UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

Marco Antonio Moya Rosas

Boa colocação da equação do calor semilinear em L^p-Fraco

Dissertação de Mestrado

Pós-Graduação em Matemática

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Rua Cristóvão Colombo, 2265, 15054-000
São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (17) 3221-2444 - Fax: (17) 3221-2445

Marco Antonio Moya Rosas

Boa colocação da equação do calor semilinear em L^p-Fraco

Orientadora
Profa. Dra. Juliana C. Precioso Pereira

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Campus de São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
28 de abril de 2016

Moya Rosas, Marco Antonio.

Boa colocação da equação do calor semilinear em L^p-fraco / Marco Antonio Moya Rosas. -- São José do Rio Preto, 2016

86 f. : il.

Orientador: Juliana C. Precioso Pereira

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Lorentz, Espaços de. 4. Cauchy, Problemas de. I. Pereira, Juliana Conceição Precioso. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.944

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marco Antonio Moya Rosas

Boa colocação da equação do calor semilinear em L^p-Fraco

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Equações Diferenciais Parciais, junto ao Programa de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus São José do Rio Preto.

Banca Examinadora

Profa. Dra. Juliana C. Precioso Pereira
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Profa. Dra. Lidiane dos Santos Monteiro Lima
UFG - Goiânia

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 28 de abril de 2016

À memoria de minha irmã,
Norma.
Dedico.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, que todos os dias de minha vida me deu forças para nunca desistir;

À meus pais, Marcos e Ermelinda, que me ensinaram a lutar por ideais através de exemplo de vida e de trabalho, responsáveis pela formação de meu caráter e personalidade;

A todos os meus familiares e amigos, que participaram da minha vida durante estes anos de mestrado;

Agradeço à minha orientadora Profª. Juliana Precioso, pelo apoio na elaboração desta dissertação.

À todos os amigos que de alguma forma colaboraram para a realização deste projeto;

Ao CNPq pelo apoio financeiro para a realização deste trabalho.

Sumário

1 Conceitos Preliminares **12**

1.1 Espaços L^p e L^p-fracos 12

1.2 As Funções Rearranjo e Duplo Rearranjo 21

1.3 Convergência em Medida 37

2 Espaços de Lorentz **40**

2.1 Espaços de Lorentz e Propriedades 40

2.2 Desigualdades de Young e Hölder em $L^{(p,q)}$ 52

2.2.1 Desigualdade de Young 52

2.2.2 Desigualdade de Hölder 56

2.3 Aproximação da Identidade em $L^{(p,q)}$ 57

2.4 Um Teorema de Interpolação 60

3 Soluções Mild no Espaço $L^{(p,\infty)}$ **62**

3.1 Problema de Cauchy para a Equação Semilinear do Calor 62

3.1.1 O Problema Linear Associado a (3.1) 62

3.1.2 Estimativas do Semigrupo do Calor $S(t)$ 63

3.1.3 Formulação Integral do Problema 66

3.2 Relação de escala e Espaço funcional adequado 68

3.3 Boa Colocação nos Espaços $L^{(p,\infty)}$ 70

3.3.1 Estimativa do Termo Não Linear 74

3.3.2 Estimativa de termo linear 82

3.3.3 Prova do Teorema de Boa Colocação 3.3.2 84

Referências **86**

Resumo

Neste trabalho, analisaremos o problema de boa colocação do problema de valor inicial para a equação semilinear do calor. Mostraremos a existência de solução global mild, quando o dado inicial u_0 pertence ao espaço $L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}-$fraco e tem norma suficientemente pequena.

Palavras-chave: Equação semilinear do calor, L^p-fraco, Espaços de Lorentz.

Abstract

In this work, we discuss the well−posedness of the initial value problem for the semilinear heat equation. We show the existence of global mild solution, when the initial data u_0 belong to weak $L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}$ space with a sufficiently small norm.

Keywords: Semilinear heat equation, Weak L^p, Lorentz spaces.

Introdução

Neste trabalho, estudaremos o problema de Cauchy para a equação semilinear do calor, o qual é dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$|f(a_2) - f(a_1)| \leq C|a_2 - a_1| \left(|a_2|^{\rho-1} + |a_1|^{\rho-1}\right) \text{ e } f(0) = 0,$$

para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e algumas constantes $C > 0$, $\rho > 1$.

Para resolver tal problema, adotaremos o procedimento clássico para analisar equações diferenciais, ou seja, procuraremos por soluções do problema em um sentido mais fraco, de forma que a solução do problema original também seja uma solução no sentido mais fraco. A solução fraca, com a qual iremos trabalhar, é conhecida como solução mild ou solução branda.

Na literatura podemos encontrar vários importantes trabalhos dedicados ao estudo da existência e unicidade de solução para o problema de Cauchy (1), veja, por exemplo, [16], [17] e [9].

Em [16], Weissler mostrou existência e unicidade de solução local no tempo com $u_0 \in L^p$ e $p \geq \dfrac{n(\rho-1)}{2} > 1$. Em [17], Weissler provou a existência de solução mild global em L^p quando $p = \dfrac{n(\rho-1)}{2}$, com o dado inicial suficientemente pequeno. Vale ressaltar que em [16] e [17], Weissler mostrou a unicidade de solução com a seguinte condição adicional:

$$\lim_{t\to 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|u\|_q = 0, \;\; \alpha = \frac{1}{\rho-1} - \frac{n}{2q} \;\; \text{e} \;\; \frac{n(\rho-1)}{2} < q < \frac{n\rho(\rho-1)}{2}.$$

Em [9], Giga construiu uma única solução local regular em $L^r((0,T); L^q)$ com restrições em r e q para que a norma seja invariante pelo scaling (ou relação de escala).

O principal resultado apresentado nesta dissertação, baseado no artigo [7], é o teorema de existência e unicidade de solução mild global para a equação semilinear do calor (1) quando o dado inicial u_0 possui norma suficientemente pequena e pertence ao espaço

$L^{\frac{n(\rho-1)}{2}}-$fraco.

Esta dissertação está organizada em 3 capítulos. A seguir faremos uma breve descrição do conteúdo de cada um deles.

No capítulo 1, apresentamos conceitos preliminares que servirão de base para a teoria que queremos estudar nos capítulos posteriores. Começamos lembrando brevemente a definição dos espaços L^p. Em seguida, definimos o conceito de função distribução e demonstramos alguns resultados e propriedades. Tal função será importante para definir os espaços L^p-fracos. Vale ressaltar que tais espaços contém os espaços L^p. Para continuar os estudos preliminares, apresentamos o conceito de função rearranjo e algumas propriedades e resultados envolvendo tal função, como por exemplo, a desigualdade de Hardy- Littlewood. Para finalizar o primeiro capítulo, definimos a função duplo rearranjo e demonstramos algumas propriedades e resultados envolvendo tal função.

No capítulo 2, começamos definindo os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ e sua quase norma que envolve a função rearranjo. Mostramos também que os espaços de Lorentz $L^{p,q}$ contém os espaços de Lebesgue L^p e suas relações de escala coincidem. Serão apresentados alguns resultados, como por exemplo, a desigualdade de Hardy, que também será utilizada para provar a desigualdade de Young na Seção 2.2. Em seguida, com o auxílio da função duplo rearranjo, definimos uma norma para o espaço de Lorentz e mostramos que ela é equivalente a quase norma definida anteriormente. Alguns resultados envolvendo tal norma serão apresentados, como por exemplo, o lema de Calderón e a completude dos espaços de Lorentz. Em seguida, mostramos o teorema de interpolação de Marcinkiewicz. Para finalizar os estudos sobre os espaços de Lorentz, apresentamos a desiguladade de Young e Hölder generalizadas, que serão muito utilizadas nos resultados centrais desta dissertação (Capítulo 3).

No capítulo 3, apresentamos novamente a equação semilinear do calor (1) e calculamos a solução do problema linear associado. A solução encontrada gera um semigrupo $S(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass. Depois de encontrarmos algumas estimativas para o semigrupo do calor, apresentamos a formulação integral do problema (1), que é dada por,

$$u(t,x) = S(t)u_0(x) - \int_0^t S(t-s)f(u(s,x))ds. \tag{2}$$

Em seguida, formalizamos o conceito de solução mild para o problema (1) - (2) (Definição 3.3.1) e enunciamos o principal resultado deste trabalho, o teorema de boa colocação para o problema (1). De fundamental importância para a prova deste teorema é o lema abstrato que é apresentado na sequência. Com o intuito de aplicar o lema abstrato, estimamos os termos não linear e linear da equação (2) e apresentamos resultados de convergência dos mesmos. Tendo em mãos essas ferramentas, concluímos o trabalho demonstrando o teorema de boa colocação.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos definições e resultados necessários para o desenvolvimento de todo nosso trabalho. Na seção 1.1, apresentamos os espaços de Lebesgue L^p, a função distribuição e os espaços L^p-fracos. Na seção 1.2, definimos a função rearranjo e duplo rearranjo, e demonstramos algumas propriedades de tais funções. Na seção 1.3, definimos o conceito de convergência em medida e apresentamos alguns resultados que serão utilizados no Capítulo 2, para mostrar a completude dos espaços de Lorentz. Os resultados apresentados nessas seções podem ser encontrados em [1], [6], [8], [10] e [13].

1.1 Espaços L^p e L^p-fracos

Iniciaremos fixando um espaço de medida $\sigma-$finita $(X, \mathcal{M}, \mu)$. No Capítulo 3, consideraremos $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}$ como a $\sigma-$álgebra dos conjuntos Lebesgue mensuráveis e μ como a medida de Lebesgue. Denotaremos por p' o expoente conjugado de p, ou seja,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \text{com} \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Definição 1.1.1 *Seja $1 \leq p < \infty$. O espaço de Lebesgue $L^p(X, \mu)$, é o conjunto de todas funções f definidas em X, mensuravéis, tais que $\|f\|_p < \infty$, em que*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

Para $p = \infty$, $L^\infty(X, \mu)$ é o conjunto de todas funções f definidas em X, mensuravéis, tais que $\|f\|_\infty < \infty$, em que

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \text{ess}\, |f(x)| = \inf \{ B > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > B\}) = 0 \}.$$

Observação 1.1.2

- *Duas funções em L^p são consideradas iguais se elas são iguais q.t.p.*

- *Os espaços L^p são espaços de Banach.*

A seguir definimos a função distribuição de uma função mensurável.

Definição 1.1.3 *Seja f uma função definida em X, mensurável. A função distribução de f é a função $\lambda_f : [0,\infty) \to [0,\infty]$, definida por*

$$\lambda_f(s) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s\}\right). \tag{1.2}$$

Exemplo 1.1.4 *Seja f uma função simples positiva definida em X, ou seja,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

onde $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ e $E_i = \{x \in X : f(x) = a_i\}$, $i = 1, \dots, n$, são disjuntos dois a dois.

Então, a função distribuição de f, é dada por

$$\lambda_f(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i)}(s),$$

onde $C_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, $1 \leq i \leq n$, *e* $C_0 = 0$, *com* $a_0 = \infty$ *e* $a_{n+1} = 0$.

De fato,

Se $a_1 \leq s$, *então* $\{x \in X : |f(x)| > s\} = \emptyset$ *e assim* $\lambda_f(s) = 0$.

Se $a_2 \leq s < a_1$, *então* $\{x \in X : |f(x)| > s\} = E_1$ *e assim* $\lambda_f(s) = \mu(E_1)$.

Se $a_3 \leq s < a_2$, *então* $\{x \in X : |f(x)| > s\} = E_1 \cup E_2$ *e assim* $\lambda_f(s) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

$\vdots$

Se $0 \leq s < a_n$, *então* $\{x \in X : |f(x)| > s\} = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ *e, portanto,* $\lambda_f(s) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$.

Daí, podemos escrever

$$\lambda_f(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i)}(s),$$

onde $C_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, *se* $1 \leq i \leq n$, *e* $C_0 = 0$, *com* $a_0 = \infty$ *e* $a_{n+1} = 0$.

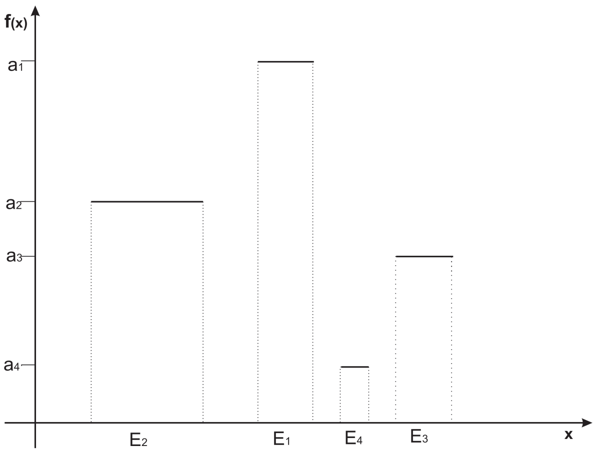

Figura 1.1: Função simples

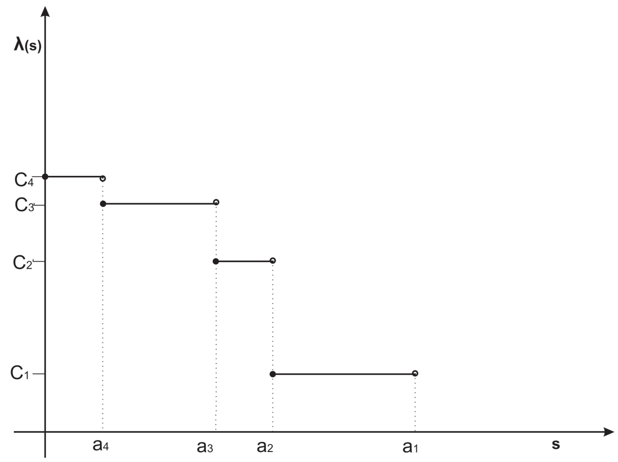

Figura 1.2: Função distribução

O próximo resultado nos fornece propriedades da função distribução, que serão frequentemente usadas nesta dissertação.

Teorema 1.1.5 *Sejam f, g funções mensuráveis definidas em X, então*

1. λ_f *é não-crescente e contínua à direita em* $[0, \infty)$.

2. *Se* $|f| \leq |g|$, *então* $\lambda_f \leq \lambda_g$.

3. *Se* $\{|f_n|\}$ *é uma sequência de funções que cresce para* $|f|$, *então* λ_{f_n} *cresce para* λ_f.

4. $\lambda_{\alpha f}(s) = \lambda_f\left(\frac{s}{|\alpha|}\right)$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5. $\lambda_{f+g}(s_1 + s_2) \leq \lambda_f(s_1) + \lambda_g(s_2)$.

Demonstração:

1. Sejam $0 \leq s_1 < s_2$. Considere os conjuntos

$$E_1 = \{x \in X : |f(x)| > s_1\} \text{ e } E_2 = \{x \in X : |f(x)| > s_2\}.$$

Então $E_2 \subset E_1$, pois se $x \in E_2$, temos $|f(x)| > s_2$ e, como $s_2 > s_1$, segue que $|f(x)| > s_1$, ou seja, $x \in E_1$.

Logo, pela monotonia da medida μ, temos $\mu(E_2) \leq \mu(E1)$.
Além disso,

$$\lambda_f(s_i) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s_i\}\right) = \mu(E_i), \text{ para } i = 1, 2.$$

Como $\mu(E_2) \leq \mu(E1)$, temos $\lambda_f(s_2) \leq \lambda_f(s_1)$.
Portanto, λ_f é não-crescente.

Sejam $s \in [0, +\infty)$ e $\{\varepsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, +\infty)$ uma sequência que decresce para 0.
Considere os conjuntos

$$E_0 = \{x \in X : |f(x)| > s\} \quad \text{e} \quad E_n = \{x \in X : |f(x)| > s + \varepsilon_n\}, \text{ onde } n \in \mathbb{N}.$$

Assim, $E_n \subset E_0$, pois se $x \in E_n$, então $|f(x)| > s + \varepsilon_n$ e, como $s + \varepsilon_n > s$, logo $|f(x)| > s$, ou seja, $x \in E_0$.
Além disso,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E_0. \tag{1.3}$$

De fato, como $E_n \subset E_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset E_0$.
Para verificar a inclusão contrária, seja $x \in E_0$, então, $|f(x)| > s$. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > s + \varepsilon_{n_0}$ e como $\varepsilon_{n_0} > \varepsilon_{n_0+1}$, temos $|f(x)| > s + \varepsilon_{n_0+1}$, logo $x \in E_{n_0+1}$, ou seja, $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
Assim a igualdade (1.3) se verifica.
Pelas propriedades da medida μ, como $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, temos

$$\lim_{n \to \infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Como $\mu(E_n) = \lambda_f(s + \varepsilon_n)$ e $\mu\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(E_0) = \lambda_f(s)$, segue que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_f(s + \varepsilon_n) = \lambda_f(s).$$

Portanto, λ_f é continua à direita em $[0, \infty)$.

2. Seja $s \in [0, \infty)$. Considere os conjuntos

$$A = \{x \in X : |f(x)| > s\} \text{ e } B = \{x \in X : |g(x)| > s\}.$$

Então $A \subset B$, pois se $x \in A$, segue que $|f(x)| > s$. Como pela hipótese $|f| \leq |g|$, então $|g(x)| > s$, ou seja $x \in B$.

Assim, pela monotonia da medida μ temos $\mu(A) \leq \mu(B)$ e, como

$$\lambda_f(s) = \{x \in X : |f(x)| > s\} = \mu(A) \quad \text{e} \quad \lambda_g(s) = \{x \in X : |g(x)| > s\} = \mu(B),$$

obtemos $\lambda_f(s) \leq \lambda_g(s), \quad \forall\, s \in [0, \infty)$.
Portanto $\lambda_f \leq \lambda_g$.

3. Como $\{|f_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente que converge para $|f|$, então $|f_n| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Seja $s \in [0, \infty)$ e considere os conjuntos

$$F_0 = \{x \in X : |f(x)| > s\} \quad \text{e} \quad F_n = \{x \in X : |f_n(x)| > s\}, \quad \text{onde } n \in \mathbb{N}.$$

   Assim $F_n \subset F_0$, pois se $x \in F_n$, então $|f_n(x)| > s$. Como $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ segue que $|f(x)| > s$, ou seja, $x \in F_0$.

   Além disso,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = F_0. \tag{1.4}$$

   De fato, como $F_n \subset F_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset F_0$.

   Para verificar a inclusão contrária, seja $x \in F_0$, então $|f(x)| > s$. Como $|f_n| \to |f|$ de forma crescente, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x)| > |f_{n_0}(x)| \geq s$, e assim,

$$|f(x)| > |f_{n_0+1}(x)| > |f_{n_0}(x)| \geq s,$$

   logo $x \in F_{n_0+1}$, ou seja, $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Assim a igualdade (1.4) se verifica.

   Pelas propriedades da medida μ, como $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente, temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right).$$

   Uma vez que $\mu(F_n) = \lambda_{f_n}(s)$ e $\mu\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \mu(F) = \lambda_f(s)$, segue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \lambda_{f_n}(s) = \lambda_f(s)$.

Além disso, como $F_n \subset F_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lambda_{f_n}(s) = \mu(F_n) \leq \mu(F_{n+1}) = \lambda_{f_{n+1}}(s), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, $\lambda_{f_n} \to \lambda_f$ de forma crescente quando $n \to \infty$.

