

“Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)”

RODRIGO BORGES SANTOS

Orientador: Prof. Dr. Vicente Lopes Júnior

Dissertação apresentada a Universidade Estadual Paulista, UNESP - campus de Ilha Solteira, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Ilha Solteira – SP

Fevereiro /2008

Avenida Brasil, 56, Centro - Caixa Postal 31 - CEP 15385-000 - Ilha Solteira -SP, BRASIL.
Fone: 18 3743-1000 Fax: +55 18 3742-2735

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÍTULO: Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)

AUTOR: RODRIGO BORGES SANTOS

ORIENTADOR: Prof. Dr. VICENTE LOPES JÚNIOR

DATA DA REALIZAÇÃO: 21/02/2008

Aprovada com parte das exigências para obtenção do título de **MESTRE** em **ENGENHARIA MECÂNICA** pela comissão examinadora:

Prof. Dr. VICENTE LOPES JÚNIOR

Departamento de Engenharia Mecânica / UNESP - Ilha Solteira

Prof. Dr. NOBUO OKI

Departamento de Engenharia Elétrica / UNESP - Ilha Solteira

Prof. Dr. JOSÉ MANOEL BALTHAZAR

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / UNESP - Rio Claro

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação
Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

S237c	Santos, Rodrigo Borges Controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs) / Rodrigo Borges Santos. -- Ilha Solteira : [s.n.], 2008 135 p. : il. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2008 Orientador: Vicente Lopes Júnior Bibliografia: p. 124-130 1. Controle ativo de vibrações. 2. Desigualdades matriciais lineares. 3. Controle H^∞ .
-------	--

Dedicatória

À
Juraci, Wamer e Maria Regina
pelo amor, apoio e compreensão.
À meu Pai, João, (*in memoriam*), saudades...

“Não se pode ensinar tudo a alguém.
Pode-se, apenas, ajudá-lo a encontrar por si mesmo”
Galileu Galilei

AGRADECIMENTOS

À DEUS por me dar Oportunidades, Paz, Saúde, Amigos . . .

Ao Prof. Vicente Lopes Júnior por acreditar e apoiar a realização desta pesquisa. E, também, pela amizade criada nestes anos de convívio e por incentivar à pesquisa desde os tempos de iniciação científica.

Aos amigos de mestrado, Clayton, Camilo, Douglas, Maria Adriana, Paulo Tozoni, enfim, aos colegas do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) da UNESP/Ilha Solteira pelos momentos de aprendizagem, descontração e amizade.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro, projeto n.º 05/58503-1, que foi fundamental para a minha dedicação integral neste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica (DEM) e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM) da UNESP/Ilha Solteira por todo o apoio para a realização deste trabalho.

Aos professores do PPGEM que me ajudaram na minha formação.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões e comentários.

SANTOS, R. B. 2008. **Controle Ativo de Vibrações em Estruturas Flexíveis Utilizando Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)**. Dissertação de Mestrado (Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira.

Palavras-chave: *Controle Ativo de Vibrações, Controle H_∞ , Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) e Active Mass Damper (AMD).*

RESUMO

Este trabalho tem como propósito projetar controladores para aplicação em tempo real em uma estrutura flexível, objetivando a redução de vibração estrutural. Os controladores são projetados segundo o enfoque de otimização convexa, com formulações envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMIs). Duas diferentes sínteses de realimentação são consideradas. A primeira é o projeto de controladores por realimentação de estados, estimados por um observador. A segunda metodologia é baseada no controle H_∞ via realimentação do sinal de saída. O modelo matemático da estrutura, usado no projeto dos controladores, foi obtido utilizando o método de Lagrange. A estrutura considerada representa um modelo de um edifício flexível controlado por uma massa móvel (Active Mass Damper - AMD) localizada no topo. A estrutura é submetida a dois tipos de excitações, sísmica e senoidal. Uma mesa de vibração (Shake Table) foi usada para aplicar as excitações. Para rodar o experimento de controle foi usado uma placa de aquisição (MultiQ - PCI) e o software de controle Wincon. Os controladores foram desenvolvidos usando o Simulink e executado em tempo real usando o Wincon. Testes experimentais foram realizados para comprovação e avaliação das metodologias propostas.

SANTOS, R. B. 2008. **Active Vibration Control in Flexible Structures Using Linear Matrix Inequalities (LMIs)**. Master of Science in Mechanical Engineering Thesis, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira.

Keywords: *Active Vibration Control, H_∞ Control, Linear Matrix Inequalities (LMIs) and Active Mass Damper (AMD).*

ABSTRACT

The proposal of this work is to design real time controllers for application in flexible structure, aiming the structural vibration reduction. The controllers are designed by convex optimization involving linear matrix inequalities (LMIs) approaches. Two different methodologies to feedback the system are explained. The first one is the design controller by state feedback based on observer. The second one is based on H_∞ output feedback control. The mathematical model of the structure, used in the controller design, was obtained by Lagrange's method. The structure can represent a flexible building, and it is controlled by a driving mass located at the top. The structure is submitted to seismic and sinusoidal excitations. A vibration table (Shake Table) was used to apply the excitations. The experimental tests were realized using an acquisition board (MultiQ - PCI) and the Wincon control software. The controllers were developed using Simulink, and it run in real time using the Wincon software. Experimental tests were accomplished to validate and evaluate the proposal methodologies.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1. Desenho esquemático de um sistema de controle ativo.....	17
FIGURA 1.2. (a) Helicóptero e vórtices (b) Esquema das hélices com PZTs embutidos.....	18
FIGURA 1.3. Esqui Tradicional e esqui inteligente da companhia ACX.....	18
FIGURA 1.4. Aeronave com sistema AVC comercial.....	19
FIGURA 1.5. Alguns estragos provocados por terremoto no Japão.....	20
FIGURA 1.6. Alguns estragos provocados por terremoto no Peru.....	20
FIGURA 1.7. Sistemas de absorvedores de vibrações em edifícios.....	22
FIGURA 1.8. Edifício Kyobashi Seiwa , Tokyo, Japão.....	23
FIGURA 1.9. (a) Modelo Estrutural (Sistema AMD-2) (b) Mesa de Vibração (<i>Shake Table I</i>).....	24
FIGURA 2.1. Representação de um sistema dinâmico.....	27
FIGURA 2.2. Exemplo de um sistema de controle a malha aberta.....	28
FIGURA 2.3. Um exemplo de um sistema de controle a malha fechada.....	28
FIGURA 2.4. Modelagem matemática de um sistema dinâmico.....	30
FIGURA 2.5. Diagrama de blocos da resposta em frequência de um sistema.....	32
FIGURA 2.6. Representação em diagrama de blocos de um sistema em espaço de estados..	36
FIGURA 2.7. Incerteza aditiva.....	44
FIGURA 2.8. Incerteza multiplicativa na saída.....	44
FIGURA 2.9. Incerteza multiplicativa na entrada.....	44
FIGURA 2.10. Representação gráfica do conceito de estabilidade.....	47
FIGURA 2.11. Índices de desempenho no domínio do tempo.....	53
FIGURA 3.1. Interpretação geométrica do teorema da estabilidade.....	60
FIGURA 4.1. Diagrama de blocos do sistema com realimentação de estados.....	63
FIGURA 4.2. Representação gráfica de um observador dinâmico.....	68
FIGURA 4.3. Sistema de controle por realimentação de estados utilizando observador.....	70
FIGURA 4.4. Configuração de um sistema genérico de controle.....	73
FIGURA 4.5. Representação convexa do problema de controle.....	76

FIGURA 4.6. Planta aumentada para o problema de desempenho.....	78
FIGURA 4.7. Funções de Ponderação W_1 e W_2	81
FIGURA 4.8. Forma padrão da realimentação geral de um sistema com incerteza dinâmica.....	82
FIGURA 4.9. Problema de desempenho e robustez convertido em problema de robustez.....	86
FIGURA 4.10. Problema de desempenho e robustez convertido em problema de desempenho.....	87
FIGURA 4.11. Modelo com incerteza aditiva.....	88
FIGURA 4.12. Planta aumentada com a incerteza aditiva.....	88
FIGURA 4.13. Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho e robustez.....	89
FIGURA 4.14. Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho.....	91
FIGURA 4.15. Planta aumentada na forma final para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho.....	92
FIGURA 5.1. Sistema AMD-2 e equipamentos utilizados.....	95
FIGURA 5.2. Montagem experimental.....	95
FIGURA 5.3. Active Mass Damper (AMD).....	96
FIGURA 5.4. Representação do modelo AMD-2.....	97
FIGURA 5.5. Planta aumentada para o projeto visando desempenho.....	105
FIGURA 5.6. Ponderação sobre a função sensibilidade.....	106
FIGURA 5.7. FRFs do sistema com e sem controle.....	107
FIGURA 5.8. Função restrição de energia.....	107
FIGURA 5.9. Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.....	109
FIGURA 5.10. Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.....	109
FIGURA 5.11. Força de controle aplicada ao carro, em [V].	110
FIGURA 5.12. Sinal de distúrbio, que simula uma excitação real de um abalo sísmico.....	110
FIGURA 5.13. Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.....	111
FIGURA 5.14. Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.....	112
FIGURA 5.15. Força de controle aplicada ao carro, em [V].....	112
FIGURA 5.16. Sinal de distúrbio senoidal.....	113
FIGURA 5.17. FRF da estrutura para o sistema com e sem controle.....	114
FIGURA 5.18. Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.....	115

FIGURA 5.19. Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.....	116
FIGURA 5.20. Força de controle aplicada ao carro, em [V].....	116
FIGURA 5.21. Sinal de distúrbio, que simula uma excitação real de um abalo sísmico.....	117
FIGURA 5.22. Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.....	118
FIGURA 5.23. Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.....	118
FIGURA 5.24. Força de controle aplicada ao carro, em [V].....	119
FIGURA 5.25. Sinal de distúrbio senoidal.....	119
FIGURA A 2.1. Diagrama de simulação – projeto H_∞ via realimentação de estados.....	134
FIGURA A 2.2. Diagrama de simulação – projeto H_∞ via realimentação de saída.....	134

LISTA DE TABELAS

TABELA 2.1. Estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo.....	49
TABELA 2.2. Índices de desempenho no domínio do tempo.....	52
TABELA 5.1. Nomenclatura utilizada na modelagem do sistema AMD-2.....	98
TABELA 5.2. Valores RMS dos sinais obtidos experimentalmente e percentual de redução de vibração estrutural.....	120

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

A	Matriz dinâmica
A_f	Matriz dinâmica do sistema a malha fechada
A_i	Matriz dinâmica com a i -ésima incerteza
A_n	Matriz dinâmica nominal

B	Matriz de entrada
B₁	Matriz de entrada de distúrbio
B₂	Matriz de entrada de controle
C	Matriz de saídas
C_b	Matriz de controlabilidade
C_i	Matriz circulatória
D	Matriz de transmissão direta
<i>d_i(s)</i>	Sinal de distúrbio na entrada do sistema
<i>d_o(s)</i>	Sinal de distúrbio na saída do sistema
e	Vetor de erro entre o estado real e o estado estimado
<i>e(s)</i>	Sinal de erro entre o sinal de referência e o sinal medido
<i>e'</i>	Sinal de erro ponderado
D_v	Matriz de amortecimento viscoso
G_g	Matriz giroscópica
G	Função de transferência do sistema
G_c	Matriz função de transferência do modelo nominal
G_d	Matriz função de transferência do sinal de distúrbio
G_p	Matriz função de transferência do modelo de incerteza aditiva
H	Matriz função de transferência do sistema a malha fechada
H_{zw}	Matriz função de transferência entre a saída regulada e a entrada exógena
H_{qp}	Matriz função de transferência entre a saída e a entrada relacionadas a incerteza Δ
$\ \mathbf{H}\ _\infty$	Norma H _∞ do sistema
I	Matriz identidade
K	Função de transferência do controlador
K_c	Matriz de ganho de realimentação
K_e	Matriz de ganho do observador
<i>m(s)</i>	Sinal de ruído
M	Matriz de massa ou matriz de inércia
<i>n</i>	Ordem da matriz de estados

$\mathbf{O}_b$	Matriz de observabilidade
$\mathbf{p}$	Vetor de entrada relacionado a incerteza Δ
p	Vetor de parâmetros
$\mathbf{P}$	Planta generalizada contendo as interconexões entre os sinais de entrada e saída
$\mathbf{q}$	Vetor de saída relacionado a incerteza Δ
$\mathbf{q}_i$	Autovetor
$\mathbf{q}_k$	Vetor de coordenadas generalizada
$r(s)$	Sinal de referência a ser seguido
s	Operador de Laplace
$\mathbf{S}$	Função sensibilidade
$\mathbf{S}_p$	Matriz politópica do sistema
$\mathbf{S}_k$	Matriz de rigidez
$\mathbf{T}$	Função sensibilidade complementar
$\mathbf{u}$	Vetor de sinal de controle
$u(s)$	Sinal de controle
u'	Sinal de controle ponderado
$\mathbf{U}$	Função restrição de energia
$U(s)$	Transformada de Laplace do sinal de entrada
v	Número de vértices de um politopo
$\mathbf{V}(\mathbf{x})$	Função de Lyapunov
$\mathbf{w}$	Vetor de entradas de distúrbio (exógena)
$\mathbf{W}_1$	Função de ponderação sobre a função sensibilidade
$\mathbf{W}_2$	Função de ponderação sobre a função sensibilidade complementar
$\mathbf{W}_3$	Função de ponderação sobre a função restrição de energia
$\mathbf{W}_c$	Matriz gramiano de controlabilidade
$\mathbf{W}_o$	Matriz gramiano de observabilidade
$\mathbf{W}_u$	Filtro passa alta utilizado para restringir o sinal de controle
$\mathbf{W}_y$	Filtro passa baixa utilizado para aumentar o amortecimento
$\mathbf{x}$	Vetor de estados
$\hat{\mathbf{x}}$	Vetor de estados estimados

$\mathbf{x}_e$	Estado de equilíbrio
$\mathbf{x}_0$	Estado de origem
$\mathbf{y}$	Vetor de saídas medidas
$\hat{\mathbf{y}}$	Vetor de saídas estimadas
$y(s)$	Sinal de saída da planta
y'	Sinal de saída ponderado
$Y(s)$	Transformada de Laplace do sinal de saída
$\mathbf{z}$	Vetor de saídas reguladas

Letras Gregas

ω	Frequência em rad/s
ω_s	Frequência de corte para a função sensibilidade
ω_T	Frequência de corte para a função sensibilidade complementar
$\mathbb{C}$	Campo dos números complexos
λ	Autovalor
α_v	Coordenadas politópicas de um sistema politópico
σ_i	Valor singular (ganhos principais)
$\underline{\sigma}$	Valor singular mínimo
$\bar{\sigma}$	Valor singular máximo
γ	Custo (escalar para a norma H_∞)
θ	Fase entre a entrada e a saída do sistema.
Δ	Conjunto de incertezas
Δ_a	Incerteza aditiva
Δ_i	Incerteza multiplicativa na entrada
Δ_o	Incerteza multiplicativa na saída
Δ_p	Representação de uma perturbação fictícia

Siglas

AMD	Massa de Amortecimento Ativo (<i>Active Mass Damper</i>)
AVC	Controle Ativo de Vibrações (<i>Active Vibration Control</i>)
ATVAs	<i>Active Tuned Vibration Attenuators</i>
EVP	Problema de Autovalor (<i>Eigenvalue Minimization Problem</i>)
FRF	Função Resposta em Frequência
GEPV	Problema de Autovalor Generalizado (<i>Generalized Eigenvalue Minimization Problem</i>)
KYP	Lema de <i>Kalman - Yakubovich e Popov</i>
LDI	Inclusão Diferencial Linear (<i>Linear Deferential Inclusion</i>)
LMIs	Desigualdades Matriciais Lineares (<i>Linear Matrix Inequalities</i>)
LMIP	Problema de Factibilidade de uma LMI (<i>LMI Problem</i>)
LTi	Sistema Linear e Invariante no Tempo (<i>Linear Time Invariant</i>)
LQR	Regulador Linear Quadrático (<i>Linear Quadratic Regulator</i>)
MIMO	Sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (<i>Multiple Input – Multiple Output</i>)
PBH	Teste do posto de <i>Popov, Belevitch e Hautus</i>
PLDI	LDI politópica
PZT	Material piezelétrico (<i>Titanato-Zirconato-Chumbo</i>)
RMS	Valor médio quadrático (<i>Root Mean Square</i>)
SISO	Sistema de uma entrada e uma saída (<i>Single Input - Single Output</i>)

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO.....	17
1.1. Objetivos do Trabalho.....	25
1.2. Organização do Trabalho.....	25
2 - MODELAGEM E FUNDAMENTOS DE SISTEMAS DE CONTROLE....	27
2.1. Modelagem de Sistemas Dinâmicos.....	29
2.1.1. Modelagem no Domínio da Frequência de Sistemas SISO.....	31
2.1.2. Modelagem no Domínio da Frequência de Sistemas MIMO.....	33
2.1.3. Modelagem no Domínio do Tempo.....	33
2.1.4. Equação de Estado para Sistemas Mecânicos Lineares.....	36
2.2. Representação de Incertezas no Modelo.....	39
2.2.1. Incertezas Estruturadas.....	40
2.2.2. Incertezas Não Estruturadas.....	43
2.3. Estabilidade de Sistemas Dinâmicos.....	45
2.3.1. Ponto de Equilíbrio.....	45
2.3.2. Estabilidade de Lyapunov.....	46
2.3.3. Função de Lyapunov.....	47
2.3.4. Estabilidade de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo.....	48
2.3.5. Estabilidade de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade.....	49
2.4. Índices de Desempenho de Sistemas de Controle.....	52
3 - DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES.....	54
3.1. História do Uso das LMIs.....	54
3.2. Definições Sobre as LMIs.....	56
3.3. Estudo da Estabilidade Utilizando LMIs.....	58
3.4. Projeto de Sistemas de Controle Utilizando LMIs.....	60
4 - PROJETO DE SISTEMAS DE CONTROLE.....	63
4.1. Projeto via Realimentação de Estados.....	63
4.1.1. Controlabilidade.....	64
4.1.2. Observabilidade.....	65
4.1.3. Princípio da Dualidade.....	67
4.1.4. Observadores de Estados.....	67

4.1.5. Controle H_∞ via Realimentação de Estados.....	70
4.2. Projeto Robusto H_∞ via Realimentação da Saída.....	72
4.2.1. Configuração Geral do Problema de Controle.....	72
4.2.2. Representação do Sistema Segundo o Enfoque Convexo.....	76
4.2.3. Ganhos Principais e Norma Infinita.....	79
4.2.4. Análise de Robustez.....	82
4.2.5. Problema de Desempenho Robusto.....	85
4.2.6. Projeto Incluindo Robustez à Dinâmica Residual.....	87
4.2.7. Solução do Problema H_∞ via LMI.....	92
5 - APLICAÇÃO EXPERIMENTAL.....	94
5.1. Montagem Experimental.....	94
5.2. Modelo Matemático da Estrutura.....	97
5.3. Representação do Modelo no Espaço de Estados.....	102
5.4. Resultados Experimentais.....	104
5.4.1. Controle H_∞ via Realimentação da Saída.....	105
5.4.2. Controle H_∞ via Realimentação de Estados.....	113
6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	121
6.1. Conclusões.....	121
6.2. Sugestões para Futuros Trabalhos.....	122
6.3. Publicações Originadas a Partir do Presente Trabalho.....	123
7 - REFERÊNCIAS.....	124
APÊNDICE.....	131
A.1. Programas em Matlab®6.5.....	131
A.2. Procedimento Experimental.....	133

1 - Introdução

A redução de vibração estrutural têm sido, por um longo tempo, tratada por técnicas tradicionais de controle passivo feito pela adição de materiais viscoelásticos, absorvedores e alterações de projeto. Porém, estas técnicas podem em alguns casos comprometer requisitos como, por exemplo, a redução de peso, além de não apresentarem boas características de robustez. Entretanto, com o avanço das tecnologias aplicadas à engenharia estrutural e devido a grande exigência no desempenho de sistemas estruturais em diversas áreas de aplicação, principalmente militar, aeroespacial e civil, a busca por novas técnicas tornou-se imperativa. Esta busca tem levado as técnicas de controle ativo de vibração (AVC - *Active Vibration Control*). Nas últimas décadas, as metodologias de AVC têm recebido significantes contribuições, sobretudo devido aos avanços no processamento digital de sinais, proposição de novas metodologias de controle e o surgimento de novos materiais. Em geral, os sistemas de AVC agem produzindo vibrações no sentido contrário para reduzir as vibrações indesejadas. As técnicas de AVC utilizam forças de controle, aplicadas na estrutura por um controlador, que se baseiam em informações obtidas por um sensor. Estas forças procuram reduzir as amplitudes de vibração estrutural causadas por uma fonte de vibração indesejável de origem primária, figura 1.1.

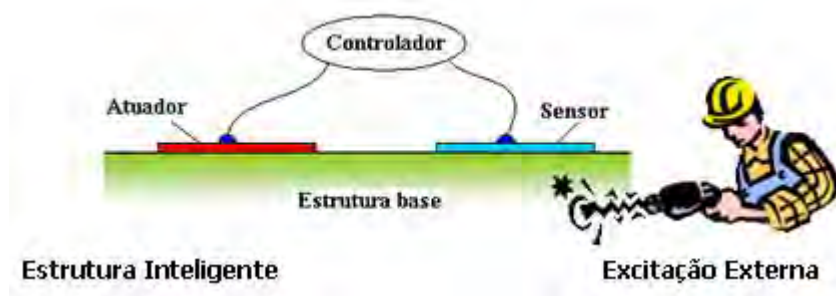


Figura 1.1: Desenho esquemático de um sistema de controle ativo.
(Fonte: BUENO, 2007)

Como aplicação militar do AVC, pode-se destacar a pesquisa financiada pelo exército americano, que estão embutindo cerâmicas piezelétricas dentro das hélices do rotor de helicópteros, as quais produzem uma resposta de realimentação que é utilizada para reduzir a vibração e o ruído dentro da cabine do piloto, figura 1.2 (THE INSTITUTE OF MATERIALS, MINERALS AND MINING, 2003).

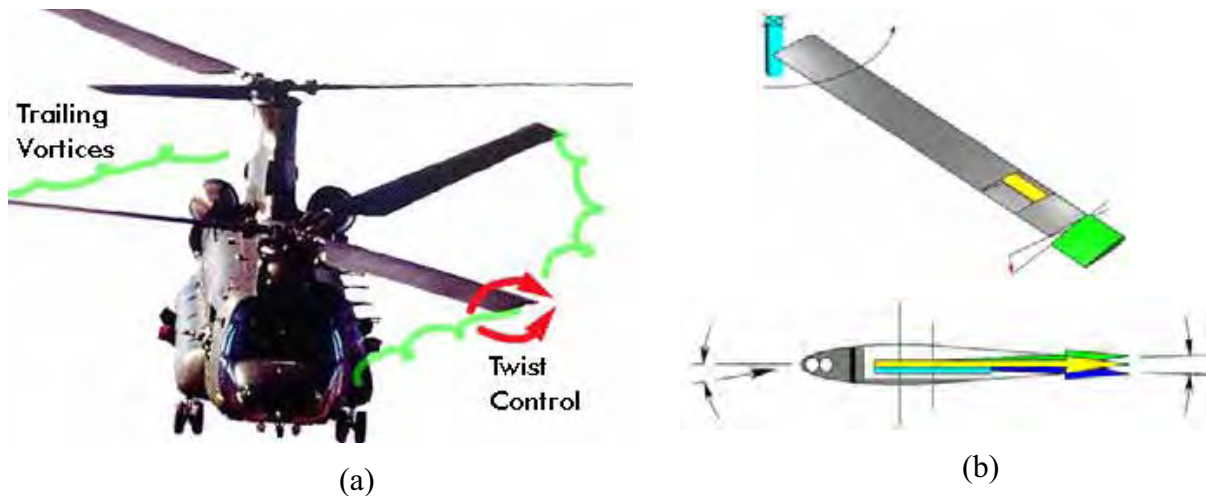
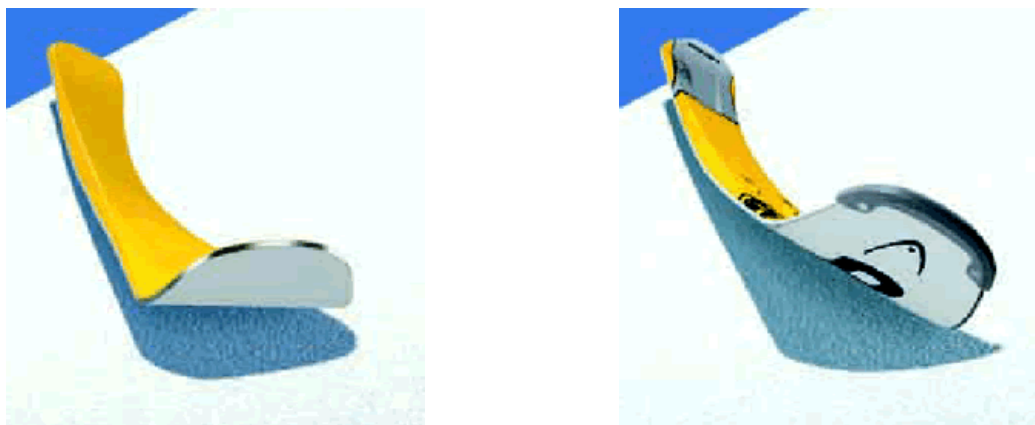


Figura 1.2: (a) Helicóptero e vórtices, (b) Esquema das hélices com PZTs embutidos.
(Fonte: BUENO, 2007)

No setor esportivo, a empresa K2 Inc (2003) desenvolveu os chamados “*esquis inteligentes*”. Estes possuem sensores e atuadores piezelétricos embutidos a sua estrutura. Os sensores percebem as vibrações e enviam um sinal a um circuito lógico que produz uma lei de controle a ser seguida pelo atuador. Os movimentos do atuador, no sentido oposto ao das vibrações, proporcionam maior estabilidade ao esqui, figura 1.3.



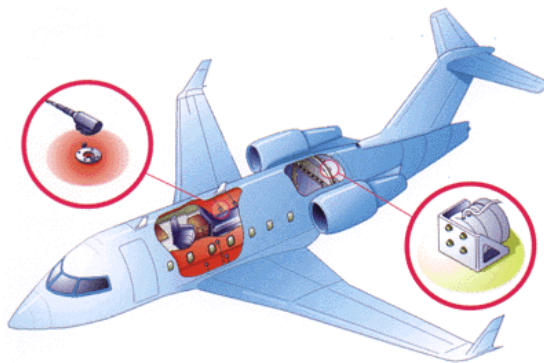
(a) esqui tradicional

(b) esqui inteligente

Figura 1.3: Esqui tradicional e esqui inteligente da companhia ACX.
(Fonte: BUENO, 2007)

Em estruturas aeroespaciais as vibrações indesejadas se originam nas fontes acústicas e vibracionais, com faixas típicas de frequências de 30 Hz até 10 kHz para fontes acústicas e 20 Hz até 2 kHz para fontes vibracionais (FORGRAVE et al, 1999). Todas estas perturbações

podem provocar, por exemplo, vibrações na fuselagem das aeronaves e causar ruído na cabine da tripulação e passageiros. Assim, atualmente já existem várias empresas no mercado, como exemplo, a empresa *Ultra Electronics Ltda* (2003), que desenvolveu, entre outros, um equipamento denominado *Active Tuned Vibration Attenuators (ATVAs)*, figura 1.4, composto por sensores/atuadores e controladores acoplados diretamente a fuselagem da aeronave para controle ativo de vibrações e ruídos (SILVA, 2005).



(a) Aeronave com controle ativo de vibrações



(b) Controlador ativo fixado a fuselagem

Figura 1.4: Aeronave com sistema AVC comercial.
(Fonte: SILVA, 2005)

Porém, não apenas em aplicações aeronáuticas é importante a redução de vibrações. Nas últimas décadas tem aumentado o interesse de engenheiros e pesquisadores no uso de sistemas de controle para atenuar os efeitos nocivos de eventos sísmicos. Um sismo (terremoto) é um fenômeno de vibração brusca e passageira da superfície da Terra, resultante de movimentos subterrâneos de placas rochosas, de atividade vulcânica, ou por deslocamento (migração) de gases no interior da Terra, principalmente o metano. O movimento é causado pela liberação rápida de grandes quantidades de energia sob a forma de ondas sísmicas. O maior terremoto já registado foi o Grande Terremoto do Chile, ocorrido no dia 22 de maio de 1960, e atingiu a capital, Santiago, e a cidade Concepción, registrando 9,5 pontos na escala Richter. Cerca de 5 mil pessoas morreram, 3 mil ficaram feridas e 2 milhões ficaram desabrigadas. Os prejuízos materiais alcançaram US\$ 500 milhões e os prejuízos emocionais são incalculáveis.

Recentemente uma série de terremotos vem ocorrendo. Fortes tremores atingiram o norte do Japão no dia 23 de outubro de 2004. Ao menos 21 pessoas foram mortas e mais de 1.500 ficaram feridas. Os tremores, de até 6,8 graus na escala Richter, ocorreram perto da cidade de Ojiya, no Estado de Niigata (noroeste de Tóquio) e atingiram várias localidades próximas. Este

foi o terremoto que fez mais vítimas no Japão desde o de Kobe, que deixou cerca de 6.400 mortos e mais de 43.000 feridos em janeiro de 1995. Em outubro de 2005 um terremoto de 7,6 graus na escala Richter abalou a região da Caxemira, dividida entre o Paquistão e a Índia. Estimou-se mais de 80 mil mortos e cerca de 3 milhões de pessoas desabrigadas. A figura 1.5 mostra alguns dos estragos provocados pelos tremores nessas regiões.



(a) Escombros de prédio de dez andares, destruído por terremoto em Islamabad, no Paquistão.



(b) Em Nagaoka, norte do Japão, buraco foi aberto em estrada pelo forte terremoto que atingiu a cidade.

Figura 1.5: Alguns estragos provocados por terremoto no Japão.

(Fonte: http://www1.folha.uol.com.br/folha/galeria/album/i_mundo_terremoto.shtml, acesso em 16/08/2007).

Não somente na Ásia este fenômeno é observado. No Peru, um tremor de 7,9 graus na escala Richter foi registrado na noite da quarta-feira do dia 15 de Agosto de 2007. Mais de 500 pessoas foram mortas e pelo menos 1.300 ficaram feridas. Foi o primeiro terremoto no país de uma intensidade tão forte. O tremor provocou várias destruições como mostra a figura 1.6.



(a) Estragos provocados pelo tremor na cidade de Ica, Peru.



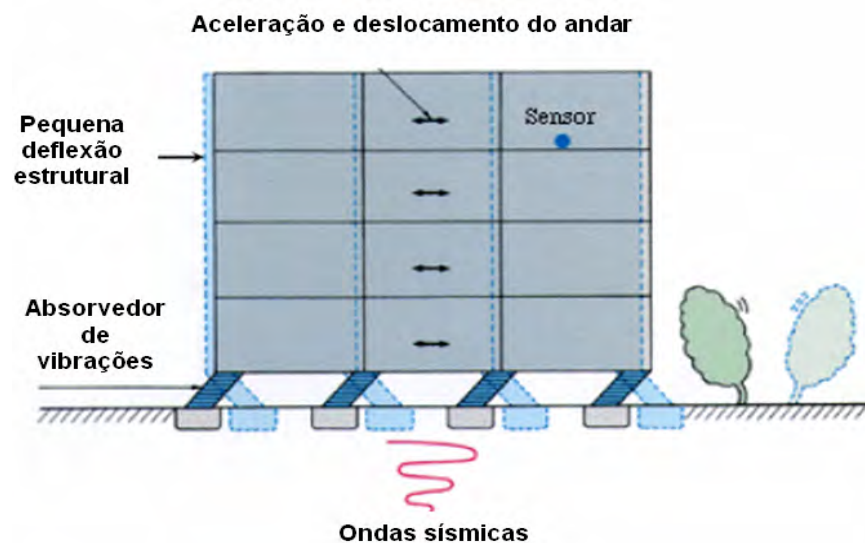
(b) Fenda aberta pelo terremoto perto da cidade de Chíncha, no Peru.

Figura 1.6: Alguns estragos provocados por terremoto no Peru.

(Fonte: http://noticias.uol.com.br/ultnot/album/070815peru_album.jhtm?abrefoto=22, acesso em 16/08/2007).

No entanto, projetos de edifícios, prédios residenciais, hospitais, escolas, entre outras instalações, principalmente em países como o Japão, Paquistão, Peru, Chile e Estados Unidos, onde estes eventos naturais são comuns, exigem o desenvolvimento de sistemas que possam absorver vibrações garantindo, especialmente, segurança as pessoas. Em geral, apenas grandes corporações desenvolvem estes projetos, pois além de alto custo têm grande complexidade (LIN et al, 1994, LIU et al, 2000).

Uma variedade de sistemas de controle é proposta para estas aplicações, podendo ser classificadas como controle passivo ou ativo. Os sistemas de controle passivos, tais como amortecedores construídos com materiais viscoelásticos, amortecedores de fricção, amortecedores líquidos ajustados, juntamente com sistemas base-isolação, foram desenvolvidos como meios de aumentar o amortecimento em uma estrutura (MATHEU, 1997, SOUZA, 2003, LEE; LI, 2003). No controle passivo são utilizados dispositivos que não exigem energia externa para operar. Eles dissipam a energia vibratória usando o próprio movimento da estrutura. Considerando que eles não injetam energia no sistema, eles não são capazes de desestabilizar a estrutura. Outra vantagem de tais dispositivos é a baixa exigência de manutenção. Exemplos de dispositivos passivos incluem, entre outros, a base-isolação e os amortecedores de fluidos viscosos. Um exemplo de projeto que utiliza o dispositivo de base-isolação é mostrado na Fig. 1.7a e o mais recentemente desenvolvido pela *Takenaka Corporation* (empresa Japonesa de Arquitetura, Engenharia e Construção), que utiliza sistemas de amortecedores pode ser visto na Fig. 1.7b.



(a)

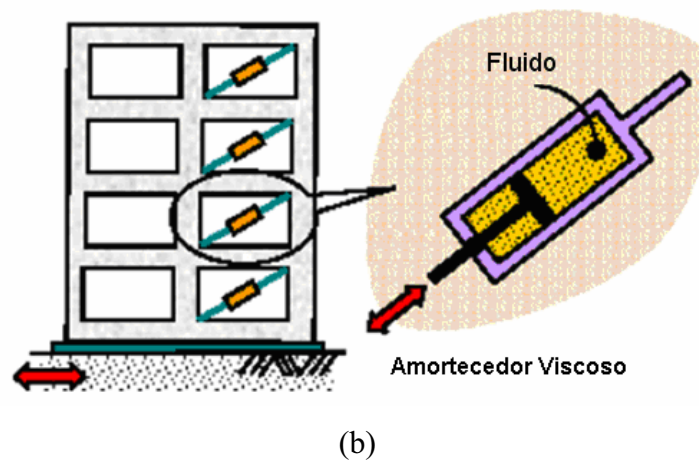


Figura 1.7: Sistemas de absorvedores de vibrações em edifícios.
(Fonte: MESQUITA NETO et al, 2007).

Estes sistemas são aceitos como meios viáveis para reduzir vibrações em estrutura. Entretanto, estes são limitados, pois não podem se adaptar às variações das condições de operação e são eficientes apenas em uma faixa de operação estreita. Assim, os sistemas passivos trabalham bem nas condições em que foram projetados, mas não são eficazes em outras situações.

