

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**UM ESTUDO DE FRACTAIS GEOMÉTRICOS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

NILSON JORGE BALDOVINOTTI

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Miriam Godoy Penteado

Rio Claro (SP)
2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Campus de Rio Claro

**UM ESTUDO DE FRACTAIS GEOMÉTRICOS NA FORMAÇÃO DE
PROFESSORES DE MATEMÁTICA**

NILSON JORGE BALDOVINOTTI

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - Área de concentração em ensino e aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosófico-científicos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

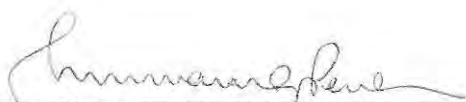
Rio Claro (SP)
2011

514.742 Baldovinotti, Nilson Jorge
B178e Um estudo de fractais geométricos na formação de
professores de matemática / Nilson Jorge Baldovinotti. - Rio
Claro : [s.n.], 2011
204 f. : il., figs., gráfs., tabs., fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Miriam Godoy Penteado

1. Fractais. 2. Geometria fractal. 3. Softwares
educacionais. 4. Conteúdo - Conhecimento pedagógico. 5.
Educação matemática. I. Título.

COMISSÃO EXAMINADORA



Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado (Orientadora)
Universidade Estadual Paulista – Rio Claro (SP)



Prof. Dr. Claudemir Murari
Universidade Estadual Paulista – Rio Claro (SP)



Prof^a. Dr^a. Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali
Universidade Federal de São Carlos – São Carlos (SP)



Nilson Jorge Baldovinotti (aluno)

Rio Claro, 27 de abril de 2011

Resultado: Aprovado

*Aos meus pais, por sempre incentivarem os estudos e
serem exemplos de luta, coragem e perseverança.*

Ao meu irmão, pelo apoio em todas as horas.

*A minha noiva Sandra, pela paciência e
compreensão nos momentos que tive de me ausentar
e, principalmente, pelo companheirismo durante a
minha caminhada nesse trabalho.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a *Deus*, que me permitiu que fizesse esta pesquisa e este curso, que por sua infinita bondade, deu-me a força necessária para concluir esse trabalho.

À minha orientadora, *Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado*, que sempre foi mais do que uma orientadora durante a realização desta pesquisa. Obrigado, pelas palavras que sempre me encorajaram e muito contribuíram para a realização deste trabalho. Obrigado, pela paciência em orientar um aluno que, além de trabalhar muito, não morava nas proximidades de Rio Claro. Obrigado, por tudo a qual me ensinou.

Aos professores *Dr^a. Aline Maria de Medeiros Rodrigues Reali* e *Dr. Claudemir Murari*, por aceitarem o convite para fazer parte de minhas bancas e pelas sugestões e contribuições valiosas.

Ao professor *Ms. Cesar Ricardo Peon Martins*, por permitir a realização da oficina em suas aulas, na universidade, que contribuiu de maneira significativa para a realização dessa pesquisa.

Ao diretor *Jarbas Oliveira Bispo* por permitir a realização da oficina na escola.

Ao coordenador *Eliei Quirino da Silva* por ceder o espaço da HTPC para a realização da oficina.

Aos licenciandos do curso de Matemática e professores participantes dessa pesquisa, que aceitaram contribuir com ela por meio das atividades desenvolvidas nas oficinas realizadas.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UNESP de Rio Claro. Em especial àqueles que mais próximo estive durante a realização das disciplinas: Rosana Miskulin, Rômulo Lins, Sérgio Nobre, Marcus Maltempi, Vicente Garnica e Vanderlei Nascimento.

Aos funcionários da Seção de Pós-Graduação do IGCE, à secretária do curso, Inajara, e às secretárias do Departamento da Matemática, Ana e Elisa, pela prontidão dos esclarecimentos e eficiente trabalho.

Aos colegas do grupo de orientação: Guilherme, Luciano, Dirlene, Douglas, Vanessa, Renato, Salles, Flávia, Lessandra e Sandra pelas discussões, leituras e sugestões.

Aos colegas do grupo de formação de professores, pelas discussões e reflexões proporcionadas.

À Secretária de Estado da Educação de São Paulo, por conceder-me ajuda financeira para a realização deste trabalho, através do Programa Bolsa Mestrado do Fundo de Desenvolvimento da Educação em São Paulo – (FUNDESP).

À minha amiga e Professora Patrícia Pereira Lima, pela atenção e disponibilidade para fazer a revisão do texto.

Aos meus pais, Nelson Baldovinotti Filho e Maria Nilce Jorge Baldovinotti (in memoriam) que lutaram muito a vida toda para me educarem de uma forma que nunca puderam ter e me apoiarem na minha caminhada e ao meu irmão Nilton, que com suas sugestões as quais muito ajudaram durante todo o trabalho.

Finalmente, a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, auxiliaram na elaboração e desenvolvimento desse trabalho.



Disponível: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/escher/lquadrado.html>. Acesso: em 04 ago. 2010

"Um padrão composto de elementos que, dirigindo-se de dentro para fora, são continuamente reduzidos a metade. O limite do formato infinitamente pequeno é alcançado nos lados rectilíneos do quadrado."

(Escher, 1994, p.10)

RESUMO

Esta pesquisa tem a finalidade de compreender as possibilidades para o ensino de Geometria Fractal perspectivadas por professores de matemática e alunos do curso de licenciatura em Matemática. Os dados foram provenientes da realização de duas oficinas com cinco professores de matemática os quais atuam no ensino fundamental ou médio e de vinte estudantes do curso de licenciatura em Matemática e de um questionário preenchido por eles. Essas oficinas foram organizadas de forma a introduzir a ideia de Geometria Fractal a partir do emprego de recursos tecnológicos e materiais manipuláveis. Os programas computacionais utilizados foram o SuperLogo e o Geometricks. Usou-se também materiais manipuláveis como o compasso, a régua, a tesoura e papel cartão. A pesquisa empregou os pressupostos teóricos de Shulman para o estudo da produção de saber na prática docente; os pensamentos de Mizukami e Reali sobre os aspectos da formação de professores; o uso e o emprego de maneira significativa da Tecnologia na Educação por Papert e Valente; e as concepções de Penteado sobre a formação de professores para o uso de tecnologia informática. Os resultados tratam dos seguintes aspectos: a) como os participantes das oficinas percebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática; b) a relação dos participantes da oficina com a tecnologia informática utilizada; c) as dificuldades existentes ou não com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais; d) as possíveis dificuldades para ensinar esse tópico que os participantes da oficina conseguem antecipar.

Palavras-chave: Formação de Professores de Matemática. Geometria Fractal. Softwares Educacionais. Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. Educação Matemática.

ABSTRACT

This research aims at understanding the possibilities mathematics teachers and prospective teachers consider for teaching fractal geometry in the basic school. The analysis drawn on data from workshops and questionnaire with five mathematics teachers of elementary or high school, and twenty prospective mathematics teachers. The workshops were organized to introduce the idea of fractal geometry using software as SuperLogo and Geometricks, and manipulative material as compass, ruler, scissors and cardboard. The research based on Shulman ideas of pedagogical content knowledge; on Mizukami and Realí ideas of learning for teaching; and on Papert, Valente and Penteado idea of teacher education for the use of computer for teaching. The results cover the following aspects: a) how the participants perceive fractal mobilize other mathematical content; b) the relationship of participants with computers c) the difficulties the participants had with the mathematical knowledge to work with fractals; d) the possible difficulties in teaching this topic that participants could anticipate.

Keywords: Mathematics Teacher Education. Fractal Geometry. Educational Software. Pedagogical Content Knowledge Mathematics Education.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. <i>Número de cursos, por categoria administrativa e por região</i>	87
Tabela 2. <i>Número de graduandos presentes, por região administrativa e por região – Matemática – ENC/2003</i>	88
Tabela 3. <i>Modelo da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática de Instituição Pública</i>	89
Tabela 4. <i>Modelo de grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática de Instituição Privada</i>	90
Tabela 5. <i>Instituição de ensino de graduação</i>	114
Tabela 6. <i>Ano de conclusão de graduação</i>	114
Tabela 7. <i>Disciplinas relativas à Geometria na graduação</i>	114
Tabela 8. <i>Experiências relativas ao trabalho com geometria</i>	115
Tabela 9. <i>Disciplinas relativas a informática na graduação</i>	115
Tabela 10. <i>Uso de tecnologias em sala de aula</i>	116
Tabela 11. <i>Capacitação para o uso do computador no ensino</i>	116
Tabela 12. <i>Acesso a laboratório de informática</i>	116
Tabela 13. <i>Utilização do laboratório de Informática</i>	117
Tabela 14. <i>Interesse no uso da tecnologia na Educação</i>	117
Tabela 15. <i>Conhece o LOGO ou Geometricks</i>	118
Tabela 16. <i>Conhecimento sobre a Geometria Fractal ou Teoria do Caos</i>	118
Tabela 17. <i>Semestre do curso de Matemática</i>	120
Tabela 18. <i>Ano de conclusão do curso de Matemática</i>	120
Tabela 19. <i>Disciplinas de geometrias cursadas na graduação</i>	120
Tabela 20. <i>Disciplinas de informática cursadas na graduação</i>	121
Tabela 21. <i>Temas de Matemática relacionados com os fractais</i>	121
Tabela 22. <i>Explorar a Geometria Fractal na sala de aula</i>	122
Tabela 23. <i>Dificuldade ao desenvolver os fractais no LOGO</i>	122

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Comprimento L de uma curva	31
Figura 2. Autossimilaridade dos fractais	32
Figura 3. Galho de árvore	33
Figura 4. Brócolis	33
Figura 5. Couve flor	33
Figura 6. Brócolis tipo Romanesco	33
Figura 7. Curva de Kock	35
Figura 8. Ilha de Kock Alternada	35
Figura 9. Triângulo de Sierpinski	36
Figura 10. Carpete de Sierpinski	36
Figura 11. Hexágono de Dürer	36
Figura 12. Pentágono de Dürer	36
Figura 13. Fractal Árvore Pitagórico Fundamental	36
Figura 14. Fractal por expansão	37
Figura 15. Fractal por expansão	37
Figura 16. Conjunto de Mandelbrot	37
Figura 17. Conjunto de Julia	37
Figura 18. Arte Fractal	37
Figura 19. Arte Fractal	37
Figura 20. George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor	38
Figura 21. Concepção de construção do conjunto de Cantor	39
Figura 22. Helge Von Koch	40
Figura 23. Concepção da construção da Curva de Koch	41
Figura 24. Concepção de construção do Floco de Neve de Koch	42
Figura 25. Wacław Sierpinski	43
Figura 26. Concepção de construção do Triângulo de Sierpinski	44
Figura 27. Concepção de construção do Tapete de Sierpinski	44

Figura 28. <i>Esponja de Menger</i>	45
Figura 29. <i>Tetraedro de Sierpinski</i>	45
Figura 30. <i>Jules Henri Poincaré</i>	46
Figura 31. <i>Giuseppe Peano</i>	46
Figura 32. <i>Trajatória da curva de Peano</i>	47
Figura 33. <i>Concepção da construção da Curva de Peano original</i>	48
Figura 34. <i>David Hilbert</i>	49
Figura 35. <i>Estágios iniciais da Curva de Hilbert</i>	50
Figura 36. <i>Segundo estágio da Curva de Hilbert</i>	50
Figura 37. <i>Curva de Hilbert</i>	51
Figura 38. <i>Gaston Maurice Julia</i>	51
Figura 39. <i>Variações do Conjunto de Julia</i>	52
Figura 40. <i>Pierre Joseph Louis Fatou</i>	53
Figura 41. <i>Felix Hausdorff</i>	55
Figura 42. <i>Benoit Mandelbrot</i>	57
Figura 43. <i>Conjunto de Mandelbrot e ampliações</i>	58
Figura 44. <i>A soma infinita dos termos da progressão geométrica</i>	59
Figura 45. <i>A soma infinita de termos da progressão geométrica utilizando o fractal</i>	60
Figura 46. <i>Exemplo de série geométrica convergente usando um fractal</i>	60
Figura 47. <i>Exemplo de séries geométricas convergentes empregando o conceito de fractais</i>	61
Figura 48. <i>Exemplo de fractais no ensino fundamental</i>	61
Figura 49. <i>Contextualização da Geometria Fractal para sistemas de equação</i>	61
Figura 50. <i>Interface do micro-mundo Logo</i>	71
Figura 51. <i>Área de trabalho no SuperLOGO</i>	74
Figura 52. <i>Área de tarefas e barra de ferramenta do Geometricks</i>	74
Figura 53. <i>Atividade da construção do fractal árvore no Cabri-Gèomètre II</i>	76
Figura 54. <i>Construção de um fractal no Geometricks</i>	76
Figura 55. <i>Exemplo de atividade para uso via Web desenvolvida com iGeom</i>	76
Figura 56. <i>Tela do Tabulae</i>	77
Figura 57. <i>Tela do Sketchpad com o “sketch” de construção de um triângulo equilátero</i>	77
Figura 58. <i>Comando para a construção de fractais no Geometricks</i>	78

Figura 59. <i>Coluna de comandos da função fractal no Geometricks</i>	78
Figura 60. <i>Parando a geração do fractal no Geometricks</i>	79
Figura 61. <i>Planificação dos fractais espaciais</i>	83
Figura 62. <i>Materiais manipulativos de fractais espaciais</i>	83
Figura 63. <i>Laboratório de informática</i>	104
Figura 64. <i>Alunos na oficina LOGO</i>	105
Figura 65. <i>Laboratório de informática da escola</i>	106
Figura 66. <i>Sala dos professores da escola</i>	106
Figura 67. <i>Conhecendo os Comandos do LOGO</i>	107
Figura 68. <i>Explorando polígonos no SuperLogo</i>	108
Figura 69. <i>Curva de Koch no SuperLogo</i>	109
Figura 70. <i>Floco de Neve no SuperLogo</i>	109
Figura 71. <i>Triângulo de Sierpinski no Geometricks</i>	110
Figura 72. <i>Tapete de Sierpinski no Geometricks</i>	110
Figura 73. <i>Variação do Tapete de Sierpinski</i>	110
Figura 74. <i>Estrutura geométrica do fractal classificado por expansão</i>	110
Figura 75. <i>Fractal obtido através da estrutura geométrica do lado</i>	110
Figura 76. <i>Estrutura geométrica do fractal tipo Dürer</i>	111
Figura 77. <i>Fractal tipo Dürer obtido através da estrutura geométrica ao lado</i>	111
Figura 78. <i>Planificação do fractal Cascata Triangular</i>	112
Figura 79. <i>Fractal Cascata Triangular obtido por recorte e dobradura de papel</i> ..	112
Figura 80. <i>Sala de Informática</i>	124
Figura 81. <i>Sala de aula da disciplina</i>	124
Figura 82. <i>Sala de Informática</i>	124
Figura 83. <i>Sala dos professores</i>	124
Figura 84. <i>Alunos do curso de licenciatura fazendo atividades no SuperLogo</i>	127
Figura 85. <i>Alunos do curso de licenciatura discutindo sobre as regularidades dos fractais</i>	127
Figura 86. <i>Construção do triângulo por alunos</i>	130
Figura 87. <i>Diferentes níveis da curva de Koch</i>	131
Figura 88. <i>Exemplos de programas feitos pelos alunos de graduação e professores de Matemática</i>	133
Figura 89. <i>Alunos do curso de licenciatura fazendo dobraduras</i>	137

Figura 90. <i>Dobraduras produzidas pelos professores de matemática</i>	138
--	-----

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	20
1. A Trajetória	20
2. Geometria Fractal como tema de estudo	23
3. A Pesquisa	24
CAPÍTULO I - GEOMETRIA FRACTAL	27
1. Introdução à Geometria Fractal	27
1.1. O que é a Geometria Fractal?	29
1.1.1. Dimensão Fractal	30
1.1.2. Autossimilaridade	32
1.1.2.1. Classificação dos fractais por autossimilaridade	34
1.1.3. Lacunaridade	34
1.1.4. Tipos de Fractais	35
1.2. Alguns personagens que influenciaram o desenvolvimento da Geometria Fractal	38
1.2.1. Georg Cantor (1845 – 1918)	38
1.2.2. Helge Von Koch (1870 – 1924)	40
1.2.3. Waclaw Sierpinski (1882 – 1969)	43
1.2.4. Henri Poincaré (1854 – 1912)	46
1.2.5. Giuseppe Peano (1858 – 1932)	46
1.2.6. David Hilbert (1862 – 1943)	49
1.2.7. Gaston Maurice Julia (1893 – 1978)	51
1.2.8. Pierre Joseph Louis Fatou (1878 – 1929)	53
1.2.9. Felix Hausdorff (1868 – 1942)	55
1.2.10. Benoit Mandelbrot (1924 – 2010)	57
1.3. O uso de fractais na Educação	59
CAPÍTULO II - INFORMÁTICA, MATERIAIS MANIPULATIVOS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	65

2. Tecnologia Informática e Educação	65
2.1. Implicações para o professor	67
2.2. Linguagem de programação LOGO	69
2.2.1. Micro-mundos	71
2.2.1.1. Domínio de validade epistemológica	72
2.2.2. As diferentes versões da linguagem de programação	73
2.2.3. SuperLogo	73
2.3. Geometricks	74
2.3.1. Geometria Dinâmica	75
2.3.2. Considerações conceituais do Geometricks na elaboração de fractais ..	78
2.4. Materiais manipulativos e seus aspectos teóricos	81
CAPÍTULO III - FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA	84
3. Aspectos relevantes para a formação de professores	84
3.1. Cursos de licenciatura em Matemática no Brasil	87
3.2. Escola: O Professor como Investigador de sua Própria Prática	94
CAPÍTULO IV - FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA E APRESENTAÇÃO DOS	
OBJETOS DE ESTUDO	97
4. Fundamentação metodológica	97
4.1. Coleta de dados	100
4.2. Sobre os questionários aplicados	101
4.3. Organização e apresentação dos objetos de estudo	103
4.3.1. Características dos locais das oficinas	104
4.3.2. Características das atividades com o SuperLogo e o Geometricks	106
4.3.2.1. Sobre as atividades com a linguagem Logo	107
4.3.2.2. Sobre as atividades com o Geometricks	109
4.3.3. Sobre as atividades com os materiais manipuláveis	111
CAPÍTULO V - ANÁLISE DOS DADOS	113
5. Um perfil dos participantes	113
5.1. Resultado dos questionários aplicados aos professores	114
5.1.1. Comentários sobre as respostas dos questionários dos professores ...	119
5.2. Resultado dos questionários aplicados aos alunos do curso de licenciatura	119
5.2.1. Comentários sobre as repostas dos questionários dos alunos do curso de licenciatura	123

5.3. Os participantes estudando fractais	123
5.3.1. A oficina com os participantes	123
5.3.2. Discussão dos dados das oficinas	126
5.3.2.1. Os conceitos matemáticos exigidos foram diferentes	126
5.3.2.2. Não consigo elaborar o programa para criar os fractais	129
5.3.2.3. Algumas coisas são viáveis, mas outras não	134
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	145
ANEXOS	151
ANEXO A	152
ANEXO B	154
ANEXO C	158
ANEXO D	160
ANEXO E	163
ANEXO F	166
ANEXO G	170
ANEXO H	174
ANEXO I	176
ANEXO J	179
ANEXO L	182
ANEXO M	184
ANEXO N	187
ANEXO O	188
ANEXO P	189
APÊNDICE	195
APÊNDICE A	196
APÊNDICE B	200

INTRODUÇÃO

“Não mude a sua conduta segundo a opinião da maioria: seja um, e não vários”.

Teodósi

1. A Trajetória

Os primeiros contatos com a Geometria Fractal aconteceram em minha graduação no curso de Licenciatura em Matemática da Unesp, campus de Rio Claro, através de palestras oferecidas pelo Departamento de Matemática para a graduação. A princípio, esses contatos transmitiram uma visão dos fractais como um conceito abstrato, de difícil entendimento e que talvez não permitisse sua exploração num curso de formação de professores em Matemática ou mesmo ensiná-los numa sala de aula de ensino básico.

Porém, meu interesse pelo tema tornou-se mais expressivo quando cursei a disciplina optativa *“Instrução Auxiliada por Computador”* ministrada pela Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado e tive a oportunidade de trabalhar com projetos que relacionavam o uso de recursos tecnológicos para o ensino de Matemática. Através da disciplina, pude desenvolver e aplicar atividades focadas na Geometria Fractal para professores da rede oficial do Estado de São Paulo utilizando software de Geometria Dinâmica.

Essas atividades me trouxeram certa inquietação sobre a possibilidade de ensinar os fractais para alunos do ensino básico. Em 2002, esse cenário começou a mudar, com a publicação pela *Coleção Tendências em Educação Matemática* do

livro **Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula** de Ruy Madsen Barbosa. O livro faz uma introdução dos fractais na Educação Matemática ao mostrar a possibilidade de explorar tal conceito em sala de aula através de softwares educacionais e de material concreto. Essa publicação me incentivou no aprofundamento da pesquisa do tema matemático e quais mídias poderiam ser utilizadas em sala de aula para trabalhar com os fractais.

A busca por um aprofundamento teórico e prático levou-me a fazer uma Pós-Graduação Lato Sensu em *Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação*, pela PUC/SP¹, da qual pude produzir a monografia intitulada por **Uma Análise Epistemológica dos Recursos Tecnológicos no Processo Ensino-Aprendizagem dos Fractais no Ensino Médio**, sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Darcy Raiça. Esta pesquisa objetivou analisar o processo de ensino e de aprendizagem dos fractais com alunos do Ensino Médio, de uma escola estadual do município de São Paulo. Para a pesquisa foram utilizados dois softwares de Geometria Dinâmica, o Cabri-Géomètre II e o Geometricks.

As atividades desenvolvidas naquela pesquisa evidenciaram que o usuário de softwares de Geometria Dinâmica deve possuir algumas habilidades e competências para que as mesmas sejam aplicadas no Ensino Médio, a falta dessas habilidades e competências pode acarretar possíveis dificuldades para o aluno que não possua o hábito de fazer construções geométricas nesses ambientes, o que é de extrema importância ao se trabalhar com fractais. Destaca-se que no Ensino Fundamental II, a disciplina de Desenho Geométrico, não consta na grade curricular da rede oficial de ensino do Estado de São Paulo.

O processo de construção de fractais em ambientes informatizados pode ser utilizado e explorado no ensino e aprendizagem de objetos matemáticos, pois tais características refletem uma possibilidade de estimular a investigação, a imaginação, a curiosidade e a fazer depurações por parte do aprendiz. Esse tipo de experiência educacional possibilita tornar uma pessoa mais dinâmica ao pensar matematicamente, e, por fim, oferece um tratamento ao processo matemático exploratório e experimental que não existe mais nos dias de hoje.

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Coordenadoria Geral de Especialização, Aperfeiçoamento e Extensão (COGEAE), campus Marquês de Paranaguá, curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação, coordenada pela Prof^a. Dr^a. Darcy Raiça. Maiores Informações em: <http://cogae.pucsp.br/curso.php?cod=117509&uni=SP&tip=RE&le=L&ID=6>.

Naquela pesquisa, pude vislumbrar, no contexto escolar, a possibilidade de explorar a Geometria Fractal na formação de professores, já que estes são personagens essenciais no ambiente de ensino e aprendizagem devido ao fato de que está em suas mãos a responsabilidade de trabalhar e desenvolver tal conteúdo. Assim, através das experiências vivenciadas naquele trabalho, possibilitou-me subsídios para a elaboração de uma pesquisa que utilizassem recursos tecnológicos na construção dos fractais a estudantes do curso de licenciatura em Matemática ou professores de Matemática.

Traçando um paralelo em relação a minha formação acadêmica, comecei a exercer a carreira docente a partir do meu terceiro ano de graduação (2000) em escolas da rede estadual de ensino no município de Rio Claro. No ano de 2004, tornei-me funcionário efetivo na mesma rede de ensino em uma escola na cidade de São Paulo. Em minha prática docente, sempre tive interesse nos conceitos matemáticos desenvolvidos no século XX, em especial na Geometria Fractal. Sempre questioneei como esse tema poderia ser inserido dentro de minha prática docente.

Após cursar a especialização, meus estudos passaram a enfocar não mais os alunos do ensino básico, mas sim o professor, através de questionamentos que giravam em torno da formação necessária para que um professor de Matemática trabalhasse com Geometria Fractal em sala de aula e as possíveis dificuldades que este profissional poderia enfrentar na abordagem deste tema.

Ao buscar uma formação de qualidade, e possíveis respostas às questões mencionadas, ingressei no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - PGEM², sob a orientação da Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado, com o apoio financeiro do Programa Bolsa Mestrado do FUNDESP³. No transcorrer do Mestrado, ao cursar as disciplinas, tive a oportunidade de conhecer autores que me proporcionaram um maior aprofundamento teórico, os quais tornaram possível a realização dessa pesquisa.

² Área de Concentração em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus Fundamentos Filosófico-Científicos, junto ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Unesp – Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” campus de Rio Claro-SP.

³ Fundo de Desenvolvimento da Educação em São Paulo.

2. Geometria Fractal como tema de estudo

Os fractais podem ser considerados como estruturas geométricas constituídos com pequena infinidade de micro-estruturas. Suas principais características são as irregularidades, a auto-semelhança, a mesma dimensão em qualquer escala e a recursividade.

Os conceitos matemáticos abstraídos dos fractais e os recursos tecnológicos que podem ser explorados no ensino básico tornam-se evidentes no trabalho realizado por Barbosa (2002), que traz uma introdução de como os professores podem inserir os fractais no ambiente educacional. Há também outras pesquisas referentes à abordagem de fractais no ensino básico tais como Eberson (2004), Gouvea (2005), Baier (2005), Baldovinotti (2006).

Em sua pesquisa, Eberson (2004) faz uma análise do processo de ensino e de aprendizagem de fractais através de ferramentas computacionais (MicroWorlds LOGO, Cabri-Gèomètre II, Geometer's SketchPad, Geometricks) e ressalta que os softwares utilizados permitem a obtenção de diferentes representações para um mesmo fractal. Essas diferentes representações derivam do fato da obtenção do fractal não ser a mesma em cada um dos ambientes explorados, por exemplo, o Geometricks se apoia no conceito de Transformações Geométricas no Plano ao construir o fractal enquanto o MicroWorlds LOGO exige a elaboração de um procedimento (em linguagem de programação) para a construção do mesmo fractal.

No trabalho desenvolvido por Gouvea (2005) é proposta uma alternativa de ensinar os fractais por intermédio de softwares de Geometria Dinâmica (iGeom e o Cabri Gèomètre II) e de caleidoscópios. Sua pesquisa obteve resultados consideráveis no processo de ensino e de aprendizagem dos fractais para alunos do curso de licenciatura em Matemática. Os resultados mencionados se referem às atividades exploradas na pesquisa, os alunos ao utilizarem os softwares de Geometria Dinâmica conseguiram de maneira intuitiva conceber os conceitos sobre limites, finitos, infinitos, progressões e leis de formação. O mesmo ocorreu nas atividades apoiadas com o uso de caleidoscópios, em que eles puderam evidenciar a existência de conceitos sobre simetrias e reflexões. Todos os conceitos matemáticos descritos estão vinculados na construção de fractais.

O estudo realizado por Baier (2005) expõe a possibilidade da inserção da Geometria Fractal no currículo tradicional do ensino básico de Matemática segundo as concepções da ciência contemporânea. Através dessas concepções, a pesquisadora faz uma reflexão sobre o ensino da Matemática nas escolas, na qual concebe como uma ciência concluída, tecnicista, previsível e com o uso excessivo de cálculos. Sua preocupação é mostrar uma percepção contrária da apresentada atualmente, a Matemática como uma ciência em construção, em que nem tudo é previsível. Em suas considerações, conclui não ser necessária a substituição de conteúdos matemáticos que constituem a grade curricular atual, mas sim, uma mudança na concepção na maneira de serem abordados em sala de aula. Essa compreensão exige uma mudança de atitude por parte do professor de matemática em promover uma efetiva construção de conhecimento para o aluno.

3. A Pesquisa

Esta pesquisa tem o objetivo **de explorar possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e, conseqüentemente, seja inserida na sala de aula da escola básica.** Tem como diretriz a seguinte pergunta:

Como estudantes de licenciatura em Matemática e professores de matemática concebem os limites e as possibilidades do ensino de Geometria Fractal na escola básica?

Responder essa pergunta significa analisar:

- Como os participantes da pesquisa concebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática;
- A interação dos participantes da pesquisa com a tecnologia informática utilizada;
- As dificuldades com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais;
- As dificuldades no ensino desse tópico na escola básica que os participantes conseguem antecipar.

Esta dissertação está organizada em seis capítulos assim divididos:

Capítulo 1 – Geometria Fractal, traz uma contextualização histórica dos fractais: sua definição matemática e uma revisão de pesquisas relacionadas ao tema no âmbito da Educação Matemática.

Capítulo 2 – Informática e Educação Matemática, situa a Informática no campo de pesquisa da Educação Matemática, apresenta os softwares o SuperLogo e o Geometricks e os conceitos envolvidos na utilização desses softwares, tais como a linguagem de programação, o micromundo, a geometria dinâmica e as considerações técnicas para a construção dos fractais.

Capítulo 3 – Materiais Manipuláveis, discute a ideia de materiais manipuláveis no campo da Educação Matemática e relaciona o seu uso na construção de fractais.

Capítulo 4 – Formação de Professores de Matemática, traz uma breve descrição dos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, as características sobre a grade curricular atual, as exigências impostas pelos órgãos oficiais e os principais conceitos relacionados ao tema da formação do professor de Matemática.

Capítulo 5 – Fundamentação Metodológica e Apresentação dos Objetos de Estudo, descreve a abordagem metodológica que norteia a pesquisa; os procedimentos utilizados na coleta de dados; as atividades desenvolvidas e apresenta os participantes.

Capítulo 6 – Análise dos Dados, apresenta a análise e a discussão dos dados referentes aos questionários e às atividades aplicadas no transcorrer da pesquisa. Para isso, foram explicitados quatro eixos temáticos: a concepção dos participantes em relação aos fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática; a interação dos participantes com a tecnologia informática utilizada; as dificuldades com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais e às dificuldades no ensino desse tópico na escola básica que os participantes conseguem antecipar. Esses eixos temáticos foram discutidos à luz da literatura apresentada nos capítulos I, II, III e IV.

Considerações Finais, retoma os aspectos relevantes desta dissertação e vislumbra possíveis desdobramentos para investigações da Geometria Fractal.

Referências Bibliográficas, apresenta a relação de livros, artigos e sites que orientaram o desenvolvimento da pesquisa.

Anexos, traz os modelos das atividades desenvolvidas; os questionários aplicados e os termos de consentimentos para utilização dos dados na pesquisa.

Apêndice, com as listas de procedimentos de programas usados no SuperLogo; a construção geométrica dos fractais elaborados no Geometricricks e orientações e comandos básicos dos softwares. Traz ainda os conceitos matemáticos explorados ao desenvolver as atividades propostas com materiais manipuláveis.

CAPÍTULO I

GEOMETRIA FRACTAL

“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”

Nikolai I. Lobachewsky

1. Introdução à Geometria Fractal

Os primeiros objetos matemáticos que hoje são considerados fractais surgiram no século XVII em trabalhos de Newton e Leibniz cujos estudos perceberam que algumas funções eram descontínuas, sem reta tangente em nenhum ponto e que outras funções possuíam singularidade: mudanças bruscas de direção que faziam a ideia de tangente se tornar sem significado.

Em 1870, Weirstrass apresentou algumas funções contínuas, porém não diferenciáveis em nenhum ponto. Quase simultaneamente, Cantor estudou um processo para transformar um segmento de reta em infinitos “pontos” que ficou conhecido como *Poeira de Cantor*. Por sua vez, Peano foi o primeiro a construir uma curva que pavimentava todo o plano. E, nessa mesma época, Poincaré estudou o sistema solar e as órbitas dos planetas e afirmou que os movimentos dos planetas geravam curvas estranhas, “caóticas”, cujas órbitas jamais se tornavam periódicas e previsíveis.

Os casos acima relatados tinham como característica em comum a autossimilaridade – uma pequena região ampliada era muito similar a uma grande, ao longo de diferentes escalas. O conceito de autossimilaridade (*self-similarity*) dos fractais significa dizer que pequenas partes da curva repetem a mesma forma da curva como um todo, ou seja, se fizermos uma ampliação de uma região de um fractal, iremos encontrar uma figura semelhante ao do fractal como um todo. Porém, nem todos os fractais apresentam essa característica em todas as escalas de ampliação da figura geométrica.

Por muitos anos, estes estudos não eram aceitos pelos matemáticos que os consideravam como “*anomalias*” ou “*monstros*”. Em 1958, o polonês Benoit Mandelbrot com o suporte da empresa IBM, desenvolveu uma análise matemática sobre os ruídos eletrônicos nas linhas telefônicas em rede entre os computadores, e começou a perceber as hierarquias de flutuações de todos os tipos que não podiam ser descritos pelos modelos estatísticos existentes naquele momento. Para resolver esse problema recorreu ao trabalho de George Cantor.

Ao longo de sua pesquisa, Mandelbrot desenvolveu novas ideias matemáticas e também alguns dos primeiros programas de computador para desenvolver gráficos sobre o problema mencionado acima, sendo seu trabalho publicado em livros como *Os Objetos Fractais: Forma, Acaso e Dimensão*⁴ (1975) e em *A Geometria Fractal da Natureza*⁵ (1982).

Em 1975, o próprio Mandelbrot formalizou uma geometria na qual os trabalhos descritos anteriormente recebem uma nova interpretação, chamada ***Geometria Fractal***. Este novo campo das ciências matemáticas vem tendo uma enorme aplicação em diversas áreas. Para os biólogos, por exemplo, ajuda a compreender o crescimento das plantas; para os físicos, possibilita o estudo de superfícies intrincadas (distribuição das galáxias); para os médicos, permite uma visão da anatomia interna do corpo (doenças crônicas e outros campos da medicina); na engenharia, nas comunicações telefônicas (ruídos); na arte (pinturas); na matemática (conceitos geométricos); na economia (economia de ações e de mercado); ou seja, uma infinidade de fenômenos na natureza e em outras áreas.

⁴ Les objets Fractals: forme, hasard et dimension.

⁵ The Fractal geometry of nature.

Com a Informática, a Geometria Fractal teve um grande desenvolvimento científico, principalmente em suas representações gráficas, tornando-se mais conhecida nos diversos setores da sociedade.

Na área educacional, o estudo de fractais está presente em algumas propostas curriculares de escolas de ensino fundamental e médio. Através de seu estudo, é possível ilustrar diversos conceitos básicos da Matemática como, por exemplo, área, volume, perímetro, progressões, números complexos, logaritmos, polinômios etc.

1.1. O que é a Geometria Fractal?

O estudo dos fractais está ligado à Teoria do Caos, que busca padrões organizados de comportamento e formas dentro de um sistema aparentemente aleatório (SPADOTTO, 2000). Peterson e Branderhorst (1993, p. 12) definem que

um Sistema Dinâmico é uma coleção de partes que interagem uma com as outras, e se modificam mutuamente, com o passar do tempo. Um Sistema Dinâmico é considerado *Caótico*, se pequenas modificações iniciais do sistema produzirem, posteriormente, grandes modificações no mesmo.

Segundo Spadotto (2000), os fractais podem ser representados por estruturas geométricas com pequena infinidade de micro-estruturas. Apresentam características como irregularidades, autossimilaridade, mesma dimensão em qualquer escala, complexidade infinita e são gerados por processos recursivos. De um modo geral, nem sempre são observáveis todas estas características em um mesmo fractal, ocorrendo somente no caso dos “*fractais clássicos*” como, por exemplo, o Triângulo de Sierpinski e a Poeira de Cantor.

É importante notar que Mandelbrot (1975), em seu livro “*A Geometria Fractal da Natureza*” formaliza o assunto apresentando os fractais com as seguintes características fundamentais: autossimilaridade, mesma dimensão em qualquer escala e lacunaridade.

A Geometria Fractal pode ser considerada uma geometria não euclidiana por causa da formalização de sua dimensão. A dimensão inteira é a utilizada pela geometria euclidiana na qual a reta, o plano e o espaço possuem, respectivamente, dimensão um, dois e três. Na Geometria Fractal esta dimensão é fracionada, ou seja, ela está entre as dimensões euclidianas.

Assim sendo, pode-se definir com rigor matemático os conceitos mencionados anteriormente, referente ao que é um fractal e suas características fundamentais como a autossimilaridade e a dimensão fractal. Segue então tais definições.

Definição 1. Um conjunto S tem dimensão topológica k se cada ponto em S tem uma vizinhança arbitrariamente pequena a qual encontra S em um conjunto de dimensão $(k-1)$, onde k é o menor inteiro não negativo.

Os exemplos 1 e 2 abaixo ilustram um fractal de dimensão topológica.

Exemplo 1. Pontos dispersos isolados tem dimensão topológica 0, desde que cada ponto pode ser cercado por “vizinhanças” arbitrariamente pequenas, dos quais as fronteiras são disjuntos do conjunto.

Exemplo 2. Um segmento de reta contido no plano tem dimensão topológica 1, desde que bolas abertas pertencentes ao plano tem fronteiras que encontram o segmento em um ou dois pontos similarmente.

Definição 2. Um Fractal é subconjunto de $\mathbb{R}^n$ o qual é autossimilar e sua dimensão fractal excede sua dimensão topológica.

Definição 3. Um conjunto S é autossimilar se S puder ser subdividido em k subconjuntos congruentes, onde cada um pode ser ampliado por um fator constante M para se transformar no conjunto todo S .