4. Seja $s \in [0, \infty)$, e $\alpha \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha f}(s) &= \mu\left(\{x \in X : |\alpha f(x)| > s\}\right) \\ &= \mu\left(\{x \in X : |\alpha||f(x)| > s\}\right) \\ &= \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \frac{s}{|\alpha|}\right\}\right) \\ &= \lambda_f\left(\frac{s}{|\alpha|}\right). \end{aligned}$$

Portanto $\lambda_{\alpha f}(s) = \lambda_f\left(\frac{s}{|\alpha|}\right), \quad \forall\, \alpha \neq 0.$

5. Sejam $s_1, s_2 \in [0, \infty)$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{x \in X : |f(x)| > s_1\}, \\ B &= \{x \in X : |g(x)| > s_2\} \quad \text{e} \\ S &= \{x \in X : |f(x) + g(x)| > s_1 + s_2\}. \end{aligned}$$

Logo, $S \subset A \cup B$.
De fato, seja $x \in S$, então $|f(x) + g(x)| > s_1 + s_2$. Daí, segue que

$$s_1 + s_2 < |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|. \tag{1.5}$$

Assim, temos $x \in A$ ou $x \in B$, pois caso contrario, teríamos $x \notin A$ e $x \notin B$, ou seja $|f(x)| \leq s_1$ e $|g(x)| \leq s_2$ e assim

$$|f(x)| + |g(x)| \leq s_1 + s_2,$$

o que contradiz a desigualdade (1.5). Portanto, $x \in A \cup B$.
Pelas propriedades da medida μ, tem-se

$$\mu(S) \leq \mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Como $\lambda_{f+g}(s_1 + s_2) = \mu(S)$, $\lambda_f(s_1) = \mu(A)$ e $\lambda_g(s_2) = \mu(B)$, temos

$$\lambda_{f+g}(s_1 + s_2) \leq \lambda_f(s_1) + \lambda_g(s_2).$$

■

O próximo resultado fornece uma importante caracterização da norma L^p em termos da função distribuição.

Proposição 1.1.6 *Sejam $0 < p < \infty$ e $f \in L^p(X,\mu)$. Então*

$$\|f\|_p^p = p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_f(s)ds. \tag{1.6}$$

Demonstração: Pelo teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
p\int_0^\infty s^{p-1}\lambda_f(s)\,ds &= p\int_0^\infty s^{p-1}\int_X \mathcal{X}_{\{x\in X:|f(x)|>s\}}(x)\,d\mu\,ds \\
&= \int_X\int_0^\infty p\,s^{p-1}\mathcal{X}_{\{x\in X:|f(x)|>s\}}(x)\,ds\,d\mu \\
&= \int_X\int_0^{|f(x)|} p\,s^{p-1}\,ds\,d\mu \\
&= \int_X |f(x)|^p\,d\mu \\
&= \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

■

Definição 1.1.7 *Seja $0 < p < \infty$. O espaço L^p-fraco, denotado por $L^{p,\infty}(X,\mu)$, é o conjunto de todas funções f definidas em X, mensuráveis, tais que $[\,f\,]_p < \infty$, em que*

$$[f]_p = \left(\sup_{s>0} s^p\lambda_f(s)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Para $p = \infty$, L^p-fraco é por definição o espaço de Lebesgue L^∞.

Observação 1.1.8 *$[\,\cdot\,]_p$ não é uma norma, pois a propriedade da desigualdade triangular não é válida. Porém vale a seguinte desigualdade triangular modificada: $[f+g]_p \le 2^{1+\frac{1}{p}}\left(\max\{[f]_p,[g]_p\}\right)$.*

De fato, sejam $f, g \in L^{p,\infty}$, pelo Teorema 1.1.5, item 5, temos $\lambda_{f+g}(\frac{s}{2}+\frac{s}{2}) \le \lambda_f(\frac{s}{2}) + \lambda_g(\frac{s}{2})$. Assim,

$$\begin{aligned}
[f+g]_p^p &= \sup_{s>0} s^p\,\lambda_{f+g}(s) \\
&\le \sup_{s>0} s^p\left(\lambda_f\left(\frac{s}{2}\right)+\lambda_g\left(\frac{s}{2}\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{s>0} s^p \lambda_f \left(\frac{s}{2}\right) + \sup_{s>0} s^p \lambda_g \left(\frac{s}{2}\right) \\
&= 2^p \sup_{s>0} \left(\frac{s}{2}\right)^p \lambda_f \left(\frac{s}{2}\right) + 2^p \sup_{s>0} \left(\frac{s}{2}\right)^p \lambda_g \left(\frac{s}{2}\right) \\
&= 2^p \left([f]_p^p + [g]_p^p\right) \\
&\leq 2^p \left(2 \max\{[f]_p^p, [g]_p^p\}\right) \\
&= 2^{p+1} \left(\max\{[f]_p^p, [g]_p^p\}\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
[f+g]_p &\leq 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\max\{[f]_p^p, [g]_p^p\}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{1+\frac{1}{p}} \left(\max\{[f]_p, [g]_p\}\right).
\end{aligned}$$

Observe ainda que se $f \in L^{p,\infty}$, então

$$\begin{aligned}
[f]_p = 0 &\Leftrightarrow \sup_{s>0} s\, \lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} = 0 \\
&\Leftrightarrow s\, \lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} = 0, \quad \forall\ s > 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_f(s) = 0, \quad \forall\ s > 0 \\
&\Leftrightarrow \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s\}\right) = 0, \quad \forall\ s > 0 \\
&\Leftrightarrow f = 0 \ q.t.p.
\end{aligned}$$

Além disso, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in L^{p,\infty}$, então

- *para $\alpha = 0$, tem-se*

$$[\alpha f]_p = \sup_{s>0} s\, \lambda_{\alpha f}(s)^{\frac{1}{p}} = 0 = |\alpha| [f]_p.$$

- *para $\alpha \neq 0$, pelo Teorema 1.1.5, item 4 tem-se $\lambda_{\alpha f}(s) = \lambda_f \left(\frac{s}{|\alpha|}\right)$. Assim,*

$$\begin{aligned}
[\alpha f]_p &= \sup_{s>0} s\, \lambda_{\alpha f}(s)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{s>0} s\, \lambda_f \left(\frac{s}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| \sup_{s>0} \frac{s}{|\alpha|}\, \lambda_f \left(\frac{s}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\alpha| [f]_p.
\end{aligned}$$

Portanto, $[\,.\,]_p : L^{p,\infty} \to \mathbb{R}$ é uma quase norma, para $0 < p < \infty$.

O resultado a seguir será útil para mostrar que os espaços L^p- fraco são maiores do que os espaços de Lebesgue L^p. Sua demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [8].

Proposição 1.1.9 (Desigualdade de Chebyshev) *Sejam $0 < p < \infty$, $f \in L^p(X,\mu)$ e $s > 0$, então*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s\}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{s}\right)^p.$$

Proposição 1.1.10 *Sejam $0 < p < \infty$, $f \in L^p(X,\mu)$ e $s > 0$, então $f \in L^{p,\infty}$. Além disso,*

$$[\,f\,]_p \leq \|f\|_p.$$

Demonstração: Seja $s > 0$, pela Desigualdade de Chebyshev, tem-se

$$\lambda_f(s) = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s\}\right) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{s}\right)^p,$$

ou seja,

$$\lambda_f(s) \leq \frac{\|f\|_p^p}{s^p}.$$

Assim,

$$\sup_{s>0} s\,\lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p.$$

Portanto,

$$[\,f\,]_p \leq \|f\|_p.$$

■

Observação 1.1.11 $L^p \subsetneq L^{p,\infty}$.

De fato, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$, com $0 < p < \infty$ e μ a medida de Lebesgue.
Como

$$\begin{aligned}
\lambda_f(s) &= \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| > s\}\right) \\
&= \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |x|^{-\frac{1}{p}} > s\}\right) \\
&= \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |x|^{-1} > s^p\}\right) \\
&= \mu\left(\{x \in \mathbb{R} : |x| < s^{-p}\}\right) \\
&= 2s^{-p}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
[f]_p &= \sup_{s>0} s\,\lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{s>0} s\left(2\,s^{-p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= 2^{\frac{1}{p}} < \infty.
\end{aligned}$$

Assim, $f \in L^{p,\infty}$.
Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} \left| |x|^{\frac{-1}{p}} \right|^p d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|}\, d\mu \\
&= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{x}\, d\mu = \infty.
\end{aligned}$$

Assim, $f \notin L^p$.

1.2 As Funções Rearranjo e Duplo Rearranjo

O objetivo desta seção é introduzir as funções rearranjo e duplo rearranjo e apresentar algumas de suas propriedades, que serão de grande importância no decorrer deste trabalho.

Definição 1.2.1 *Seja f uma função definida em X, mensurável. A função rearranjo de f é a função $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty]$ definida por*

$$f^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}. \tag{1.8}$$

Vamos usar a convenção $\inf \emptyset = \infty$. Assim, se $\lambda_f(s) > t$, para todo $s \geq 0$, então $f^*(t) = \infty$.

Exemplo 1.2.2 *Considere f, função simples positiva, como no Exemplo 1.1.4, ou seja,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

em que $a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} = 0$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ são disjuntos dois a dois.

Vamos calcular o rearranjo f^* de f.

Como podemos ver no Exemplo 1.1.4, a função distribuição de f é dada por

$$\lambda_f(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1},a_i)}(s),$$

com $C_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, *se* $i \in \{1, ..., n\}$, $C_0 = 0$, $a_0 = \infty$ *e* $a_{n+1} = 0$.

Observe que, $f^*(t) = 0$ *quando* $t \geq C_n$. *Além disso, para* $C_{n-1} \leq t < C_n$, *o menor* $s > 0$ *tal que* $\lambda_f(s) \leq t$ *é* a_n. *Analogamente, para* $C_{n-2} \leq t < C_{n-1}$, *o menor* $s > 0$ *tal que* $\lambda_f(s) \leq t$ *é* a_{n-1}. *Continuando com o mesmo raciocínio, podemos concluir que*

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{[C_{i-1},C_i)}(t).$$

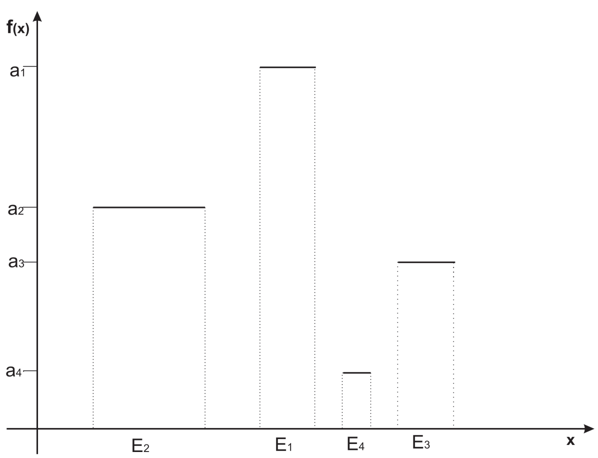

Figura 1.3: Função simples

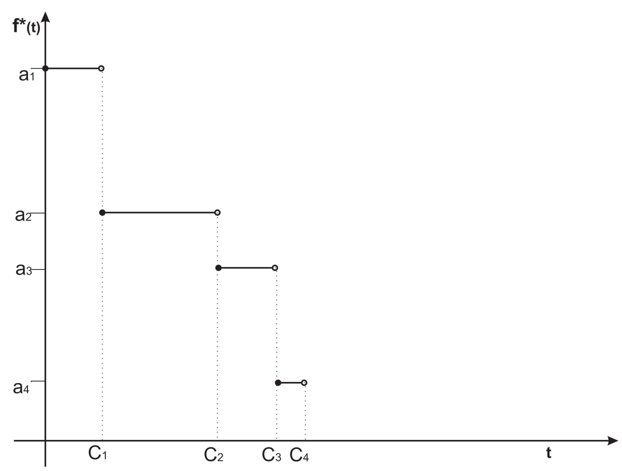

Figura 1.4: Função rearranjo

Proposição 1.2.3 *Seja f uma função definida em X, mensurável. Valem as seguintes propriedades:*

1. $f^*(\lambda_f(s)) \leq s, \ \forall\, s > 0,$ *e* $\lambda_f(f^*(t)) \leq t, \ \forall\, t > 0.$

2. $f^*(t) > s$ *se, e somente se,* $t < \lambda_f(s)$.

Demonstração:

1. Seja $s > 0$, considere o conjunto $A = \{u > 0 : \lambda_f(u) \leq \lambda_f(s)\}$, então $s \in A$. Como $f^*(\lambda_f(s)) = \inf A$, tem-se $f^*(\lambda_f(s)) \leq s$.

Por outro lado, seja $t > 0$ e considere o conjunto

$$B = \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}.$$

Uma vez que $f^*(t) = \inf B$, considere $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tal que s_n converge para $f^*(t)$ de forma não-crescente.

Como $\lambda_f(s_n) \leq t$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, e pelo Teorema 1.1.5, item 1, tem-se que λ_f é contínua à direita, então $\lambda_f(f^*(t)) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_f(s_n) \leq t$.

2. Suponha que $s < f^*(t)$. Considere o conjunto $A = \{u > 0 : \lambda_f(u) \leq t\}$, então $s \notin A$, pois se $s \in A$, tem-se $f^*(t) = \inf A \leq s$ o que é um absurdo. Como $s \notin A$, então $\lambda_f(s) > t$.

   Reciprocamente, suponha por absurdo que $f^*(t) \leq s$. Como λ_f é não-crescente, temos
   $$\lambda_f(s) \leq \lambda_f(f^*(t)).$$

   Pelo item anterior, $\lambda_f(f^*(t)) \leq t$. Logo, $\lambda_f(s) \leq t$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $f^*(t) > s$.

■

Proposição 1.2.4 *Seja f uma função definida em X, mensurável, então*

$$\|f\|_\infty = f^*(0).$$

Demonstração: Pela definição da função rearranjo de f, tem-se

$$\begin{aligned}
f^*(0) &= \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq 0\} \\
&= \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) = 0\} \\
&= \inf\{s > 0 : \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > s\}\right) = 0\} \\
&= \sup_{x\in X} \operatorname{ess} |f(x)| \\
&= \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.5 *Sejam f_n, f, g funções definidas em X, mensuráveis. Então:*

1. *f^* é não-crescente.*

2. *Se $|f| \leq |g|$, então $f^* \leq g^*$.*

3. *Se $|f_n|$ cresce para $|f|$, então f_n^* cresce para f^*.*

4. $(\alpha f)^* = |\alpha| f^*, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

5. $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2), \quad \forall\, t_1, t_2 > 0$.

6. f^* *é continua à direita em* $[0, \infty)$.

Demonstração:

1. Sejam $t_1 < t_2$. Considere os conjuntos

$$A = \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t_1\} \text{ e } B = \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t_2\}.$$

Então $A \subset B$, pois se $s \in A$, tem-se $\lambda_f(s) \leq t_1$ e como $t_1 \leq t_2$, então $\lambda_f(s) \leq t_2$, ou seja, $s \in B$.

Daí, $\inf B \leq \inf A$, ou seja, $f^*(t_2) \leq f^*(t_1)$.

Portanto, f^* é não-crescente.

2. Como $|f| \leq |g|$, pelo Teorema 1.1.5, item 2, temos $\lambda_f \leq \lambda_g$. Considere os conjuntos

$$A = \{u > 0 : \lambda_f(u) \leq t\} \text{ e } B = \{u > 0 : \lambda_g(u) \leq t\}.$$

Então $B \subset A$, pois se $s \in B$, tem-se $\lambda_g(s) \leq t$ e como $\lambda_f \leq \lambda_g$, segue que $\lambda_f(s) \leq t$, ou seja, $s \in A$. Assim, segue que $\inf A \leq \inf B$.

Portanto, $\quad f^* \leq g^*$.

3. Como $|f_n| \leq |f_{n+1}| \leq |f|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pelo item 2, temos

$$f_n^* \leq f_{n+1}^* \leq f^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Note que se $h = \lim\limits_{n \to \infty} f_n^*$, então $h \leq f^*$.

Por outro lado, se $t > 0$, como $f_n^*(t) \leq h(t)$ e λ_{f_n} é uma função não-crescente, temos $\lambda_{f_n}(h(t)) \leq \lambda_{f_n}(f_n^*(t))$.

Pela Proposição 1.2.3, item 1, temos $\lambda_{f_n}(h(t)) \leq \lambda_{f_n}(f_n^*(t)) \leq t$. Além disso, pelo Teorema 1.1.5, item 3, segue que $\quad \lambda_f(h(t)) \leq t$.

Assim, $h(t) \in \{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\}$, então $f^*(t) \leq h(t)$, $\forall\, t > 0$.
Portanto,
$$f^* = h = \lim_{n \to \infty} f_n^*.$$

4. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$.

   - Para $\alpha = 0$, tem-se

$$(\alpha f)^*(t) = \inf\{u > 0 : \lambda_{\alpha f}(u) \leq t\} = 0 = |\alpha| f^*(t).$$

- Para $\alpha \neq 0$, pelo Teorema 1.1.5, item 4, tem-se $\lambda_{\alpha f}(u) = \lambda_f\left(\frac{u}{|\alpha|}\right)$. Assim,

$$\begin{aligned}
(\alpha f)^*(t) &= \inf\{u > 0 : \lambda_{\alpha f}(u) \leq t\} \\
&= \inf\left\{u > 0 : \lambda_f\left(\frac{u}{|\alpha|}\right) \leq t\right\} \\
&= |\alpha| \inf\left\{\frac{u}{|\alpha|} > 0 : \lambda_f\left(\frac{u}{|\alpha|}\right) \leq t\right\} \\
&= |\alpha| f^*(t).
\end{aligned}$$

5. Sejam $t_1, t_2 > 0$. Considere os conjuntos

$$\begin{aligned}
A &= \{s_1 > 0 : \lambda_f(s_1) \leq t_1\}, \\
B &= \{s_2 > 0 : \lambda_g(s_2) \leq t_2\} \text{ e} \\
S &= \{s > 0 : \lambda_{f+g}(s) \leq t_1 + t_2\}.
\end{aligned}$$

Então $A + B \subset S$, pois se $s \in A + B$, então $s = s_1 + s_2$, em que $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$, ou seja,

$$\lambda_f(s_1) \leq t_1 \text{ e } \lambda_f(s_2) \leq t_2.$$

Assim, pelo Teorema 1.1.5, item 5, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_{f+g}(s) &= \lambda_{f+g}(s_1 + s_2) \\
&\leq \lambda_f(s_1) + \lambda_g(s_2) \\
&\leq t_1 + t_2,
\end{aligned}$$

ou seja, $s \in S$.

Agora, para todo $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$, temos

$$(f+g)^*(t_1 + t_2) = \inf S \leq s_1 + s_2.$$

Tomando-se o ínfimo sobre todos os $s_1 \in A$ e $s_2 \in B$, segue que $(f+g)^*(t_1+t_2) \leq f^*(t_1) + g^*(t_2)$.

6. Seja $t_0 \in [0, \infty)$. Se $f^*(t_0) = 0$, como f^* é não-crescente, temos $f^*(t) \leq f^*(t_0)$, $\forall\, t \geq t_0$, logo $f^*(t) = 0$, $\forall\, t \geq t_0$.
Assim, f^* é continua à direita em t_0.

Agora, se $f^*(t_0) > 0$, tome $\varepsilon > 0$ tal que $0 < \varepsilon < f^*(t_0)$. Seja $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ uma sequência decrescente tal que $t_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Como $f^*(t_0) > f^*(t_0) - \varepsilon$, então pela Proposição 1.2.3, item 2, temos $t_0 < \lambda_f(f^*(t_0) - \varepsilon)$.

Como $t_n \to 0$, e $a = \lambda_f(f^*(t_0) - \varepsilon) - t_0 > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, segue que

$$t_n < \lambda_f(f^*(t_0) - \varepsilon) - t_0.$$

ou seja, $t_0 + t_n < \lambda_f(f^*(t_0) - \varepsilon)$.

Então, pela Proposição 1.2.3, item 2, temos

$$f^*(t_0 + t_n) > f^*(t_0) - \varepsilon.$$

Assim, $|f^*(t_0 + t_n) - f^*(t_0)| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$, logo f é continua à direita em t_0.