Uma alternativa bastante versátil envolve o projeto de um sistema de controle ativo. O conceito de controle ativo se origina do fato de que opera usando fontes de energia externa para aplicar forças à estrutura. Estas forças são obtidas tipicamente baseadas nas medidas das respostas estruturais e/ou dos distúrbios. O dispositivo mais utilizado baseado no controle ativo é o *Active Mass Damper* (AMD). Este dispositivo inclui um atuador que é usado para posicionar uma massa a cada instante no topo de um edifício, aumentando o amortecimento da estrutura e a faixa de frequência operacional do dispositivo. A primeira implementação deste método de controle ativo foi executado em 1989, no edifício Kyobashi Seiwa, Tóquio, Japão, pela *Kajima Corporation* (Figura 1.8) (SAKAMOTO et al, 1994, SOONG; SPENCER JUNIOR, 2002).



Figura 1.8: Edifício Kyobashi Seiwa , Tokyo, Japão.
(Fonte: SAKAMOTO et al, 1994)

O estudo de algoritmos para controle ativo de vibrações em estruturas flexíveis se tornou uma área de enorme interesse, principalmente devido às inúmeras exigências de ótimo desempenho em sistemas mecânicos, como aeronaves e estruturas aeroespaciais (SILVA et al, 2003). Nesse sentido, modelos estruturais em escala reduzida são construídos e usados para estudar importantes aspectos de controle, de forma a garantir as condições exigidas, através da aplicação de diversos tipos de controladores.

Neste trabalho duas diferentes metodologias de controle são consideradas. A primeira metodologia é baseada no controle H_∞ via realimentação de estados e, a segunda é baseada no controle H_∞ via realimentação do sinal de saída. Essas metodologias foram, anteriormente, estudadas por Silva (2005) e Gonçalves (2003), ex-integrantes do Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes (GMSINT) da UNESP de Ilha Solteira. Porém, em seus trabalhos não foi possível a avaliação experimental dos controladores por eles projetados, pois o laboratório não possuía softwares e hardwares de controle em tempo real. Portanto, a contribuição deste trabalho é a verificação experimental de controladores projetados baseado nas metodologias propostas, dando assim, continuidade aos trabalhos citados. O modelo estrutural considerado representa um edifício de dois andares controlado por uma massa móvel (*Active Mass Damper - AMD*) localizada no topo. A estrutura é submetida a dois tipos de excitações: sísmica e senoidal. Uma

mesa de vibração (*Shake Table*) foi usada para simular as excitações. O modelo estrutural e a mesa de vibração são mostrados na figura 1.9 (a) e (b), respectivamente.



(a)



(b)

Figura 1.9: (a) Modelo Estrutural (Sistema AMD-2) (b) Mesa de Vibração (*Shake Table I*)

O controladores são projetados segundo o enfoque de otimização convexa, com formulações envolvendo desigualdades matriciais lineares (LMIs - *Linear Matrix Inequalities*). A utilização de LMIs se mostraram nos últimos anos como sendo uma ferramenta poderosa para solucionar problemas de otimização em engenharia. Especialmente, para projeto de sistemas de controle com inúmeras restrições, pois permitem que especificações possam ser formuladas por LMIs e posteriormente resolvidas utilizando sofisticadas técnicas de programação convexa.

Atualmente, as LMIs são estudadas por renomados pesquisadores mundiais e aplicadas nas mais diversas áreas: controle de sistemas contínuos e discretos no tempo (EL GHAOUI; NICULESCU, 2000), condição de estabilidade para sistemas variantes no tempo (GEROMEL et al, 1998, GEROMEL et al, 2006), controle ótimo, controle robusto, redução de modelos (GEROMEL et al, 2004, 2005, ASSUNÇÃO; PERES, 2001), controle de sistemas não lineares (TEIXEIRA et al, 2000), teoria de filtros robustos, identificação de sistemas, controle usando lógica fuzzy, detecção, localização e quantificação de falhas estruturais em equipamentos (ABDALLA et al, 1999, 2000). Sana e Rao (2001) utilizaram um sistema pendular simples com

dois graus de liberdade e fizeram restrições na forma de LMI para o potencial elétrico de entrada no atuador e testaram o controlador projetado em tempo real. Este mesmo sistema pendular foi simulado por Gonçalves *et al.* (2002), que realizou uma comparação entre o controle ótimo H_2 e controle ótimo H_∞ , em ambos os casos fazendo realimentação de estados e resolvendo via LMIs. Gonçalves *et al.* (2003a) e (2003b) simularam uma síntese de realimentação de estados usando LMIs clássicas, descritas em Boyd *et al.* (1994), considerando inclusões diferenciais lineares (LDI - *Linear Differential Inclusion*) com incerteza limitada por norma para um sistema mecânico 2DOF e para uma viga de alumínio biengastada, respectivamente. Sarracini e Serpa (2006) mostram resultados de um controlador H_∞ projetado com a formulação LMI para atenuação de uma viga engastada. O modelo reduzido da estrutura foi obtido através da redução de Guyan e os resultados obtidos foram significativos. Silva *et al.* (2006) apresentaram o projeto de um sistema de controle robusto utilizando LMIs para o controle ativo de vibração de uma placa. Neste contexto, os objetivos deste trabalho são apresentados a seguir.

1.1. Objetivos do Trabalho

Este trabalho tem como meta o projeto de controladores para aplicação em tempo real em uma estrutura flexível, objetivando a redução de vibração estrutural. Os controladores são projetados segundo o enfoque de otimização convexa com formulações envolvendo LMIs e, duas metodologias de controle são consideradas: o controle H_∞ via realimentação de estados, estimados por um observador e, o controle H_∞ via realimentação do sinal de saída. Testes experimentais foram realizados para comprovação e avaliação das metodologias propostas.

1.2. Organização do Trabalho

O trabalho está organizado em 4 partes. A primeira parte é apresentada no capítulo 1, onde é feita uma revisão da literatura sobre a importância e as diversas áreas de aplicação do controle ativo de vibração. Além disso, nesse capítulo são apresentados os objetivos do trabalho. A segunda parte está concentrada no capítulo 2, onde se discute a modelagem de sistemas dinâmicos, incertezas de sistemas dinâmicos e teoria da estabilidade de Lyapunov.

A terceira parte, apresentada nos capítulos 3 e 4, trata da teoria de controle utilizando as técnicas LMIs. Esta parte dá uma síntese geral das metodologias de controle propostas,

envolvendo o projeto de controle H_∞ via realimentação de estados e saída resolvidos por LMIs. Além disso, esta parte envolve os assuntos: controlabilidade, observabilidade e observadores de estado.

Por fim, a quarta parte, apresentada no capítulo 5, descreve o sistema AMD-2 utilizado nos testes experimentais, o equacionamento do modelo matemático do sistema, a montagem experimental e os resultados obtidos. As considerações finais, envolvendo as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no capítulo 6.

2 - Modelagem e Fundamentos de Sistemas de Controle

Sistemas dinâmicos são aqueles que evoluem com o tempo e são comumente referidos como plantas ou processos. A excitação é conhecida como sinal de entrada ou simplesmente entrada e a resposta como sinal de saída, ou simplesmente saída. Uma representação conveniente para a relação entre a entrada e a saída de um sistema dinâmico é através do diagrama de blocos, como mostra a figura 2.1.

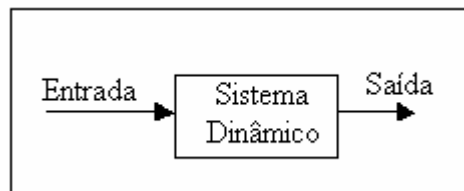


Figura 2.1: Representação de um sistema dinâmico

A figura 2.1 representa uma relação simples entrada-saída, no sentido em que a resposta é um resultado natural da excitação. Esta figura é típica de um sistema *não controlado* e descreve uma situação comum. No entanto, em muitas aplicações, é necessário assegurar que o sistema tenha um desempenho desejado e neste caso é preciso que se faça o projeto de um *sistema de controle*. Assim, em *sistemas controlados* o objetivo é conseguir uma resposta satisfatória através do uso de um *controlador* cuja saída chamada de sinal de controle, atua como entrada para o sistema a controlar. Se o modelo matemático do sistema é conhecido completamente o projetista é capaz de saber qual é a saída que uma determinada entrada provocará no sistema, e desta forma poderá determinar a entrada ao sistema, ou sinal de controle u , que produzirá uma saída desejada y .

Existem duas formas básicas de sistemas de controle: sistemas de controle a *malha aberta* e sistemas de controle a *malha fechada*. Para um sistema de controle a malha aberta, a entrada é escolhida com base na experiência, de tal forma que o sistema dê o valor de saída desejado. Essa saída, entretanto, não é modificada de forma a seguir as alterações nas condições de operação. Logo, em um sistema de controle a malha aberta, a saída não tem efeito no sinal de entrada (OGATA, 2000). Estes sistemas têm a vantagem de ser relativamente simples e, em consequência, de baixo custo.

Como exemplo de controle a malha aberta podemos considerar um forno elétrico o qual esquenta durante um tempo determinado para conseguir a temperatura desejada. Se os parâmetros (inércia térmica, isolamento, etc) são bem conhecidos o tempo em que a resistência deverá ficar ligada poderá ser determinada para cada temperatura desejada. No entanto, qualquer perturbação no sistema conduzirá a temperaturas inesperadas. A figura 2.2 mostra de forma esquemática este tipo de controle.

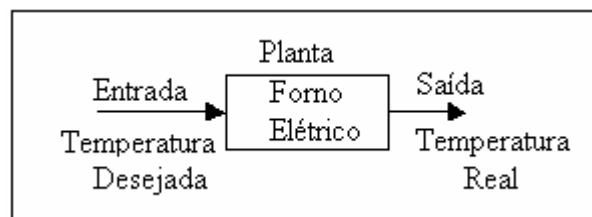


Figura 2.2: Exemplo de um sistema de controle a malha aberta.

Uma forma efetiva de controlar um sistema dinâmico é através do chamado *controle por realimentação* (retroação) ou controle *a malha fechada*. Em um sistema de controle a malha fechada, o sinal atuante de erro, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de retroação (que pode ser o próprio sinal de saída ou uma função do sinal de saída e de suas derivadas e/ou integrais), excita o controlador de modo a reduzir o erro e trazer o valor do sinal de saída para o valor desejado. A expressão controle a malha fechada acarreta sempre o uso de retroação a fim de reduzir o erro do sistema. A figura 2.3 mostra um esquema básico para um sistema de controle por realimentação.

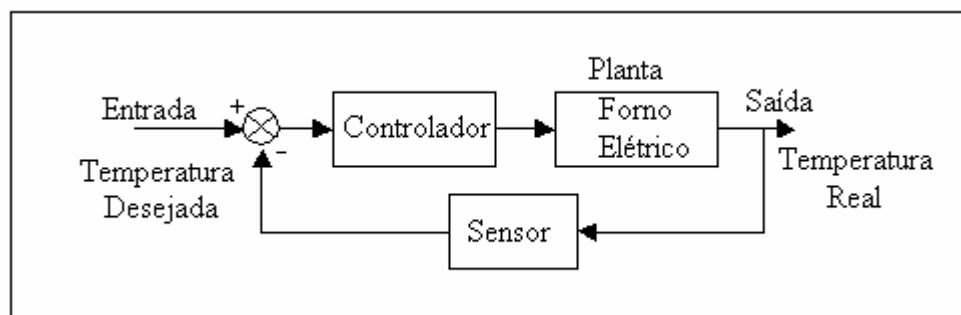


Figura 2.3: Um exemplo de um sistema de controle a malha fechada.

Sistemas de controle por realimentação têm muitas vantagens sobre aqueles em malha aberta. Eles são mais estáveis podendo inclusive estabilizar sistemas que se considerados separadamente são instáveis. São capazes de compensar distúrbios inesperados e incertezas no

modelo da planta, nas medições e nos atuadores. A propriedade de um sistema ser pouco sensível a variações inesperadas na dinâmica é chamada de *robustez*. Na verdade esta é a principal propriedade dos sistemas de controle por realimentação. Por outro lado, estes sistemas de controle são mais caros que os sistemas de controle em malha aberta, pois precisam de sensores e unidades de processamento para a implementação do controlador.

O problema fundamental no projeto de um sistema de controle consiste em determinar uma lei de controle que permita que um sistema dinâmico se comporte da maneira requerida, apresentando estabilidade e propriedades desejáveis de desempenho e robustez diante de incertezas.

No estudo de sistemas de controle, precisamos ser capazes de modelar sistemas dinâmicos e de analisar características dinâmicas. A seguir é introduzida a modelagem de sistemas dinâmicos para controle ativo de vibrações.

2.1. Modelagem de Sistemas Dinâmicos

A modelagem matemática de um sistema dinâmico é definida como um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com exatidão ou, pelo menos, de forma bastante aceitável.

Na obtenção de um modelo matemático razoavelmente simplificado, freqüentemente se torna necessário ignorar certas propriedades físicas inerentes ao sistema. Em particular, quando se deseja obter um modelo matemático linear a parâmetros concentrados (isto é, um modelo que empregue equações diferenciais ordinárias) sempre será necessário ignorar certas não-linearidades. Dessa forma, a dinâmica dos sistemas sejam eles mecânicos, elétricos, térmicos, biológicos ou econômicos, pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Tais equações diferenciais podem ser obtidas utilizando as leis da física que governam o sistema, como por exemplo, as equações de Newton para sistemas mecânicos ou as equações de Kirchhoff para sistemas elétricos. A figura 2.4 mostra, de forma esquemática, a modelagem de um sistema mecânico.

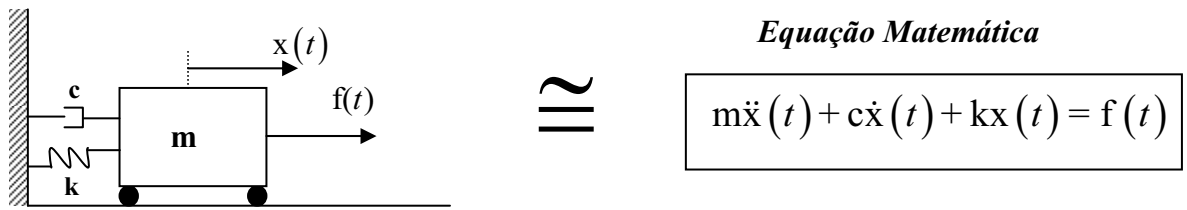


Figura 2.4: Modelagem matemática de um sistema dinâmico.

Quando o modelo de um sistema mecânico respeita as propriedades de *aditividade* e de *homogeneidade*, diz-se que este sistema é linear. Embora na realidade todo sistema seja não linear, é razoável assumir modelos lineares por vários motivos. O principal deles é que existe uma vasta gama de ferramentas de projeto para sistemas lineares. Dentro de certas regiões um sistema dinâmico pode ter comportamento puramente linear ou as não linearidades podem ser aproximadas por um sistema linear. As propriedades de aditividade e homogeneidade são descritas a seguir:

1. Um sistema com entrada $\mathbf{u}$ e saída $\mathbf{y}$, tem a propriedade de aditividade se,

$$\mathbf{T}\{\mathbf{u}\} = \mathbf{y}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{T}\{\mathbf{u}_2\} = \mathbf{y}_2 \quad (2.1)$$

tem-se,

$$\mathbf{T}\{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 \quad (2.2)$$

2. Um sistema com entrada $\mathbf{u}$ e saída $\mathbf{y}$, tem a propriedade de homogeneidade se,

$$\mathbf{T}\{\alpha\mathbf{u}\} = \alpha\mathbf{y}, \quad \forall \alpha \text{ constante}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Quando um sistema não respeita alguma das propriedades anteriores, ele é dito não linear. Recomenda-se que o projeto de sistema de controle sempre seja iniciado considerando modelos lineares. Algumas teorias de controle, como o controle robusto, são utilizadas para considerar alguns casos em que as não linearidades não são consideradas. É certo que muitas vezes o desempenho de um sistema de controle robusto é inferior ao de um sistema ótimo. Há também que se considerar o projeto de controladores não lineares por ser, em alguns casos, mais

vantajoso economicamente, já que componentes que respondem linearmente dentro de uma ampla faixa de amplitude são mais caros que componentes não lineares (GONÇALVES, 2003).

Um modelo matemático não é único para um dado sistema. O sistema pode ser representado de muitas maneiras diferentes e, portanto, pode haver muitos modelos matemáticos, dependendo da perspectiva que se considere. Um modelo matemático pode ser mais adequado do que outro dependendo do sistema que é alvo de interesse e das circunstâncias particulares. Por exemplo, em problemas de controle ótimo é vantajoso usar uma representação em espaço de estados. Por outro lado para análise da resposta transitória ou resposta em frequência de sistemas monovariáveis (uma entrada e uma saída) lineares e invariantes no tempo, a representação através da função de transferência pode ser mais conveniente que qualquer outra.

Basicamente existem duas abordagens para a modelagem de sistemas: através da função de transferência ou abordagem no domínio da frequência, e através das equações de estado ou abordagem no domínio do tempo. O primeiro método é conhecido como *controle clássico* e usa a transformada de *Laplace* para evitar a resolução das equações diferenciais do sistema, transformando-as em equações algébricas. A maior limitação dessa abordagem é que pode ser usada somente para representar sistemas lineares e invariantes no tempo (LTI - *Linear Time Invariant*). O segundo método é conhecido como *controle moderno* e, representa o sistema dinâmico com um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Esta última pode ser usada para representar sistemas lineares ou não, variantes ou invariantes no tempo.

2.1.1. Modelagem no Domínio da Frequência de Sistemas SISO

O princípio básico da modelagem no domínio da frequência é a chamada função de transferência. A função de transferência é comumente usada para caracterizar a relação de entrada-saída de componentes ou sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo.

A função de transferência de um sistema SISO (uma entrada e uma saída - *Single Input-Single Output*) representado por equações diferenciais lineares invariantes no tempo é definida como sendo a relação entre a transformada de *Laplace* do sinal de saída (função resposta) e a transformada de *Laplace* do sinal de entrada (função excitação), na hipótese de que todas as condições iniciais são nulas. Esta relação é escrita conforme a equação:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_zs^z}{a_0 + a_1s + \dots + a_ps^p} \quad (2.4)$$

Sendo que $Y(s)$ e $U(s)$ são as transformadas de *Laplace* dos sinais de saída e entrada respectivamente. As raízes do polinômio do numerador da função de transferência são chamadas *zeros* do sistema e as raízes do polinômio do denominador são chamadas de *pólos* do sistema. Os pólos estão relacionados com a estabilidade do sistema e sua posição no plano complexo (ou plano s) indica se o sistema é estável ou não. Se qualquer desses pólos estiver situado no semiplano direito do plano s (região à direita do eixo imaginário) representa um sistema instável. Por outro lado, se todos os pólos estiverem situados no semiplano esquerdo (região à esquerda do eixo imaginário) representa um sistema estável (OGATA, 2000). Ademais, quanto mais perto fique um pólo da origem das coordenadas mais lenta será a resposta do sistema. Os zeros geralmente se relacionam com a forma da resposta no tempo.

Os sistemas dinâmicos físicos em geral são representados por funções de transferência *estritamente próprias*, isto é,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} G(s) = 0 \quad (2.5)$$

Em outras palavras o grau do polinômio do denominador é sempre maior que o grau do polinômio do numerador da função de transferência.

Quando a função de transferência é avaliada em valores imaginários, $s=j\omega$, tem com resultado a *Função Resposta em Freqüência* do sistema ou FRF. Esta função representa o comportamento de um sistema quando é excitado harmonicamente com uma freqüência ω . A figura 2.5 ilustra o comportamento de um sistema quando excitado harmonicamente.

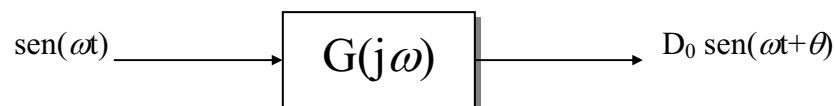


Figura 2.5: Diagrama de blocos da resposta em freqüência de um sistema.

O termo D_0 é um escalar e é chamado de ganho do sistema; θ é fase entre a entrada e a saída do sistema.

Representações gráficas da FRF formam uma parte importante da teoria de controle (VALER, 1999). O principal tipo é o diagrama de Bode.

Diagramas de Bode: Consistem dos gráficos do módulo e da fase da FRF *versus* a frequência de excitação. Os diagramas de Bode têm sido usados amplamente no projeto e na análise de sistemas de controle, bem como para a identificação experimental dos parâmetros ou da função de transferência do sistema. Para melhor visualização deste gráfico, os diagramas de Bode usam escala logarítmica para a magnitude e para a frequência. Por convenção é adotado o decibel (dB) como unidade de medida da magnitude da FRF, tal que o número de decibéis é dado por $20 \log |G(j\omega)|$.

2.1.2. Modelagem no Domínio da Frequência de Sistemas MIMO

Os sistemas SISO são na verdade um subconjunto de sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO - *Multiple Input – Multiple Output*). Os sistemas MIMO podem ser representados através de uma matriz de funções de transferência $G(s)$. O elemento $g_{ij}(s)$ da matriz representa a função de transferência entre a entrada $u_j(t)$ e a saída $y_i(t)$ do sistema. De forma que,

$$\mathbf{y}(s) = [\mathbf{G}(s)] \mathbf{u}(s) \quad (2.6)$$

$$[\mathbf{G}(s)] = \begin{bmatrix} g(s)_{11} & \cdots & g(s)_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ g(s)_{q1} & \cdots & g(s)_{qr} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

sendo q o número de variáveis de saída e r o número de variáveis de entrada do sistema.

2.1.3. Modelagem no Domínio do Tempo

Seguindo uma tendência atual dos sistemas de engenharia, que estão se tornando cada vez mais complexos, devido, principalmente, à necessidade de realização de tarefas complexas, pode ser vantajoso usar a formulação de sistemas no domínio do tempo, também conhecida como representação em espaço de estados.

Sistemas complexos possuem muitas entradas e muitas saídas e podem ser variantes no tempo. Com estas características os métodos de análise em engenharia também se tornam complexos. Uma nova forma de analisar e projetar sistemas de controle complexos é a abordagem baseada no conceito de *estado*. O conceito de estado não é novo, mas a sua aplicação no controle moderno é recente e com recursos computacionais mais eficientes e rápidos se tornou viável a análise do espaço de estados.

A teoria de controle moderno contrasta com a teoria do controle convencional no sentido de que a primeira é aplicável a sistemas com entradas e saída múltiplas, linear ou não linear, variante ou invariantes no tempo, enquanto a última é aplicável apenas aos sistemas monovariáveis (uma única entrada e uma única saída), lineares e invariantes no tempo. Enquanto a análise em sistemas monovariáveis é feita no domínio da frequência, nos sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) a abordagem é centrada essencialmente no domínio do tempo.

Abaixo são descritas, de forma sucinta, as variáveis utilizadas nesta formulação (OGATA, 2000).

Estado

O estado de um sistema dinâmico é definido pelos valores do menor conjunto de variáveis que, em conjunto com as entradas do sistema determina completamente o comportamento do sistema.

Variáveis de Estado

As variáveis de estado de um sistema dinâmico são as grandezas cujos valores determinam o estado do sistema. Se forem necessárias pelo menos n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ para descrever completamente o comportamento de um sistema dinâmico, então tais n variáveis são um conjunto de variáveis de estado.

Vetor de Estado

Se n variáveis são necessárias para descrever completamente o comportamento de um dado sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas n componentes de um vetor $\mathbf{x}$. Tal vetor é chamado de vetor de estado.

Espaço de Estado

O espaço n -dimensional cujos eixos coordenados consistem nos eixos $x_1, x_2, \dots, x_n$ é chamado de espaço de estados. Qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estados.

Para se obter a representação em espaço de estados de um sistema de ordem n , é necessário escrever este sistema em n equações diferenciais de primeira ordem. Assim cada variável dinâmica é uma variável de estado.

A forma genérica de um sistema descrito na forma de espaço de estados é descrita pela equação (2.8).

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t] \end{cases} \quad (2.8)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estados, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ o vetor de entradas, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^q$ o vetor de saídas medidas, n a ordem do sistema, r sinais de entrada e q sinais de saída.

Para sistemas lineares invariantes no tempo a equação na forma de espaço de estados pode ser deduzida da equação 2.8 para,

$$S: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.9)$$

Na equação 2.9,

A	:	Matriz dinâmica $[n \times n]$
B	:	Matriz de entradas $[n \times r]$
C	:	Matriz de saídas $[q \times n]$
D	:	Matriz de transmissão direta $[q \times r]$

A representação em diagrama de blocos de um sistema linear invariante no tempo na forma de espaço de estados é mostrada na figura 2.6.

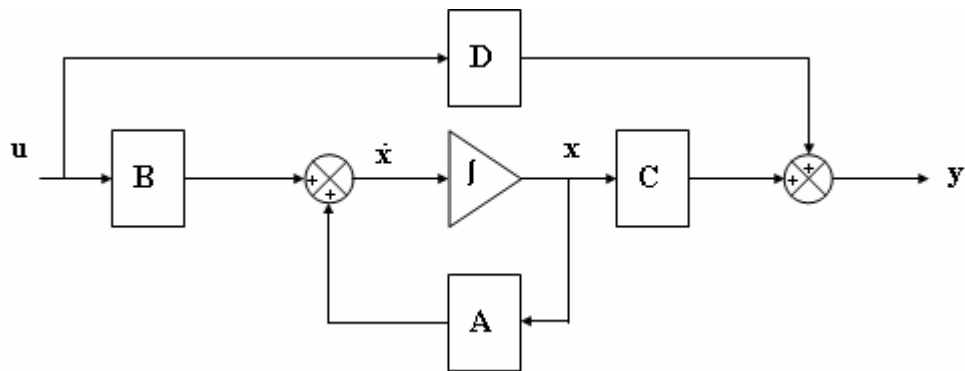


Figura 2.6: Representação em diagrama de blocos de um sistema em espaço de estados.

2.1.4. Equação de Estado para Sistemas Mecânicos Lineares

A equação diferencial que descreve o movimento de um sistema mecânico pode ser obtida, considerando que o sistema tem parâmetros concentrados, através das leis de Newton, equações de Lagrange ou outro método que seja conveniente.

Todos os métodos convergem para a equação diferencial de segunda ordem, que pode ser escrita na seguinte forma geral linear e invariante no tempo (MEIROVITCH, 2000),

$$\mathbf{M}\{\ddot{\mathbf{q}}_k(t)\} + (\mathbf{D}_v + \mathbf{G}_g)\dot{\mathbf{q}}_k(t) + (\mathbf{S}_k + \mathbf{C}_i)\mathbf{q}_k(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.10)$$

onde,

$\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$	:	Matriz de massa ou matriz de inércia
$\mathbf{D}_v = \mathbf{D}_v^T$	:	Matriz de amortecimento viscoso
$\mathbf{G}_g = -\mathbf{G}_g^T$	:	Matriz giroscópica
$\mathbf{S}_k = \mathbf{S}_k^T$	:	Matriz de rigidez
$\mathbf{C}_i = -\mathbf{C}_i^T$	:	Matriz circulatória
$\mathbf{q}_k(t)$	:	Vetor de coordenadas generalizada
$\mathbf{f}(t)$	:	Vetor força externa generalizada

Para sistemas mecânicos mais simples, apenas as matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez são definidas. Além disso, a matriz de massa é sempre definida positiva.

A representação na forma de espaço de estados do sistema descrito pela equação 2.10 é dada por,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{S}_k + \mathbf{C}_i) & -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{D}_v + \mathbf{G}_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}(t) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

sendo,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_k(t) \\ \dot{\mathbf{q}}_k(t) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A equação 2.11 pode ser representada na forma matricial como:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

Em outras palavras, reescreve-se a equação diferencial de segunda ordem em equações diferenciais de primeira ordem, através da inserção de um vetor $\mathbf{x}(t)$, chamado de vetor de estados. Entretanto, o tamanho do sistema aumenta se comparado com o sistema original.

Uma descrição genérica de variáveis de estado de um sistema de ordem n envolve n integradores; as saídas destes são as variáveis de estado. As entradas de cada um dos integradores são dirigidas como uma combinação linear dos sinais de estados e das entradas (DERUSSO, 1997),

$$\begin{aligned} sX_1 &= a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + \dots + a_{1n}X_n(s) + b_{11}U_1(s) + \dots + b_{1r}U_r(s) \\ sX_2 &= a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + \dots + a_{2n}X_n(s) + b_{21}U_1(s) + \dots + b_{2r}U_r(s) \\ &\vdots \\ sX_n &= a_{n1}X_1(s) + a_{n2}X_2(s) + \dots + a_{nn}X_n(s) + b_{n1}U_1(s) + \dots + b_{nr}U_r(s) \end{aligned} \quad (2.14)$$

O parâmetro s nas equações (2.14) indica que são representadas no domínio de *Laplace*. No domínio do tempo, as equações acima formam um conjunto de n equações diferenciais de primeira ordem nas n variáveis de estado e nas r entradas,

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \dots + b_{2r}u_r \\
&\vdots \\
\frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r
\end{aligned} \tag{2.15}$$

O termo (t) foi suprimido na equação (2.15) para facilidade de visualização. Essas equações de estado podem ser escritas na forma compacta em notação matricial,

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

ou,

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \tag{2.17}$$

A matriz coluna de variáveis de estado,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

é chamada de vetor de estados. As entradas são arranjadas na forma de vetor, com r sendo o número de entradas:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

As saídas do sistema são similarmente arranjadas na forma de vetor, com q sendo o número de saídas:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Que podem ser escritas como uma combinação linear das variáveis de estado pelas equações,

$$\begin{cases} y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ \vdots \\ y_q = c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + c_{qn}x_n \end{cases} \quad (2.21)$$

ou

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \dots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ou

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.23)$$

Nessa formulação foi assumido que a matriz de transmissão direta D é igual a zero.

2.2. Representação de Incertezas no Modelo

A idéia de sistemas dinâmicos incertos é central para a teoria de controle robusto. Para propósitos de projeto, o comportamento dinâmico de sistemas complexos deve ser aproximado para modelos de complexidade relativamente baixa. A diferença entre estes modelos e o sistema real é chamada de incerteza do modelo. Outra causa de incerteza é o desconhecimento de alguns componentes do sistema, ou a mudança de seu comportamento devida a alterações de operação.

Finalmente, incertezas podem ser originadas de parâmetros físicos que se alteram com o tempo. Note que a incerteza do modelo deve ser distinguida de ações exógenas como distúrbios ou ruído originado das medidas (GAHINET et al, 1995).

Devido às incertezas de modelo duas características devem ser consideradas:

- A incerteza deve ser pequena onde alto desempenho é requerido (compromisso entre desempenho e robustez). Em outras palavras, o modelo linear deve ser suficientemente exato na banda de controle.
- Quanto mais informação se tenha sobre a incerteza (fase, estrutura, invariância no tempo, entre outras), melhor será o desempenho.

Existem duas classes principais de incertezas:

- Incertezas dinâmicas, que consistem em componentes dinâmicos omitidos no modelo linear que causam variações no comportamento dinâmico durante a operação. Por exemplo, modos flexíveis à altas frequências, não-linearidades devido a entradas excessivas e variações lentas no tempo.
- Incertezas de parâmetros, que se originam na imprecisão dos valores dos parâmetros físicos, ou nas variações desses parâmetros durante a operação. Exemplos destes tipos de incerteza incluem os coeficientes de rigidez e amortecimento em sistemas mecânicos, coeficientes aerodinâmicos em equipamentos de voo e capacitores e indutores em circuitos elétricos.

O modelo não é capaz de emular perfeitamente o comportamento de um sistema real para todas as faixas de operação. Alguns modelos conseguem ser mais fiéis ao sistema do que outros para a faixa de operação, entretanto, não estão livres de erros. Os erros são inseridos no modelo devido a alguma aproximação ou uma dinâmica que não foi considerada. Entretanto, é possível representar estas incertezas. Existem duas classes básicas de representação de incertezas:

- Incertezas estruturadas;
- Incertezas não estruturadas.

2.2.1. Incertezas Estruturadas

Como o próprio nome diz, as incertezas estruturadas estão relacionadas com a estrutura do sistema e na maioria dos casos estão relacionadas com variações nos parâmetros da planta. Como um exemplo destas incertezas pode-se citar as variações nas frequências naturais do sistema. Para um sistema descrito na forma de espaço de estados, estas incertezas podem ser

representadas como variações nas matrizes do sistema. Um exemplo é quando existe um tipo de incerteza estruturada na matriz de estados do sistema, esta pode ser representada por $\Delta\mathbf{A}$ e a matriz de estados passa a ser escrita por,

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_n + \Delta\mathbf{A} \quad (2.24)$$

Na equação 2.24 o termo $\mathbf{A}_n$ é chamado de matriz de estados nominal, já a matriz dinâmica $\mathbf{A}$ é a matriz de estados real e é desconhecida.

A incerteza pode ser escrita do seguinte modo (GONÇALVES, 2003),

$$\Delta\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n_p} a_i \mathbf{A}_i, \quad \text{com } |a_i| \leq a_{\max} \quad (2.25)$$

$\mathbf{A}_i$ é matriz dinâmica do sistema com a i -ésima incerteza (incerteza no i -ésimo parâmetro estrutural), a_i é um escalar e n_p é o número total de parâmetros incertos. Para sistemas descritos no domínio da frequência, as incertezas são escritas em termos de variação dos pólos e zeros do sistema nominal.

Modelos politópicos para representação de incertezas estruturadas

São denominados sistemas politópicos os sistemas lineares variantes no tempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (2.26)$$

cuja matriz do sistema $\mathbf{S}_p(t)$, é dada por:

$$\mathbf{S}_p(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{D}(t) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Esta matriz varia com um número fixo de matrizes politópicas, isto é,

$$\mathbf{S}_p(t) \in \{\mathbf{S}_{p1}, \dots, \mathbf{S}_{pv}\} := \left\{ \sum_{i=1}^v \alpha_i \mathbf{S}_{pi} : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^v \alpha_i = 1 \right\} \quad (2.28)$$

sendo $S_{p1}, \dots, S_{pv}$ os sistemas vértices, dados por

$$S_{p1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_1 \end{bmatrix}, \dots, S_{pv} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_v & \mathbf{B}_v \\ \mathbf{C}_v & \mathbf{D}_v \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

sendo v o número de vértices do politopo.

Em outras palavras, $S_p(t)$ é uma combinação convexa das matrizes dos sistemas $S_{p1}, \dots, S_{pv}$. Os números não negativos $\alpha_1, \dots, \alpha_v$ são chamados de coordenadas politópicas de $S_p(t)$.

Modelos a parâmetros-dependentes afim para representação de incertezas estruturadas

As equações dos sistemas sempre envolvem incertezas ou variação de coeficientes no tempo. Quando um sistema é linear, este naturalmente dá origem a um modelo parâmetro-dependente na forma,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(p)\mathbf{x} + \mathbf{B}(p)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(p)\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.30)$$

As matrizes $\mathbf{A}(\cdot)$, $\mathbf{B}(\cdot)$ e $\mathbf{C}(\cdot)$ são funções conhecidas de algum vetor de parâmetros $p=(p_1, \dots, p_m)$. Estas equações geralmente são originadas de equações do movimento, equações de circuitos elétricos, etc.

No caso desta dependência tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(p) &= \mathbf{A}_0 + p_1 \mathbf{A}_1 + \dots + p_m \mathbf{A}_m, & \mathbf{B}(p) &= \mathbf{B}_0 + p_1 \mathbf{B}_1 + \dots + p_m \mathbf{B}_m \\ \mathbf{C}(p) &= \mathbf{C}_0 + p_1 \mathbf{C}_1 + \dots + p_m \mathbf{C}_m \end{aligned} \quad (2.31)$$

Os modelos a parâmetros-dependentes afim são adequados para utilização em análise e síntese baseadas nas funções de Lyapunov. A representação de incertezas na forma de politopos é encontrada em muitos problemas de controle. Além disto, modelos dependentes de parâmetros podem ser transformados em modelos politópicos equivalentes.