Podemos calcular a dimensão de um fractal da seguinte forma:

Suponhamos o conjunto S autossimilar então sua dimensão fractal (D) de S como sendo

$$D = \frac{\log(k)}{\log(M)}, \text{ onde } k = \text{número de pedaços}$$

$M = \text{fator de magnitude}$

1.1.1. Dimensão Fractal

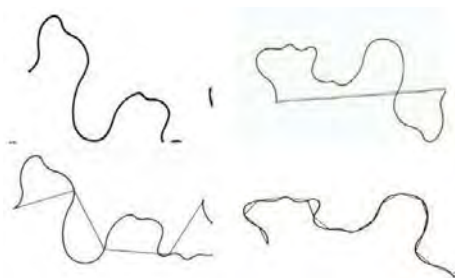
Entre as características que definem um fractal, uma das principais é a Dimensão Fractal. Ao contrário do que é observado na Geometria Euclidiana, em que o valor da dimensão representa a dimensionalidade do espaço em que um objeto está inserido, a Dimensão Fractal representa o nível de irregularidade de um fractal (BACKES, BRUNO, 2005, p. 2).

Essa diferença entre as definições faz com que a Dimensão Fractal venha assumir valores fracionários, o que diferencia dos valores inteiros encontrados para as dimensões Euclidianas. O fato de a dimensão fractal ser um valor fracionário deve-se por ela representar o nível de ocupação do espaço pela forma e não o espaço em si onde a forma está contida. Sendo assim, quanto maior a irregularidade de uma forma, maior é a sua dimensão fractal. Essa característica da dimensão fractal a torna uma ferramenta muito útil para a comparação de duas formas fractais.

A literatura fornece diversas abordagens para se estimar o cálculo da dimensão fractal de um objeto ou imagem. No entanto, a grande maioria delas baseia-se na Dimensão de Hausdorff.

A Dimensão de Hausdorff considera uma linha de comprimento L e outra de comprimento u , de modo que seja $L > u$. Sobrepondo a linha u sobre a linha L até cobri-la completamente, encontra-se um valor $N = \frac{L}{u}$, que nada mais é do que uma medida da linha.

Figura 1. Comprimento L de uma curva



Fonte: ALMEIDA, 2006, p. 46

Do mesmo modo que foi feito para a linha, pode-se medir de maneira similar um quadrado de lado L cobrindo-o com pequenos quadrados de lado u , obtendo-se

a relação $N = \left(\frac{L}{u}\right)^2$.

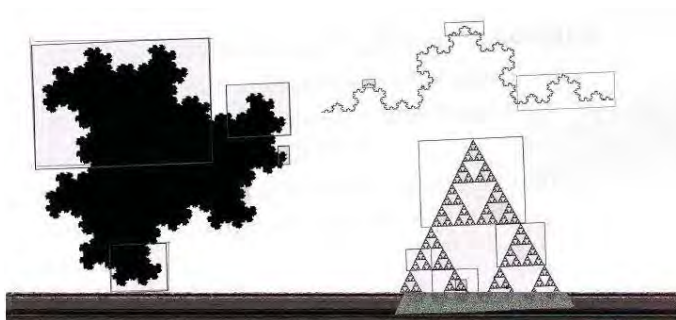
A generalização desse processo conduz para a relação $N = \left(\frac{L}{u}\right)^D$, aplicando o logaritmo de ambos os lados, e desenvolvendo os membros dessa igualdade temos que $D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)}$, em que D é a dimensão fractal de Hausdorff do objeto observado.

1.1.2. Autossimilaridade

O conceito de autossimilaridade (*self-similarity*) dos fractais significa dizer que pequenas partes da curva repetem a mesma forma da curva como um todo, ou seja, se fizer uma ampliação de uma região de um fractal, irá encontrar uma figura semelhante ao do fractal como um todo. Porém, nem todos os fractais apresentam essa característica em todas as escalas de ampliação da figura geométrica.

A autossimilaridade é o resultado de empregar a mesma regra num processo recursivo. Quando uma pequena parte de um fractal é similar ao todo, denomina-se que ele é autossemelhante. Um objeto autossemelhante geralmente é um fractal, mas nem todos os fractais são autossemelhantes (ALMEIDA, 2006, p. 48).

Figura 2. Autossimilaridade dos fractais



Fonte: ALMEIDA, 2006, 48

O conceito da autossimilaridade pode ser empregado tanto para os fractais como também em objetos encontrados na natureza, o que provoca uma distinção em dois grupos: os fractais exatos que são gerados por processos recursivos e os fractais naturais, cuja propriedade de autossimilaridade ocorre apenas aproximadamente. Um exemplo de fractal considerado natural é a ramificação de um galho de árvore, conforme ilustrado na figura 3:

Figura 3. *Galho de árvore*



Fonte: GOUVEA, 2005, p. 55

Em alguns vegetais encontrados na natureza essa propriedade se manifesta, assemelhando-se às estruturas fractais. Nas figuras 4, 5 e 6 são apresentados alguns exemplos que ilustram a situação mencionada.

Figura 4. *Brócolis*



Disponível: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>. Acesso: em 01 nov. 2010

Figura 5. *Couve flor*



Disponível: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>. Acesso: em 01 nov. 2010

Figura 6. *Brócolis tipo Romanesco*



Disponível: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/capitulos/capitulo2/modulo4/topico6.php>. Acesso: em 01 nov. 2010

Os objetos naturais podem exibir uma estrutura semelhante ao fractal, porém com uma estrutura de tamanho limitado, o que impede de considerá-los como um fractal, pois os mesmos possuem estruturas infinitas.

1.1.2.1. Classificação dos fractais por autossimilaridade

Os fractais podem ser classificados de acordo com sua autossimilaridade. Existem três tipos de autossimilaridade encontrados em fractais, são eles:

- *Autossimilaridade exata*: é a forma em que a autossimilaridade é mais evidente. O fractal é idêntico em diferentes escalas. Os fractais gerados por processo recursivo geralmente apresentam esse tipo de característica.
- *Quase autossimilaridade*: é uma forma mais flexível de autossimilaridade. O fractal aparenta ser aproximadamente idêntico em diferentes escalas. Os fractais quase autossimilares são constituídos por pequenas cópias do fractal original de maneira distorcida ou degenerada. Os fractais definidos por relações de recorrência são geralmente quase autossimilares.
- *Autossimilaridade estatística*: é a forma menos evidente de autossimilaridade. O fractal possui medidas numéricas ou estatísticas que são preservadas em diferentes escalas. Os fractais aleatórios são exemplos de fractais que possuem autossimilaridade estatística.

1.1.3. Lacunaridade

A lacunaridade constitui uma medida baseada no grau de invariância a translação que um fractal apresenta. Ela caracteriza a maneira como os pixels estão distribuídos e organizados em uma determinada região da imagem, ou seja, ela quantifica como o espaço está ocupado, diferente da dimensão fractal que mede o quão ocupado está o espaço. De fato, a lacunaridade pode ser compreendida como um complemento da dimensão fractal, uma vez que objetos com a mesma dimensão fractal podem apresentar diferentes valores para a lacunaridade (BACKES; BRUNO, 2006, p. 3).

A lacunaridade é encontrada medindo-se a distribuição espacial dos buracos existentes na imagem. Por meio dela é possível quantificar a homogeneidade de uma imagem ou de parte dela, de modo a torná-la comparável com outras imagens.

1.1.4. Tipos de Fractais

No livro *Descobrimos a Geometria Fractal para a sala de aula*, Barbosa (2002) classifica os fractais em categorias que levam em consideração a forma de obtê-los. A construção de qualquer fractal é um processo recursivo, ou seja, sempre um determinado procedimento infinitamente, o que, em nosso caso, é um processo geométrico. As categorias são as seguintes:

1. **Fractais pela fronteira** – o procedimento para construção dos fractais é gerar um processo recursivo sobre a linha poligonal da figura geométrica geradora do fractal;

Figura 7. Curva de Kock

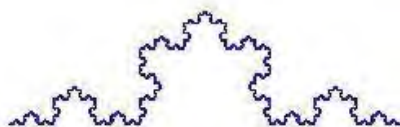
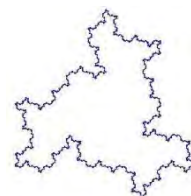
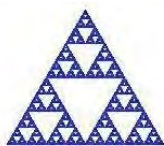
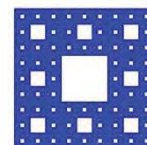


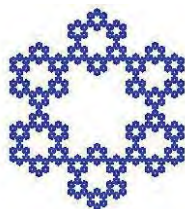
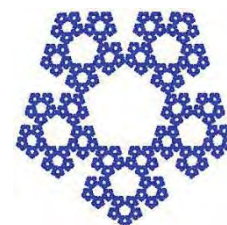
Figura 8. Ilha de Kock Alternada



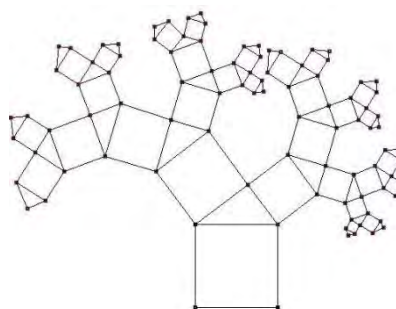
2. **Fractais por remoção** – o procedimento para criação destes fractais é a remoção de regiões internas semelhantes da figura inicial (figura geométrica geradora do fractal);

Figura 9. *Triângulo de Sierpinski***Figura 10.** *Carpete de Sierpinski*

- 3. *Fractais tipo Dürer*** – o procedimento para a obtenção dos fractais consiste em fazer as interações do mesmo polígono regular em seus vértices num processo recursivo.

Figura 11. *Hexágono de Dürer***Figura 12.** *Pentágono de Dürer*

- 4. *Fractais tipo árvore*** – o procedimento para a criação dos fractais é gerar imagens semelhantes à de uma árvore.

Figura 13. *Fractal Árvore Pitagórico Fundamental*

Além dessas categorias, pode-se definir e acrescentar outras que não foram mencionadas por Barbosa (2002) em seu livro. Seriam as seguintes:

- 5. *Fractais por expansão*** – o procedimento é expandir polígonos para a região exterior da figura inicial que diferencia das categorias

anteriores, pois a figura geométrica geradora do fractal é constituída por mais de uma figura geométrica.

Figura 14. *Fractal por expansão*



Figura 15. *Fractal por expansão*



- 6. *Fractais algébricos*** – são obtidos por equações matemáticas não-lineares e não por figuras geométricas regulares, com um grau de complexidade superior aos fractais citados anteriormente. Baseiam-se em sequências numéricas reais ou complexas, em sistemas de funções e representação gráfica de pontos no sistema cartesiano, em que suas concepções acerca do comportamento de sistemas dinâmicos não-lineares estão apoiadas na Teoria do Caos.

Por exemplo: $z_{n+1} = z_n^2 + c$: onde z e c são números complexos, ou na forma $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2 + c$. (GOUVEA, 2005, p. 58)

Figura 16. *Conjunto de Mandelbrot*

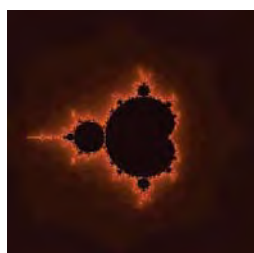


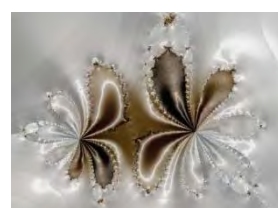
Figura 17. *Conjunto de Julia*



Figura 18. *Arte Fractal*



Figura 19. *Arte Fractal*



Fonte: Absynth Fractals. Disponível:
<http://paginas.terra.com.br/arte/absybt/index.htm>
 . Acesso: em 17 jun. 2007

Fonte: Absynth Fractals. Disponível:
<http://paginas.terra.com.br/arte/absybt/index.htm>
 . Acesso: em 17 jun. 2007

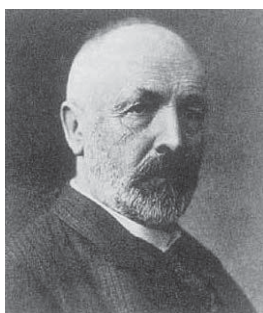
1.2. Alguns personagens que influenciaram o desenvolvimento da Geometria Fractal

Desde a sua formalização, em 1975, Mandelbrot é considerado o pai da Geometria Fractal. Mas, antes dele outros matemáticos como Georg Cantor (1872), Helge Von Koch (1904), Waclaw Sierpinski (1916), David Hilbert (1891), Giuseppe Peano (1890), dentre outros, criaram formas estranhas que desafiavam o enquadramento nas definições convencionais da geometria euclidiana e, por isso, foram chamados “*monstros matemáticos*” ou “*casos patológicos*”. De fato, as criações desses matemáticos influenciaram o conceito de Mandelbrot de uma nova geometria, entretanto, eles não pensavam que seus estudos serviriam como alicerces conceituais de uma nova percepção ou de uma nova geometria.

Geralmente, esses fractais partem de uma figura inicial que será definida por “Iniciador”. O iniciador pode ser qualquer figura geométrica regular, como por exemplo, segmentos de retas, triângulos, quadrados, pentágonos, etc. Em seguida, outra figura que deve ser definida é a do “Gerador”. O gerador é qualquer figura geométrica que é utilizada no processo de recursividade de geração do fractal.

1.2.1. Georg Cantor (1845 – 1918)

Figura 20. *George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*



Disponível: http://pt.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor. Acesso: em 16 nov. 2009

Georg Cantor, matemático, nascido na Rússia, adotou nacionalidade alemã, foi professor da Universidade de Halle, dedicou muito de seus estudos em pesquisas

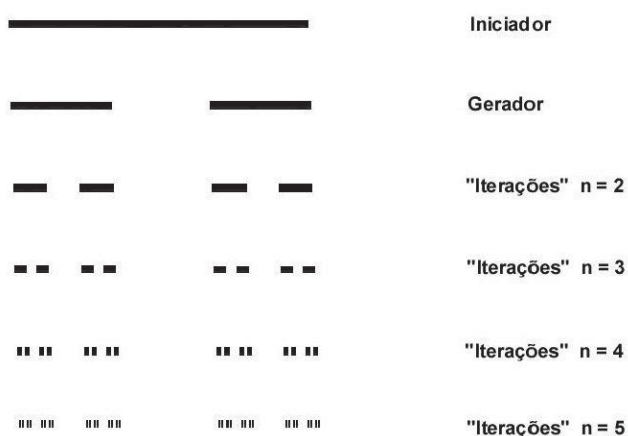
à fundamentação da matemática, principalmente a área hoje conhecida como Teoria dos Conjuntos. Foi ele o primeiro matemático a estudar, ao final do século XIX, essa teoria.

Cantor se destacou por apresentar ideias altamente inovadoras sobre o conceito de infinito. Em 1883, publicou um trabalho no qual é construído um conjunto, chamado hoje “*Conjunto de Cantor*”.

O “*Conjunto de Cantor*” é um dos objetos mencionados em quase todas as bibliografias relacionadas sobre Geometria Fractal. Este fractal, que está relacionado ao trabalho mais relevante de Cantor – a Teoria dos Conjuntos, o conjunto de Cantor possui características matemáticas bastante incomuns. Por este fato, dentre os primeiros fractais que surgiram, ele pode ser considerado o mais importante.

A construção desse fractal parte de um segmento de reta com comprimento unitário que é subdividido em três partes iguais. Ao realizar tal divisão, a parte central do segmento dado é retirada, e o mesmo processo se repete nos dois segmentos restantes, e assim sucessivamente. A figura 21 mostra a concepção de construção desse fractal.

Figura 21. Concepção de construção do conjunto de Cantor



Fonte: EBERSON, 2004, p. 26

Para o cálculo da dimensão desse fractal deve-se focar no processo de sua construção. Então, dado um segmento de reta com comprimento unitário de medida L igual a um. Em que, para cada etapa efetuada é obtido dois novos segmentos de reta sobre o segmento de reta original, logo temos $N = 2$. Por outro lado, observa-se

que cada segmento de reta é dividido em três partes congruentes, logo a razão u é $\frac{1}{3}$. Segue então que a dimensão fractal do conjunto de Cantor é:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)} = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong \frac{0,3010}{0,4771} \cong 0,6309$$

Logo, a dimensão fractal do Conjunto de Cantor é $D = 0,6309$. À vista disso o Conjunto de Cantor é o conjunto de pontos que permanecem após infinitas interações. Ao observar essas fases, o leitor pode ser induzido a aceitar que os pontos extremos do segmento unitário pertencem ao conjunto final de pontos. De certo modo, o “comprimento” do conjunto de Cantor é zero.

1.2.2. Helge Von Koch (1870 – 1924)

Figura 22. *Helge Von Koch*



Disponível: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m308/projects/fung/page.html>. Acesso: em 17 nov. 2009

Pouco se conhece da vida de Helge Von Koch, matemático sueco, que em 1904 e 1906, introduziu duas curvas que hoje recebem o seu nome. Doutorou-se em Matemática pela Universidade de Estocolmo (1892) e suas obras de maior destaque foram as seguintes:

- Em uma curva contínua sem tangente, obtida por uma construção geométrica elementar⁶. In: *Arkiv für Mathematik* 1 (1904), 681-704;

⁶ Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire.

- Um método elementar geométrico por curvas planas⁷. In: Acta Mathematica 30 (1906), 145-174.

Uma das possíveis motivações de Koch para desenvolver suas curvas foi expor uma curva que é contínua e não diferenciável, isto é, uma curva que não tem tangentes em nenhum de seus pontos. Esta descoberta, já tinha sido feita anteriormente por Weierstrass, causou uma crise no Cálculo que se centrava na ideia de diferencial inventada por Newton e Leibnitz, pois mostrou que uma curva, embora contínua, não é diferenciável em qualquer de seus pontos.

Ambas as curvas, intituladas “Curva de Koch” e “Floco de Neve” possuíam características fora do padrão da época de sua divulgação. A curva de Koch é uma curva limitada com comprimento infinito enquanto o Floco de Neve é uma figura geométrica regular composta por uma área finita limitada por um perímetro infinito (EBERSON, 2004, p. 27).

O fractal conhecido como Curva de Koch possui um segmento de reta de medida m como figura inicial e o seu processo recursivo consiste em dividir este segmento em três partes congruentes em que o segmento central é retirado e substituído por dois lados de um triângulo equilátero, como é mostrado na figura 23.

Figura 23. Concepção da construção da Curva de Koch

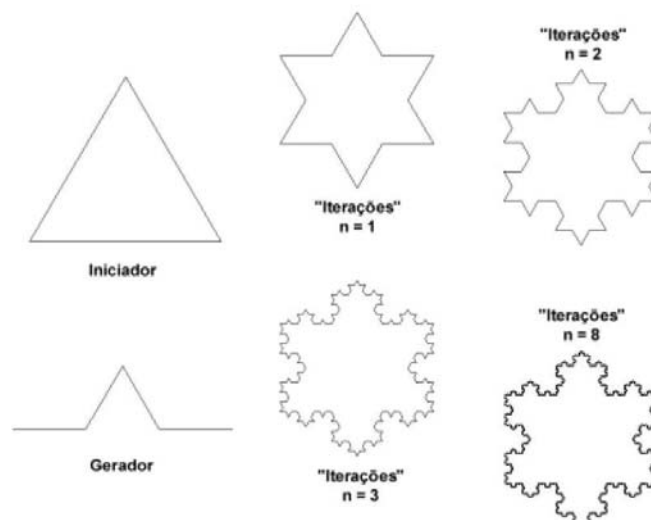


Fonte: EBERSON, 2004, p. 27

O Floco de Neve de Koch possui um triângulo equilátero de lado l como figura inicial e o mesmo processo de recursividade da Curva de Koch. As características desse fractal são de possuir uma figura regular fechada de lados e perímetros infinitos cercando uma área finita. A figura 24 mostra a concepção de construção desse fractal.

⁷ Une methode géométrique élémentaire pour courbes planes.

Figura 24. Concepção de construção do Floco de Neve de Koch



Fonte: EBERSON, 2004, p. 28

As dimensões do Floco de Neve e da Curva de Koch são iguais, já que ambos têm o mesmo processo recursivo, tanto o segmento gerador da Curva de Koch como cada um dos lados do triângulo gerador do Floco de Neve são substituídos por quatro segmentos de reta congruentes ($N = 4$), com um terço do comprimento do segmento de reta original $\left(u = \frac{1}{3}\right)$, logo:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)} = \frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \frac{0,6021}{0,4771} \cong 1,2619$$

O que tornou os fractais de Koch interessantes para grandes matemáticos de sua época é o aspecto mais abstrato de suas construções. No fim do século XIX, a ênfase no rigor levou numerosos matemáticos à produção de exemplos de funções “patológicas”, como por exemplos, a Curva e o Floco de Neve de Koch, por possuir alguma propriedade fora do padrão da época violavam um teorema que antes se suponha válido em geral. Houve grande preocupação entre alguns analistas renomados de que o estudo aprofundado de tais casos especiais desviaria matemáticos mais jovens da busca de respostas às questões abertas mais importantes daquele período.

Essa situação pode ser contextualizada no que o matemático Hermite dizia que ele evitava “com medo e horror essa praga lamentável de funções sem derivadas”. Já o também matemático Poincaré que fora aluno de Hermite e compartilhava da mesma preocupação de seu mestre ao afirmar que “se inventava uma nova função era com algum objetivo prático, agora se inventa unicamente para apontar falhas no raciocínio” (BOYER, 1998, p. 429).

1.2.3. Waclaw Sierpinski (1882 – 1969)

Figura 25. Waclaw Sierpinski



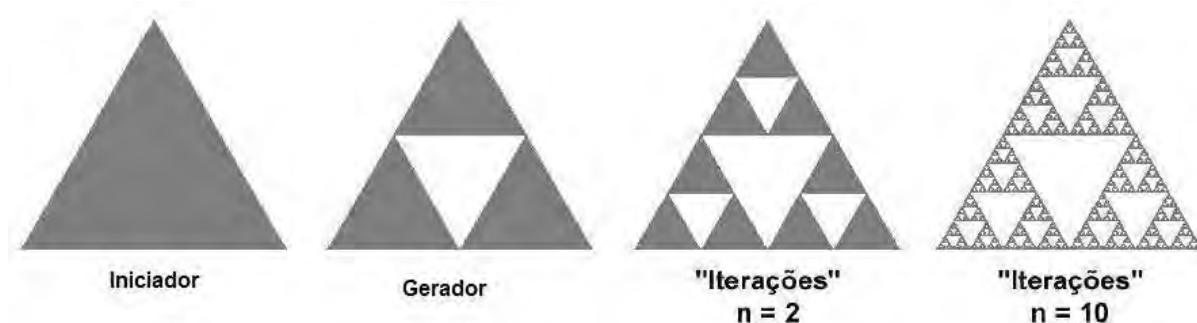
Disponível: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/PictDisplay/Sierpinski.html>. Acesso: em 8 jan. 2010

Sierpinski, matemático polonês, foi professor em Lvov e Wariaw. Foi um dos mais influentes matemáticos na Polônia e obteve reputação mundial, principalmente nas décadas de 20 e 30. Tal reputação permitiu que uma das crateras da Lua recebesse seu nome em forma de homenagem. Em sua obra publicada em 1916, em uma curva Cantoriana que contém uma imagem biunívoca e contínua de uma curva qualquer⁸, Comptes Rendus da Academia de Ciências de Paris, apresenta um dos mais famosos fractais, o **Triângulo de Sierpinski**.

A concepção da construção do triângulo de Sierpinski começa com um triângulo equilátero. O processo recursivo desse fractal consiste do seguinte modo: inicialmente, os pontos médios de cada um dos lados do triângulo são marcados; em seguida, os pontos médios são unidos por um segmento, que divide o triângulo original em quatro novos triângulos menores e semelhantes; o triângulo central é retirado e o mesmo processo é realizado em cada um dos três triângulos que sobram, e assim, sucessivamente. A figura 26 mostra a concepção de construção desse fractal.

⁸ Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée.

Figura 26. Concepção de construção do Triângulo de Sierpinski



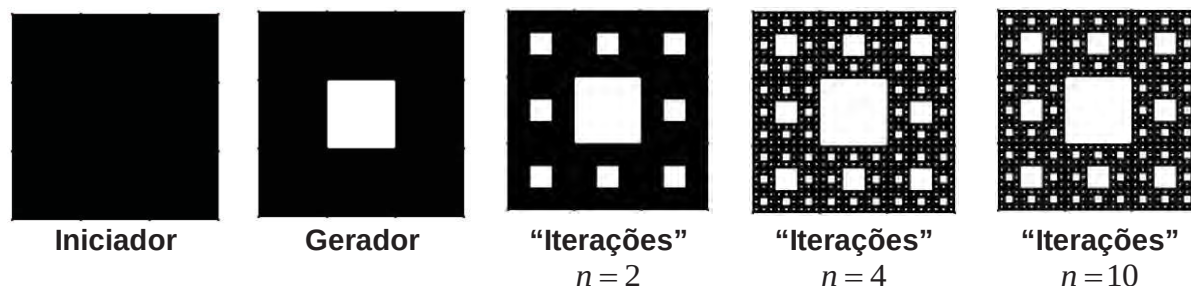
Fonte: EBERSON, 2004, p. 30

A dimensão do Triângulo de Sierpinski é obtida ao se analisar o processo recursivo desse fractal, que possui três segmentos de reta congruentes ($N = 3$), com metade do comprimento do segmento de reta original $\left(u = \frac{1}{2}\right)$, logo:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)} = \frac{\log 3}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong \frac{0,4771}{0,3010} \cong 1,5850$$

O Tapete de Sierpinski é de certa forma, uma versão análoga do triângulo de Sierpinski. O processo recursivo desse fractal consiste que dado um quadrado de lado l que é dividido em nove quadrados de lados $\frac{l}{3}$ do qual é retirado o quadrado central, repete-se o mesmo processo aos oito quadrados restantes e assim sucessivamente. A figura 27 ilustra a concepção de construção desse fractal.

Figura 27. Concepção de construção do Tapete de Sierpinski

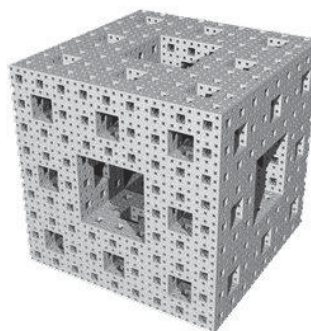


A dimensão do Tapete de Sierpinski é obtida ao se analisar o processo recursivo desse fractal, que possui quatro segmentos de reta congruentes ($N = 4$), com um terço do comprimento do segmento de reta original $\left(u = \frac{1}{3}\right)$, logo:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)} = \frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \frac{0,6021}{0,4771} \cong 1,2619$$

Existe um sólido geométrico análogo ao Tapete de Sierpinski que é conhecido por Esponja de Menger. A figura 28 exibe o sólido geométrico.

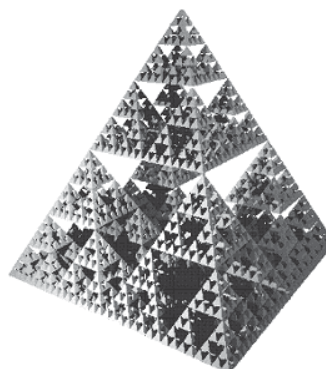
Figura 28. *Esponja de Menger*



Disponível: <http://bitacora-de-blas-herrera.blogspot.com/>. Acesso: em 28 jul. 2010

Como também há um sólido geométrico análogo ao Triângulo de Sierpinski que é conhecido como Tetraedro de Sierpinski. A figura 29 exibe o sólido geométrico.

Figura 29. *Tetraedro de Sierpinski*



Disponível: <http://sabia.tic.udc.es/gc/Contenidos%20adicionales/trabajos/Imagenyvideo/fractales/sierpinski.htm>. Acesso: em 28 jul. 2010

1.2.4. Henri Poincaré (1854 – 1912)

Figura 30. Jules Henri Poincaré



Disponível: <http://www.mlahanas.de/Physics/Bios/HenriPoincare.html>. Acesso: em 9 jan. 2010

Henri Poincaré nasceu na França, foi matemático, físico e filósofo da ciência francesa. Conhecido por ser o último universalista da disciplina de Matemática. Ele é considerado um dos precursores do estudo moderno dos Sistemas Dinâmicos e seus estudos sobre órbitas planetárias possibilitaram a concepção das propriedades fundamentais do Caos.

Entre os seus trabalhos mais importantes destacam-se os três volumes de *Os novos métodos da mecânica celeste* (*Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*), publicados entre 1892 e 1899, e *Lições de mecânica celeste* (*Léçons de mécanique céleste*) publicado em 1905. Vale mencionar que escreveu numerosas obras de divulgação científica que atingiram uma grande popularidade, como *Ciência e hipótese* (1902), *O valor da ciência* (1904) e *Ciência e método* (1908).

1.2.5. Giuseppe Peano (1858 – 1932)

Figura 31. Giuseppe Peano



Disponível: <http://www.geometriafractal.com/protagonistes.htm>. Acesso: em 9 jan. 2010

Peano, matemático italiano, nascido em Cuneo. Foi professor da Academia Militar de Turim, onde trabalhou também Joseph Louis Lagrange (1775). Considerado o fundador da lógica simbólica, tinha como foco de interesse os fundamentos da matemática e o desenvolvimento de uma linguagem lógica formal.

Ele era interessado em linguagens universais, por isso, criou a linguagem artificial *Interlingua* (1903), o vocabulário desta língua era formado por palavras do inglês, do francês, do alemão e do latim. Esse código de linguagem foi aprimorado posteriormente por Alexander Gode.

Teve como obras principais: Princípios de cálculo diferencial e integral⁹ (1884), Lições de análise infinitesimal¹⁰ (1893), Aplicações geométricas do cálculo infinitesimal¹¹ (1887) e Cálculo geométrico¹² (1888). Os dois primeiros trabalhos citados, são considerados os mais importantes no desenvolvimento da teoria geral das funções depois dos estudos do matemático francês Augustin Cauchy. Na terceira obra, ele introduziu os elementos básicos do cálculo geométrico e deu novas definições para o cálculo do comprimento de um arco e para a área de uma superfície curva. A última obra mencionada, é seu primeiro trabalho em Lógica Matemática. Peano é considerado como fundador dessa lógica por ter criado um sistema de símbolos que permite a descrição e o enunciado das proposições lógicas e matemática sem recorrer à linguagem cotidiana.

Em 1890, ao tratar do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, publica a sua famosa curva, um dos mais conhecidos fractais, a **curva de Peano**.

A Curva de Peano apresenta duas características marcantes: a primeira é que preenche completamente o plano, e a segunda refere-se à necessidade de existir uma infinidade de pontos nos quais ela se intercepta. Através da interceptação desses pontos é possível determinar a trajetória que o fractal produz. Esta trajetória pode ser orientada por setas que permitem a elaboração de um diagrama com o objetivo de mostrar seu fluxo. A figura 32 mostra essa trajetória orientada.

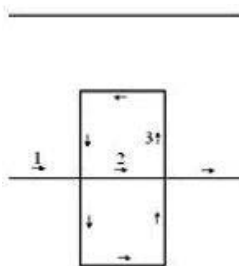
Figura 32. Trajetória da curva de Peano

⁹ Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale.

¹⁰ Lezioni di analisi infinitesimale.

¹¹ Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale.

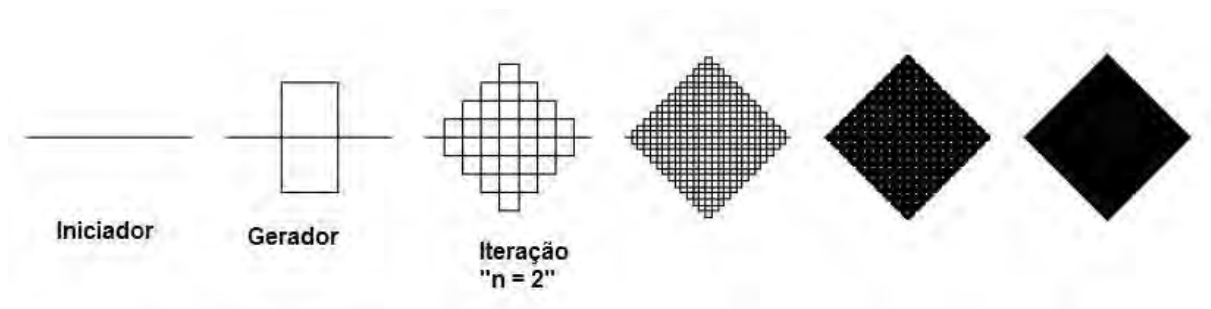
¹² Calcolo geometrico.



Fonte: ALMEIDA, 2006, p. 54

A concepção da construção da Curva de Peano inicia-se com um segmento de reta de medida m e em seguida colocam-se os nove segmentos de reta de comprimento $\frac{m}{3}$. A figura 33 mostra o processo de obtenção da curva de Peano.

Figura 33. Concepção da construção da Curva de Peano original



Fonte: ALMEIDA, 2006, p. 54

O cálculo da dimensão fractal da Curva de Peano deve-se ao seu processo de recursividade, que é formado por nove segmentos de reta congruentes ($N = 9$), tendo um terço do comprimento do segmento de reta original ($u = \frac{1}{3}$), logo:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)} = \frac{\log 9}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)} = \frac{\log 9}{\log 3} \cong \frac{0,9542}{0,4771} \cong 2$$

O matemático Peano ao construir as primeiras curvas tinha o interesse de elaborar curvas contínuas capazes de preencher totalmente o plano, Boyer (1998, p. 415) faz uma reflexão sobre isso dizendo que

o século dezenove se iniciou com a descoberta de que curvas e funções não precisam ser do tipo bem comportado que até dominara o campo, e

Peano em 1890 mostrou até que ponto a matemática podia insultar o senso comum quando construiu curvas contínuas que encham o espaço – isto é, curvas dadas por equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, onde f e g são funções reais contínuas no intervalo $0 \leq t \leq 1$, cujos pontos preenchem completamente o quadrado unitário $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Esse paradoxo, é claro, combina perfeitamente com a descoberta de Cantor de que não há mais pontos no quadrado unitário que no segmento de reta unitário [...]

Algumas curvas são denominadas como “curvas de Peano” por possuírem características semelhantes à curva elaborada pelo matemático Peano. Porém, a maioria delas não foi desenvolvida por ele, logo tal denominação é utilizada para representar um conjunto de curvas que possuem características comuns ao invés de fazer referencia ao seu criador.

1.2.6. David Hilbert (1862 – 1943)

Figura 34. *David Hilbert*



Disponível: <http://professorglobal.cbpf.br/cursos/datas/website-rev/davidhilbert.htm>. Acesso: em 26 out. 2010

David Hilbert foi matemático alemão que contribuiu com ideias brilhantes em diferentes áreas da Matemática. Nasceu em Königsberg, atualmente Kaliningrado, onde fez seus estudos na faculdade. Em 1895 foi nomeado professor para a Universidade de Göttingen, onde ele ensinou até se aposentar, em 1930. Hilbert é considerado como um dos maiores matemáticos do século XX, o que permite ser comparado a Henri Poincaré. Ele propôs uma lista de vinte e três problemas importantes abertos, alguns dos quais não foram resolvidos até hoje, no Congresso Internacional de Matemática em Paris em 1900, o que resultou em grande enriquecimento para a matemática.

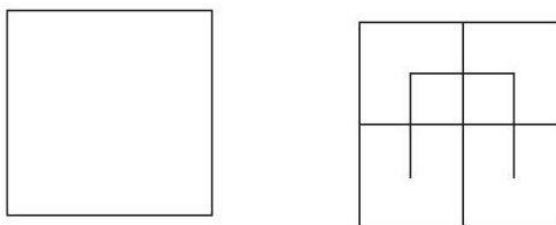
Em 1891, ele descreveu uma curva fractal contínua que ficou conhecida como “Curva de Hilbert”. É uma curva que passa por todos os pontos de um quadrado,

assim, ela pertence a uma família das curvas de Peano, porém possui diferenças sutis que a tornam única. Primeiramente, a cada iteração do seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas ela nunca se intercepta.

Outra característica importante é que a curva passa por todos os pontos de uma superfície, e através do seu processo de recursividade o comprimento dessa curva é infinito.

Com o auxílio de alguns diagramas, pode-se determinar a trajetória dessa curva. Inicie com um quadrado unitário de medida 1 e divida-o em quatro quadrados congruentes, unindo os pontos centrais destes, conforme é mostrado na figura 35.

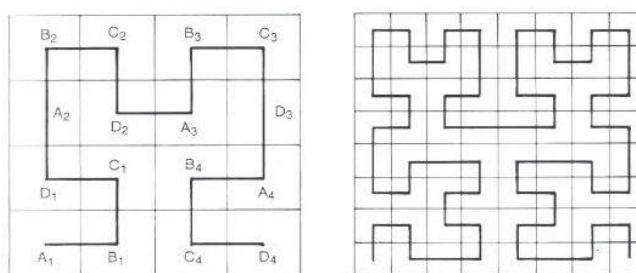
Figura 35. Estágios iniciais da Curva de Hilbert



Fonte: ALMEIDA, 2006, p. 56

O segundo estágio de construção da curva consiste em subdividir cada um dos quatro quadrados menores do estágio anterior em outros quatro quadrados congruentes e unir os pontos centrais desses novos dezesseis quadrados conforme é apresentado na figura 36.

Figura 36. Segundo estágio da Curva de Hilbert

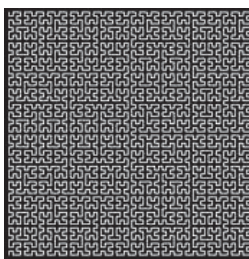


Fonte: ALMEIDA, 2006, p. 57

Ao repetir esse processo recursivo novamente, subdividiram-se cada um dos dezesseis quadrados da figura anterior em quatro quadrados congruentes e unindo os pontos centrais desses 64 quadrados é formada uma terceira curva. A curva de

Hilbert é obtida ao fazer a generalização desse processo recursivo. A figura 37 mostra essa generalização da curva.

Figura 37. *Curva de Hilbert*



Disponível: <http://www.abreijosensamblador.net/html/Pags/Cap32.html>. Acesso: em 27 out. 2010

O cálculo da dimensão fractal da curva de Hilbert deve-se ao seu processo de recursividade, que é formado por quatro quadrados congruentes ($N = 4$), tendo a metade do lado do quadrado original ($u = \frac{1}{2}$), logo:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{L}{u}\right)} = \frac{\log 4}{\log\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)} = \frac{\log 2^2}{\log 2} = \frac{2 \cdot \log 2}{\log 2} = 2$$

Ao construir essa curva que, topologicamente, equivale a uma linha, mas é tão contorcida que ocupa exatamente toda a área de um quadrado, tem então que a curva comporta-se como um objeto bidimensional.