■

Lema 1.2.6 *Seja f é uma função definida em X, mensurável. A função f^* é o rearranjo de f se, e somente se*

$$f^*(t) = m\left(\{s > 0 : \lambda_f(s) > t\}\right), \tag{1.9}$$

em que m denota a medida de Lebesgue.

Demonstração: Pelo Teorema 1.1.5, item 2, temos que λ_f é não-crescente. Assim,

$$\sup\{s > 0 : \lambda_f(s) > t\} = m\left(\{s > 0 : \lambda_f(s) > t\}\right).$$

Então, usando a definição de λ_f, segue que

$$\begin{aligned} f^*(t) &= \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\} \\ &= \sup\{s > 0 : \lambda_f(s) > t\} \\ &= m\left(\{s > 0 : \lambda_f(s) > t\}\right). \end{aligned}$$

■

Lema 1.2.7 *Sejam f uma função definida em X, mensurável, e $E \neq \emptyset$ um conjunto mensurável, então*

$$\left(f\mathcal{X}_E\right)^*(t) \leq f^*(t)\, \mathcal{X}_{[0,\mu(E)]}(t), \quad \forall\ t > 0. \tag{1.10}$$

Demonstração: Como $(f\mathcal{X}_E)(x) \leq f(x)$, $\forall\ x \in X$, pelo Teorema 1.1.5, item 2,

$$\lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(s) \leq \lambda_f(s), \quad \text{para todo } s > 0.$$

Considere os conjuntos,

$$A = \{s > 0 : \lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(s) > t\} \ \text{ e } \ B = \{s > 0 : \lambda_f(s) > t\}.$$

Assim, $A \subset B$, pois se $s \in A$, temos $\lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(s) > t$ e, como $\lambda_f(s) \geq \lambda_{(f\mathcal{X}_E)}(s) > t$, segue que $\lambda_f(s) > t$, ou seja, $s \in B$.

Pela monotonia da medida temos $m(A) \leq m(B)$. Usando o Lema 1.2.6, obtemos $(f\mathcal{X}_E)^*(t) = m(A)$ e $f^*(t) = m(B)$. Assim,

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) \leq f^*(t).$$

Além disso, se $t \in [0, \mu(E)]$, então

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) \leq f^*(t) = f^*(t)\mathcal{X}_{[0,\mu(E)]}(t).$$

Agora, se $t > \mu(E)$, uma vez que

$$\lambda_{f\mathcal{X}_E}(s) = \mu\left(\{x \in X : |(f\mathcal{X}_E)(x)| > s\}\right) \leq \mu(E),$$

segue que

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) = \inf\{s > 0 : \lambda_{f\mathcal{X}_E}(s) \leq t\} = 0,$$

ou seja,

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) = 0 = f^*(t)\mathcal{X}_{[0,\mu(E)]}(t).$$

Portanto,

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) \leq f^*(t)\mathcal{X}_{[0,\mu(E)]}(t), \quad \forall\ t > 0.$$

■

Lema 1.2.8 *Se f é uma função definida em X, mensurável, então*

$$\int_X |f(x)|d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(s)\,ds, \tag{1.11}$$

$$\int_X |f(x)|d\mu = \int_0^\infty f^*(t)\,dt, \tag{1.12}$$

$$\sup_{s>0} s\,\lambda_f(s) = \sup_{t>0} t\,f^*(t). \tag{1.13}$$

Demonstração: Se f é uma função simples positiva

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

em que $a_1 > \cdots > a_n > 0$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ são dois a dois disjuntos, então, pelo Exemplo 1.1.4, temos

$$\lambda_f(s) = \sum_{i=1}^{n} C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1},a_i)}(s),$$

com $C_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, se $i = 1, ..., n$, $C_0 = 0$, e $a_{n+1} = 0$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)|\, d\mu &= \int_X \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x)\, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_X a_i \mathcal{X}_{E_i}(x)\, d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \\
&= a_1\mu(E_1) + a_2\mu(E_2) + \cdots + a_n\mu(E_n) \\
&= a_1C_1 + a_2(C_2 - C_1) + \cdots + a_n(C_n - C_{n+1}) \\
&= C_1(a_1 - a_2) + C_2(a_2 - a_3) + \cdots + C_n(a_n - a_{n+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} C_i(a_i - a_{i+1}). \qquad (1.14)
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda_f(s)\, ds &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i)}(s)\, ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_0^\infty C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i)}(s)\, ds \\
&= \sum_{i=1}^{n} C_i(a_i - a_{i+1}). \qquad (1.15)
\end{aligned}$$

De (1.14) e (1.15), temos

$$\int_X |f(x)|\, d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(s)\, ds. \qquad (1.16)$$

Agora, pelo Exemplo 1.2.2, temos

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1}, C_i)}(t).$$

Daí,

$$\int_0^\infty f^*(t)\, dt = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1}, C_i)}(t)\, dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} a_i(C_i - C_{i-1}) \\
&= a_1(C_1 - C_0) + a_2(C_2 - C_1) + \cdots + a_n(C_n - C_{n-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(Ei) \\
&= \int_X |f(x)|\, d\mu. \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$\sup_{s>0} s\,\lambda_f(s) = \sup_{1\leq i\leq n} a_i C_i = \sup_{t>0} t\, f^*(t). \qquad (1.18)$$

Agora se f é uma função mensurável qualquer, então existe uma sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções simples, não negativas, tal que $f_n \leq f_{n+1}$ e $f_n(x) \to f(x)$, quando $n \to \infty$, $\forall x \in X$. Considere $\varphi_n(s) = \lambda_{f_n}(s)$, para todo $s > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência não negativa de funções simples e, pelo Teorema 1.1.5, item 3, tem-se $\varphi_n(s) \leq \varphi_{n+1}(s)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $s > 0$, e

$$\varphi_n(s) \longrightarrow \lambda_f(s), \text{ quando } n \to \infty. \qquad (1.19)$$

Além disso, se $\psi_n(t) = f_n^*(t)$, para todo $t > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções simples não negativas, pelo Teorema 1.2.5 e, item 3, temos $\psi_n(t) \leq \psi_{n+1}(t)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $t > 0$ e

$$\psi_n(t) \longrightarrow f^*(t), \text{ quando } n \to \infty. \qquad (1.20)$$

E pelo Teorema da Convergência Monótona, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\int_X |f(x)|\, d\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X |\ f_n(x)\ |\ d\mu, \\
\int_0^\infty \lambda_f(s)\, ds &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \varphi_n(s)\, ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \lambda_{f_n}(s)\, ds
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f^*(t)\, dt &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \psi_n(s)\, ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n^*(t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Logo, de (1.16) e (1.17), tem-se

$$\int_X |f_n(x)|\, d\mu = \int_0^\infty \lambda_{f_n}(s)\, ds, \quad \text{e} \quad \int_X |f_n(x)|\, d\mu = \int_0^\infty f_n^*(t)\, dt, \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Então,

$$\int_X |f(x)|\, d\mu = \int_0^\infty \lambda_f(s)\, ds \quad \text{e} \quad \int_X |f(x)|\, d\mu = \int_0^\infty f^*(t)\, dt.$$

Além disso, usando (1.18), (1.19) e (1.20), segue que

$$\sup_{s>0} s\, \lambda_f(s) = \sup_{t>0} t\, f^*(t).$$

■

Teorema 1.2.9 *Sejam $0 < p < \infty$ e f uma função definida em X, mensurável, então*

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty (f^*(t))^p\, dt, \tag{1.21}$$

$$\sup_{s>0} s\, \lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\, f^*(t). \tag{1.22}$$

Demonstração: Pela igualdade (1.12), do Lema 1.2.8, tem-se

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty (|f|^p)^*(t)\, dt.$$

Além disso, $(|f|^p)^*(t) = (f^*(t))^p$, pois

$$\begin{aligned}
(|f|^p)^*(t) &= \inf\{s > 0 : \lambda_{|f|^p}(s) \le t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \mu\left(\{x \in X : |f(x)|^p > s\}\right) \le t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \mu(\{x \in X : |f(x)| > s^{\frac{1}{p}}\}) \le t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \lambda_f(s^{\frac{1}{p}}) \le t\} \\
&= \left(\inf\{s^{\frac{1}{p}} > 0 : \lambda_f(s^{\frac{1}{p}}) \le t\}\right)^p \\
&= (f^*(t))^p\,.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_X |f(x)|^p d\mu = \int_0^\infty (|f|^p)^*(t)\, dt = \int_0^\infty (f^*(t))^p\; dt.$$

Agora, pela igualdade (1.13) do Lema 1.2.8, temos

$$\sup_{\tilde{s}>0} \tilde{s}\, \lambda_{|f|^p}(\tilde{s}) = \sup_{t>0}\; t\, (|f|^p)^*(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) &= \sup_{t>0} [\, t\,(f^*(t))^p\,]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{t>0} [\, t\,(|f|^p)^*(t)\,]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\tilde{s}>0} [\, \tilde{s}\,\lambda_{|f|^p}(\tilde{s})\,]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\tilde{s}>0} [\, \tilde{s}\,\lambda_f(\tilde{s}^{\frac{1}{p}})\,]^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{s>0} [\, s^p \lambda_f(s)\,]^{\frac{1}{p}}, \quad \text{onde} \quad s = \tilde{s}^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{s>0} s\lambda_f(s)^{\frac{1}{p}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sup_{s>0} s\lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} = \sup_{t>0} t\, f^*(t).$$

■

O Lema a seguir nos ajudará a provar a desigualdade de Hardy-Littlewood.

Lema 1.2.10 *Sejam f uma função definida em X, mensurável, $\varepsilon > 0$ e E um conjunto mensurável, com $\mu(E) \leq \varepsilon$. Então*

$$\int_E |f(x)|\, d\mu \leq \int_0^{\varepsilon} f^*(t)\, dt. \tag{1.23}$$

Demonstração: Pelo Lema 1.2.7, tem-se

$$(f\mathcal{X}_E)^*(t) \leq \left(f^*\mathcal{X}_{[0,\mu(E))}\right)(t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} (f\mathcal{X}_E)^*(t)\, dt &\leq \int_0^{\infty} \left(f^*\mathcal{X}_{[0,\mu(E))}\right)(t)\, dt \\
&= \int_0^{\mu(E)} f^*(t)\, dt \\
&\leq \int_0^{\varepsilon} f^*(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Da igualdade (1.12) do Lema 1.2.8, tem-se

$$\int_E |f(x)| d\mu = \int_X |f\mathcal{X}_E|(x)\, d\mu = \int_0^{\infty} (f\mathcal{X}_E)^*(t)\, dt.$$

Logo,

$$\int_E |f(x)|dx \leq \int_0^\varepsilon f^*(t)\, dt.$$

■

Teorema 1.2.11 (Desigualdade de Hardy-Littlewood) *Se f, g são funções definidas em X, mensuráveis, então*

$$\int_X |f(x)g(x)|\, d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)\, g^*(t)\, dt.$$

Demonstração: Se f é uma função simples e positiva, ou seja,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}(x),$$

em que $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$ e $\{E_i\}_{i=1}^n$ são dois a dois disjuntos, então, pelos Exemplos 1.1.4 e 1.2.2, tem-se

$$\begin{aligned} \lambda_f(s) &= \sum_{i=1}^n C_i \mathcal{X}_{[a_{i+1}, a_i)}(s) \quad \text{e} \\ f^*(t) &= \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1}, C_i)}(t), \end{aligned}$$

em que $C_i = \displaystyle\sum_{j=1}^i \mu(E_i),\ i = 1, \cdots, n,\quad C_0 = 0$ e $a_{n+1} = 0$.

Agora, se $F_i = \displaystyle\bigcup_{j=1}^i E_i,\ i = 1, \cdots, n$, e $b_i = a_i - a_{i+1}$, podemos reescrever f da seguinte forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{X}_{F_i}(x),$$

pois se $x_r \in E_r$, para algum $r \in \{1, \cdots, n\}$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i \mathcal{X}_{F_i}(x_r) &= \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \mathcal{X}_{\bigcup_{j=1}^i E_i}(x_r) \\ &= (a_r - a_{r+1}) + (a_{r+1} - a_{r+2}) + \cdots + (a_n - 0) \\ &= a_r \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{E_i}(x_r) \end{aligned}$$

$$= \quad f(x_r).$$

Por outro lado, usando o Lema 1.2.10, temos $\displaystyle\int_{F_i} |g(x)|\,d\mu \leq \int_0^{\mu(F_i)} g^*(t)\,dt$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu &= \int_X \left|\left(\sum_{i=1}^n b_i \mathcal{X}_{F_i}(x)\right) g(x)\right| d\mu \\
&= \int_X \left|\sum_{i=1}^n b_i g(x)\mathcal{X}_{F_i}(x)\right| d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^n \int_X |b_i g(x)\mathcal{X}_{F_i}(x)|\,d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^n b_i \int_{F_i} |g(x)|\,d\mu \\
&\leq \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i+1}) \int_0^{\mu(F_i)} g^*(t)\,dt \\
&= (a_1 - a_2)\int_0^{\mu(E_1)} g^*(t)dt + \cdots + (a_n - a_{n+1})\int_0^{\sum_{i=1}^n \mu(E_i)} g^*(t)\,dt \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \int_{C_{i-1}}^{C_i} g^*(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1},C_i)}(t) g^*(t)\,dt \\
&= \int_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_X |f(x)g(x)|\,d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt.$$

O caso geral, em que f é uma função mensurável qualquer, é obtido aplicando-se o Teorema da convergência Monótona, como na demonstração do Lema 1.2.8.

■

Agora, vamos definir a função duplo rearranjo de f e provar algumas de suas propriedades.

Definição 1.2.12 *Seja f uma função definida em X, mensurável. A função duplo rearranjo de f é a função $f^{**} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ definida por*

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\;ds. \tag{1.24}$$

A função f^{**} pode ser vista como a média da função f^*.
Observe que o duplo rearranjo não está definido em $t = 0$, no entanto

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+} f^{**}(t) &= f^*(0)\\ &= \inf\{\alpha > 0 : \lambda_f(\alpha) \leq 0\}\\ &= \sup_{x\geq 0}\text{ess}\,|f(x)|\\ &= \|f\|_\infty.\end{aligned}$$

A seguir destacaremos algumas propriedades do duplo rearranjo.

Proposição 1.2.13 *Se f é uma função definida em X, mensurável, então $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, para todo $t > 0$.*

Demonstração: Seja $t > 0$. Pelo Teorema 1.2.5, item 1, temos que f^* é não-crescente. Assim,

$$\begin{aligned}f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\\ &\geq \frac{1}{t}\int_0^t f^*(t)ds\\ &= \frac{1}{t}f^*(t)\int_0^t ds\\ &= f^*(t).\end{aligned}$$

Portanto, $f^*(t) \leq f^{**}(t), \quad \forall\, t > 0.$

■

Teorema 1.2.14 *Sejam f_n, $n = 1, 2, \ldots$, f e g funções definidas em X, mensuráveis, então valem as seguintes propriedades:*

1. *f^{**} é uma função não-crescente e contínua à direita em $(0, \infty)$.*

2. *Se $|\,f\,| \leq |\,g\,|$, então $f^{**} \leq g^{**}$.*

3. *Se $(|f_n|)$ cresce para $|f|$, então (f_n^{**}) cresce para f^{**}.*

4. *$(\alpha f)^{**} = |\alpha| f^{**}, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.*

Demonstração:

1. Considere $0 < t_1 < t_2$. Pelo Teorema 1.2.5, item 1, temos que f^* é não-crescente. Assim,

$$\begin{aligned}
f^{**}(t_2) &= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} f^*(s)ds \\
&= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\,ds + \frac{1}{t_2}\int_{t_1}^{t_2} f^*(s)\,ds \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\,ds + \frac{1}{t_2} f^*(t_1)(t_2 - t_1) \\
&= \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\,ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) t_1\, f^*(t_1) \\
&\leq \frac{1}{t_2}\int_0^{t_1} f^*(s)\; ds + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)\int_0^{t_1} f^*(s)\,ds \\
&= \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} f^*(s)\,ds \\
&= f^{**}(t_1).
\end{aligned}$$

   Portanto, f^{**} é não-crescente.

   Pelo Teorema 1.2.5, item 6, temos que f^* é continua à direita em $(0, \infty)$. Além disso, $\dfrac{1}{t}$ também é continua à direita em $(0, \infty)$, então

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds$$

   também o é.

2. Como $|f| \leq |g|$, pelo Teorema 1.2.3, item 2, temos $f^* \leq g^*$. Assim, para $t > 0$

$$\begin{aligned}
f^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \\
&\leq \frac{1}{t}\int_0^t g^*(t)ds \\
&= g^{**}(t).
\end{aligned}$$

   Portanto, $f^{**}(t) \leq g^{**}(t), \quad \forall\; t > 0$.

3. Como $(|f_n|)$ cresce para $|f|$, pelo Teorema 1.2.5, item 3, temos que (f_n^*) cresce para f^*, ou seja, $f_n^* \leq f_{n+1}^* \leq f^*$ e $f^* = \lim\limits_{n\to\infty} f_n^*$.

   Assim, uma vez que $f^* \in L^1(0, t)$, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos

$$f^{**}(t) \;=\; \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t}\int_0^t \lim_{n\to\infty} f_n^*(s)ds \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t f_n^*(s)\,ds \\
&= \lim_{n\to\infty} f_n^{**}(t).
\end{aligned}
$$

Além disso, como $|f_n| \leq |f_{n+1}|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então pelo item 2, temos $f_n^{**} \leq f_{n+1}^{**}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, f_n^{**} cresce para f^{**}.

4. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, pelo Teorema 1.2.5, item 4, temos que $(\alpha f)^*(t) = |\alpha| f^*$. Assim

$$
\begin{aligned}
(\alpha f)^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t (\alpha f)^*(s)ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t |\alpha|\, f^*(s)\,ds \\
&= |\alpha|\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds \\
&= |\alpha| f^{**}(t).
\end{aligned}
$$

Portanto, $(\alpha f)^{**}(t) = |\alpha| f^{**}(t), \quad \forall\ t > 0.$

■

O próximo resultado fornece uma nova caracterização da função duplo rearranjo. Sua demonstração pode ser encontrada em [11] e será omitida por fugir dos propósitos desse trabalho.

Lema 1.2.15 *Se f é uma função definida em X, mensurável, então*

$$
f^{**}(t) = \sup_{\mu(E)\geq t} \left\{ \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x)|\, dt \right\}. \tag{1.25}
$$

Teorema 1.2.16 *Se f, g são funções definidas em X, mensuráveis, e $t > 0$, então*

$$
(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t). \tag{1.26}
$$

Demonstração: Seja $t > 0$, pelo Lema 1.2.15, temos

$$
(f+g)^{**}(t) = \sup_{\mu(E)\geq t} \left\{ \frac{1}{\mu(E)} \int_E |f(x)+g(x)|\, dt \right\}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E (|f(x)|+|g(x)|)\,dt\right\}\\
&\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f(x)|\,dt\right\}+\sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |g(x)|\,dt\right\}\\
&= f^{**}(t)+g^{**}(t).
\end{aligned}$$

Portanto, $(f+g)^{**}(t)\leq f^{**}(t)+g^{**}(t)$.

■

1.3 Convergência em Medida

Nesta seção introduziremos um modo de convergência, conhecido como convergência em medida, que será utilizado para mostrar que os espaços de Lorentz (ver Capítulo 2) são completos.