Quantificação da incerteza de parâmetros

A incerteza de parâmetros é quantificada como uma faixa de valores do parâmetro e possivelmente as taxas de variações destes parâmetros. A incerteza de parâmetros pode ser

descrita como uma caixa no espaço de parâmetros. Isto corresponde ao caso onde a incerteza ou o parâmetro variante no tempo p_i está dentro de uma faixa de dois valores extremos determinados empiricamente, ou seja,

$$p_i \in [\underline{p}_i, \overline{p}_i] \quad (2.32)$$

sendo que $\underline{p}_i$ e $\overline{p}_i$ são os valores mínimo e máximo, respectivamente. Se $p = (p_1, \dots, p_m)$ é um vetor com todas as incertezas de parâmetros, a equação (2.32) delimita um hiper-retângulo no espaço de parâmetros $\mathcal{R}^m$ chamada de caixa de parâmetros (*Parameter Box*).

2.2.2. Incertezas Não Estruturadas

Incetezas que não podem ser representadas como função de um parâmetro específico são classificadas como incertezas não estruturadas. Geralmente é uma forma de se representar a dinâmica não modelada, como, por exemplo, o truncamento das altas frequências de um sistema mecânico. As incertezas não estruturadas podem ser descritas em termos de suas amplitudes, e podem ser descritas como modelos de incertezas aditivas e multiplicativas (SILVA, 2005).

Os tipos de incertezas não estruturadas mais comuns são: o modelo de incerteza aditiva, o modelo de incerteza multiplicativa na saída e o modelo de incerteza multiplicativa na entrada. O modelo de incerteza aditiva é dado por:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_n(s) + \Delta_a(s) \quad (2.33)$$

sendo $\mathbf{G}(s)$ a função de transferência real, $\mathbf{G}_n(s)$ a função de transferência nominal e $\Delta_a(s)$ representando a incerteza aditiva. Moreira (1998) utiliza, no projeto de controlador H_∞ robusto, este modelo de incerteza. A representação deste sistema é mostrada na figura 2.7.

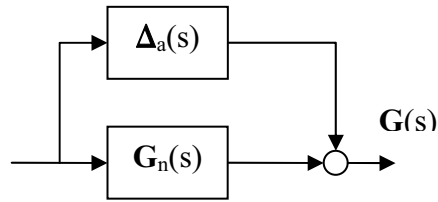


Figura 2.7: Incerteza aditiva.

O modelo de incerteza multiplicativa na saída é dado por:

$$\mathbf{G}(s) = (\mathbf{I} + \Delta_o(s)) \mathbf{G}_n(s) \quad (2.34)$$

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade e $\Delta_o(s)$ representando a incerteza multiplicativa na saída. A representação deste sistema é mostrada na figura 2.8.

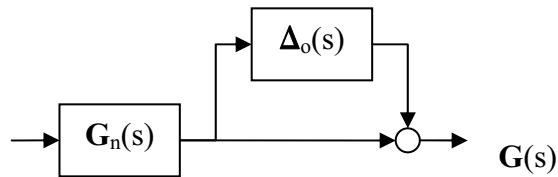


Figura 2.8: Incerteza multiplicativa na saída.

Já o modelo de incerteza multiplicativa na entrada é dado por:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_n(s) (\mathbf{I} + \Delta_i(s)) \quad (2.35)$$

sendo $\Delta_i(s)$ a representação da incerteza multiplicativa na entrada. A representação deste sistema é mostrada na figura 2.9.

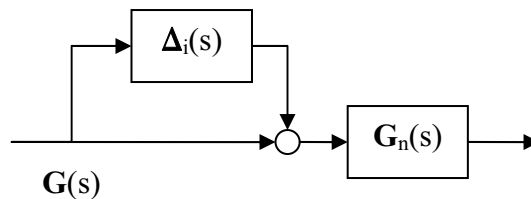


Figura 2.9: Incerteza multiplicativa na entrada.

Quantificação de incertezas não estruturadas: incerteza com norma limitada

Limitantes de normas especificam a quantidade de incerteza em termos de ganho L_2 . Ganho L_2 é definido como a máxima razão entre as saídas e entradas do sistema:

$$\|\Delta\|_{\infty}^2 = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ w \in L_2}} \frac{\|\Delta w\|_{L_2}}{\|w\|_{L_2}} \quad (2.36)$$

sendo $\|w\|_{L_2}$ a energia do sinal de entrada. Além disto, limitantes de normas também são úteis para quantificar incertezas paramétricas dependentes de frequência (SILVA, 2005).

2.3. Estabilidade de Sistemas Dinâmicos

A análise da estabilidade é um tópico fundamental no estudo de sistemas dinâmicos. Dois tipos de estabilidade são de interesse. O primeiro relaciona a capacidade de um sistema de retornar a um ponto de equilíbrio depois de um deslocamento arbitrário. O segundo relaciona a capacidade de um sistema para produzir uma resposta limitada para uma excitação limitada (VALER, 1999).

2.3.1. Ponto de Equilíbrio

Consideremos o seguinte sistema dinâmico, na forma de equação de estado e em ausência das excitações externas.

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, t) \quad (2.37)$$

Um ponto de equilíbrio é um estado $\mathbf{x}_e$ do sistema (2.37) no qual:

$$f(\mathbf{x}_e, t) = 0 \quad (2.38)$$

Sistemas não lineares podem ter mais de um ponto de equilíbrio. Para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo a equação (2.37) é simplificada resultando em:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (2.39)$$

Se a matriz $\mathbf{A}$ é não singular o sistema tem como único ponto de equilíbrio ($\mathbf{x}_e=0$).

2.3.2. Estabilidade de Lyapunov

Em sistemas lineares e invariantes no tempo, dispõe-se de muitos critérios para determinar a estabilidade, como o critério de estabilidade de Routh e o critério de estabilidade de Nyquist. Porém, em sistemas não-lineares nenhum destes critérios é aplicado. O método mais geral para estes casos é o segundo método de Lyapunov, ou método direto de Lyapunov, que também se aplica em sistemas lineares e se mostra útil em controle ótimo quadrático.

Lyapunov apresentou dois métodos para determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos. No primeiro método a forma explícita da solução das equações diferenciais é utilizada para análise. Já no segundo método, também conhecido como método direto de Lyapunov, é possível determinar a estabilidade sem resolver as equações de estado, o que é muito vantajoso tendo em vista que a solução de equações de estados não-lineares costuma ser muito difícil.

Admite-se que a equação (2.37) possui uma única solução começando numa dada condição inicial, que é designada por $\varphi(t; \{\mathbf{x}_0\}, t_0) = \{\mathbf{x}_0\}$, sendo t o tempo observável e $\{\mathbf{x}_0\}$ um estado de origem no tempo inicial t_0 .

Pode-se designar uma região esférica de raio k em torno de um estado de equilíbrio $\{\mathbf{x}_e\}$, por $\|\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}_e\}\| \leq k$, sendo $\|\{\mathbf{x}\} - \{\mathbf{x}_e\}\|$ a norma Euclidiana. Sendo $S(\delta)$ a região que consiste em todos os pontos tais que $\|\{\mathbf{x}_0\} - \{\mathbf{x}_e\}\| \leq \delta$ e $S(\varepsilon)$ a região $\|\varphi(t; \{\mathbf{x}_0\}, t_0) - \{\mathbf{x}_e\}\| \leq \varepsilon$. Um estado de equilíbrio é *estável* no sentido de Lyapunov se para um $S(\varepsilon)$ houver um $S(\delta)$ tal que uma trajetória iniciada em $S(\delta)$ não deixe $S(\varepsilon)$ à medida que t aumenta indefinidamente (MEIROVITCH, 1990). Um estado de equilíbrio é *assintoticamente estável* se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $S(\delta)$ convergir para $\{\mathbf{x}_e\}$, sem deixar $S(\varepsilon)$. Os conceitos de estabilidade e instabilidade são representados na figura 2.10.

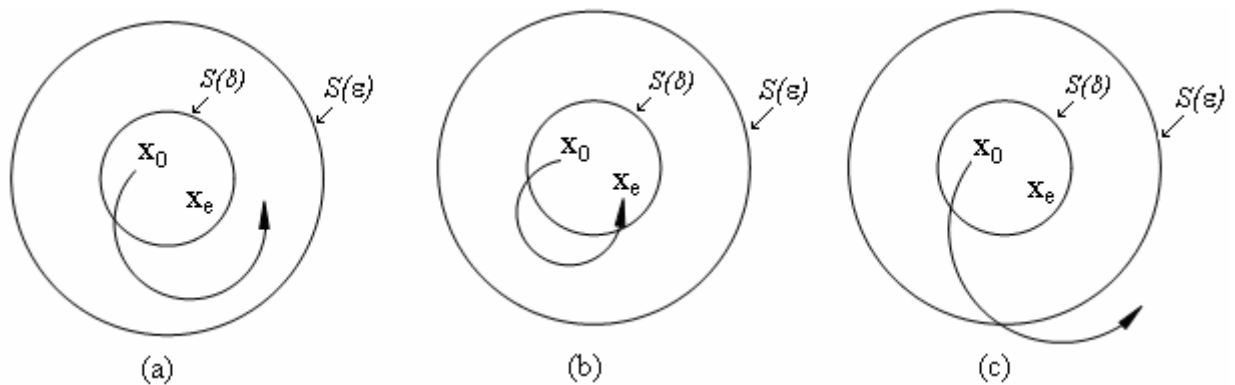


Figura 2.10: Representação gráfica do conceito de estabilidade: (a) Estável; (b) Assintoticamente estável e (c) Instável.

Na prática, a estabilidade assintótica é mais importante do que o conceito de estabilidade visto no parágrafo anterior. O problema é então identificar a maior região onde se encontra a estabilidade assintótica, que é chamada de domínio de atração. Uma característica desejável em qualquer sistema de controle é que este tenha estabilidade assintótica em grande escala, isto é, toda a solução neste domínio converge para $\{x_e\}$ à medida que t cresce indefinidamente. Para isto ser verdadeiro deve existir apenas um estado de equilíbrio.

2.3.3. Função de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov é baseado no fato de que se um sistema tem um equilíbrio assintoticamente estável, então a energia armazenada neste sistema deslocado dentro do domínio de atração decairá com o tempo até finalmente assumir um valor mínimo do estado de equilíbrio. No entanto, para certos sistemas, não existe uma definição clara de *função energia*. Então, para superar esta dificuldade Lyapunov introduziu o conceito de *função de Lyapunov* que é uma função de energia fictícia a qual é o conceito mais geral e amplamente aplicável que a definição de energia.

A função de Lyapunov denotada por $V(x(t))$ é uma função real e escalar do vetor de estado $x(t)$ com primeira derivada contínua que satisfaz as seguintes relações:

1. $V(x(t)) > 0, \quad \forall x(t) \neq 0$
2. $\dot{V}(x(t)) \leq 0, \quad \forall x(t) \neq 0$

Segundo Método de Lyapunov: Uma condição suficiente para que um sistema seja estável é que exista uma função de Lyapunov. Além disso, se a derivada da função $V(\mathbf{x}(t))$ é estritamente menor que zero, o sistema é assintoticamente estável.

É importante entender que não se pode apresentar nenhuma conclusão sobre o segundo método de Lyapunov sem que exista uma função de Lyapunov. Neste caso é necessário encontrar uma função de Lyapunov ou aplicar o teorema da instabilidade de Lyapunov. Um inconveniente da teoria de Lyapunov é que não existe uma forma sistemática de encontrar uma função candidata para verificar a estabilidade.

2.3.4. Estabilidade de Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

Considere um sistema linear de primeira ordem dado por,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.40)$$

sendo $\mathbf{x}$ um vetor de tamanho $n \times 1$. Com o objetivo de verificar a condição de estabilidade para este sistema, escolhe-se a seguinte função de Lyapunov,

$$\mathbf{V} = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (2.41)$$

a derivada no tempo da função de Lyapunov se torna,

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (2.42)$$

para estabilidade deste sistema, requer-se que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q} \quad (2.43)$$

sendo $\mathbf{Q}$ uma matriz definida positiva satisfazendo a propriedade $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$ e $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$. Desta forma,

$$\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} < 0 \quad (2.44)$$

Assim, formula-se um teorema para estabilidade de um sistema linear, ou seja, o sistema linear $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ é estável se e somente se, existir uma matriz definida positiva $\mathbf{P}$ que satisfaça a equação 2.43 para uma dada matriz definida positiva $\mathbf{Q}$.

Partindo do segundo método de Lyapunov é possível demonstrar que para estes sistemas a análise de estabilidade se reduz à análise da parte real dos autovalores $Re(\lambda_i)$ da matriz de estado $\mathbf{A}$ ou dos pólos da função de transferência para modelos no domínio da frequência. A tabela 2.1 sintetiza as condições de estabilidade para estes sistemas (VALER, 1999).

Tabela 2.1: Estabilidade de sistemas lineares invariantes no tempo.

Condição	Implicação
1. $Re(\lambda_i) < 0$ para todo i	Sistema assintoticamente estável.
2. $Re(\lambda_i) < 0$ para alguns i , e $Re(\lambda_j) = 0$ para outros j , e (a) λ_j é um autovalor simples $\Rightarrow$ (b) λ_j é um autovalor múltiplo $\Rightarrow$	Sistema estável, mas não assintoticamente estável. Sistema instável.
3. $Re(\lambda_i) > 0$ para alguns i	Sistema instável.

2.3.5. Estabilidade de Sistemas de Múltiplos Graus de Liberdade

Nas seções anteriores foram apresentados conceitos de estabilidade. É necessário agora estender estes conceitos para sistemas linearizados de múltiplos graus de liberdade, os quais são originados da análise por elementos finitos. Entender estabilidade de sistemas de múltiplos graus de liberdade é essencialmente importante para compreensão e projeto de sistema de controle por realimentação.

Sistemas sem amortecimento

Utilizando a teoria da estabilidade de Lyapunov se deseja analisar a estabilidade de um sistema de múltiplos graus de liberdade linearizado. Considerando um sistema dinâmico de dimensão n , que é geralmente obtido da análise por elementos finitos, a equação governante do movimento do sistema sem amortecimento é descrita por,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{S}_k \mathbf{q}_k = \mathbf{F} \mathbf{u} \quad (2.45)$$

sendo $\mathbf{M}$ a matriz de massa, $\mathbf{S}_k$ a matriz de rigidez, $\mathbf{q}_k$ o vetor de coordenadas generalizadas, $\mathbf{F}$ a matriz de influência da entrada e $\mathbf{u}$ o vetor de entradas. No caso de não existir esforços externos, a vibração livre é satisfeita por,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{S}_k\mathbf{q}_k = 0 \quad (2.46)$$

e a solução do sistema da equação 2.46 é puramente senoidal.

$$\mathbf{q}_k(t) = \sum_{k=1}^n c_k \{\phi_k\} e^{i\omega_k t} \quad (2.47)$$

$\{\phi_k\}$ e ω_k são parâmetros do sistema. A estabilidade do sistema, equação 2.46, pode ser provada de várias maneiras. Uma delas é a teoria de Lyapunov. Considerando o fato de que a energia cinética mais a energia potencial é um indicador direto da energia do sistema, uma função candidata de Lyapunov é dada por,

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{2} \mathbf{q}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{q}_k \quad (2.48)$$

A função de Lyapunov é sempre positiva, ($\mathbf{V} > 0$), desde que as matrizes de massa e rigidez satisfaçam,

$$\dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}_k > 0, \quad \mathbf{q}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{q}_k \geq 0 \quad (2.49)$$

para $\dot{\mathbf{q}}_k, \mathbf{q}_k \neq 0$ e matrizes simétricas de massa e rigidez.

A derivada da função de Lyapunov (equação 2.48) em conjunto com a equação 2.45 fornece,

$$\dot{\mathbf{V}} = \dot{\mathbf{q}}_k^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{S}_k\mathbf{q}_k) = \dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (2.50)$$

Na ausência de forças de entrada, isto é $\mathbf{u} = 0$, a equação 2.50 se torna,

$$\dot{\mathbf{V}} = 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = \text{constante} \quad (2.51)$$

Em outras palavras, a energia do sistema é conservada e o movimento é do tipo puramente senoidal. É importante notar que a estabilidade não depende propriamente dos parâmetros do sistema, isto é, a massa e a rigidez foram tiradas da análise na equação 2.50. Quando se desejar projetar uma lei de controle, projeta-se $\mathbf{u}$ de forma que o sistema seja estável, então uma possível solução para o sistema é selecionar $\mathbf{u}$ tal que,

$$\dot{V} < 0 \quad (2.52)$$

Em outras palavras, a energia decresce em torno do ponto de equilíbrio com uma escolha correta da força de controle.

Sistemas com amortecimento

A forma linearizada da equação do movimento de um sistema com amortecimento é descrita por,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{S}_k\mathbf{q}_k = \mathbf{F}\mathbf{u} \quad (2.53)$$

sendo que $\mathbf{D}_v$ é a matriz de amortecimento não negativa definida. O sistema é intuitivamente estável devido ao termo de amortecimento introduzido. Para verificar a estabilidade deste sistema, escolhe-se uma função candidata de Lyapunov,

$$V = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}_k + \frac{1}{2}\mathbf{q}_k^T \mathbf{S}_k\mathbf{q}_k \quad (2.54)$$

A derivada da função de Lyapunov com relação ao tempo é dada pela primeira parte da equação 2.50, que substituído na equação do movimento 2.53, pode-se obter,

$$\dot{V} = \dot{\mathbf{q}}_k^T (-\mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}}_k + \mathbf{F}\mathbf{u}) \quad (2.55)$$

Na ausência de forças externas, a derivada da função de Lyapunov torna-se,

$$\dot{V} = -\dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{D}_v\dot{\mathbf{q}}_k \quad (2.56)$$

Se a matriz de amortecimento é definida positiva então a derivada da função de Lyapunov se torna sempre menor que zero e o sistema é assintoticamente estável. No caso da matriz do sistema ser somente semi-definida, então a estabilidade assintótica do sistema não é garantida. Neste caso deve-se utilizar outra técnica, ou outra função de Lyapunov para verificação da estabilidade.

2.4. Índices de Desempenho de Sistemas de Controle

Além da estabilidade, os sistemas de controle devem ter bom desempenho, isto é, boa qualidade da resposta, isso significa:

- Resposta dinâmica rápida
- Baixo erro em regime permanente (entre o sinal de referência e a resposta do sistema)
- Baixo esforço (ou energia) de controle.

De modo a quantificar o desempenho de um sistema são definidos os índices de desempenho. Estes índices são definidos, no domínio do tempo, a partir da resposta a um degrau. A tabela 2.2 mostra os principais índices usados com esta finalidade.

Tabela 2.2: Índices de desempenho no domínio do tempo.

Característica	Desejado	Propósito	Índice de Desempenho
Velocidade de Resposta	Rápida	O sistema responde rapidamente às entradas	• Tempo de Resposta (t_s) • Tempo de Elevação (t_r) • Tempo de Pico (t_p) • Sobre Valor (M_p)
Erro na Resposta em Regime	Baixo	A diferença entre a resposta e o valor desejado tem que ser pequena	• Erro em Regime

Tempo de Resposta ou Acomodação (t_s): É o tempo requerido para que a resposta a um degrau diminua até ficar dentro de um percentual (usualmente 2% ou 5 %) do valor final. O

tempo de resposta de um sistema linear pode ser determinado aproximadamente com base no autovalor (pólo) dominante (aquele com parte real negativa mais perto da origem). Se o pólo dominante é $-\sigma + j\omega$ o tempo de resposta aproximado será de 4 a 6 vezes σ .

Tempo de Elevação ou Subida (t_r): É o tempo necessário para que a resposta passe de 10% a 90%, 5% a 95%, ou de 0% a 100% do seu valor final.

Tempo de Atraso (t_d): É o tempo necessário para que a resposta alcance, pela primeira vez, a metade (50%) do valor final.

Tempo de Pico (t_p): É o tempo necessário para que a resposta atinja o valor máximo.

Sobre Valor ou Percentual de Overshoot (M_p): É o máximo valor de pico da curva de resposta medido a partir do valor unitário.

A resposta a um degrau de um sistema típico é ilustrada na figura 2.11.

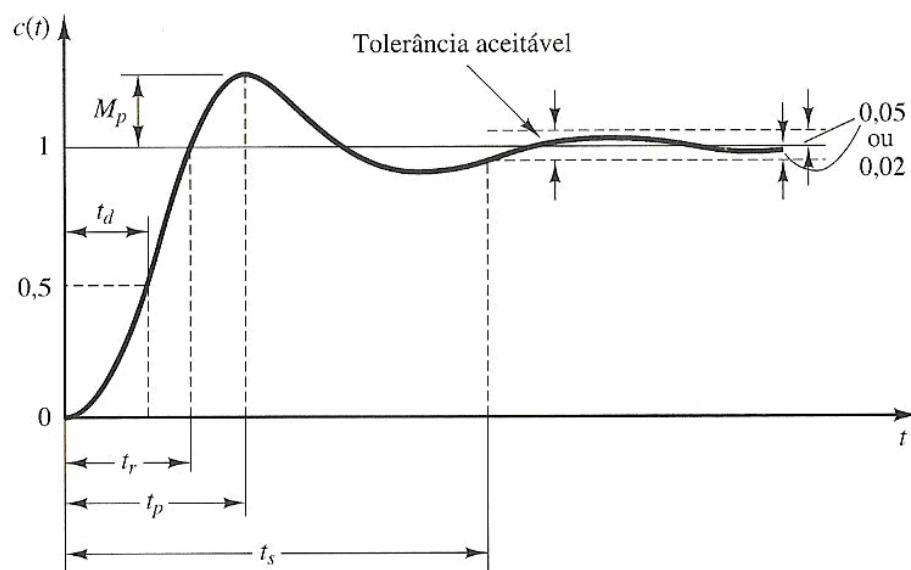


Figura 2.11: Índices de desempenho no domínio do tempo.

3 - Desigualdades Matriciais Lineares

O propósito deste capítulo é mostrar a utilização das desigualdades matriciais lineares (LMIs) em aplicações de controle de sistemas mecânicos. As LMIs tem aparecido como uma nova e poderosa ferramenta na análise e projeto de sistemas de controle nos maiores eventos da área. Com o desenvolvimento das técnicas de otimização convexa as LMIs tem se tornado uma importante ferramenta, com muitas aplicações futuras.

Neste capítulo são apresentados os principais fundamentos envolvidos no controle via LMIs. Inicialmente é feito um breve histórico do uso de LMI na teoria de controle e na sequência são apresentadas definições preliminares sobre LMIs. Em seguida considerações sobre estabilidade utilizando LMIs são apresentadas. E, finalmente, é apresentado o projeto de sistemas de controle utilizando LMIs considerando incertezas politópicas.

3.1. História do Uso das LMIs

A utilização das LMIs em problemas de análise dinâmica teve início em 1890 com a publicação da Teoria de Lyapunov (BOYD et al, 1994b). A idéia de Lyapunov foi mostrar que o sistema dinâmico:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.1)$$

é estável, isto é, todas as trajetórias convergem a zero, se e somente se existir uma matriz $\mathbf{P}$ positiva definida tal que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < \mathbf{0} \quad (3.2)$$

A inequação acima é conhecida como desigualdade de Lyapunov e é resultado direto do 2.º teorema de Lyapunov. A inequação (3.2) é uma forma especial de LMI. Lyapunov também mostrou que esta LMI pode ser resolvida analiticamente através de um conjunto de equações lineares equivalentes.

Na década de 40 Lur'e, Postnikov e outros na antiga União Soviética aplicaram o método de Lyapunov para alguns problemas práticos de engenharia de controle, especialmente em

problemas de estabilidade de sistemas de controle com não-linearidade no atuador. Apesar de não resolverem explicitamente na forma de LMI, o critério utilizado tinha a forma de uma desigualdade matricial. Esta desigualdade era reduzida a uma inequação polinomial que podia ser resolvida à “mão” e foi a primeira demonstração que a teoria de Lyapunov poderia ser utilizada em problemas práticos de engenharia.

Já no início dos anos 60, Yakubovich, Popov, Kalman e outros pesquisadores reduziram a solução das LMIs que surgiram no problema de Lur’e a um critério gráfico simples, chamado atualmente de lema KYP (Kalman-Yakubovich e Popov) ou, também, de *positive real-lemma*. Este lema tem muitas variantes na literatura e podem ser aplicados a sistemas de ordem elevada, apesar de não serem atraentes em sistemas com não-linearidades. Para Boyd *et al.* (1994a) a contribuição do lema KYP foi mostrar que certas classes de problemas envolvendo LMI podem ter solução através de métodos gráficos.

O lema KYP e suas extensões foram exaustivamente estudados até a metade dos anos 60 e foram relacionadas a idéias de passividade, ao teorema dos ganhos pequenos e ao controle ótimo quadrático. Em 1970 foi mostrado que as LMIs que apareciam no lema KYP poderiam ser resolvidas não apenas graficamente, mas também pela solução de certas equações algébricas de Riccati (BOYD *et al.*, 1994a). Neste mesmo período a solução do problema do regulador linear quadrático (LQR), envolvendo a resolução da equação de Riccati, marcou época, sendo utilizada até hoje em problemas de controle ótimo (PERES, 1997).

Neste estágio a maioria dos problemas com restrições LMI envolviam soluções via métodos analíticos, como método direto para sistemas de ordem pequena, métodos gráficos e soluções de equações de Riccati. Porém a partir da década de 70, constatou-se que as LMIs que aparecem na teoria de controle podem ser formuladas como problemas de otimização convexa e solucionadas via algoritmos numéricos. Pyatnitskii e Skorodinskii foram, provavelmente, os primeiros a mostrar isto claramente. Eles reduziram o problema de Lur’e a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs, que podia ser solucionado pelo algoritmo do elipsóide. Segundo Boyd *et al.* (1994b), Pyatnitskii e Skorodinskii foram os primeiros a formular a solução de uma LMI por meio de um algoritmo de busca convexa com garantias de se encontrar uma solução.

Dois desenvolvimentos recentes fizeram com que este enfoque ganhasse destaque. O primeiro foi o grande aumento na capacidade dos computadores e o segundo o desenvolvimento de poderosos algoritmos numéricos para otimização convexa (BOYD *et al.*, 1993). Entre eles, pode-se destacar o desenvolvimento de um método de programação linear que resolve problemas

descritos na forma de LMIs com convergência polinomial, muito útil na prática, que foi proposto por Karmarkar em 1984. Em 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram o método de pontos interiores, que se aplica diretamente nos problemas de programação convexa que envolvem LMIs (ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2001, BOYD et al, 1994a). Geromel (1989) desenvolveu um procedimento de análise convexa e otimização global para localização de atuadores utilizando LMIs. Já em 1991, Geromel *et al.* propõem um procedimento para a solução do projeto de controladores via LMIs considerando incertezas paramétricas descritas por inclusões diferenciais lineares politópicas (PLDI). Este procedimento é discutido em aplicações práticas em Silva *et al.* (2004).

Através do método proposto por Nesterov e Nemirovskii, o enfoque de controle via LMI começou a se tornar popular. Atualmente é possível resolver rapidamente problemas de otimização convexa que não tem solução analítica através de técnicas tradicionais. Além disto, a solução de muitos problemas de otimização convexa pode ser obtida em tempo computacional relativamente pequeno, se comparado à solução via uma técnica convencional (BOYD et al, 1993). Somado a tudo isto está o fato de inúmeros pacotes computacionais especializados em LMIs serem disponíveis, como o *LMI Control Toolbox* do Matlab® (GAHINET et al, 1995), ou o software *LMISol* de domínio público (OLIVEIRA et al, 1997).

3.2. Definições Sobre as LMIs

Uma LMI é definida como sendo uma desigualdade matricial da forma (BOYD et al, 1994b):

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > \mathbf{0} \quad (3.3)$$

sendo $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$ a variável, $\mathbf{F}_0$ e $\mathbf{F}_i$ matrizes simétricas com $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ e $i = 0, 1, \dots, m$ dados. O conjunto $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{F}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}\}$ é convexo e positivo definido. A LMI da ineq. (3.3) é equivalente a um conjunto de n inequações polinomiais em $\mathbf{x}$.

Múltiplas LMIs, $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$, podem ser expressas como uma LMI simples através da $\text{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0})$. Sendo que, $\text{diag}(\mathbf{F}_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0})$ denota a matriz diagonal com $\mathbf{F}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ na diagonal. Além disto, nenhuma distinção é feita entre o conjunto de

LMIs e uma LMI simples, ou seja, as LMIs $F_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, F_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ são iguais a LMI $\text{diag}(F_1(\mathbf{x}) > \mathbf{0}, \dots, F_n(\mathbf{x}) > \mathbf{0})$.

Um resultado importante em LMI é que uma classe de desigualdades não-lineares podem ser convertidas na forma de LMI através do uso do complemento de Schur. A idéia básica é,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}^T(\mathbf{x}) & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > \mathbf{0} \quad (3.4)$$

sendo $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}^T(\mathbf{x})$ e $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ são dependentes afins de $\mathbf{x}$. A inequação (3.4) é equivalente a desigualdade matricial não-linear:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > \mathbf{0}, \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \quad (3.5)$$

Uma demonstração do complemento de Schur pode ser encontrada em VanAntwerp e Braatz, (2000). Existem muitos problemas convexos e quasi-convexos comuns que aparecem na teoria de controle. Na sequência são apresentados os mais comuns.

Problema de Factibilidade de uma LMI (LMIP - *LMI Problem*)

Dada uma LMI $\mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$, o problema de factibilidade de uma LMI (LMIP) corresponde a encontrar $\mathbf{x}^{\text{fact}}$ tal que a desigualdade $\mathbf{A}(\mathbf{x}^{\text{fact}}) > \mathbf{0}$ é verdadeira, ou determinar que a LMI é infactível. LMIP é um problema de factibilidade convexa. O problema de estabilidade de Lyapunov, mostrado na inequação (3.2) é um exemplo de um LMIP.

Problema de Autovalor (EVP – *Eigenvalue Minimization Problem*)

O problema de autovalor (EVP), neste caso, se restringe a minimizar o máximo autovalor de uma matriz, sujeito a LMI (BOYD et al, 1993):

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \lambda \\ &\text{sujeito à } \lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ &\quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ matrizes simétricas que dependem da variável de otimização $\mathbf{x}$. EVP é um problema de otimização convexa e pode aparecer em controle com problemas de minimização de funcionais.

Problema de Autovalor Generalizado (GEVP - *Generalized Eigenvalue Minimization Problem*)

O problema de autovalor generalizado (GEVP), neste caso, se restringe a minimizar o máximo autovalor generalizado de um par de matrizes dependentes de uma variável e sujeitos a restrições LMI. A forma geral de um GEVP é:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \lambda \\ & \text{sujeito à } \lambda \mathbf{B}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \mathbf{B}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \\ & \mathbf{C}(\mathbf{x}) > \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3.7}$$

sendo $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ matrizes simétricas dependentes de $\mathbf{x}$. GEVP é um problema quasi-convexo. Um problema quasi-convexo envolve uma função matemática quasi-convexa. Considere um conjunto convexo C , $f: C \rightarrow R$ é denominada uma função quasi-convexa se $\forall x_1, x_2 \in C$ e $\forall \alpha \in (0,1)$; $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Quando estas matrizes são todas diagonais, este problema se reduz a um problema de programação linear fracional geral. Muitas funções quasi-convexas não-lineares podem ser representadas na forma de um GEVP.

3.3. Estudo da Estabilidade Utilizando LMIs

As desigualdades matriciais lineares são ferramentas importantes para o estudo da estabilidade de sistemas descritos no espaço de estados (BOYD et al, 1994b). Considere o sistema linear autônomo dado pela equação 3.8, na ausência de excitações externas.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3.8}$$

sendo $\mathbf{x}$ o vetor de estados e $\mathbf{A}$ uma matriz constante. Se $\mathbf{A}$ é não singular, então o único estado de equilíbrio é a origem $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para este sistema, pode-se definir uma função de Lyapunov:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} > 0 \quad (3.9)$$

Sua derivada em relação ao tempo é:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} \mathbf{x})^T \mathbf{P} \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{x} \quad (3.10)$$

Como $V(\mathbf{x})$ foi escolhida definida positiva, para se ter estabilidade assintótica é necessário que $\dot{V}(\mathbf{x})$ seja definida negativa ($\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$).

Portanto para a estabilidade do sistema da equação (3.8) é necessário que:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0 \quad (3.11)$$

Desta forma, pode-se escrever um teorema para análise da estabilidade de sistemas descritos na forma de espaço de estados (ASSUNÇÃO et al, 2001).

TEOREMA 3.1. *Considere o sistema autônomo descrito pela equação (3.8), sendo $\mathbf{x}$ o vetor de estados e $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ constante e não singular. Uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $\mathbf{x} = 0$ seja assintoticamente estável é que, exista uma matriz $\mathbf{P}$ positiva definida, simétrica, tal que*

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} < 0$$

A interpretação geométrica deste teorema é mostrada na figura 3.1. A figura mostra a função $V(\mathbf{x})$ e o caminho da evolução dos estados do sistema da equação (3.8) sem forças externas. Os estados estão restritos ao lugar geométrico delineado por $V(\mathbf{x})$, ou seja, pela função de Lyapunov escolhida. Note que $\dot{V}(\mathbf{x})$ é sempre negativa ao longo de $V(\mathbf{x})$. Então, a função $V(\mathbf{x})$ decresce ao longo do tempo, o que implica que o sistema é assintoticamente estável.

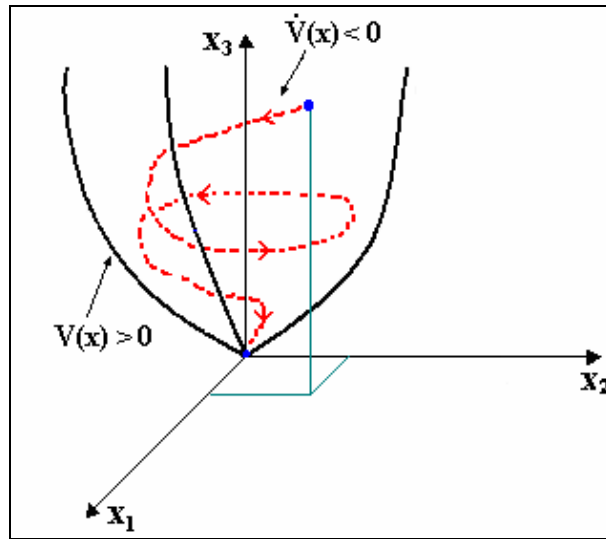


Figura 3.1: Interpretação geométrica do teorema da estabilidade.

3.4. Projeto de Sistemas de Controle Utilizando LMIs

O projeto de sistema de controle utilizando LMIs considera a lei de realimentação de estados tal que o ganho de realimentação é dado por,

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \mathbf{x} \quad (3.12)$$

O sistema em malha fechada tem a seguinte equação na forma de espaço de estados

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c \mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c) \mathbf{x} = \mathbf{A}_f \mathbf{x} \quad (3.13)$$

Para que o sistema em malha fechada da equação (3.13) seja estável, é necessário que exista uma matriz simétrica definida positiva $\mathbf{P}$ tal que,

$$\mathbf{A}_f^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_f < 0$$

ou

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c) < 0 \quad (3.14)$$

com $\mathbf{P} > 0$.

A inequação (3.14) não é uma LMI, pois existe o produto de duas variáveis a serem encontradas, $\mathbf{P}$ e $\mathbf{K}_c$. Para obtenção do problema convexo deve-se trabalhar a inequação (3.14) algebricamente.