1.2.7. Gaston Maurice Julia (1893 – 1978)

Figura 38. *Gaston Maurice Julia*

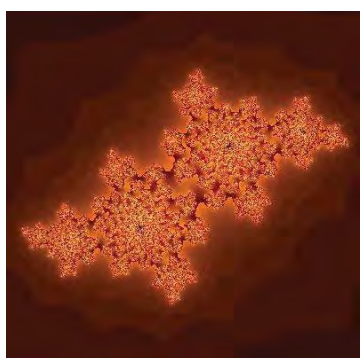


Disponível: www.math.sunysb.edu/~zakeri/mat542/men/Julia.jpeg. Acesso: em 21 jun. 2010

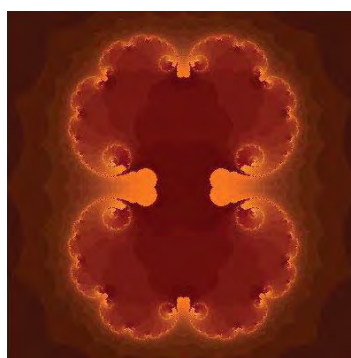
Julia nasceu na Argélia e faleceu em Paris, aos 85 anos. Lutou na Primeira Guerra Mundial, e durante uma batalha ele perdeu o nariz, o que obrigou, até a sua morte, a utilizar uma tira de couro para cobrir a região afetada do rosto.

Ganhou certa popularidade por seu trabalho matemático, publicado em 1918, na revista *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, intitulado Memória sobre as interações de funções racionais¹³ nesse artigo discutia a interação de função racional, pelo qual recebeu o Grande Prêmio da Academia de Ciências da França. Apesar do reconhecimento, seus estudos acabaram no esquecimento até serem resgatados, muitos anos depois, pelo polonês Benoit Mandelbrot, por coincidência fora professor da mesma Escola Politécnica de Paris, onde Gaston Julia havia sido professor.

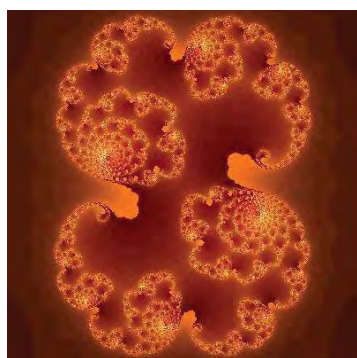
Figura 39. *Variações do Conjunto de Julia*



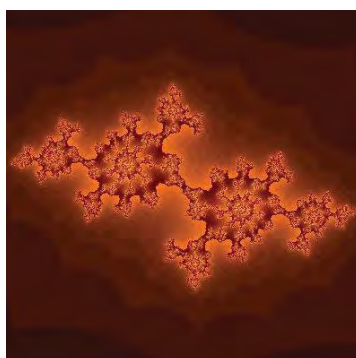
Conjunto de Julia para $c = -0,4 + 0,6i$



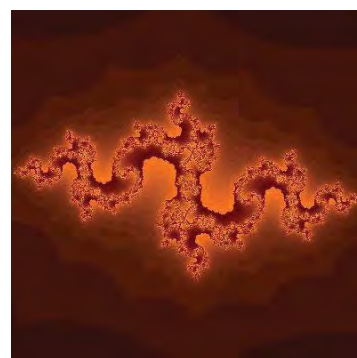
Conjunto de Julia para $c = 0,285 + 0i$



Conjunto de Julia para $c = 0,285 + 0,01i$



Conjunto de Julia para $c = -0,70176 - 0,3842i$



Conjunto de Julia para $c = -0,835 - 0,2321i$

¹³ Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles.

O conjunto de Julia de uma função holomórfica f consiste informalmente dos pontos cujo comportamento, em um período, sob iteração repetida de f não muda drasticamente sob pequenas perturbações.

Funções holomorfas são o objeto central do estudo da análise complexa. Estas funções são definidas sobre um subconjunto aberto do plano de número complexo $\mathbb{C}$ com valores em $\mathbb{C}$ que são diferenciáveis em cada ponto.

A frase "holomorfa em um ponto a " significa não só diferenciável em a , mas diferenciável em algum disco aberto centrado em a , no plano complexo. Por definição, seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$ e $f:U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função, dizemos que f é *complexa diferenciável* ou *C-diferenciável* no ponto z_0 de U se o limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ existir. Se } f \text{ é complexa diferenciável em cada ponto } z_0$$

em U , dizemos que f é *holomorfa em U* .

O conjunto de Fatou de f é o complementar do conjunto de Julia, isto é, consiste do conjunto de pontos com comportamento estável. Esses conjuntos receberam esses nomes em homenagem aos matemáticos franceses Gaston Julia e Pierre Fatou, que iniciaram a teoria de dinâmica complexa no começo do século XX.

1.2.8. Pierre Joseph Louis Fatou (1878 – 1929)

Figura 40. *Pierre Joseph Louis Fatou*



Disponível: www.math.sunysb.edu/~zakeri/mat542/men/Fatou.jpeg. Acesso: em 23 jun. 2010

Pierre Fatou foi matemático e astrônomo francês que trabalhou no campo da dinâmica complexa. Ingressou na Escola Normal Superior de Paris em 1898 para estudar Matemática e se graduou em 1901. Por acreditar que não teria muitas chances em conseguir um cargo de matemático, preferiu se candidatar a um cargo

no Observatório de Paris. Após ter sido nomeado ao cargo de astrônomo, ele começa a desenvolver sua tese.

Em 1906, ele apresenta sua pesquisa fundamentada na teoria da integração e na teoria de função complexa. Fatou provou que se uma função é Lebesgue integrável, então os limites radiais para a integral de Poisson correspondente existem em quase toda parte. Em 1907, ele doutorou-se baseado nesse trabalho.

Posteriormente, Fatou estudou as iterações de funções de variáveis complexas. Em particular, propôs o problema $z_{n+1} = z_n^2 + c$, com $z_0 = 0$ e $c \in \mathbb{C}$ fixado, que foi, mais tarde, analisado em computador por Benoit Mandelbrot, para gerar representações gráficas do comportamento destas séries para cada ponto C , no plano complexo – atualmente conhecido por conjunto de Mandelbrot.

Em 1915, a Academia de Ciências em Paris, propôs um tema para o seu Grande Prêmio de 1918. O prêmio deveria ser atribuído a um estudo da interação de um ponto de vista global. Fatou escreveu um livro de memórias que usou a ideia de famílias normais para desenvolver a teoria fundamental da iteração em 1917.

Dado que o tema havia sido proposto para o prêmio, não é surpreendente que outros matemáticos também produziram trabalhos sobre o tema, e, certamente, Julia também produziu um livro de memórias sobre a teoria de um modo semelhante ao de Fatou. Os dois, no entanto, escolheram caminhos diferentes para seguirem. Durante o segundo semestre de 1917, Julia depositou seus resultados em envelopes lacrados com a Academia de Ciências. Enquanto Fatou, por outro lado, publicou um anúncio de seus resultados em uma nota, em 1917, para integrar parte do *Comptes Rendus*. Mais tarde ficou evidente que eles tinham descoberto resultados muito semelhantes.

Julia escreveu uma carta ao *Rendus* que foi publicada em 1917. Ele pediu à Academia de Ciências para inspecionar seus envelopes lacrados e Georges Humbert foi o encarregado de realizar tal tarefa. No mesmo dia, Georges Humbert da *Rendus* já possuía a carta de informação sobre os papéis de Julia. Quase certamente, por consequência dessas cartas Fatou não pode concorrer para o Grande Prêmio, no qual o trabalho de Julia foi o premiado. O esforço de Fatou não se perdeu completamente, pois a Academia de Ciências deu-lhe um prêmio por seu papel relevante sobre o tema.

Fatou recebeu o título de "astrônomo", em 1928 e, como astrônomo, ele também fez contribuições a esse tópico. Entre as contribuições realizadas, pode-se destacar que ele usou os teoremas de existência para as soluções de equações diferenciais, provou rigorosamente certos resultados sobre as órbitas planetárias que Gauss tinha sugerido por verificar-se através de um argumento intuitivo e estudou o movimento de um planeta em um meio resistente, com a intenção de poder explicar como estrelas gêmeas se formariam com a captura de uma movendo-se na atmosfera do outra.

1.2.9. Felix Hausdorff (1868 – 1942)

Figura 41. *Felix Hausdorff*



Disponível: http://pt.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff. Acesso: em 23 jun. 2010

Felix Hausdorff foi matemático alemão. Ele nasceu em Breslau, hoje Wrocław, na Polônia, é considerado um dos fundadores da topologia moderna e contribuiu de maneira significativa para a teoria dos conjuntos, a teoria da medida, a teoria da função e a análise funcional.

Escreveu o livro Aspectos básicos da teoria dos conjuntos¹⁴ (1914) que influenciou a teoria dos conjuntos. A primeira parte do livro é uma exposição sistemática das características da teoria dos conjuntos, em que a natureza dos elementos não tem importância; só as relações entre os elementos são importantes. Na segunda parte do livro, há um desenvolvimento claro dos “*espaços topológicos de Hausdorff*” a partir de uma coleção de axiomas. Por espaço topológico Hausdorff entende um conjunto E de elementos x e certos subconjuntos S_x chamados de

¹⁴ Grundzüge der Mengenlehre

vizinhanças de x . Assume-se que as vizinhanças satisfazem aos quatro seguintes “axiomas de Hausdorff”:

1. Para cada ponto x corresponde ao menos uma vizinhança $U(x)$, e cada vizinhança $U(x)$ contém o ponto x .
2. Se $U(x)$ e $V(x)$ são duas vizinhanças do mesmo ponto x , existe uma vizinhança $W(x)$ que é subconjunto das duas.
3. Se o ponto y pertence a $U(x)$, existe uma vizinhança $U(y)$ que é subconjunto de $U(x)$.
4. Para dois pontos diferentes x e y existem duas vizinhanças $U(x)$ e $U(y)$ sem pontos em comuns.

Vizinhanças assim definidas permitiram a Hausdorff introduzir o conceito de continuidade. Com axiomas adicionais, ele pode desenvolver as propriedades de vários espaços mais particulares, tais como o espaço euclidiano.

Esse livro marca o surgimento da topologia dos conjuntos de pontos como disciplina separada. A topologia emergiu no século XX como um tema que unifica quase toda a matemática, um tanto como a filosofia procura coordenar todo o conhecimento. Por causa de seu primitivismo, a topologia está na base de uma parte muito grande da matemática, conferindo-lhe uma inesperada coesão (BOYER, 1998, p. 433).

De origem judia, Hausdorff estudou na Universidade de Leipzig, onde se doutorou em 1891. Ele ensinou matemática em Leipzig até 1910, quando se tornou professor de matemática na Universidade de Bonn. Foi-lhe oferecido um posto em Göttingen, mas surpreendentemente ele não aceitou. Também fora professor em Greifswald de 1913 até 1921, quando ele retorna para Bonn.

Quando os nazistas chegaram ao poder, Hausdorff, que era judeu, achou que por ser um professor universitário respeitado ele seria poupado de tal perseguição. Entretanto, sua matemática abstrata foi denunciada como "judeu" e "não-alemães", e ele perdeu a sua posição em 1935. Embora ele já não pudesse publicar na Alemanha, Hausdorff continuou a ser um matemático de pesquisa ativa, publicando no jornal polaco *Fundamenta Mathematicae*.

Em 1938, com a perseguição de judeus, Hausdorff se tornou mais isolado. Ele escreveu a George Polya solicitando uma bolsa de pesquisa nos Estados Unidos, mas esses esforços não deram resultado. Finalmente, em 1942, quando ele já não podia evitar de ser enviado para um campo de concentração, Hausdorff cometeu suicídio juntamente com sua esposa e de sua cunhada.

Hausdorff também publicou obras filosóficas e literárias com o pseudônimo de "Paul Mongré". "Paul Mongré" publicou uma série de livros e artigos sobre o filósofo Friedrich Nietzsche, bem como uma série de revisões da literatura contemporânea e teatro. Mongre-Hausdorff também publicou uma peça satírica que realizou em uma dúzia de cidades alemãs. No decorrer das tentativas de refutar a doutrina de Nietzsche do "eterno retorno do mesmo", Hausdorff foi levado à teoria dos conjuntos de Cantor, que estabeleceu Hausdorff no caminho para suas descobertas da teoria de conjuntos.

1.2.10. Benoit Mandelbrot (1924 – 2010)

Figura 42. *Benoit Mandelbrot*



Disponível: http://www.santarita.g12.br/maticos/gm3/benoit_mandelbrot.htm. Acesso: em 15 fev. 2010

Mandelbrot, matemático, de origem polonesa, estudou na Escola Politécnica de Paris. Mudou-se da França em 1948, para estudar Ciência Aeroespacial nos Estados Unidos.

A grande contribuição de Mandelbrot foi o de propor um novo conceito de geometria que ficou conhecida como Geometria Fractal. O objetivo desse novo conjunto de objetos foi minimizar as lacunas existentes pela Geometria Euclidiana no que diz respeito às formas encontradas na natureza.

O conjunto de Mandelbrot é o seu fractal mais famoso, ele é constituído por um conjunto de números complexos definidos a partir de uma função dinâmica. Esta

função define um processo recursivo para uma sequência de números complexos que é a seguinte:

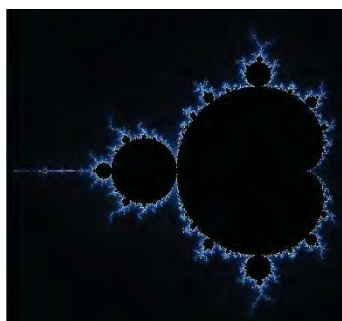
$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2 + c$, onde z e c são números complexos

A construção do Conjunto de Mandelbrot se baseia no uso de sequências de números complexos. Os números complexos são representados na forma $z = a + bi$, onde a e b são números reais e $i = \sqrt{-1}$. A representação gráfica de um número complexo é representada por um ponto no plano cartesiano – o Plano Argand-Gauss – cujas coordenadas têm a parte real no eixo das abscissas e a parte imaginária no eixo das ordenadas.

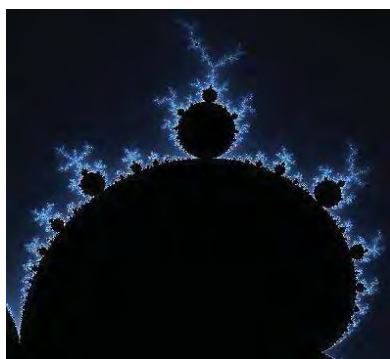
O conjunto de Mandelbrot representa um teste investigativo se um determinado número complexo pertence ou não ao conjunto. Se o número testado produzir um determinado regime de comportamento, ele pertence ao conjunto de Mandelbrot, caso contrário, não pertence.

Esse regime de comportamento é constituído da seguinte forma: se a sequência assumir valores finitos no decorrer das sucessivas iterações, há um número que pertence ao conjunto. Caso contrário, se o número escolhido tende para o infinito no decorrer das iterações, ele não pertence ao conjunto.

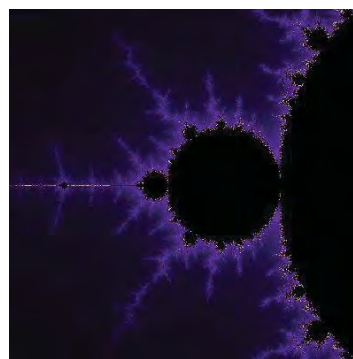
Figura 43. *Conjunto de Mandelbrot e ampliações*



Conjunto de Mandelbrot



Ampliação do Conjunto de Mandelbrot 1



Ampliação do Conjunto de Mandelbrot 2

De uma maneira mais simplificada, pode-se determinar que todos os números complexos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot são gerados uma sequência de valores na vizinhança da origem do plano de Argand. O processo recursivo para determinar esses números define que todos os valores da sequência gerada por um determinado número complexo “ c ” permaneçam no interior de um círculo fixado centro da origem do plano e raio de medida dois, ou seja, se um número complexo qualquer gerar uma sequência que possua algum termo que esteja fora do círculo, pode-se afirmar que esta sequência tenderá para o infinito (EBERSON, 2004, p. 40).

1.3. O uso de fractais na Educação

A representação gráfica dos fractais pode estimular um estudante de matemática para pesquisar a fim de compreender melhor os conceitos que possibilitem os efeitos visuais interessantes (BARBOSA, 2002).

Há livros didáticos para o ensino fundamental e médio que, embora em muitos casos não utilizem explicitamente a denominação fractal, trazem exemplos de fractais entre os conteúdos matemáticos que podem ser utilizados pelo professor para trabalhar o tema fractal em sala de aula.

Por exemplo, num livro indicado para a primeira série do ensino médio, Dante (2004), apresenta os exemplos reproduzidos nas figuras 44 e 45.

Figura 44. *A soma infinita dos termos da progressão geométrica*

Progressões

Exemplo:
Vamos calcular o limite da soma dos termos da progressão geométrica

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, n \in \mathbb{N}^*.$$

Neste caso, $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$ e temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1$. Isso significa que quanto maior for n , a soma $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ será mais próxima de 1.

Veja uma interpretação geométrica desse fato considerando a área da região quadrada ao lado igual a 1. Inicialmente vamos hachurar $\frac{1}{2}$ dela, depois $\frac{1}{4}$, depois $\frac{1}{8}$, e assim por diante. Continuando esse procedimento indefinidamente, estaremos nos aproximando da área total da região quadrada, que é 1.



Para Refletir
 $S_1 = \frac{1}{2}$
 $S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
 $S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ tende a 1.

Fonte: DANTE, 2004, p. 241

Figura 45. A soma infinita de termos da progressão geométrica utilizando o fractal

44. A medida do lado de um triângulo equilátero é 10. Unindo-se os pontos médios de seus lados obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo-se os pontos médios dos lados desse novo triângulo equilátero obtém-se um terceiro, e assim por diante, indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros de todos esses triângulos.

Resolução:
 Perímetro do 1º triângulo = 30
 Perímetro do 2º triângulo = 15
 Perímetro do 3º triângulo = $\frac{15}{2}$...

Devemos calcular a soma dos termos da PG infinita $(30, 15, \frac{15}{2}, \dots)$ na qual $a_1 = 30$ e $q = \frac{1}{2}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q} = \frac{30}{1-\frac{1}{2}} = \frac{30}{\frac{1}{2}} = 60$$

Portanto, a soma dos perímetros é 60.



Para Refletir
 Nessas condições, os perímetros sempre formam uma PG infinita de razão $\frac{1}{2}$.

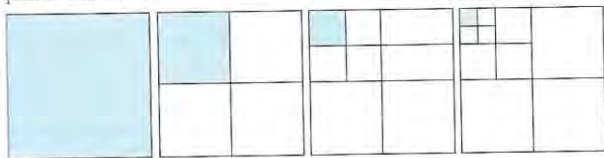
243

Fonte: DANTE, 2004, p. 243

Também num livro para a primeira série do ensino médio, Iezzi et al (2004), abordam o conceito de séries geométricas convergentes em dois exercícios conforme mostram as figuras 46 e 47.

Figura 46. Exemplo de série geométrica convergente usando um fractal

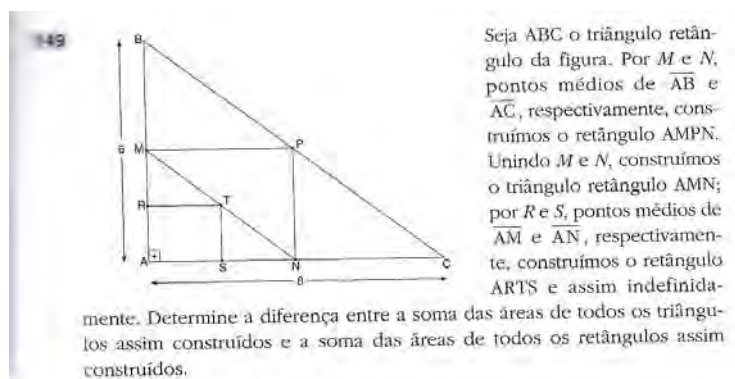
448 (U. F. Pelotas-RS) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtém-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura abaixo, que mostra parte de uma sequência infinita.



a) Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados dessa sequência infinita.
 b) Calcule a soma das medidas das diagonais desses infinitos quadrados.

Fonte: IEZZI et al, 2004, p. 297

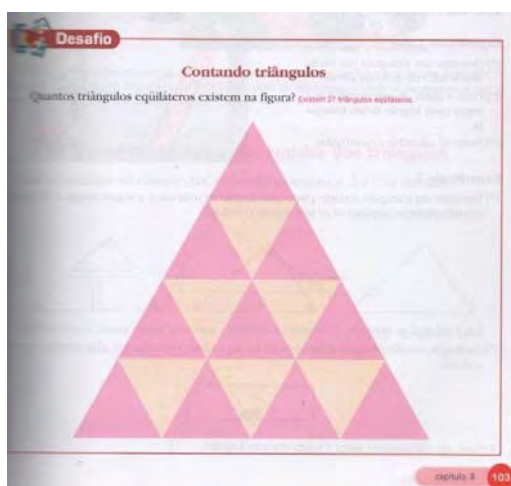
Figura 47. Exemplo de séries geométricas convergentes empregando o conceito de fractais



Fonte: IEZZI et al, 2004, p. 297

Num livro indicado para o 7º ano do ensino fundamental, Iezzi, Dolce e Machado (2005), abordam o conceito de contagem de figuras geométricas no exercício reproduzido na figura 48.

Figura 48. Exemplo de fractais no ensino fundamental



Fonte: IEZZI, DOLCE, MACHADO, 2004, p. 103

Já o livro para a segunda série do ensino médio, de autoria de Barreto Filho e Silva (2003), utiliza a palavra fractal para contextualizar o conceito de sistemas de equações, conforme ilustra na figura 49.

Figura 49. Contextualização da Geometria Fractal para sistemas de equação



Fonte: BARRETO FILHO, SILVA, 2003, p. 177-178



A inserção do estudo de fractais no currículo escolar pode contribuir para o que os PCN do Ensino Médio¹⁵ chamam de interdisciplinaridade, uma vez que permite associar os diversos conceitos matemáticos existentes com os de outras áreas de aplicação já citados anteriormente nesse trabalho, tornam-se uma fonte riquíssima a ser explorada em sala de aula pelo professor de Matemática juntamente com os seus alunos e até mesmo ser tema de um trabalho envolvendo vários professores. Tal fato fica evidente no que o PCN do Ensino Médio (1999, p. 203) diz que

[...] o aprendizado de suas disciplinas, ao manifestarem a busca de interdisciplinaridade e contextualização e ao detalharem, entre os objetivos educacionais amplos desse nível de ensino, uma série de competências humanas relacionadas a conhecimentos matemáticos e científico-tecnológicos. Referenda-se uma visão do Ensino Médio de caráter amplo, de forma que os aspectos e conteúdos tecnológicos associados ao aprendizado científico e matemático sejam parte essencial da formação cidadã de sentido universal e não somente de sentido profissionalizante.

O estudo dos fractais pode propiciar conhecimento para o estudante da disciplina de matemática e vão ao encontro do que o PCN DO Ensino Médio (1999, p. 251) diz quando

¹⁵ Parâmetros Curriculares Nacionais.

em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

A proposta curricular da Secretária de Educação do Estado de São Paulo evidencia os mesmos pontos em que os fractais podem contribuir para a disciplina de matemática ao dizer que

[...] Matemática é considerada um meio para o desenvolvimento de competências tais como a capacidade de expressão pessoal, de compreensão de fenômenos, de argumentação consistente, de tomada de decisões conscientes e refletidas, de problematização e enraizamento dos conteúdos estudados em diferentes contextos e de imaginação de situações novas (2008, p.44)

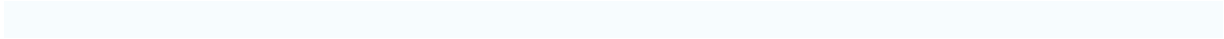
Os conceitos matemáticos que se pode abstrair dos fractais e os recursos tecnológicos que se pode utilizar na sala de aula ficam evidentes na discussão apresentada por Barbosa (2002) sobre como os professores poderiam explorar os fractais no ambiente educacional. O estudo dos fractais ganha impulso com o desenvolvimento da Informática, em especial com os softwares existentes de Geometria Dinâmica, de Manipulação Algébrica e de Programação, os quais podem ser utilizados para auxiliar na familiarização do tema específico.

O uso de software é fundamental, pois a falta deste recurso pedagógico pode dificultar a sua exploração. Dessa forma, a utilização desses programas em sala de aula torna-se quase que imprescindível e deixa o assunto mais enriquecedor para o aluno, já que na maioria dos casos não é possível investigar os fractais só por meio de materiais manipuláveis.

Embora as pesquisas de Gouvea (2005), de Baier (2005), de Eberson (2004) e de Baldovinotti (2006) recomendem explorar os fractais em sala de aula, isso quase não ocorre, pois são poucos os professores que tiveram oportunidade de estudar o tema no seu curso de licenciatura ou mesmo em cursos de formação continuada. Isto acarreta um desconforto ao docente, já que a insegurança em relação ao assunto inibe seu ensino na escola.

O atual cenário só poderá ser modificado se os centros formadores de professores de Matemática passarem a abordar o tema. Porém, para isso ocorrer é

preciso mais pesquisas sobre como isso pode ser feito. É nesse sentido que consideramos as contribuições da pesquisa aqui apresentada.



CAPÍTULO II

INFORMÁTICA, MATERIAIS MANIPULATIVOS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

“Se ouço, esqueço; se vejo, lembro; se faço, compreendo”
(Provérbio chinês)

Numa sociedade dominada pelo conhecimento e pela tecnologia, a escola é obrigada a repensar o seu papel, principalmente nas questões relacionadas ao ensino e aprendizagem. Diante do grande desenvolvimento da tecnologia informática, o seu uso tem sido discutido para fins pedagógicos. Nesse capítulo, apresento algumas das ideias relacionadas a esse uso e softwares que podem ser utilizados para o estudo da Matemática, em especial, o da Geometria Fractal. Além disso, apresento uma abordagem teórica sobre materiais manipulativos. Descrevo os aspectos fundamentais em utilizar materiais didáticos em sala de aula e na formação inicial e continuada do professor de matemática.

2. Tecnologia Informática e Educação

A sociedade atual obriga uma nova forma de pensar e agir para lidar com a rapidez e o excesso de informações. Surge uma nova organização de tempo e espaço que exigem um posicionamento crítico e reflexivo do indivíduo para fazer suas escolhas e redefinir prioridades. E nesse contexto pode-se definir que “a

melhor forma de ensinar é aquela que propicia aos alunos o desenvolvimento de competências para lidar com as características da sociedade atual, que enfatiza a autonomia do aluno para a busca de novas compreensões” (PRADO, 2005, p.55).

Com o uso do computador no ambiente escolar cria-se uma oportunidade de provocar mudanças no processo de ensino e de aprendizagem que Valente (1993, p. 40-41) descreve como

um novo paradigma que promove a aprendizagem ao invés do ensino, que coloca o controle do processo de aprendizagem nas mãos do aprendiz, e que auxilia o professor a entender que a educação não é somente a transferência do conhecimento, mas um processo de construção do conhecimento pelo aluno [...]. O objetivo da introdução do computador na educação não deve ser o modismo ou estar atualizado com relação às inovações tecnológicas. Esse tipo de argumentação tem levado a uma subutilização do potencial do computador que, além de economicamente dispendiosa, traz poucos benefícios para o desenvolvimento intelectual do aluno.

O comprometimento do aluno no processo de aprendizagem torna-se fundamental. A escola deve permitir a possibilidade de buscar sentido no que constitui o foco dos estudos em cada atividade apresentada e explorada em sala de aula.

Nesse cenário, a tecnologia é um elemento bastante expressivo, tornando-se necessário compreender melhor a inserção do seu uso no processo de ensino e de aprendizagem no ambiente escolar. Essa compreensão é que permite ao professor integrar a tecnologia à atividade docente. Porém, inúmeras vezes essa integração tem um olhar equivocado, a tecnologia acaba sendo incorporada nas atividades docentes apenas num sentido de instrumentação. Contrapondo a essa perspectiva, a tecnologia deve ser incorporada à sala de aula a fim de buscar a construção de conhecimento.

Partindo desse aspecto, é importante que o professor conheça as potencialidades e limitações pedagógicas envolvidas nas diferentes tecnologias, sejam elas: o vídeo, a Internet, o computador, os softwares, entre outras. O importante é que cada uma delas tenha sua própria especificidade e que sejam complementadas com outros recursos. Pode-se afirmar que a “tecnologia configura-se por uma multiplicidade de recursos distintos, os quais devem ser considerados para que seu uso seja significativo para os envolvidos e pertinente ao contexto” (PRADO, 2005, p.55).

Dentre os elementos que contribuem para o desenvolvimento de atividades de informática na Educação, em especial na Educação Matemática, o professor merece um papel de destaque, pois ele é fundamental para favorecer a interação do aluno com o computador no ambiente escolar. A formação do profissional de educação será imprescindível para explorar o potencial do uso do computador em sala de aula.

O computador pode ser uma ferramenta auxiliar no processo de aprendizagem em que o aluno passa a agir como o construtor de seu próprio conhecimento (VALENTE, 1993).

Torna-se, então, primordial para o docente, uma reflexão prévia de como usar esse tipo de tecnologia no processo de ensino e de aprendizagem, Valente (2005, p. 24) faz uma reflexão sobre esse uso dizendo que

a distinção entre uma abordagem educacional que privilegia a transmissão de informação e uma abordagem que enfatiza o desenvolvimento de projetos e a construção de conhecimento coloca os educadores entre dois pólos que não podem ser vistos como antagônicos. [...]. O importante é que haja um movimento entre essas duas abordagens pedagógicas de forma articulada, propiciando ao aluno oportunidades de construção do conhecimento.

O professor além de se preocupar com o modo de usar o computador em sala de aula deve analisar o software que será utilizado, pois este é a ligação entre o aluno e a máquina no processo de aprendizagem. Se ao planejar uma atividade ou projeto, o software aplicado não for adequado ao que se pretende fazer, os objetivos propostos ficarão comprometidos e os alunos serão prejudicados no seu processo de aprendizagem.

As novas tecnologias, em especial, a informática (computador e softwares educacionais), são de extrema importância no processo de construção e obtenção dos fractais, já que com o seu advento no século XX, é possível construir, visualizar e deslumbrar a representação gráfica dos fractais. A utilização desse recurso é essencial no desenvolvimento das atividades propostas, já que sua ausência dificulta bastante a construção geométrica dos fractais.

2.1. Implicações para o professor

O professor tem um papel de destaque em ambientes informatizados, já que sua inserção em sala de aula dependerá da natureza da prática desse profissional, como ele relaciona a tecnologia aos diversos elementos que compõem a sua atividade profissional tais como as propostas pedagógicas, os recursos técnicos, as peculiaridades da disciplina que se ensina a direção, a supervisão, os educadores de professores, experiências anteriores com essas tecnologias informáticas, entre outras.

Grande parte dos educadores desenvolve suas práticas de ensino de maneira que quase tudo seja controlado, de fácil previsibilidade e de resultado conhecido que se caracteriza por um ambiente de *conforto* (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 54), muito deles reconhecem que a forma como estão atuando não favorece a aprendizagem do aluno e não explora a tecnologia de maneira significativa.

Quando o professor apoiado nas tecnologias informáticas aceita desenvolver suas práticas em cenários cujo objetivo é a investigação e fica menos resistente a um ambiente em que predominam a incerteza e a imprevisibilidade, dizemos que ele se encontra numa *zona de risco*.

Segundo Borba e Penteado (2001), a *zona de risco* provoca a perda de controle, causada pela decorrência de problemas técnicos e da diversidade de rumos e dúvidas que surgem quando os alunos trabalham com o computador.

Os problemas técnicos podem impedir parcialmente ou na totalidade a realização de uma atividade, por exemplo, um professor pode correr o risco de ter que alterar todo o seu plano de aula ao se deparar com problema de configuração das máquinas no laboratório de informática devido à utilização anteriormente a aula prevista, por outro grupo de alunos.

Quando não existem problemas de ordem técnica e o professor consegue desenvolver a atividade prevista, podem surgir ou não, questionamentos imprevisíveis ocasionados por uma combinação de apertar de botões ou de arrastar de um mouse. Estas situações demandam uma análise e compreensão mais aprofundada do ocorrido pelo professor e que talvez não tenha uma resposta imediata ao aluno, podendo provocar um constrangimento ao professor por não saber responder.

Ao decidir que a tecnologia informática será incorporada na prática docente, torna-se necessário rever a relevância da utilização de tudo que se encontra

disponível para a realização de sua prática. Ao desenvolver uma atividade é preciso avaliar, qual é o seu objetivo e saber se ela não pode ser desenvolvida com uma melhor qualidade por outro software específico, obrigando a uma reflexão sobre o emprego da tecnologia na sala de aula.

À medida que se evolui a tecnologia informática, confrontamo-nos com uma necessidade de atualização de nossos conhecimentos em relação ao conteúdo na qual ela será incorporada. Um professor de matemática ao utilizar uma calculadora, um computador ou qualquer outro recurso tecnológico pode se deparar com uma necessidade de ampliar suas ideias matemáticas e também buscar novas alternativas de trabalho com os alunos.

A inserção de Tecnologia Informática no ambiente escolar tem mostrado ser um potencializador para se romper a hegemonia das disciplinas e de impulsionar a interdisciplinaridade. Diante desse fato, o professor é desafiado constantemente a rever e atualizar seu conhecimento. Quanto mais ele se insere no mundo da informática, mais ele corre o risco de se deparar com uma situação matemática, por exemplo, que não lhe é familiar. Entretanto, o processo de integração do computador à prática docente, pela complexidade que apresenta, pode ocasionar reflexões de natureza diversa, por exemplo, o professor pode perceber que não consegue ser detentor de todo o conhecimento necessário para trabalhar com os alunos (BORBA; PENTEADO, 2001, p. 63).

Se existir essa reflexão por parte do professor antes de aplicar as atividades propostas por ele, tornar-se possível desenvolver mecanismos que possibilitem a separação entre diferentes ambientes informatizados, no que diz respeito aos potenciais específicos nos quais cada um deles pode contribuir nas diferentes etapas do processo de ensino e aprendizagem do aluno (EBERSON, 2004, p. 63).

A Geometria Fractal é um exemplo de tema matemático que permite realizar, conceitualmente, uma análise através de um conjunto de ferramentas com o objetivo de verificar as características de um ambiente informatizado em função a um determinado domínio de conhecimento matemático.

2.2. Linguagem de programação LOGO

A linguagem de programação LOGO foi desenvolvida no Massachusetts Institute of Technology (MIT), por Seymour Papert e colaboradores, em meados dos anos 60 para ser utilizada com finalidades educacionais. Do ponto de vista computacional, LOGO é uma linguagem que possui características pertencentes a três paradigmas computacionais distintos: o procedural, o orientado a objetos e o funcional. Caracterizado por uma linguagem de propósito geral, do tipo procedural, permite ao usuário resolver problemas, definindo programas a partir do seu conjunto de ações (comandos e operações) em diferentes domínios do conhecimento e níveis de escolaridade (do Ensino Fundamental I ao Ensino Superior). Também considerada uma linguagem interpretada, ou seja, para um mesmo problema proposto existem diferentes soluções, depende somente do conhecimento tácito de quem o manipula, assim possibilita ao usuário uma interação enriquecedora com o seu programa computacional, facilitando a verificação e as resoluções eventuais de problemas de implementação (erro de sintaxe ou de lógica de programa), bem como o desenvolvimento de novas hipóteses que podem gerar outros tipos de programas diferentes do original proposto.

A característica fundamental do LOGO é o equilíbrio entre a sofisticação computacional e o acesso facilitado à atividade de programação. Esta facilidade se deve a uma terminologia simples em termos de nomes de comandos, de regras sintáticas e de uma parte gráfica caracterizada pela presença de um cursor representado pela figura de uma Tartaruga que pode ser deslocada no espaço da tela através de alguns comandos relacionados ao deslocamento e giro da mesma.

Do ponto de vista pedagógico, o LOGO está fundamentado numa abordagem construcionista, permitindo fazer a descrição do processo utilizado pelo usuário para resolver uma tarefa. Essa abordagem pressupõe “a construção do conhecimento baseada na realização concreta de uma ação que produz um produto palpável (um artigo, um projeto, um objeto) de interesse pessoal de quem produz” (Valente, 1999, p. 141). Essa filosofia do trabalho com LOGO surgiu dos contatos de Papert com a obra de Piaget e influências de outros pensadores contemporâneos tais como Dewey, Freire e Vygotsky.

LOGO é o nome de uma filosofia de educação, que apresenta como características fundamentais as definições de procedimentos com variáveis locais que permitem a recursão. Assim é possível definir novos comandos e funções que

podem ser usados exatamente como funções primitivas de linguagem. Especialmente apresenta características elaboradas para implementar uma metodologia de aprendizagem constituída pelo ciclo descrição – execução – reflexão – depuração – descrição.

Quando o usuário utiliza a linguagem de programação LOGO para realizar uma tarefa no computador, ele inicia raciocinando como solucioná-la. Ao “ensiná-la” para o computador, descreve a ideia inicial com base nos seus conhecimentos tácitos, utilizando os comandos da linguagem e pede que sejam executadas as instruções dadas. Reflete sobre o resultado obtido e confronta com suas ideias iniciais. Caso o resultado não esteja de acordo com o esperado, ele depura as instruções dadas inicialmente, alterando ou acrescentando novas informações. Essas informações poderão ser obtidas a partir do seu próprio conhecimento ou com a interação com os colegas, professor ou outras fontes de informação.

2.2.1. Micro-mundos

Com o desenvolvimento de softwares educativos e, em particular para os domínios de conhecimento da Matemática fez surgir o conceito de “micro-mundos”, primeiramente o termo surgiu entre os cientistas da inteligência artificial para representar as atividades estabelecidas na forma de um programa computacional orientada a objetos simulando uma parte do mundo real.