Definição 1.3.1 *Sejam f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas em X, mensuráveis. A sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em medida para f se para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n > n_0$, tem-se*

$$\mu\left(\{\, x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}\right) < \varepsilon. \tag{1.27}$$

Definição 1.3.2 *Sejam f_n, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas em X, mensuráveis. A sequência $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em medida se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\forall n, m > n_0$, tem-se*

$$\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right) < \varepsilon. \tag{1.28}$$

Proposição 1.3.3 *Se $0 < p \leq \infty$ e $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^{(p,\infty)}$, então $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em medida.*

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$. Como $\{f_n\}$ é de Cauchy em $L^{p,\infty}$ e $\varepsilon^{\frac{1}{p}+1} > 0$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $\forall n, m > n_0$, tem-se

$$[f_n - f_m]_p = \sup_{s>0} s\,\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > s\}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}+1}.$$

Tomando $s = \varepsilon$, temos

$$\varepsilon\,\mu\left(\{x \in X : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}+1},$$

ou seja,

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$

Portanto, $\{f_n\}$, é de Cauchy em medida.

■

Teorema 1.3.4 *Sejam f, f_n, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas em X, mensuráveis. Se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge em medida para f, então existe $\{f_{n_k}\}$, subsequência de $\{f_n\}$, que converge para f q.t.p.*

Demonstração: Para todo $k = 1, 2, \ldots$ escolha n_k tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \tag{1.29}$$

e $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Considere os conjuntos

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f(x)| > 2^{-k}\}.$$

A desigualdade (1.29) implica que

$$\mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} 2^{-k} = 2^{1-m}, \tag{1.30}$$

para todo $m = 1, 2, \ldots$. De (1.30) segue que

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq 1 < \infty. \tag{1.31}$$

Note que, a sequência de conjuntos $\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right)_{m=1}^{\infty}$ é decrescente. Assim, usando (1.30) e (1.31), obtemos

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = \lim_{m\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0. \tag{1.32}$$

Para concluir a demonstração, note que o conjunto nulo em (1.32) contém o conjunto de todos os $x \in X$ para os quais $f_{n_k}(x)$ não converge para $f(x)$.

■

Teorema 1.3.5 *Sejam f_n, $n \in \mathbb{N}$, funções definidas em X, mensuráveis. Se $\{f_n\}$ é de Cauchy em medida, então existem $\{f_{n_k}\}$, subsequência de $\{f_n\}$, e f função definida em X, mensurável, tais que $f_{n_k} \to f$ q.t.p.*

Demonstração: A prova é semelhante a do Teorema 1.3.4. Para todo $k = 1, 2, \ldots$ escolha n_k tal que

$$\mu(\{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}) < 2^{-k} \tag{1.33}$$

e $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$. Agora, considere os conjuntos

$$A_k = \{x \in X : |f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)| > 2^{-k}\}.$$

Como mostrado na prova do Teorema 1.3.4, (1.33) implica que

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right) = 0. \tag{1.34}$$

Para $x \notin \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k$ e $i \geq j \geq j_0 \geq m$ (j_0 suficientemente grande) obtemos

$$|f_{n_i}(x) - f_{n_j}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} |f_{n_l}(x) - f_{n_{l+1}}(x)| \leq \sum_{l=j}^{i-1} 2^{-l} \leq \sum_{l=j}^{\infty} 2^{-l} = 2^{1-j} \leq 2^{1-j_0}.$$

Isto implica que a sequência $(f_{n_i}(x))_{i\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy para todo x no conjunto $\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} A_k\right)^c$ e, portanto, converge para todos esses x.

Defina a função

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{j\to\infty} f_{n_j}(x) & ,\text{se } x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \\ 0 & ,\text{se } x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k \end{cases}.$$

Então, $f_{n_j} \to f$ q.t.p.

■

Capítulo 2

Espaços de Lorentz

Neste capítulo, definimos espaços de funções relevantes para estudar o problema de Cauchy para a equação semilinear do calor. Na seção 2.1, apresentamos os espaços de Lorentz, introduzidos por George G. Lorentz em 1950 e mostramos algumas propriedades. Na seção 2.2, estudamos as versões generalizadas das desigualdades de Young e Hölder. Na seção 2.3, mostramos um teorema de aproximação da identidade em espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$. Na seção 2.4, apresentamos alguns conceitos sobre teoria de interpolação e mostramos o teorema de interpolação de Marcinkiewicz. Essas seções são baseadas em [2], [3], [6], [10], [12] e [13].

2.1 Espaços de Lorentz e Propriedades

Definição 2.1.1 (Espaço de Lorentz) *Sejam $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$. O espaço de Lorentz, $L^{(p,q)}$ é o conjunto de todas funções definidas em X, mensuráveis, tais que $\|f\|^*_{(p,q)} < \infty$, em que*

$$\|f\|^*_{(p,q)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}}, & se \quad 0 < p < \infty \quad e \quad 0 < q < \infty, \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t), & se \quad 0 < p \leq \infty \quad e \quad q = \infty. \end{cases}$$

Observação 2.1.2

- $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ *não é uma norma, pois a propriedade da desigualdade triangular não é válida. Porém, $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ é uma quase norma. Para mais detalhes veja, por exemplo, [12].*

- *Os espaços de Lorentz generalizam os espaços L^p-fraco e os espaços de Lebesgue L^p como veremos à seguir.*

Proposição 2.1.3

1. *Se $0 < p < \infty$, $q = \infty$, então $L^{(p,\infty)} = L^p-$fraco.*

2. *Se $p = q = \infty$, então $L^{(\infty,\infty)} = L^\infty$.*

3. *Se $0 < p = q \leq \infty$, então $L^{(p,p)} = L^p$.*

Demonstração:

1. Pela igualdade (1.13), do Lema 1.2.8 tem-se

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \sup_{s>0} s\lambda_f(s)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sup_{s>0} s^p \lambda_f(s)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= [f]_p.
\end{aligned}$$

2. Como f^* é não-crescente, pela Proposição 1.2.4, obtemos

$$\|f\|^*_{(\infty,\infty)} = \sup_{t>0} f^*(t) = f^*(0) = \|f\|_\infty.$$

3. Seja $0 < p = q < \infty$. Pela igualdade (1.12) do Lema 1.2.8, segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{(p,p)} &= \left(\int_0^\infty (f^*(t))^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_X |f(x)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f\|_p.
\end{aligned}$$

■

A seguir, calcularemos $\|f\|^*_{(p,q)}$, em que f é uma função simples.

Exemplo 2.1.4 *Sejam f uma função simples positiva e f^* o seu rearranjo, como no Exemplo 1.2.2, ou seja,*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{E_i}(x) \quad e$$

$$f^*(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1},C_i)}(t),$$

em que $a_1 > \cdots > a_n > a_{n+1} = 0$, $\{E_i\}_{i=1}^n$ *são dois a dois disjuntos,* $C_i = \sum_{j=1}^{i} \mu(E_j)$, *se* $i \in \{1, ..., n\}$, $C_0 = 0$ *e* $a_0 = 0$.

- *Suponha que* $0 < q < \infty$.

  Se $0 < p < \infty$, *tem-se*

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1},C_i)}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1},C_i)}(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left[a_1^q C_1^{\frac{q}{p}} + a_2^q \left(C_2^{\frac{q}{p}} - C_1^{\frac{q}{p}}\right) + \cdots + a_n^q \left(C_n^{\frac{q}{p}} - C_{n-1}^{\frac{q}{p}}\right)\right]^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

  Se $p = \infty$, *como* $a_n > 0$, *então*

$$\|f\|^*_{(\infty,q)} = \infty. \tag{2.1}$$

- *Agora, suponha que* $q = \infty$.

  Se $0 < p < \infty$, *tem-se*

$$\begin{aligned}
\|f\|^*_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1},C_i)}(t) \\
&= \sup_{1 \le i \le n} a_i C_i^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

  Se $p = \infty$, *temos*

$$\|f\|^*_{(\infty,\infty)} = \sup_{t>0} f^*(t)$$

$$\begin{aligned}
&= f^*(0) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{X}_{[C_{i-1},C_i)}(0) \\
&= a_1.
\end{aligned}$$

Observação 2.1.5 *Como conseqüência de (2.1), temos que $L^{(\infty,q)} = \{0\}$, para todo $0 < q < \infty$. De fato, se na representação de uma função simples f, pelo menos um dos $a_i's$ for positivo, então $\|f\|^*_{(\infty,q)} = \infty$. Isso permite concluir que as únicas funções simples com $\|\cdot\|_{(\infty,q)}$ finito são as funções nulas q.t.p.. Uma vez que toda função mensurável pode ser aproximada por funções simples, conclui-se que $L^{(\infty,q)} = \{0\}$, para todo $0 < q < \infty$.*

A seguir, veremos que os espaços de Lorentz tem a mesma relação de escala que os espaços L^p.

Proposição 2.1.6 *Sejam $0 < p, q \leq \infty$, $\alpha > 0$. Se $f \in L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$, então $f_\alpha \in L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$, onde $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$. Além disso,*

$$\|f_\alpha\|^*_{(p,q)} = \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|^*_{(p,q)}. \tag{2.2}$$

Demonstração: Seja m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Observe que,

$$\begin{aligned}
\lambda_{f_\alpha}(s) &= m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(\alpha\, x)| > s\}\right) \\
&= m\left(\{y\alpha^{-1} \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > s\}\right), \quad y = \alpha x \\
&= \alpha^{-n} m(\{y \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > s\}) \\
&= \alpha^{-n} \lambda_f(s).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(f_\alpha)^*(t) &= \inf\{s > 0 : \lambda_{f_\alpha}(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \alpha^{-n}\lambda_f(s) \leq t\} \\
&= \inf\{s > 0 : \lambda_f(s) \leq t\alpha^n\}, \\
&= f^*(\alpha^n\, t). \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

- Se $0 < q < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|^*_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f_\alpha)^*(t)\right]^q \, \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(\alpha^n\, t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|^*_{(p,q)}.
\end{aligned}
$$

- Se $q = \infty$, temos

$$
\begin{aligned}
\|f_\alpha\|^*_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f_\alpha)^*(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(\alpha^n\ t) \\
&= \sup_{t>0} (\alpha^{-n}\ t)^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|^*_{(p,\infty)}.
\end{aligned}
$$

■

O resultado a seguir permitirá munir o espaço de Lorentz de uma norma.

Lema 2.1.7 (Desigualdade de Hardy) *Sejam $1 \leq q < \infty$, $r > 0$ e f uma função definida em $(0, \infty)$, mensurável. Então, valem as seguintes desigualdades:*

$$
\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\ du \right)^q t^{-r-1}\ dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (u\ f(u))^q\ u^{-r-1}\ du \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{2.4}
$$

$$
\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(u)\ du \right)^q t^{r-1}\ dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq \frac{q}{r} \left(\int_0^\infty (u\ f(u))^q\ u^{r-1}\ du \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{2.5}
$$

Demonstração: Como a função $\varphi(x) = x^q$ é convexa em $(0, \infty)$, fazendo a mudança de variável $w = \dfrac{q}{r} u^{\frac{r}{q}}$, pela desigualdade de Jensen (ver [14]), tem-se

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(\int_0^t f(u)\ du \right) &= \left(\int_0^t f(u) u^{1-\frac{r}{q}} u^{\frac{r}{q}-1}\ du \right)^q \\
&= \left(\int_0^{\frac{q}{r} t^{\frac{r}{q}}} f\left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} w^{\frac{q}{r}} \right) \left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} w^{\frac{q}{r}} \right)^{1-\frac{r}{q}}\ dw \right)^q \\
&= \left(t^{\frac{r}{q}} \frac{q}{r} \right)^q \left(t^{-\frac{r}{q}} \frac{r}{q} \int_0^{\frac{q}{r} t^{\frac{r}{q}}} f\left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} w^{\frac{q}{r}} \right) \left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} w^{\frac{q}{r}} \right)^{1-\frac{r}{q}}\ dw \right)^q \\
&\leq \left(t^{\frac{r}{q}} \frac{q}{r} \right)^q \left(t^{-\frac{r}{q}} \frac{r}{q} \right) \int_0^{\frac{q}{r} t^{\frac{r}{q}}} \left[f\left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} w^{\frac{q}{r}} \right) \left(\left(\frac{r}{q} \right)^{\frac{q}{r}} w^{\frac{q}{r}} \right)^{1-\frac{r}{q}} \right]^q\ dw
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= t^{r-\frac{r}{q}}\left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^t (f(u))^q\, u^{q-r} u^{\frac{r}{q}-1}\, du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1} t^{r-\frac{r}{q}}\int_0^t (f(u))^q\, u^{q-r+\frac{r}{q}-1}\, du.
\end{aligned}$$

Agora, multiplica-se ambos os membros por t^{-r-1} e integra-se de 0 ao infinito. Usando o Teorema de Fubini, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\, du\right)^q t^{-r-1}\, dt &\leq \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty t^{-r-1} t^{r-\frac{r}{q}}\left(\int_0^t (f(u))^q u^{q-r+\frac{r}{q}-1}\, du\right) dt \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q-1}\int_0^\infty (f(u))^q\, u^{q-r+\frac{r}{q}-1}\left(\int_u^\infty t^{-\frac{r}{q}-1}\, dt\right) du \\
&= \left(\frac{q}{r}\right)^{q}\int_0^\infty (u\, f(u))^q\, u^{-r-1}\, du.
\end{aligned}$$

Assim, mostramos a desigualdade (2.4).

Considere $f(u) = u^{-2}g(u^{-1})$. Fazendo-se as mudanças de variáveis $v = u^{-1}$ e $s = t^{-1}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\ du\right)^q t^{-r-1}\ dt &= \int_0^\infty \left(\int_0^t u^{-2}g(u^{-1})\ du\right)^q t^{-r-1}\ dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\frac{1}{t}}^\infty g(v)\ dv\right)^q t^{-r-1}\ dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_s^\infty g(v)\ dv\right)^q s^{r-1}\ ds. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo-se a mudança de variável $v = u^{-1}$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty (uf(u))^q\ \ u^{-r-1}\ du &= \int_0^\infty \left(u^{-1}g(u^{-1})\right)^q\ \ u^{-r-1}\ du \\
&= \int_0^\infty (vg(v))^q\ \ v^{r-1}\ dv. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

Daí, de (2.4), com $f(u) = u^{-2}g(u^{-1})$, e das igualdades (2.6) e (2.7), segue que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \left(\int_s^\infty g(v)\ dv\right)^q s^{r-1}\ ds\right)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f(u)\ du\right)^q t^{-r-1}\ dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (u\ f(u))^q\ u^{-r-1}\ du\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty (vg(v))^q\ \ v^{r-1}\ dv\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

■

No próximo resultado, apresentaremos uma norma adequada para os espaços de Lorentz. Denotaremos essa norma por $\|\cdot\|_{(p,q)}$ e mostraremos sua equivalência com o funcional $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$.

Definição 2.1.8 *Sejam* $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ *e* $f \in L^{(p,q)}$. *A aplicação* $\|\,.\,\|_{(p,q)} :$ $L^{(p,q)} \to \mathbb{R}$ *é dada por*

$$\|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left[\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} & , \; se \quad 1 < p < \infty,\; 1 \leq q < \infty \\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & , \; se \quad 1 < p \leq \infty,\; q = \infty \end{cases}.$$

Teorema 2.1.9 *A aplicação* $\|\,.\,\|_{(p,q)}$ *define uma norma em* $L^{(p,q)}$.

Demonstração: Observe que

$$\begin{aligned} \|f\|_{(p,q)} = 0 \;\; & \Leftrightarrow \;\; f^{**}(t) = 0 \, q.t.p. \\ & \Leftrightarrow \;\; f^{*}(t) = 0 \, q.t.p. \\ & \Leftrightarrow \;\; \lambda_f(s) \leq t, \; \forall t \in [0,\infty), \, s \in (0,\infty) \\ & \Leftrightarrow \;\; \lambda_f(s) = 0, \; \forall \, s \in (0,\infty) \\ & \Leftrightarrow \;\; |f(x)| = 0 \;\, q.t.p. \\ & \Leftrightarrow \;\; f = 0 \;\, q.t.p. \end{aligned}$$

- Para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$.
  Pelo Teorema 1.2.14, item 4, tem-se $(\alpha f)^{**} = |\alpha| f^{**}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\|\alpha f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (\alpha f)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = |\alpha| \|f\|_{(p,q)}.$$

  Do Teorema 1.2.16, segue que $(f+g)^{**}(t) \leq f^{**}(t) + g^{**}(t)$. Assim, da desigualdade de Minkowski, tem-se

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{(p,q)} \;\; & = \;\; \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \;\; \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(f^{**}(t) + g^{**}(t)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \;\; \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \;\; \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}. \end{aligned}$$

- Agora, para $1 < p \leq \infty$ e $q = \infty$.
  Pelo Teorema 1.2.14, item 4, obtém-se

$$\|\alpha f\|_{(p,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \ (\alpha f)^{**}(t) = |\alpha| \|f\|_{(p,\infty)}, \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

  e pelo Teorema 1.2.16, segue que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} (f+g)^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) + \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} g^{**}(t) \\
&= \|f\|_{(p,\infty)} + \|g\|_{(p,\infty)}.
\end{aligned}$$

■

Com a norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$ os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ se tornam espaços vetoriais topológicos normados, em que a topologia do espaço é a topologia gerada por $\|\cdot\|_{(p,q)}$.

Proposição 2.1.10 *Se $1 < p,\ q \leq \infty$, $\alpha > 0$ e $f \in L^{(p,q)}$, então $f_\alpha \in L^{(p,q)}$, em que $f_\alpha(x) = f(\alpha x)$. Além disso,*

$$\|f_\alpha\|_{(p,q)} = \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{(p,q)}. \tag{2.8}$$

Demonstração: Pela igualdade (2.3), tem-se $(f_\alpha)^*(t) = f^*(\alpha^n t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
f_\alpha^{**}(t) &= \frac{1}{t}\int_0^t f_\alpha^*(s)\, ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^t f^*(\alpha^n s)\ ds \\
&= \frac{1}{t}\int_0^{\alpha^n t} f^*(s) \frac{ds}{\alpha^n} \\
&= \frac{1}{\alpha^n t}\int_0^{\alpha^n t} f^*(s)\, ds \\
&= f^{**}(\alpha^n t).
\end{aligned}$$

Se $1 \leq q < \infty$, temos

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|_{(p,q)} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f_\alpha^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(\alpha^n t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \left[\int_0^\infty \left(\left(\alpha^{-n} t\right)^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{\alpha^n \alpha^{-n} t}\right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{(p,q)}.$$

Agora, para $q = \infty$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|f_\alpha\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f_\alpha^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(\alpha^n t) \\
&= \sup_{t>0} \left(\alpha^{-n} t\right)^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&= \alpha^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{(p,\infty)}.
\end{aligned}$$

■

No próximo resultado veremos que o funcional $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ e a norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$ são equivalentes.

Proposição 2.1.11 *Se* $1 < p \leq \infty,\ 1 \leq q \leq \infty$ *e* $f \in L^{(p,q)}$, *então*

$$\|f\|^*_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{(p,q)}. \tag{2.9}$$

Demonstração: Pela Proposição 1.2.13, tem-se $f^*(t) \leq f^{**}(t)$, então $\|f^*\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{(p,q)}$ e, portanto, a primeira desigualdade está provada.