Primeiramente, multiplica-se ambos os lados dos termos da inequação (3.14) por $\mathbf{P}^{-1}$ (a matriz inversa de $\mathbf{P}$ existe, uma vez que ela é considerada simétrica positiva definida). Tem-se então,

$$\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{B}\mathbf{K}_c\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{K}_c^T\mathbf{B}^T < 0 \quad (3.15)$$

Definindo duas novas variáveis, $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1}$ e $\mathbf{Z} = \mathbf{K}_c\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{K}_c\mathbf{W}$, tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{B}\mathbf{Z} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ \mathbf{W} &> 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

O ganho do controlador para este sistema é dado por,

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1} \quad (3.17)$$

Projeto de sistemas de controle com incertezas politópicas utilizando LMIs

Um sistema com incertezas politópicas com ν vértices pode ser estabilizado por meio de projeto por LMIs (GONÇALVES, 2003). Este sistema com incertezas politópicas será estabilizável se,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_i\mathbf{W} + \mathbf{B}\mathbf{Z} + \mathbf{W}\mathbf{A}_i^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ \mathbf{W} &> 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

sendo $\mathbf{A}_i$ o i -ésimo vértice do politopo, $i = 1, 2, \dots, \nu$. Mais detalhadamente, o projeto de controlador robusto que estabiliza o sistema incerto consiste em resolver simultaneamente as seguintes LMIs:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1\mathbf{W} + \mathbf{B}\mathbf{Z} + \mathbf{W}\mathbf{A}_1^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}^T &< 0 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{W} + \mathbf{B}\mathbf{Z} + \mathbf{W}\mathbf{A}_2^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{B}^T &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \vdots \\
& \mathbf{A}_v \mathbf{W} + \mathbf{BZ} + \mathbf{WA}_v^T + \mathbf{Z}^T \mathbf{B}^T < 0 \\
& \mathbf{W} > 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

sendo $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$ e v o número total de vértices do politopo.

O controlador é dado por: $\mathbf{K}_c = \mathbf{ZW}^{-1}$

4 - Projeto de Sistemas de Controle

4.1. Projeto via Realimentação de Estados

A lei de controle por realimentação tem muitas aplicações em sistemas dinâmicos. A idéia básica da lei de controle por realimentação é ler o sinal de saída do sistema e através dele criar o sinal do atuador. O vetor de estados do sistema é então utilizado para gerar o sinal do atuador. A lei de controle por realimentação tem a vantagem de que o sistema pode estar exposto a excitações aleatórias.

Considere um sistema de controle descrito na forma de espaço de estados a seguir,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}\end{aligned}\tag{4.1}$$

A lei de controle por realimentação pode ser escrita na seguinte forma,

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \mathbf{x}\tag{4.2}$$

Esta lei de controle é chamada de *realimentação completa de estados* e utiliza todas as variáveis de estado do sistema. A matriz $\mathbf{K}_c$ é chamada de matriz de ganho de realimentação de estados. O diagrama de blocos que descreve o controle por realimentação no espaço de estados é mostrado na figura 4.1.

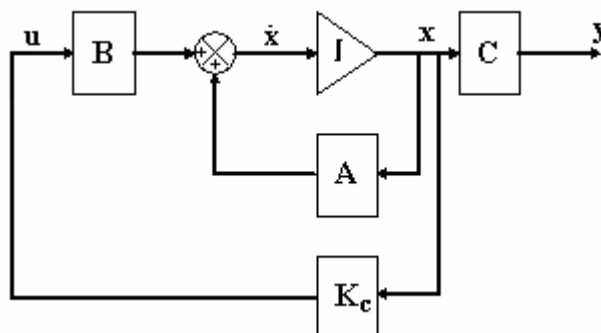


Figura 4.1: Diagrama de blocos do sistema com realimentação de estados.

Substituindo-se a equação (4.2) na equação (4.1) tem-se,

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c)\mathbf{x} \quad (4.3)$$

A solução desta equação é dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c)t} \mathbf{x}(0) \quad (4.4)$$

sendo $\mathbf{x}(0)$ o estado inicial devido a perturbações externas. A estabilidade e as características da resposta transitória são determinadas pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c)$. Se a matriz $\mathbf{K}_c$ for escolhida de forma adequada, a matriz $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c)$ pode ser feita uma matriz assintoticamente estável e, qualquer que seja $\mathbf{x}(0) \neq 0$, é possível fazer $\mathbf{x}(t)$ tender a 0 quando t tende para infinito. Os autovalores da matriz $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c)$ são chamados pólos do regulador. Se estes pólos do regulador forem localizados no semiplano s da esquerda, então $\mathbf{x}(t)$ tende a 0 quando t tende a infinito. O problema de impor a localização dos pólos a malha fechada é dito o problema da alocação de pólos.

Como visto na figura 4.1, o sistema de controle com realimentação completa de estados requer o conhecimento de todos os estados do sistema. Muitas vezes o acesso a todos os estados do sistema não é disponível devido, por exemplo, ao número limitado de sensores. Um outro fator, também importante, no projeto de sistema de controle no espaço de estados é saber se todos os estados podem ser controlados. Assim é necessário definir dois conceitos importantes no projeto de sistemas de controle por realimentação no espaço de estados que são controlabilidade e observabilidade.

4.1.1. Controlabilidade

Um sistema dinâmico descrito na forma de espaço de estados é dito *controlável* se, para todo instante $t_1 > 0$, o estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ e estado final $\mathbf{x}_1$, existe uma entrada $\mathbf{u}(t)$ tal que a solução do sistema satisfaça $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$. Caso contrário o sistema é dito não controlável (ZHOU, 1995).

A controlabilidade pode ser verificada utilizando alguns critérios algébricos:

- (i) A matriz de controlabilidade $\mathbf{C}_b$

$$\mathbf{C}_b = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (4.5)$$

tem posto n .

(ii) A matriz gramiano de controlabilidade

$$\mathbf{W}_c = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau \quad (4.6)$$

é definida positiva para todo $t > 0$.

(iii) A matriz

$$[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \quad \mathbf{B}] \quad (4.7)$$

tem posto completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, o campo dos números complexos. Esta condição é chamada de teste do posto de *Popov*, *Belevitch* e *Hautus* (PBH).

(iv) Não existe autovetor $\mathbf{q}_i$ de $\mathbf{A}^T$ que seja ortogonal a todas as colunas de $\mathbf{B}$. Ou seja, dado $\mathbf{A}^T \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$, então a condição: $\mathbf{q}_i^T \mathbf{B} = 0$, implica $\mathbf{q}_i \equiv 0$.

(v) Os autovalores de $(\mathbf{A} + \mathbf{BK}_c)$ podem ser livremente alocados por uma escolha adequada de $\mathbf{K}_c$.

4.1.2. Observabilidade

Um sistema dinâmico descrito na forma de espaço de estados é dito *observável* se, para qualquer $t_1 > 0$, o estado inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ pode ser determinado pela história temporal da entrada $\mathbf{u}(t)$ e a saída $\mathbf{y}(t)$ no intervalo $[0, t_1]$. Caso contrário o sistema é dito não observável (ZHOU, 1995).

A observabilidade pode ser verificada utilizando alguns critérios algébricos:

(i) A matriz de observabilidade $\mathbf{O}_b$

$$\mathbf{O}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

tem posto n .

(ii) A matriz gramiano de observabilidade

$$\mathbf{W}_o(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}^T \tau} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A} \tau} d\tau \quad (4.9)$$

é definida positiva para todo $t > 0$.

(iii) A matriz

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

tem posto n para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Teste do posto *PBH*.

(iv) Não existe autovetor $\mathbf{q}_i$ de $\mathbf{A}$ que seja ortogonal a todas as linhas de $\mathbf{C}$. Ou seja, dado $\mathbf{A}^T \mathbf{q}_i = \lambda_i \mathbf{q}_i$, então a condição: $\mathbf{C} \mathbf{q}_i = 0$, implica $\mathbf{q}_i \equiv 0$.

(v) Os autovalores de $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})$ podem ser livremente alocados por uma escolha adequada de $\mathbf{K}_e$. O termo $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})$ é obtido no item 4.1.4.

(vi) O par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T)$ é controlável.

4.1.3. Princípio da Dualidade

Observando as propriedades de controlabilidade e observabilidade é possível notar relações entre os dois conceitos. Pode-se dizer que o problema de controlabilidade é dual ao problema de observabilidade (VALER, 1999).

Um sistema linear e invariante no tempo (LTI)

$$S : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.11)$$

é dual ao sistema (e vice versa),

$$S : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

se

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{A}^T \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}^T \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (4.13)$$

O sistema LTI da equação 4.11 é controlável (observável) somente se o sistema dual da equação 4.12 for observável (controlável) (VALER, 1999).

4.1.4. Observadores de Estados

Quando houver variáveis de estado não disponíveis para medição, o projeto de sistema de controle por realimentação de estados não pode ser feito, a não ser que se estime as variáveis não medidas. Processos de derivação de variáveis para obtenção de outras não são aconselháveis, tendo em vista que o processo de derivação acarreta decréscimo da relação sinal/ruído do sistema, sendo que o ruído varia mais rapidamente que o sinal de comando. Dependendo das grandezas com que se trabalha, a relação sinal/ruído pode ser comprometida por um simples

processo de derivação. As variáveis não medidas, no entanto, podem ser estimadas. Um dispositivo, circuito elétrico ou programa de computador que estime estas variáveis é chamado de observador de estado ou simplesmente observador. Quando todas as variáveis do sistema são estimadas, este observador é chamado de *observador de ordem completa*. Quando o número de variáveis estimadas é menor que o total de variáveis do sistema este observador é chamado de *observador de ordem reduzida*.

Basicamente, um observador de estado é um modelo matemático do sistema baseado no seu comportamento físico. O modelo matemático é usado para construir o sistema físico baseado na leitura de um sensor.

Assumindo um sistema descrito na forma de espaço de estados

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx}\end{aligned}\tag{4.14}$$

O observador dinâmico pode ser escrito na seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{x}}} &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{Bu} + \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \\ \hat{\mathbf{y}} &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\end{aligned}\tag{4.15}$$

Sendo $\mathbf{K}_e$ o ganho do observador a ser determinado e $\mathbf{y}$ a saída do sensor que alimenta a dinâmica do observador. A representação gráfica de um observador dinâmico é mostrada na figura 4.2.

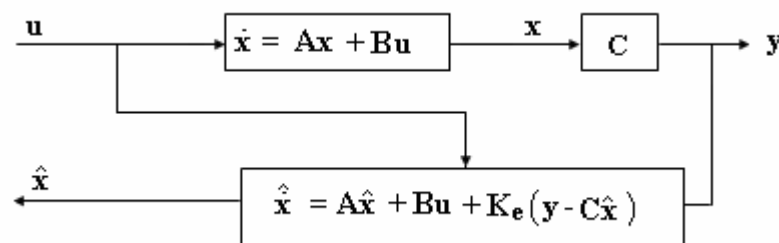


Figura 4.2: Representação gráfica de um observador dinâmico.

Para entender o funcionamento do observador, combinam-se as equações (4.14) e (4.15) de modo que,

$$\dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{K}_e(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.16)$$

Introduzindo um vetor de erro definido por

$$\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (4.17)$$

O vetor de erro representa o erro entre o sistema real e o observador dinâmico. A derivada do vetor de erro pode, também, ser escrita considerando que $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}$ por,

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})\mathbf{e} \quad (4.18)$$

A solução da equação (4.18) pode ser obtida por similaridade com a equação (4.3). O vetor de erro, portanto, é dado por,

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})t} \mathbf{e}(0) \quad (4.19)$$

A partir da equação (4.19), percebe-se que o comportamento dinâmico do vetor erro é determinado pelos autovalores da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})$. Se a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})$ for uma matriz estável, o vetor erro convergirá para zero seja qual for o valor inicial do vetor erro $\mathbf{e}(0)$. Além disso, se o sistema for completamente observável pode-se provar que é possível escolher uma matriz $\mathbf{K}_e$ tal que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})$ possua autovalores desejados. Então, o projeto de um observador de ordem completa se torna determinar a matriz de ganho do observador $\mathbf{K}_e$ tal que a matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e\mathbf{C})$ possua autovalores apropriados. Esses autovalores são usualmente escolhidos de modo que a resposta do observador seja mais rápida que a resposta do sistema. Uma regra prática consiste em escolher uma resposta do observador pelo menos duas a cinco vezes mais rápida que a resposta do sistema. O projeto do observador pode ser feito de forma análoga ao projeto do controlador considerando o princípio de dualidade.

Nos sistemas de controle com realimentação de estados, pode-se utilizar os estados estimados para realimentar o sistema. O esquema de um sistema de controle de realimentação que utiliza um observador de estados é mostrado na figura 4.3.

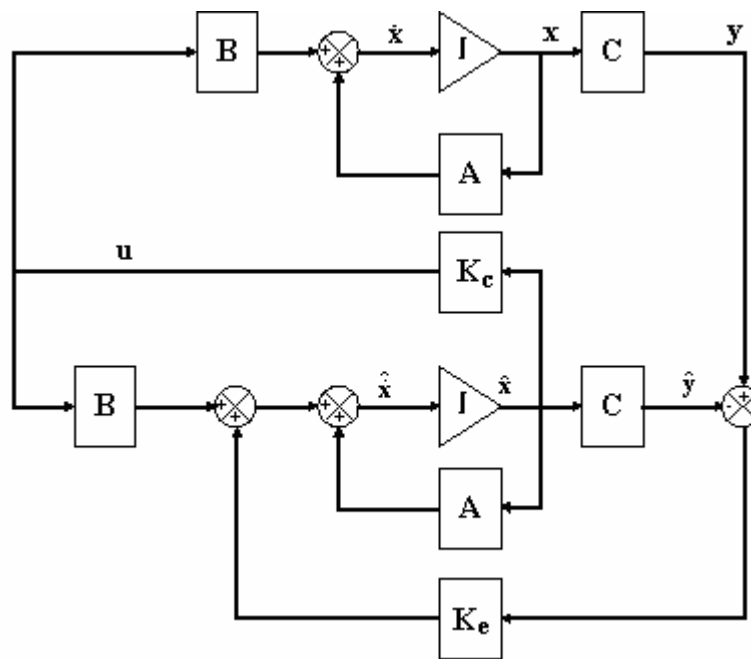


Figura 4.3: Sistema de controle por realimentação de estados utilizando observador.

4.1.5. Controle H^∞ via Realimentação de Estados

Este item apresenta o controle H_∞ considerando realimentação de estados para um sistema contínuo. Grande parte do que é apresentado neste item foi estudo do trabalho de Peres (1997) que contribuiu com as parametrizações apresentadas a seguir.

Considerando um sistema linear e invariante no tempo (LTI):

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{w} + \mathbf{D}_2\mathbf{u}\end{aligned}\tag{4.20}$$

sendo $\mathbf{A}$ a matriz dinâmica, $\mathbf{B}_1$ a matriz de entrada de distúrbio, $\mathbf{B}_2$ a matriz de entrada de controle, $\mathbf{C}$ a matriz de saída, $\mathbf{D}_1$ e $\mathbf{D}_2$ as matrizes de transmissão direta, $\mathbf{x}$ o vetor de estados, $\mathbf{w}$ o vetor de distúrbio e $\mathbf{u}$ o vetor de entrada de controle.

Assumindo controle por realimentação de estados para a LTI descrita pela equação (4.20), uma lei de controle linear pode ser dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_c \mathbf{x}\tag{4.21}$$

sendo $\mathbf{K}_c$ a matriz de ganho de realimentação a ser determinada. Considera-se também que $\mathbf{D}_1=0$ e $\mathbf{D}=\mathbf{D}_2$. As matrizes à malha fechada são dadas por:

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{K}_c \quad (4.22)$$

$$\mathbf{C}_f = \mathbf{C} + \mathbf{D}\mathbf{K}_c \quad (4.23)$$

O interesse é encontrar o conjunto de ganhos estabilizantes definido por:

$$\mathbf{K}_c = \{\mathbf{K}_c : \mathbf{A}_f \text{ é assintoticamente estável}\} \quad (4.24)$$

ou seja, todos os autovalores de $\mathbf{A}_f$ têm parte real negativa.

A norma H_∞ pode ser calculada a partir de uma relação entre um limitante superior $\gamma > 0$ para a norma H_∞ e a existência de uma matriz definida positiva $\mathbf{P}$, a partir do seguinte enunciado, $\|\mathbf{H}\|_\infty < \gamma$ se e somente se a desigualdade:

$$\mathbf{A}_f^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_f + \gamma^{-2} \mathbf{P} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_f^T \mathbf{C}_f \leq \mathbf{0} \quad (4.25)$$

admitindo $\mathbf{P}=\mathbf{P}^T > \mathbf{0}$ como solução e sendo γ um escalar.

O problema consiste em sintetizar um controlador para manter as variáveis de desempenho do sistema, $\mathbf{z}$, pequenas na presença de entradas exógenas $\mathbf{w}$. O controle H_∞ ótimo consiste em encontrar todos os controladores admissíveis tal que a norma H_∞ seja minimizada (BURL, 1999). Enquanto o controle H_∞ sub-ótimo, dado $\gamma > 0$, consiste em encontrar todos os controladores admissíveis, se existir um, tal que a norma $H_\infty < \gamma$.

O problema de otimização H_∞ pode ser definido a partir da caracterização de todos os estados de ganhos de realimentação que estabilizem o sistema. O problema da maneira como é enunciado não é convexo nas variáveis de interesse, então se torna necessário definir um novo espaço paramétrico para que o problema convexo possa ser obtido. Após esta parametrização convexa as LMIs resultantes podem ser utilizadas para a solução do problema.

A partir da relação entre a norma H_∞ e a existência de uma matriz $\mathbf{P}$, dada pela equação (4.25), uma condição equivalente é encontrada multiplicando-se à esquerda e à direita por $\mathbf{P}^{-1}$ e fazendo $\mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} > \mathbf{0}$:

$$\mathbf{A}_f \mathbf{W} + \mathbf{W} \mathbf{A}_f^T + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T + \gamma^{-2} \mathbf{W} \mathbf{C}_f^T \mathbf{C}_f \mathbf{W} \leq \mathbf{0} \quad (4.26)$$

A equação (4.26) não envolve de maneira convexa as variáveis de interesse, pois a matriz de ganho $\mathbf{K}_c$ está embutida dentro de $\mathbf{A}_f$, $\mathbf{C}_f$ e da matriz $\mathbf{W}$. Assim, deve-se definir um novo espaço paramétrico, obtendo-se assim o problema de otimização convexa:

$$\begin{aligned} & \min_{\mu, \mathbf{W}, \mathbf{Z}} \mu \\ & \mu > 0 \\ & \mathbf{W} > \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} -\mathbf{A}\mathbf{W} - \mathbf{W}\mathbf{A}^T - \mathbf{B}_2\mathbf{Z} - \mathbf{Z}^T\mathbf{B}_2^T & \mathbf{B}_1 & \mathbf{W}\mathbf{C}^T + \mathbf{Z}^T\mathbf{D}^T \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}\mathbf{W} + \mathbf{D}\mathbf{Z} & \mathbf{0} & \mu\mathbf{I} \end{bmatrix} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.27)$$

sendo $\mu = \gamma^2$.

A prova deste problema é feita reescrevendo as restrições da equação (4.27) utilizando o complemento de Schur. A minimização deste problema garante um valor ótimo para a norma H_∞ . A prova desta equação pode ser encontrada em Peres (1997) e Palma (2007).

A solução da equação (4.27) fornece $\sqrt{\mu} = \min \|H\|_\infty$ e o ganho ótimo H_∞ de realimentação é dado por:

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{Z}\mathbf{W}^{-1} \quad (4.28)$$

sendo $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{W}$ obtidos a partir da solução do problema de otimização (4.27). Usando a equação (4.27) é possível também definir o problema sub-ótimo substituindo a LMI $\mu > 0$ por $\mu > \mu'$.

4.2. Projeto Robusto H_∞ via Realimentação da Saída

4.2.1. Configuração Geral do Problema de Controle

Considere o sistema mostrado na figura 4.4, o qual se aplica a uma vasta classe de problemas de controle. Para este sistema, tem-se como sinais típicos:

- $r(s)$, o sinal de referência a ser seguido;
- $d_i(s)$, o sinal de distúrbio na entrada do sistema;
- $d_o(s)$, o sinal de distúrbio na saída do sistema;
- $m(s)$, o sinal de ruído;
- $y(s)$, a saída da planta;
- $e(s)$, o sinal de erro entre a referência e o sinal medido e
- $u(s)$, o sinal de controle.

sendo $\mathbf{G}(s)$ o modelo do sistema (planta), $\mathbf{K}(s)$ o controlador e s é a variável de *Laplace*.

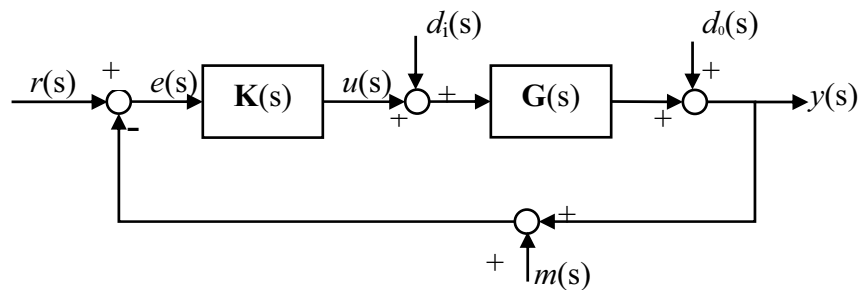


Figura 4.4: Configuração de um sistema genérico de controle

Com base na figura 4.4 algumas características importantes do sistema são definidas no domínio da frequência. Estas funções são fundamentais para a síntese e análise do sistema de controle (MOREIRA, 1998). Assim sendo, considere as seguintes relações entrada-saída:

- Saída da planta

$$y(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)r(s) + [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} d_o(s) + [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)d_i(s) - [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)m(s) \quad (4.29)$$

- sinal de erro

$$e(s) = r(s) - y(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} (r(s) - d_o(s) + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)m(s) - \mathbf{G}(s)d_i(s)) \quad (4.30)$$

- sinal de controle

$$u(s) = \mathbf{K}(s)e(s) = \mathbf{K}(s)[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} (r(s) - d_0(s) + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)m(s) - \mathbf{G}(s)d_i(s)) \quad (4.31)$$

De (4.29), (4.30) e (4.31), definem-se as seguintes funções características de um sistema de controle

- Função Sensibilidade

$$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \quad (4.32)$$

- Função Sensibilidade Complementar

$$\mathbf{T}(s) = [\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) \quad (4.33)$$

- Função Restrição de Energia

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{K}(s)[\mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)]^{-1} \quad (4.34)$$

Destas três funções, condições importantes que dizem respeito ao desempenho do sistema podem ser estabelecidas, bem como condições preliminares de robustez. Assim, substituindo (4.32) em (4.30), com $d_i(s)=d_0(s)=0$, tem-se o erro da resposta do sistema relacionado às funções sensibilidade e sensibilidade complementar:

$$e(s) = \mathbf{S}(s) r(s) - \mathbf{T}(s) m(s) \quad (4.35)$$

Para $s=j\omega$, se a norma da matriz sensibilidade tende a zero no intervalo de frequência $\omega_0 < \omega < \omega_1$, o erro da resposta do sistema é muito pequeno em relação à entrada de referência. Também, ocorre uma redução da sensibilidade do sistema a ruídos, se a norma da função sensibilidade complementar tender a zero.

Substituindo (4.33) em (4.29), com $d_i(s)=d_0(s)=m(s)=0$, obtém-se

$$y(s) = \mathbf{T}(s)r(s) \quad (4.36)$$

Neste caso, pode-se dizer que a saída do sistema acompanha melhor a referência aplicada quanto mais próxima a norma de $\mathbf{T}(s)$ está de $\mathbf{I}$. Entretanto, com $m(s) \neq 0$ será grande a influência do sinal de ruído na saída, uma vez que

$$y(s) = \mathbf{T}(s) (r(s) - m(s)) \quad (4.37)$$

Ocorre aqui um conflito entre as características de seguir a referência e de atenuar o ruído. Este conflito também surge entre as definições de $\mathbf{S}(s)$ e $\mathbf{T}(s)$. De (4.32) e (4.33) tem-se a seguinte propriedade estabelecida,

$$\mathbf{T}(s) + \mathbf{S}(s) = \mathbf{I} \quad (4.38)$$

Como estas funções dependem de $\mathbf{K}(s)$, quando, para um dado $s=j\omega$, a norma de $\mathbf{K}(s)$ se aproxima de infinito, a norma de $\mathbf{S}(s)$ se aproxima de zero e a norma de $\mathbf{T}(s)$ se aproxima da unidade. Daí considerar $\mathbf{T}(s)$ como o complemento da função sensibilidade. Como $r(s)$ e, por consequência, $e(s)$ são sinais com um espectro de frequência concentrado na região de baixa frequência e $m(s)$ é geralmente associado à alta frequência, este compromisso conflitante é resolvido atribuindo pesos diferentes a $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{S}(s)$ em regiões de frequência específicas. Estas duas funções são, como já descrito, geralmente usadas para especificar requisitos de desempenho no domínio da frequência. Entretanto, elas também são usadas para especificar robustez, como mostrado em Doyle e Stein (1981). Isto porque a redução do ganho da função sensibilidade está ligada a uma menor sensibilidade do sistema controlado a efeitos de mudanças nos parâmetros da planta, assim como a função sensibilidade complementar fornece informações sobre a robustez quanto à dinâmica desconhecida de alta frequência (FRANKLIN et al, 1994).

Substituindo (4.34) em (4.31), com $d_i(s) = d_0(s) = 0$, tem-se:

$$u(s) = \mathbf{U}(s) (r(s) + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s)m(s)) \quad (4.39)$$

Como se pode notar, $\mathbf{U}(s)$ especifica o ganho do sinal de controle. Desta forma, esta função é usada para restringir o nível do sinal de controle.

Portanto, $\mathbf{S}(s)$, $\mathbf{T}(s)$ e $\mathbf{U}(s)$ representam relações fundamentais que são freqüentemente usadas para especificar requisitos de projeto em diversas técnicas de controle, no domínio da frequência. Apesar do avanço de técnicas no domínio do tempo em teoria de controle nos

últimos tempos, o domínio da frequência continua sendo uma escolha natural e direta para a análise de robustez. Em vista disto, considera-se toda a descrição que segue como sendo no domínio da frequência e, assim, a dependência em relação a s será omitida, para todas as variáveis, na notação adotada a partir daqui.

4.2.2. Representação do Sistema Segundo o Enfoque Convexo

Segundo o enfoque moderno de controle, sistemas lineares, como o da figura 4.4, podem ser convertidos em uma outra forma de representação. Esta representação alternativa se aplica a uma larga classe de problemas de controle e propõe uma solução unificada via otimização convexa (BOYD; BARRATT, 1990). A esta representação, mostrada na figura 4.5, dá-se o nome de representação convexa. Neste cenário todas as entradas do sistema são reunidas em um vetor de entradas exógenas, $\mathbf{w}$. A saída se divide em um vetor de saídas medidas $\mathbf{y}$, usadas para realimentar o sistema, e um vetor de saídas reguladas $\mathbf{z}$, contendo os sinais a serem controlados. Nesta representação $\mathbf{K}$ é a função de transferência do controlador, $\mathbf{P}$ é a planta generalizada, que contém as interconexões entre os sinais de entradas e saídas. Ressalta-se aqui que a planta generalizada $\mathbf{P}$ só contém informações referentes a um número limitado de modos que se deseja controlar. Por fim, tem-se o vetor de sinais de controle $\mathbf{u}$. Como vantagem adicional, a representação convexa se aplica tanto a sistema monovariáveis como multivariáveis.

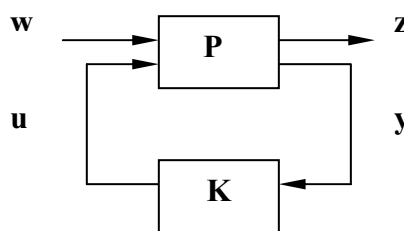


Figura 4.5: Representação convexa do problema de controle.

Assim, o modelo matemático pode ser dado por:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (4.40)$$

onde $\mathbf{P}_{zw}$, $\mathbf{P}_{zu}$, $\mathbf{P}_{yw}$ e $\mathbf{P}_{yu}$ são as matrizes funções de transferência das saídas em função das entradas, como indicado pelos subscritos. No domínio convexo, a matriz função de transferência de malha fechada é dada por:

$$\mathbf{H}_{zw} = \mathbf{P}_{zw} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \quad (4.41)$$

e o problema geral de controle pode ser resumido da seguinte forma:

Determine um controlador $\mathbf{K}$ que realimente o sistema com um sinal $\mathbf{u}$, calculado a partir de um sinal de medidas $\mathbf{y}$, tal que o sistema em malha fechada $\mathbf{H}_{zw}$ satisfaça certos requisitos de projeto, dados em termos da relação entre as saídas reguladas $\mathbf{z}$, e as entradas exógenas $\mathbf{w}$.

Considere então um problema de controle com os requisitos típicos de erro de resposta pequeno, atenuação de ruído e energia limitada de atuação. Assumem-se como entradas exógenas os sinais de referência e de ruído, $\mathbf{w} = [r \ m]^T$, e como saídas reguladas, incluindo funções de ponderação adequadas,

- Erro ponderado

$$e' = \mathbf{W}_1 e$$

- Saída ponderada

$$y' = \mathbf{W}_2 y$$

- Sinal de controle ponderado

$$u' = \mathbf{W}_3 u$$

Tem-se, assim, de (4.35), (4.37) e (4.39) as seguintes relações entrada/saída a controlar:

- $e' = \mathbf{W}_1 (\mathbf{S} r - \mathbf{T} m)$
- $y' = \mathbf{W}_2 \mathbf{T} (r - m)$
- $u' = \mathbf{W}_3 \mathbf{U} (r(s) + \mathbf{G}(s) \mathbf{K}(s) m(s))$

Assim, $\mathbf{H}_{zw}$ inclui a função sensibilidade, que está relacionada ao erro com que o sistema segue a referência, a função sensibilidade complementar que está associada ao requisito de rejeição a ruídos, e a função $\mathbf{U}$, que se refere à restrição de energia do atuador.

As funções de ponderação, $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$ e $\mathbf{W}_3$, têm o objetivo de acentuar certas regiões de frequência em detrimento de outras. A ponderação sobre o erro, por exemplo, exibe um peso alto na região de baixa frequência e um peso baixo na região de alta frequência. Isto porque a característica requerida de erro é que o sistema tenha uma resposta transitória que siga a referência com um erro pequeno e que tenha um erro de regime reduzido. Esta característica é alcançada com uma função sensibilidade que apresente baixo ganho na região de frequência inferior à frequência de corte especificada para o sistema. Com esta função de ponderação, que dá maior peso à região de baixa frequência, o termo $(\mathbf{W}_1 \mathbf{T} m)$ se torna desprezível na saída e' . Desta forma a função $\mathbf{S}$ prepondera na saída regulada e' .

Por outro lado, a função de ponderação sobre a saída do sistema apresenta um peso baixo na região de baixa frequência e um peso alto na região de alta frequência. Desta forma, inclui-se no projeto a atenuação de ruído de alta frequência na saída. A ponderação sobre $\mathbf{U}$, por sua vez, limita a banda passante do sinal de controle e a sua magnitude.

O diagrama do sistema na sua configuração final, incluindo as funções de ponderação necessárias, é apresentado na figura 4.6. Esta figura descreve o que se denomina *planta aumentada* usada como modelo de projeto para a síntese do controlador.

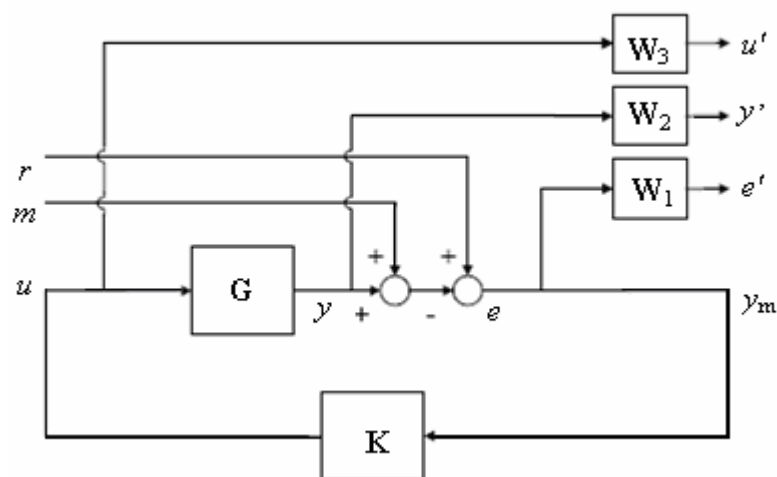


Figura 4.6: Planta aumentada para o problema de desempenho

Considerando o sistema descrito acima, com as entradas e saídas selecionadas e suas respectivas ponderações, define-se o que é usualmente chamado de problema de desempenho:

Sintetizar um controlador $\mathbf{K}$ que satisfaça a seguinte desigualdade:

$$\|\mathbf{H}_{zw}\|_{gn} < \gamma$$

sendo $\|\cdot\|_{gn}$ uma norma genérica e γ o custo definido do projeto. Neste trabalho a norma infinita é a utilizada.

4.2.3. Ganhos Principais e Norma Infinita

A teoria moderna de robustez está fundamentada na teoria de ganhos principais do sistema, que é apresentada sucintamente a seguir. Considerando um sistema tal que

$$\mathbf{y} = \mathbf{G} \mathbf{u} \quad (4.42)$$

Seus ganhos principais são definidos como

$$\frac{\|\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{\|\mathbf{G} \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \quad (4.43)$$

sendo $\|\cdot\|$ uma norma vetorial euclidiana. Assumindo, sem perda de generalidade, que $\|\mathbf{u}\|=1$, pode-se escrever

$$\frac{\|\mathbf{G} \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \|\mathbf{G}\|_s = \sqrt{\mathbf{G}^* \mathbf{G}} \quad (4.44)$$

sendo $\|\cdot\|_s$ a norma espectral e $\mathbf{G}^*$ o complexo conjugado de $\mathbf{G}$. Tem-se assim a definição da norma espectral de $\mathbf{G}$, que está relacionada com seus valores singulares. Assim, definindo

$$\|\mathbf{G}\|_s = \{\sigma_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4.45)$$

tem-se que os valores singulares de $\mathbf{G}$, denominados σ_i , que são os ganhos principais do sistema.

Definindo-se o mínimo e o máximo valor singular respectivamente por

$$\begin{aligned}\underline{\sigma} &= \min \{\sigma_i\} \\ \overline{\sigma} &= \max \{\sigma_i\}\end{aligned}\tag{4.46}$$

tem-se que

$$\underline{\sigma} \leq \|G\|_s \leq \overline{\sigma}\tag{4.47}$$

i. e., os ganhos de um sistema multivariável são limitados pelo maior e pelo menor valor singular do sistema. Como consequência, os valores singulares extremos podem ser usados para análise do sistema.

Por exemplo, a função sensibilidade (4.32) e a função sensibilidade complementar (4.33) podem ser analisadas tendo como base os valores máximo e mínimo de seus valores singulares. Suponha um requerimento típico onde a matriz sensibilidade deva ter um ganho menor que um dado valor A na região de baixa frequência e a função sensibilidade complementar deva ter um ganho menor que B na região de alta frequência. A transcrição deste requerimento, usando valores singulares, pode ser,

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(S(j\omega)) &\leq A, & \omega < \omega_s \\ \overline{\sigma}(T(j\omega)) &\leq B, & \omega > \omega_T\end{aligned}\tag{4.48}$$

Esta especificação pode ainda ser dada através da *norma infinita*, definida como o valor supremo do máximo valor singular do sistema,

$$\|G\|_\infty = \sup \overline{\sigma}(G(j\omega)), \quad 0 < \omega < \infty\tag{4.49}$$

sendo G uma função estável e própria (MACIEJOWSKI, 1989).

No exemplo dado, a norma infinita pode ser usada para estabelecer o limitante superior das funções S e T . Para isso, definem-se as funções de ponderação no domínio da frequência:

- W_1 com alto ganho na região $\omega < \omega_s$ e um ganho muito pequeno para $\omega > \omega_s$ e
- W_2 com ganho baixo na região $\omega < \omega_T$ e um ganho alto para $\omega > \omega_T$, como mostrado na figura 4.7.

