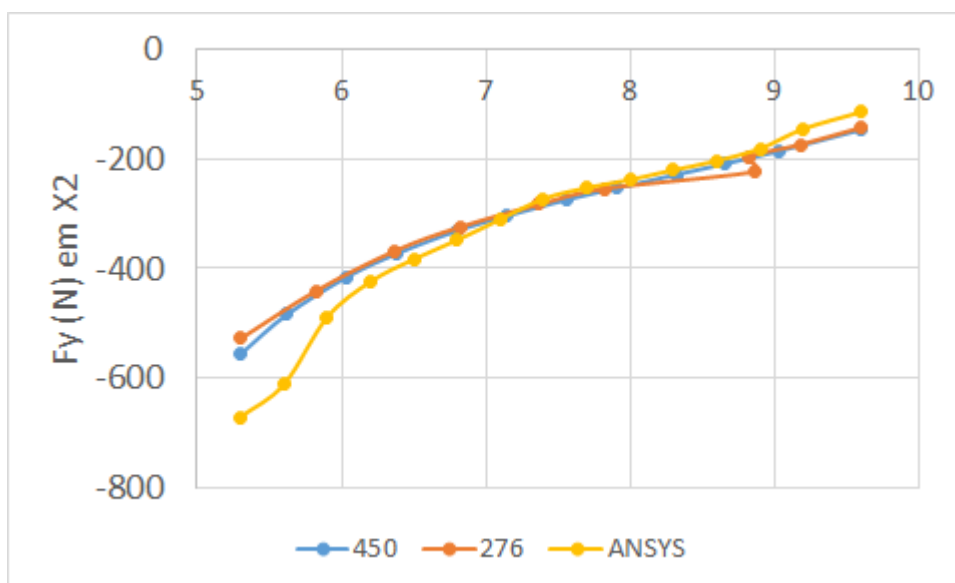
Tabela 7 – Convergência da malha 450(92) com furo circular

	Incremento 2	Incremento 14
	$\Delta\beta=0,2$	$\Delta\beta=0,02$
	$\beta=0,43$	$\beta=1,25$
	Resíduo	
1	9,86E-01	9,86E-01
2	5,01E-01	9,90E-01
3	1,43E-01	5,11E-03
4	1,35E-02	8,06E-04
5	2,78E-05	1,36E-07
6	1,01E-10	1,59E-12

Fonte: Do próprio autor

Foi plotado na figura 80, as forças ao longo de um eixo referente aos pontos de colocação para forças (ver figura 62) 26 até 46 fixado a 0,163 milímetros de distância do contorno inferior. Foi feito este procedimento para demonstrar as forças internas em um eixo da chapa, no último incremento, para três diferentes discretizações. Os valores são das força F_y na direção de X_2 .

Figura 80– Forças nos pontos de colocação para forças da chapa circular



Fonte: Do próprio autor

Não foi plotado as forças das malhas, com quarenta e nove células e oitenta e oito células, pelo motivo que os pontos de colocação para forças referentes a estas malhas não coincidem com as malhas de duzentos e setenta e seis e quatrocentos e cinquenta células, assim se perderia o efeito comparativo. Contudo, pelo gráfico do deslocamento (figura 79), percebe-se que não há a convergência dos resultados, concluindo assim que estas seriam malhas pobres para a análise não linear.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho desenvolveu a teoria do método dos elementos de contorno para análises lineares e com não linearidade física aplicada a chapas. Para as análises lineares, percebe-se que a convergência dos resultados aqui analisados se dá com pouca adição de elementos no contorno. Sendo então que o método dos elementos de contorno (MEC) apresenta bons resultados utilizando pouca memória computacional, sendo uma opção viável para sua utilização em análises estruturais. No caso das chapas analisadas neste trabalho, pode-se concluir que uma discretização de dez elementos em cada lado do contorno, seriam necessários para obter bons resultados.