Para a segunda, consideremos primeiramente o caso em que $1 < p \leq \infty$ e $q = \infty$. Daí, segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\, ds \\
&= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\, ds \\
&\leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}} \left(\sup_{u>0} u^{\frac{1}{p}} f^*(u) \right) ds \\
&= \|f\|^*_{(p,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t s^{-\frac{1}{p}}\, ds \\
&= \|f\|^*_{(p,\infty)} \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}-1} \frac{p}{p-1} t^{-\frac{1}{p}+1} \\
&= \frac{p}{p-1} \|f\|^*_{(p,\infty)}.
\end{aligned}$$

Agora, para $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, pela Desigualdade de Hardy (2.4), com $r = q\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s)\,ds\right)^q t^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{q}{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} \left(\int_0^\infty (sf^*(s))^q\, s^{-q\left(1-\frac{1}{p}\right)-1}\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{p}{p-1}\|f\|^*_{(p,q)}.
\end{aligned}
$$

■

Lema 2.1.12 *Se* $1 < p < \infty,\ 1 \leq q < \infty$ *e* $f \in L^{(p,q)}$, *então*

$$
f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{x^{\frac{1}{p}}}. \tag{2.10}
$$

Demonstração: Pelo Teorema 1.2.14, item 1, temos que f^{**} é não-crescente. Assim,

$$
\begin{aligned}
\|f\|^q_{(p,q)} &= \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^x \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} + \int_x^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&\geq \int_0^x \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \\
&\geq (f^{**}(x))^q \left(\int_0^x t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right) \\
&= \left(\frac{p}{q}\right) x^{\frac{q}{p}} \left(f^{**}(x)\right)^q.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
f^{**}(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{x^{\frac{1}{p}}}.
$$

■

Nosso próximo objetivo é mostrar que os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$ munidos da norma $\|\cdot\|_{(p,q)}$, com $1 < p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, são espaços de Banach. Para isso, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.1.13 (Calderón) *Se $1 < p < \infty$, e $1 \leq q < r \leq \infty$, então $L^{(p,q)} \hookrightarrow L^{(p,r)}$, ou seja,*

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}. \tag{2.11}$$

Demonstração: Pelo Lema 2.1.12, temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{(p,r)}^r &= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} \left(f^{**}(t)\right)^r dt \\
&= \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} \left(f^{**}(t)\right)^q \left(f^{**}(t)\right)^{r-q} dt \\
&\leq \int_0^\infty t^{\frac{r}{p}-1} \left(f^{**}(t)\right)^q \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{(p,q)}}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^{r-q} dt \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^{**}(t)\right)^q dt \\
&= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{(p,q)}^{r-q} \|f\|_{(p,q)}^q,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f\|_{(p,r)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{(p,q)}.$$

■

Teorema 2.1.14 *Se $1 < p \leq \infty$ e $1 \leq q \leq \infty$, então o espaço de Lorentz $L^{(p,q)}$ munido da norma $\| \,.\, \|_{(p,q)}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $L^{(p,q)}$, ou seja,

$$\|f_m - f_n\|_{(p,q)} \to 0,$$

quando $m, n \to \infty$.
Pela Proposição 2.1.11 e o Lema de Calderón 2.1.13, obtém-se

$$\|f_m - f_n\|_{(p,\infty)}^* \leq \|f_m - f_n\|_{(p,\infty)} \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f_m - f_n\|_{(p,q)} \longrightarrow 0,$$

quando $m, n \to \infty$.

Assim, pela Proposição 1.3.3, segue que (f_n) é de Cauchy em medida.

Logo, pelo Teorema 1.3.5, existe uma subsequência $f_{n_k} \to f$, que converge para alguma função mensurável f q.t.p.
Como $\{f_n\}$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_N\|_{(p,q)} < \varepsilon, \quad \text{para todo } n > N.$$

Mais ainda, visto que $f_{n_k} \to f$ q.t.p., então $f_{n_k} - f_N \longrightarrow f - f_N$ q.t.p.
Daí, $|f_{n_k} - f_N| \longrightarrow |f - f_N|$ q.t.p. Além disso, podemos considerar $\{|f_{n_k} - f_N|\}$ uma sequência crescente (passando a uma subsequência, se necessário), pois $|f_{n_k} - f_N|$ é mensurável e não-negativa.

Pelo Teorema 1.2.14, item (3), tem-se

$$\begin{aligned} (f - f_N)^{**} &= \lim_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_N)^{**} \\ &= \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}. \end{aligned}$$

Logo, usando o lema de Fatou, obtém-se

$$\begin{aligned} \|f - f_N\|_{(p,q)} &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f - f_N)^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k\to\infty} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} (f_{n_k} - f_N)^{**}(t) \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \liminf_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f_N\|_{(p,q)}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_{(p,q)} = 0.$$

Como $f = f - f_N + f_N$, então $f \in L^{(p,q)}$.
Portanto, $(L^{(p,q)}, \|\cdot\|_{(p,q)})$ é um espaço de Banach.

■

A seguir apresentamos a caracterização de dualidade para espaços de Lorentz. Sua demonstração será omitida por se tratar de uma demonstração técnica, cujas ideias são "essencialmente" as mesmas da teoria de dualidade para os espaços de Lebesgue L^p. Para mais detalhes, veja [11].

Teorema 2.1.15 *Se $1 < p < \infty$ e $1 < q < \infty$, então o espaço dual de $L^{(p,1)}$ é $L^{(p',\infty)}$ e o espaço dual de $L^{(p,q)}$ é $L^{(p',q')}$, onde p' e q' são os expoentes conjugados de p e q respetivamente.*

Teorema 2.1.16 *Seja $1 \leq p < \infty$ e $1 \leq q < \infty$, então o conjunto $S = \{\varphi : X \to \mathbb{R} :$ φ é função simples$\}$ é denso em $L^{(p,q)}$.*

Demonstração: Seja $f \in L^{(p,q)}$. Sem perda de generalidade, assuma f positiva. Então existe uma sequência de funções simples $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $0 \leq \varphi_n \leq f$ e $\varphi_n \longrightarrow f$, quando $n \to \infty$. Pelo Teorema 1.2.5, items 5, 4 e 2, obtém-se

$$\begin{aligned}
(f-\varphi_n)^*(t) &= f^*\left(\frac{t}{2}\right) + (-\varphi_n)^*\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= f^*\left(\frac{t}{2}\right) + \varphi_n^*\left(\frac{t}{2}\right) \\
&\leq 2f^*\left(\frac{t}{2}\right).
\end{aligned}$$

Assim, como $f^* \in L^1$, pelo Teorema da Convergência Dominada, tem-se

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f-\varphi_n\|^*_{(p,q)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}}(f-\varphi_n)^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p}} \lim_{n\to\infty}(f-\varphi_n)^*(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Portanto, S é denso em $L^{(p,q)}$.

■

2.2 Desigualdades de Young e Hölder em $L^{(p,q)}$

Nesta seção apresentaremos uma generalização da desigualdade de Young e de Hölder para os espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$.

2.2.1 Desigualdade de Young

Para a demonstração da desigualdade de Young, precisaremos de um resultado envolvendo o duplo rearranjo do operador convolução. Antes de apresentar tal resultado, introduziremos o operador convolução.

Definição 2.2.1 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis. A convolução de f e g é a função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por*

$$h(x) = (f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy. \tag{2.12}$$

Lema 2.2.2 *Se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são funções mensuráveis, então*

$$h^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^*(s)g^*(s)ds, \quad \forall t > 0. \tag{2.13}$$

Omitiremos a demonstração do Lema 2.2.2, no entanto, ela pode ser encontrada em [13]. A seguir, apresentamos uma conseqüência importante do Lema 2.2.2.

Proposição 2.2.3 *Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ funções mensuráveis. Então*

$$h^{**}(t) \leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds, \quad para \;\; t > 0. \tag{2.14}$$

Demonstração: Se a integral do lado direito for infinita, não há o que mostrar.
Entõ, suponha que

$$\int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds < \infty,$$

para todo $t > 0$. Uma vez que $f^{**}(t)$ e $g^{**}(t)$ são funções não-crescentes temos que

$$\lim_{t\to\infty} tf^{**}(t)g^{**}(t) = 0.$$

Usando o fato que $f^*(t) \leq f^{**}(t)$ e a desigualdade (2.13), obtemos

$$h^{**}(t) \leq tf^{**}(t)g^{**}(t) + \int_t^\infty f^{**}(s)g^*(s)ds, \quad \forall t > 0. \tag{2.15}$$

Agora, observando que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}f^{**}(t) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)ds\right) \\
&= \frac{1}{t}f^*(t) - \frac{1}{t^2}\int_0^t f^*(s)ds \\
&= \frac{1}{t}(f^*(t) - f^{**}(t)),
\end{aligned}$$

temos

$$\frac{d}{dt}(tg^{**})(t) = g^{**}(t) + t\frac{d}{dt}g^{**}(t) = g^*(t).$$

Portanto, integrando por partes em (2.15), concluímos que

$$h^{**}(t) \;\; \leq \;\; tf^{**}(t)g^{**}(t) + [sg^{**}(s)f^{**}(s)]_t^\infty - \int_t^\infty \frac{1}{s}[\, f^*(s) - f^{**}(s)]\, s\, g^{**}(s)ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds - \int_t^\infty f^{*}(s)g^{**}(s)ds \\
&\leq \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)ds.
\end{aligned}
$$

■

Teorema 2.2.4 (Desigualdade de Young Generalizada) *Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $f \in L^{(p_1,q_1)}$ e $g \in L^{(p_2,q_2)}$, onde $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} > 1$, então a convolução $h = g * f$ pertence a $L^{(r,s)}$, onde $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 1$, e $s \geq 1$ é qualquer número tal que $\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \geq \frac{1}{s}$. Além disso,*

$$
\|h\|_{(r,s)} \leq C(r)\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}. \tag{2.16}
$$

Demonstração: Primeiro considere o caso $s = \infty$. Usando a Proposição 2.2.3 e o Lema de Calderón 2.11, estimamos

$$
\begin{aligned}
\|h\|_{(r,\infty)} &= \sup_{t>0} t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t) \\
&\leq \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(s)g^{**}(s)\, ds \right] \\
&= \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} \left(s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) \right) \left(s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s) \right) ds \right] \\
&\leq \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}} \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(s) \right) \left(\sup_{s>0} s^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(s) \right) ds \right] \\
&= \|f\|_{(p_1,\infty)}\|g\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty s^{-1-\frac{1}{r}}\, ds \right] \\
&= \|f\|_{(p_1,\infty)}\|g\|_{(p_2,\infty)} \sup_{t>0} \left[t^{\frac{1}{r}} r t^{-\frac{1}{r}} \right] \\
&= r\|f\|_{(p_1,\infty)}\|g\|_{(p_2,\infty)} \\
&\leq r \left(\frac{q_1}{p_1} \right)^{\frac{1}{q_1}} \|f\|_{(p_1,q_1)} \left(\frac{q_2}{p_2} \right)^{\frac{1}{q_2}} \|g\|_{(p_2,q_2)} \\
&= C(r)\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}.
\end{aligned}
$$

Agora, considere o caso $s < \infty$. Usando a Proposição 2.2.3, podemos estimar

$$
\|h\|_{(r,s)}^s = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} h^{**}(t) \right)^s \frac{dt}{t} \leq \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}} \int_t^\infty f^{**}(v)g^{**}(v)\, dv \right)^s \frac{dt}{t}.
$$

Fazendo a mudança de variáveis $t = \dfrac{1}{y}$ e $v = \dfrac{1}{u}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^s &\leq \int_0^\infty \left(y^{-\frac{1}{r}} \int_0^y f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u^2} \right)^s \frac{dy}{y} \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y \frac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2} \, du \right)^s y^{-\frac{s}{r}-1} \, dy \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^y F(u) \, du \right)^s y^{-\widetilde{r}-1} \, dy,
\end{aligned}$$

onde $\widetilde{r} = \dfrac{s}{r}$ e $F(u) = \dfrac{f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2}$. Assim, pela desigualdade de Hardy (2.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)}^s &\leq \left(\frac{s}{\widetilde{r}}\right)^s \int_0^\infty [uF(u)]^s \, u^{-\widetilde{r}-1} \, du \\
&= r^s \int_0^\infty \left[u \frac{f^{**}(1/u) \, g^{**}(1/u)}{u^2} \right]^s u^{-\frac{s}{r}} \frac{du}{u} \\
&= r^s \int_0^\infty \left[u^{-1-\frac{1}{r}} f^{**}\left(\frac{1}{u}\right) g^{**}\left(\frac{1}{u}\right) \right]^s \frac{du}{u}.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $t = \dfrac{1}{u}$, tem-se

$$\|h\|_{(r,s)}^s \leq r^s \int_0^\infty \left[t^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t}.$$

Como $\dfrac{1}{q_1} + \dfrac{1}{q_2} \geq \dfrac{1}{s}$ existem $m_1 \geq 1$ e $m_2 \geq 1$ tais que,

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = 1, \text{ e } \frac{1}{m_1} \leq \frac{s}{q_1}, \quad \frac{1}{m_2} \leq \frac{s}{q_2}.$$

Usando a desigualdade de Hölder em $L^p(0,\infty)$ com a medida $\mu = \dfrac{dx}{x}$, deduzimos que

$$\begin{aligned}
\|h\|_{(r,s)} &\leq r \left(\int_0^\infty \left[t^{1+\frac{1}{r}} f^{**}(t) g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= r \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t) \right]^s \left[t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t) \right]^s \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq r \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p_1}} f^{**}(t) \right]^{sm_1} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_1}} \left(\int_0^\infty \left[t^{\frac{1}{p_2}} g^{**}(t) \right]^{sm_2} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{sm_2}} \\
&= r \|f\|_{(p_1, sm_1)} \|g\|_{(p_2, sm_2)}.
\end{aligned}$$

Como $q_1 \leq sm_1$ e $q_2 \leq sm_2$, pelo o Lema de Calderón 2.1.13, obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)} \\ &= C(r)\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.2.5 *Sejam $g \in L^{(p,\infty)}$, com $1 < p < \infty$ e $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então a convolução $h = g * f \in L^{(p,\infty)}$ e vale*

$$\|h\|_{(p,\infty)} \leq C(p)\|f\|_1\|g\|_{(p,\infty)}. \tag{2.17}$$

Omitiremos a demonstração da Proposição 2.2.5, a qual pode ser encontrada em [8].

2.2.2 Desigualdade de Hölder

Teorema 2.2.6 (Desigualdade de Hölder Generalizada) *Sejam $1 < p_1, p_2 < \infty$. Se $h = fg$, em que $f \in L^{(p_1,q_1)}$, $g \in L^{(p_2,q_2)}$ e $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1$, então $h \in L^{(r,s)}$, quando*

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2},\ \frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}\ \text{ e } s \geq 1.$$

Além disso,

$$\|h\|_{(r,s)} \leq C(r')\|f\|_{(p_1,q_1)}\|g\|_{(p_2,q_2)}, \tag{2.18}$$

onde r' é o conjugado de r, isto é, $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'} = 1$.

Demonstração: Seja $t > 0$. Defina $h = fg$ e considere o conjunto

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : |h(x)| \geq h^*(t)\}.$$

Como pode ser visto em [11], página 258, $m(E) \geq t$.
Observe ainda que

$$\begin{aligned} h^*(t) &= h^*(t)\left(\frac{1}{m(E)}\int_E dx\right)^2 \\ &= \left(\frac{1}{m(E)}\int_E h^*(t)^{\frac{1}{2}}\,dx\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{m(E)}\int_E |h(x)|^{\frac{1}{2}}\,dx\right)^2. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} h^*(t) &\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |h^(x)|^{\frac{1}{2}}\,dx\right\}^2 \\ &\leq \sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |f(x)|\,dx\right\}\sup_{\mu(E)\geq t}\left\{\frac{1}{\mu(E)}\int_E |g(x)|\,dx\right\} \\ &\leq f^{**}(t)g^{**}(t). \end{aligned}$$

Como $\dfrac{1}{s}\leq\dfrac{1}{q_1}+\dfrac{1}{q_2}$, existem $m_1\geq 1$ e $m_2\geq 1$ tais que $\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}=1$, $\dfrac{1}{m_1}\leq\dfrac{s}{q_1}$ e $\dfrac{1}{m_2}\leq\dfrac{s}{q_2}$.

Usando a desigualdades de Hölder em $L^P(0,\infty)$ e a Proposição 2.1.11, temos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r'\|h\|^*_{(r,s)} \\ &= r'\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{r}}\,h^*(t)\right)^s\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r'\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p_1}}\,f^{**}(t)\right)^s\left(t^{\frac{1}{p_2}}\,g^{**}(t)\right)^s\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{s}} \\ &\leq r'\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p_1}}\,f^{**}(t)\right)^{sm_1}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{sm_1}}\left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p_2}}\,g^{**}(t)\right)^{sm_2}\frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{sm_2}} \\ &= r'\|f\|_{(p_1,sm_1)}\,\|g\|_{(p_2,sm_2)}. \end{aligned}$$

Como $q_1\leq sm_1$ e $q_2\leq sm_2$, pelo Lema de Calderón 2.1.13, obtemos

$$\begin{aligned} \|h\|_{(r,s)} &\leq r'\left(\frac{q_1}{p_1}\right)^{\frac{1}{q_1}-\frac{1}{sm_1}}\left(\frac{q_2}{p_2}\right)^{\frac{1}{q_2}-\frac{1}{sm_2}}\|f\|_{(p_1,q_1)}\,\|g\|_{(p_2,q_2)} \\ &= C(r')\,\|f\|_{(p_1,q_1)}\,\|g\|_{(p_2,q_2)}. \end{aligned}$$

■

2.3 Aproximação da Identidade em $L^{(p,q)}$

O objetivo desta seção é apresentar um resultado de aproximação em espaços de Lorentz $L^{(p,q)}$, o qual é análogo ao teorema que garante que convoluções por um molificador de Friedrichs fornecem uma aproximação da identidade nos espaços de Lebesgue L^p. Sua demonstração é baseada na continuidade da translação em $L^{(p,q)}$, que por sua vez, é consequência do resultado a seguir.

Teorema 2.3.1 *Sejam $1<p<\infty$ e $1\leq q<\infty$, então $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: Para demonstrar que o conjunto C_c^∞ é denso em $L^{(p,q)}$, pelo Teorema 2.1.16, basta mostrar que toda função característica $\mathcal{X}_E$ pode ser aproximada na quasi-norma $\|\,.\,\|^*_{(p,q)}$ por uma função $f \in C_c^\infty$.

Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável e m a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Então m é regular interior e exterior, assim, dado $\varepsilon > 0$, existe um conjunto aberto G e um conjunto compacto K tal que $K \subset E \subset G$ e $m(G \setminus K) < \varepsilon$.

Agora, pelo Lema de Urysohn, existe $f \in C_c^\infty$ tal que $0 \leq f \leq 1$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in K \\ 0 & , \quad x \notin G^c, \end{cases} . \tag{2.19}$$

Como $|\mathcal{X}_E - f| \leq \mathcal{X}_{G\setminus K}$, pelo Teorema 1.2.5, item 2, tem-se

$$(\mathcal{X}_E - f)^*(t) \leq \mathcal{X}^*_{G\setminus K}(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} \|\mathcal{X}_E - f\|^*_{(p,q)} &\leq \|\mathcal{X}_{G\setminus K}\|^*_{(p,q)} \\ &= \left(\int_0^{m(G\setminus K)} t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left[m(G \setminus K)^{\frac{q}{p}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &< \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \varepsilon^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Portanto, C_c^∞ é denso em $L^{(p,q)}$. ■

Lema 2.3.2 (Continuidade da Translação) *Sejam* $1 < p < \infty$ *e* $1 \leq q < \infty$ *então,*

$$\left\| f(.-y) - f(.) \right\|_{(p,q)} \longrightarrow 0, \quad \textit{quando } \; y \to 0.$$

Demonstração: Sejam $\varepsilon > 0$ e $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe um conjunto compacto K tal que $A = supp(f) \subset K$. Se $y \in \mathbb{R}^n$, defina $h_y(x) = f(x-y) - f(x)$. Como $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|y| < \delta$, então $|h_y(x)| \leq \varepsilon \mathcal{X}_{A_\delta}(x)$, em que $A_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < \delta\}$.