O objetivo fundamental de um micro-mundo é o de fornecer ferramentas informatizadas nas quais a informação possa se desenvolver com o usuário na busca de conhecimentos para quem o manipula (EBERSON, 2004, p. 66).

A principal característica de um micro-mundo é o de proporcionar ao usuário a oportunidade de criar e incorporar novos comandos não existentes anteriormente no software para uso futuro.

No sentido de melhor explorar o micro-mundo estudado nessa pesquisa, é necessário fazer uma distinção introdutória no enfoque utilizado nos dois softwares que foram utilizados, pois os ambientes computacionais possuem características diferentes. O primeiro, o Geometricks, está apoiado na “*geometria dinâmica*” e o segundo, o SuperLogo, está ancorado na “*linguagem de programação LOGO*”.

Figura 50. Interface do micro-mundo Logo



Dada a importância desse enfoque, na noção de micro-mundos de geometria, apresentaremos, na próxima seção, um estudo mais específico da concepção de geometria dinâmica.

2.2.1.1. Domínio de validade epistemológica

Balacheff (1994, p. 370) ao definir o *domínio de validade epistemológica* de um ambiente informático como sendo o conhecimento que um dado software educativo permite construir para uma determinada noção matemática. Esse tema ressalta a complexidade resultada pelo fato de um mesmo objeto matemático não possuir o mesmo significado em dois ambientes distintos, isto é, ambientes diferentes apresentam, de uma maneira geral, tipos de controle e tipos de construção diferentes para uma mesma concepção matemática.

O *domínio de validade epistemológica* objetiva desenvolver um conjunto de ferramentas conceituais que permitam analisar as características de um ambiente informatizado em relação a um determinado domínio de conhecimento matemático.

A concepção de *domínio de validade epistemológica* permite analisar um micro-mundo e especificar quatro dimensões de análise para um determinado conhecimento matemático. São elas: as essências das ferramentas e objetos gerados pela estrutura do micro-mundo, a essência da fenomenologia sobre esta estrutura, o tipo de controle que o micro-mundo permite aos usuários e o seu *feedback* e o conjunto de problemas que o micro-mundo permite resolver.

Essas quatro dimensões de análise para um determinado conhecimento matemático são tópicos importantes ao trabalho proposto quando focar as atividades

desenvolvidas no ambiente SuperLogo, tanto para delimitar a sua abordagem teórica, como também justificar seu desenvolvimento metodológico no processo de intervenção, observação e análise dos dados adquiridos.

2.2.2. As diferentes versões da linguagem de programação

A primeira versão do LOGO, que surgiu em 1968, só continha a parte de processamento de listas, não contendo a parte gráfica. Sendo aplicado a alunos da escola Muzzi Junior High School, em Lexington. Como fora bem sucedido em sua aplicação, Papert juntamente com outros pesquisadores desenvolveram uma tartaruga mecânica munida de uma caneta que obedecia aos comandos de andar e girar. Com o aperfeiçoamento dos computadores, as telas tornaram-se um meio a ser explorado. Surgem então em 1970, várias versões do LOGO gráfico com a tartaruga que aparece na tela do computador.

Em 1986 foi criada uma versão em português do LOGO, o Hot-LOGO. Outras versões se tornaram populares como o LOGO WRITE, o MSLOGO e o SuperLogo. A versão mais atual do LOGO é o IMAGINE que se caracteriza por programação orientada ao objeto, criação de animações e o uso de rede (Internet). Na pesquisa aqui apresentada, utilizou-se o SuperLogo.

2.2.3. SuperLogo

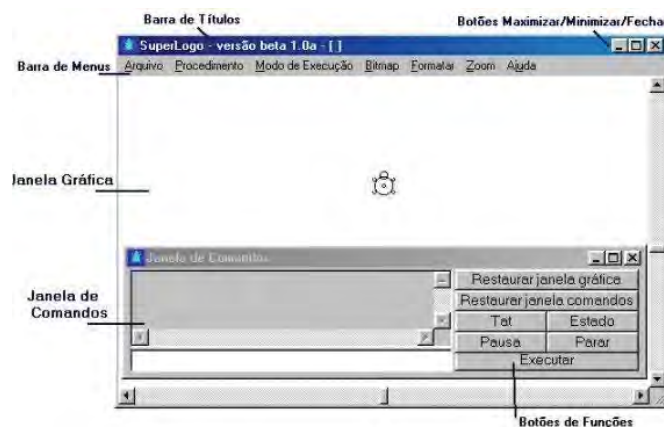
O ambiente *SuperLogo*¹⁶ é composto por duas janelas: a **Janela Gráfica** e a **Janela de Comandos**. No centro da *Janela Gráfica*, aparece a figura de uma tartaruga, um cursor gráfico que a partir de comandos específicos, movimenta-se na tela permitindo a construção de desenhos.

Esta janela além de permitir a execução dos desenhos elaborados pelo usuário permite acessar o menu de opções do ambiente. A **Janela de Comandos** permite ao usuário digitar as instruções a serem executadas pelo LOGO e acionar

¹⁶ O ambiente SuperLogo versão 3.0 é uma das versões da linguagem de programação Logo em português. Esse ambiente originariamente foi desenvolvido pela Universidade de Berkeley por George Mills, traduzido e disponibilizado na internet pelo NIED (Núcleo de Informática Aplicada à Educação) da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp).

os botões do ambiente. As duas janelas podem ser arrastadas, maximizadas e minimizadas, mas somente a Janela Gráfica pode ser fechada.

Figura 51. Área de trabalho no SuperLOGO



2.3. Geometricks

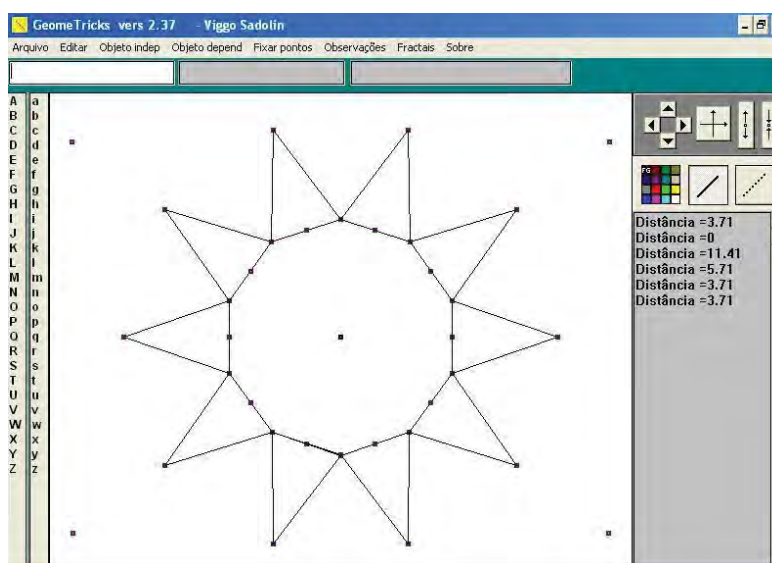
O Geometricks é um software de geometria dinâmica, possui basicamente a mesma interface e ferramentas do que o *Cabri-Gèomètre II* (BAULAC; BELLEMAIN; LABORDE, 1998), o *Geometer's Sketchpad* (JACKIW; KLOTZ, 1997), o *Cinderela* (Richter-Gebert; Kortenkamp, 1999) entre outros. Ele é um software de desenho, cálculo e construção, permitindo formular, testar e depurar conjecturas no estudo da Geometria.

Porém o Geometricks possui uma diferença considerável comparada aos demais ambientes mencionados, ele não permite incorporar novas ferramentas ou a criação de novos ambientes. Por isso, ele não é considerado um micro-mundo.

Ele possui uma ferramenta específica para a construção de fractais permitindo uma introdução do estudo da Geometria Fractal. Essa ferramenta se baseia na combinação de ternas de pontos e nos objetos geométricos construídos são aplicadas determinadas transformações que, por meio de processos recursivos, geram os fractais (PENTEADO; AMARAL; BORBA, 2000, p. 5).

Devido à importância dessa ferramenta para o trabalho proposto, na seção a seguir, analisaremos com maior profundidade suas funções e sua aplicabilidade.

Figura 52. Área de tarefas e barra de ferramenta do Geometricks



2.3.1. Geometria Dinâmica

Originalmente o termo *Geometria Dinâmica (GD)* foi usado por Nick Jackin e Steve Rasmussen da *Key Curriculum Press, Inc.* com a finalidade de diferenciar este tipo de software dos demais softwares geométricos.

Atualmente a terminologia se refere à geometria dos softwares que propiciam ambientes que permitem criar e construir figuras que podem ser arrastadas pelo *mouse* na tela do computador mantendo os vínculos estabelecidos nas construções, ou seja, um objeto ao ser movimentado tem suas propriedades matemáticas atualizadas simultaneamente (PENTEADO; AMARAL; BORBA, 2000).

Estes ambientes computacionais são importantes ferramentas para o ensino da geometria euclidiana e outras áreas da geometria, como as geometrias não-euclidianas, geometria analítica, geometria descritiva e geometria fractal que é a fonte de estudo desse trabalho.

A escolha desses tipos de ambientes de aprendizagem vai ao encontro da proposta de investigação da pesquisa e de Educação em que o conhecimento é resultado de um processo de construção. Essa situação pode ser ilustrada por um antigo ditado atribuído a Confúcio: "*O aluno ouve e esquece, vê e se lembra, mas só compreende quando faz*" (ISOTANI; BRANDÃO; MOURA, 2005, p. 2487). A GD auxilia o fazer, permite que o aluno vivencie situações-problemas e descubra por si só, relações entre os objetos matemáticos (BRANDÃO; ISOTANI, 2003).

No Brasil, é possível ter acesso a vários softwares de GD, tais como o *Cabri-Gèomètre II*, o *Geometricks*, o *Geometer's Sketchpad*, o *Geometry Inventor*, o *Suposer*, o *Cinderela*, o *Tabulae* e o *Geogebra*. Segue abaixo alguns exemplos de programas de Geometria Dinâmica.

Figura 53. Atividade da construção do fractal árvore no Cabri-Gèomètre II

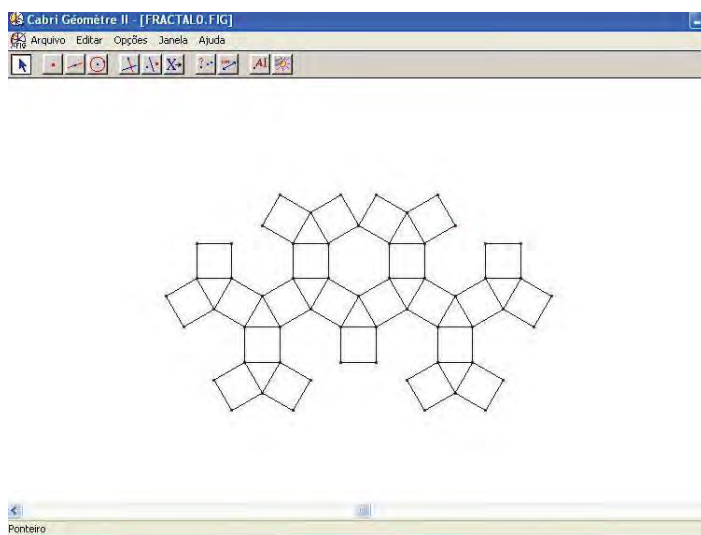


Figura 54. Construção de um fractal no Geometricks

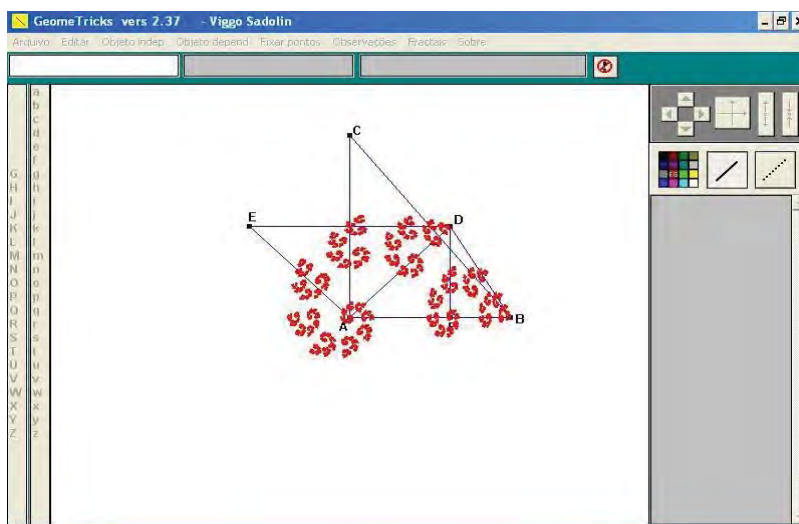
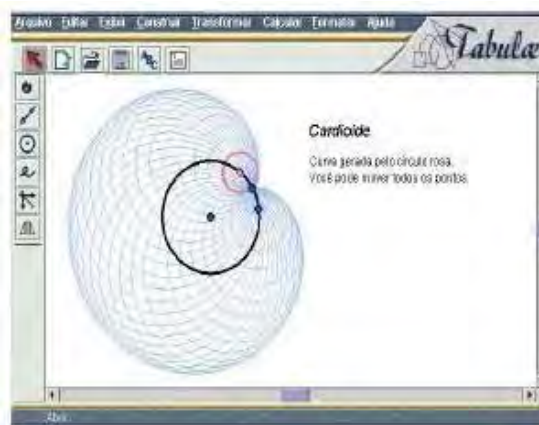


Figura 55. Exemplo de atividade para uso via Web desenvolvida com iGeom



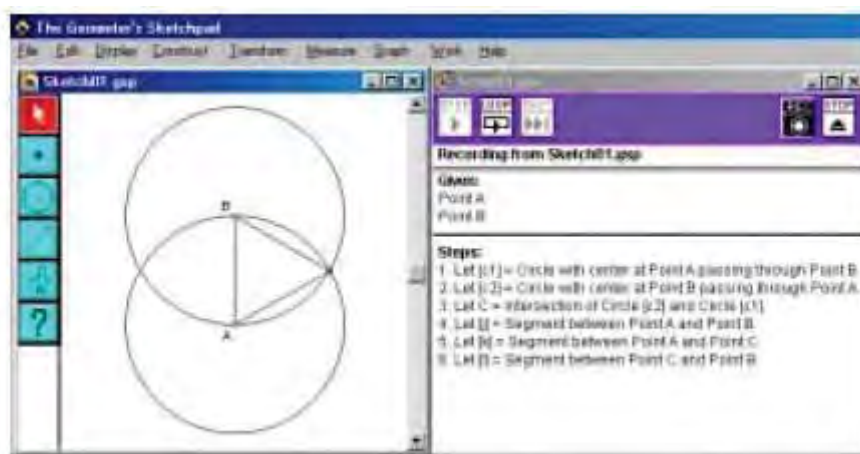
Fonte: ISOTANI, BRANDÃO, MOURA, 2004, p. 2490

Figura 56. Tela do Tabulae



Fonte: ALVES, SOARES, 2003, p.3

Figura 57. Tela do Sketchpad com o “sketch” de construção de um triângulo equilátero (à esq.) e seu respectivo “script” (à dir.)



Fonte: EBERSON, 2004, p. 86

2.3.2. Considerações conceituais do Geometricks na elaboração de fractais

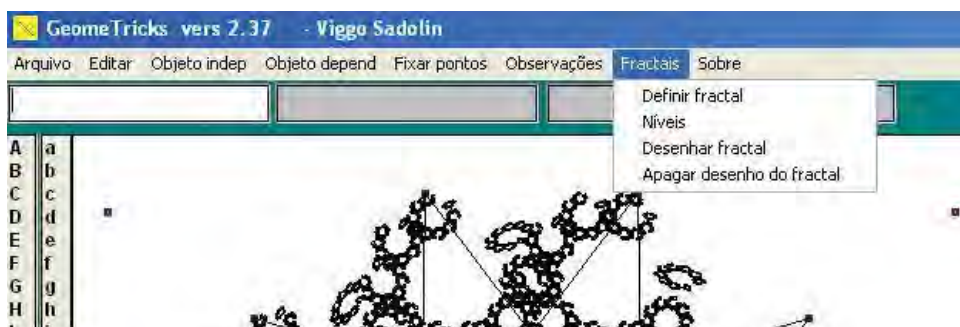
O Geometricks diferentemente de outros softwares de Geometria Dinâmica possui em seu ambiente um comando específico para a construção de fractais que torna o processo de elaboração desses objetos geométricos mais simplificados do que em outros ambientes, porém ele não possui um comando semelhante a macro-construção que está disponível em alguns outros softwares.

Figura 58. Comando para a construção de fractais no Geometricks



Ao clicar no menu *Fractal* aparecerá uma coluna de comandos que constitui o processo de criação dos fractais pelo usuário. Para a construção destes fractais é necessária a existência da figura ou da estrutura geométrica geradora do fractal. A figura 59 mostra a coluna de comandos:

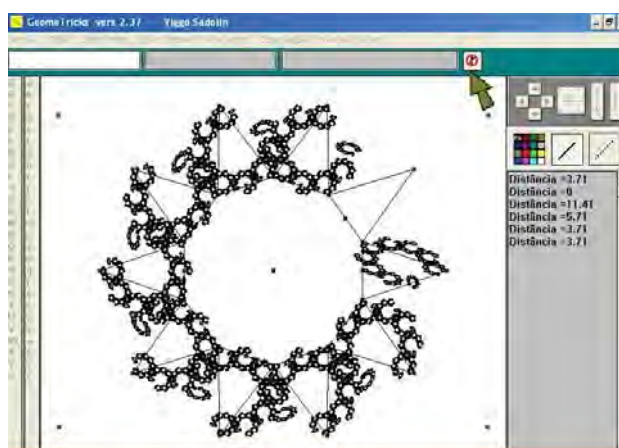
Figura 59. Coluna de comandos da função fractal no Geometricks



O menu Fractal é constituído por quatro opções de comandos: *Definir Fractal*; *Níveis*; *Desenhar Fractal* e *Apagar Desenho do Fractal*. Das quatro opções existentes a que merece um cuidado especial pelo usuário é a primeira opção (*Definir Fractal*), pois esse comando é o responsável pela geração do fractal, o Geometricks define o fractal por ternas de pontos, o programa permite ao usuário definir até no máximo nove ternas, então dependendo do fractal o usuário é obrigado a usar o processo de ternas mais de uma vez e a ordem destas ternas influencia no processo de obtenção do fractal. A segunda opção (*Níveis*) permite ao usuário verificar os diferentes níveis da geração do fractal e auxilia no entendimento da propriedade recursiva no processo de obtenção dos fractais, a terceira opção (*Desenhar Fractal*) mostra o resultado do processo de construção do fractal e a última opção (*Apagar Desenho do Fractal*) limpa o desenho do fractal existente na tela.

Ao clicar na opção desenhar fractal o programa começa a fazer a geração do fractal para interromper a sua ação, devemos clicar no símbolo de pare como é mostrado na figura 60:

Figura 60. Parando a geração do fractal no Geometricks



Tecnicamente, o Geometricks possibilita a construir os fractais a partir de um sistema de funções iteradas, em que cada função do sistema define uma composição de transformações afins no plano, ou seja, o ambiente substitui esse sistema de funções por um processo mais visual e intuitivo, baseado na representação geométrica das transformações afins do plano.

Segundo Eberson (2004, p. 114), o objetivo dessa forma de representação é focalizar uma abordagem menos abstrata das transformações afins, que pudesse ser explorada por alunos do ensino básico e não somente por estudantes universitários, ao ter como base uma visão mais geométrica do processo.

No processo de construção dos fractais, define-se um sistema de coordenadas a partir de uma terna de pontos não colineares, o programa limita ao usuário definir no máximo nove ternas.

A primeira terna ABC determina um sistema de coordenadas iniciais no plano e as demais determinam outras, por exemplo, uma segunda terna XYZ define outro sistema de coordenadas, então a relação entre esses dois sistemas de coordenadas determina uma função biunívoca S do plano euclidiano nele próprio ($S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), ou seja, para qualquer ponto Q do plano, representado no sistema de coordenadas ABC , teremos um único ponto $S(Q)$, representado no sistema XYZ . Esse mesmo procedimento descrito ocorre se estivermos utilizando três ou mais ternas na definição do fractal.

O Geometricks converte essa estrutura algébrica para a forma geométrica da seguinte forma: dada a função $S: (ABC) \rightarrow (XYZ)$, ele interpreta o sistema de coordenadas utilizadas como triângulos, ou seja, ao determinar o sistema de coordenadas ABC , determina-se também um triângulo de vértices A , B e C . O programa por meio dessa função S , transforma os pontos internos do $\triangle ABC$, no conjunto dos pontos internos do $\triangle XYZ$, em que $X = S(A)$; $Y = S(B)$; $Z = S(C)$ e $S(\blacktriangle)$ são os pontos internos do $\triangle XYZ$.

Dessa forma a opção *Níveis* assume uma dupla função no ambiente, pois ela é utilizada para verificar os diferentes níveis de iterações dos fractais (recursividade) e também representar a imagem de uma transformação afim no plano. Em cada

nível de iteração, a transformação S será aplicada aos pontos internos do triângulo gerado pelo nível anterior.

2.4. Materiais manipulativos e seus aspectos teóricos

Diversos educadores já ressaltaram a importância do apoio visual, tátil ou visual-tátil como facilitador para o processo de aprendizagem do aluno. Na sala de aula, durante o trabalho docente, é que se reconhece o grande papel que esse tipo de material didático pode ter na aprendizagem.

Lorenzato (2006, p.18) define material didático como sendo qualquer instrumento útil ao processo de ensino e de aprendizagem. Então, o material didático pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros.

Dependendo do objetivo a que se destina o material didático, ele possibilita assumir várias funções, e permite por parte do professor alguns questionamentos referentes ao seu uso: para introduzir um conceito, para motivar os alunos, para auxiliar na compreensão de resultados. O docente baseado em seu objetivo poderá escolher o material mais adequado a sua aula.

Na pesquisa aqui realizada utilizou-se material didático manipulável. Eles podem ser classificados em estáticos e dinâmicos. Os materiais manipuláveis estáticos são aqueles materiais que não possibilitam modificar as suas formas e só permitem serem observados. Por exemplo, os sólidos geométricos construídos em madeira ou cartolina, ábaco, material dourado são considerados estáticos. Os materiais manipuláveis dinâmicos são aqueles que possibilitam serem transformados continuamente, assim, permitem ao aluno fazer conjecturas, a realizar a percepção de propriedades e a construção de uma aprendizagem significativa. Por exemplo, materiais que utilizam palitos ou barbantes são considerados dinâmicos.

Existem obstáculos ao uso do material didático, como por exemplo, as políticas públicas educacionais oferecidas pelos governos federal, estaduais e municipais que geralmente não são incentivados ou orientam os docentes ao uso de materiais manipulativos, poucas são as escolas de ensino fundamental e médio que possuem seu laboratório de ensino de matemática, são poucas as instituições de formação de professores que ensinam seus alunos a usar esse tipo de material. Em

consequência desse fato, muitos professores não sentem falta de materiais didáticos em suas práticas docentes, ou não dispõem de materiais didáticos, ou não acreditam no auxílio positivo do seu uso na aprendizagem dos alunos, ou ainda, não sabem utilizar corretamente os materiais didáticos (LORENZATO, 2006, p.34).

Durante a formação inicial e continuada do professor de matemática é necessário criar oportunidades para a reflexão e discussão sobre o uso de materiais manipulativos em sala de aula. É através desses momentos de interação que os estudantes do curso de licenciatura de matemática terão oportunidade de refletir sobre as possíveis relações existentes no contexto de sala de aula que envolve os alunos e os materiais manipulativos e a interação entre os alunos com esse tipo de recurso didático.

A visualização para esse tipo de atividade torna-se essencial ao processo de ensino e de aprendizagem, Passos (2006, p.82) demonstra uma preocupação ao considerar que

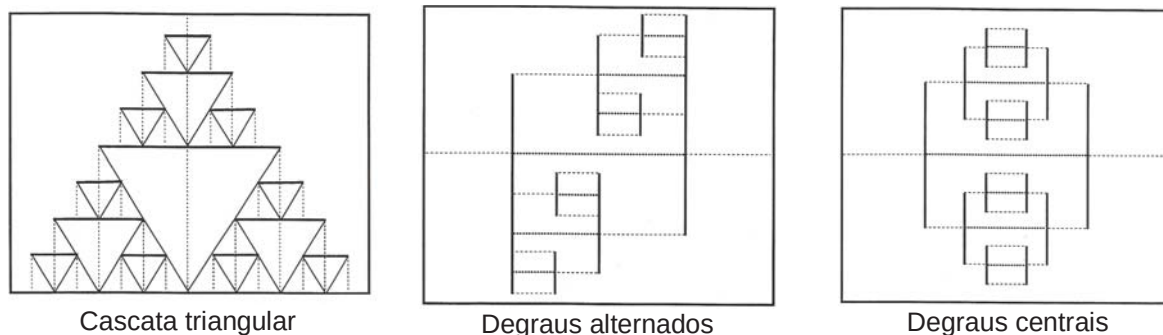
o processo ensino-aprendizagem da matemática pode ser considerada um dos processos envolvidos nas diferentes maneiras de representações. Entende-se que a representação pode ser gráfica, como um desenho em um papel ou como modelos manipuláveis, ou mesmo por meio de linguagem e de gestos, considerados instrumentos importantes para expressar conhecimentos e ideias dos indivíduos. Os diferentes tipos de visualização que o aluno necessita, tanto em contextos matemáticos quanto em outros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e ler imagens mentais; de visualizar informação especial e quantitativa e interpretar visualmente informação que seja apresentada; de rever e analisar situações anteriores com os objetos manipuláveis.

Segundo Rêgo (2006, p.54) a utilização de qualquer recurso didático exige por parte do professor alguns cuidados como dar tempo para que os alunos conheçam o material, incentivar a interação professor-aluno-material manipulável, o professor assumir o papel de mediador na realização das atividades, realizar criteriosamente a escolha do material que será utilizado, planejar com antecedência as atividades considerando as características dos participantes ao fazer as tarefas propostas e estimular sempre que possível a participação do aluno na elaboração do material.

Para a pesquisa, foram destinadas três atividades de materiais manipuláveis que se apoiaram no visual-tátil para a sua realização. Essas atividades tinham o objetivo de facilitar o entendimento do aluno do curso de licenciatura e do professor

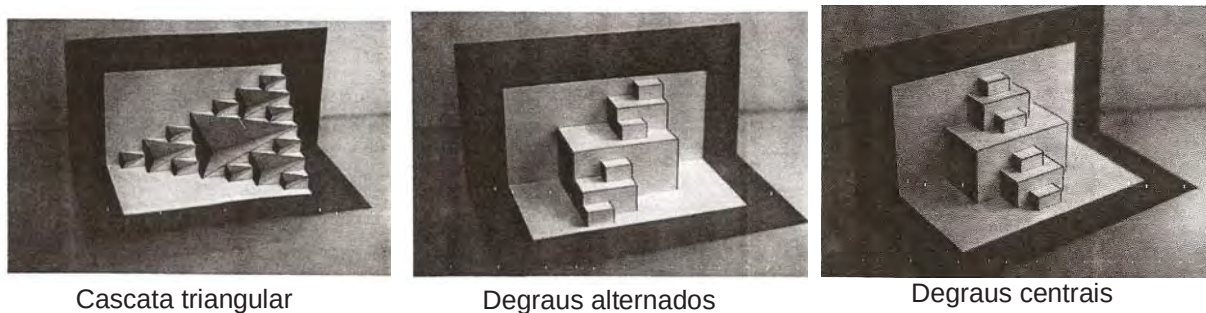
de matemática em relação à recursividade presente nos fractais. A figura 61 ilustra o material manipulável proposto.

Figura 61. *Planificação dos fractais espaciais*



Através da ação de recortar e dobrar o papel, os alunos do curso de licenciatura e os professores de matemática deveriam perceber a recursividade existente em cada um dos fractais explorados, além disso, eles deveriam observar possíveis regularidades ou padrões pertinentes aos elementos que formam os fractais. Na figura 62 são apresentados os fractais obtidos na realização das atividades.

Figura 62. *Materiais manipulativos de fractais espaciais*



As regularidades mencionadas estão relacionadas às alturas dos polígonos (triângulos, quadrados, retângulos etc.) existentes em cada um dos fractais explorados nas atividades com materiais manipuláveis. Pode-se também observar a quantidade de figuras geométricas em cada um dos estágios para a obtenção dos fractais ou o conceito de sequências (progressões geométricas).

CAPÍTULO III

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

*“A educação é um ato de amor, portanto, um ato de coragem. Não pode temer o debate,
a análise da realidade; não se pode fugir à discussão criadora,
sob pena de ser uma farsa”*

Paulo Freire

Nesse capítulo, apresenta-se os aspectos teóricos referentes à formação de professores de Matemática: os ambientes formadores, os formadores, os alunos do curso de licenciatura e a escola.

3. Aspectos relevantes para a formação de professores

A aprendizagem do professor de matemática é um processo que acontece ao longo da vida, começa desde as primeiras experiências vivenciadas na escola, passa pelos cursos de formação de professores, em que há um aprofundamento mais teórico, e por fim chega a sua própria prática em sala de aula. A sala de aula oferece diversas situações de aprendizagem para o professor, por exemplo, como

dialogar com os alunos, a manter a disciplina em sala de aula, como controlar o tempo gasto para ensinar cada conteúdo, a utilizar diferentes ambientes de aprendizagem como laboratório de informática, laboratório de matemática, sala de vídeo, lousa e giz.

Um personagem importante nesse processo de formação docente é o professor formador. Concorde-se com Mizukami (2006) ao definir os formadores de professores como todos os profissionais envolvidos nos processos de aprendizagem da docência, que são os docentes das disciplinas Prática de Ensino e Estágio Supervisionado, das disciplinas pedagógicas em geral, das disciplinas específicas de diferentes áreas do conhecimento e os profissionais das escolas que recebem os estudantes do curso de licenciatura em seus estágios.

Acredita-se que para formar um professor de Matemática é necessário considerar o seu processo de aprendizagem. Dessa forma, assumir o conhecimento adquirido dos futuros professores antes de entrarem no curso de formação docente influencia de modo significativo sua aprendizagem. Assim, pode-se reconhecer o aluno do curso de licenciatura como um ativo construtor de seu conhecimento, assimilando e organizando suas ideias por intermédio da maneira de como interpretar suas experiências durante a sua formação.

Para a pesquisa aqui apresentada, baseia-se em Shulman (1986) por trazer importantes contribuições para o estudo da produção de saber na prática docente. Segundo esse autor, para ser professor é necessário ter os seguintes conhecimentos: do conteúdo específico, do pedagógico geral, do currículo, materiais e dos programas, do pedagógico do conteúdo, dos alunos e das suas características, do contexto educativo e dos fins, propósitos e metas educacionais.

Dentre os conhecimentos mencionados, o conhecimento pedagógico do conteúdo tem merecido um destaque nas pesquisas sobre a formação do professor. Já que ele representa uma combinação entre dois conhecimentos: o conhecimento do conteúdo específico (Matemática, neste caso) e o conhecimento do modo de ensinar (Pedagógico), que pressupõe ser uma elaboração pessoal do professor (NONO; MIZUKAMI, 2004, p. 143).

Segundo Moreira e David (2005, p. 39) o conhecimento pedagógico do conteúdo não é algo que é concebido e produzido a partir do exterior da escola e que deve ser transladado por ela. Ao contrário, trata-se de uma construção

elaborada no interior das práticas pedagógicas escolares, cuja fonte e objetivo são as mesmas práticas.

A Universidade e a Escola são agências formadoras da atividade docente e partir da concepção que se tem dos processos formativos da docência, as relações existentes entre essas instituições podem apresentar características diferentes quando se referir as suas influências para com a formação de estudantes do curso de licenciatura em Matemática e professores de matemática. Por isso, trata-se o universo da escola separadamente da universidade e, nesse caso, centra o foco exclusivamente na sala de aula. Porém, acredita-se ser fundamental a integração de ambas para a formação do aluno do curso de licenciatura em Matemática.

Os ambientes formadores de professores devem ser locais destinados para a formação e capacitação profissional de professores e de estudantes do curso de licenciatura. Segundo o INEP/MEC¹⁷ (2003, p. 10) espera-se que esses ambientes formadores de professores de matemática formem profissionais com um perfil de sólida formação teórico e prática, tecnológica, científica, humanística e visão histórica da Matemática e que eles sejam aptos a:

- Atuar em equipe interdisciplinar e multiprofissional;
- Desenvolver ações e resolver problemas com base em parâmetros relevantes da realidade social, política, econômica e cultural para elevação das condições de vida em sociedade;
- Promover inovações tecnológicas e visualizar aplicações para a Matemática.

Ao confrontar a visão conceitualmente exposta pelos órgãos oficiais em relação aos ambientes formadores de professores e a prática exercida nesses ambientes percebem-se algumas distorções relevantes para a formação dos alunos do curso de licenciatura. Essas distorções se referem à falta de formação para inovações tecnológicas, a não aplicação da matemática ao mundo real, entre outros fatores. Este cenário pode dificultar a introdução de diversos temas matemáticos

¹⁷ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, órgão vinculado ao Ministério da Educação.

nesses ambientes formativos, como por exemplo, a Geometria Fractal que é o tema desta dissertação.

Acredita-se que apresentar um panorama de como são os cursos de licenciatura em Matemática no Brasil seja relevante para a presente pesquisa, já que a forma como são constituídos esses cursos podem dificultar a introdução da Geometria Fractal como tema de discussão na formação dos professores de matemática. No que segue, é feita uma breve apresentação desses cursos.

3.1. Cursos de licenciatura em Matemática no Brasil

Adota-se como referência o Exame Nacional de Curso (ENC) de Matemática de 2003 por ser um indicador oficial do Governo Federal que mostra a distribuição geográfica atual dos cursos de Matemática no território nacional. Esse indicador avaliou os professores, os estudantes e as Instituições de Ensino Superior numa tentativa de oferecer subsídios para a melhoria na qualidade da formação dos professores de Matemática. Segundo o ENC de Matemática (2003) que contou com a participação de 379 cursos, o que representou um aumento de 6% em relação ao ano anterior de sua aplicação, a região Sudeste continuou a concentrar o maior número de cursos (153), o que corresponde a 40,4% do total, com o destaque para o Estado de São Paulo com 76 cursos. Na tabela 1 abaixo, pode-se verificar como está distribuído à oferta de cursos de Matemática no Brasil:

Tabela 1. Número de cursos, por categoria administrativa e por região
Matemática – ENC/2003

Categoria Administrativa					
Região	Federal	Estadual	Municipal	Privada	Total
Norte	25	4	0	5	34
Nordeste	16	49	7	11	83
Sudeste	12	16	8	117	153
Sul	7	12	3	43	65
Centro-Oeste	14	19	0	11	44
Brasil	74	100	18	187	379

Fonte: DAES/INEP/MEC – ENC/2003

Disponível: http://download.inep.gov.br/ENC_PROVAO/matematica_v21.pdf. Acesso: em 01 nov. 2007

Em 2003, o ENC de Matemática contou com a participação de 15.025 graduandos, o que representou um aumento de cerca de 12% em relação ao ENC/2002. A região Sudeste apresentou o maior número de graduandos (6.896), o que representou 45,9% do total do Brasil, em contrapartida a região com o menor número de participantes (1.240) foi a Centro-Oeste, com 8,3% do total nacional. Novamente, o Estado de São Paulo merece um destaque por ter apresentado o maior número de graduandos do país (3.679). Na tabela 2, pode-se evidenciar a má distribuição dos cursos de matemática em nosso país:

Tabela 2. Número de graduandos presentes, por região administrativa e por região – Matemática – ENC/2003

Região	Categoria Administrativa				Total
	Federal	Estadual	Municipal	Privado	
Norte	1288	98	0	57	1443
Nordeste	880	1655	380	308	3223
Sudeste	563	828	593	4912	6896
Sul	281	411	86	1445	2223
Centro-Oeste	325	513	0	402	1240
Brasil	3337	3505	1059	7124	15025

Fonte: DAES/INEP/MEC – ENC/2003

Disponível: http://download.inep.gov.br/ENC_PROVAO/matematica_v21.pdf . Acesso: em 01 nov. 2007

Segundo dados do INEP/MEC, em 2003, existiam cerca de 540 cursos de Matemática no país. Dos dados exibidos nas tabelas 1 e 2, verifica-se uma grande concentração de cursos e graduandos na região Sudeste o que provoca uma escassez desses profissionais em outras regiões do Brasil, como Norte, Nordeste ou Centro-Oeste.

Outro ponto importante que se deve destacar é a grade curricular das disciplinas oferecidas pelas instituições formadoras de professores que apesar das peculiaridades de cada região do nosso território apresentam um eixo temático comum. Porém, esses cursos vêm sofrendo alterações estruturais em suas grades curriculares no transcorrer das últimas décadas em busca de modelo “ideal” de curso de formação de professores de Matemática.

Em sua maioria, os cursos de formação de professores de matemática adotam um modelo conhecido por “3 + 1”, que consiste de três anos de formação específica, Matemática no caso, e mais um ano para formação pedagógica. Nesse modelo, as disciplinas de formação pedagógica têm o objetivo de apresentar as técnicas de ensino para os estudantes de licenciatura. Entretanto, o conhecimento específico da disciplina é o principal fundamento ao qual devem ser agregados métodos apropriados para a “transmissão” do conteúdo matemático.

Atualmente, o quadro estrutural das disciplinas modificou-se em sua concepção de formação de curso. O conhecimento específico da Matemática continua sendo o elemento essencial na formação docente, mas surgiu um novo tipo de conhecimento matemático, aquele associado à prática docente escolar (Educação Matemática) e o conhecimento pedagógico transformou-se num elo entre esses dois conhecimentos (MOREIRA; DAVID, 2005).

Ao fazer um levantamento da estrutura curricular dos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil, foi possível elaborar um exemplo de curso de formação de professores em Matemática, a partir do que normalmente ocorre nesses cursos, conforme a tabela 3. Deve-se considerar que esse modelo só representa um exemplo em relação aos dados obtidos e a tabela em si não representa um modelo “ideal” de curso de Matemática, caso seja possível representar tal fato.