Para as análises não lineares, necessita-se além da discretização do contorno a discretização do domínio. Percebeu-se que utilizando uma malha que apresenta bons resultados na análise linear, necessitou-se também de pouca adição de células no domínio para se obter a convergência dos resultados. Para as chapas retangulares simples, necessitou de poucas células no domínio, para se obter a convergência. Para exemplos onde há concentrações de tensões, como o caso dos furos circular e quadrado, foi necessário um maior detalhamento no domínio. A comparação com o software Ansys comprovou a eficiência da formulação não linear no MEC, para análises com chapas de diversas geometrias.

A formulação do operador tangente consistente se mostrou eficaz, obtendo taxa de convergência quadrática do resíduo mesmo para exemplos mais complexos que necessitou de malha mais refinada tanto no contorno quanto no domínio.

Portanto, tem-se que a utilização do método dos elementos de contorno se apresentou eficiente, tanto nas análises lineares quanto naquelas onde foi considerada não linearidade física, obtendo bons resultados com pouca adição de elementos no contorno e nas células. É um método ainda a ser muito explorado em *softwares* comerciais que utilizam somente o método dos elementos finitos.

REFERÊNCIAS

- ALIABADI, M. H. **Applications in solids and structures**. London: Queen Mary University of London, 2003.
- BÉZINE, G. A.; CIMETIERRE, A. ; GELBERT, J. P. Unilateral bucking on thin plates by the boundary integral equation method. **International Journal Numerical Methods in Engineering**, Chichester, v. 21, p. 2189-2199, 1985.
- BONNET, M. **Équations intégrales et éléments de frontière**. Paris: CNRSÉditions/Eyrolles, 1995. 316 p.
- BREBBIA, C. A. **The boundary element method for engineers**. London: Pentech Press, 1978. 256 p.
- BREBBIA, C. A. ; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. New York: Mc Graw-Hill Book Company, 1989. 292 p.
- CHUEIRI, L. H. M. **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. São Carlos. 219 f. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, 1994.
- COSTA JR., J. A. ; BREBBIA, C. A. Elastic bucking of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C. A. ; MAIER, G. (Ed.). **Boundary element**. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- DENIPOTTI, J. G. **Inclusão de pilares numa formulação do método dos elementos de contorno para análise linear de pavimentos de edifícios**. 2007. 153 f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2007.
- FERNANDES, G. R. Análise não linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, São Carlos, v. 11, n. 48, p. 55-81, 2003.
- FERNANDES, G. R. **Introdução ao método dos elementos de contorno –MEC**. Ilha Solteira: Unesp/Faculdade de Engenharia, 2005. 122 p.
- FERNANDES, G. R. **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas**. São Carlos. 178 f. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.
- FERNANDES, G. R. ; SOUZA NETO, E. A. Self-consistent linearization of non- linear BEM formulations with quadratic convergence. **Computational Mechanics**, Heidelberg, v. 52, p. 1125-1139, 2013.
- FOLTRAN, C. E. **Análise de problemas planos em regime elastoplástico pelo método dos elementos de contorno**. 1999. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Faculdade de

Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1999.

NEVES, A. C. ; BREBBIA, C. A. The multiple reciprocity method applied to thermoelastic problems with concentrated and distributed heat sources. In: BREBBIA, C.A. (Ed.). **Boundary elements technology VI**. New York: Elsevier Applied Science, 1991. p. 201-214.

RIBEIRO, G. O. **Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner**. 1992. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1992.

TELLES, J. C. F.; BREBBIA, C. A. On the application of the boundary element method to plasticity. **Applied Mathematical Modelling**, New York, n. 3, p. 466-470, 1979.

TIMOSHENKO, S. P. ; GOODIER, J. N. **Teoria da elasticidade**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980. 545 p.

VAN DER WEEËN, F. Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C. A. (Ed.). **Boundary element methods in engineering**. Berlin: Springer-Verlag, 1982.

VENTURINI W. S. **Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems**. 1982. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton, Southampton, 1982.

VENTURINI W. S. **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia**. 1988. Tese (Livre-Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1988.