Logo, pelo Teorema 1.2.5, item 2 e item 4, obtém-se

$$h_y^*(t) \leq (\varepsilon \mathcal{X}_{A_\delta})^*(t) = \varepsilon \mathcal{X}^*_{A_\delta}(t).$$

Assim, $\limsup_{y\to 0} h_y^*(t) \leq \varepsilon$, para todo $t > 0$. Uma vez que ε não depende de t, então $h_y^*(t) \to 0$, para todo $t > 0$, quando $y \to 0$.

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|h_y\|^*_{(p,q)} &= \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\, h^*_y(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \varepsilon \left[\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\, \mathcal{X}^*_{A_\delta}(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&= \varepsilon \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} m(A_\delta) < \infty.
\end{aligned}
$$

Daí, usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$\|h_y\|^*_{(p,q)} \to 0, \ \text{quando} \ \ y \to 0.$$

Uma vez que $\|\cdot\|_{(p,q)}$ e $\|\cdot\|^*_{(p,q)}$ são equivalentes, segue que $\|h_y\|_{(p,q)} \to 0$. ■

Definição 2.3.3 *Seja $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, para cada $\varepsilon > 0$, o molificador de Friedrichs de φ é dado por*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\, \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Teorema 2.3.4 (Aproximação da Identidade em $L^{(p,q)}$) *Sejam $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ e $f \in L^{(p,q)}(\mathbb{R}^n)$. Se $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, então*

$$\big\|(\varphi_\varepsilon * f) - f\big\|_{(p,q)} \to 0, \ \ \textit{quando} \ \varepsilon \to 0.$$

Demonstração: Como $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, tem-se

$$
\begin{aligned}
\left(\varphi_\varepsilon * f\right)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y) f(x-y)dy - f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(y)\big[f(x-y) - f(x)\big]dy.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $u = \dfrac{y}{\varepsilon}$, obtém-se

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\big[f(x - \varepsilon u) - f(x)\big]du.$$

Seja $\phi \in L^{(p',q')}$, pela dualidade, obtém-se

$$\|(\varphi_\varepsilon * f) - f\|_{(p,q)} = \sup_{\|\phi\|_{(p',q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left((\varphi_\varepsilon * f)(x) - f(x)\right) \phi(x)\, dx \right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{\|\phi\|_{(p',q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(u)\big[f(x-\varepsilon u) - f(x)\big]\, \phi(x)\, du\, dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(u)| \left(\sup_{\|\phi\|_{(p',q')}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \big[f(x-\varepsilon u) - f(x)\big]\phi(x) \right| dx \right) du \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big|\varphi(u)\big| \|f(.-\varepsilon u) - f(.)\|_{(p,q)} du.
\end{aligned}
$$

Como $\|f(.-\varepsilon u) - f(.)\|_{(p,q)} \leq 2\|f(.)\|_{(p,q)}$ e, pelo Lema 2.3.2 , tem-se

$$\|f(.-\varepsilon u) - f(.)\|_{(p,q)} \to 0, \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0,$$

usando o Teorema da Convergência Dominada, concluímos a demonstração. ■

2.4 Um Teorema de Interpolação

Nesta seção apresentaremos um resultado de interpolação, em termos de espaços de Lorentz, que será útil no decorrer deste trabalho.

Sejam $X = (X, \mathcal{M}, \mu)$ e $Y = (Y, \mathcal{N}, \nu)$ espaços de medida, com μ e ν σ-finitas. Considere os conjuntos

$$
\begin{aligned}
E &= \{\, f : X \to \mathbb{R} : f \text{ é } \mathcal{M} - \text{mensurável}\,\} \; e \\
F &= \{\, h : Y \to \mathbb{R} : h \text{ é } \mathcal{N} - \text{mensurável}\,\}.
\end{aligned}
$$

Definição 2.4.1 *O operador $T : E \to F$ é sublinear se:*

1. $|T(f+g)| \leq |Tf| + |Tg|$, *para todo* $f, g \in E$.

2. $|T(\alpha f)| = |\alpha||Tf|$, *para todo* $f \in E$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Observação 2.4.2 *Os espaços de Lorentz tem a seguinte propriedade de interpolação:*

$$(L^{(p_0,q_0)}, L^{(p_1,q_1)})_{\theta,q} = L^{(p,q)},$$

desde que $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1-\theta}{p_0} + \dfrac{\theta}{p_1}$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. *Para mais detalhes sobre a teoria de interpolação e sobre essa afirmação veja, por exemplo, [3].*

O próximo resultado é uma consequência da propriedade apresentada na Observação 2.4.2. Sua demonstração será omitida, uma vez que ela utiliza argumentos pesados da teoria de interpolação em espaços de Banach abstratos. Para mais detalhes veja, por exemplo, [6], [3], [15].

Teorema 2.4.3 *Seja T um operador sublinear em $L^{(p_j,q_j)}$, em que $j = 1,2$. Sejam $p_0 < p_1$, $q_0 \neq q_1$ e p, q dados por*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

em que $0 < \theta < 1$. Então, para todo $1 \leq r \leq \infty$, existe $B = B(\theta)$ tal que

$$\|Tf\|_{(p,r)} \leq B\|f\|_{q,r},$$

para toda f pertencente a $L^{(q,r)}$.

Capítulo 3

Soluções Mild no Espaço $L^{(p,\infty)}$

Neste capítulo, trataremos do problema de Cauchy para a equação de semilinear do calor. Nosso objetivo é garantir a existência de solução mild global para a equação semilinear do calor, quando o dado inicial pertence ao espaço $L^p(\mathbb{R}^n)-$fraco e tem norma suficientemente pequena.

3.1 Problema de Cauchy para a Equação Semilinear do Calor

Consideraremos o problema de valor inicial para a equação semilinear do calor em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.1}$$

em que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

$$|f(a_2) - f(a_1)| \leq \eta |a_2 - a_1| \left(|a_2|^{\rho-1} - |a_1|^{\rho-1} \right) \;\; \text{e} \;\; f(0) = 0,$$

para todo $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ e algumas constantes $\eta > 0$ e $\rho > 1$.

3.1.1 O Problema Linear Associado a (3.1)

Observe que o problema linear associado ao sistema (3.1) é o problema de Cauchy para a equação do calor em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{em} \quad (0,T) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0, & \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{3.2}$$

Seja $g(t,x)$ o núcleo de Gauss-Weirstrass dado por

$$g(t,x) = (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \tag{3.3}$$

para todo $t > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$, cuja transformada de Fourier é

$$\hat{g}(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(t,x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} dx = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}. \tag{3.4}$$

Agora, aplicando formalmente a transformada de Fourier em (3.2), tem-se, para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, o seguinte p.v.i.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\hat{u}(t,\xi) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(t,\xi) & = 0, \\ \\ \hat{u}(0,\xi) = \hat{u_0}(\xi), \end{cases} \tag{3.5}$$

o qual tem solução única dada por

$$\hat{u}(t,\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t} u_0(\xi). \tag{3.6}$$

Assim de (3.4), tem-se

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{g}(t,\xi)\hat{u_0}(\xi). \tag{3.7}$$

Consequentemente, via transformada inversa, obtém-se

$$u(t,\xi) = g(t,x) * u_0(x), \tag{3.8}$$

ou seja, $g(t,x)$ é solução fundamental de (3.2).

A solução (3.8) do problema linear (3.2) gera um semigrupo $S(t)$ via convolução com o núcleo de Gauss-Weierstrass (3.3), isto é,

$$S(t)u_0(x) = g(t,x) * u_0(x). \tag{3.9}$$

No que segue, nos referimos a $g(t,x)$ e $S(t)$ como núcleo do calor e semigrupo do calor, respectivamente. Para mais detalhes sobre a discussão acima veja, por exemplo, [5].

A seguir verificaremos algumas propriedades de homogeneidade do núcleo do calor $g(t,x)$.

3.1.2 Estimativas do Semigrupo do Calor $S(t)$

Nesta seção, apresentaremos algumas estimativas para o núcleo de Gauss-Weierstrass $g(t,x)$ e para o semigrupo do calor $S(t)$ em espaços de Lorentz.

Iniciaremos verificando algumas propriedades de homogeneidade de $g(t,x)$, que serão úteis para nossos propósitos.

Lema 3.1.1 *Se $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, então*

$$\begin{aligned} g(t,x) &= t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}), && (3.10) \\ \nabla_x^k g(t,x) &= t^{-\frac{n+k}{2}} \nabla_x^k g(1, xt^{-\frac{1}{2}}). && (3.11) \end{aligned}$$

Demonstração: Pela igualdade (3.3), tem-se

$$\begin{aligned} g(t,x) &= (4t\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x\,t^{-\frac{1}{2}}|^2}{4}} \\ &= t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Agora, aplicando a regra da cadeia k vezes na igualdade (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \nabla_x^k g(t,x) &= \nabla_x^k \big(t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}})\big) \\ &= \nabla_x^k \left(t^{-\frac{n}{2}} (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x\,t^{-\frac{1}{2}}|^2}{4}} \right) \\ &= t^{-\frac{n+k}{2}} \nabla_x^k g(1, xt^{-\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

■

Lema 3.1.2 *Se $1 < p \le r < \infty$, $1 \le q_1,\ q_2 \le \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $\phi \in L^{(p,q_1)}$, então $\nabla_x^k S(t)\phi \in L^{(r,q_2)}$. Além disso,*

$$\big\|\nabla_x^k S(t)\phi\,\big\|_{(r,q_2)} \le C\, t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}} \big\|\phi\big\|_{(p,q_1)}. \tag{3.12}$$

Demonstração: Pelas propriedades da convolução, tem-se

$$\nabla_x^k (S(t)\phi) = \nabla_x^k \left(g(t,x) * \phi(x)\right) = \big(\nabla_x^k g(t,x)\big) * \phi.$$

Sejam $q \ge 1$ e $l \ge 1$ tais que

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad \text{e} \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{l} \ge \frac{1}{q_2}.$$

Como $\phi \in L^{(p,q_1)}$, pela Desigualdade de Young generalizada (2.16), obtém-se

$\nabla_x^k S(t)\phi \in L^{(r,q_2)}$ e

$$\|\nabla_x^k S(t)\phi\|_{(r,q_2)} \leq C_1 \|\nabla_x^k g(t,x)\|_{(q,l)} \|\phi\|_{(p,q_1)}. \tag{3.13}$$

Por outro lado, pela igualdade (3.11), do lema anterior e da relação de escala nos espaços de Lorentz $L^{(q,l)}$ (2.8), tem-se

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x^k g(t,x)\|_{(q,l)} &= \|t^{-\frac{n+k}{2}} \nabla_x^k g(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q,l)} \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}} \|\nabla_x^k g(1, xt^{-\frac{1}{2}})\|_{(q,l)} \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}} t^{\frac{n}{2q}} \|\nabla_x^k g(1, x)\|_{(q,l)} \\
&= C_2 t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}},
\end{aligned} \tag{3.14}$$

em que $C_2 = \|\nabla_x^k g(1,x)\|_{(q,l)}$. De (3.13) e (3.14), tem-se

$$\|\nabla_x^k S(t)\phi\,\|_{(r,q_2)} \leq C\, t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}} \|\phi\|_{(p,q_1)},$$

com $C = C_1 C_2$.

■

Como veremos a seguir, no caso dos espaços de Lebesgue L^r, pode-se provar a desigualdade (3.12) para $1 \leq p \leq r \leq \infty$.

Proposição 3.1.3 *Se $1 \leq p \leq r \leq \infty$, $k \in \mathbb{N}$ e $\phi \in L^p$, então $\nabla_x^k S(t)\phi \in L^r$. Além disso,*

$$\|\nabla_x^k S(t)\phi\|_r \leq C\, t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}} \|\phi\|_p. \tag{3.15}$$

Demonstração: Sejam $1 \leq p, q, r \leq \infty$, com $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, pela Desigualdade de Young em L^r, tem-se

$$\|\nabla_x^k g(t,x) * \phi\|_r \leq \|\nabla_x^k g(t,x)\|_q \|\phi\|_p. \tag{3.16}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|\nabla_x^k g(t,x)\|_q &= \|t^{-\frac{n+k}{2}}\, \nabla_x^k g(1, x\,t^{-\frac{1}{2}})\|_q \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}}\, \|\nabla_x^k g(1, x\,t^{-\frac{1}{2}})\|_q \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x^k g(1, xt^{-\frac{1}{2}}) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-\frac{n+k}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_x^k \left((4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x\, t^{-\frac{1}{2}}|^2}{4}} \right) \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \nabla_y^k \left((4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4}} \right) \right|^q \frac{dy}{t^{-\frac{n}{2}}} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad \text{sendo } y = x\, t^{-\frac{1}{2}} \\
&= t^{-\frac{n+k}{2}}\, t^{\frac{n}{2q}}\, \|\nabla_y^k\, g(1,y)\|_q \\
&= C\, t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}}, \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

em que $C = \|\nabla_y^k\, g(1,y)\|_q$. Assim, de (3.16) e (3.17), temos

$$\|\nabla_x^k S(t)\phi\|_r \leq C\, t^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)-\frac{k}{2}} \|\phi\|_p.$$

■

3.1.3 Formulação Integral do Problema

Derivaremos, agora, a formulação integral associada ao sistema (3.1).

Considere u uma solução clássica de (3.1) e defina $\psi(s) = S(t-s)u(s,x)$, em que $S(t)$ é o semigrupo do calor. Uma vez que

$$\psi(s) = S(t-s)u(s,x) = g(t-s,x) * u(s,x),$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\psi(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\big(g(t-s,x) * u(s,x)\big) \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(t-s,x-y)u(s,y)\; dy\right] \qquad (3.18) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{\partial}{\partial s}\big(g(t-s,x-y)\big)u(s,y) + g(t-s,x-y)\frac{\partial}{\partial s}\big(u(s,y)\big)\right]\; dy.
\end{aligned}$$

Mostremos agora que

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(g(t-s,x-y)\big) = -\Delta\big(g(t-s,x-y)\big). \qquad (3.19)$$

De fato,

$$\frac{\partial}{\partial s}\big(g(t-s,x-y)\big) \;=\; \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{[4(t-s)\pi]^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{4n\pi}{2\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}+1}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}} + \frac{1}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}} \frac{|x-y|^2(-4)}{\left[4(t-s)\right]^2} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}} \\
&= \left[\frac{n}{2(t-s)} - \frac{|x-y|^2}{4(t-s)^2}\right] \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\big(g(t-s,x-y)\big) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}\right) \\
&= \frac{-(x_i-y_i)}{2(t-s)} \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}}
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial x_i x_i}\big(g(t-s,x-y)\big) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{-(x_i-y_i)}{2(t-s)} \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}}\right) \\
&= \left[\frac{-1}{2(t-s)} + \frac{(x_i-y_i)^2}{4\left[(t-s)\right]^2}\right] \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}}. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Assim, de (3.20) e (3.21), tem-se

$$
\begin{aligned}
-\Delta\big(g(t-s,x-y)\big) &= \left[\frac{n}{2(t-s)} - \frac{|x-y|^2}{4(t-s)^2}\right] \frac{e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-s)}}}{\left[4(t-s)\pi\right]^{\frac{n}{2}}} \\
&= \frac{\partial}{\partial s}\big(g(t-s,x-y)\big),
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

Agora, como ψ é diferenciável, aplicando a igualdade (3.19) a (3.18), e utilizando propriedades básicas da convolução, obtém-se

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\psi(s) &= \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta\big(g(t-s,x-y)\big)u(s,y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^n} g(t-s,x-y)\frac{\partial}{\partial s}\big(u(s,y)\big)\,dy \\
&= S(t-s)\frac{\partial}{\partial s}\big(u(s,x)\big) - \Delta S(t-s)u(s,x) \\
&= S(t-s)\big(\Delta u(s,x) - f(u(s,x))\big) - \Delta S(t-s)u(s,x) \\
&= S(t-s)\Delta u(s,x) - S(t-s)f(u(s,x)) - S(t-s)\Delta u(s,x) \\
&= -S(t-s)f(u(s,x)).
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 até t a última igualdade, e lembrando que $\psi(0) = S(t-0)u(0,x) =$

$S(t)u_0(x)$ e $\psi(t) = S(0)u(t,x) = u(t,x)$, obtém-se

$$\psi(t) - \psi(0) = -\int_0^t S(t-s)f(u(s,x))ds,$$

ou seja,

$$u(t,x) - S(t)u_0(x) = -\int_0^t S(t-s)f(u(s,x))ds,$$

ou ainda,

$$u(t,x) = S(t)u_0(x) - \int_0^t S(t-s)f(u(s,x))\ ds. \tag{3.22}$$

Portanto, concluí-se que toda solução clássica do sistema (3.1) satisfaz a equação integral (3.22).

A fim de simplificar a expressão (3.22), a parte não linear será denotada por

$$B(u)(t,x) = -\int_0^t S(t-s)f(u(s,x))\ ds. \tag{3.23}$$

Sendo assim, (3.22) pode ser reescrita da seguinte forma

$$u(t,x) = S(t)u_0 + B(u)(t,x). \tag{3.24}$$

3.2 Relação de escala e Espaço funcional adequado

O objetivo desta seção é apresentar o espaço funcional adequado para estudarmos a equação integral (3.22).

Escolheremos um índice adequado a fim de que a norma deste espaço seja invariante pela relação de escala de definida a seguir.

Definição 3.2.1 *Seja $u(t,x)$ uma solução clássica de* (3.1)*. Definimos u_λ por*

$$u_\lambda(t,x) := \lambda^{\frac{2}{\rho-1}}u(\lambda^2 t, \lambda x), \quad \forall\lambda > 0. \tag{3.25}$$

A aplicação

$$u \mapsto u_\lambda(t,x) \tag{3.26}$$

é chamada de relação de escala de (3.1)*.*

Observação 3.2.2 *Pode-se mostrar sem dificuldades que se $u(t,x)$ é uma solução clássica da equação semilinear do calor (3.1), então u_λ também o é, desde que f satisfaça a seguinte relação*

$$f(u_\lambda(t,x)) = \lambda^{\frac{2\rho}{\rho-1}} f(u(\lambda^2 t, \lambda x)).$$

Embora o assunto não seja tratado neste trabalho, vale lembrar que pode-se buscar por soluções particulares de (3.1) satisfazendo

$$u(t,x) = u_\lambda(t,x), \tag{3.27}$$

para todo $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda > 0$.

Essas soluções particulares são chamadas soluções auto-similares do problema. Neste caso, fazendo $t \to 0^+$ formalmente em (3.27), pode-se notar que $u_0 = u(0,x)$ deve ser uma função homogênea de grau $-\frac{2}{\rho-1}$.

Definição 3.2.3 *Seja $1 < q \leq \infty$. Definimos o seguinte espaço vetorial*

$$E = BC\big((0,\infty), L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}\big), \tag{3.28}$$

ou seja, E é o espaço de todas as funções contínuas e limitadas definidas em $(0,\infty)$ e com valores em $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$.

O espaço E munido com a norma

$$\|u\|_E = \sup_{t>0} \|u(t,x)\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \tag{3.29}$$

é um espaço de Banach.

Observação 3.2.4 *Note que o índice $p = \frac{n(\rho-1)}{2}$ em*

$$\|u\|_E = \sup_{t>0} \|u(t,x)\|_{(p,\infty)}$$

faz com que $\|u\|_E$ seja invariante pela relação de escala.