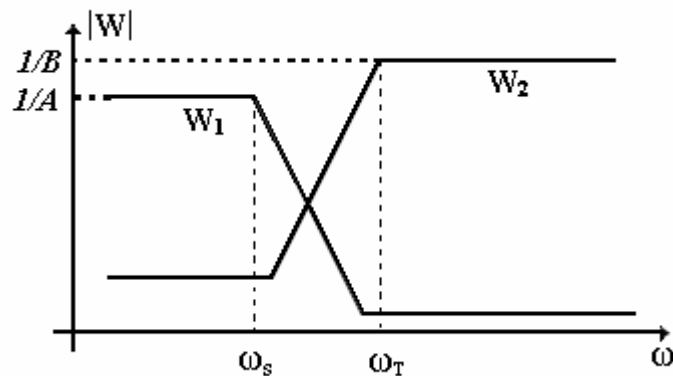


Figura 4.7: Funções de Ponderação W_1 e W_2

A especificação dada em (4.48) torna-se

$$\begin{aligned} \|W_1 S\|_{\infty} &\leq 1 \\ \|W_2 T\|_{\infty} &\leq 1 \end{aligned} \quad (4.50)$$

Sabe-se de Truxal (1955) que em uma situação ideal onde o ganho é unitário em toda a faixa de frequência (condição "*all-pass*" em inglês), o controlador que satisfaz a desigualdade,

$$\|WH\| \leq 1 \quad (4.51)$$

é dado por

$$H = 1/W \quad (4.52)$$

sendo W o inverso da função de malha fechada desejada e H a função de transferência do sistema em malha fechada. Portanto, W_1 e W_2 são selecionadas de tal maneira que S e T são moldadas para assumir a forma inversa dessas funções. Então, tendo $|W_1| < 1/A$ para $\omega < \omega_s$ e $|W_2| < 1/B$ para $\omega > \omega_T$, se a solução ótima é encontrada para a equação (4.50), isto significa que $\|S\| < A$ para $\omega < \omega_s$, e que $\|T\| < B$ para $\omega > \omega_T$.

A partir dos conceitos de representação convexa e de norma infinita introduzidos acima é que se descreve o problema de robustez e modelagem de incerteza de que trata o restante deste capítulo.

4.2.4. Análise de Robustez

Segundo o enfoque convexo, a robustez é introduzida no projeto do sistema de controle como um laço de realimentação adicional, além do laço de controle. Qualquer incerteza referente a dinâmica desconhecida ou omitida durante a fase de modelagem e/ou identificação aparece como uma perturbação inserida neste laço. Assim, dado um sistema perturbado, $\mathbf{P}^{pert}$, este pode ser parametrizado em função de uma dinâmica nominal, $\mathbf{P}$, e uma realimentação normalizada $\Delta \in \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ representa um conjunto de matrizes funções de transferência que reúne todas as incertezas do sistema.

$$\mathbf{P}^{pert} = \mathbf{P}^{pert}(\mathbf{P}, \Delta) \quad , \quad \Delta \in \mathcal{D} \quad (4.53)$$

Esta representação permite representar a incerteza na forma de uma realimentação externa ao modelo nominal, conforme mostrado na figura 4.8.

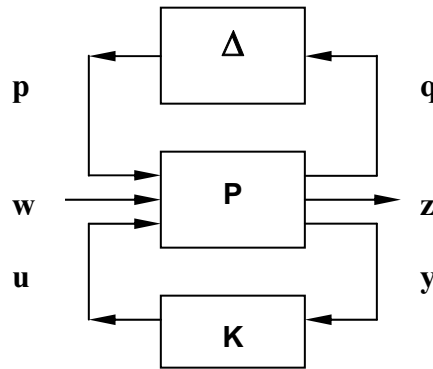


Figura 4.8: Forma padrão da realimentação geral de um sistema com incerteza dinâmica.

A equação. (4.54) mostra a relação entre a planta generalizada $\mathbf{P}$ e os três respectivos sinais de entradas e saídas (SILVA, 2005).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{qp} & \mathbf{P}_{qw} & \mathbf{P}_{qu} \\ \mathbf{P}_{zp} & \mathbf{P}_{zw} & \mathbf{P}_{zu} \\ \mathbf{P}_{yp} & \mathbf{P}_{yw} & \mathbf{P}_{yu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{P} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

sendo os vetores $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ relacionados às especificações de robustez (entradas e saídas da perturbação desconhecida Δ).

Esta nova representação para o sistema tem a seguinte matriz função de transferência,

$$\mathbf{H}_{zw}^{\text{pert}} = \mathbf{H}_{zw} + \mathbf{H}_{zp} \Delta (\mathbf{I} - \mathbf{H}_{qp} \Delta)^{-1} \mathbf{H}_{qw} \quad (4.55)$$

sendo $\mathbf{H}_{zw}$ o sistema nominal em malha fechada, definido em (4.41), e a demais matrizes funções de transferências são:

$$\mathbf{H}_{zp} = \mathbf{P}_{zp} + \mathbf{P}_{zu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yp} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{H}_{qw} = \mathbf{P}_{qw} + \mathbf{P}_{qu} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yw} \quad (4.57)$$

$$\mathbf{H}_{qp} = \mathbf{P}_{qp} + \mathbf{P}_{qu} \mathbf{K} (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{uy} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{P}_{yp} \quad (4.58)$$

O que se espera é que o sistema de malha fechada (4.55) atenda os requisitos de desempenho, como amortecimento dos modos de interesse dentro de limites específicos de consumo de energia e se mantenha estável, mesmo na presença de possíveis perturbações Δ (MOREIRA, 1998). Estes requisitos serão atendidos se as funções de transferência dada pelas equações (4.41), (4.56) até (4.58) mantiverem estáveis (BOYD; BARRATT, 1990). Do problema de pequenos sinais, Levine (1996), sabe-se que um sistema em malha fechada,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 (\mathbf{I} - \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2)^{-1} \mathbf{H}_3 \quad (4.59)$$

sendo $(\mathbf{I} - \mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2)$ não singular, é estável se

$$\|\mathbf{H}\|_{gn} = \frac{\|\mathbf{H}_1\|_{gn}}{1 - \|\mathbf{H}_1\|_{gn} \|\mathbf{H}_2\|_{gn}} \quad (4.60)$$

ou ainda se

$$\|\mathbf{H}_1\|_{gn} \|\mathbf{H}_2\|_{gn} < 1 \quad (4.61)$$

sendo $\|\cdot\|_{gn}$ uma norma genérica com a seguinte propriedade

$$\|H_1 H_2\|_{gn} \leq \|H_1\|_{gn} \|H_2\|_{gn} \quad (4.62)$$

Para o sistema perturbado da equação (4.55), se Δ tem um limitante superior,

$$M = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} \|\Delta\|_{gn} \quad (4.63)$$

O sistema é estável se

$$\|H_{qp}\|_{gn} M < 1 \quad (4.64)$$

e

$$\begin{aligned} \|H_{zp}\|_{gn} &< \infty \\ \|H_{qw}\|_{gn} &< \infty \\ \|H_{zw}\|_{gn} &< \infty \end{aligned} \quad (4.65)$$

Assim, o problema geral de robustez pode ser definido da seguinte forma:

Achar um controlador K tal que

$$\begin{aligned} \|H_{qp}\|_{gn} M &< 1 \\ \|H_{zp}\|_{gn} &< \infty \\ \|H_{qw}\|_{gn} &< \infty \\ \|H_{zw}\|_{gn} &< \infty \end{aligned}$$

sendo

$$M = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} \|\Delta\|_{gn}$$

o máximo ganho para o conjunto de perturbações $\mathcal{D}$.

A norma infinita é uma escolha natural a ser usada na definição acima, uma vez que ela satisfaz a equação (4.62) e também pode ser usada para estabelecer o limitante na equação (4.63). Além do mais, a norma infinita só existe para funções estáveis, o que significa que as desigualdades da equação (4.65) são satisfeitas por definição. De tudo isto, o problema de robustez pode ser reescrito da seguinte forma:

Achar um controlador $\mathbf{K}$ tal que

$$\|\mathbf{H}_{qp}\|_{\infty} M < 1$$

sendo

$$M = \sup_{\Delta \in \mathcal{D}} \|\Delta\|_{\infty}$$

o máximo ganho para o conjunto de perturbações $\mathcal{D}$.

4.2.5. Problema de Desempenho Robusto

Reunindo os problemas de desempenho e de robustez, tem-se o que se define como problema de desempenho robusto, que pode ser escrito como:

Achar um controlador $\mathbf{K}$ tal que as seguintes desigualdades sejam satisfeitas

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_{qp}\|_{\infty} &< 1/M \\ \|\mathbf{H}_{zw}\|_{\infty} &< \gamma \end{aligned}$$

com $\mathbf{H}_{qp}$, $\mathbf{H}_{zw}$ e M dados pelas equações (4.41), (4.58) e (4.63), e γ como um custo para o requisito de desempenho.

Este problema pode ser resolvido pela teoria de valores singulares estruturada incluindo uma perturbação fictícia Δ_p conectada às entradas e saídas ligadas ao desempenho, $\mathbf{z}$ e $\mathbf{w}$, do

diagrama da figura 4.8 (DOYLE; STEIN, 1981). Assim, os requisitos de desempenho são adicionados à especificação de robustez, ficando o sistema como ilustrado na figura 4.9.

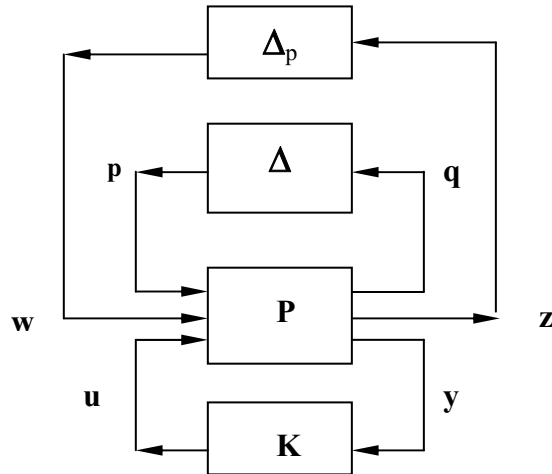


Figura 4.9: Problema de desempenho e robustez convertido em problema de robustez.

Um dos métodos para se resolver este problema é o chamado "*μ-Synthesis*" via o enfoque *Iteração D-K* (MACIEJOWSKY, 1989, BALAS et al, 1994). Entretanto, ele requer um pesado esforço computacional e, normalmente, gera um controlador de ordem maior que a planta aumentada (XIE, 1996).

Para evitar o inconveniente do uso da iteração D-K é adotado neste trabalho o mesmo enfoque alternativo proposto na tese de Moreira (1998). Neste enfoque, o problema de desempenho e robustez é convertido em um problema de desempenho. Isto é feito abrindo-se o laço de realimentação da incerteza e inserindo a variável $\mathbf{q}$ junto ao vetor de saídas reguladas $\mathbf{z}$ e o vetor $\mathbf{p}$ junto ao vetor de entradas exógenas $\mathbf{w}$.

Assim, define-se um novo vetor de saídas reguladas $\mathbf{z}' = [\mathbf{q} \ \mathbf{z}]^T$ e um novo vetor de entradas exógenas $\mathbf{w}' = [\mathbf{p} \ \mathbf{w}]^T$. O novo problema é minimizar a norma infinita da função de transferência entre $\mathbf{w}'$ e $\mathbf{z}'$. Tem-se então um problema de desempenho e robustez convertido em um problema simplesmente de desempenho, como mostra a equação seguinte:

$$\mathbf{z}' = \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{qp} & \mathbf{H}_{qw} \\ \mathbf{H}_{zp} & \mathbf{H}_{zw} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{w} \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

O inconveniente é o acoplamento que se cria entre o problema de desempenho e robustez, uma vez que a entrada relacionada a robustez, vetor $\mathbf{p}$, influencia a saída relacionada ao desempenho, vetor $\mathbf{z}$, e vice-versa. Para diminuir o efeito entre os termos cruzados da equação (4.66) um fator atenuante $\mathbf{K}_d$ pode ser inserido na entrada do vetor $\mathbf{p}$ e o inverso deste ganho é inserido na saída do vetor $\mathbf{q}$ com o propósito de minimizar esta influência, como já havia sido proposto e discutido em detalhes no trabalho de Moreira (1998). A figura 4.10 mostra a configuração final do projeto a ser utilizado no presente trabalho.

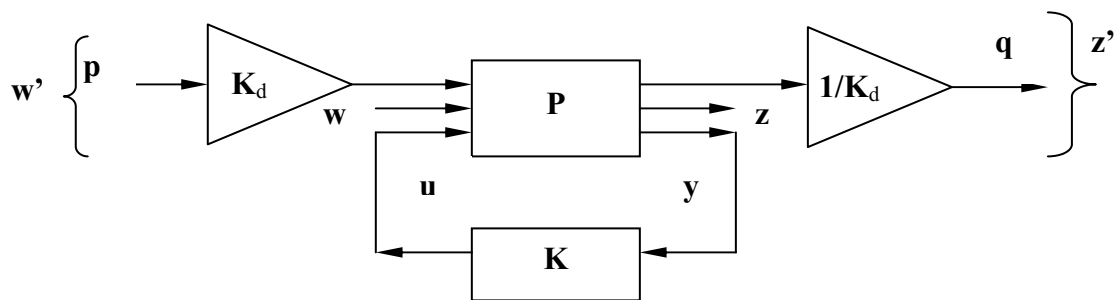


Figura 4.10: Problema de desempenho e robustez convertido em problema de desempenho.

4.2.6. Projeto Incluindo Robustez à Dinâmica Residual

Em sistemas mecânicos estruturais existe a possibilidade de se considerar a dinâmica não-modelada, ou dinâmica residual, como uma incerteza não-estruturada. A seguir, a forma de se modelar a dinâmica residual como uma incerteza aditiva é tratada.

Considere, inicialmente, um sistema com um modelo, $\mathbf{G}_c$, de baixa ordem e que contém os modos a serem controlados e, toda a dinâmica residual de alta frequência modelada como incerteza aditiva, $\mathbf{G}_r$, tal que o modelo de ordem cheia do sistema, $\mathbf{G}$, seja dado por,

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_c + \mathbf{G}_r \quad (4.67)$$

A representação deste sistema é mostrada na figura 4.11.

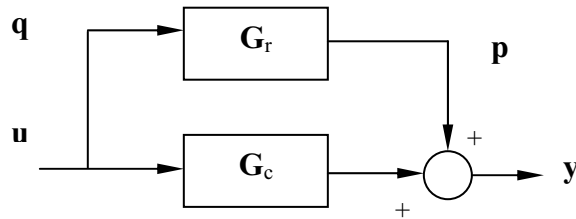


Figura 4.11: Modelo com incerteza aditiva.

A função de transferência G_r é conhecida (assumindo que G é conhecido), mas têm uma dinâmica muito complexa, sendo assim, pode-se substituir G_r por uma função limitante superior G_p com dimensão muito menor, sendo que G_p deve ser escolhida de forma a atender:

$$\|G_r\|_{\infty} \leq \|\Delta G_p\|_{\infty} \quad (4.68)$$

sendo $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$. Portanto, se existir um controlador projetado utilizando G_p (sendo que G_p deve satisfazer a inequação (4.68)), também estará satisfeito o modelo de incerteza G_r . A vantagem de se utilizar G_p é ter um controlador de ordem muito menor do que se teria se utilizássemos G_r . Transportado para a representação convexa, o diagrama do modelo da figura 4.11 é redesenhando, como mostrado na figura 4.12.

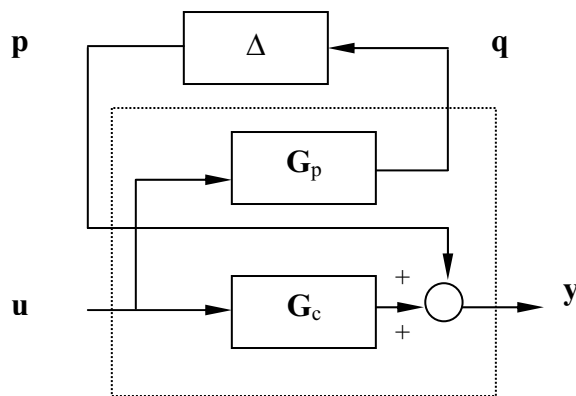


Figura 4.12: Planta aumentada com a incerteza aditiva.

As metas gerais do projeto são aumentar o coeficiente de amortecimento dos modos de baixa frequência da estrutura, limitar o sinal de energia e garantir robustez à dinâmica residual. Sendo assim, definimos duas saídas reguladas: o sinal y' , que é a ponderação do sinal medido por um filtro passa baixa W_y , que tem como função aumentar o amortecimento, e o sinal de controle u' , que é ponderado por um filtro passa-alta W_u , que tem como propósito restringir o

nível do sinal de controle exigido. Os filtros de ponderação $\mathbf{W}_y$ e $\mathbf{W}_u$ têm como metas dar a forma desejada para os sinais de saída regulada e são parâmetros livres para a escolha do projetista. A condição de robustez é assegurada pela imposição de um modelo de incerteza $\mathbf{G}_p$, atendendo a inequação (4.68).

O primeiro passo para o projeto do controle H_∞ é a montagem da planta generalizada contendo a planta nominal $\mathbf{G}_c$ e o modelo de distúrbio $\mathbf{G}_d$, sendo $\mathbf{G}_c$ e $\mathbf{G}_d$ funções de transferência de pequena ordem e ambas com os mesmos pólos, pois o que muda é apenas a matriz de entrada ($\mathbf{G}_c$ tem como entrada o sinal de controle e $\mathbf{G}_d$ o sinal de distúrbio):

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_c &= \mathbf{C}_c(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_{2c} + \mathbf{D}_{2c} \\ \mathbf{G}_d &= \mathbf{C}_c(\mathbf{sI} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_{1c} + \mathbf{D}_{1c}\end{aligned}\quad (4.69)$$

Além destas funções, os dois filtros de projeto são inseridos na malha junto com o modelo de incerteza aditiva adotado. A configuração geral deste projeto é mostrada na figura 4.13.

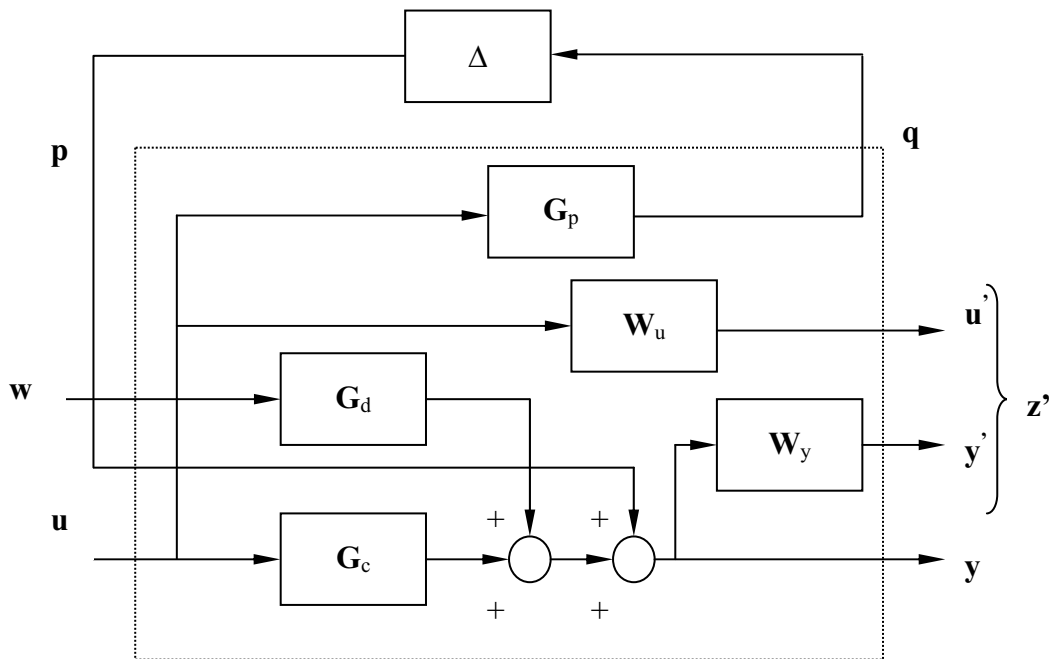


Figura 4.13: Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho e robustez.

Como discutido anteriormente, abre-se o laço de realimentação da incerteza Δ e converte-se o problema de desempenho e robustez, visto na figura 4.13, em um problema de desempenho (MOREIRA, 1998). A figura 4.14 mostra a nova configuração, onde é inserido um fator

atenuante $\mathbf{K}_d$ e seu inverso com a finalidade de diminuir o efeito das normas entre os sinais cruzados relacionados a desempenho e robustez.

As matrizes da função de transferência deste sistema são:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{z'w'} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_y \mathbf{G}_d & \mathbf{W}_y \mathbf{K}_d \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{P}_{z'u} &= \begin{bmatrix} \mathbf{W}_y \mathbf{G}_c \\ \mathbf{W}_u \\ \mathbf{G}_p \mathbf{G}_c \mathbf{K}_d^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_{yw'} &= [\mathbf{G}_p \quad \mathbf{K}_d], & \mathbf{P}_{yu} &= \mathbf{G}_c \end{aligned} \quad (4.70)$$

sendo $\mathbf{w}' = [\mathbf{w} \quad \mathbf{p}]^T$, $\mathbf{z}' = [\mathbf{z} \quad \mathbf{q}]^T$ e $\mathbf{z} = [\mathbf{y}' \quad \mathbf{u}']^T$.

Após algumas manipulações algébricas obtém-se a função de transferência entre o sinal $\mathbf{z}'$ e $\mathbf{w}'$ à malha fechada dada por:

$$\mathbf{H}_{z'w'} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_y & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_p \mathbf{K}_d^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{S} \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \\ \mathbf{U} & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_d \end{bmatrix} \quad (4.71)$$

sendo $\mathbf{S}$ e $\mathbf{U}$ as funções de sensibilidade e de restrição de energia definidas em (4.32) e (4.34), respectivamente.

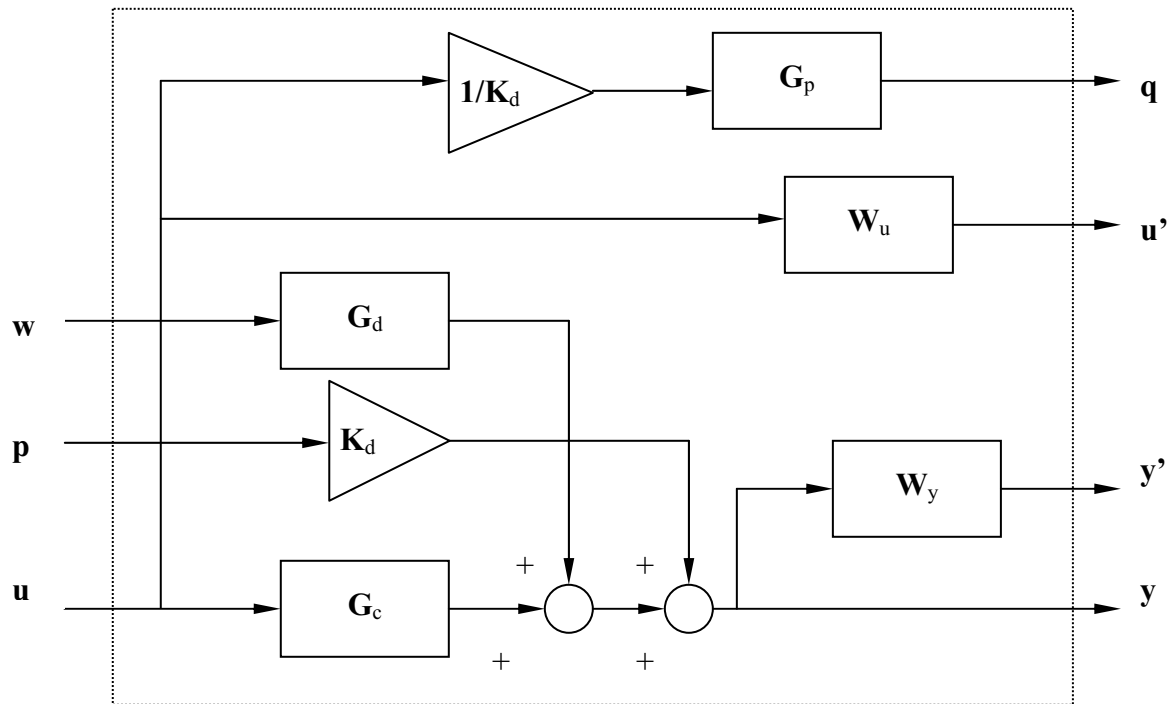


Figura 4.14: Planta generalizada para o projeto com incerteza residual aditiva - Problema de desempenho.

É importante observar que na figura 4.14 tanto a função $\mathbf{W}_u$ quanto o modelo de incerteza $\mathbf{G}_p$ estão ponderando o vetor de entrada de controle $\mathbf{u}$ e estão relacionados à função de restrição de energia $\mathbf{U}$, como pode ser comprovado pela equação (4.71). Assim ambas as funções, $\mathbf{W}_u$ e $\mathbf{G}_p$, podem ser usadas para limitar o sinal de controle e especificar características de robustez à dinâmica residual. Porém, $\mathbf{W}_u$ também está relacionado com a robustez referente a ruídos de alta frequência proveniente de sensores de medida. Além disto, muitos autores utilizam $\mathbf{W}_u$, tentando substituir (ou encontrar) uma função de transferência que se aproxime de $\mathbf{G}_p$, ou seja, que sirva de limitante superior para o modelo de incerteza de dinâmica de alta frequência não modelada. Entretanto, na maioria das aplicações de engenharia de controle estrutural, este modelo é conhecido ($\mathbf{G}_r$), assim o projeto se torna muito mais fácil e direto a partir da especificação apenas de $\mathbf{G}_p$, sendo que $\mathbf{W}_u$ pode ser omitido do projeto. Inclusive é conceitualmente mais correto especificar robustez à dinâmica residual a partir apenas de $\mathbf{G}_p$, uma vez que esta função está relacionada a saída de incerteza $\mathbf{q}$. Para maiores detalhes deste assunto e uma descrição completa do que foi discutido acima recomenda-se Moreira (1998).

Uma nova configuração pode então ser dada pela figura 4.15. Um ganho atenuante $\mathbf{K}_w$ também é inserido na entrada do vetor $\mathbf{w}$, uma vez que o sinal de distúrbio pode ter uma energia maior do que o sinal de controle $\mathbf{u}$. Assim, esta atenuação na entrada $\mathbf{w}$ tem como meta reduzir o

nível do sinal de distúrbio na saída relacionada à incerteza $\mathbf{q}$, o que não causa maiores problemas, uma vez que o sistema em questão é assumido ser linear.

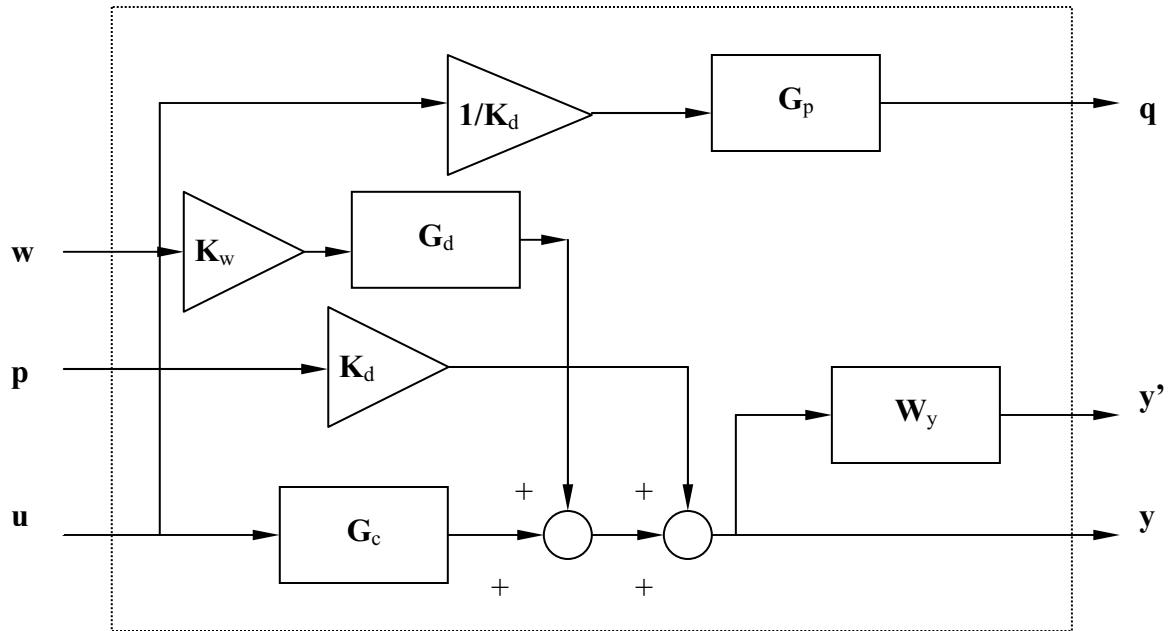


Figura 4.15: Planta aumentada na forma final para o projeto com incerteza residual aditiva – Problema de desempenho.

A montagem da planta aumentada pode ser realizada com o auxílio do Simulink® ou, mais facilmente, a partir da função *sconnect* do LMI toolbox do Matlab® (GAHINET et al, 1995). Para solucionar o problema H_∞ relacionado, pode-se utilizar a formulação via enfoque de Riccati ou a solução baseada em LMI. Na próxima seção é apresentada sucintamente a solução via LMI.

4.2.7. Solução do Problema H_∞ via LMI

A formulação para solucionar o problema H_∞ pode ser feita pelo enfoque LMI proposto por Gahinet e Apkarian (1994) e com as rotinas já implementadas no LMI toolbox do Matlab® (GAHINET et al, 1995).

O enfoque LMI permite solucionar computacionalmente problemas com grande dimensão e com o mérito de eliminar problemas de irregularidades de restrições encontrados freqüentemente em soluções baseadas no enfoque via Riccati. A solução do problema é feita no domínio do tempo, portanto, a planta generalizada $\mathbf{P}$, descrita na figura 4.15, deve estar escrita no espaço de estados:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w}' + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \\
\mathbf{z}' &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}' + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}' + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

sendo as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_{11}$, $\mathbf{D}_{12}$, $\mathbf{D}_{21}$ e $\mathbf{D}_{22}$ as matrizes que descrevem a realização no espaço de estados para a planta generalizada $\mathbf{P}$. O problema ótimo H_∞ é solucionado diretamente do seguinte problema de otimização:

minimizar γ , com as variáveis $\mathbf{R}=\mathbf{R}^T$ e $\mathbf{S}=\mathbf{S}^T$, tal que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{A}^T & \mathbf{R}\mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_1\mathbf{R} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11} \\ \mathbf{B}_1^T & \mathbf{D}_{11}^T & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{12} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0} \tag{4.73}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T\mathbf{S} + \mathbf{S}\mathbf{A} & \mathbf{S}\mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1^T \\ \mathbf{B}_1^T\mathbf{S} & -\gamma\mathbf{I} & \mathbf{D}_{11}^T \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & -\gamma\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_{21} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} < \mathbf{0} \tag{4.74}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{S} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \tag{4.75}$$

sendo que $\mathbf{N}_{12}$ e $\mathbf{N}_{21}$ denotam as bases de espaços nulos de $(\mathbf{B}_2^T, \mathbf{D}_{12}^T)$ e $(\mathbf{C}_2, \mathbf{D}_{21})$, respectivamente.

Para solucionar este problema, pode-se utilizar a função *hinflmi* do LMI Toolbox do Matlab®. Esta função soluciona o problema H_∞ acima a partir do conhecimento da planta generalizada $\mathbf{P}$, que pode ser montada com o auxílio do Simulink® ou do comando *sconnect*. Como resultado é obtido um controlador $\mathbf{K}$ para realimentação do sinal medido.

5 - Aplicação Experimental

A verificação experimental de estratégias de controle de vibração estrutural é essencial para eventual implementação em escala real. Entretanto, poucos pesquisadores possuem instalações disponíveis para testes em estruturas reais, portanto, realizam experiências de controle de vibração estrutural em escala reduzida. Modelos em escala de bancada são construídos adequadamente para que possam ser usados para estudar importantes aspectos de controle de vibração em escala real, incluindo: interação controlador - estrutura, dinâmica do atuador e sensor, projeto de realimentação de estados, controle de spillover, etc (SANTOS et al, 2007a). Neste sentido, o presente capítulo exemplifica o projeto de controladores baseado na metodologia H_{∞} utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs) para o controle de vibração em tempo real de um modelo estrutural. A estrutura considerada e os equipamentos utilizados nos testes experimentais são apresentados a seguir.

5.1. Montagem Experimental

Os equipamentos utilizados para o experimento de controle ativo de vibração consistiram de:

Estrutura: O modelo considerado é manufaturado pela *Quanser Consulting Inc.*, e representa um modelo de um edifício flexível controlado por uma massa ativa móvel. Este modelo consiste de uma armação de aço com uma massa controlável localizada no topo e que pode ser configurado para 1 ou 2 andares. A configuração de dois andares foi a utilizada. A altura entre os andares é de 502 mm e cada coluna de aço possui uma seção de 1.75 x 108 mm e massa de 0.24 kg. A massa total da estrutura é 3.5 kg, onde a massa do primeiro andar é 1.16 kg e a massa do segundo andar é 1.38 kg. As frequências naturais de vibração da estrutura são de 1.7 Hz e 5.1 Hz com as correspondentes razões de amortecimento de 0.013 e 0.062, respectivamente. O modelo do Active Mass Damper - Two-Floor (AMD-2) e os equipamentos que foram utilizados nos testes experimentais são mostrados na figura 5.1. A montagem experimental é mostrada na figura 5.2.

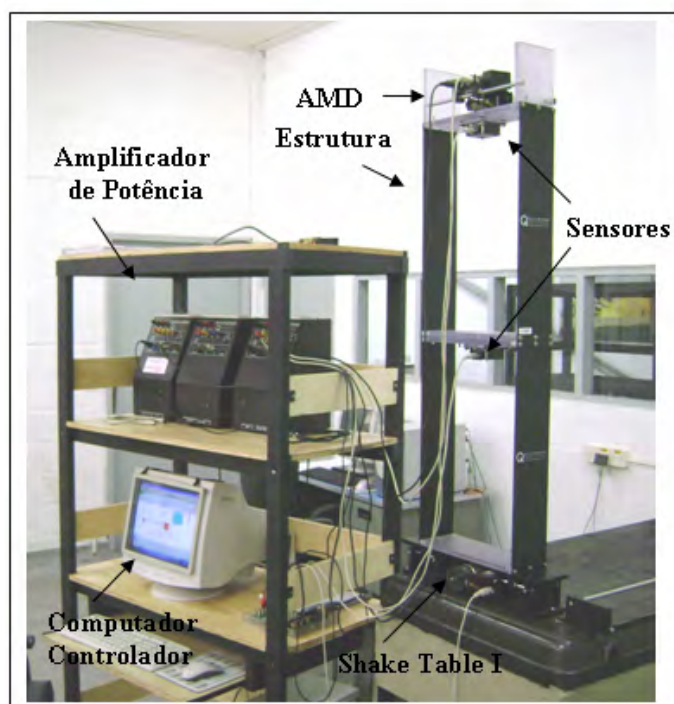


Figura 5.1: Sistema AMD-2 e equipamentos utilizados.