Podem ser destacadas, também, as diferenças existentes entre os cursos de formação de professores em Matemática pelas Instituições Públicas e Privadas. Enquanto as Instituições Públicas têm seus cursos divididos, de um modo geral, em período integral ou noturno, com duração de quatro e cinco anos, respectivamente. As Instituições Privadas, praticamente em sua totalidade, atuam no período noturno com duração média de dois ou três anos de curso.

Tabela 3. Modelo da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática de Instituição Pública

1º ANO	2º ANO	3º ANO	4º ANO
Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo Diferencial e Integral II	Física Geral II	História da Matemática
Geometria Analítica	Geometria Espacial	Didática da Educação	Prática de Ensino II
Álgebra Linear	Desenho Geométrico e Geometria Descritiva	Psicologia da Educação	Elementos de Topologia
Fundamentos da	Filosofia da Educação	Prática de Ensino I	Estatística

Matemática Elementar I	Fundamentos da Matemática Elementar II	Estrutura e Funcionamento do Ensino de EF e EM	Análise Combinatória e Probabilidade
Geometria Plana	Física Geral I	Funções de Variáveis Complexas	Estágio Curricular Supervisionado II
Matemática Financeira	Computação e Cálculo Numérico	Introdução a Análise Real	Teoria dos Números
Lógica Matemática	Estruturas Algébricas	Estágio Curricular Supervisionado I	Resolução de problemas
Teoria dos Conjuntos			

Tabela 4. Modelo de grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática de Instituição Privada

1º ANO	2º ANO	3º ANO
Fundamentos da Matemática Elementar I	Cálculo Numérico I	Probabilidade e Estatística I
Pré-Cálculo	Fundamentos da Geometria I	História da Matemática I
Metodologia Científica	Atividades Acadêmico-Científico-Culturais	Instrumentação para o Ensino da Matemática I
Fundamentos da Matemática Elementar II	Fundamentos da Geometria II	Atividades Acadêmico-Científico-Culturais
Cálculo Diferencial e Integral I	Cálculo Numérico II	Estágio Curricular Supervisionado
Psicologia da Educação	Fundamentos da Álgebra I	Probabilidade e Estatística II
Cálculo Diferencial e Integral II	Cálculo Diferencial e Integral III	História da Matemática II
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial I	Fundamentos da Álgebra II	Instrumentação para o Ensino da Matemática II
Estrutura da Educação	Física II	Análise Matemática I
Geometria Analítica e Cálculo Vetorial II	Estágio Curricular Supervisionado	Informática na Educação I
Física I	Cálculo Diferencial e Integral IV	Didática
Filosofia	Álgebra Linear	Análise Matemática II
	Física III	Informática na Educação II
		Matemática Financeira

Para Parizzi e Reali (2004) a maioria dos modelos de formação de professores está em descompasso com as necessidades enfrentadas na sala de aula. Segundo elas, esses modelos são pautados em uma

[...] racionalidade técnica de formação de professores com ênfase na aquisição de habilidades e realização de tarefas predeterminadas. Nesse caso, a partir do domínio de um conjunto de conteúdos específicos, acredita-se ser possível transpô-los para o dia-a-dia de uma sala de aula, desconsiderando a natureza imprevisível da atividade docente e a diversidade de demandas que um professor enfrenta em seu trabalho – o que dificulta o exercício docente especialmente nos primeiros anos de atuação do profissional. (p.82)

Ao olhar a Universidade como ambiente formador de professores de Matemática, existe uma grande incoerência entre o que é definido pelos órgãos competentes, em especial o Ministério da Educação, para os cursos de licenciatura em Matemática e o currículo que é proposto para tais cursos, contrapõe-se ao que a sociedade anseia e exige do professor de matemática. De uma maneira mais cuidadosa, deve-se analisar se as Universidades estão formando profissionais preparados para enfrentar o mercado de trabalho, pois as mesmas não sintonizaram os seus currículos com as demandas atuais. Os conteúdos programáticos existentes talvez merecessem uma discussão ampla da comunidade acadêmica para tentar minimizar o abismo entre o que é proposto e o que é realmente oferecido nos cursos de formação de professores.

O cenário apresentado pode gerar alguns questionamentos sobre a formação dos professores, que podem ser, por exemplo: Como os professores de matemática deveriam ser preparados? E o que esses professores devem fazer e aprender como parte de sua formação profissional e acadêmica? Isso pode gerar um novo perfil para o licenciado em Matemática, D'AMBROSIO (2005) deslumbra que tal mudança depende

de uma nova formação de educador matemático, particularmente nas licenciaturas, com menor ênfase na matemática tradicional e nas teorias de aprendizagem convencionais e maior ênfase em sociologia e antropologia, em história, na nova matemática e nas ciências atuais, incluindo as novas ciências da mente e da cognição e um novo conceito de aprendizagem, com muita tecnologia. (p. 101)

Essa nova formação só será possível para o matemático ou o licenciado em Matemática se existir o reconhecimento e a incorporação de alguns tópicos formalizados nos séculos XX e XXI no currículo de formação de professores de

matemática. Os tópicos que podem ser destacados são: lógica e criptografia; programação linear e dinâmica; teoria do caos, fractais e fuzzy; teoria dos jogos e inteligência artificial.

Esses fatos não ocorrem apenas como consequência de decretos e tais implementações dependem da preparação dos docentes das instituições formadoras, no caso do Brasil, as universidades.

Na atualidade, espera-se que os formadores de professores sejam capazes de atuar em novos locais, e de modo diverso ao que foram formados. Também é necessário que assumam um conjunto de estratégias de desenvolvimento profissional, focadas para a compreensão do conteúdo específico, do conteúdo pedagógico e do pensamento do aluno, tendo em vista os estudantes de licenciatura como a si próprios. Com isso, provoca-se uma grande transformação no papel do formador. Hoje, ele deve ensinar aos alunos do curso de licenciatura como ser um professor. Ou seja, ele deve mostrar as estratégias necessárias aos diferentes contextos e momentos para que as tomadas de decisões dos professores respeitem seus próprios conhecimentos e crenças.

A docência no Ensino Superior é ainda um tema pouco explorado e que apresenta iniciativas tímidas em relação ao contexto educacional brasileiro no que se refere às políticas públicas voltadas para a formação de professores, comparando-a com os processos de formação, inicial e continuada, de professores do ensino básico. Desta forma, existe uma preocupação voltada para a formação do formador. Tal preocupação está focando as características fundamentais exercidas por esse profissional aos estudantes dos cursos de licenciatura e que as políticas públicas tendem a ignorar atualmente. Fundamentado no que diz Mizukami (2006), podem-se enumerar algumas dessas características como sendo:

- a) ***A importância de base de conhecimento¹⁸ sólida e flexível:***
somente por intermédio desse conhecimento o formador poderá desempenhar suas funções e conduzir os licenciandos para a reflexão de sua prática docente;

¹⁸ Segundo Mizukami (2006), entende-se por base de conhecimento o repertório de diferentes tipos de conhecimentos necessários ao exercício da docência.

- b) **A construção de estratégias de desenvolvimento profissional:** que por meio dessas estratégias possam permitir a objetivação de crenças, valores e teorias pessoais dos estudantes de licenciatura;
- c) **Construção de comunidades de aprendizagem:** a criação de comunidades que envolvam professores das escolas e formadores da universidade de forma a promover uma reflexão e, assim, propiciar um desenvolvimento profissional mais adequado à profissão docente;
- d) **Atitude investigativa:** considerar a formação do formador como um processo contínuo e sistemático de investigação em que os participantes questionem suas suposições e construam um conhecimento voltado para a implementação de mudanças.

Pelo que fora observado, não há cursos específicos para a formação de formadores considerando essas características e papéis para esse tipo de profissional da Educação. Essa situação nos leva a pensar, como se desenvolve o processo formativo do formador que irá trabalhar em cursos de formação inicial e continuada de professores. A formação do professor envolve os processos de aprendizagem e desenvolvimento profissional da docência. Portanto, deve-se considerar que a Escola e a Universidade são locais de aprendizagem profissional. Outros aspectos a serem considerados no processo de formação de professores são: a importância da prática profissional para a construção de conhecimentos próprios da docência e de diferentes naturezas; a reflexão como orientação e fonte de aprendizagem profissional e a influência de crenças, valores, juízos na configuração de práticas pedagógicas. Deve-se ter em mente ainda, que as aprendizagens não podem ser transmitidas ou entregues aos professores sob a forma de encomenda pronta e, sim por um processo intrínseco e interativo com o professor.

De acordo com Mizukami (2006) apesar de existirem objetivos que direcionem ou orientem a formação e o papel do formador ainda não há de maneira formal um currículo direcionado à formação desse profissional. As Instituições de Ensino Superior devem contemplar a formação do professor formador e permitir a ele o conhecimento para atender os interesses e anseios dos estudantes dos cursos de licenciatura em Matemática.

Para formar um professor de Matemática é necessário considerar o seu processo de aprendizagem. Conforme já mencionado anteriormente, assumi-se que o conhecimento adquirido dos alunos dos cursos de licenciatura antes deles ingressarem no curso de formação docente, influencia de modo significativo a sua aprendizagem. Partindo desse ponto de vista, o futuro professor é reconhecido como um ativo construtor de seu conhecimento, assimilando e organizando suas ideias por intermédio de como interpreta as suas experiências de licenciando. Fica evidente que a reflexão em seus atos e ações, bem como a reflexão da maneira de ensinar e aprender o conteúdo matemático será uma ferramenta importante para mudar as suas atitudes docentes, pois quando os estudantes dos cursos de licenciatura descrevem, analisam e fazem inferências sobre os seus atos, eles conseguem elaborar seus próprios princípios pedagógicos. Com isso, a reflexão torna-se uma fonte promovedora para os futuros professores se tornarem consciente de suas crenças, valores e de seus conhecimentos, possibilitando um exame de validade de tais práticas.

Além disso, deve-se considerar que é necessário ter um “*bom*” conhecimento matemático e conhecimento pedagógico do conteúdo para ensinar (Shulman, 1986, 1987). Enquanto o primeiro conhecimento se destina a área específica em que o estudante do curso de licenciatura em Matemática está sendo formado, o segundo considera a necessidade de que os professores compreendam os conteúdos de sua área de conhecimento e saibam como ensiná-los a alunos diversos. Sendo assim, o conhecimento pedagógico do conteúdo é o fio condutor de aprendizagem e desenvolvimento profissional de professores e futuros professores. Percebe-se, então, que o objetivo dos cursos de formação de professores não é somente ensinar conteúdos matemáticos, mas promover a reflexão da forma como aprendem e de como seus futuros alunos aprendem para pensar e elaborar métodos pedagógicos para o ensino da matemática.

3.2. Escola: O Professor como Investigador de sua Própria Prática

Para desempenhar as tarefas impostas pela escola nos dias atuais, o professor precisa estar em constante processo de construção de conhecimentos com base na reflexão da própria prática. Assim, o ambiente escolar não é um local

de aprendizagem restrito aos alunos, mas também para os professores, funcionários administrativos e gestores da escola.

Na concretização da sua prática docente em sala de aula, o professor atua em diversos níveis: conduz o processo de ensino e de aprendizagem, contribui para a construção do projeto educativo da escola e para o desenvolvimento da relação com a comunidade. Em todos esses níveis, o professor defronta-se constantemente com situações problemáticas e, com isso, surge um momento importante para investigar e refletir sobre a sua própria atividade docente o que contribui para o seu desenvolvimento profissional.

Pérez Gómez (2001, p.194) define a reflexão como um processo de reconstrução da própria experiência mediante três fenômenos paralelos: reconstruir as situações em que se produz a ação; reconstruir-se a si mesmos como docentes; reconstruir os pressupostos sobre o ensino aceitos como básicos.

Ponte (2002) apud Isabel Alarcão (2001) sustenta a ideia que todo “*bom professor*” precisa ser um bom investigador. Ele justifica esta ideia com a seguinte declaração:

Realmente não posso conceber um professor que não se questione sobre as razões subjacentes às suas decisões educativas, que não se questione perante o insucesso de alguns alunos, que não faça dos seus planos de aula meras hipóteses de trabalho a confirmar ou infirmar no laboratório que é a sala de aula, que não leia criticamente os manuais ou as propostas didáticas que lhe são feitas, que não se questione sobre as funções da escola e sobre se elas estão a ser realizadas. (p. 5)

Ensinar constitui uma forma de reflexão na ação, isto é, reflete-se sobre os acontecimentos sobre as formas espontâneas de pensar e de agir de alguém, sugeridas no contexto da ação (OLIVEIRA; SERRAZINA, 2002, p.34).

Segundo Parizzi e Reali (2004, p. 72) devemos considerar o professor como um profissional que exerce um trabalho intelectual, cuja prática (reflexiva) permita uma compreensão do ambiente escolar e desempenhe um papel ativo tanto na formulação de intenções e objetivos de seu trabalho docente como na finalidade de alcançá-los.

Ponte (2002, p. 7) apud Lytle e Cochran-Smith (1990) aponta quatro grandes razões para que os professores façam pesquisa sobre sua própria prática de sala de aula: i) para se assumirem como autênticos protagonistas no campo curricular e profissional, tendo mais meios para enfrentar os problemas emergentes dessa

mesma prática; ii) como modo privilegiado de desenvolvimento profissional e organizacional; iii) para contribuir para a construção de um patrimônio cultural; iv) como contribuir para o conhecimento mais geral sobre os problemas educacionais.

Uma prática reflexiva confere poder aos professores e proporciona oportunidades para o seu desenvolvimento (autoformação).

As ideias de Schön (1983) sobre o desenvolvimento do conhecimento profissional baseiam-se em noções como a de pesquisa e de experimentação na prática. É ao refletir sobre a ação que se refina o conhecimento tácito, que reorganiza o pensamento, por consequência redefinimos a nossa prática de sala de aula. Segundo O'Brien (2004), o conhecimento pode ser classificado em tácito e explícito, em que o conhecimento tácito é o conhecimento intrínseco de cada pessoa, ou seja, adquirido com o tempo (ao longo da vida) e conhecimento explícito é o conhecimento tácito transferido e formalizado em textos, desenhos, diagrama, etc.

O professor de matemática pode ser um agente criativo e inovador no processo de questionamento característico das práticas reflexivas, mas o foco desse questionamento deve estar enraizado nos problemas que afetam o ensino e a aprendizagem. Não há uma única abordagem no processo de pesquisa ou questionamento – o professor reflexivo deve estar atento à variedade de opções.

CAPÍTULO IV

FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA E APRESENTAÇÃO DOS OBJETOS DE ESTUDO

“A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos”

Aristóteles

Nesse capítulo, apresento a abordagem metodológica que norteia a pesquisa. Em seguida, descrevo o procedimento aplicado na coleta de dados, o contexto de sua aplicação e o processo da análise.

Delíneo, além disso, outros aspectos fundamentais na realização do processo, como os recursos empregados, as atividades propostas e os participantes da pesquisa.

4. Fundamentação metodológica

Diante do objetivo da pesquisa, que é explorar possibilidades para que a Geometria Fractal possa ser ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e, conseqüentemente, seja inserida na sala de aula da escola básica, fiz uma opção por uma abordagem qualitativa, tendo em vista suas características:

considerar os objetos de estudo para os professores como sendo a fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento de coleta; os dados são predominantemente descritivos; a preocupação com o processo das atividades desenvolvidas é muito maior do que com o produto obtido; o “significado” que os professores e alunos do curso de licenciatura produzem é foco de interesse do pesquisador; a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo (BOGDAN; BIKLEN, 1982).

O desenvolvimento do estudo se caracteriza pelo seu afunilamento: inicialmente o enfoque de interesse é mais amplo, no transcorrer da pesquisa se torna mais específico e direto, ou seja, o pesquisador refina melhor seu foco no desenrolar do estudo.

O papel do pesquisador é o de servir como agente entre o conhecimento acumulado na área e as novas evidências que serão estabelecidas a partir da pesquisa. É em relação ao seu trabalho como pesquisador que o conhecimento específico do assunto explorado vai aumentar, e esse trabalho vem não só impregnado, mas também comprometido com todas as peculiaridades do pesquisador. Estas peculiaridades compreendem as vivências, as crenças, as concepções pessoais e políticas do pesquisador sobre o assunto investigado (LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Um dos principais problemas a ser enfrentado na pesquisa qualitativa diz respeito à possível contaminação dos seus resultados em função da personalidade do pesquisador e de seus valores. Goldenberg (2005, p. 55) considera que “... a melhor maneira de controlar esta interferência é tendo consciência de como sua presença afeta o grupo e até que ponto este fato pode ser minimizado ou, inclusive, analisado como dado da pesquisa.”

Ao propor a pesquisa, o pesquisador deve ter em mente as possíveis dificuldades a serem enfrentadas e os limites do trabalho a serem realizados como também as pessoas que ajudaram na entrada de campo, as pessoas que se recusaram a dar entrevistas, as perguntas que não foram respondidas pelos pesquisados, as contradições apresentadas, a (in)consistência das respostas, possibilita uma visão ampla de estudo do proposto, e não apenas dos aspectos que se concretizaram de uma maneira correta (GOLDEBERG, 2005, p. 58).

Na pesquisa qualitativa, o pesquisador precisa ter uma flexibilidade no momento de fazer a coleta e análise desses dados, pois não existe um conjunto fixo de regras a ser seguido. Segundo Goldenberg (2005, p. 53) o resultado da pesquisa depende “da sensibilidade, intuição e experiência do pesquisador”.

A observação compõe elemento essencial para a pesquisa. Desde a formulação do problema, passando pela construção de hipóteses, coleta, análise e interpretação dos dados, a observação desempenha papel fundamental no processo de pesquisa. Porém, na fase de coleta de dados que seu papel se torna mais notório. A observação é sempre empregada nessa etapa, combinada a outras técnicas ou utilizada de forma exclusiva. Por ser usada, exclusivamente, para a obtenção de dados em muitas pesquisas e por surgir também em outros momentos da pesquisa, a observação pode ser considerada como método de investigação.

Segundo Gil (1999, p. 110) a observação pode ser definida como “o uso dos sentidos com vistas a adquirir os conhecimentos necessários para o cotidiano”. Entretanto, à medida que a observação pode servir a um objetivo formulado de pesquisa, ser sistematicamente planejada, ser submetida à verificação e controles de validade e precisão é considerada como procedimento científico (GIL, 1999, p. 110).

A observação apresenta como principal benefício, em comparação a outras técnicas, a de que os fatos são compreendidos diretamente, sem qualquer intermediação. De contrapartida, a principal desvantagem da observação está em que a presença do pesquisador pode provocar modificações no comportamento dos observados, devastando a espontaneidade dos mesmos e produzindo resultados pouco confiáveis. As pessoas, de modo geral, ao se sentirem observadas, tendem a omitir seu comportamento, pois temem ameaças à sua privacidade.

As reações das pessoas à observação por parte de terceiros devem ser levadas em conta no processo de investigação. Por essa razão é que a observação enquanto técnica de pesquisa pode adotar modalidades diversas, sobretudo em função dos meios utilizados e do grau de participação do pesquisador (GIL, 1999, p. 111).

Ao analisar as características da pesquisa aqui apresentadas e os objetivos propostos, optou-se por uma observação participante em que o pesquisador expõe os objetivos e propõe atividades ao grupo com quem realiza a pesquisa.

A tarefa de análise de dados implica, num primeiro estágio, a organização de todo o material, dividi-lo em partes, buscando relacionar essas partes e identificando nele tendências e padrões relevantes. Num segundo estágio, essas tendências e padrões são discutidos com o auxílio da literatura referente ao objeto de estudo.

4.1. Coleta de dados

O primeiro passo foi o de escolher os possíveis locais para a realização da pesquisa: uma Instituição de Ensino Superior (alunos do curso de licenciatura em Matemática) e uma escola (professores de matemática).

A busca começou inicialmente pela IES, foram feitas duas tentativas até encontrar uma instituição disponível. A primeira tentativa foi na universidade em que o pesquisador leciona, uma instituição do município de São Paulo, porém não obteve autorização da coordenação do curso. Entre os motivos alegados para a negação da realização do trabalho estão: a falta de horários disponíveis para a sua aplicação devido ao curso ocorrer no período noturno e a maioria dos estudantes trabalhar durante o dia e aos sábados bem como a falta de disponibilidade de laboratórios de informática para a sua aplicação, pois os mesmos têm a prioridade de uso para as aulas oferecidas pela instituição.

A segunda tentativa ocorreu com os estudantes do curso de licenciatura em Matemática pertencentes à universidade na qual o pesquisador cursa sua Pós-Graduação, por ser um local envolvido com pesquisa, parecia ser o local ideal, porém não foi possível reunir uma quantidade mínima de alunos para a realização da pesquisa. Os motivos que dificultaram sua concretização estão relacionados à incompatibilidade de horários entre os estudantes e o pesquisador.

Assim, a escolha ocorreu por intermédio de um aluno do programa da Pós-Graduação da Unesp/Rio Claro, professor do curso de Matemática de uma instituição de ensino superior de uma cidade da grande São Paulo, que apresentou interesse em trabalhar com projetos relacionados ao uso de tecnologia. Ele foi o interlocutor entre o pesquisador e a Instituição sendo sua participação fundamental para o cumprimento desse estágio da pesquisa.

Em contrapartida, a escolha da escola foi de maneira mais tranquila, pois o pesquisador escolheu a escola na qual é professor efetivo e isso facilitou bastante a aceitação por parte da equipe gestora.

Assim foi como ocorreu o processo de escolha dos locais onde se realizaram as oficinas para a coleta de dados da pesquisa.

Foram duas oficinas, sendo a primeira, com alunos do curso de licenciatura em Matemática da instituição de ensino superior da grande São Paulo, e a segunda, com o grupo de professores da escola pública. As atividades propostas tiveram uma ênfase investigativa e envolveram o uso de softwares e materiais tais como papel, lápis, régua, tesoura, cola, entre outros.

Os dados são oriundos das oficinas, das fichas de atividades, dos questionários. Foram registrados em vídeo, áudio, anotações escritas no caderno de campo e fotografias.

A análise desses dados tem como foco:

- De que maneira os participantes da pesquisa concebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática;
- A interação dos participantes da pesquisa com a tecnologia informática utilizada;
- As dificuldades com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais;
- As possíveis dificuldades para ensinar esse tópico que os participantes da oficina conseguem antecipar na escola de ensino básico.

4.2. Sobre os questionários aplicados

Antes de realizar as atividades propostas nas oficinas, os participantes da pesquisa responderam a um questionário cujo objetivo era conhecer o perfil de cada um em relação à Geometria Fractal.

Esses questionários foram estruturados da seguinte maneira: *com questões padronizadas*, cujas perguntas são apresentadas exatamente com as mesmas palavras e na mesma ordem, de modo a assegurar que todos os pesquisados respondam à mesma pergunta, facilitando uma comparação entre as respostas; *perguntas de natureza fechada*, em que as respostas estão limitadas às alternativas

apresentadas; *perguntas de natureza aberta*, em que o pesquisado escreve livremente sobre o tema que lhe é proposto (GOLDENBERG, 2005, p. 85).

O questionário aplicado aos professores de matemática focou a formação inicial e continuada desses profissionais em relação à geometria e às novas tecnologias, à familiarização das novas tecnologias em sua prática docente, ao nível de conhecimento sobre os softwares utilizados na pesquisa e ao grau de percepção sobre o assunto explorado na oficina. As perguntas que constituíram o questionário são as seguintes:

- Você cursou a sua graduação em: Instituição Pública ou Instituição Privada?
- Qual o ano do término da sua graduação?
- Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação?
- Nesse período, vivenciou experiências que influenciaram seu modo de trabalhar a geometria na sala de aula? Quais?
- Cursou disciplinas específicas de informática na graduação?
- Você utiliza as novas tecnologias em sala de aula?
- Fez cursos de capacitação para desenvolver atividades de ensino auxiliadas pelo computador?
- A instituição onde você trabalha tem a seu dispor um laboratório de informática?
- Se você marcou sim, responda: você desenvolve algum trabalho a esse respeito? Como? Por quê?
- Gostaria de conhecer mais sobre o uso de novas tecnologias em educação? E sobre seu uso no ensino de geometria? Há algum interesse em especial?
- Você conhece o *LOGO* ou o *Geometricks*? Se sim, comente como você usou esse tipo de recurso.
- Você já ouviu falar sobre *Geometria Fractal* ou a *Teria do Caos*? Se sim, o que você conhece sobre os dois assuntos.

O questionário aplicado aos estudantes do curso de licenciatura em Matemática focou a formação inicial em relação à geometria e às novas tecnologias, as possíveis dificuldades ao utilizar os softwares propostos na pesquisa e o grau de percepção sobre o assunto explorado na oficina. Esse questionário foi elaborado

em duas partes e sua aplicação ocorreu em dois momentos distintos na pesquisa. A aplicação da primeira parte dessas questões ocorreu antes da realização da oficina e a segunda parte desses realizou-se após as oficinas. As perguntas que compuseram o questionário no primeiro momento são as seguintes:

- Em que semestre você está no curso de Matemática?
- Qual o ano da conclusão de sua graduação?
- Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação? Se afirmativo, responda: Quais foram? Quais conteúdos foram explorados?
- Cursou disciplinas específicas de informática na graduação? Se afirmativo, responda: Como ocorreu o uso dessa tecnologia?

As perguntas que permearam o questionário no segundo momento são as seguintes:

- Quais temas de Matemática você poderia explorar com os fractais?
- A Geometria Fractal é um bom tema para ser explorado em sala de aula? Justifique.
- Quais as suas dificuldades ao desenvolver os fractais nas atividades propostas e de utilizar o software LOGO na sua aplicação?

Esse segundo momento não aconteceu da mesma forma com os professores de matemática da escola. Por ser um número reduzido de participantes, optei por realizar uma conversa, gravada em vídeo, com eles utilizando as questões como roteiro.

4.3. Organização e apresentação dos objetos de estudo

Após o processo de escolha dos locais onde se realizariam a coleta de dados, iniciou-se o processo de preparação e confecção do material que seria empregado nas oficinas.

A oficina tinha como objetivo averiguar e identificar as dificuldades com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais, a interação dos participantes com a tecnologia informática empregada, de que maneira os

participantes concebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática e as dificuldades no ensino desse tópico na escola básica que os participantes conseguissem antecipar.

A oficina ficou dividida em três momentos bem distintos devido à natureza do material explorado. No primeiro momento, as atividades aconteceram num software de programação chamado SuperLogo; num segundo momento foram aplicadas atividades apoiadas em materiais manipulativos; e, por fim, as atividades foram realizadas com um software de Geometria Dinâmica, o Geometricks. A oficina teve uma duração de quinze horas.

Inicialmente, as atividades foram focadas num software de programação, o SuperLogo, que se apóia na linguagem de programação para a construção dos fractais. Nesse momento, o objetivo é mostrar e valorizar a importância da construção de conhecimento empregado numa forma de ensino não muito utilizada na aula de Matemática.

A segunda etapa consistiu em atividades que envolveram o uso de material concreto (lápis, borracha, tesoura, etc.) com a finalidade de relacionar conceitos matemáticos com a Geometria Fractal (área, perímetro, sequências numéricas, infinito, generalizações, etc.).

A última etapa consistiu em atividades focadas num software de Geometria Dinâmica, o Geometricks, que se apóia em conceitos geométricos para a construção dos fractais. Essa etapa da oficina tem a finalidade de valorizar a disciplina de Desenho Geométrico, que não consta atualmente na grade curricular do ensino de Matemática, devido às construções geométricas exigidas nessa fase do projeto.

4.3.1. Características dos locais das oficinas

A primeira oficina foi realizada com estudantes do segundo ano de um curso de licenciatura em Matemática de uma instituição de ensino superior da grande São Paulo, com duração de três anos. A instituição de ensino disponibiliza seis laboratórios de informática, todos equipados com dezenove máquinas, uma televisão de 29 polegadas, um videocassete e um recurso multimídia.

Figura 63. *Laboratório de informática*



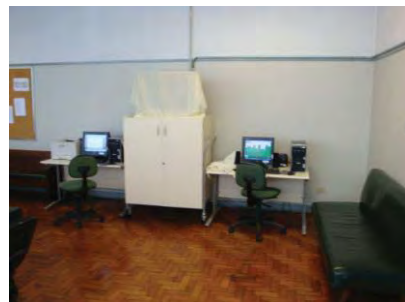
Nessa oficina participaram vinte alunos, sendo que todos os estudantes não tinham tido a oportunidade de usar os laboratórios de informática em disciplinas do curso até o momento. Merece ser mencionado que eles não haviam cursado as disciplinas de Geometria ou Desenho Geométrico, além de não terem familiaridade com softwares de linguagem de programação e de geometria dinâmica.

O objetivo de se utilizar a linguagem LOGO na oficina, foi o de introduzir os conceitos elementares da Geometria Fractal, tornando possível propiciar aos alunos atividades enriquecedoras, para a aprendizagem tanto da geometria quanto da linguagem de programação, pois a maioria dos conceitos explorados nas atividades era nova para eles.

Figura 64. *Alunos na oficina LOGO*



A segunda oficina foi realizada com um grupo de cinco professores de matemática, da rede estadual de ensino de São Paulo. A escola possui um laboratório de informática com dez máquinas, uma televisão de 29 polegadas, um videocassete e não possui recurso multimídia, porém, o laboratório não é utilizado em atividades docentes da escola devido à falta de manutenção dos equipamentos, a depredação causada pelos alunos, entre outros fatores. Devido a esse fato a oficina foi desenvolvida na sala dos professores da escola, o ambiente possuía dois computadores e uma televisão de 29 polegadas integrada aos computadores.

Figura 65. Laboratório de informática da escola**Figura 66.** Sala dos professores da escola

Essa segunda oficina, além de ter o objetivo de introduzir aos conceitos da Geometria Fractal buscou, também, estabelecer possíveis relações desta geometria com o emprego de recursos informatizados e a Matemática que esses professores lecionam na sala de aula. Devido a sua formação em Matemática, todos os professores já possuem as concepções geométricas formalizadas, porém eles desconheciam a linguagem LOGO e isso fez com que as atividades da oficina se tornassem desafiadoras para sua própria prática.

4.3.2. Características das atividades com o SuperLogo e o Geometricks

As atividades desenvolvidas na oficina foram de caráter investigativo. Assumir um caráter investigativo é dizer que as atividades são situações para as quais não temos respostas definidas, ou seja, no transcorrer do seu desenvolvimento, os alunos podem percorrer diferentes caminhos através de conjecturas elaboradas por eles próprios. Ponte (2003) caracteriza essa situação ao dizer que

o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. (p. 23)

Nesse cenário, o aluno é convidado a ser construtor de seu próprio conhecimento e o seu envolvimento é uma condição fundamental para a aprendizagem.

Foram utilizados o software de geometria dinâmica Geometricks¹⁹, e o software de programação SuperLogo²⁰. Esses ambientes computacionais foram escolhidos devido aos seguintes aspectos:

- Fácil manuseio pelo usuário;
- Atendem as premissas da pesquisa, por explorarem os diferentes conceitos matemáticos (rotação, ângulo, área, perímetro, infinito, progressão geométrica);
- Permitem obter quase todos os tipos de fractais citados no trabalho.

4.3.2.1. Sobre as atividades com a linguagem Logo

O conjunto de atividades exploradas com o software SuperLogo está organizado em três momentos distintos: no primeiro momento, objetivou-se uma familiarização com o ambiente e com os comandos da linguagem de programação LOGO; no segundo momento, focou-se a elaboração e a construção de polígonos geométricos ao usar os comandos vistos na primeira etapa; e, no terceiro momento, visou-se à construção de fractais. A seguir, é feita uma descrição de cada uma dessas atividades.

A primeira atividade é intitulada por *Conhecendo os Comandos do LOGO...* e tem como objetivo a familiarização com o ambiente do software e com a lista básica de comandos para o desenvolvimento de todas as atividades propostas. A figura 67 mostra um recorte desse primeiro contato com a linguagem de programação LOGO.

Figura 67. *Conhecendo os Comandos do LOGO...*

Comando	Digite	Descreva o resultado
pf <número>	pf 50	
pd <número>	pd 90	
mudecl <objeto>	mudecl "rosachoque	
	pf 50	

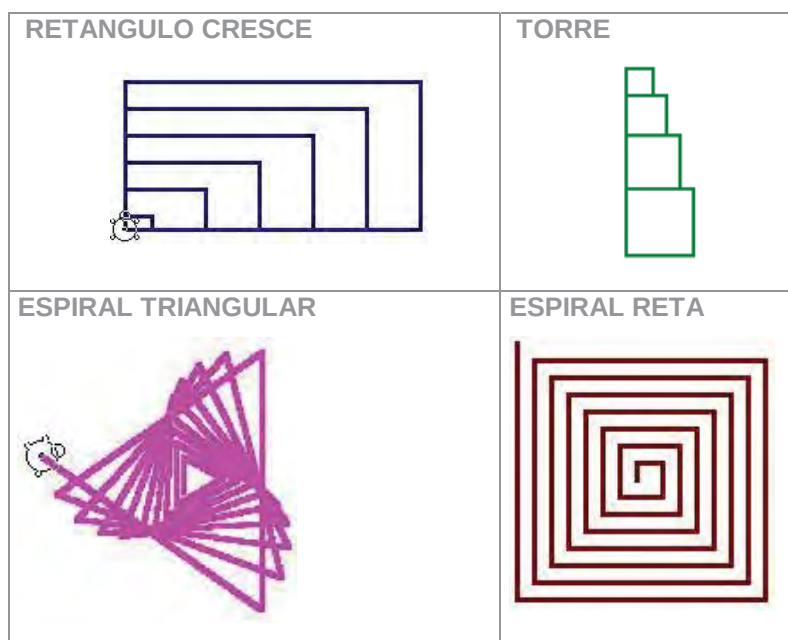
¹⁹ Software de geometria de fractais, desenvolvido por Viggo Sadolin, traduzido pela Prof^a. Dr^a. Miriam Godoy Penteado e pelo Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba, Editora Unesp, 2000.

²⁰ Linguagem de programação que foi desenvolvida no Massachusetts Institute of Technology (MIT), pelo professor Seymour Papert, ela é uma linguagem de programação que apresenta características especialmente elaboradas para implementar uma metodologia de aprendizagem constituída pelo ciclo descrição – execução – reflexão – depuração – descrição.

pe <número>	pe 90	
mudeel <lista>	mudeel [4 4]	
	pf 50	
	pd 90	
	pf 100	
ub	Ub	

A segunda atividade é intitulada por *Explorando polígonos* e tem como objetivo a construção de figuras geométricas através de uma sequência de comandos já explorados na atividade anterior. Nesse momento são introduzidas as noções de iteração, procedimentos, parâmetro e recursão. A figura 68 ilustra alguns exemplos estudados nessa parte da oficina.

Figura 68. *Explorando polígonos no SuperLogo*



A terceira atividade é intitulada por *Curva de Koch* e tem como objetivo a construção de dois fractais: a curva de Koch e o Floco de Neve. Para a elaboração e

construção desses fractais é necessário ter feito as atividades anteriores. As figuras 69 e 70 mostram os fractais esperados no desenvolvimento dessa atividade.

Figura 69. *Curva de Koch no SuperLogo*

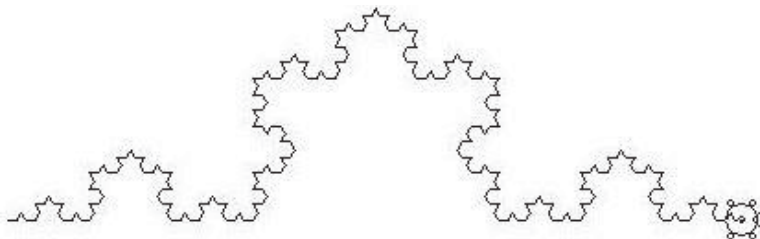
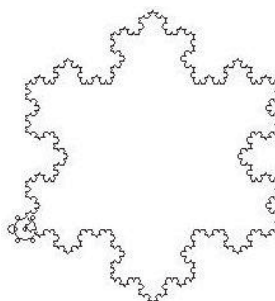


Figura 70. *Floco de Neve no SuperLogo*



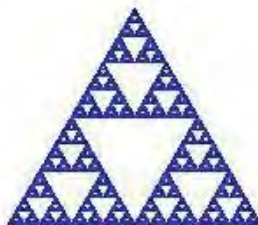
4.3.2.2. Sobre as atividades com o Geometricks

O conjunto de atividades exploradas com o software Geometricks está estabelecido em quatro etapas: na primeira etapa, objetivou-se uma familiarização com o ambiente e com os comandos do software de geometria dinâmica, além da construção do fractal *Triângulo de Sierpinski*; na segunda etapa, focou-se a elaboração e a construção do fractal *Tapete de Sierpinski* ao usar os comandos vistos na primeira etapa; na terceira etapa, visou-se a construção de fractais categorizados *por expansão*; e, na quarta etapa, explorou-se a construção de fractais classificados do *tipo Dürer*. A seguir, é feita uma descrição de cada uma dessas atividades.

A primeira atividade é intitulada por *Explorando Fractais* e tem como objetivo a familiarização com o ambiente do software de geometria dinâmica e com a lista básica de comandos para o desenvolvimento de todas as atividades propostas nessa sessão. Ao termino dessa etapa, pretende-se fazer a construção do fractal

conhecido por *Triângulo de Sierpinski* e suas possíveis variações. Na figura 71 é mostrado o fractal obtido nessa etapa da oficina.

Figura 71. *Triângulo de Sierpinski no Geometricks*



A segunda atividade é intitulada também por *Explorando Fractais* e tem como objetivo a construção do fractal conhecido por *Tapete de Sierpinski* através de uma sequência de comandos já explorados na atividade anterior. Nesse momento são explorados possíveis variações desse fractal para a obtenção de outros fractais. As figuras 72 e 73 ilustram dois exemplos estudados nessa parte da oficina.