De fato,

$$\begin{aligned}\|u_\lambda(t,x)\|_E &= \sup_{t>0} \|u_\lambda(t,x)\|_{(p,\infty)} \\ &= \sup_{t>0} \lambda^{\frac{2}{\rho-1}} \|u(\lambda^2 t, \lambda x)\|_{(p,\infty)} \\ &= \sup_{\lambda^{-2}s>0} \lambda^{\frac{2}{\rho-1}} \|u(s,\lambda x)\|_{(p,\infty)}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Da relação de escala dos espaços de Lorentz (2.2), *obtém-se*

$$\|u(s,\lambda x)\|_{(p,\infty)} = \lambda^{-\frac{n}{p}} \|u(s,x)\|_{(p,\infty)}. \tag{3.31}$$

Agora, de (3.30) *e* (3.31), *tem-se*

$$\|u_\lambda(t,x)\|_E = \sup_{s>0} \lambda^{\frac{2}{\rho-1}-\frac{n}{p}} \|u(s,x)\|_{(p,\infty)}. \tag{3.32}$$

Daí, para que valha

$$\|u_\lambda(t,x)\|_E = \|u(t,x)\|_E,$$

é necessário e suficiente que $\frac{2}{\rho-1} - \frac{n}{p} = 0$, *ou seja,* $p = \frac{n(\rho-1)}{2}$.

3.3 Boa Colocação nos Espaços $L^{(p,\infty)}$

Apresentaremos agora os resultados de existência e unicidade de soluções mild nos espaços L^p-fraco, ou seja, em $L^{(p,\infty)}$.

Primeiramente, tornaremos precisa a noção de solução mild, em $L^{(p,\infty)}$, associada a equação semilinear do calor (3.1).

Definição 3.3.1 *Seja* $u_0 \in L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$. *Diz-se que* $u = u(t,x)$ *é uma solução mild global do problema de Cauchy* (3.1) *em* E *se a função* u *satisfaz a equação integral* (3.22), *ou seja,*

$$u(t,x) = S(t)u_0(t) + B(u)(t,x),$$

e $u(t,x) \rightharpoonup u_0$, *quando* $t \to 0^+$, *em que o limite tomado é definido na topologia fraca-$*$ de* $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$.

O próximo teorema é o principal resultado deste trabalho e garante a existência e unicidade da solução mild no espaço E.

Teorema 3.3.2 (Boa colocação) *Sejam* $\frac{n}{n-2} < \rho < \infty$ *e* $u_0 \in L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$.

(i) *(Existência e unicidade de solução) Existem constantes* $\delta > 0$ *e* $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ *tais que, se* $\|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} < \delta$, *então o problema de Cauchy* (3.1) *tem uma solução mild global* $u(t,x) \in E$ *no sentido da Definição 3.3.1, a qual é única na bola*

$$\overline{B}_{2\varepsilon}(0) := \overline{B}(0, 2\varepsilon) \subset E.$$

(ii) *(Dependência contínua em relação ao dado inicial) Considere a bola*

$$\overline{B}_\delta(0) = \{u_0 \in L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}; \|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq \delta\}$$

no espaço $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$. *A aplicação* $u_0 \in B_\delta \mapsto u \in E$ *é Lipschitz contínua.*

Antes de demonstrarmos o Teorema 3.3.2 precisaremos de uma série de resultados auxiliares. Começaremos com um lema abstrato, cuja demonstração é uma aplicação do Teorema do ponto fixo de Banach para contrações.

Lema 3.3.3 (Lema Abstrato) *Sejam* $(X, \|\cdot\|_X)$ *um espaço de Banach e* $T : X \to X$ *um operador linear contínuo, satisfazendo*

$$\|Tx - Tz\|_X \leq \tau \|x - z\|_X, \quad \forall\, x, z \in X \ \text{ e } \tau < 1 \text{ fixado.} \tag{3.33}$$

Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\rho_i \in (1, \infty)$, $k_i > 0$ *e* $1 \leq i \leq m$. *Considere* $S_i : X \longrightarrow X$ *tais que,* $S_i(0) = 0$ *e*

$$\|S_i(x) - S_i(z)\|_X \leq k_i \|x - z\|_X \left(\|x\|_X^{\rho_i - 1} + \|z\|_X^{\rho_i - 1} \right) \ \forall\, x, z \in X. \tag{3.34}$$

Seja $R > 0$ *a menor raiz positiva da equação*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i - 1}} R^{\rho_i - 1} + \tau - 1 = 0. \tag{3.35}$$

Temos:

(i) *(Existência e unicidade) Dado* $0 < \varepsilon < R$, *se* $y \in X$ *é tal que* $\|y\|_X \leq \varepsilon$, *então* *existe uma solução $x \in X$ para a equação*

$$x = y + \sum_{i=1}^{m} S_i(x) + T(x), \tag{3.36}$$

satisfazendo $\|x\|_X \leq \frac{2\varepsilon}{1-\tau}$, a qual é única na bola fechada $\bar{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$.

(*ii*) *(Dependência contínua) A solução x depende de y de forma Lipschitz contínua, ou seja, se $\|\bar{y}\|_X \leq \varepsilon$, $\bar{x} = \bar{y} + \sum_{i=1}^{m} S_i(\bar{x}) + T(\bar{x})$ e $\|\bar{x}\|_X \leq \frac{2\varepsilon}{1-\tau}$, então*

$$\|x - \bar{x}\|_X \leq \frac{1}{1 - \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i - 1}} \varepsilon^{\rho_i - 1} + \tau \right)} \|y - \bar{y}\|_X. \tag{3.37}$$

Demonstração: Dado $y \in X$, com $\|y\|_X \leq \varepsilon$, defina $F : X \to X$, por $F(x) = y + \sum_{i=1}^{m} S_i(x) + T(x)$.

Queremos mostrar que F restrita a $\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0) = \{x \in X : \|x\|_X \leq \frac{2\varepsilon}{1-\tau}\}$ é uma contração que satisfaz $F(\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)) \subset \overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$.

Mostremos primeiramente que $F(\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)) \subset \overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$.

Para isso, observe que para $x \in \overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|F(x)\|_X &= \|y + \sum_{i=1}^{m} S_i(x) + T(x)\|_X \\
&\leq \|y\|_X + \sum_{i=1}^{m} \|S_i(x)\|_X + \|T(x)\|_X \\
&\leq \|y\|_X + \sum_{i=1}^{m} k_i \|x\|_X^{\rho_i} + \tau \|x\|_X \\
&\leq \varepsilon + \sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i}} \varepsilon^{\rho_i} + \frac{2\tau\varepsilon}{1-\tau} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i - 1}} \varepsilon^{\rho_i - 1} + \tau + 1 \right) \frac{\varepsilon}{1-\tau} \\
&< (1+1) \frac{\varepsilon}{1-\tau} \\
&= \frac{2\varepsilon}{1-\tau},
\end{aligned}$$

como queríamos.

Agora, para mostrar que F é uma contração, sejam $x, z \in \overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(z)\|_X &= \|y + \sum_{i=1}^{m} S_i(x) + T(x) - y - \sum_{i=1}^{m} S_i(z) - T(z)\|_X \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \|S_i(x) - S_i(z)\|_X + \|T(x) - T(z)\|_X \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} k_i \|x - z\|_X (\|x\|^{\rho_i - 1} + \|z\|^{\rho_i - 1}) + \tau \|x - z\|_X \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i - 1}} \varepsilon^{\rho_i - 1} + \tau \right) \|x - z\|_X.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $0 < \varepsilon < R$ e $R > 0$ é a menor raiz positiva da equação (3.35), segue $\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i - 1}} \varepsilon^{\rho_i - 1} + \tau - 1 < 0$, donde concluí-se que F restrita ao conjunto $\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$ é uma contração que satisfaz $F(\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)) \subset \overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$.

Observe que $\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0) \subset X$ é um conjunto fechado em X. Assim, munindo $\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$ com a métrica

$$d(a, b) := \|a - b\|_X,$$

concluí-se que o par $(\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0), d)$ é um espaço métrico completo, pois um subespaço métrico fechado de um espaço completo é completo.

Como $(\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0), d)$ é completo e F é uma contração neste subespaço, então, pelo Teorema do ponto fixo de Banach para contrações, segue que F possui apenas um ponto fixo em $\overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$, ou seja, existe um único $x \in \overline{B}_{\frac{2\varepsilon}{1-\tau}}(0)$ tal que x é uma solução da equação $x = y + \sum_{i=1}^{m} S_i(x) + T(x)$.

Para concluir o resultado, mostraremos a dependência continua em relação ao dado inicial y. Para isso, seja $\bar{x} = \bar{y} + \sum_{i=1}^{m} S_i(\bar{x}) + T(\bar{x})$, com $\|\bar{y}\|_X \leq \varepsilon$ e $\|\bar{x}\|_X \leq \frac{2\varepsilon}{1-\tau}$ Assim,

$$\begin{aligned}
\|x - \bar{x}\|_X &= \|y + \sum_{i=1}^{m} S_i(x) + T(x) - \bar{y} - \sum_{i=1}^{m} S_i(\bar{x}) - T(\bar{x})\|_X \\
&\leq \|y - \bar{y}\|_X + \sum_{i=1}^{m} \|S_i(x) - S_i(\bar{x})\|_X + \|T(x) - T(\bar{x})\|_X \\
&\leq \|y - \bar{y}\|_X + \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{2^{\rho_i} k_i}{(1-\tau)^{\rho_i - 1}} \varepsilon^{\rho_i - 1} + \tau \right) \|x - \bar{x}\|_X
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\left(1-\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{2^{\rho_i}k_i}{(1-\tau)^{\rho_i-1}}\varepsilon^{\rho_i-1}+\tau\right)\right)\|x-\bar{x}\|_X \leq \|y-\bar{y}\|_X,$$

ou seja,

$$\|x-\bar{x}\|_X \leq \frac{1}{1-\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{2^{\rho_i}k_i}{(1-\tau)^{\rho_i-1}}\varepsilon^{\rho_i-1}+\tau\right)}\|y-\bar{y}\|_X.$$

■

A fim de demonstrarmos o Teorema 3.3.2, devemos aplicar o Lema Abstrato 3.3.3 para $X = E$. Para isso, precisaremos encontrar estimativas das parte não linear e linear da equação (3.22). Este será o objetivo das duas próximas seções.

3.3.1 Estimativa do Termo Não Linear

Lema 3.3.4 *Sejam $1 < p < q < \infty$, então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}-\frac{n}{q})-1}\|S(t)\phi\|_{(q,1)}\,dt \leq C\,\|\phi\|_{(p,1)}, \tag{3.38}$$

para toda $\phi \in L^{(p,1)}$.

Demonstração: Seja $t > 0$. Defina $\xi(t) = t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\|S(t)\phi\|_{(q,1)}$ e tome $p_1 < p < p_2 < q$ tais que $\dfrac{n}{p}-\dfrac{n}{p_2} < 2$. Pelo Lema 3.1.2, para $1 < p_k < q < \infty$, $k = 1, 2$, obtemos

$$\|S(t)\phi\|_{(q,1)} \leq C\,t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_k})}\|\phi\|_{(p_k,1)}, \quad k = 1, 2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\xi(t) &= t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1}\|S(t)\phi\|_{(q,1)} \\
&\leq C\,t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})-1+\frac{n}{2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_k})}\|\phi\|_{(p_k,1)} \\
&= C\,t^{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}-\frac{n}{p_k}-2)}\|\phi\|_{(p_k,1)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\xi(t) \leq C\,t^{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}-\frac{n}{p_k}-2)}\|\phi\|_{(p_k,1)}, \quad k = 1, 2.$$

Seja $\dfrac{1}{l_k} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n}{p_k} - \dfrac{n}{p} + 2\right)$, em que $0 < l_1 < 1 < l_2$, defina

$$h_k(t) = C\,\|\phi\|_{(p_k,1)} t^{\frac{1}{2}(\frac{n}{p} - \frac{n}{p_k} - 2)},$$

ou seja, $h_k(t) = \widetilde{C}\, t^{-\frac{1}{l_k}}$, onde $\widetilde{C} = C\,\|\phi\|_{(p_k,1)}$.
Agora, como $\xi(t) \leq h_k(t)$, pelo Teorema 1.2.14, item 2, temos $\xi^{**} \leq h_k^{**}$, $k = 1, 2$.
Logo

$$\|\xi\|_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)} \leq \|h_k\|_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)}, \;\; k = 1, 2. \tag{3.39}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\lambda_{h_k}(s) &= \mu\big(\{t > 0 : h_k(t) > s\}\big) \\
&= \mu\Big(\Big\{t \in (0,\infty) : \widetilde{C}\, t^{-\frac{1}{l_k}} > s\Big\}\Big) \\
&= \mu\Big(\Big\{t \in (0,\infty) : (\widetilde{C}\, s^{-1})^{l_k} > t\Big\}\Big) \\
&= (\widetilde{C}\, s^{-1})^{l_k}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
h_k^*(t) &= \inf\{s > 0 : \lambda_{h_k}(s) \leq t\} \\
&= \inf\Big\{s > 0 : (\widetilde{C}\, s^{-1})^{l_k} \leq t\Big\} \\
&= \widetilde{C}\, t^{-\frac{1}{l_k}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\|h_k\|^*_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{l_k}}\, h_k^*(t) = \widetilde{C}.$$

Daí, pela Proposição 2.1.11, tem-se

$$\|h_k\|_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)} \leq \frac{l_k}{l_k - 1}\|h_k\|^*_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)} = \frac{l_k}{l_k - 1} C\,\|\phi\|_{(p_k,1)}, \tag{3.40}$$

para $k = 1, 2$.
De (3.39) e (3.40), tem-se

$$\|\xi\|_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)} \leq \bar{C}\,\|\phi\|_{(p_k,1)}, \tag{3.41}$$

em que $\bar{C} = \dfrac{l_k}{l_k - 1} C$.

Note que a aplicação $\phi \to T\phi = \xi$ é sublinear e de (3.41), tem-se

$$\|T\phi\|_{L^{(l_k,\infty)}(0,\infty)} \leq \bar{C}\|\phi\|_{(p_k,1)}, \;\; \text{para } k = 1, 2.$$

Tome $\theta \in (0,1)$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$ e observe que

$$\begin{aligned}
\frac{\theta}{l_1} + \frac{1-\theta}{l_2} &= \frac{\theta}{2}\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p} + 2\right) + \frac{1-\theta}{2}\left(\frac{n}{p_2} - \frac{n}{p} + 2\right) \\
&= \frac{\theta}{2}\left(\frac{n}{p_1} - \frac{n}{p} + 2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_2} - \frac{n}{p} + 2\right) - \frac{\theta}{2}\left(\frac{n}{p_2} - \frac{n}{p} + 2\right) \\
&= \frac{\theta}{2}\frac{n}{p_1} + \frac{1}{2}\frac{n}{p_2} - \frac{1}{2}\frac{n}{p} + 1 - \frac{\theta}{2}\frac{n}{p_2} \\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}\right) - \frac{n}{2}\frac{1}{p} + 1 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Daí, do Teorema de Interpolação 2.4.3, para $r = 1$, segue que existe $B = B(\theta)$ tal que

$$\|T\phi\|_{L^{(1,1)}(0,\infty)} \leq B\|\phi\|_{(p,1)}.$$

Pela Proposição 2.1.3, tem-se

$$\|T\phi\|_{L^1(0,\infty)} = \|T\phi\|_{L^{(1,1)}(0,\infty)}.$$

Assim,

$$\|\xi\|_{L^1(0,\infty)} = \|T\phi\|_{L^1(0,\infty)} \leq B\|\phi\|_{(p,1)}.$$

Portanto,

$$\int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(\frac{n}{p} - \frac{n}{q})-1}\|S(t)\phi\|_{(q,1)}\, dt \leq B\|\phi\|_{(p,1)}.$$

■

Agora considere o operador

$$\mathcal{C}(h)(x) = \int_0^\infty S(s)f(h(s,x))ds.$$

O próximo lema trata da continuidade do operador $C(h)$, que será utilizada para obter a estimativa do termo não linear da formulação mild do nosso problema.

Lema 3.3.5 *Sejam $\frac{n}{n-2} < \rho < \infty$ e $h \in L^\infty((0,\infty), L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)})$, então*

$$\|\mathcal{C}(h)\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq K \sup_{t>0} \|h(t)\|^\rho_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}. \tag{3.42}$$

Demonstração: Por simplicidade, denotemos $l = \frac{n(\rho-1)}{2}$. Além disso, por abuso de notação, denotaremos $h(t) = h$. Como $\frac{n}{n-2} < \rho < \infty$, então $1 < \rho < l$. Agora, note que se $h \in L^{(l,\infty)}$, então $h^\rho \in L^{(\frac{l}{\rho},\infty)}$, pois

$$\begin{aligned}
\|h^\rho\|^*_{(\frac{l}{\rho},\infty)} &= \sup_{\tau>0} \tau^{\frac{\rho}{l}} (h^\rho)^* \\
&= \sup_{\tau>0} \left[\tau^{\frac{1}{l}} (h^*)\right]^\rho \\
&\leq \left[\sup_{\tau>0} \tau^{\frac{1}{l}} (h^*)\right]^\rho \\
&= (\|h\|^*_{(l,\infty)})^\rho
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\|h^\rho\|^*_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq (\|h\|^*_{(l,\infty)})^\rho. \tag{3.43}$$

Além disso, da Proposição 2.1.11, tem-se

$$\|h^\rho\|^*_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \|h^\rho\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \frac{\frac{l}{\rho}}{\frac{l}{\rho}-1}\|h^\rho\|^*_{(\frac{l}{\rho},\infty)} = a\|h^\rho\|^*_{(\frac{l}{\rho},\infty)}, \tag{3.44}$$

em que $a = \dfrac{l}{l-\rho}$.

Daí, da Proposição 2.1.11 e de (3.43), segue que

$$\begin{aligned}
\|h^\rho\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} &\leq a\|h^\rho\|^*_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \\
&\leq a(\|h\|^*_{(l,\infty)})^\rho \\
&\leq a\|h\|^\rho_{(l,\infty)},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

ou seja, $h^\rho \in L^{(\frac{l}{\rho},\infty)}$.

Agora, como $|f(h)| \leq \eta|h|^\rho$, então, pela desigualdade (3.45), obtém-se

$$\|f(h)\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \eta\||h|^\rho\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \eta a\|h\|^\rho_{(l,\infty)}. \tag{3.46}$$

Seja $\phi \in L^{(l',1)}$, em que $l' = \dfrac{l}{l-1}$. Note que $l' < \dfrac{l}{l-\rho}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}\left(\frac{1}{l'} - \frac{l-\rho}{l}\right) - 1 &= \frac{n}{2}\left(\frac{l-1}{l} - \frac{l-\rho}{l}\right) - 1 \\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{-1+\rho}{l}\right) - 1 \\
&= \frac{n}{2}(-1+\rho)\frac{2}{n(\rho-1)} - 1 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Usando, dualidade e a desigualdade de Hölder Generalizada (2.18), obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(h)\|_{(l,\infty)} &= \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{C}(h)\, \phi(x)\, dx \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (S(s) f(h)) \phi(x)\, dx\, ds \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} f(h)\, (S(s)\phi)\, dx\, ds \right| \\
&\leq \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \int_0^\infty C_1 \|f(h)\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \|(S(s)\phi)\|_{(\frac{l}{l-\rho},1)}\, ds.
\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade (3.46), segue que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(h)\|_{(l,\infty)} &\leq C_1 \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \int_0^\infty \eta\, a\, \|h(s)\|^\rho_{(l,\infty)} \|(S(s)\phi)\|_{(\frac{l}{l-\rho},1)}\, ds \\
&\leq C_1 \eta\, a \sup_{t>0} \|h(t)\|^\rho_{(l,\infty)} \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \int_0^\infty \|(S(s)\phi)\|_{(\frac{l}{l-\rho},1)}\, ds.
\end{aligned}$$

Usando o Lema 3.3.4, com $p = l'$ e $q = \dfrac{l}{l-\rho}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(h)\|_{(l,\infty)} &= C_1 \eta\, a \sup_{t>0} \|h(t)\|^\rho_{(l,\infty)} \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}(\frac{n}{l'}-\frac{n}{q})-1} \|(S(s)\phi)\|_{(q,1)}\, ds \\
&\leq C_1 \eta\, a \sup_{t>0} \big\|h(t)\big\|^\rho_{(l,\infty)} \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} C_2 \big\|\phi\big\|_{(l',1)} \\
&= K \sup_{t>0} \|h(t)\|^\rho_{(l,\infty)},
\end{aligned}$$

em que $K = \eta\, a\, C_1 C_2$.