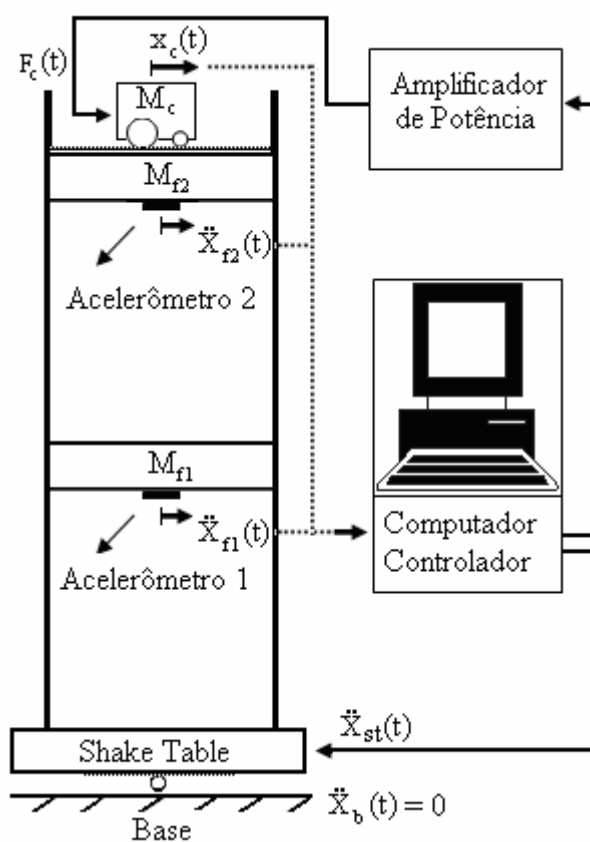


Figura 5.2: Montagem experimental.

Active Mass Damper (AMD): O AMD fornece a força de controle para a estrutura. Como ilustrado na figura 5.3, este sistema consiste de um carro equipado com um motor DC que se movimenta ao longo de um trilho por um mecanismo de pinhão. O máximo percurso do carro é de ± 95 mm e a massa total é 0.65 Kg.

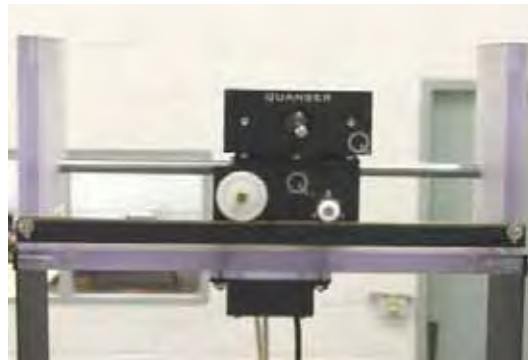


Figura 5.3: Active Mass Damper (AMD).

Sensores: Cada andar da estrutura é equipado com um acelerômetro capacitivo DC com faixa de escala de ± 5 g e sensibilidade de $9.81 \text{ m/s}^2/\text{V}$ (1g/V). Estes acelerômetros consistem de um único chip com sinal condicionado. A posição do carro é diretamente medida por um *encoder* óptico ligado a um pinhão adicional. Este oferece alta resolução, $4096 \text{ counts/revolution}$ e, sensibilidade de $2.275\text{E-}5 \text{ m/count}$.

Computador: O computador usado é um Pentium IV, 2.8 GHz, 1 GB de RAM e 40 MB de *Hard Disc*.

Amplificador de Potência: Os amplificadores usados são os da *Quanser*® UPM 1503 e UPM 2405.

Shaker Table I: Este sistema, mostrado na figura 5.1, é usado para aplicação da força externa na estrutura e pode ser usado, por exemplo, para simular terremotos e avaliar o desempenho do AMD. O sistema é equipado com um motor com alto torque que pode movimentar uma massa de até 5 kg em até 1g (9.81 m/s^2). O percurso máximo é de ± 20 mm.

Controle Digital: O controle digital é alcançado por uso de uma placa de aquisição MultiQ - PCI e com o software de controle em tempo real *WinCon*. O controlador é desenvolvido usando o Simulink® (1997) e executado em tempo real usando o *WinCon*. A placa tem 14-bits analógico/digital (A/D) e 13-bits digital/analógico (D/A) e possui 4 canais de saídas analógicas e 16 canais de entradas analógicas. O código Simulink® é automaticamente

convertido para código C e diretamente interfaceado pelo software *Wincon* para rodar o algoritmo de controle na CPU do micro computador.

5.2. Modelo Matemático da Estrutura

A figura 5.4 representa o sistema AMD-2. A direção positiva do deslocamento horizontal está para a direita quando o modelo é olhado de frente.

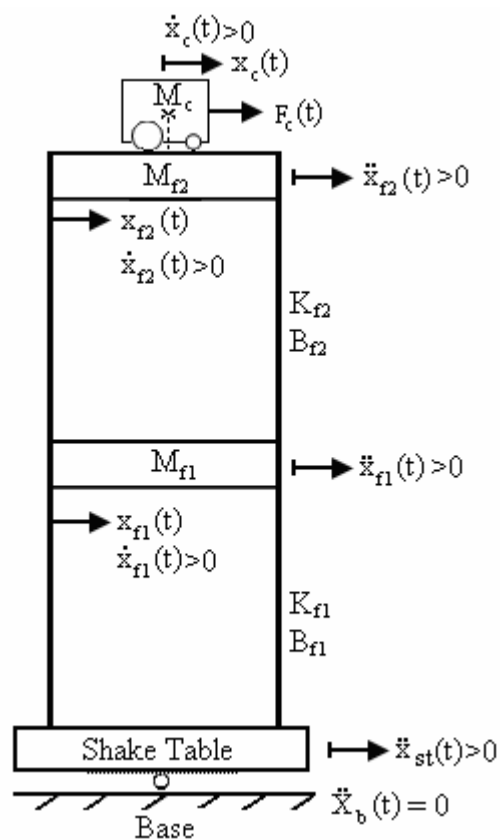


Figura 5.4: Representação do modelo AMD-2.

Para pequenas deflexões angulares, o sistema é modelado como se fosse um sistema massa-mola padrão. No presente modelo os coeficientes de amortecimento B_{f1} e B_{f2} são desprezados. A tabela 5.1 lista os símbolos e notações usadas na modelagem matemática do sistema AMD- 2.

Tabela 5.1: Nomenclatura utilizada na modelagem do sistema AMD-2

Símbolo	Descrição	Valor e Unidade
M_{f1}	Massa do primeiro andar	1.160 kg
M_{f2}	Massa do segundo andar (com a rack)	1.380 kg
K_{f1}	Constante de rigidez linear do primeiro andar (relativa a base)	500 N/m
K_{f2}	Constante de rigidez linear do segundo andar (relativa ao primeiro andar)	500 N/m
M_c	Massa total do carro (com as duas massas adicionais)	0.650 kg
R_m	Resistência da armadura do motor	2.6 Ω
K_t	Constante de torque do motor	7.67E-3 N.m/A
K_m	Constante de força eletromotriz	7.67E-3 V.s/rad
J_m	Momento de inércia do rotor	3.90E-7 Kg.m ²
K_g	Relação de engrenagem da caixa planetária	3.71
η_g	Eficiência da caixa planetária	100 %
η_m	Eficiência do motor	100 %
r_{mp}	Raio do pinhão do motor	6.35E-3 m
B_{eq}	Coeficiente de amortecimento viscoso equivalente (pinhão do motor)	3.0 N.s/m
V_m	Voltagem de armadura no motor do carro	Volts (V)
F_c	Força de controle (produzida pelo motor)	Volts (V)
$x_c(t)$	Posição do carro (relativa ao segundo andar)	m
$\dot{x}_c(t)$	Velocidade linear do carro (relativa ao segundo andar)	m/s
$x_{f1}(t)$	Deslocamento linear do primeiro andar (relativo a shake table)	m
$\dot{x}_{f1}(t)$	Velocidade linear do primeiro andar (relativo a shake table)	m/s
$\ddot{x}_{f1}(t)$	Aceleração linear do primeiro andar (relativo a shake table)	m/s ²
$x_{f2}(t)$	Deslocamento linear do segundo andar (relativo ao primeiro andar)	m
$\dot{x}_{f2}(t)$	Velocidade linear do segundo andar (relativa ao primeiro andar)	m/s

$\ddot{x}_{f2}(t)$	Aceleração linear do segundo andar (relativa ao primeiro andar)	m/s^2
$\dot{x}_{st}(t)$	Velocidade linear da shake table (relativa a base)	m/s
$\ddot{x}_{st}(t)$	Aceleração linear da shake table (relativa a base)	m/s^2
$\ddot{X}_{f1}(t)$	Aceleração absoluta do primeiro andar	m/s^2
$\ddot{X}_{f2}(t)$	Aceleração absoluta do segundo andar	m/s^2
$\ddot{X}_{st}(t)$	Aceleração absoluta da mesa de excitação (Shake Table)	m/s^2
$\ddot{X}_b(t)$	Aceleração absoluta da base	m/s^2

As equações dinâmicas do modelo são obtidas através do método de Lagrange. Considerando a aproximação deste método, é necessário determinar o Lagrangeano, L , do sistema, que é calculado através da energia potencial e cinética total do sistema. A representação definida na figura 5.4 é utilizada como referência para obter as equações de energia.

Neste caso, o sistema é considerado com três graus de liberdade, sendo $x_c(t)$, $x_{f1}(t)$ e $x_{f2}(t)$ as coordenadas generalizadas em valores relativos. Além disso, a força aplicada pelo carro, $F_c(t)$, e a aceleração da mesa de excitação, $\ddot{x}_{st}(t)$, são as entradas do sistema.

A energia potencial total, V_T , é apenas devida a energia potencial elástica e pode ser expressa como:

$$V_T = \frac{1}{2} K_{f1} (x_{f1}(t))^2 + \frac{1}{2} K_{f2} (x_{f2}(t))^2 \quad (5.1)$$

A energia cinética total, T_T , é dada pela soma das seguintes energias:

$$T_T = T_{tc} + T_{rc} + T_{f1} + T_{f2} \quad (5.2)$$

sendo, T_{tc} a energia cinética de translação do carro, T_{rc} a energia cinética rotacional devido ao carro motorizado (visto que, a direção de translação do carro é ortogonal a rotação do motor) e, finalmente, T_{f1} e T_{f2} as energias cinéticas de translação do primeiro e segundo andares, respectivamente.

A energia cinética de translação do carro é expressa em função da velocidade linear do centro de gravidade, como mostra a seguinte equação:

$$T_{tc} = \frac{1}{2} M_c \left(\dot{x}_c(t) + \dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_{fl}(t) + \dot{x}_{st}(t) \right)^2 \quad (5.3)$$

A energia cinética rotacional é dada por:

$$T_{rc} = \frac{1}{2} \frac{J_m K_g^2 \left(\dot{x}_c(t) \right)^2}{r_{mp}^2} \quad (5.4)$$

A energia cinética de translação do primeiro andar é dada por:

$$T_{fl} = \frac{1}{2} M_{fl} \left(\dot{x}_{fl}(t) + \dot{x}_{st}(t) \right)^2 \quad (5.5)$$

E finalmente, a energia cinética de translação do segundo andar é dada por:

$$T_{f2} = \frac{1}{2} M_{f2} \left(\dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_{fl}(t) + \dot{x}_{st}(t) \right)^2 \quad (5.6)$$

Substituindo as equações (5.3), (5.4), (5.5) e (5.6) na equação (5.2), a energia cinética total do sistema pode ser expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} T_T = & \frac{1}{2} \left(M_c + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}} \right) \left(\dot{x}_c(t) \right)^2 + \frac{1}{2} (M_c + M_{fl} + M_{f2}) \left(\dot{x}_{fl}(t) \right)^2 + \frac{1}{2} (M_c + M_{f2}) \left(\dot{x}_{f2}(t) \right)^2 + \\ & + \frac{1}{2} (M_c + M_{fl} + M_{f2}) \left(\dot{x}_{st}(t) \right)^2 + M_c \left(\dot{x}_{fl}(t) + \dot{x}_{f2}(t) + \dot{x}_{st}(t) \right) \dot{x}_c(t) + (M_c + M_{f2}) \dot{x}_{fl}(t) \dot{x}_{f2}(t) + \\ & + (M_c + M_{fl} + M_{f2}) \dot{x}_{fl}(t) \dot{x}_{st}(t) + (M_c + M_{f2}) \dot{x}_{f2}(t) \dot{x}_{st}(t) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Por definição, as três equações de Lagrange têm a seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_c} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_c} \right) = Q_{xc} \quad (5.8)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f1}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_{f1}} \right) = Q_{f1} \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{f2}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x_{f2}} \right) = Q_{f2} \quad (5.10)$$

sendo L o Lagrangeano e definido como sendo igual a:

$$L = T_T - V_T \quad (5.11)$$

Q_{xc} é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada x_c , Q_{f1} é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada x_{f1} , e Q_{f2} é a força generalizada aplicada na coordenada generalizada x_{f2} .

Para este sistema, as forças generalizadas Q_{xc} , Q_{f1} , e Q_{f2} são dadas por:

$$Q_{xc}(t) = F_c(t) - B_{eq} \dot{x}_c(t) \quad (5.12)$$

$$Q_{f1}(t) = Q_{f2}(t) = 0 \quad (5.13)$$

Nota-se que a força de atrito do carro e força de amortecimento viscoso dos dois andares são desprezadas. Calculando a equação (5.8) resulta a primeira equação de Lagrange:

$$\frac{(M_c r_{mp}^2 + J_m K_g^2) \ddot{x}_c(t)}{r_{mp}^2} + M_c (\ddot{x}_{f1}(t) + \ddot{x}_{f2}(t) + \ddot{x}_{st}(t)) = F_c(t) - B_{eq} (\dot{x}_c(t)) \quad (5.14)$$

Da mesma forma, calculando a equação (5.9) resulta a segunda equação de Lagrange:

$$K_{f1} x_{f1}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f1} + M_{f2}) \ddot{x}_{f1}(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{f2}(t) + (M_c + M_{f1} + M_{f2}) \ddot{x}_{st}(t) = 0 \quad (5.15)$$

Finalmente, calculando a equação (5.10) resulta a terceira equação de Lagrange:

$$K_{f2} x_{f2}(t) + M_c \ddot{x}_c(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{f1}(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{f2}(t) + (M_c + M_{f2}) \ddot{x}_{st}(t) = 0 \quad (5.16)$$

Resolvendo as equações (5.14), (5.15) e (5.16) em conjunto, resultam as três equações de movimento do sistema:

$$\left(M_c M_{f2} + \frac{J_m K_g^2}{r_{mp}^2} (M_c + M_{f2}) \right) \ddot{x}_c(t) + B_{eq} (M_c + M_{f2}) \dot{x}_c(t) - M_c K_{f2} x_{f2}(t) = (M_c + M_{f2}) F_c(t) \quad (5.17)$$

$$M_{f1} \ddot{x}_{f1}(t) + K_{f1} x_{f1}(t) - K_{f2} x_{f2}(t) = -M_{f1} \ddot{x}_{st}(t) \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} & M_{f1} \left(M_c M_{f2} r_{mp}^2 + (M_c + M_{f2}) J_m K_g^2 \right) \ddot{x}_{f2}(t) - M_{f1} M_c B_{eq} r_{mp}^2 \dot{x}_c(t) + \\ & - \left(M_c M_{f2} r_{mp}^2 + (M_c + M_{f2}) J_m K_g^2 \right) K_{f1} x_{f1}(t) + \\ & \left((M_{f1} M_c + M_{f2} M_c) r_{mp}^2 + (M_c + M_{f1} + M_{f2}) J_m K_g^2 \right) K_{f2} x_{f2}(t) = -M_{f1} M_c r_{mp}^2 F_c(t) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Se B_{eq} e J_m forem desprezados, as equações (5.17), (5.18) e (5.19) se tornam:

$$M_c M_{f2} \ddot{x}_c(t) - M_c K_{f2} x_{f2}(t) = (M_c + M_{f2}) F_c(t) \quad (5.20)$$

$$M_{f1} \ddot{x}_{f1}(t) + K_{f1} x_{f1}(t) - K_{f2} x_{f2}(t) = -M_{f1} \ddot{x}_{st}(t) \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} & \left(M_{f1} M_c M_{f2} r_{mp}^2 \right) \ddot{x}_{f2}(t) - \left(M_c M_{f2} r_{mp}^2 K_{f1} \right) x_{f1}(t) + \left((M_{f1} M_c + M_{f2} M_c) r_{mp}^2 K_{f2} \right) x_{f2}(t) = \\ & = -M_{f1} M_c r_{mp}^2 F_c(t) \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.3. Representação do Modelo no Espaço de Estados

Para projetar e implementar um controlador com realimentação de estados, a representação do modelo no espaço de estados é a forma mais indicada. É importante ser lembrado que a representação no espaço de estados representa as equações diferenciais lineares que descrevem a dinâmica do sistema. As seguintes relações representam o modelo no espaço de estados:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) \quad (5.23)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (5.24)$$

sendo: $\mathbf{A}$ a matriz dinâmica, $\mathbf{B}_1$ a matriz de entrada de distúrbio, $\mathbf{B}_2$ a matriz de entrada de controle, $\mathbf{C}$ a matriz de saída, $\mathbf{D}$ a matriz de transmissão direta, $\mathbf{x}(t)$ o vetor de estados, $\mathbf{w}(t)$ o vetor de distúrbio e $\mathbf{u}(t)$ o sinal de controle.

Para esse sistema o vetor de estados é dado por:

$$\mathbf{x}(t) = [x_c(t) \ x_{f1}(t) \ x_{f2}(t) \ \dot{x}_c(t) \ \dot{x}_{f1}(t) \ \dot{x}_{f2}(t)]^T \quad (5.25)$$

sendo $[]^T$ a transposta da matriz.

O vetor de saída medido é o seguinte:

$$\mathbf{y}(t) = [x_c(t) \ \ddot{x}_{f1}(t) \ \ddot{x}_{f2}(t)]^T \quad (5.26)$$

Nas equações (5.23) e (5.24) o sinal de controle $\mathbf{u}(t)$ é a força $F_c(t)$ aplicada pelo carro motorizado, então:

$$\mathbf{u}(t) = F_c(t) \quad (5.27)$$

sendo $F_c(t)$ expressa por:

$$F_c(t) = -\frac{K_g^2 K_t K_m \dot{x}_c(t)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{K_g K_t V_m(t)}{R_m r_{mp}} \quad (5.28)$$

Reescrevendo as equações de movimento (5.17), (5.18) e (5.19) na forma de espaços de estados (Eqs. (5.23) e (5.24)) e utilizando os valores dos parâmetros do sistema disponíveis no manual do usuário Quanser Consulting, Inc. (S.d.) e, usando a equação (5.28) para converter a força $F_c(t)$ (Newton) para entrada em voltagem (V_m), as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são dadas por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 278.43 & -18.69 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3.00 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -431.03 & 431.03 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 431.03 & -766.49 & 5.98 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.96 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

Uma vez obtido o modelo no espaço de estados o primeiro passo é a projeto de controle e, o segundo, a verificação experimental. O projeto de controladores e os resultados de testes de controle para o sistema apresentado no item 5.1 são apresentados a seguir.

5.4. Resultados Experimentais

Neste trabalho são ilustradas as duas diferentes sínteses de projeto de controladores descritas no capítulo 4. A primeira metodologia é baseada no projeto de controle H_∞ via realimentação da saída. Já a segunda, é baseada no projeto de controle via realimentação de estados estimados por um observador dinâmico. Ambas as técnicas são solucionadas por LMIs. Testes experimentais para dois tipos de excitações (sísmica e senoidal) são realizados e os resultados são discutidos.

5.4.1. Controle H_∞ via Realimentação da Saída

No presente trabalho apenas o requisito de desempenho é considerado, a saber, a estrutura a ser controlada é simples, com dois graus de liberdade e não apresenta uma dinâmica residual. Entretanto, requisitos de robustez podem ser introduzidos sempre que necessário. Enfim, o objetivo é o projeto de um controlador, $\mathbf{K}$, baseado na metodologia H_∞ via realimentação de saída que a amortecia os dois modos da estrutura, assegure rejeição a distúrbios e limite o sinal de controle. Para satisfazer estas especificações o primeiro passo é escolher um filtro $\mathbf{W}_y$ (função peso da sensibilidade) com a função de aumentar o coeficiente de amortecimento do 1º e do 2º modo. Para isso, é escolhido um filtro passa-baixa de 2º ordem com frequência de corte entre a 1º e a 2º frequência natural. Com propósito de restringir o nível do sinal de controle exigido, um ganho $\mathbf{K}_u$ é adicionado como parâmetro complementar. O modelo da planta aumentada é mostrado na figura 5.5. Nesta figura, $\mathbf{G}_c$ é a função de transferência da planta, $\mathbf{G}_d$ é modelo de distúrbio e γ é o ganho de projeto. A planta foi montada utilizando a função *sconnect* e o cálculo do controlador solucionado fazendo o uso da função *hinflmi*, ambas são funções do Toolbox do Matlab®6.5. O algoritmo em Matlab®6.5 para resolver este problema de controle é apresentado no apêndice A1.

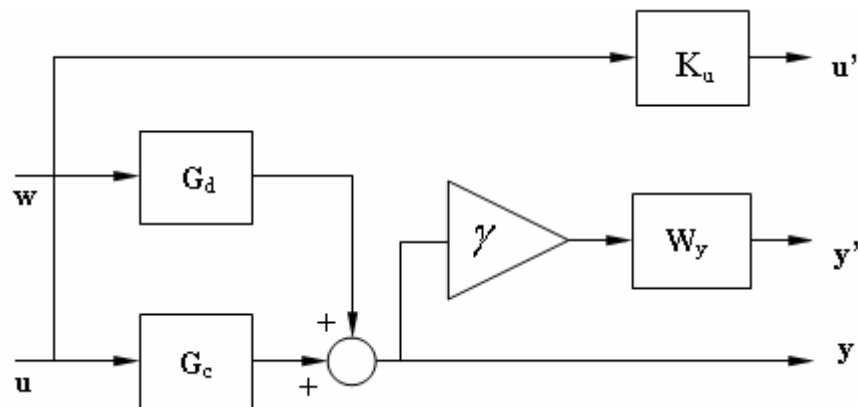


Figura 5.5: Planta aumentada para o projeto visando desempenho.

A função de ponderação sobre a função sensibilidade, obtida após um processo iterativo de ajuste, é dada por:

$$\mathbf{W}_y = \frac{7.994}{s^2 + 16.96s + 799.4}$$

E também, após um processo iterativo de ajuste dos ganhos $\mathbf{K}_u$ e γ , chegou-se ao seguinte conjunto de parâmetros finais:

$$\mathbf{K}_u = 0.05 \quad \text{e} \quad \gamma = 0.01$$

A figura 5.6 mostra o gráfico do valor singular da função $\mathbf{W}_y$.

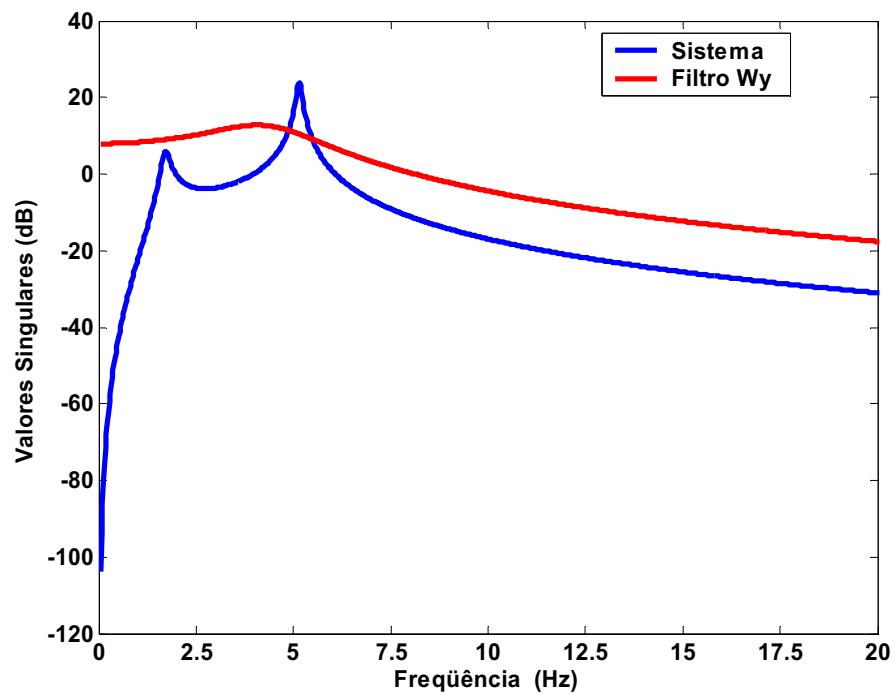


Figura 5.6: Ponderação sobre a função sensibilidade. Unidade dB: $V/(m/s^2)$.

As características de desempenho do controlador resultante é avaliado no domínio da frequência. A função sensibilidade à malha fechada, S , que é a relação entre a saída medida y e a entrada exógena w , é mostrada na figura 5.7. A especificação de desempenho é cumprida uma vez que se observa uma redução desejada nos picos dos dois primeiros modos controlados, em relação ao sistema a malha aberta.

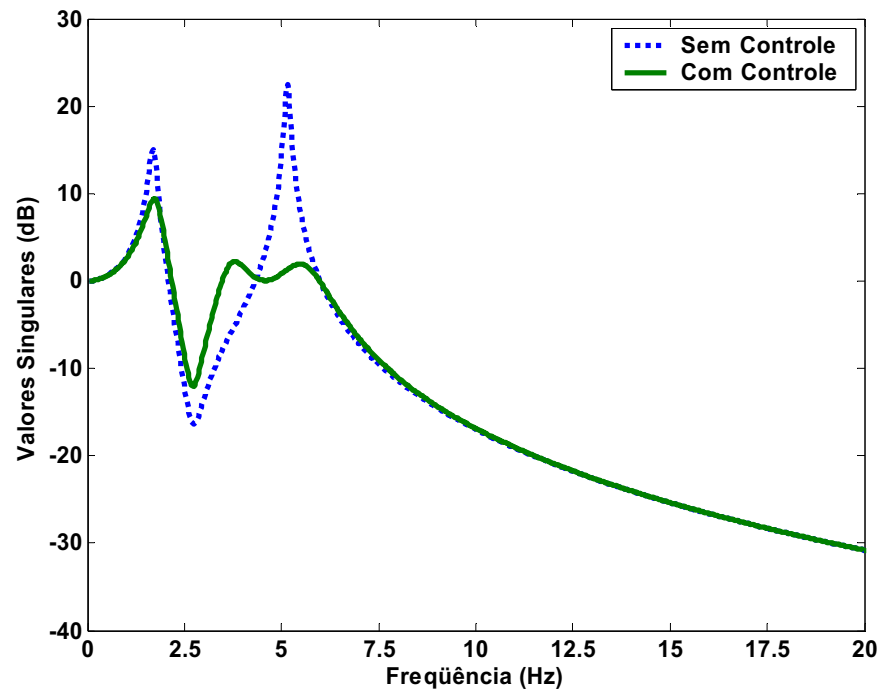


Figura 5.7: FRFs do sistema com e sem controle. Unidade dB: $V/(m/s^2)$.

A função de restrição de energia, U , que é a relação entre o sinal de controle $\mathbf{u}$ e a entrada exógena $\mathbf{w}$ é mostrada na figura 5.8. A função de restrição de energia representa a distribuição de energia do sinal de controle distribuído para cada modo do sistema. Assim, nota-se que a energia de controle está bem distribuída entre os dois modos.

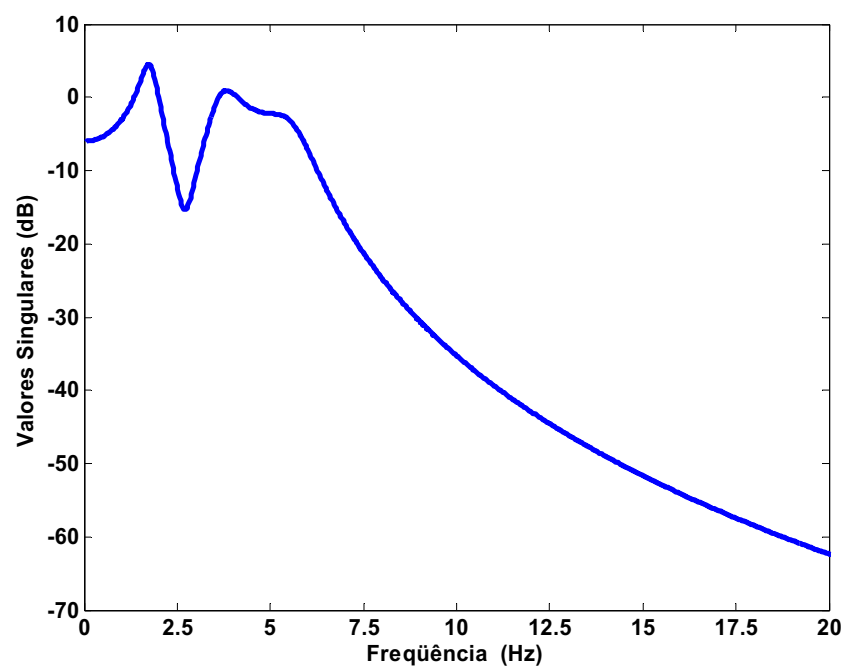


Figura 5.8: Função restrição de energia. Unidade dB: $V/(m/s^2)$.

Após a análise teórica de desempenho, o sistema de controle é validado via simulação em tempo real. O experimento inclui os equipamentos apresentados na *Montagem Experimental*, item 5.1. O procedimento experimental e o diagrama Simulink® utilizado para a realização dos testes de controle são apresentados no apêndice A2. Foram realizados dois testes de controle: No primeiro a estrutura foi submetida a uma excitação sísmica e no segundo a uma excitação senoidal. Os resultados obtidos são apresentados na sequência.

TESTE 1: Excitação Sísmica

Neste teste o sinal de distúrbio foi a simulação, em escala reduzida, de um terremoto. Este sinal é gerado no Simulink® e dirigido ao motor da *ShakeTable*.

Para comparação entre o desempenho do sistema controlado e do sistema sem controle, realizou-se um ensaio na mesma configuração com controle e sem controle. Os dados da simulação em tempo real são monitorados e armazenados pelo programa *Wincon/Server*. As respostas no tempo adquiridas durante o intervalo de simulação são mostradas nas figuras a seguir. A figura 5.9 mostra a resposta obtida pelo acelerômetro colocado no primeiro andar. A figura 5.10 mostra a resposta obtida pelo acelerômetro colocado no segundo andar. A figura 5.11 mostra a força de controle dirigida ao motor do carro (atuador). E finalmente, a figura 5.12 mostra o sinal de distúrbio aplicado à estrutura através da *Shake Table*. A aquisição dos sinais foi feita a uma taxa de amostragem de 1 kHz.

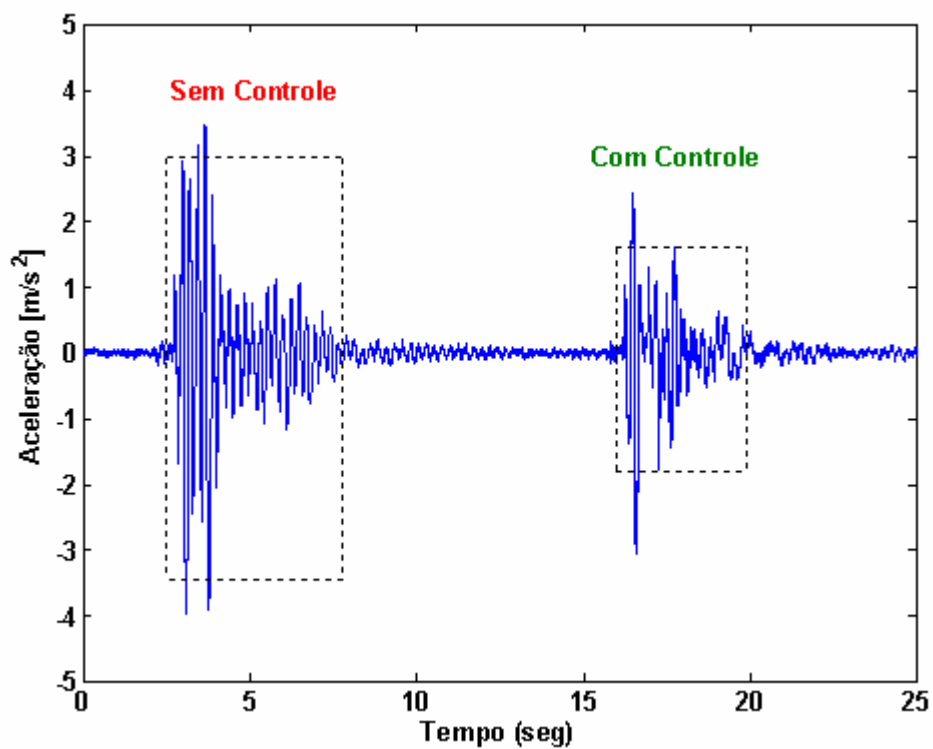


Figura 5.9: Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.

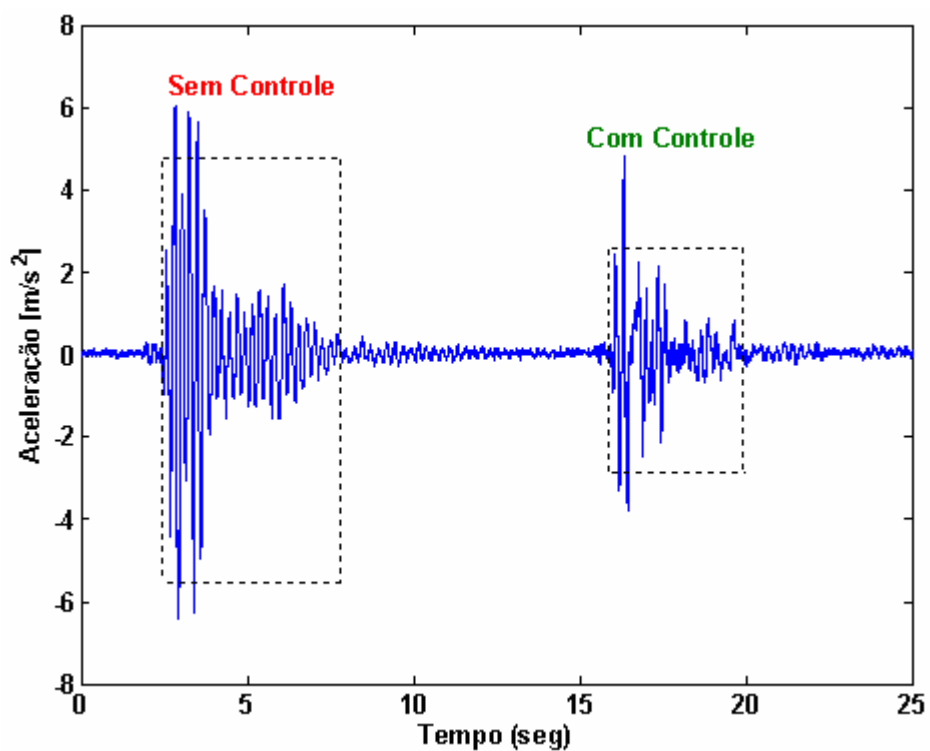


Figura 5.10: Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.