Figura 72. *Tapete de Sierpinski no Geometricks*

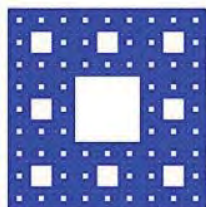
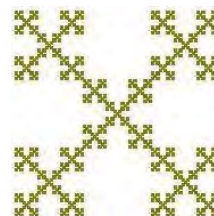


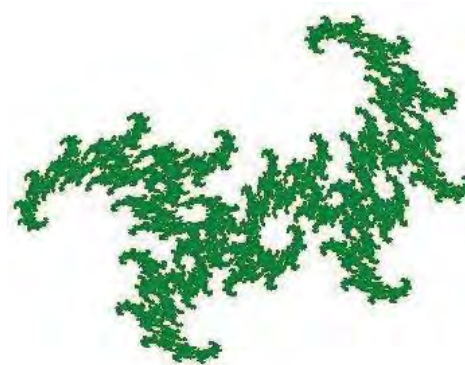
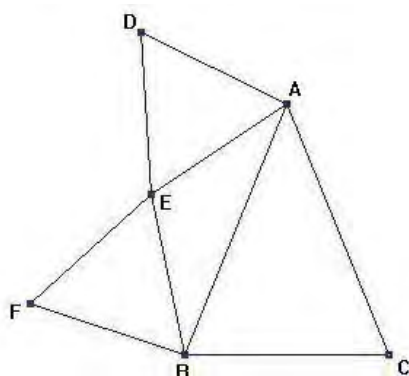
Figura 73. *Variação do Tapete de Sierpinski*



A terceira atividade é intitulada pelo mesmo nome das atividades anteriores e tem como objetivo a construção de fractais classificados por expansão. Para a elaboração e construção desses fractais é necessário conhecimentos de desenho geométrico. As figuras 74 e 75 mostram um dos fractais esperados no desenvolvimento dessa atividade.

Figura 74. *Estrutura geométrica do fractal classificado por expansão*

Figura 75. *Fractal obtido através da estrutura geométrica do lado*



A quarta atividade recebe o mesmo nome das atividades anteriores e tem como o objetivo construir fractais do tipo Dürer. Essa atividade exigiu dos participantes das oficinas uma familiaridade com conceitos geométricos para a sua elaboração. As figuras 76 e 77 mostram um dos fractais almejados no transcorrer dessa etapa.

Figura 76. Estrutura geométrica do fractal tipo Dürer

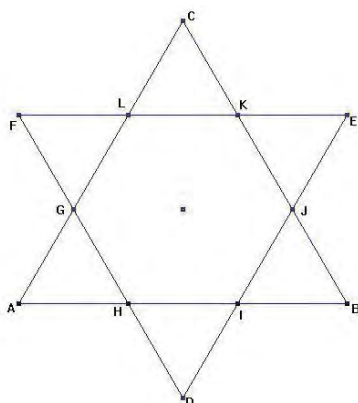
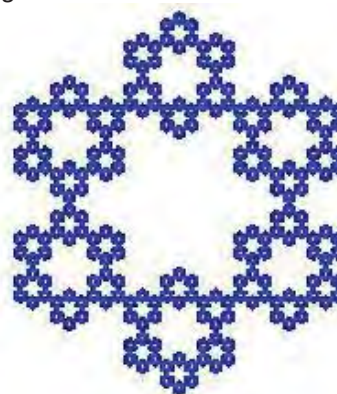


Figura 77. Fractal tipo Dürer obtido através da estrutura geométrica ao lado



4.3.3. Sobre as atividades com os materiais manipuláveis

Nesse momento da oficina, o conjunto de atividades está focado no uso de materiais manipuláveis e dividido em três partes: a primeira e a segunda partes são atividades que têm como objetivo extrair conceitos matemáticos existentes na construção desses fractais geométricos. O uso de papel e o seu manuseio para fazer dobraduras com a finalidade de construir fractais predominam na terceira etapa dessa intervenção. A seguir, é feita uma descrição de cada uma das atividades propostas.

Como comentado anteriormente, as duas primeiras etapas dessa fase da oficina se destinaram a explorar conceitos matemáticos como área, perímetro, infinito, sequência, etc. na construção de dois fractais: o *Floco de Neve* e o *Triângulo de Sierpinski*. Esses conceitos foram observados em cada um dos estágios de obtenção desses fractais em busca da existência de padrões que relacionassem tais conceitos com os fractais explorados.

A terceira etapa desse conjunto de atividades tem um enfoque diferente das atividades anteriormente exploradas. Essa atividade se apóia no ato de recortar e dobrar papel na construção de alguns fractais. As figuras 78 e 79 trazem um exemplo desenvolvido nesse momento.

Figura 78. Planificação do fractal Cascata Triangular

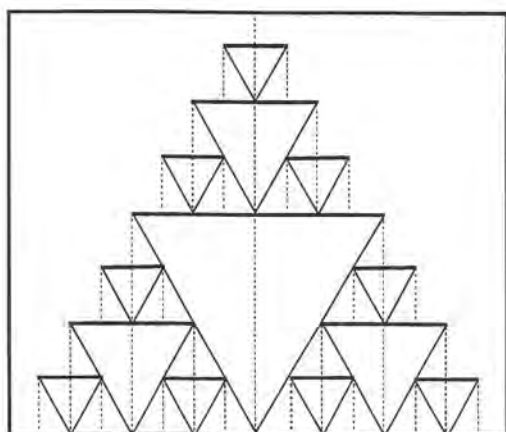
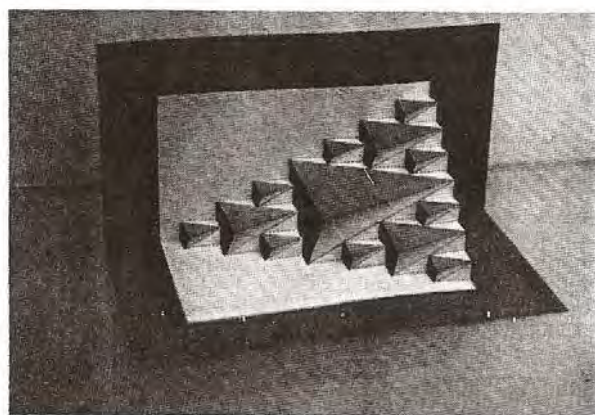


Figura 79. Fractal Cascata Triangular obtido por recorte e dobradura de papel



CAPÍTULO V

ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo, descrevo uma síntese das informações obtidas através dos questionários e das atividades realizadas nas duas oficinas.

Vale observar que esse questionário foi aplicado em dois momentos. O primeiro foi antes da realização das oficinas e o segundo aconteceu após a realização das oficinas.

5. Um perfil dos participantes

O questionário foi aplicado com a intenção de conhecer melhor o processo de formação dos participantes da pesquisa: como os professores trabalham no ensino de geometria em sala de aula, o seu comportamento em relação ao uso do computador em sua vida pessoal e profissional, e como a informática influencia o processo de ensino e aprendizagem dos fractais. Os participantes foram consultados e todos os (5) professores e os (20) alunos do curso de licenciatura concordaram em participar dessa fase da pesquisa. A seguir, são apresentados os resultados. O questionário foi aplicado aos professores de matemática e estudantes do curso de licenciatura no primeiro semestre de 2009.

5.1. Resultado dos questionários aplicados aos professores

Você cursou a sua graduação em:

Tabela 5. *Instituição de ensino de graduação*

Instituição	Frequência	Porcentagem
Pública	3	60%
Privada	2	40%

Qual o ano do término da sua graduação?

Tabela 6. *Ano de conclusão de graduação*

Período	Frequência	Porcentagem
1978 ─ 1988	3	60%
1988 ─ 1998	1	20%
1998 ─ 2008	1	20%

Segundo a tabela 6, 20% dos docentes se graduaram na última década, contra 20% na década até 1998, e 60% na década até 1988, o que pode demonstrar certa influência ou não para a pesquisa realizada, pois no período de maior concentração dos dados da amostra corresponde a uma época na qual as instituições de ensino superior não realizavam de maneira significativa e representativa uma discussão sobre o uso da tecnologia para a Educação e de possíveis impactos ao setor educacional. Devemos salientar também que durante as últimas décadas não ocorreram mudanças significativas nas grades curriculares dos cursos de graduação em Matemática que pudessem influenciar a formação dos docentes.

Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação?

Tabela 7. *Disciplinas relativas à Geometria na graduação*

	Frequência	Porcentagem
Sim	4	80%
Não	1	20%

Nesse período, vivenciou experiências que influenciaram seu modo de trabalhar a geometria na sala de aula? Quais?

Tabela 8. Experiências relativas ao trabalho com geometria

	Experiências	Frequência	Porcentagem
Sim	Criação de sólidos	5	38,5%
	Softwares educacionais	3	23,0%
	Teve só desenho geométrico	1	7,7%
	Teve desenho geométrico com alguns softwares	2	15,4%
Não	Nenhuma experiência pedagógica relevante	2	15,4%

Vale ressaltar que 84,6% dos professores relataram que viveram experiências educacionais que influenciaram seu modo de tratar a geometria na sala de aula, entre elas, pode-se citar: a criação de sólidos, o tangran, as planificações, os softwares educacionais. Vale mencionar que os professores que responderam não (15,4%) à questão 4 (Nesse período, vivenciou experiências que influenciaram seu modo de trabalhar a geometria em sala de aula? Quais?), não citaram nenhuma experiência pedagógica relevante: os dois professores mencionaram que na disciplina de desenho geométrico foram desenvolvidas atividades, porém nenhuma delas influenciaram de maneira significativa a abordagem da geometria em sala de aula, pois na época eles já lecionavam na rede estadual de ensino e o que estava sendo abordado no curso de graduação não significava novidade em relação ao que eles já haviam aprendido na prática (vide tabela 8).

Cursou disciplinas específicas de informática na graduação?

Tabela 9. Disciplinas relativas a informática na graduação

	Frequência	Porcentagem
Sim	2	40%
Não	3	60%

A questão 5 (Cursou disciplinas específicas de informática na graduação?) permitiu mostrar que 40% dos professores cursaram disciplina específica de

informática e 60% não tiveram nenhuma disciplina específica na graduação (vide tabela 9).

Você utiliza as novas tecnologias em sala de aula?

Tabela 10. *Uso de tecnologias em sala de aula*

	Frequência	Porcentagem
Sim	1	20%
Não	4	80%

Vimos que, ao questionar o corpo docente sobre a prática de novas tecnologias em sala de aula, foi possível constatar que 80% deles não as utilizam, mesmo tendo a formação para trabalhar em classe (vide tabela 10). Enquanto apenas 20% utilizam as novas tecnologias em sua prática docente. Esta informação ganha destaque quando confrontada com a resposta à questão 7 (Fez cursos de capacitação para desenvolver atividades de ensino auxiliadas pelo computador?), que foi respondida negativamente pela totalidade dos professores pesquisados (vide tabela 11).

Fez cursos de capacitação para desenvolver atividades de ensino auxiliadas pelo computador?

Tabela 11. *Capacitação para o uso do computador no ensino*

	Frequência	Porcentagem
Sim	0	0%
Não	5	100%

A falta de formação continuada para os professores de matemática podem impedir uma reflexão sobre o uso de novas tecnologias ao ensino da matemática, em especial, no ensino de geometria. Esse fato pode ocasionar insegurança por parte do docente em usar esse tipo de recurso em sala de aula.

A instituição onde você trabalha tem a seu dispor um laboratório de informática?

Tabela 12. *Acesso a laboratório de informática*

	Frequência	Porcentagem
Sim	5	100%
Não	0	0%

Todos os docentes afirmaram existir um laboratório de informática em sua unidade escolar, disponível para uso educacional (vide tabela 12). Porém, problemas técnicos relacionados à falta de manutenção de equipamentos do laboratório impedem o uso desse ambiente para fins educacionais.

Se você marcou sim, responda: você desenvolve algum trabalho a esse respeito? Como? Por quê?

Tabela 13. *Utilização do laboratório de Informática*

	Utiliza o laboratório	Frequência	Porcentagem
Sim	Pesquisa	3	60%
	Trabalhos administrativos	1	20%
	Aula	1	20%

Contudo, 80% dos professores não utilizam o laboratório por diversos motivos, como: por falta de suporte técnico e pedagógico, ter número de computadores insuficientes, por não conhecer a sala de informática, por falta de condições de uso ou por necessidade de cursos de capacitação para poder utilizá-la.

Gostaria de conhecer mais sobre o uso de novas tecnologias em educação? E sobre seu uso no ensino de geometria? Tem algum interesse em especial?

Todos os docentes pesquisados demonstraram um interesse de se capacitar em softwares educacionais, em especial, os relacionados ao uso da geometria, da álgebra e de funções. Os professores sinalizaram que se existissem tais cursos de formação continuada seriam um incentivo para eles desenvolverem atividades fundamentadas no uso de novas tecnologias.

Tabela 14. *Interesse no uso da tecnologia na Educação*

	Experiências	Frequência	Porcentagem
--	---------------------	-------------------	--------------------

Sim	Softwares de Geometria	5	45,5%
	Softwares de Álgebra	2	18,2%
	Softwares de Funções	4	36,3%
Não		0	0%

Você conhece o LOGO ou o Geometricks? Se sim, comente como você usou esse tipo de recurso.

Tabela 15. *Conhece o LOGO ou Geometricks*

	Frequência	Porcentagem
Sim	0	0%
Não	5	100%

Os docentes apresentaram total desconhecimento sobre os softwares Geometricks e LOGO. Alguns acontecimentos podem influenciar para ocorrer esse desconhecimento: a falta de cursos de formação continuada focadas no uso de novas tecnologias no ensino de matemática, a falta de um laboratório de informática adequado as necessidades da escola e da equipe gestora não incentivar esse tipo de recurso para a prática docente.

Você já ouviu falar sobre Geometria Fractal ou a Teoria do Caos? Se sim, o que você conhece sobre os dois assuntos.

Tabela 16. *Conhecimento sobre a Geometria Fractal ou Teoria do Caos*

	Frequência	Porcentagem
Sim	0	0%
Não	5	100%

Em relação à Geometria Fractal e a Teoria do Caos, os docentes demonstraram desconhecer os dois assuntos. Podemos considerar a ausência desses assuntos nas grades curriculares dos cursos de formação de professores e de cursos de formação continuada como o principal fator que influencia para ocorrer essa desinformação sobre os temas em questão.

5.1.1. Comentários sobre as respostas dos questionários dos professores

Com base nas informações dispostas nas tabelas 5 a 16, destacamos o seguinte:

- A maioria dos participantes tem experiência docente de no mínimo cinco anos com a disciplina de matemática;
- Em sua formação inicial, cursaram disciplinas de Geometria, nas quais desenvolveram atividades que influenciaram a maneira de abordar esse tópico em sala de aula;
- A grande maioria dos professores não utilizava tecnologia da informação e comunicação em sua prática docente e também não participavam de cursos de capacitação sobre essas práticas;
- Todos os professores tinham acesso ao laboratório de informática da escola, porém devido à falta de manutenção desse ambiente, não utilizavam o espaço para fins pedagógicos;
- Apresentaram grande interesse e entusiasmo em conhecer novos softwares para o ensino da matemática e o desenvolvimento de atividades para serem aplicadas em sala de aula;
- Desconheciam totalmente a Geometria Fractal e a Teoria do Caos o que incentivou uma curiosidade dos mesmos em iniciar um estudo sobre esses temas.

5.2. Resultado dos questionários aplicados aos alunos do curso de licenciatura

Em que semestre você está no curso de Matemática?

Através da análise da tabela, pode-se perceber que 100% dos alunos do curso de licenciatura de Matemática participantes dessa pesquisa estavam cursando o 3º semestre (vide tabela 17). O curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição tem a duração de seis semestres realizados no período diurno.

Tabela 17. Semestre do curso de Matemática

Instituição	Frequência	Porcentagem
3º Semestre	20	100%
Outros	0	0%

Os alunos não tinham cursado até esse momento disciplinas da área de Geometria, de Análise e nem de Informática. Eles não tinham usado o laboratório de informática para fins pedagógicos, esse ambiente somente fora utilizado para fins pessoais dos alunos.

Qual o ano da conclusão de sua graduação?

Tabela 18. Ano de conclusão do curso de Matemática

Instituição	Frequência	Porcentagem
2010	20	100%
Outros	0	0%

Como o curso é de seis semestres, a conclusão do curso de licenciatura em Matemática estava previsto para o ano de 2010. Até o presente momento, todos os participantes tinham a previsão de concluir sua graduação na data prevista (vide tabela 18).

Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação? Se afirmativo, responda: Quais foram? Quais conteúdos foram explorados?

Tabela 19. Disciplinas de geometrias cursadas na graduação

Instituição	Frequência	Porcentagem
Sim	0	0%
Não	20	100%

Até o momento de aplicação das oficinas, os participantes não tinham tido contato algum com disciplinas focadas na Geometria ou seu ensino e de Tecnologias e suas aplicações, assim, a oficina oferecida na pesquisa é o primeiro

contato desses alunos participantes do trabalho com essas áreas do conhecimento, tal fato é apresentado na tabela 19 acima descrito.

Cursou disciplinas específicas de informática na graduação? Se afirmativo, responda: Como ocorreu o uso dessa tecnologia?

Tabela 20. *Disciplinas de informática cursadas na graduação*

Instituição	Frequência	Porcentagem
Sim	0	0%
Não	20	100%

Até a aplicação e o desenvolvimento da oficina proposta nesse trabalho, a grade curricular do curso não tinha dado oportunidade dos alunos de terem um contato com disciplinas de informática. Após o desenvolvimento das atividades propostas, foram realizadas as seguintes questões para os participantes da pesquisa, dos quais obtemos os seguintes resultados:

Quais temas de Matemática você poderia explorar com os fractais?

Tabela 21. *Temas de Matemática relacionados com os fractais*

Experiências	Frequência	Porcentagem
Sequências	14	25,4%
Infinito	10	18,2%
Geometria Plana	20	36,4%
Números Complexos	4	7,3%
Outros	7	12,7%

Os participantes ao serem questionados sobre que temas poderiam explorar com os fractais em sala de aula enumeraram os temas sequências, infinito, geometria plana e números complexos entre outros como assuntos que poderiam elaborar atividades matemáticas abordando o tema em questão.

A Geometria Fractal é um bom tema para ser explorado em sala de aula? Justifique.

Em relação ao questionamento da Geometria Fractal em ser um tema a ser explorado em sala de aula, os participantes apresentaram certa divergência sobre a exploração ou não do tema, a maioria (60%) considerou ser os fractais um tema interessante para trabalhar em sala de aula. De contrapartida, alguns (30%) não consideraram ser um tema bom para se trabalhar com os alunos e poucos participantes (10%) não tinham uma opinião formada sobre a questão solicitada.

Tabela 22. *Explorar a Geometria Fractal na sala de aula*

<i>Instituição</i>	<i>Frequência</i>	<i>Porcentagem</i>
<i>Sim</i>	12	60%
<i>Não</i>	6	30%
<i>Não tem opinião formada</i>	2	10%

Os participantes que apontaram de maneira negativa a exploração do tema em sala de aula justificaram a sua resposta, apoiados nas dificuldades que eles apresentaram no transcorrer das atividades desenvolvidas na oficina, apresentar-se-á com um aprofundamento de detalhes no momento em que se fará a análise das atividades aplicadas na pesquisa.

Quais as suas dificuldades ao desenvolver os fractais nas atividades propostas e de utilizar o software LOGO na sua aplicação?

Outro questionamento desencadeado fora no sentido de verificar o grau de dificuldade apresentado pelos participantes da oficina ao desenvolverem as atividades propostas no ambiente de programação LOGO. As dificuldades apresentadas foram organizadas na tabela 23.

Tabela 23. *Dificuldade ao desenvolver os fractais no LOGO*

<i>Dificuldades Apresentadas</i>		<i>Frequência</i>	<i>Porcentagem</i>
<i>Sim</i>	Com o ambiente computacional	7	12,3%
	Com a linguagem de programação	12	21,2%
	Conceitos Geométricos	9	15,9%
	Conceitos Matemáticos	11	19,4%
	Construção dos Fractais	17	29,3%

Não	Não apresentou dificuldades ao construir os fractais	1	1,9%
------------	--	---	------

5.2.1. Comentários sobre as repostas dos questionários dos alunos do curso de licenciatura

Com base nas informações dispostas nas tabelas 17 a 23, destacamos o seguinte:

- Todos os participantes estão cursando o 3^o semestre;
- Até o momento da realização da pesquisa, não haviam cursado nenhuma disciplina sobre Geometria e nem sobre Informática. Isso foi um dos motivos para participarem da oficina sobre fractais;
- Todos os estudantes do curso de licenciatura em Matemática tinham acesso ao laboratório de informática da instituição, porém usavam esse espaço para a leitura de emails, digitação de trabalhos e uso pessoal;
- Apresentaram grande interesse e entusiasmo em conhecer novos softwares para o ensino da matemática e o desenvolvimento de atividades para serem aplicadas em sala de aula;
- Desconheciam totalmente a Geometria Fractal e a Teoria do Caos o que incentivou uma curiosidade dos mesmos em iniciarem um estudo sobre os temas propostos.

5.3. Os participantes estudando fractais

Nessa seção, apresento e discuto as dificuldades e angústias dos alunos e dos professores ao lidarem com os fractais e os acontecimentos marcantes ocorridos nas oficinas. A apresentação dos dados obtidos será divulgada de maneira separada, primeiramente, os alunos do curso de licenciatura em Matemática, e num segundo momento os professores.

5.3.1. A oficina com os participantes

A oficina com os estudantes do curso de licenciatura foi realizada numa instituição de ensino superior de uma cidade da grande São Paulo. Ocorreu em 2009, no mês de abril, durante as aulas de Laboratório de Ensino, pois segundo o docente responsável da disciplina, até aquele momento do curso de graduação os alunos não haviam tido nenhum contato com disciplinas focadas no ensino de geometria e de uso de novas tecnologias. A oficina, então, seria uma oportunidade enriquecedora para a formação dos futuros professores. Para que fosse concluída, foram necessários três encontros (cinco horas por encontro), em que os alunos do curso de licenciatura trabalharam no laboratório de informática durante o primeiro e segundo encontro, e, no terceiro encontro foram à sala de aula da disciplina, que possui recurso multimídia, um DVD e um televisor de 29 polegadas.

Figura 80. *Sala de Informática*

Ambiente utilizado no primeiro e segundo encontro



Figura 81. *Sala de aula da disciplina*

Ambiente utilizado no terceiro encontro



A oficina com os professores de matemática foi realizada numa escola da rede pública estadual, localizada no município de São Paulo. Ocorreu em 2009, nos meses de maio, junho e julho, nas Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPCs) dos professores de Matemática, que era o único horário possível para reunir os professores. Para que fosse concluída, foram necessários quinze encontros (duas horas por encontro), sendo que os docentes trabalharam durante os doze primeiros encontros, no laboratório de informática e, nos últimos três encontros, na sala dos professores, que tem dois computadores com acesso à Internet e um televisor de 29 polegadas conectado aos computadores.

Figura 82. *Sala de Informática*

Ambiente utilizado nos primeiros encontros

Figura 83. *Sala dos professores*

Ambiente utilizado nos últimos encontros



A primeira etapa das oficinas foi constituída de três atividades. Estas atividades desenvolveram-se no ambiente de programação LOGO, no caso dos estudantes de licenciatura ocorreu no laboratório de informática da instituição de ensino superior e teve o seu início às oito horas e término às treze horas, para a realização dessas atividades foram necessários dois encontros, totalizando uma duração de dez horas. Enquanto, a dos professores de matemática realizou-se no laboratório de informática da escola e teve início às 10:40 hs e término às 12:40 hs, para a sua realização foram necessários oito encontros, totalizando uma duração de dezesseis horas.

A segunda etapa da oficina foi constituída de três atividades. Estas atividades desenvolveram-se através de materiais manipulativos, como por exemplo, papel, régua, tesoura e lápis. A oficina dos estudantes de licenciatura realizou-se na sala de aula da disciplina e teve o seu início às oito horas e término às treze horas, para a realização dessas atividades foram necessários um encontro, totalizando uma duração de cinco horas, já a oficina dos professores de matemática realizou-se na sala dos professores da escola e para sua realização foram necessários três encontros, totalizando uma duração de seis horas.

A terceira etapa da oficina era constituída de quatro atividades. Essas atividades foram desenvolvidas no ambiente de geometria dinâmica Geometricks. Essa fase da oficina dos estudantes de licenciatura estava prevista para realizar-se no laboratório de informática da instituição de ensino superior e teria uma duração de cinco horas. Porém não foi possível realizar essa etapa prevista por falta de tempo. Em relação à oficina dos professores aconteceu no laboratório de informática da escola, para a sua realização foram necessários quatro encontros, totalizando uma duração de oito horas.

5.3.2. Discussão dos dados das oficinas

A discussão, apresentada neste capítulo, foi organizada a partir de uma aproximação com os dados obtidos na realização das duas oficinas oferecidas juntas aos alunos do curso de licenciatura em Matemática e dos professores de matemática, tendo como direção a pergunta: ***Como estudantes de licenciatura em Matemática e professores de matemática concebem os limites e as possibilidades do ensino de Geometria Fractal na escola básica?***

Para tentar responder essa pergunta norteadora foram estruturados quatro eixos temáticos. Esses quatro eixos são:

Eixo 1 - Como os participantes da pesquisa concebem os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática;

Eixo 2 - A interação dos participantes da pesquisa com a tecnologia informática utilizada;

Eixo 3 - As dificuldades com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais;

Eixo 4 - As dificuldades no ensino desse tópico na escola básica que os participantes conseguem antecipar.

Ao basear nos quatro eixos temáticos, no aprofundamento teórico realizado nos capítulos I ao V desse trabalho e nos materiais produzidos pelos participantes das oficinas, a seguir são apresentados alguns dos resultados obtidos nessa pesquisa.

5.3.2.1. Os conceitos matemáticos exigidos foram diferentes

Através das atividades vivenciadas por todos os participantes, eles puderam ressaltar que a Geometria Fractal mobiliza diversos conceitos matemáticos. Os trechos descritos abaixo ilustram a opinião dos participantes referentes aos conceitos específicos da Matemática que foram empregados para a construção dos fractais.

Aluna Viviane: *Eu acho que num primeiro momento, o que mais me chamou a atenção ao explorar os fractais foi à geometria que está envolvida na construção dos fractais. Foi necessário conhecer as propriedades que envolvem a construção de triângulos, quadrados, ângulos, rotação, dividir segmentos, etc.*

Nilson: *Quando você diz: construção de triângulos, quadrados, ângulos, rotação... o que quis dizer? Poderia detalhar melhor?*

Aluna Viviane: *Bem, por exemplo, ao construir um triângulo equilátero pude perceber que é necessário ter três lados iguais, com os ângulos internos de 60° . Quando eu construí um quadrado foi necessário ter o conhecimento que seus quatro lados são iguais e que seus ângulos internos formam o ângulo de 90° .*

Figura 84. Alunos do curso de licenciatura fazendo atividades no SuperLogo



Aluno Francisco: *Quando trabalhamos nas atividades que exigiam alguns cálculos para analisar os diferentes estágios no fractal, percebemos a existência de alguns padrões ou sequências (progressões geométricas) ao olharmos para suas áreas ou perímetros.*

Figura 85. Alunos do curso de licenciatura discutindo sobre as regularidades dos fractais



Aluna Luciana: *Os conceitos de área, perímetro, progressão geométrica, série, fator comum, infinito foram alguns dos tópicos que pude perceber ao trabalhar com os fractais em algumas das atividades propostas.*

Professora Elisa: *Nas atividades que foram aplicadas pude perceber três momentos, e em cada um desses momentos os conceitos matemáticos exigidos foram diferentes.*

Nilson: *Como assim diferentes?*

Professora Elisa: *Quando trabalhamos no Logo, foram exigidos os conceitos que envolviam as figuras planas (triângulo, quadrado, pentágono, etc.). Ao pensarmos em um triângulo equilátero, era necessário saber que é uma figura plana de três lados iguais e que seus ângulos internos medem 60° , sendo a mesma coisa para um quadrado, ou seja, uma figura plana de quatro lados iguais e que seus ângulos internos medem 90° .*

Nilson: *E nos outros momentos que você mencionou? Que conceitos matemáticos você percebeu?*

Professora Elisa: *Nas atividades que focavam o lado mais algébrico dos fractais, se eu posso falar assim, percebi o conceito de área e perímetro que são conceitos que provocam certas confusões em nossos alunos, a idéia de sequência, especificamente a de progressão geométrica, série, infinito que é um conceito pouco explorado dentro das aulas de matemática, e não sei se posso considerar como um conceito, mas a ideia de levantar conjecturas relacionadas às regularidades e padrões vistas nos fractais foi o que me chamou a atenção.*

Nilson: *Ao trabalhar com o Geometricks, que conceitos matemáticos você pode perceber?*

Professora Elisa: *Bem, os conceitos explorados no Geometricks foram diferentes dos vistos no Logo. No Geometricks, você explora mais a concepção de construção geométrica, ou seja, como se utilizasse régua e compasso. Dividir um segmento em partes iguais, perpendicularismo, ponto médio, ângulo e rotação.*

Os resultados apresentados nas falas dos alunos de licenciatura e professores de matemática já eram esperados uma vez que são ressaltados na literatura, como por exemplo, Nazuto (2007) percebeu que a autossimilaridade existente nos fractais contribui para o processo de generalização das fórmulas de progressão geométrica, pois desenvolve no aluno a percepção dos padrões e das regularidades que permite a construção de conjecturas.

Ao explorar a geometria fractal percebeu-se o emprego de diversos conceitos da geometria euclidiana. Em sua pesquisa, Almeida (2006, p. 137) concluiu que

sua aplicação adequada para cada faixa etária, só poderá trazer benefícios ao ensino da geometria, pois as duas podem se complementar, ampliando a visão dos matemáticos e dos que dela se utilizam.

5.3.2.2. Não consigo elaborar o programa para criar os fractais

Na interação dos participantes com a tecnologia informática utilizada, o Geomatricks e o SuperLogo, as dificuldades encontradas pelos estudantes do curso de licenciatura e pelos professores de matemática no que diz respeito ao emprego desse softwares.

Ao realizarem as atividades no software SuperLogo os participantes perceberam que alguns dos comandos agem de maneira direta, ou seja, ao digitar o comando já é apresentado na tela de trabalho do SuperLogo um resultado. Isso ocorre, por exemplo, em comandos do tipo *pf*, *pt*, *pd* ou *pe*. Porém, existem outros comandos que ao serem digitados não provocam nenhuma alteração em um primeiro momento, mas após digitar outra ação percebem-se seus efeitos, por exemplo, ao digitar *mudecl* ou *mudeel*. Esses comandos alteram a espessura ou a cor da linha traçada pela tartaruga. Essa situação ficou evidente nos trechos transcritos pela aluna do curso de licenciatura e pelo professor de matemática que se seguem:

Aluna Viviane

Comando	Digite	Descreva o resultado
ul	UI	Não aconteceu nada

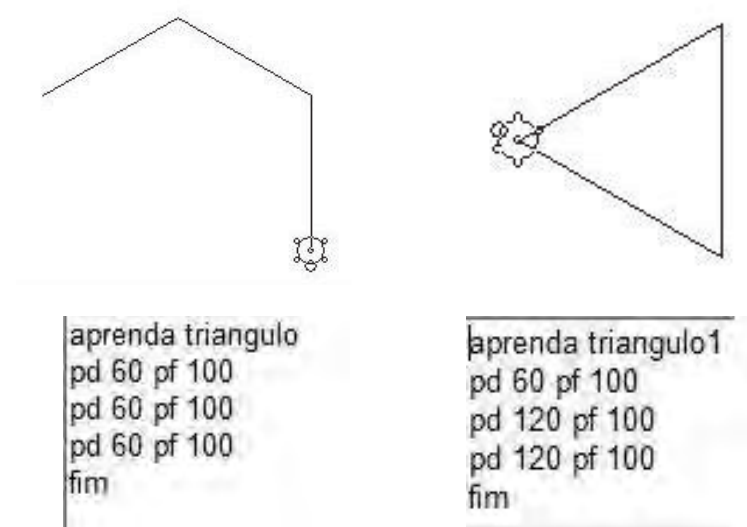
un	pf 50	<i>Traçou um risco rosa largo</i>
	pe 90	<i>A tartaruga Virou para cima</i>
	Un	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 100	<i>Andou para frente sem traçar</i>
	Ul	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 20	<i>Fez um traço pequeno</i>
	mudecl 2	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 50	<i>Fez um traço verde</i>

Professor Max

Comando	Digite	Descreva o resultado
un	Ul	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 50	<i>Traçou um risco rosa largo</i>
	pe 90	<i>A tartaruga Virou para esquerda</i>
	Un	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 100	<i>Andou para frente sem traçar</i>
	Ul	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 20	<i>Fez um traço diferente</i>
	mudecl 2	<i>Não aconteceu nada</i>
	pf 50	<i>Fez um traço verde</i>

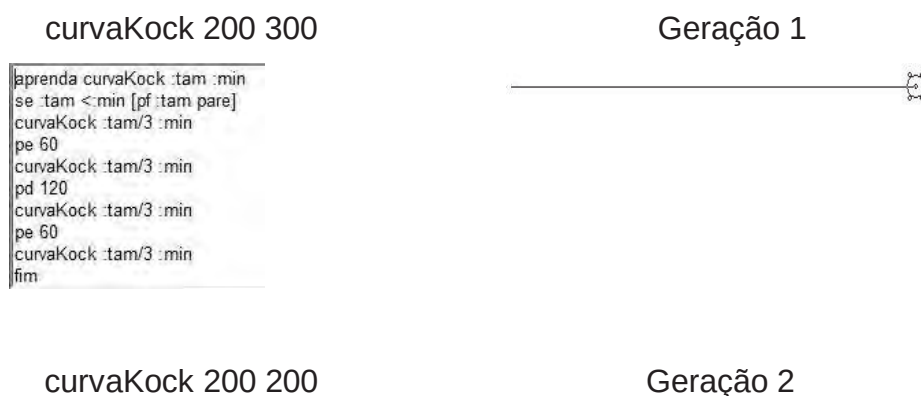
Todos os participantes das oficinas perceberam que a construção do triângulo no SuperLogo não é usual, ou seja, não é a medida do ângulo interno de 60° que utilizamos e sim a do ângulo externo de 120° . A figura 86 ilustra que ao tentar fazer uma virada de 60° , a linha poligonal não fecha para formar o triângulo desejado.

Figura 86. Construção do triângulo por alunos



A construção do fractal conhecido como *Curva de Koch no SuperLogo* exige uma familiarização com o ambiente de programação, generalização dos conceitos matemáticos e de construção geométricas. Os participantes da pesquisa não possuíam nenhuma familiaridade com o ambiente e o primeiro contato com o SuperLogo ocorreu com a realização das atividades propostas pela pesquisa. Essa situação ficou demonstrada com os questionários aplicados antes da realização das oficinas. O fato dos participantes não conhecerem o ambiente, não terem tido estudo prévio em geometria, no caso dos alunos de licenciatura, não compromete a realização das atividades, porém é preciso ajustar as atividades de forma a permitir a iniciação dos alunos. A figura 87 mostra a sequência de imagens que gera o fractal pretendido.

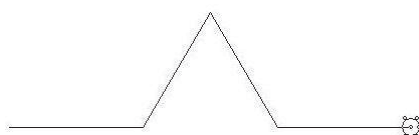
Figura 87. Diferentes níveis da curva de Koch



```

aprenda curvaKock :tam :min
se :tam <:min [pf :tam pare]
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
pd 120
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
fim

```



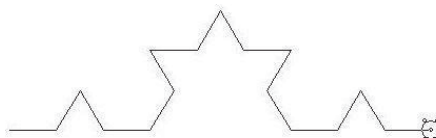
curvaKock 200 50

```

aprenda curvaKock :tam :min
se :tam <:min [pf :tam pare]
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
pd 120
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
fim

```

Geração 3



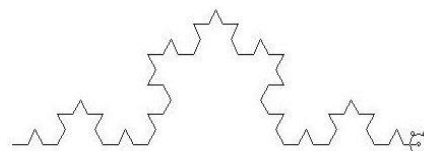
curvaKock 200 15

```

aprenda curvaKock :tam :min
se :tam <:min [pf :tam pare]
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
pd 120
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
fim

```

Geração 4



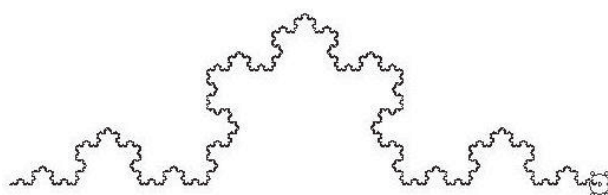
curvaKock 500 1

```

aprenda curvaKock :tam :min
se :tam <:min [pf :tam pare]
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
pd 120
curvaKock :tam/3 :min
pe 60
curvaKock :tam/3 :min
fim

```

FRACTAL – Curva de Koch



De um modo geral, os participantes apresentaram dificuldades na construção do fractal proposto, como por exemplo, fazer a generalização do processo de elaboração do fractal (procedimento do programa) em relação aos seus estágios iniciais; fazer a conexão das informações matemáticas empregadas para a solução do problema proposto e dominar os comandos da linguagem de programação.

Essa dificuldade em fazer a generalização ocorreu com os alunos de licenciatura devido ao fato de não terem cursado disciplinas focadas em linguagem de programação, o que fica acentuado quando eles precisam trabalhar com um

ocorreu na maioria das vezes devido a problemas na estrutura lógica do programa elaborado. Em momentos como esse, o pesquisador interferiu orientando sobre os conteúdos matemáticos empregados na construção do fractal proposto.

Os estudantes do curso de licenciatura de Matemática não desenvolveram as atividades propostas no software Geometricks, pelos seguintes motivos:

- A etapa inicial de aplicação da oficina que corresponde as atividades associadas ao SuperLogo estava prevista para um encontro, porém para a sua realização foram necessários dois encontros. Isso ocorreu devido as dificuldades que os participantes apresentaram com o ambiente;
- Verificou-se tardiamente que a Instituição não possuía a licença para uso do software Geometricks. Não houve tempo para que fosse feita sua aquisição.