■

Lema 3.3.6 *Seja $\frac{n}{n-2} < \rho < \infty$. Se $u, v \in E$, então existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \big\|B(u)(t) - B(v)(t)\big\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq\; & K \sup_{t>0} \big\|u(t) - v(t)\big\|^{\rho-1}_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \\
& \left(\sup_{t>0} \big\|u(t)\big\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} + \sup_{t>0} \big\|v(t)\big\|^{\rho-1}_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \right).
\end{aligned}$$

Demonstração: Seja

$$h(s) = \begin{cases} u(t-s,.) & , \quad s \in [0,t], \\ 0 & , \quad \text{c. c.} \end{cases}$$

Note que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(h(t))x &= \int_0^\infty S(s) f(h(s)x)\, ds \\ &= \int_0^t S(s) f(u(t-s,x))\, ds \\ &= \int_0^t S(t-\xi) f(u(\xi,x))\, d\xi, \ \text{ onde } \ \xi = t-s \\ &= -B(u)(t,x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{C}(h) = -B(u). \tag{3.47}$$

Agora, tome

$$g(s) = \begin{cases} v(t-s,.) & , \quad s \in [0,t], \\ 0 & , \quad \text{c. c.,} \end{cases}$$

e considere $l = \dfrac{n(\rho-1)}{2}$.

Como $\big|f(h(t)) - f(g(t))\big| \leq \eta \big|h(t) - g(t)\big| \left(\big|h(t)\big|^{\rho-1} + \big|g(t)\big|^{\rho-1}\right)$, então

$$\big\|f(h(t)) - f(g(t))\big\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \eta \left\| |h(t) - g(t)| \left(\big|h(t)\big|^{\rho-1} + \big|g(t)\big|^{\rho-1}\right) \right\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)}.$$

Pela Desigualdade de Hölder generalizada (2.18), com $p_1 = l,\ p_2 = \dfrac{l}{\rho-1},\ q_1 = q_2 = s = \infty$ e $r = \dfrac{l}{\rho}$, tem-se

$$\big\|f(h(t)) - f(g(t))\big\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \eta\, C_1 \big\|h(t) - g(t)\big\|_{(l,\infty)} \Big\| \big|h(t)\big|^{\rho-1} + \big|g(t)\big|^{\rho-1} \Big\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)}.$$

Agora, pela desigualdade triangular, obtém-se

$$\|f(h(t)) - f(g(t))\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \leq \eta\, C_1 \|h(t) - g(t)\|_{(l,\infty)} (\|h(t)\|^{\rho-1}_{(\frac{l}{\rho},\infty)} + \|g(t)\|^{\rho-1}_{(\frac{l}{\rho},\infty)}). \tag{3.48}$$

Por outro lado, usando dualidade, e a Desigualdade de Hölder generalizada (2.18), com $p_1 = \dfrac{l}{\rho}$, $p_2 = \dfrac{l}{l-\rho}$, $q_1 = \infty$, $q_2 = 1$, $r = s = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(h(t)) - \mathcal{C}(g(t))\|_{(l,\infty)} &= \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{C}(h(t)) - \mathcal{C}(g(t))\,\phi(x)\,dx \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} [S(s)(f(h(s)) - f(g(s)))]\phi(x)\,dx\,ds \right| \\
&= \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (f(h(s)) - f(g(s)))\,(S(s)\phi(x))\,dx\,ds \right| \\
&\le \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \int_0^\infty C_2 \|(f(h(s)) - f(g(s)))\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \|(S(s)\phi(x))\|_{(\frac{l}{l-\rho},1)}\,ds.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.48), tem-se

$$\begin{aligned}
\left\|\mathcal{C}(h(t)) - \mathcal{C}(g(t))\right\|_{(l,\infty)} &\le \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \int_0^\infty C_2 C_1 \eta\,\|h(s) - g(s)\|_{(l,\infty)} \Big(\||h(s)|^{\rho-1}\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} + \\
&\qquad \||g(s)|^{\rho-1})\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)} \Big) \|S(s)\phi(x)\|_{(\frac{l}{l-\rho},1)}\,ds \\
&= C_2 C_1 \eta \sup_{t>0} \|h(t) - g(t)\|_{(l,\infty)} \left(\sup_{t>0} \|h(t)\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} + \sup_{t>0} \|g(t))\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} \right) \\
&\qquad \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} \left\{ \int_0^\infty \|S(s)\phi(x)\|_{(\frac{l}{l-\rho},1)}\,ds \right\}.
\end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 3.3.4, com $p = l'$, $q = \dfrac{l}{l-\rho}$ e $\dfrac{1}{2}(\dfrac{n}{p} - \dfrac{n}{q}) - 1 = 0$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(h(t)) - \mathcal{C}(g(t))\|_{(l,\infty)} &\le C_2 C_1 \eta \sup_{t>0} \|h(t) - g(t)\|_{(l,\infty)} \\
&\qquad \left(\sup_{t>0} \|h(t)\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} + \sup_{t>0} \|g(t))\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} \right) \sup_{\|\phi\|_{(l',1)}=1} C_3 \|\phi\|_{(l',1)} \\
&= K \sup_{t>0} \|h(t) - g(t)\|_{(l,\infty)} \left(\sup_{t>0} \|h(t)\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} + \sup_{t>0} \|g(t))\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} \right),
\end{aligned}$$

em que, $K = C_1 C_2 C_3 \eta$.

Assim, da igualdade (3.47), segue que

$$\sup_{t>0} \left\|B(u)(t) - B(v)(t)\right\|_{(l,\infty)} \le K \sup_{t>0} \left\|u(t) - v(t)\right\|_{(l,\infty)} \left(\sup_{t>0} \left\|u(t)\right\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} + \sup_{t>0} \left\|v(t)\right\|^{\rho-1}_{(l,\infty)} \right).$$

Assim, concluímos que

$$\big\|B(u)(t)-B(v)(t)\big\|_E \leq K\big\|u(t)-v(t)\big\|_E\left(\big\|u(t)\big\|_E^{\rho-1}+\big\|v(t)\big\|_E^{\rho-1}\right).$$

∎

Para demonstrar o Teorema 3.3.2, devemos mostrar que a solução u converge fraco$-*$ para o dado inicial u_0, quando $t\to 0^+$, em $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$. Para isso, precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.3.7 *Se a função $u(t,x)\in E$, então*

$$Bu(t,x)\to 0, \quad \textit{quando } t\to 0^+,$$

em que o limite é tomado na topologia fraca$-*$ de $L^{(l,\infty)}$, onde $l=\frac{n(\rho-1)}{2}$.

Demonstração: Para verificar a convergência da parte não linear da equação integral (3.24) para a função $0\in L^{(l,\infty)}$, na topologia fraco$-*$ de $L^{(l,\infty)}$, devemos mostrar que

$$\langle B(u)(t,x),\phi\rangle \rightharpoonup 0, \text{ quando } t\to 0^+,$$

para toda $\phi\in L^{(l',1)}$.

Pelo Teorema 2.1.16 o conjunto C_c^∞ é denso em $L^{(l',1)}$, assim é suficiente mostrar que

$$\langle Bu(t,x),\phi\rangle \longrightarrow 0, \text{ quando } t\to 0^+,$$

para todo $\phi\in C_c^\infty$.

Seja $r>0$ tal que $\frac{l}{\rho}<r<\frac{n(n-1)}{2}$. Note que $\frac{1}{r}>\frac{2}{n(n-1)}$ e

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2}\left(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l}\right)+1 &> \frac{n}{2}\left(\frac{2}{n(n-1)}-\frac{\rho}{l}\right)+1\\
&= \frac{n}{2}\left(\frac{2}{n(n-1)}-\rho\frac{2}{\rho(n-1)}\right)+1\\
&= \frac{n}{2}\frac{2}{n-1}\left(\frac{1}{n}-1\right)+1\\
&= \frac{n}{n-1}\left(\frac{1-n}{n}\right)+1\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pelo Lema 3.1.2, com $p=\frac{l}{\rho}$ e $q_1=q_2=\infty$ e pela desigualdade (3.46) tem-se

$$\big\|S(t-s)f(u(s,\cdot))\big\|_{(r,\infty)} \leq C_1\,(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l})}\big\|f(u)\big\|_{(\frac{l}{\rho},\infty)},$$

$$\leq \; C_1\, \eta\, a(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l})}\big\|u\big\|^{\rho}_{(l,\infty)}. \tag{3.49}$$

Seja $\phi \in C_c^{\infty}$. Pelo Teorema de Fubini e a Desigualdade de Hölder generalizada (2.18), com $q_1 = \infty$, $q_2 = 1$, obtém-se

$$\begin{aligned}
\big|\langle B(u(t,x)), \phi\rangle\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} B(u(t,x))\phi(x)\, dx\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^t S(t-s)f(u(s,x))\phi(x) ds\, dx\right| \\
&= \left|\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} S(t-s)f(u(s,x))\phi(x) dx\, ds\right| \\
&\leq C_2\int_0^t \| S(t-s)f(u(s,\cdot))\|_{(r,\infty)}\|\phi\|_{(r',1)}\, ds\,,
\end{aligned}$$

em que r' é tal que $1 = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}$.

Agora, pela desigualdade (3.49), tem-se

$$\begin{aligned}
\big|\langle B(u(t,x)), \phi\rangle\big| &\leq C_2\int_0^t C_1\, \eta\, a(t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l})}\big\|u\big\|^{\rho}_{(l,\infty)}\|\phi\|_{(r',1)} ds \\
&= C_2 C_1\, \eta\, a\, \big\|u\big\|^{\rho}_{(l,\infty)}\big\|\phi\big\|_{(r',1)}\int_0^t (t-s)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l})} ds, \\
&= C_2 C_1\, \eta\, a\, I(y)\, \big\|u\big\|^{\rho}_{(l,\infty)}\|\phi\|_{(r',1)}\, t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l})+1} ds,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

onde $I(y) = \displaystyle\int_0^1 (1-y)^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{\rho}{l})} dy$ é convergente.

Portanto, calculando o limite quando $t \to 0^+$ em ambos os lados de (3.50), tem-se

$$\lim_{t\to 0^+} |\langle B(u(t,x)), \phi\rangle| \leq C_2 C_1 I(s)\big\|f\big\|_{(l,\infty)}\|\phi\|_{(r',1)} \lim_{t\to 0^+} t^{\frac{n}{2}(\frac{1}{r}-\frac{1}{l})} = 0.$$

■

3.3.2 Estimativa de termo linear

O objetivo desta seção é mostrar que a norma da parte linear pode ser controlada pela norma do dado inicial u_0 no espaço $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$ e que a parte linear converge fraco$-*$ em $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$.

Lema 3.3.8 *Se* $\frac{n}{n-2} < \rho < \infty$ *e* $u_0 \in L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$, *então existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sup_{t>0}\|S(t)u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq C\|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \tag{3.51}$$

e $S(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ quando $t \to 0^+$, sendo o limite na topologia fraca$-*$ de $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$.

Demonstração: Seja $u_0 \in L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$. Aplicando o Lema 3.1.2, com $k = 0$, $r = p = \frac{n(\rho-1)}{2}$ e $q_1 = q_2 = \infty$, obtém-se

$$\|S(t)u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq C\,\|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}.$$

Portanto,

$$\|S(t)u_0\|_E = \sup_{t>0} \|S(t)u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq C\|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}.$$

Agora, vamos verificar a convergência da parte linear da equação integral (3.24), para o dado inicial u_0, na topologia fraca$-*$ de $L^{(l,\infty)}$, em que $l = \dfrac{n(\rho-1)}{2}$.

Primeiramente, lembremos que $f_n \rightharpoonup f$ (fraco$-*$) é equivalente à convergência das integrais $\langle f_n, \phi\rangle \to \langle f, \phi\rangle$, para todo $\phi \in L^{(l',1)}$.

Assim, fixado $\phi \in L^{(l',1)}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\langle\, S(t)u_0, \phi\,\rangle &= \langle\, g(t,\cdot) * u_0, \phi\,\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(t, x-y)u_0(y)\,dy\phi(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} g(t, y-x)\phi(x)\,dx\,u_0(y)\,dy \\
&= \Big\langle\, g(t,\cdot) * \phi, u_0\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, S(t)\phi,\; u_0\,\Big\rangle \\
&= \Big\langle\, u_0,\; S(t)\phi\,\Big\rangle.
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Pela igualdade (3.52), obtém-se

$$\begin{aligned}
\langle\, S(t)u_0 - u_0, \phi\,\rangle &= \langle\, S(t)u_0, \phi\,\rangle - \langle\, u_0, \phi\,\rangle \\
&= \langle\, u_0,\; S(t)\phi\,\rangle - \langle\, u_0, \phi\,\rangle \\
&= \langle\, u_0,\; S(t)\phi - \phi\,\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, pela Desigualdade de Hölder generalizada (2.18), com $p_1 = l,\ p_2 = l'$, em que $1 = \frac{1}{l} + \frac{1}{l'},\ q_1 = \infty,\quad q_2 = 1$ e $\quad r = s = 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\big|\langle\, S(t)u_0 - u_0,\; \phi\,\rangle\big| &= \big|\langle\, u_0,\; S(t)\phi - \phi\,\rangle\big| \\
&\leq C\|u_0\|_{(l,\infty)}\|S(t)\phi - \phi\|_{(l',1)}.
\end{aligned}$$

Mostremos que $\|S(t)\phi - \phi\|_{(l',1)} \to 0$, quando $t \to 0^+$.

De fato, pela propriedade de homogeneidade (3.10),

$$g(t,x) = t^{-\frac{n}{2}} g(1, xt^{-\frac{1}{2}}) = \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \varphi_\varepsilon(x),$$

em que $\varepsilon = t^{\frac{1}{2}}$ e $\varphi(x) = g(1,x)$.

Como
$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(1,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (4\pi)^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4}} dx = 1,$$
e $\varepsilon \to 0$ se, e somente se, $t^{\frac{1}{2}} \to 0$, então pelo Teorema de Aproximação da identidade 2.3.4, tem-se
$$\|S(t)\phi - \phi\|_{(l',1)} = \|\varphi_\varepsilon * \phi - \phi\|_{(l',1)} \to 0, \quad \text{quando } \ t \to 0^+.$$

Assim,
$$|\langle S(t)u_0 - u_0, \phi\rangle| \longrightarrow 0, \ \text{ quando } \ t \to 0^+.$$

Portanto, $S(t)u_0 \to u_0$ na topologia fraca$-*$ de $L^{(l,\infty)}$.

∎

3.3.3 Prova do Teorema de Boa Colocação 3.3.2

Uma vez que já verificamos todas as hipóteses necessárias para aplicar o Lema Abstrato 3.3.3, estamos em condições de provar o teorema 3.3.2.

Demonstração: **(do Teorema de de Boa Colocação)**

(i) *(Existência e unicidade de solução)* Seja $X = E$. Considere o operador $B : X \to X$ dado por
$$B(u)(t,x) = -\int_0^t S(t-s) f(u(s,x))ds.$$

Pelo Lema 3.3.6, temos
$$\|B(u) - B(v)\|_E \leq k\,\|u - v\|_E \big(\|u\|_E^{\rho-1} + \|v\|_E^{\rho-1}\big).$$

Por hipótese, sabe-se que $\|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} < \delta$, então, pelo Lema 3.3.8, tem-se
$$\|S(t)u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq C\,\|u_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} < C\delta = \varepsilon.$$

Escolhendo $\delta > 0$ tal que $0 < C\delta = \varepsilon < R$, em que R é a menor raíz positiva da equação (3.35), com $X = E$, $i = 1$, $S_1 = B$, $y = S(t)u_0$, $T \equiv 0$ e $\tau = 0$, então
$$\|y\|_E = \|S(t)u_0\|_E < C\delta = \varepsilon.$$

Portanto, o Lema Abstrato 3.3.3 garante a existência de uma solução para a equação integral (3.24) em E e, além disso, garante que essa solução é única na bola fechada $\bar{B}_{2\varepsilon}(0)$.

Mais ainda, pelos Lemas 3.3.7 e 3.3.8, observa-se que $u(t,x) \rightharpoonup u_0$ quando $t \to 0^+$, topologia fraca$-*$ do espaço $L^{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)}$. Portanto, a solução $u \in E$ é uma solução mild global como definida em 3.3.1.

(*ii*) *(Dependência contínua)* Sejam u e v duas soluções com dados iniciais u_0 e v_0, respectivamente, satisfazendo as hipóteses da parte (i).

Pelo Lema 3.3.8, tem-se

$$\sup_{t>0} \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)} \leq C\|u_0 - v_0\|_{(\frac{n(\rho-1)}{2},\infty)},$$

ou seja,

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_E \leq C\|u_0 - v_0\|_E. \tag{3.53}$$

Agora, pelo Lema Abstrato 3.3.3, e pela desigualdade (3.53), temos

$$\begin{aligned} \|u(t,x) - v(t,x)\|_E &\leq \frac{1}{1 - 2^\rho k \varepsilon^{\rho-1}} \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_E \\ &\leq \frac{C}{1 - 2^\rho k \varepsilon^{\rho-1}} \|u_0 - v_0\|_E, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração do teorema.

■

Referências

[1] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, A Willey Interscience Publication, John Wiley and Sons, New York, Inc., 1995.

[2] Bennett, C., Sharpley, R., *Interpolation of Operators*, Academic Press, Inc, London, (1988).

[3] Berg, J., Lfstrom, *Interpolation Spaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[4] Braz, P., Ferreira, L. Loayza, M., *A nonlinear equation in Banach spaces and applications to the well-possedness of Cauchy problems*, Nonlinear Analysis 70 (2009) 1841-1849.

[5] Evans, L. C., *Partial Diferential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence RI, (1998).

[6] Ferreira, Lucas C. F., *Soluções Auto-Similares para a Equação Quase-Geostrófica e Comportamento Assintótico*, Tese de Doutorado, Departamento de matemática, Março (2005), (document).

[7] Ferreira, L. C. F., Villamizar-Roa, E. J., *Self-Similar solutions uniquenes and long time asymptotic be havior for the semilinear equation*, Diferential Integral Equations, 19(12) (2006) 1349-1370.

[8] Folland, G. B., *Real Analysis, Modern Techniques and Their Applications*, Jhon Wiley & Sons, New York, (1984).

[9] Giga, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of Navier-Stokes system*, J. Differential Equations 62 (1986) 186-212.

[10] Grafakos, Loukas, *Classical fourier analysis*, Vol. 249. Springer, 2008.

[11] Hunt, R., *On $L^{p,q}$ spaces*, L'Enseignement Mathématique, (2) **12** 1966, 249 - 276.

[12] Kristiansson, E., *Decreasing Rearrangement and Lorentz $L^{(p,q)}$ Spaces*, Dissertação de Mestrado, Departament of Mathematics, december (2002).

[13] O'Neil R., *Convolution Operators and $L^{(p,q)}$ Spaces*, Duke Math. J. 30 (1963) 129-142.

[14] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, (1987).

[15] Stein, E.M. Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J., (1971).

[16] Weissler, F.B., *Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in* L^p, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980) 79-102.

[17] Weissler, F.B., *Existence and nonexistence of global solutions for semilinear heat equation*, Israel J. Math. 38 (1981) 29-40.

TERMO DE REPRODUÇÃO XEROGRÁFICA

Autorizo a reprodução xerográfica do presente Trabalho de Conclusão, na íntegra ou em partes, para fins de pesquisa.

São José do Rio Preto, 28 de abril de 2016

____

Marco Antonio Moya Rosas