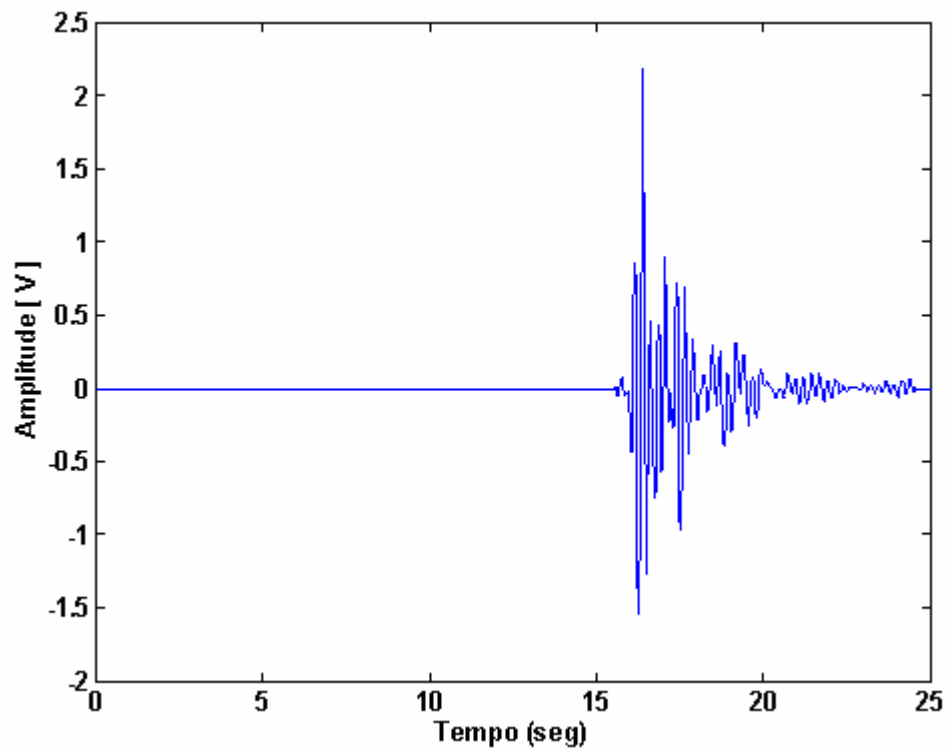


Figura 5.11: Força de controle aplicada ao carro, em [V].

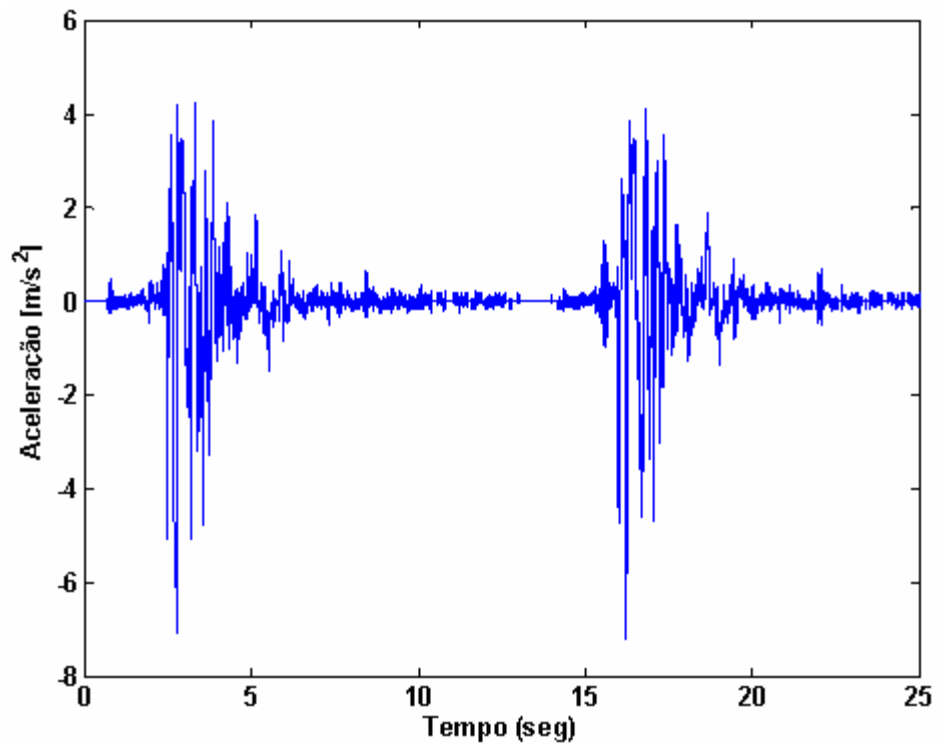


Figura 5.12: Sinal de distúrbio, que simula uma excitação real de um abalo sísmico.

TESTE 2: Excitação Senoidal

As respostas obtidas são mostradas a seguir. A figura 5.13 mostra a resposta obtida pelo acelerômetro colocado no primeiro andar. A figura 5.14 mostra a resposta obtida pelo acelerômetro colocado no segundo andar. A figura 5.15 mostra a força de controle dirigida ao motor do carro (atuador). O sinal de distúrbio senoidal é mostrado na figura 5.16. Como no teste anterior, este sinal é gerado no Simulink® e dirigido ao motor da *Shake Table*.

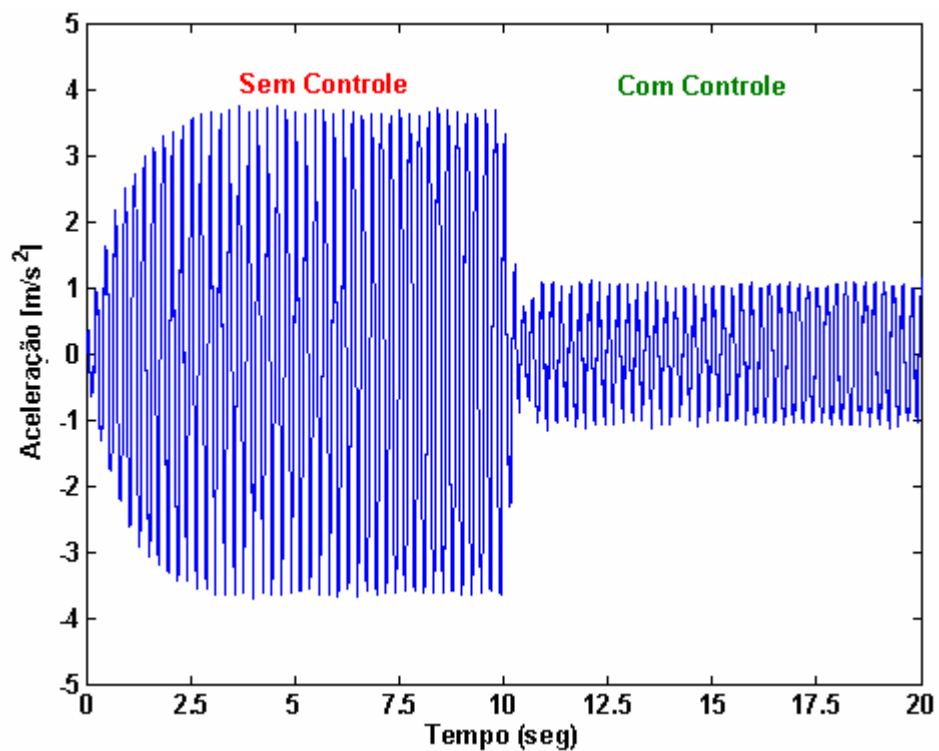


Figura 5.13: Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.

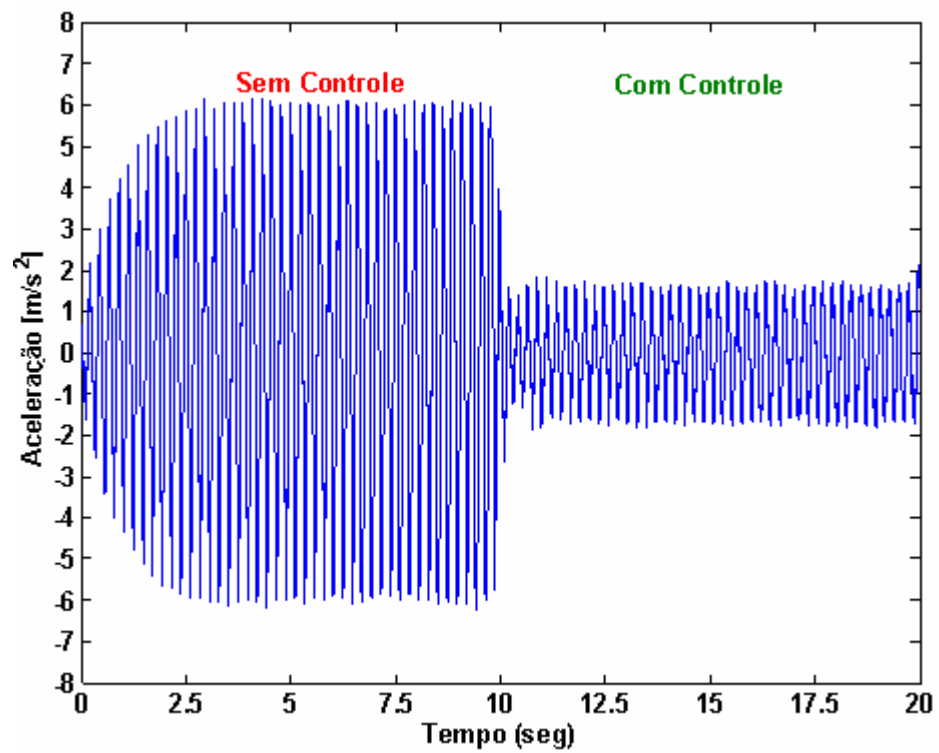


Figura 5.14: Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.

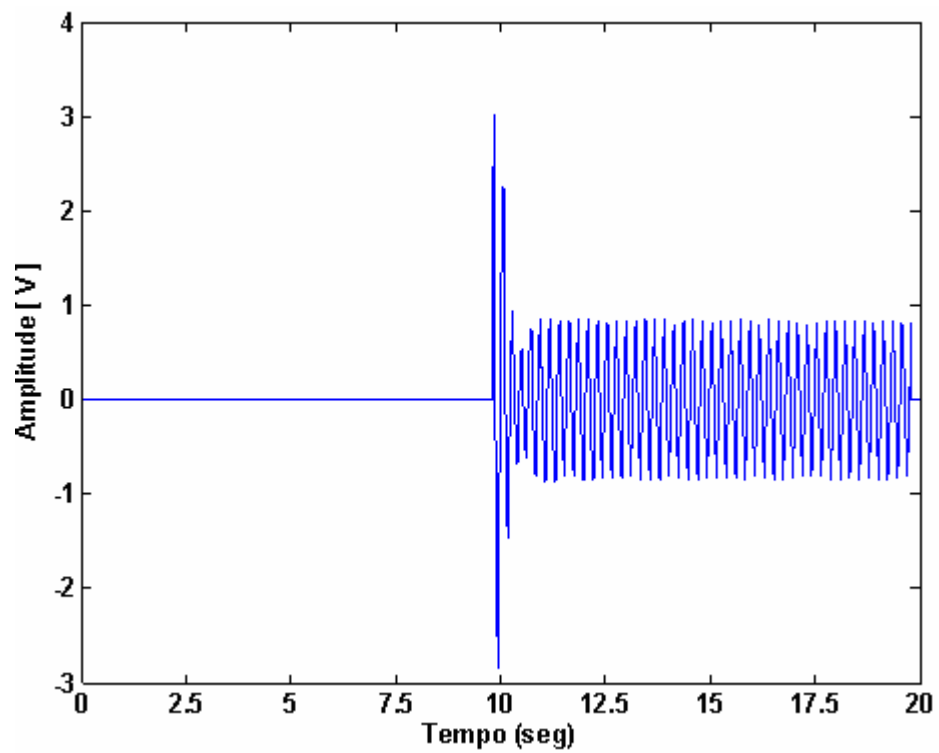


Figura 5.15: Força de controle aplicada ao carro, em [V].

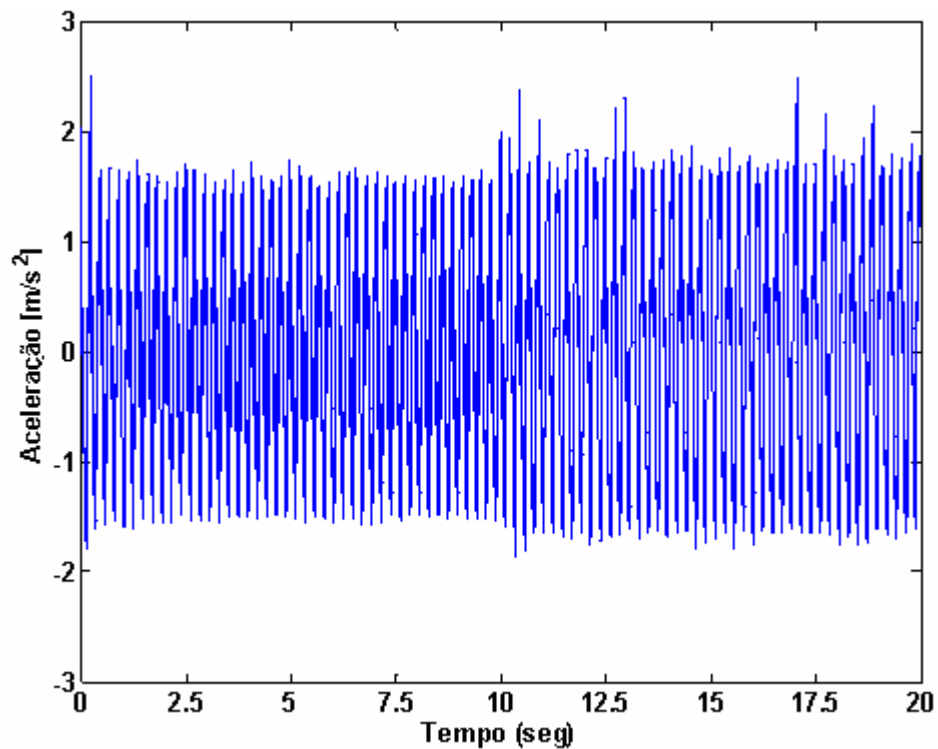


Figura 5.16: Sinal de distúrbio senoidal.

5.4.2. Controle H_∞ via Realimentação de Estados

Em função da disponibilidade dos equipamentos ou, dificuldade de medidas, nem todas as variáveis de estados estão, geralmente, disponíveis para a realimentação. Neste caso, os deslocamentos e as velocidades dos andares não são diretamente medidos. Portanto, a estratégia de controle é baseada em um observador dinâmico. O observador dinâmico pode ser escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{K}_e (\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) \\ \hat{\mathbf{y}}(t) &= \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t)\end{aligned}$$

sendo $\hat{\mathbf{x}}(t)$ o vetor de estados observados, $\mathbf{K}_e$ o ganho do observador a ser determinado, $\mathbf{y}(t)$ a saída medida que alimenta a dinâmica do observador e $\hat{\mathbf{y}}(t)$ a saída estimada. A representação gráfica do observador dinâmico é mostrada na Fig. 4.2.

A matriz de ganho do observador, $\mathbf{K}_e$, foi determinada tal que os autovalores (pólos) da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})$, sejam os seguintes:

$$[-40 \ -45 \ -50 \ -55 \ -60 \ -65]$$

Esta localização dos pólos assegurou que o observador não interferisse na dinâmica do sistema. A localização foi escolhida baseada no critério de que os pólos do observador devem estar de 5 a 6 vezes distantes dos pólos do sistema a malha fechada (OGATA, 2000).

Para o cálculo da matriz $\mathbf{K}_e$ foi utilizado a seguinte linha de comando do Matlab®:

$$\mathbf{OP} = [-40 \ -45 \ -50 \ -55 \ -60 \ -65]$$

$$\mathbf{K}_e = \text{place}(\mathbf{A}^T, \mathbf{C}^T, \mathbf{OP})^T$$

sendo $\mathbf{OP}$ um vetor contendo a localização desejada para os pólos do observador.

O comando **place** calcula a matriz $\mathbf{K}_e$ tal que o autovalor da matriz $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_e \mathbf{C})$ é o especificado no vetor $\mathbf{OP}$.

Utilizando o LMI Toolbox do Matlab® 6.5 o controlador H_∞ foi obtido resolvendo a LMI (4.27) e o ganho foi obtido através da Eq. (4.28). O controlador sub-ótimo H_∞ foi resolvido usando $\mu > \mu'$, com $\mu' = 100$. O algoritmo em Matlab® 6.5 para resolver este problema de controle é apresentado no apêndice A1.

A Figura 5.17 mostra a função de resposta em frequência do sistema com e sem controle H_∞ , para uma faixa de frequência de 20 Hz.

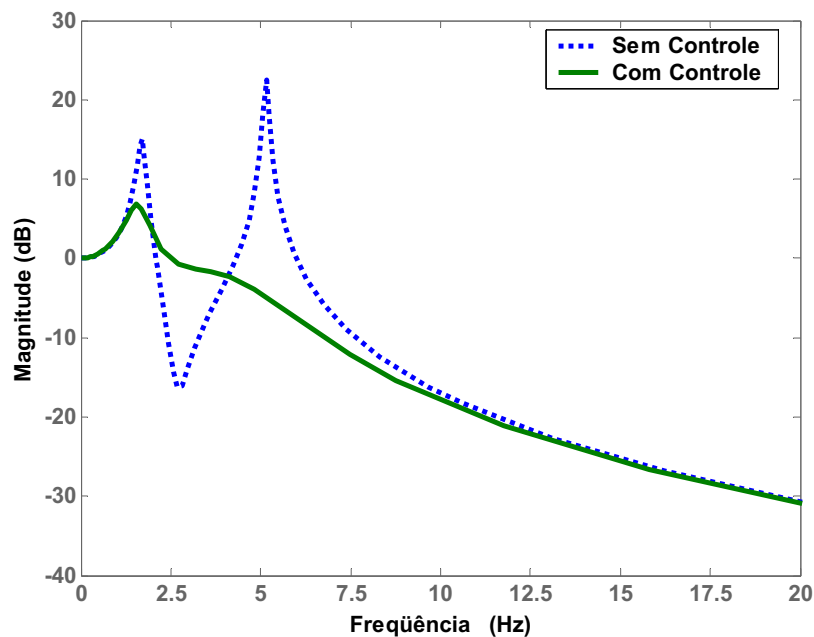


Figura 5.17: FRF da estrutura para o sistema com e sem controle. Unidade dB: $V/(m/s^2)$.

A seguir são apresentados os resultados obtidos em tempo real para os dois tipos de excitações consideradas anteriormente. O procedimento experimental e o diagrama Simulink® utilizado para a realização dos testes de controle são apresentados no apêndice A2.

TESTE 3: Excitação Sísmica

As figuras 5.18 e 5.19 mostram o sinal de aceleração do primeiro e do segundo andar da estrutura (Fig. 5.2), respectivamente, quando submetida a uma excitação sísmica, como mostrada na fig.5.21. A figura 5.20 mostra a força de controle dirigida ao motor do carro, em Volts.

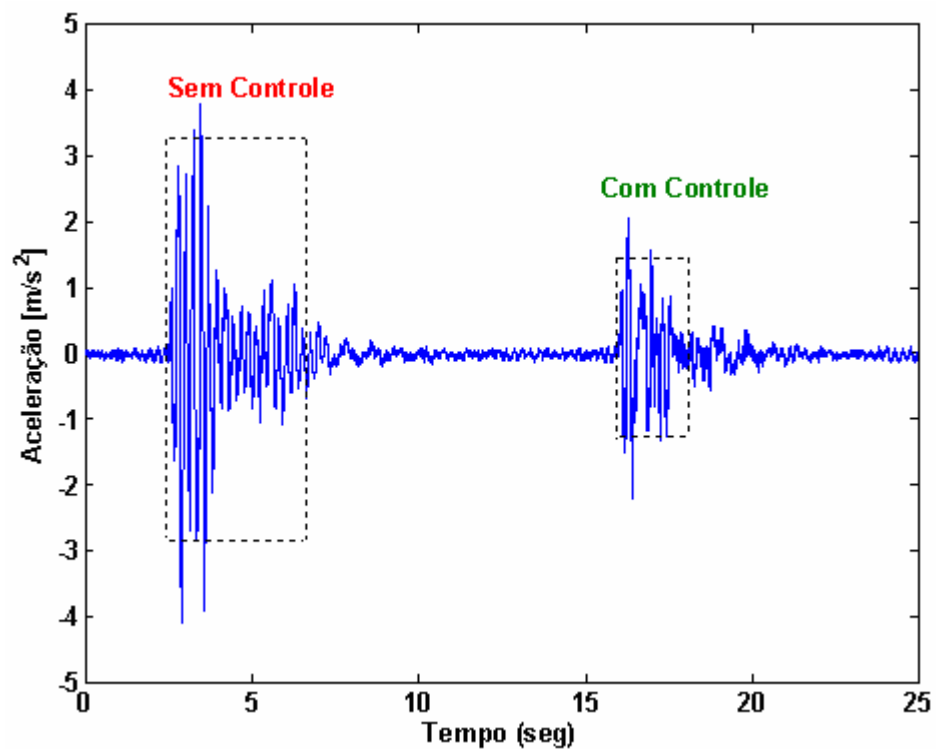


Figura 5.18: Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.

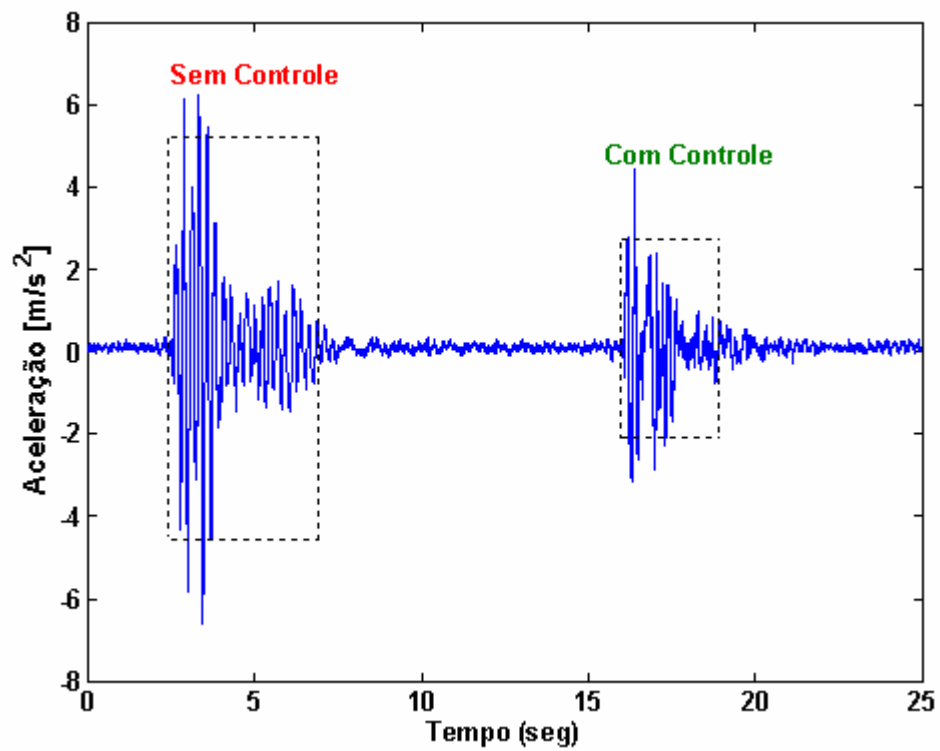


Figura 5.19: Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.

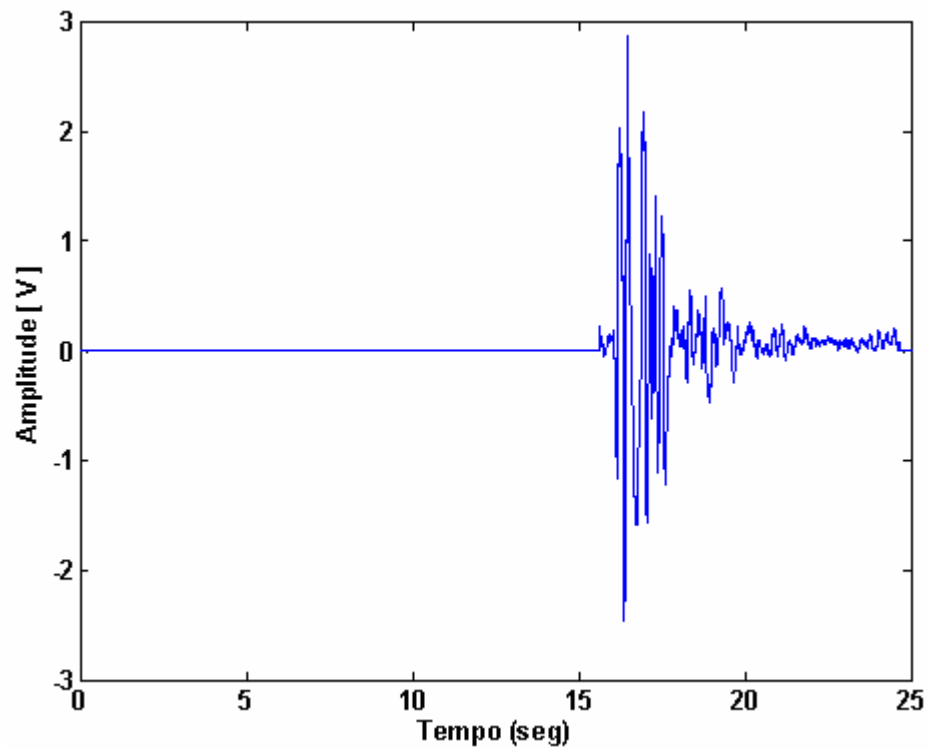


Figura 5.20: Força de controle aplicada ao carro, em [V].

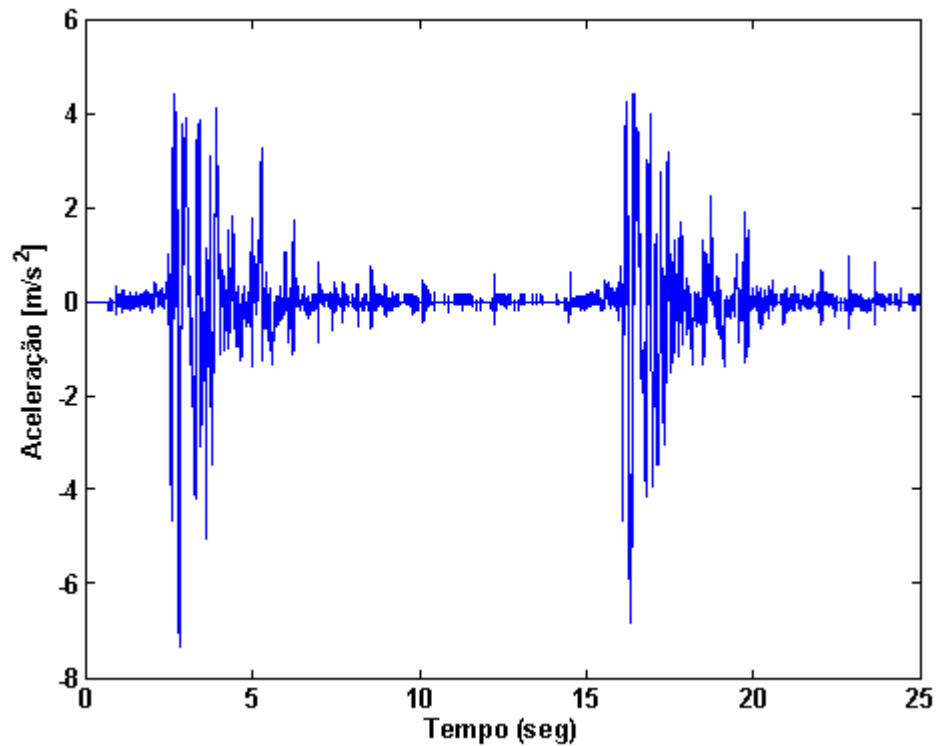


Figura 5.21: Sinal de distúrbio, que simula uma excitação real de um abalo sísmico.

TESTE 4: Excitação Senoidal

Neste teste a estrutura foi submetida a uma excitação senoidal. O sinal da excitação é mostrado na figura 5.25. As figuras 5.22 e 5.23 mostram o sinal de aceleração do primeiro e do segundo andar da estrutura, respectivamente. A figura 5.24 mostra a força de controle dirigida ao motor do carro, em Volts.

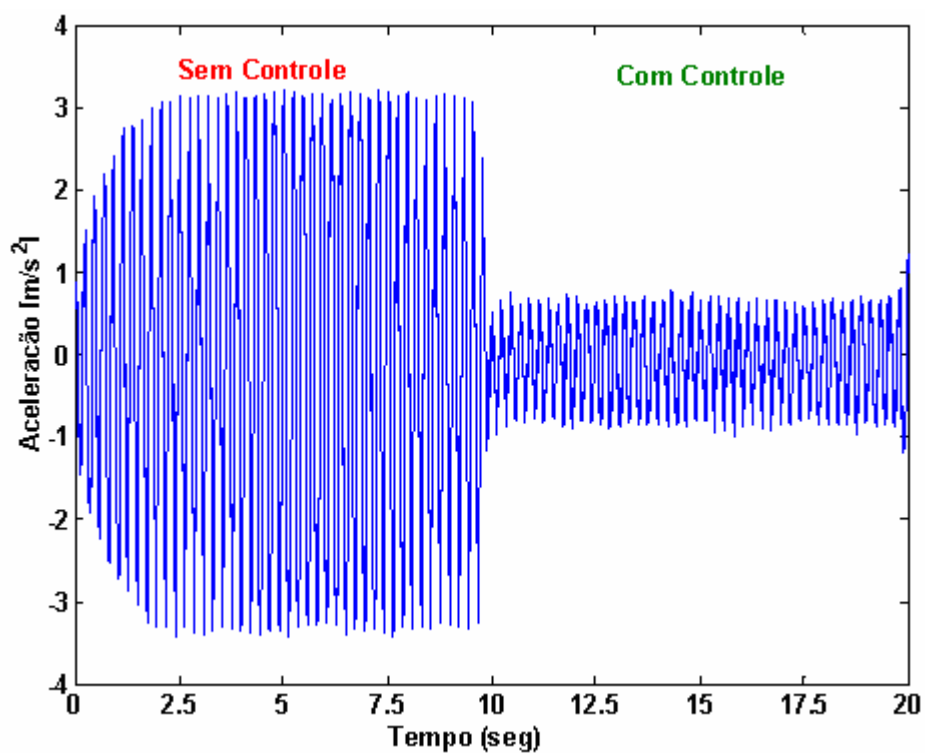


Figura 5.22: Sinal de aceleração do primeiro andar para os casos sem e com controle.

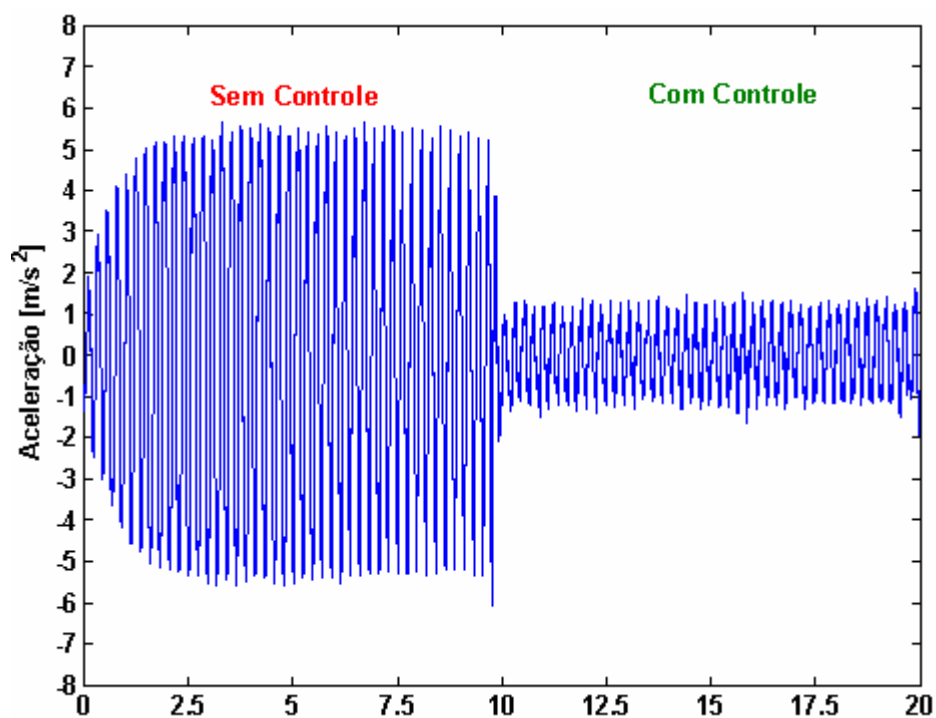


Figura 5.23: Sinal de aceleração do segundo andar para os casos sem e com controle.

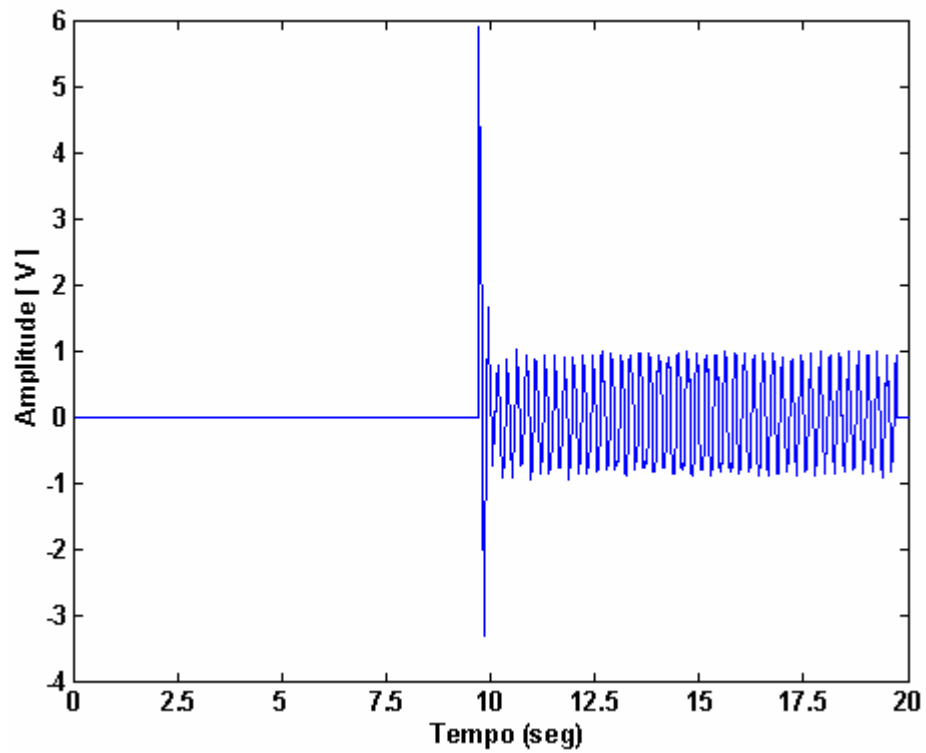


Figura 5.24: Força de controle aplicada ao carro, em [V].