5.3.2.3. Algumas coisas são viáveis, mas outras não

Observa-se que os participantes conseguem antecipar as possíveis dificuldades no ensino de fractais geométricos no ensino básico. Os trechos descritos abaixo ilustram a opinião dos participantes sobre esse assunto.

Professora Elisa: *Bem, Nilson, eu acho que algumas coisas são viáveis em ensinar no ensino médio, mas, outras coisas não são viáveis ao ensino de fractais no ensino médio.*

Nilson: *Mas o que seria viável ou não em sua visão como professora?*

Professora Elisa: *Você [Nilson] apresentou alguns softwares, por sinal bem interessante, mas temos alguns problemas com o uso do laboratório de informática da escola. O laboratório de informática tem equipamentos desatualizados, não possui um técnico de informática para manter o material em ordem, isso dificulta o seu uso, pois as turmas de alunos têm uma quantidade numerosa o que inviabiliza o seu uso, já que nosso laboratório possui dez máquinas e nem todas funcionam. O que obrigaria quatro ou cinco alunos por máquina dificultando desenvolver qualquer tipo de atividade nesse ambiente.*

As falas dos professores de Matemática estão impregnadas com suas experiências, crenças e reflexões de sala de aula, esse contexto pode ser considerado como cultura docente. Em relação a esse conceito, Pérez Gómez (2001, p. 164) define cultura docente como

o conjunto de crenças, valores, hábitos e normas dominantes que determinam o que esse grupo social considera valioso em seu contexto profissional, assim como os modos politicamente corretos de pensar, sentir, atuar e se relacionar entre si. Na cultura deste grupo social, será necessário indagar as regras explícitas e ocultas que regulam seus comportamentos, as histórias e os mitos que configuram e dão sentido a suas tradições e identidades, assim como os valores e as expectativas que de fora pressionam a vida escola e da aula.

Ao focar a cultura docente, deve-se mencionar que atualmente as suas principais características são: isolamento do docente e autonomia profissional; colegialidade burocrática e cultura de colaboração; saturação de tarefas e responsabilidade profissional; ansiedade profissional e caráter flexível e criativo da função docente.

Segundo Pérez Gómez (2001, p. 168), o isolamento do docente pode ser considerado uma das características mais prejudiciais da cultura docente. A cultura docente pode amarrar a defesa de sua autonomia profissional com a tendência ao isolamento. Com essa compreensão errônea, a autonomia profissional induz cada professor, dentro de sua sala de aula, a se sentir dono e livre das pressões e dos controles externos e com a autoridade para governar.

O professor necessita de um momento de solidão para sua reflexão individual de modo que seus pensamentos possam refletir a sua autonomia intelectual, mas também entrar em consenso com seus colegas de profissão para elaborar e desenvolver um projeto comum que convirja para a diversidade criativa e a busca compartilhada (Pérez Gómez, 2001, p. 169).

Segundo Pérez Gómez (2001, p. 177) a perda da legitimação tradicional da tarefa docente, a incerteza dos novos horizontes, acompanhadas pela pressão e pela urgência de responder às exigências do mercado, assim como a escassa consideração social de seu trabalho estão provocando no docente um alto grau de ansiedade e insatisfação profissional. A cultura docente de final de século se nutre, em grande medida, da frustração, ansiedade e desorientação.

A cultura docente é de fundamental importância para determinar a qualidade educativa dos processos de ensino e de aprendizagem, pois determina a natureza das interações entre colegas, como também o significado e a qualidade das interações com os alunos. Assim, a cultura docente pode modelar de maneira pontual a forma de construir a comunicação em cada sala de aula e em cada escola (PÉREZ GÓMEZ, 2001, p.165).

Professor Max: *O Logo é um programa bem interessante que poderia ser utilizado na escola, porém não é possível ser usado na escola, já que não se trabalha com a linguagem de programação no ensino fundamental e médio. A questão que a Elisa levanta é importante, não há suporte técnico para a manutenção do laboratório de informática, o que dificulta bastante o seu uso, isso provoca uma insegurança por não saber se poderá usar o laboratório ou não nas aulas.*

Professora Simone: *Por esse motivo que eu não desenvolvo qualquer tipo de atividade no laboratório de informática.*

Nilson: *Se o laboratório tivesse um profissional responsável em manter o local em ordem e funcionando, você usaria o espaço para ministrar aula de matemática?*

Professora Simone: *Acredito que sim, eu usaria o espaço para dar aula sem problemas.*

Professor Nilton: *O Geometricks pode ser utilizado no ensino de geometria por usar a ideia de régua e compasso, já que são ferramentas pouco utilizadas na aula de Matemática. Hoje não tem a disciplina de Desenho Geométrico que antigamente tinha, nossos alunos não sabem o que é um compasso, um transferidor, um esquadro, etc.*

Nas situações apresentadas, percebe-se o conhecimento pedagógico impregnado na fala dos professores. Segundo Pérez Gómez (2001, p. 185), o estudo do conhecimento pedagógico deve-se relacionar aqui com as suas formas de aquisição, desenvolvimento e experimentação na prática escolar, não meramente como um discurso teórico e especulativo, pois o que nos interessa é a natureza do conhecimento profissional, aquele que orienta realmente a prática dos docentes. É

incontestável que a virtualidade prática deste conhecimento vem também condicionada pelas próprias características da profissionalização, ou seja, pelas condições materiais, sociais e escolares do trabalho docente.

Aluna: *O Logo poderia ser utilizado no laboratório de informática para fazer as atividades iniciais, como por exemplo, construir um polígono regular ou fazer aquelas atividade de recursão. Agora sobre os fractais, achei muito difícil um programa para fazê-los, então acredito que os alunos terão uma dificuldade maior ainda em realizar esse tipo de atividade.*

Aluno: *Achei interessante, no sentido do lúdico, aquelas atividades relacionadas com dobraduras para construir os fractais. Às vezes, na aula de Matemática muito imaginária e no cálculo, dá um sentido de algo não palpável, que não ocorre nesse tipo de atividade. Os alunos não gostam de fazer isso. Acho que folha de sulfite para alguns tipos de recorte exigidos torna a atividade difícil de realizar. Teria que escolher o tipo de papel adequado para a atividade, talvez um material um pouco mais duro.*

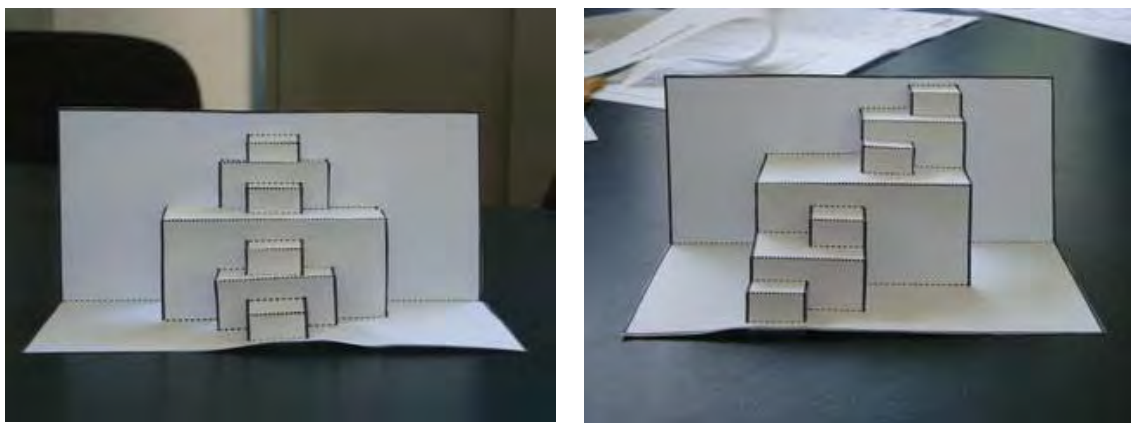
Figura 89. Alunos do curso de licenciatura fazendo dobraduras



Aluno: *Tenho insegurança em lidar com a linguagem Logo, pois precisaria conhecer melhor a linguagem para poder explorá-la em sala de aula, principalmente que nossos alunos hoje dominam as novas tecnologias e talvez o medo de não saber responder é o que incomoda mais ainda.*

Professor Max: *As atividades que envolviam cortar e dobrar foram interessantes por fugirem do usual da aula de Matemática e faz o aluno perceber a ideia da autossimilaridade existentes nos fractais. Dependendo da dobradura, o papel sulfite não é adequado por ser um pouco mole talvez um material um pouco mais duro, porém que não dificulte o cortar e dobrar.*

Figura 90. *Dobraduras produzidas pelos professores de matemática*



Professora Elisa: *Os cálculos de áreas e perímetros são interessantes para perceber a existência de progressões geométricas no processo de cálculo, então é possível, associar os fractais com conteúdos da matemática do ensino básico. Só que na minha visão nossos alunos não têm maturidade o suficiente para fazer esse tipo de cálculo e buscar padrões um pouco mais abstratos, eu evitaria isso. Prefiro explorar a geometria que envolve a sua construção.*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi orientada pela seguinte pergunta: “***Como estudantes de licenciatura em Matemática e professores de Matemática concebem os limites e as possibilidades do ensino de Geometria Fractal na escola básica?***”. Esse questionamento requereu, inicialmente, a realização de um aprofundamento teórico sobre temas como o uso de tecnologia informática na Educação e na Educação Matemática; a formação de professores de Matemática no Brasil; os ambientes de geometria dinâmica e de linguagem de programação e suas implicações para o trabalho docente; o processo de aprendizagem da docência; o uso de materiais manipuláveis no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, e por fim, o que são os fractais, suas propriedades, seu contexto histórico e sua aplicabilidade na Educação.

Essa abordagem teórica baseou-se nos pressupostos de Shulman sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo e sua relação com a atuação do professor; nas ideias de Mizukami e Reali sobre a aprendizagem da docência; as ideias de Papert e Valente sobre o uso da tecnologia informática na Educação e, nas concepções de Penteado sobre a formação de professores para o uso de tecnologia informática.

Com base nisso, elaborou-se um conjunto de atividades com o objetivo de construir os fractais utilizando o software de geometria dinâmica Geometricks; a linguagem de programação SuperLogo e materiais manipulativos. O conjunto dessas atividades foi utilizado numa oficina que foi desenvolvida junto a estudantes do curso de licenciatura de Matemática e professores de Matemática.

A oficina para os estudantes de Matemática foi constituída por vinte alunos de uma instituição formadora da grande São Paulo e a oficina para os professores de Matemática foi formada por cinco docentes da rede estadual de ensino do município de São Paulo. Nelas foram gerados os dados para a pesquisa.

A análise desses dados permitiu apresentar um perfil dos alunos de licenciatura e professores de matemática e discutir o desenvolvimento das atividades desenvolvidas nas oficinas destacando as vantagens e desvantagens do uso de softwares e de materiais manipulativos para o processo de ensino e de aprendizagem de fractais.

A análise foi feita em torno dos seguintes eixos:

Eixo 1 – a percepção dos participantes sobre os fractais como tema gerador de outros tópicos de matemática;

Eixo 2 – a relação dos participantes da oficina com a tecnologia informática utilizada;

Eixo 3 – as dificuldades existentes ou não com os temas matemáticos relacionados ao estudo dos fractais;

Eixo 4 – as possíveis dificuldades para ensinar esse tópico que os participantes da oficina conseguem antecipar.

Ao explorar os fractais nas atividades desenvolvidas no SuperLogo, o objetivo foi o de introduzir os conceitos fundamentais da Geometria Fractal que Mandelbrot (1975) considera como sendo a autossimilaridade, a mesma dimensão em qualquer escala e a lacunaridade. No que diz respeito à linguagem de programação o objetivo foi abordar a noção de procedimento, de subprocedimento, de procedimento com parâmetro e de recursão. Não existia uma concepção prévia de como os alunos do curso de licenciatura ou os professores de matemática lidariam com tais conceitos. A aplicação das atividades exigiu muita cautela por parte do pesquisador, já que o mesmo participava da realização das atividades e existia uma preocupação em não interferir demasiadamente nas respostas.

Os participantes da pesquisa apresentaram dificuldades na construção dos fractais no SuperLogo. Mas é importante, salientar que nas atividades iniciais, tanto os professores de Matemática quanto os alunos de licenciatura, assimilaram os comandos básicos do SuperLogo e, nas atividades seguintes que focalizavam o uso

de procedimentos, subprocedimentos e procedimentos com parâmetros apresentaram resultados que apontaram para um entendimento desses recursos. Porém, nas atividades que exploraram o conceito de recursão, os resultados obtidos nas atividades propostas não foram satisfatórios. Os fatores que contribuíram para isso foram a falta de familiaridade com a ideia de recursividade, o desconhecimento de linguagem de programação e o tempo necessário para desenvolver esse tipo de atividade.

Em relação aos alunos do curso de licenciatura, o fato de não terem cursado disciplinas que utilizassem a linguagem de programação propiciou uma falta de maturidade para lidar com a recursividade presente nas atividades propostas. Os professores de Matemática por não trabalharem com a linguagem em suas atividades docentes apresentaram uma situação semelhante.

A recursividade é uma das principais características dos fractais e a dificuldade em codificar esse conceito para a linguagem de programação produz uma grande barreira para a construção das figuras.

Ao explorar os fractais nas atividades desenvolvidas com materiais manipuláveis, o objetivo central foi o de perceber possíveis regularidades existentes nos fractais observados, tanto os professores de matemática quanto os estudantes de licenciatura conseguiram observar tais regularidades. Além dessas regularidades, as atividades propunham realizar cálculos referentes ao perímetro e a área dessas figuras geométricas. Então, nesse momento da oficina existiu uma observação mais detalhada com os cálculos algébricos implícitos na construção dos fractais.

O estudo de fractais para alunos do curso de licenciatura abriu algumas possibilidades de ensino de outros conteúdos matemáticos, como o estudo de sequências, em especial de progressões geométricas, o conceito do infinito, números complexos, conceitos geométricos relacionados aos polígonos e as construções geométricas. O trabalho proporcionou grande interesse entre os estudantes e foi um fator incentivador para que dois alunos do curso de licenciatura solicitassem uma pesquisa de iniciação científica sobre fractais.

Para os professores de matemática o estudo de fractais permitiu associar conceitos de Desenho Geométrico, como por exemplo, a construção de triângulo equilátero, de quadrado, de pentágono com régua e compasso, dividir um segmento

em partes iguais, dado um ponto, etc., assim pode permitir relacionar os conceitos elementares da matemática com a Geometria Fractal.

Vale salientar, que desenho geométrico deixou de pertencer a grade curricular de matemática para pertencer à de artes.

A situação descrita bloqueia os professores de matemática para abordarem construções geométricas em suas aulas. Penteado (2001, p. 54) considera que a prática docente

depende muito da forma como ele relaciona todos esses elementos. Ele pode lançar mão de alguns deles e não dar importância para outros. Dessa escolha vão depender os diferentes caminhos para a organização de ambientes de aprendizagem e, conseqüentemente, a qualidade desses ambientes.

A falta da oportunidade do professor de Matemática vivenciar em sua prática docente o uso de softwares de geometria dinâmica ou de instrumentos como régua, esquadro, compasso e transferidor pode afetar a decisão do docente sobre qual seria a melhor maneira de abordar um determinado conteúdo específico em sala de aula. Nesse sentido Penteado (2001, p. 62) enfatiza ao dizer que “é preciso avaliar o que queremos enfatizar e qual a mídia mais adequada para atender o nosso propósito”.

Esse contexto conduz o professor para uma prática de mesmice, na qual ele tem o domínio total de todas as situações que podem ocorrer no desenvolvimento da atividade e torna sua realização previsível em todos os seus estágios. Assim, ele fica numa situação de conforto e evita se embrenhar num universo do qual ele não tenha o domínio total. Penteado (2001, p. 64) afirma que “ao caminhar em direção à zona de risco, o professor pode usufruir o potencial que a tecnologia informática tem a oferecer para aperfeiçoar sua prática profissional”. E esse acréscimo em sua aprendizagem docente deveria ser ponderado ao realizar as atividades para a construção de fractais.

É importante reconhecer que as dificuldades não são apenas relacionadas ao conhecimento pedagógico do conteúdo, que no caso dos fractais é bastante limitado por parte do professor e futuro professor. As políticas públicas para o setor educacional têm uma grande responsabilidade na constituição desse quadro. No Brasil, foram disponibilizados, para as escolas públicas uma grande quantidade de laboratórios de informática e diversos cursos de capacitação de professores, porém

não se fornece subsídios para a operacionalização da proposta. Na grande maioria das escolas não há técnicos para cuidar da manutenção dos computadores e prestar um serviço de suporte aos professores que queiram utilizar o laboratório de informática para fins pedagógicos. Além disso, a violência que hoje impera dentro de muitas escolas intensifica os riscos de atividades pedagógicas inovadoras.

A realização dessa pesquisa justifica-se pela necessidade e pelo desejo de promover situações de aprendizagem que contemplem conteúdos mais recentes no campo da Matemática.

A atual grade curricular dos cursos de licenciatura de matemática dificulta a divulgação e o conhecimento da Geometria Fractal na formação desses profissionais e D'Ambrosio (2005) defende uma reformulação dos cursos de licenciatura para que seja possível a introdução de temas recentes da Matemática para o seu ensino.

A alteração do projeto pedagógico dos cursos de formação de professores torna-se o grande desafio para que novos conteúdos matemáticos cheguem à sala de aula dessas instituições formadoras, e por consequência, sejam explorados na sala da escola básica.

São grandes as possibilidades de contribuições desta pesquisa, percebe-se que ela não esgotou o estudo do tema e espera-se que outras pessoas aprofundem e refinem o que aqui foi feito. A primeira contribuição é a de refletir sobre o impacto desse tema específico para a formação (inicial/continuada) do professor de matemática; outro ponto importante é sobre os conceitos matemáticos envolvidos quando se exploram os fractais, quais os possíveis recursos didáticos para auxiliar no processo de aprendizagem deste tema e o desenvolvimento de atividades para sua exploração em sala de aula, focando as possíveis possibilidades e limitações de explorar os fractais com o auxílio de tecnologia informática e materiais manipulativos.

Atualmente, a escola do ensino básico e o ensino superior estão recebendo cada vez mais alunos com necessidades especiais, e a geometria fractal por ser um assunto aparentemente novo, talvez merecesse um estudo mais aprofundado sobre o ensino da geometria fractal para pessoas com necessidades especiais.

No ensino básico, diversas pesquisas realizadas como Eberson (2004), Gouvea (2005), Baier (2005), Baldovinotti (2006) que exploraram o uso de fractais é também preciso pesquisar com maior profundidade como a Geometria Fractal pode

ser inserida como tema de estudo em cursos de licenciatura de Matemática. A pesquisa aqui apresentada traz uma contribuição inicial nesse sentido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMEIDA, A. A. O. de. *Os Fractais na Formação Docente e sua Prática em Sala de Aula*. 2006. 221 f. Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática) PUC, São Paulo. Disponível em:

http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=4031. Acesso em: 11 jan. 2010.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. *Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae*. Anais do XXIV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. Bahia: UFBA, 2004. Disponível em:

www.professores.uff.br/hjbortol/car/library/WIE_George_Adriana.pdf. Acesso em: 20 jan. 2010.

AMARAL, R. B. *A Geometria Dinâmica no Geometricks*. Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2004. Disponível em:

www.sbem.com.br/anais/VII%20ENEM/ARQUIVOS/comun_59.pdf. Acesso em: 26 nov. 2005.

BACKES, A. R.; BRUNO, O. M. *Segmentação de Textura por Análise de Complexidade*. INFOCOMP Journal of Computer Science, Lavras, v. 5.1, p. 1-9, 7 fev. 2006. Disponível em:

<http://www.dcc.ufla.br/infocomp/artigos/v5.1/art11.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2009.

_____. *Técnicas de Estimativa da Dimensão Fractal: Um Estudo Comparativo*. INFOCOMP Journal of Computer Science, Lavras, v. 4.3, p. 1-9, 21 jul. 2005. Disponível em:

<http://www.dcc.ufla.br/infocomp/artigos/v4.3/art07.pdf>. Acesso em: 25 nov. 2009.

BAIER, T. *O nexó “Geometria Fractal – produção da ciência contemporânea” tomado como núcleo do currículo de matemática do ensino básico*. 2005. 147 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) UNESP, Rio Claro.

BALACHEFF, N. La transposition informatique. Note sur um nouveau problème pour la didactique. In: ARTIGUE, M. et al. (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques em France*, Grenoble: La pensée sauvage, 1994, p. 364-370.

_____; SUTHERLAND, R. Epistemological domain of validity of microwords: the case of LOGO and Cabri-Géomètre. In: LEWIS, R.; WENDELSON, P. (ed.). *Lessins from Learning*, Amsterdam: North-Holland/Elsevier Science B. V., IFIP Transactions A46, 1994, p. 137-150.

BALDOVINOTTI, N. J. O Estudo de Fractais para Futuros Professores de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2008, Rio Claro. *Anais...*, Rio Claro: UNESP, 2008a, v.1., p.1 – 14.

_____. *Uma Análise Epistemológica dos Recursos Tecnológicos no Processo Ensino – Aprendizagem dos Fractais no Ensino Médio*. 2006. 80 f. Monografia (Pós-Graduação Lato Sensu em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação) COGEAE, PUC/SP, São Paulo.

BARBOSA, R. B. *Descobrimdo a Geometria Fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 144 p. (Tendências em educação matemática, 6)

BARRETO FILHO, B.; SILVA, C. da. *Matemática aula por aula*. 1. ed. São Paulo: FTD, 2003. 3v. (Matemática aula por aula)

BOGDAN, R., BIKLEN, S. K. *Qualitative Research for Education*. Boston: Allyn and Bacon, 1982.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104 p. (Tendências em Educação Matemática, 2)

BOYER, K. *História da Matemática*. Tradução por Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998. 496 p.

BRASIL. Ministério da Educação/Secretária de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília: MEC/SEMT, 1999. 364 p.

_____. Ministério da Educação / Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Relatório do Exame de Cursos 2003. Matemática vol. 21*. Brasília: INEP/MEC, 2003. 267p. Disponível em: http://download.inep.gov.br/ENC_PROVAO/matematica_v21.pdf, acessado em: 01/11/2007.

DANTE, L. R. *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Ática, 2004. 3v.

D'AMBROSIO, U. Armadilha da Mesmice em Educação Matemática. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, Rio Claro, ano 18, n. 24, p. 95-109, 2005.

EBERSON, R. R. *Um estudo sobre a construção de fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano*. 2004. 177 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) PUC, São Paulo. Disponível em: www.pucsp.br/pos/edmat/ma/linha_3_acad.html. Acesso em: 15 jul. 2009.

GIL, A. C. *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GONÇALVES, A. G. N. *Uma Sequência de Ensino para o Estudo de Progressões Geométricas via Fractais*. 2007. 215 f. Dissertação (mestrado profissional em Ensino de Matemática) PUC, São Paulo. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/andrea_nazuto.pdf. Acesso em: 20 nov. 2009.

GOLDENBERG, M. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. 9. ed. Rio de Janeiro: Record, 2005.

GOUVEA, F. L. *Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópio e Softwares de Geometria Dinâmica*. 2005. 259 f. Dissertação (mestrado em Educação Matemática) UNESP, Rio Claro.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade*. 5. ed. São Paulo: Atual, 2005. 4v.

_____ et al. *Matemática: ciência e aplicações*. 2. ed. São Paulo: Atual, 2004. 3v.

ISOTANI, S.; BRANDÃO, L. O.; MOURA, J. G. *Utilizando a Geometria Dinâmica em Ambientes de Educação à Distância: iGeom e Saw*. Anais do XXV Congresso da Sociedade Brasileira de Computação. São Leopoldo: Unisinos, 2005. Disponível em: www.unisinos.br/diversos/congresso/sbc2005/dados/anais/sbc2005.htm#. Acesso em: 21 nov. 2008.

LLINARES, S; KRAINER, K. Mathematics (student) teachers end teacher educators as Learners. In: GUTIÉRREZ, A. & BOERO, P. (eds.) (2006) *Handbook of research on the psychology of mathematics: past, present and future*. Netherlands: Sense Publishers.

LORENZATO, S. (Org.). *O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, 2006. 177 p. (Formação de professores)

LUDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU, 1986. 99 p.

MANDELBROT, B. *The Fractal Geometry of Nature*. 3. ed. New York: W. H. Freeman, 1983.

_____. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension; suivie d'un "Survól du Langage fractal"*. 3th ed. Flammarion, 1989.

MILLS, G. *Super Logo v. 3.0*, Berkeley, Versão em Português, São Paulo: NIED, Unicamp-Campinas, 1999, MS Windows, software educativo (geometria da tartaruga).

MIZUKAMI, M. da G. N., et al. *Escola e aprendizagem da docência: processos de investigação e formação*. São Carlos: EdUFSCar, 2006. 203 p.

_____; Reali, A. M. de M. R. (Orgs.) *Aprendizagem profissional da docência: saberes, contextos e práticas*. São Carlos: EdUFSCar, 2004. 347 p.

_____. Aprendizagem da docência: professores formadores. *Revista E-Curriculum*, São Paulo, v. 1, n. 1, dez. – jul. 2005-2006. Disponível em: <http://www.pucsp.br/curriculum>, acesso em: 30/12/2007.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. *A formação matemática do professor – Licenciatura e prática docente escolar*. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 120 p. (Tendências em Educação Matemática, 11)

O'BRIEN, J. A. *Sistemas de informação e as decisões gerenciais na era da internet*. São Paulo: Saraiva, 2001.

OLIVEIRA, I.; SERRAZINA, L. A reflexão e o professor como investigador. In: GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Org.). *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 2002. p. 29-42.

PENTEADO, M. G.; AMARAL, R. B.; BORBA, M. C. *Manual do software Geometricks*. São Paulo: UNESP, 2000.

PÉREZ GÓMEZ, A. I. *A cultura escolar na sociedade neoliberal*. Tradução por Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2001. 320 p.

PONTE, J. P. de. Investigar a nossa própria prática. In: GTI – Grupo de Trabalho de Investigação (Org.). *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional*. Portugal: Associação de Professores de Matemática, 2002. p. 5-28.

PRADO, M. E. B. B. Articulações entre áreas de conhecimento e tecnologia. Articulando saberes e transformando a prática. In: *Integração das Tecnologias na Educação*, Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2005, p. 55-58.

SÁ, P. F. de. Geometria Fractal?!. *Traços*, Belém, v. 6, n. 11, p. 81-94, ago. 2003. Disponível em:

<http://www.nead.unama.br/bibliotecavirtual/revista/tracos/pdf/rtracos611a8.pdf>.

Acesso em: 12 jan. 2010.

SADOLIN, V. *Geometricks v. 2.37*. Copenhagen, Versão em Português e Espanhol de Dr. Marcelo C. Borba e Dra. Miriam Godoy Penteado, São Paulo: GPIMEM, UNESP-Rio Claro, 1998 (a). MS Windows, software educativo (geometria dinâmica).

SÃO PAULO. Secretária Estadual de Educação. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: SEE, 2008. 59 p.

SPADOTTO, A. J. Base de dados para pesquisa básica. *Journal of the Fractal Food*. Disponível em: http://www2.bot.zaz.com.br/fractalfood/pesquisa_basica.html. Acesso em: 4 jul. 2001.

STACHON, R. M. B. *Representações do cotidiano – um modo de concretizar avanços no ensino de desenho geométrico*. Vol.1, Editora do Brasil, 1998.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do trabalho científico*. 22. ed. rev. e ampl. São Paulo: Cortez, 2002.

SCHÖN, D. *The reflective practitioner*. London: Basic Book, 1983.

SHULMAN, L. S. *Those who understand: knowledge growth in teaching*. Education Research, Washington, v. 15, n. 2, p. 04-14, 1986.

VALENTE, J. A. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador. O papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: *Integração das Tecnologias na Educação*, Brasília: Ministério da Educação, Seed, 2005, p. 23-31.

_____. *Computadores e conhecimento: repensando a educação*, Campinas: Unicamp, 1993. 418 p.

ANEXOS

ANEXO A

Conhecendo os comandos do LOGO...

Comando	Digite	Descreva o resultado
pf <número>	pf 50	
pd <número>	pd 90	
mudecl <objeto>	mudecl "rosachoque	
	pf 50	
pe <número>	pe 90	
mudeel <lista>	mudeel [4 4]	
	pf 50	
	pd 90	
	pf 100	
ub	ub	
pt <número>	pt 40	
	pf 50	
ul	ul	
	pf 50	
	pe 90	
un	un	
	pf 100	
	ul	
	pf 20	
	mudecl 2	
	pf 50	
	pd 90	
	mudeel [3 3]	

	pf 50	
	un	
repita <número><lista>	repita 4[pf 100 pd 90]	
mudedç <número>	mudedç 30	
	repita 4[pf 100 pd 90]	
	tat	
	ul	
	repita 10[repita 5[pf 100 pd 72]pe 36]	
mudey <objeto >	mudey 60	
mudecp <obj obj obj>	mudecp [236 157 219]	
pinte	pinte	
	pd 108 pf 38	
	pinte	
	pd 36 pf 38	
mudecp <objeto>	mudecp 11	
	pinte	
	repita 9[pd 36 pf 38 pinte]	

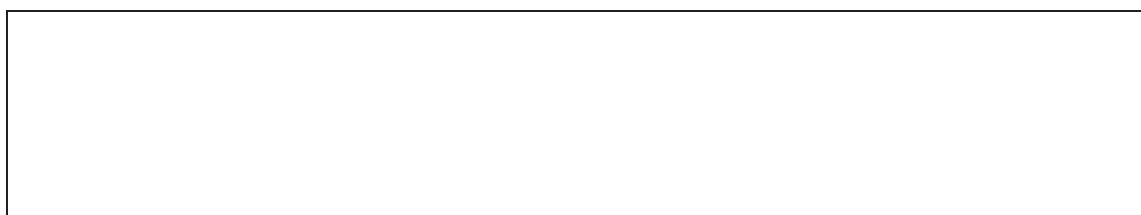
ANEXO B

Atividade 1: Explorando polígonos

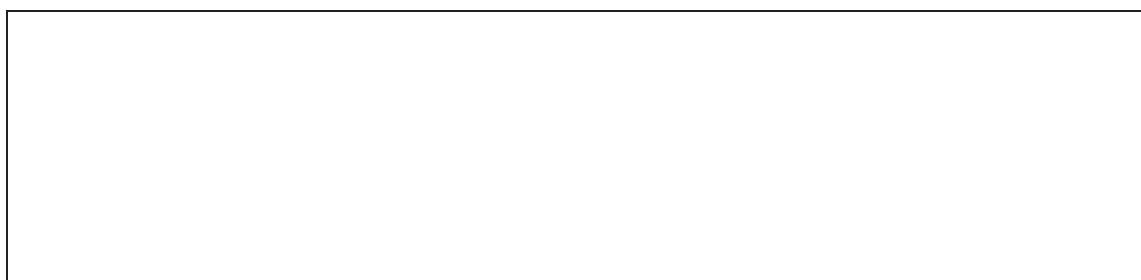
1. Utilize os comandos básicos do logo e construa um triângulo equilátero cujo lado mede 50.
 - a) Descreva os procedimentos adotados para a sua construção.
 - b) Qual conceito matemático foi importante na obtenção do polígono. Justifique.

2. Use os comandos do LOGO para construir um retângulo cujos lados são respectivamente 100 e 40. Explique os procedimentos seguidos para obter a figura exigida.

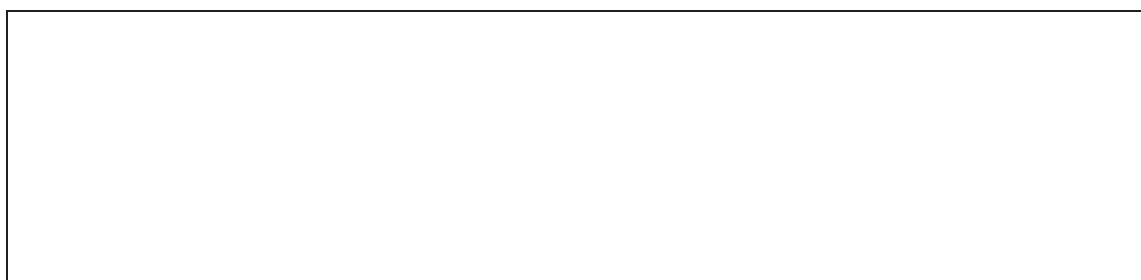
3. Construa um quadrado cujo lado mede 150. Explique os procedimentos seguidos para a sua obtenção.



- 4.** Obtenha um pentágono regular de lado 200. Descreva os procedimentos para a obtenção desse polígono.



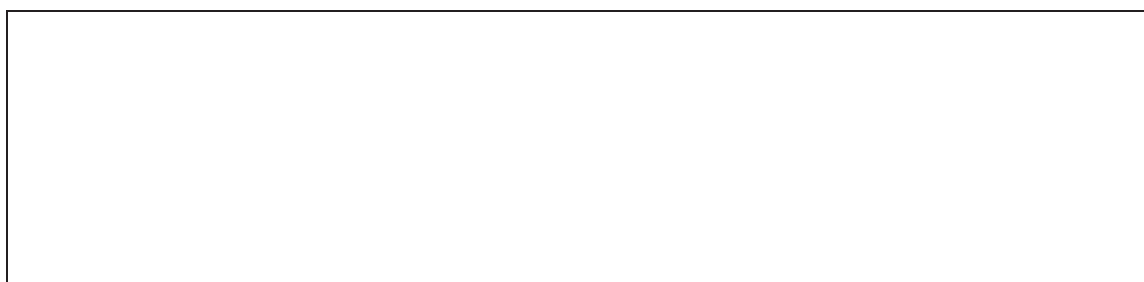
- 5.** Faça um hexágono regular cujo lado mede 250. Explique os procedimentos seguidos para a construção da figura.



- 6.** Com base nos itens anteriores, construa uma circunferência. Descreva os procedimentos exigidos para a sua elaboração.



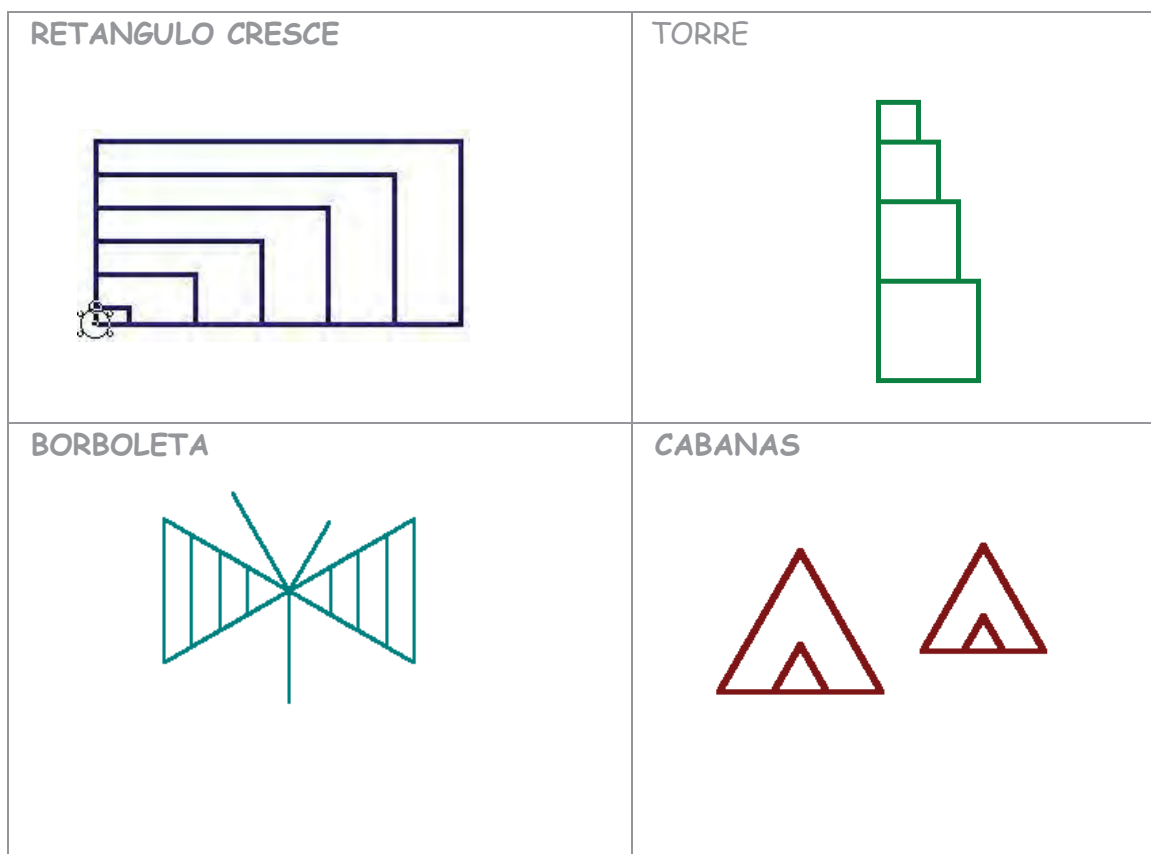
- 7.** Use o comando Repita para definir programas, utilize a noção de Iteração e Procedimentos. Faça isso com todas as figuras obtidas anteriormente. Explique seus respectivos procedimentos.



8. Use a noção de Parâmetro para definir programas. Faça isso como todas as figuras obtidas anteriormente. Descreva seus respectivos procedimentos.