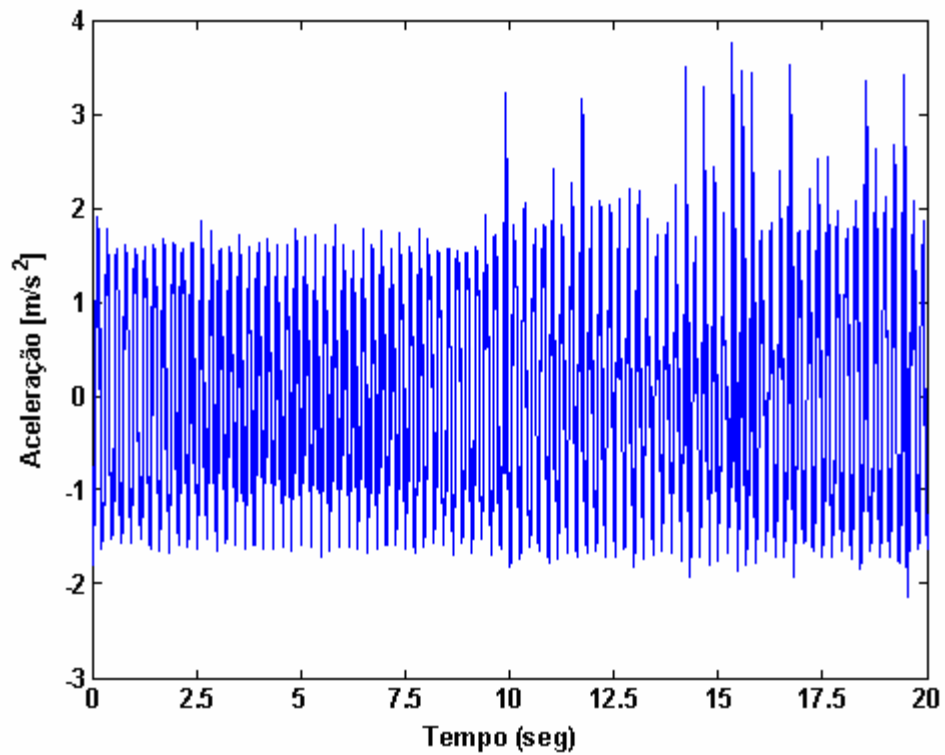


Figura 5.25: Sinal de distúrbio senoidal.

Os testes experimentais apresentados acima mostraram que a atenuação de vibração estrutural foi atingida para ambos os tipos de metodologias adotadas e, também, para os dois

tipos de excitações consideradas. A tabela 5.2 mostra os valores médios quadráticos (RMS - *Root Mean Square*) para os sinais de aceleração dos andares e para os sinais da força de controle. Mostra também, o percentual de redução de vibração em termos de valores RMS.

Tabela 5.2: Valores RMS dos sinais obtidos experimentalmente e percentual de redução de vibração estrutural.

Metodologia de Controle	Tipo de Excitação	Andar	Valor RMS (m/s^2)		% de redução de vibração	Força em valor RMS (V)
			Sem controle	Com controle		
Realimentação da saída	Sísmica (teste 1)	1° andar	0,68	0,36	46,70	0,31
		2° andar	1,16	0,58	50,06	
	Senoidal (teste 2)	1° andar	2,37	0,74	68,60	0,66
		2° andar	3,95	1,05	73,22	
Realimentação de Estados	Sísmica (teste 3)	1° andar	0,65	0,30	55,36	0,51
		2° andar	1,11	0,53	52,70	
	Senoidal (teste 4)	1° andar	2,11	0,47	77,75	0,72
		2° andar	3,52	0,78	77,73	

Pode-se observar que os resultados obtidos a partir das metodologias propostas apresentaram pequenas diferenças entre si. Considerando as excitações sísmicas, testes 1 e 3, observa-se que a força de controle (em volts) aplicada ao carro é menor quando utilizada a metodologia H_∞ com realimentação da saída. Porém, a atenuação de vibração é menor quando comparada com os resultados obtidos com o controle via realimentação de estados. Nos testes 2 e 4, que foram utilizados excitação senoidal, também é observado que a força de controle é menor quando aplicado o controle via realimentação da saída e, também, há uma menor atenuação de vibração estrutural. Tais diferenças são devido ao parâmetro K_u considerado no projeto do controlador H_∞ via realimentação de saída que serviu para restringir o nível do sinal de controle e, conseqüentemente, diminui a atenuação de vibração já que menos força foi aplicada à estrutura. Outro fator que influenciou nos resultados foi o problema de engrenamento entre o pinhão do carro e a cremalheira. Havia folga entre os dentes da engrenagem e os dentes do trilho o que não garantia uma tração uniforme e continua e, portanto, influenciando na força aplicada a estrutura pelo carro.

6 - Considerações Finais

6.1. Conclusões

No presente trabalho se buscou validar experimentalmente o projeto de controladores baseado no controle H_∞ com realimentação de estados e saída resolvidos por LMIs. Essas metodologias foram, anteriormente, estudadas por ex-integrantes do grupo GMSINT/UNESP/Ilha Solteira (Grupo de Materiais e Sistemas Inteligentes), Silva (2005) e Gonçalves (2003). Porém, não foi possível a simulação em tempo real dos controladores por eles projetados, pois, até a conclusão de seus trabalhos o laboratório não possuía uma placa para aquisição e controle em tempo real. No entanto, com a aquisição do sistema AMD-2 e *Shaker Table I* da Quanser®, além de Softwares e Hardwares de controle em tempo real foi possível a simulação em tempo real. Assim, com os equipamentos disponíveis no laboratório, foi possível a validação da metodologia e a execução deste trabalho.

Inicialmente, o modelo analítico do sistema AMD-2 foi obtido utilizando a aproximação Lagrangeana e a representação no espaço de estados. Em seguida, o problema de controle H_∞ com realimentação de estados e da saída foi resolvido por desigualdades matriciais lineares (LMIs) e a implementação em tempo real foi realizada. Então, testes experimentais utilizando dois tipos de excitações foram realizados e os resultados obtidos mostram uma significativa redução nas amplitudes de vibração, mostrando que o uso de LMIs é uma ferramenta poderosa em problemas de controle. Vale ressaltar que neste trabalho não se procurou avaliar qual a melhor das duas metodologias de controle propostas, mas sim, mostrar que ambas as metodologias estudadas são uma forma efetiva de redução de vibração em situações reais, mesmo considerando algumas aproximações na modelagem do sistema.

Neste trabalho apenas o problema de desempenho foi considerado no projeto dos controladores, porém, a teoria de controle robusto foi apresentada e certamente será objeto de estudo para outros integrantes do grupo GMSINT e de futuras simulações em tempo real do sistema AMD-2 considerando incertezas no modelo. Além disso, no projeto do controlador H_∞ com realimentação da saída o sistema AMD-2 foi considerado como sendo SISO, sendo a aceleração do primeiro andar a saída realimentada.

Outras metodologias de controle foram estudadas durante o desenvolvimento deste trabalho, tais como: Alocação de Pólos e o Regulador Linear Quadrático (LQR - *Linear*

Quadratic Regulator), ambas via LMIs. No entanto, as simulações em tempo real para essas metodologias foram realizadas e os resultados se mostraram bem próximos dos apresentados neste trabalho, ver Santos *et al.* (2006) e Santos *et al.* (2007b).

Finalmente, o estudo da teoria de controle apresentada neste trabalho, envolvendo conhecimentos teóricos, permitiu a aplicação prática dos conhecimentos teóricos. Além disso, este trabalho permitiu uma atitude de trabalho sistematizado, o exercício de senso crítico e observação, além de possibilitar a capacidade de sentir as próprias deficiências e buscar auto-aprimoramento. E ainda, este trabalho foi uma forma efetiva de se familiarizar com possíveis problemas quando se implementa o projeto de sistemas de controle em situações reais.

6.2. Sugestões para Futuros Trabalhos

Este trabalho apresentou basicamente os assuntos envolvidos no projeto de controladores para aplicação em tempo real em um modelo estrutural. Entretanto, inúmeros tópicos de pesquisa podem ser aprofundados a partir deste trabalho, tais como:

- Para o mesmo sistema projetar e implementar em tempo real o controle via realimentação de saída considerando o sistema como sendo SIMO (*Single Input – Multiple Output*) já que no presente trabalho apenas uma das saídas foi alimentada.
- Projeto de sistema de controle via realimentação de estados ou saída considerando incertezas no modelo. A inclusão de incertezas certamente tornará o problema mais próximo da realidade.
- Modelagem da estrutura considerando algumas não-linearidades no modelo, por exemplo, nas junções entre os andares. Então, projetar controladores não-lineares utilizando, por exemplo, modelos fuzzy Takagi-Sugeno e LMIs, visando a redução de vibração estrutural.
- Aumentar o número de andares do sistema AMD-2 para 4 ou 5. Então, verificar experimentalmente a posição ótima de atuadores e sensores utilizando normas de sistemas, por exemplo, a H_2 e a H_∞ . O posicionamento de atuadores e sensores através de normas abre grande perspectiva para pesquisas futuras.
- Projeto de controladores no domínio discreto. Espera-se que os resultados experimentais sejam melhores para os controladores digitais do que para os controladores obtidos a partir das técnicas analógicas descritas no presente trabalho.

6.3. Publicações Originadas a Partir do Presente Trabalho

Congressos (nacionais e internacionais):

SANTOS, R. B.; BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; LOPES JUNIOR, V. Controle de vibração de uma estrutura flexível baseado na metodologia de alocação de pólos utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs). In: SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, 16, 2006, Uberlândia. **Anais....** Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2006.

SANTOS, R. B.; BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; LOPES JUNIOR, V. Active vibration control of a two - floors building model based on H_2 and H_∞ methodologies using linear matrix inequalities (LMIs). In: CONFERENCE & EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS - IMAC, 26, 2007, Orlando. **Anais...** Orlando: [s.n.], 2007.

SANTOS, R. B.; BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; LOPES JUNIOR, V. Experimental vibration control based on linear quadratic regulator (LQR) using LMIs. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 6, 2007, São José do Rio Preto. **Anais....** São José do Rio Preto: [s.n.], 2007.

SANTOS, R. B.; BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; LOPES JUNIOR, V. H_∞ controller with output feedback using linear matrix inequalities for application in building model. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING - COBEM, 19, 2007, Brasília. **Anais...** Brasília: [s.n.], 2007.

Revista:

SANTOS, R. B.; BUENO, D. D.; MARQUI, C. R.; MESQUITA N., C.; LOPES JUNIOR, V. Controle robusto de vibração em estruturas flexíveis baseado no regulador linear quadrático via desigualdades matriciais lineares. **SBA Sociedade Brasileira de Automática**, 2007 (artigo revisado e aceito para publicação).

7 - Referências

ABDALLA, M. O.; ZIMMERMAN, D. C.; GRIGORIADIS, K. M. Structural damage detection using strain data via linear matrix inequality based methods. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1999, San Diego. **Anais ...** [s.l.]: [s.n.], 1999. p. 1114-1118.

ABDALLA, M. O.; ZIMMERMAN, D. C.; GRIGORIADIS, K. M. Reduce optimal parameter update in structural systems using LMIs. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2000, Chicago. **Anais ...** [s.l.]: [s.n.], 2000. p. 991-995.

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M.C.M. Projeto de sistema de controle via LMIs usando o MATLAB. In: APLICAÇÕES EM DINÂMICA E CONTROLE - APLICON, 2001, São Carlos. **Anais ...** São Carlos: [s.n.], 2001.

ASSUNÇÃO, E.; PERES, P.L.D. Otimização global para os problemas de redução H_2 de modelos e redução H_2 da ordem do controlador. **SBA - Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 12, n. 2, p. 93-101, 2001.

BALAS, G. J.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; PACKARD, A.; SMITH, R. **μ -analysis and synthesis toolbox**. Natick: The Matworks, Inc., 1994.

BOYD, S.; BARRATT, C. **Linear controller design: limits of performance**. New Jersey: Prentice Hall, 1990.

BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOU, L. Control system analysis and synthesis via linear matrix inequalities. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1993, São Francisco. **Anais ...** São Francisco: [s.n.], 1993. p. 2147-2154.

BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOU, L. History of linear matrix inequalities in control theory. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 1994, Baltimore. **Anais...** [s.l.]:[s.n.], 1994a.

BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; EL GHAOU, L. **Linear matrix inequalities in systems and control theory**. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics - SIAM, 1994b. p-193.

BUENO, D.D. **Controle ativo de vibrações e localização ótima de sensores e atuadores piezelétricos**. 2007. 230 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2007.

BURL, J.B. **Linear optimal control: H_2 and H_∞ methods**. Melon Park: Addison-Wesley, 1999.

DERUSSO, P.M.; ROY, R.J.; CLOSE, C.M.; DESROCHERS, A.A. **State variables for engineers**. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1997.

DOYLE, J. C.; STEIN, G. Multivariable feedback design: Concepts for a classical/modern synthesis. **IEEE Transaction on Automatic Control**, [s.l.], v. AC-26, p.4-16, 1981.

EL GHAOU, L.; NICULESCU, S. **Advances in linear matrix inequalities methods in control**. 2. ed. Philadelphia: Studies in Applied Mathematics - SIAM, 2000.

FORGRAVE, J.C.; MAN K.F.; NEWELL, J.M. Spacecraft acoustic and random vibrations test optimization. **Sound and Vibrations**, [s.l.], v. 33, n.3, p. 28-31, 1999.

FRANKLIN, G.F.; POWELL, J.D.; EMAMI-NAEINI, A. **Feedback control of dynamic systems**. 3. ed. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1994.

GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to H_∞ control. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, Hoboken, v. 4, n.4, p. 421-488, 1994.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A.J.; CHILIALI, M. **LMI control toolbox user's guide**. Natick: The Mathworks Inc., 1995.

GEROMEL, J.C. Convex analysis and global optimization of joint actuator location and control problems. **IEEE Transaction on Automatic Control**, [s.l.], v. 34, n. 7, p. 711-720, 1989.

GEROMEL, J.C.; PERES, P.L.D.; BERNUSSOU, J. On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, Philadelphia, v. 2, n. 29, p. 381-402., 1991.

GEROMEL, J.C.; COLANERI, P. Robust stability of time varying polytopic systems. **Systems & Control Letters**, Houston, v. 55, n.1, p. 81-85, 2006.

GEROMEL, J.C.; EGAS, R.G.; KAWAOKA, F.R.R. H_∞ Model reduction with application to flexible system. **IEEE Transaction on Automatic Control**, [s.l.], v.50, n.3, p. 402-406, 2005.

GEROMEL, J.C.; EGAS, R.G.; KAWAOKA, F.R.R. Model reduction of discrete time system though linear matrix inequalities. **International Journal Control**, London, v. 77, n.10, p. 978-984, 2004.

GEROMEL, J.C.; OLIVEIRA, M.C.; HSU, L. LMI characterization of structural and robust stability. **Linear Algebra and Its Application**, New York, v.285, n.1-3, p. 69-80, 1998.

GONÇALVES, P.J.P.; LOPES JR., V.; ASSUNÇÃO, E. H_2 and H_∞ norm control of intelligent structures using LMI techniques. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON NOISE AND VIBRATION ENGINEERING – ISMA, 26, 2002, Leuven. **Anais...** Leuven: [s.n.], 2002.

GONÇALVES, P.J.P. **Controle ativo de vibração estrutural utilizando materiais Inteligentes e desigualdades matriciais lineares**. 2003. 125 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2003.

GONÇALVES, P.J.P.; SILVA, S.; TURRA, A. E.; LOPES JUNIOR, V. Active vibration control in smart structures comparing the control algorithms: IMSC and LMI. In: SYMPOSIUM ON DYNAMIC PROBLEMS OF MECHANICS- DINAME, 10, 2003, Ubatuba. **Anais...** Ubatuba:[s.n.], 2003a. p. 171-176.

GONÇALVES, P.J.P.; LOPES JUNIOR., V.; BRENNAN, M.J. Using LMI techniques to control intelligent structures. In: CONFERENCE ON STRUCTURAL DYNAMICS - IMAC, 20, 2003, Kissimmee. **Anais...** Kissimmee:[s.n.], 2003b.

K2 INC. **Materials in sport and leisure**. (s.l.:s.n.), [2000?]. Disponível em: <<http://www.k2inc.net>> Acesso em: jul, 2003.

LEE, D.; LI, P.Y. Toward Robust Passivity: A passive control implementation structure for mechanical teleoperators In: SYMPOSIUM ON HAPTIC INTERFACES FOR VIRTUAL ENVIRONMENT AND TELEOPERATOR SYSTEMS, 11, 2003, Los Angeles. **Anais...** Los Angeles:[s.n.], 2003.

LEVINE, W. S. **The control handbook**. Boca Raton: CRC Press, Inc., 1996.

LIN, Z.F.; LI, L.L.; HUA, Y.G.; LING, X.Q. Most recent development on seismic control of structures in P.R. China. In: FIRST WORLD CONFERENCE ON STRUCTURAL CONTROL, 1, 1994, Los Angeles. **Anais...** Los Angeles:[s.n.], v.3, p. FA3-29 - FA3-37, 1994.

LIU, Y.; GORDANINEJAD, F.; EVRENSEL, C.A.; WANG, X.; HITCHCOCK, G. Energy minimization-based vibration control of a bridge using magneto-rheological fluid dampers. **Adaptive Structures and Material Systems**, [s.l.], v.60, p.197-202, 2000.

MATHEU, E.E. **Active and semi-active control of civil structures under seismic excitation**. 1997. 195 f. Dissertation (Doctor Philosophy) - Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, 1997.

MESQUITA NETO, C.; SANTOS, R.B.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES JUNIOR., V. Atenuação de vibrações em edifícios devido a abalos sísmicos utilizando amortecedores magnetoreológicos. **SBA - Revista Controle & Automação**, Campinas, 2007. (artigo em processo de avaliação).

MEIROVITCH, L. **Principles and techniques of vibrations**. 3. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2000. ISBN 0-02-380141-7.

MEIROVITCH, L. **Dynamics and control of structures**. New York: John Wiley & Sons, 1990. ISBN 0-471-62858-1.

MOREIRA, F.J.O. **Um controlador H_∞ de banda limitada para controle ativo de vibração estrutural**. 1998. 182 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Mecânica Computacional, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1998.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed., Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2000.

OLIVEIRA, M. C.; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J.C. **LMISol, user's guide**. Campinas: UNICAMP, 1997.

PALMA, P.H.T. **Identificação experimental e controle ativo de vibrações aplicadas em estruturas inteligentes**. 2007. 148 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2007.

PERES, P.L.D. **Controle H_2 e H_∞** : caracterização por desigualdades matriciais lineares. 1997. 180 f. Tese (Livre - Docência) - Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, 1997.

QUANSER CONSULTING, INC. **Active mass damper** : two-floor (AMD-2). Canada: Quanser User Manual, [2004?].

SAKAMOTO, M.; KOBORI, T.; YAMADA, T.; TAKAHASHI, M. Practical applications of active and hybrid response control systems and their verifications by earthquake and strong wind observations. In: FIRST WORLD CONFERENCE ON STRUCTURAL CONTROL, 1, 1994, Los Angeles. **Anais...** Los Angeles: [s.n.], 1994. p. WP2-90 - WP2-99.

SANA, S.; RAO, V.S. Robust control input limited smart structural system. **IEEE Transactions on Control Systems Technology**, Brookline, v.9, n.1, 2001.

SARRACINI JR., F.; SERPA, A. L. Reduced model in H_∞ vibration control using linear matrix inequalities. **Shock and Vibration**, Blacksburg, v.13, n.4, 5, p.469-484, 2006.

SANTOS, R.B.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES JUNIOR., V. Active vibration control of a two -floors building model based on H_2 and H_∞ methodologies using linear matrix inequalities (LMIs). In: CONFERENCE & EXPOSITION ON STRUCTURAL DYNAMICS - IMAC, 25, 2007, Orlando. **Anais...** Orlando: [s.n.], 2007a.

SANTOS, R.B.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES JUNIOR., V. Experimental vibration control based on linear quadratic regulator (LQR) using LMIs. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES - DINCON, 6, 2007, São José do Rio Preto. **Anais...** São José do Rio Preto: [s.n.], 2007b.

SANTOS, R.B.; BUENO, D.D.; MARQUI, C.R.; LOPES JUNIOR., V. Controle de vibração de uma estrutura flexível baseado na metodologia de alocação de pólos utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs). In: SIMPÓSIO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA DA UFU, 16, 2006, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia: [s.n.], 2006.

SANTOS, R.B. **Controle em tempo real de um pêndulo invertido para uso didático**. 2005. 58 f. Relatório Parcial (Iniciação Científica - PIBIC) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2005.

SILVA, S.; LOPES JUNIOR., V.; BRENNAN M.J. Design of a control system using linear matrix inequalities for the active vibration control of a plate. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Virginia, v.17, n.1, p.81-93, 2006.

SILVA, S.; LOPES JUNIOR, V.; ASSUNÇÃO, E. Robust control to parametric uncertainties in smart structures using linear matrix inequalities. **Journal of Brazilian Society Mechanical Sciences**, Rio de Janeiro, v.26, n.4, p.430-437, 2004.

SILVA, S. **Projeto de controladores robustos para aplicações em estruturas inteligentes utilizando desigualdades matriciais lineares**. 2005. 128 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista - UNESP, Ilha Solteira, 2005.

SILVA, S.; LOPES JUNIOR., V.; ASSUNÇÃO, E. Controle robusto de estruturas flexíveis usando técnicas LMIs. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC - DINCON, 2, 2003, São José dos Campos. **Anais....** São José dos Campos: [s.n.], 2003. p. 2200 – 2219.

SOONG, T.T.; SPENCER JUNIOR., B.F. Supplemental energy dissipation: state-of-the-art and state-of-the-practice. **Engineering Structures**, [s.l.], v.24, p. 243-259, 2002.

SOUZA, R. A. **Controle passivo/ativo das oscilações de estruturas esbeltas por meio de dispositivos fluido-dinâmicos**. 2003. 147 f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2003.

TEIXEIRA, M.C.M.; PIETROBOM, H.C.; ASSUNÇÃO, E. Novos resultados sobre a estabilidade e controle de sistemas não-lineares utilizando modelos fuzzy e LMI. **SBA - Revista Controle & Automação**, Campinas, v.11, n.1, p.37-48, 2000.

THE INSTITUTE OF MATERIALS, MINERALS AND MINING - IOM3. **Aerospace and defense applications - an overview of US military smart adaptive projects**. [s.l.: s.n.], [2001?]. Disponível em: <<http://www.instmat.co.uk/iom/divisions/mst/smasc/intro.htm>>, Acesso em: jul, 2003.

TRUXAL, J. G. **Automatic feedback control system synthesis**. New York: MacGraw-Hill Company, 1955.

ULTRA ELECTRONICS LTD. **Noise and vibration systems**. [s.l.: s.n.], [2002?]. Disponível em: <<http://www.ultraquiet.com>>, Acesso em: jul, 2003.

VANANTWERP, J. G. E BRAATZ, R. D. A tutorial on linear and bilinear matrix inequalities. **Journal of Process Control**, [s.l.], v. 10, p. 363-385, 2000.

VALER, C.E.I. **Uma introdução ao controle robusto com aplicações a estruturas flexíveis**. 1999. 159 f. Tese (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC/RJ, Rio de Janeiro, 1999.

XIE, L. Output feedback H_∞ control systems with parametric uncertainty. **International Journal of Control**, London, v.63, n.4, p.741-750, 1996.

ZHOU, K.; DOYLE, J.C.; GLOVER, K. **Robust and optimal control**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

Apêndice - A

A.1. Programas em Matlab®6.5

1. Projeto de Controle Ótimo H_∞

Arquivo MatLab®6.5: controle_Hoo_AMD2.m

```
% POS-GRADUAÇÃO EM ENG. MECANICA - UNESP/ILHA SOLTEIRA
% Projeto de Controle Hoo Via LMIs : Realimentação de Estados
% Sistema AMD-2 Active Mass Damper - Two Floors
% Rodrigo Borges Santos - 2007

clc; clear
load modelo_AMD2; % Lê o modelo do sistema AMD-2
n=length(A); % Dimensão da matriz A
m=size(B2,2); % Auxiliar na dimensão de Z
setlmis([]); % Início da montagem das LMIs
mi=lmivar(1,[1 1]); % Declaração que mi é uma variável escalar
Z=lmivar(2,[m n]); % Declaração que Z é uma matriz retangular 1 x n
W=lmivar(1,[n 1]); % Declaração que W é uma matriz simétrica n x n
lmiterm([-1 1 1 W],-A,1,'s'); % LMI #1: -A*W-W*A'
lmiterm([-1 1 1 Z],-B2,1,'s'); % LMI #1: -B2*Z-Z'*B2'
lmiterm([-1 2 1 0],B1'); % LMI #1: B1'
lmiterm([-1 3 1 W],C,1); % LMI #1: C*W
lmiterm([-1 3 1 Z],D,1); % LMI #1: D*Z
lmiterm([-1 2 2 0],eye(1)); % LMI #1: 1
lmiterm([-1 3 1 Z],D,1); % LMI #1: D*Z
lmiterm([-1 3 3 mi],1,eye(1)); % LMI #1: 1*mi
lmiterm([-2 1 1 W],1,1); % LMI #2: W
lmiterm([-3 1 1 mi],1,1); % LMI #3: mi
lmiterm([-3 1 1 0],-100); % LMI #3: -100
lmicontroloo=getlmis; % Termina da montagem das LMIs

nvar1=decnbr(lmicontroloo); % Numero de variáveis de decisão das LMIs
objc1=zeros(nvar1,1); % Definindo a variável a ser otimizada
objc1(1)=1; % Variável de otimização: mi
options(1)=0;
options(2)=200;
options(3)=0;
options(4)=20;
options(5)=0;
[objcopt,xopt]=mincx(lmicontroloo,objc1,options);
miopt=dec2mat(lmicontroloo,xopt,mi);
Wf=dec2mat(lmicontroloo,xopt,W);
Zf=dec2mat(lmicontroloo,xopt,Z);
minHoo=sqrt(miopt); % Norma Hoo do sistema a malha fechada

Kc=Zf*inv(Wf) % Ganho do controlador
```

2. Projeto de Controle H_∞ via Realimentação da Saída

Arquivo MatLab®6.5: projeto_desempenho.m

```
% POS-GRADUAÇÃO EM ENG. MECANICA - UNESP/ILHA SOLTEIRA
% Projeto de Controle Hoo Via LMIs : Realimentação da Saida
% Sistema AMD-2 Active Mass Damper - Two Floors
% Rodrigo Borges Santos - 2007

clc; clear
load modelo_AMD2_Saida; % Lê o modelo do sistema AMD-2
%-----
%PROJET DO FILTRO Wy: Incrementa o Amortecimento
%-----
fpico=2*pi*4.5;
zeta=.3;
num_wy=2.5e0*[fpico*fpico];
den_wy=1e0*[1 2*zeta*fpico fpico*fpico];
Wy=tf(num_wy,den_wy);
%-----
%FORMATO DE DADOS LTISYS
%-----
g1 = ltisys(A,B1,C(2,:),0); % Modelo do Disturbio
g2 = ltisys(A,B2,C(2,:),0); % Modelo Nominal
wy=ltisys('tf',num_wy,den_wy); % Filtro Wy
%-----
%GANHOS DE PROJETO
%-----
gama=0.01; % Ganho de Projeto
ku=0.05; % Limita o Sinal de Controle
%-----
%MONTAGEM DA PLANTA GENERALIZADA
%-----
inputs='w';
outputs='Wy,Ku';
Kin='K:Gn+Gd';
[Paug,r]=sconnect(inputs,outputs,Kin,'Gn:K',g2,'Gd:w',g1,'gama:Gn+Gd',gama,
'Wy:gama',wy,'Ku:K',ku);
%-----
%PROJETO DO CONTROLADOR Hoo
%-----
options(1)=0;
options(2)=0;
options(3)=1e-3;
[gopt,controlador]=hinflmi(Paug,r); % Calcula o Controlador Hoo Via LMI
[Acontrol,Bcontrol,Ccontrol,Dcontrol,e]=ltiss(controlador);
[num_c,den_c]=ltitf(controlador);

Ks=tf(num_c,den_c); % Controlador K(s)
```

A.2. Procedimento Experimental

A seguir são apresentados os passos para a implementação em tempo real dos controladores projetados. O objetivo deste procedimento é facilitar futuras reproduções dos testes experimentais realizados neste trabalho e de servir como referência para outros integrantes do grupo GMSINT da UNESP de Ilha Solteira.

Obs: Todos os arquivos utilizados para a simulação em tempo real estão disponíveis em: *D:\Rodrigo\Pos_Graduacao\Controle_AMD2\Hoo_Estados ou Hoo_Saida*, no computador utilizado para testes experimentais do sistema da Quanser®.

- **Passo 1.** Rodar no Matlab o arquivo chamado *par_AMDeST1.mat*. Este arquivo inicializa todos os parâmetros do modelo estrutural AMD-2 e da *Shake Table I* que serão usados pelos diagramas do Simulink.
- **Passo 2.** Rodar no Matlab o arquivo chamado *controle_Hoo_AMD.m* caso deseja-se fazer o controle H_∞ via realimentação de estados. Para o controle via realimentação da saída deve-se rodar o arquivo *projeto_desempenho.m*. Estes arquivos, apêndice A.1, calculam os controladores projetados.

Atenção! Para o caso do controle H_∞ via realimentação de saída, o sinal da saída alimentada é a aceleração do primeiro andar. Para este caso o sistema foi considerado como sendo SISO (Single Input – Single Output).

- **Passo 3.** Abrir no Simulink o arquivo *tempo_real_estados.mdl* caso deseja-se fazer o controle H_∞ via realimentação de estados. Deverá-se obter um diagrama semelhante ao da figura A 2.1. Para o controle via realimentação da saída deve-se abrir o arquivo *tempo_real_saida.md*. Neste caso, deverá-se obter um diagrama semelhante ao da figura A 2.2.

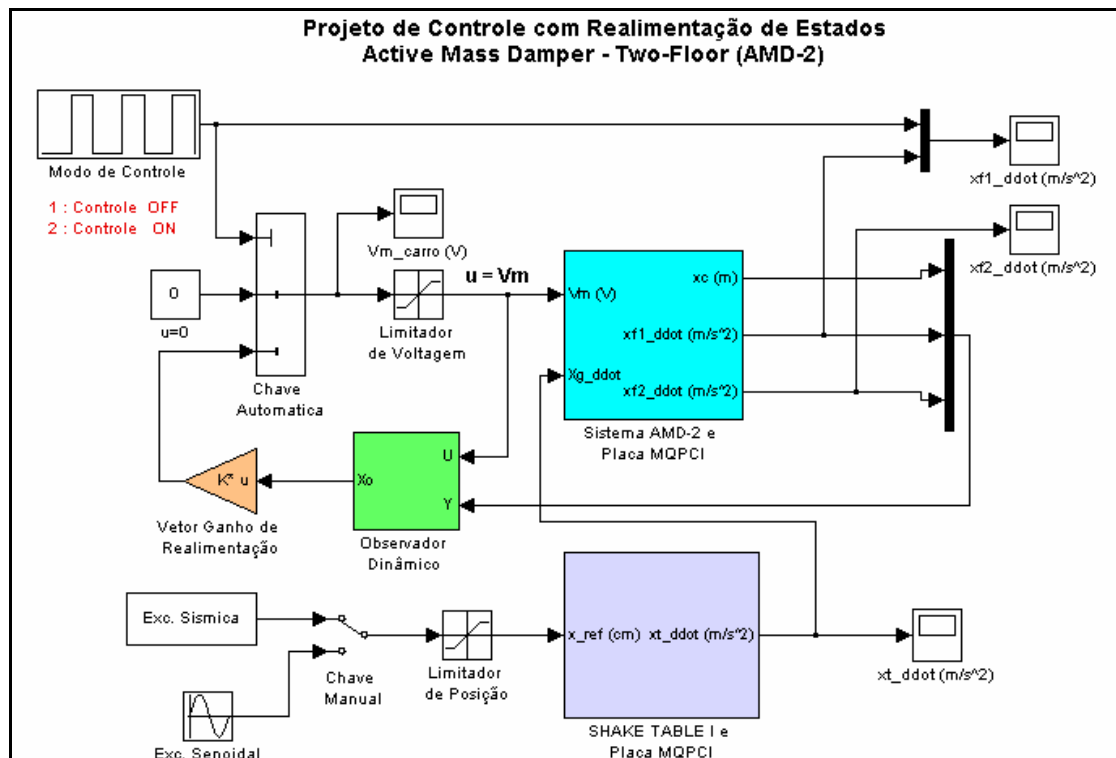


Figura A 2.1: Diagrama de simulação – projeto H_∞ via realimentação de estados.

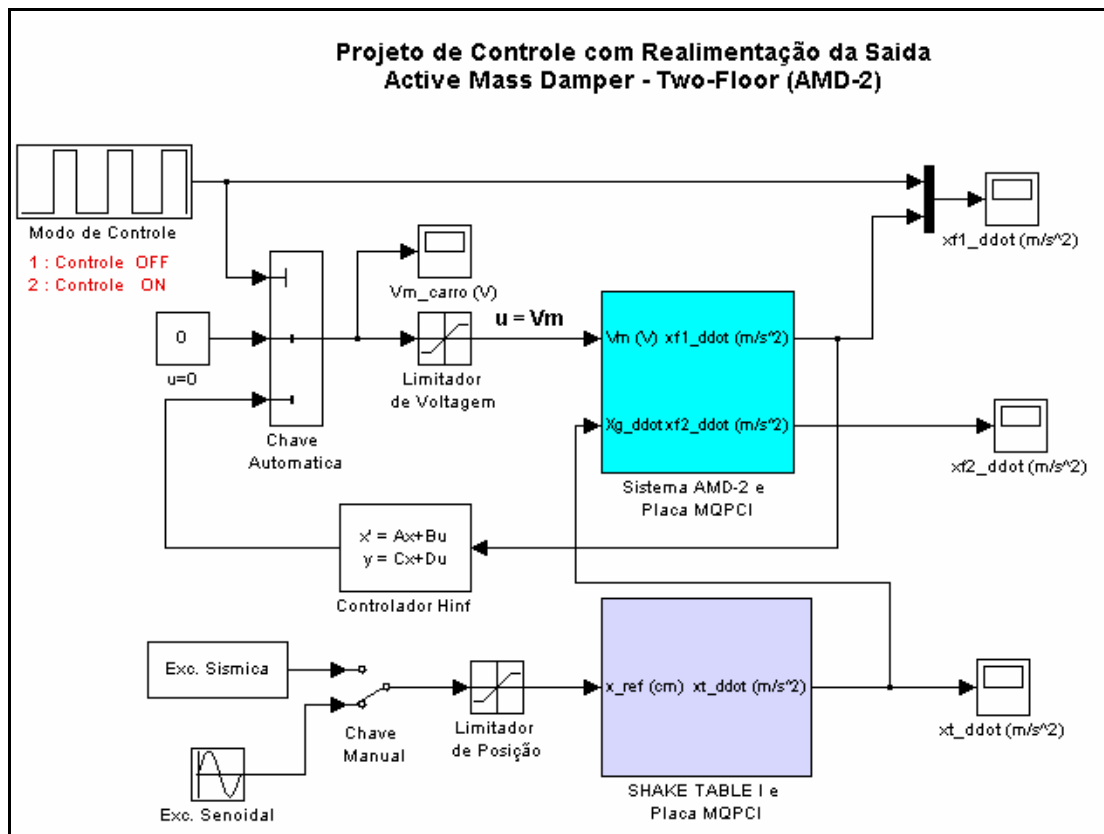


Figura A 2.2: Diagrama de simulação – projeto H_∞ via realimentação de saída.

- **Passo 4.** Verificar se todas conexões do sistema AMD-2 e *Shake Table I* estão corretas (consultar o manual do usuário - *Quanser User Manual*). Além disso, verificar se as conexões dos canais de entrada e saída da placa *MultiQ -PCI* estão de acordo com as definidas pelo usuário nos diagramas Simulink. Garantido isto, pode-se dar potência ao sistema ligando os módulos de potências.

Atenção! O módulo de potência para o sistema AMD-2 é o UPM 1503 (**220 V**) e o módulo de potência para o sistema *Shake Table I* é o UPM 2405 (**110 V**).

- **Passo 5.** Compilar o código de tempo real correspondente ao diagrama, usando o *WinCon/Bluid*, na opção da barra de menus do Simulink. Depois do sucesso de compilação e carregado o *WinCon - Client e Server*, usar-se o *WinCon - Server* para controlar em tempo real o sistema AMD-2. Então, para começar a simulação a malha fechada e em tempo real basta clicar no botão START/STOP da janela do *WinCon - Server*.
- **Passo 5.** Monitorar on-line os movimentos do carro, as deflexões dos andares, a força de controle e os sinais de distúrbio através dos *SCOPES* disponíveis na janela do *WinCon - Server*.