9. Definir um programa, que utilize a noção de parâmetro, para executar uma das figuras abaixo:

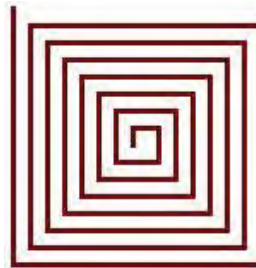


- 10.** Definir um programa, que utilize a noção de recursão, para executar uma das figuras abaixo:

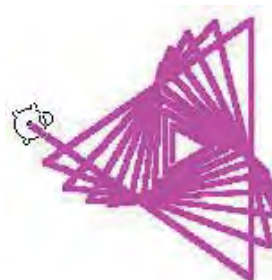
CÍRCULOS VARIADOS



ESPIRAL RETA



ESPIRAL TRIANGULAR



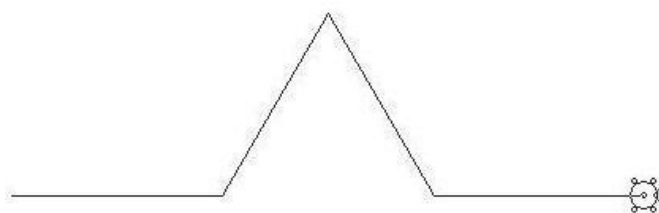
ANEXO C

Atividade 2: Curva de Koch

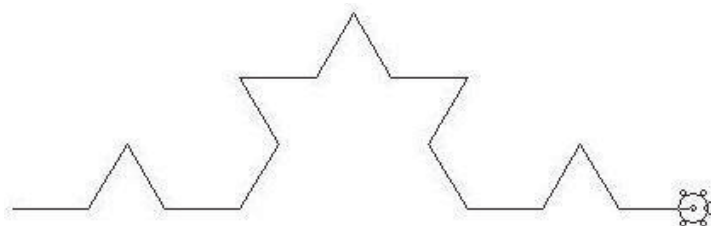
1. Utilize o conceito de recursão e construa o fractal conhecido como Curva de Koch.
 - a) Descreva os procedimentos adotados para a sua construção.
 - b) Qual(is) conceito(s) matemático(s) foi(ram) importante(s) na obtenção do fractal. Justifique.



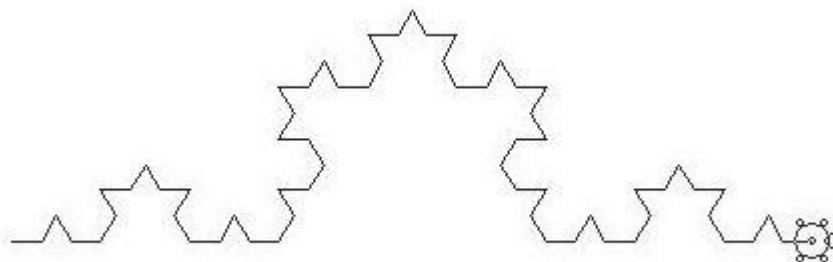
Geração 01



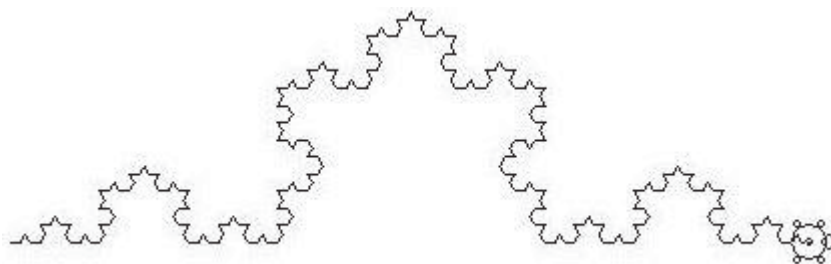
Geração 02



Geração 03



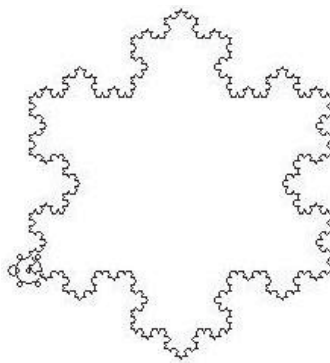
Geração 04



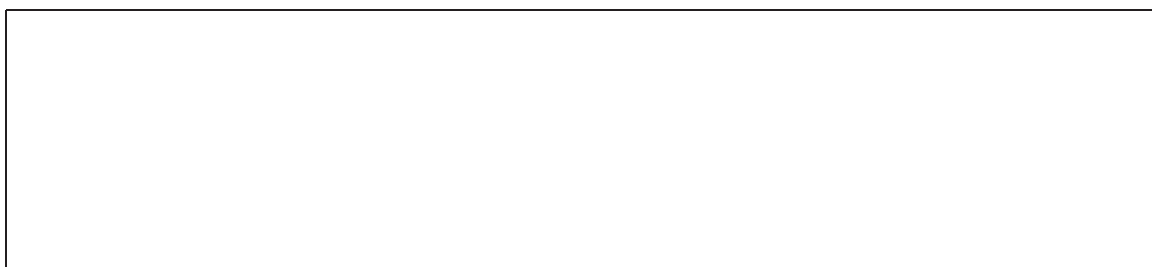
Fractal – Curva de Koch



2. Use os conceitos obtidos no fractal Curva de Koch e construa o fractal Floco de Neve. Explique os procedimentos seguidos para obter a figura exigida.



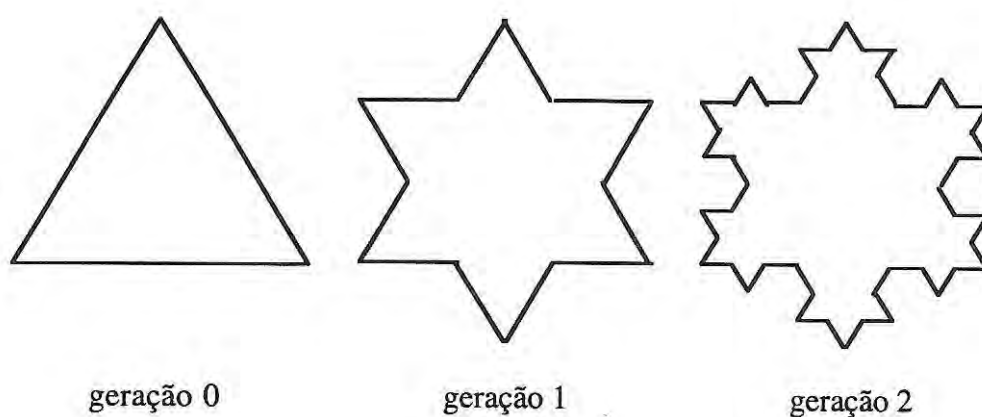
Fractal Floco de Neve



ANEXO D

Floco de Neve

O Floco de Neve é um famoso fractal criado por Van Koch, e por isso também conhecido por floco de Van Koch. A figura mostra três gerações da sequência de geração do floco. O comprimento do lado do triângulo da geração 0 é uma unidade.



1. Investigue o que acontece com o *número de lados* dessa sequência.

	Número de lados
Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

Tente encontrar o termo geral da sequência que permite calcular o número de lados para a n -ésima geração.

Como é a evolução desta sequência?

2. Relativamente a esta sequência, verifique o que acontece com o *comprimento dos lados*.

	Comprimento dos lados
--	-----------------------

Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

Tente encontrar o termo geral da sequência que permite calcular o comprimento dos lados para a n -ésima geração.

Como é a evolução desta sequência?

3. Investigue agora como se comporta *o perímetro desta sequência*.

	perímetro
Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

Tente encontrar o termo geral da sequência que permite calcular o perímetro para a n -ésima geração.

Para que valor tende esta sequência?

4. Estude agora o que acontece com a sucessão das áreas da forma fractal nas sucessivas gerações.

	áreas
Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

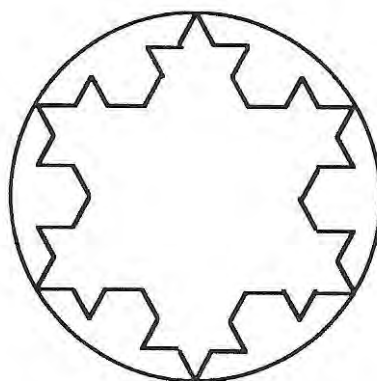
Tente encontrar o termo geral da sequência que permite calcular a área para a n -ésima geração.

Como é a evolução desta sequência?

5. O floco de neve pode inscrever-se numa circunferência, conforme se pode observar na seguinte figura.

Você consegue calcular a área do círculo?

Compare a área do círculo com a do fractal. Qual é a relação?



6. Será possível encontrar uma figura geométrica que mais se aproxime do floco de neve? Caracterize-a e relacione a sua área com a do fractal.

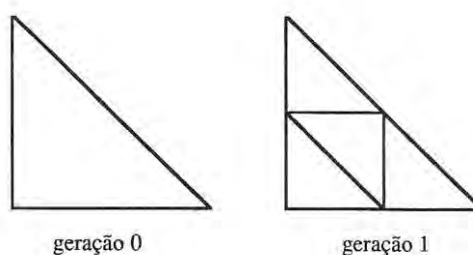
Retirado: *Fractais no Ensino Secundário*. Associação de Professores de Matemática (APM) – Centro de Recursos.

Traduzido do português de Portugal para o português do Brasil.

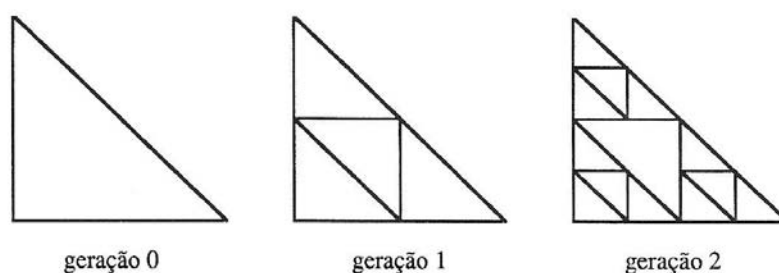
ANEXO E

Triângulos e mais triângulos...

1. O triângulo corresponde a geração 0 é retângulo e isósceles. Se unirmos os pontos médios de cada um dos seus lados, obtemos quatro retângulos, um interno e três externos (geração 1).



- Justifique que os quatro triângulos obtidos na geração 1 são geometricamente congruentes.
 - Que relação existe entre os comprimentos dos lados correspondentes no triângulo inicial e nos triângulos obtidos na geração 1?
 - Que relação existe entre o perímetro do triângulo inicial e o perímetro de um dos triângulos obtidos na geração 1?
 - Que relação existe entre a área do triângulo inicial e a área de um dos triângulos obtidos na geração 1?
2. Vamos continuar a construir triângulos retângulos unindo os pontos médios dos sucessivos triângulos exteriores, conforme o processo ilustrado na figura seguinte.



Considere a geração 0 que os catetos do triângulo medem 1 unidade.

- Preencha a seguinte tabela, registrando a medida do *perímetro dos triângulos* que se obtêm sucessivamente.

	perímetro
Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

Tente encontrar um termo geral da sucessão que permita calcular o perímetro dos triângulos que se obtêm na n -ésima geração.

- Suponha agora que a área do triângulo da geração 0 é 1.
- Preencha a seguinte tabela, registrando o valor da *área dos triângulos* que se obtêm sucessivamente.

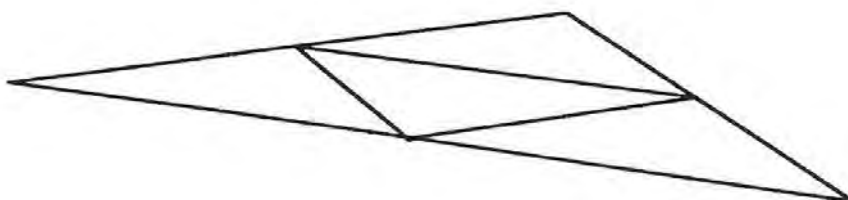
	área
Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

- Tente encontrar uma expressão geral da sucessão que permite calcular a área dos triângulos que se obtêm na n -ésima geração.
- Vamos ainda contar o número o número de triângulos existentes em cada geração.
- Preencha a seguinte tabela, registrando o número de triângulos que se obtêm sucessivamente.

	n° de triângulos
--	---------------------------

Geração 0	
Geração 1	
Geração 2	
Geração 3	

- Tente encontrar uma expressão geral da sucessão que permite calcular o número de triângulos que se obtêm na n -ésima geração.
5. Vamos agora analisar o que acontece com triângulos não retângulos. Para isso, construímos um triângulo qualquer e construímos depois os sucessivos triângulos que se obtêm unindo os pontos médios dos lados dos triângulos exteriores.



- Analise a sucessão dos perímetros. Será possível generalizar as conclusões que você encontrou para o caso dos triângulos retângulos?
- Analise agora a sucessão das áreas. As conclusões que você obteve em relação à área do triângulo retângulo mantêm-se para este caso?
- Analise também a sucessão do número de *triângulos exteriores*. Será possível generalizar a conclusões que você chegara no primeiro triângulo?

Retirado: *Fractais no Ensino Secundário*. Associação de Professores de Matemática (APM) –

Centro de Recursos.

Traduzido do português de Portugal para o português do Brasil.

ANEXO F

Fractais de papel

Com alguma habilidade para cortar e dobrar, podemos nós mesmos construir um bonito fractal de papel...

Para isso vamos precisar de uma tesoura e de uma régua, de uma cartolina e de um tubo de cola, e do modelo de construção do fractal.

Observe as fotografias dos fractais apresentadas nas folhas em anexas, construa usando os esquemas e as indicações fornecidas.

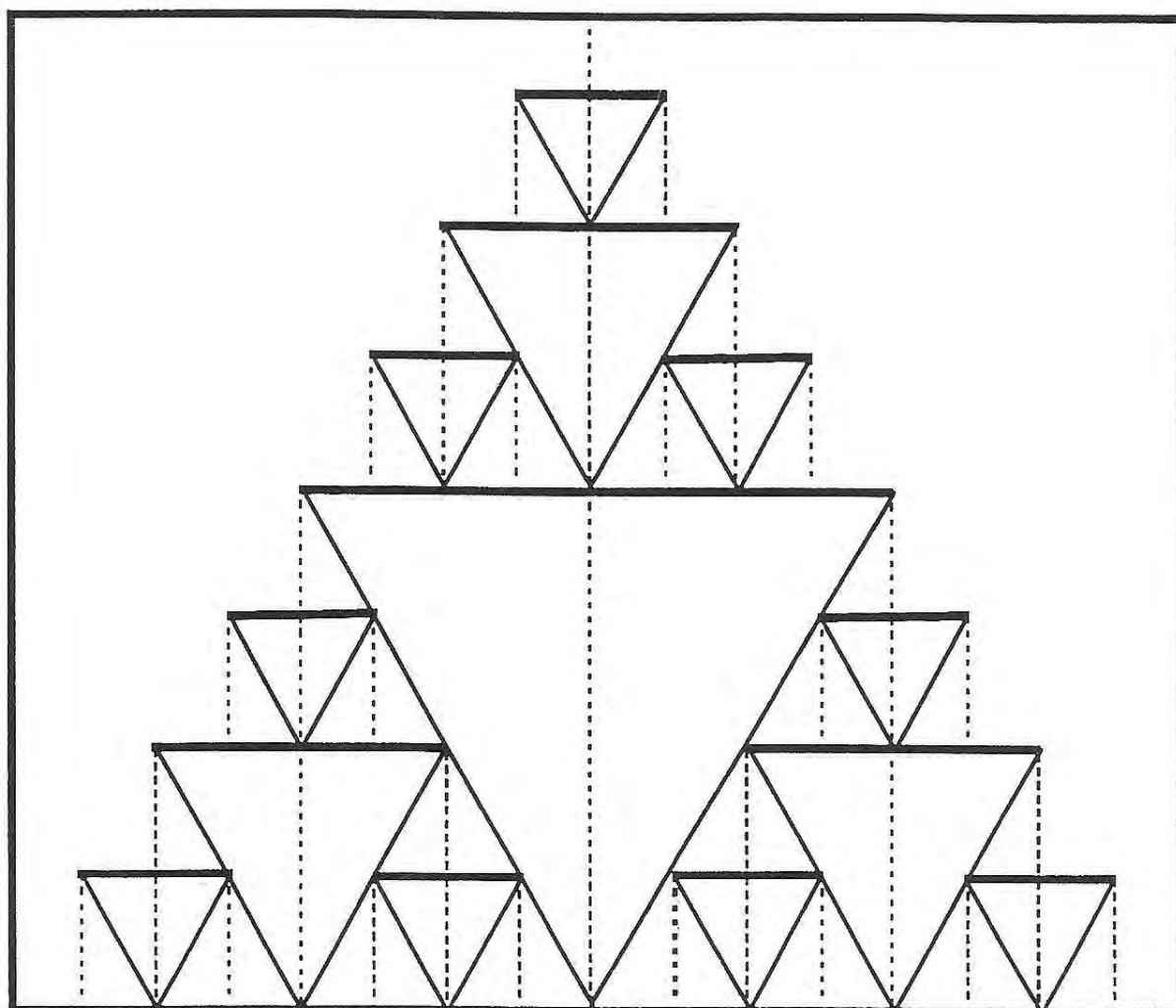
Depois os observe e responda às seguintes questões:

1. Explique a regra de construção de sucessivas gerações, caracterizando os elementos constituintes de cada uma.
2. Qual o número de elementos em cada uma das gerações?
Descubra a sequência que permite calcular o número de elementos para a n -ésima geração.
3. E quanto às dimensões dos elementos?
Tente descobrir a(s) sequência(s) que traduz(m) as dimensões dos elementos.
4. Que outras sequências nós podemos construir a partir desses fractais?

Retirado: *Fractais no Ensino Secundário*. Associação de Professores de Matemática (APM) – Centro de Recursos.

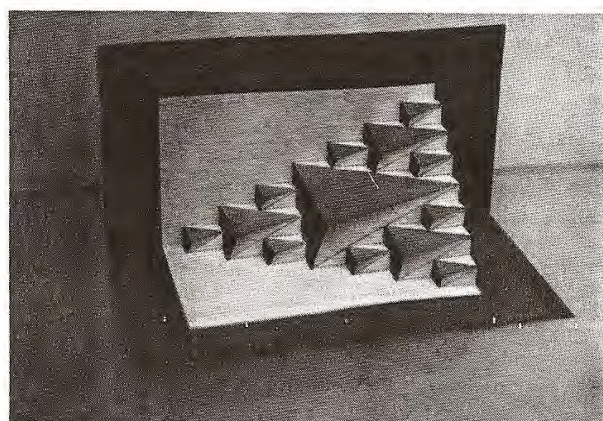
Traduzido do português de Portugal para o português do Brasil.

CASCATA TRIANGULAR

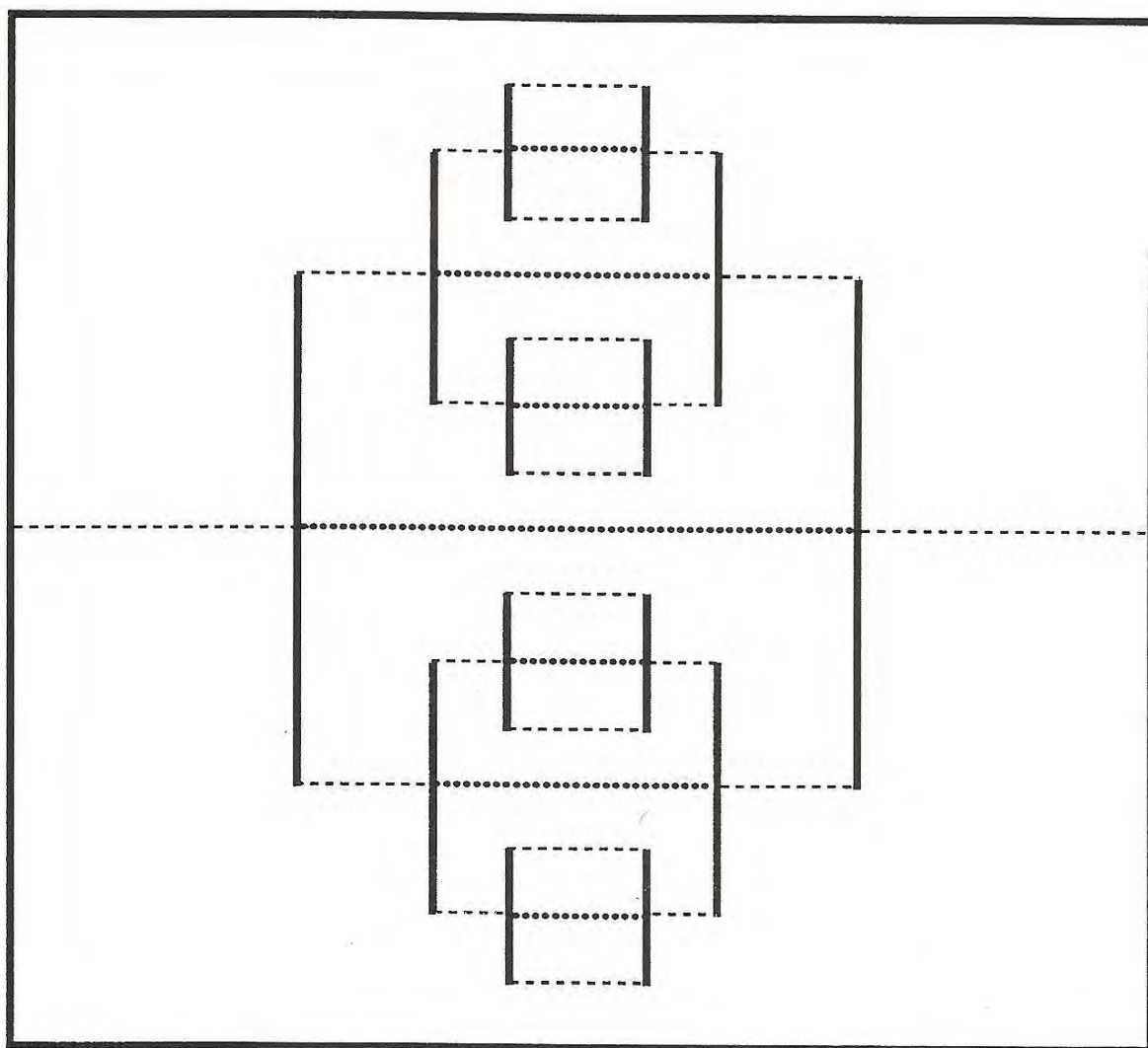


Instruções para a construção do fractal

1. Com apoio de uma tesoura e de uma régua, corte os segmentos com traço grosso. Dobre para fora os segmentos assinalados com ---- e dobre para dentro os segmentos assinalados com ———.
2. Cole, na cartolina, a folha devidamente cortada e dobrada, como mostra a imagem ao lado.

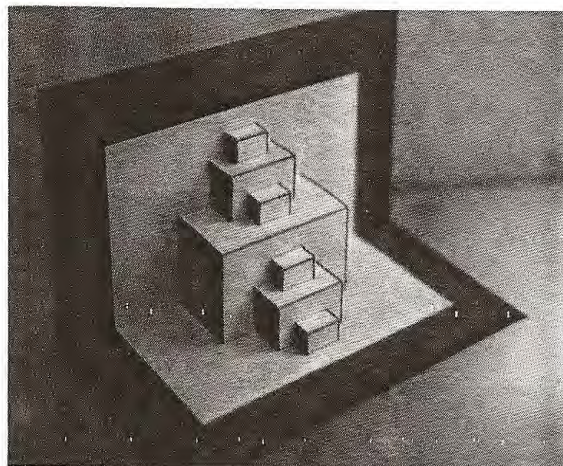


DEGRAUS CENTRAIS

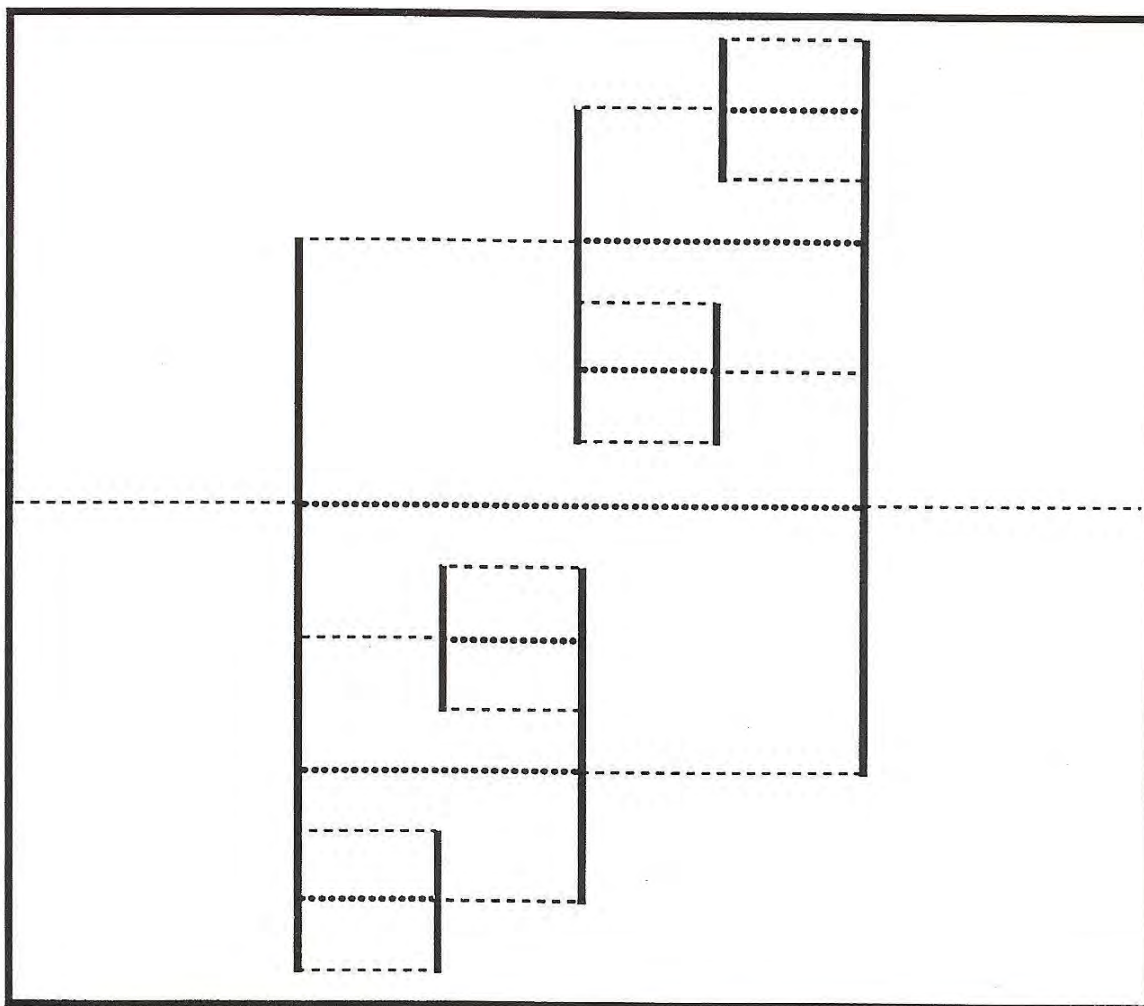


Instruções para a construção do fractal

1. Com apoio de uma tesoura e de uma régua, corte os segmentos com traço grosso. Dobre para fora os segmentos assinalados com ---- e dobre para dentro os segmentos assinalados com _____.
2. Cole, na cartolina, a folha devidamente cortada e dobrada, como mostra a imagem ao lado.

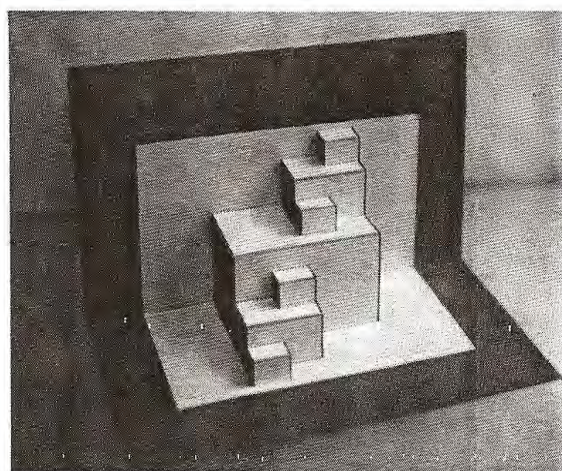


DEGRAUS ALTERNADOS



Instruções para a construção do fractal

1. Com apoio de uma tesoura e de uma régua, corte os segmentos com traço grosso. Dobre para fora os segmentos assinalados com ----- e dobre para dentro os segmentos assinalados com ———.
2. Cole, na cartolina, a folha devidamente cortada e dobrada, como mostra a imagem ao lado.



ANEXO G

Explorando Fractais – Atividade 1

1. Construir o *triângulo de Sierpinski*.

Construa um triângulo **ABC**.

Marque o ponto médio **E** de $\overline{AB}$, o ponto médio **F** de $\overline{BC}$ e o ponto médio **D** de $\overline{AC}$.

Trace o segmento de reta $\overline{DF}$, $\overline{EF}$ e $\overline{DE}$.

Defina o fractal:

Clique em **Fractais/Definir fractais**.

Digite 4 para o número de ternas.

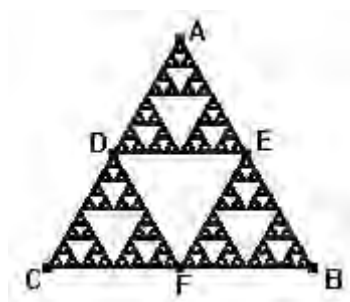
Indique as ternas clicando em **(A,B,C) (A,E,D) (E,B,F) (D,F,C)**.

Observe que a ordem é importante.

Desenhe o fractal:

Clique em **Fractais/Desenhar fractal**

Aparecerá uma figura semelhante à seguinte:



Observe que ao solicitar o desenho de nível do fractal ou do próprio fractal, surge no canto superior da tela o símbolo abaixo. É preciso clicar neste símbolo para que o software pare a operação de desenhar o fractal.



Apague o desenho do fractal e desenhe o nível zero deste fractal:

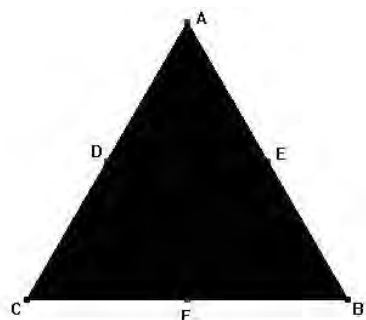
Clique em **Fractais/Apagar** desenho do fractal.

Clique em **Fractais/ Níveis**.

Digite o número **0**.

Obs: o nível zero é construído de todos os pontos que estão no interior do triângulo definido pela primeira terna indicada na definição do fractal.

Aparecerá uma figura semelhante a esta:



Desenhe o nível um deste fractal:

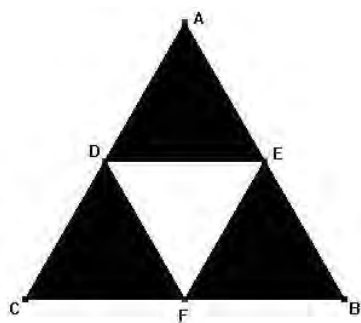
Clique em **Fractais/Apagar** desenho do fractal.

Clique em **Fractais/Níveis**.

Digite o número **1**.

Obs: o nível um é constituído de todos os pontos que estão no interior dos triângulos definidos pelas próximas ternas indicadas na definição do fractal.

Aparecerá uma figura semelhante a esta:



Desenhe o nível dois deste fractal:

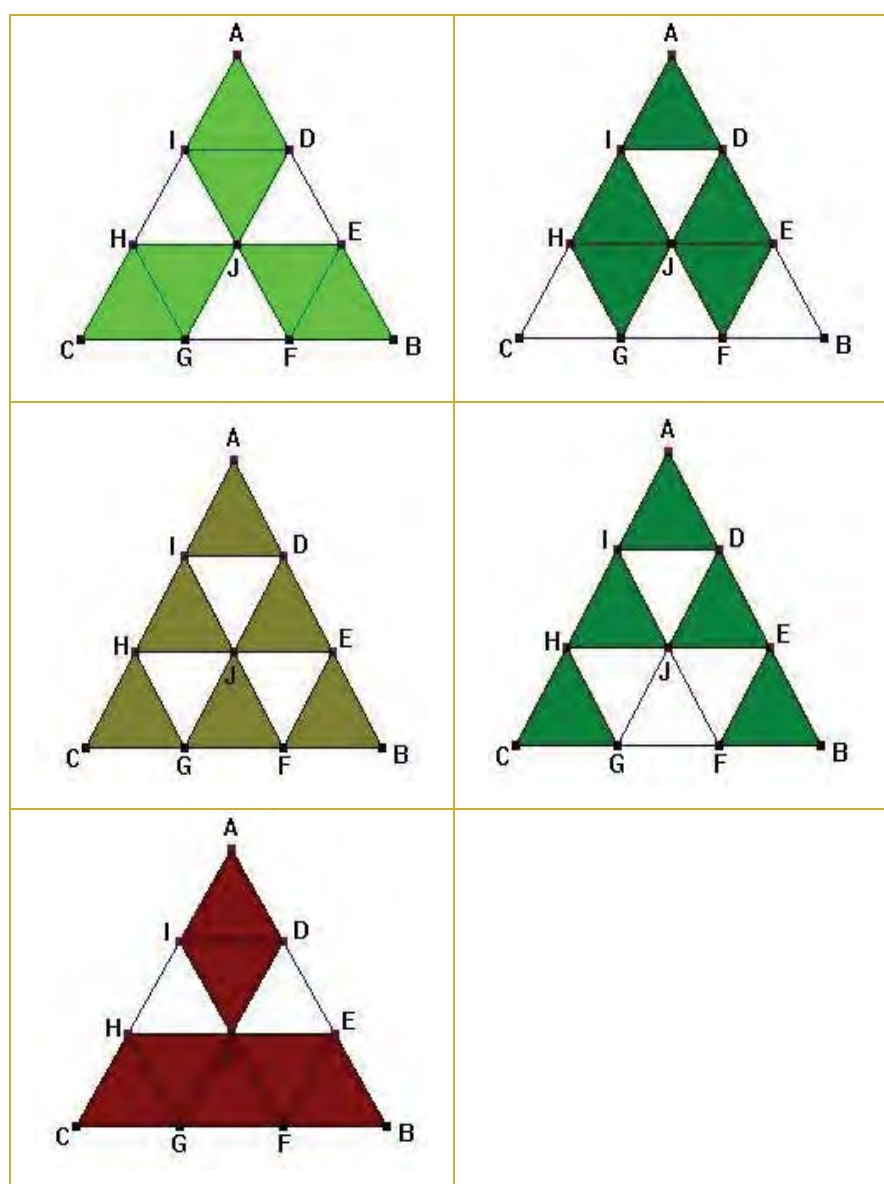
Clique em **Fractais/Apagar** desenho do fractal.

Clique em **Fractais/Níveis**.

Digite o número **2**.

O processo se repete para cada área hachurada.

Agora tente você descobrir a sequência que gera os seguintes fractais e os faça usando os comandos que você acabou de aprender:



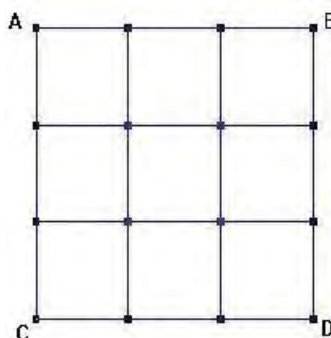
ANEXO H

Explorando Fractais – Atividade 2

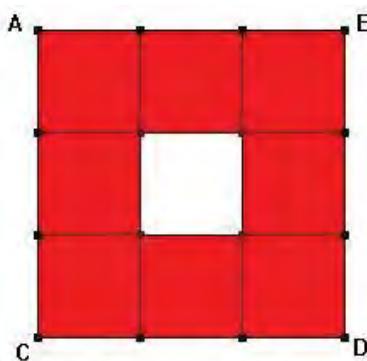
2. Construir o *tapete de Sierpinski*.

Construa o quadrado **ABCD**.

Utilizando os comandos existentes no Geometricks divida o quadrado **ABCD** em nove quadrados como na figura abaixo:



O nível 1 (em vermelho) do tapete de Sierpinski é a figura abaixo, desenvolva este fractal.



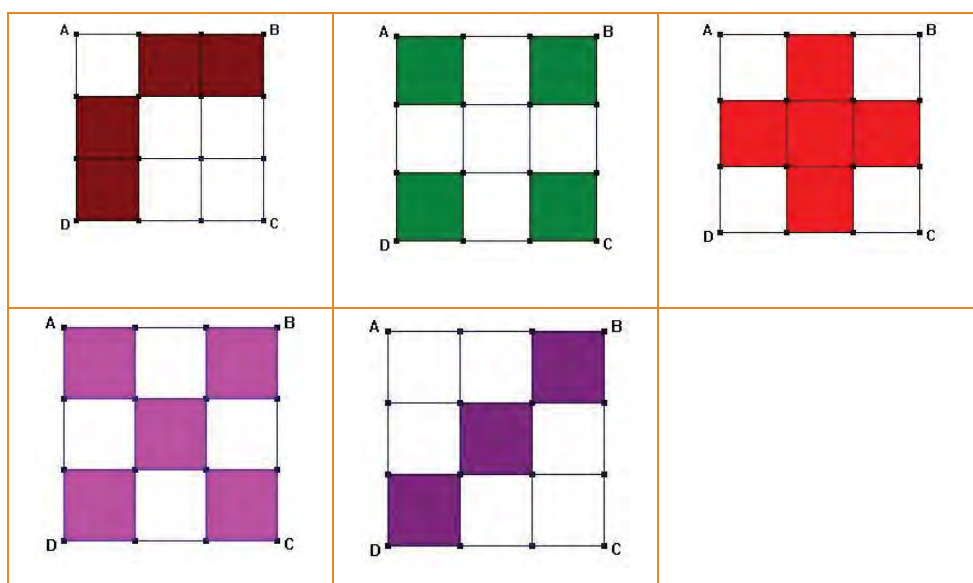
Obs: o nível 1 do quadrado **ABCD** é substituído por **9 quadrados** sendo que o **quadrado central** é retirado da figura, podemos imaginar o que seria o nível 2 deste fractal, neste nível o que foi aplicado no quadrado **ABCD** é aplicado nos **oito quadrados** resultando cada um em mais **nove quadrados**, e assim o processo se repete para cada novo quadrado (**recursão**).

Defina a sequência que você utilizou para construir este fractal.

2.2 O que aconteceria se você mudasse esta sequência.

2.3 Com o comando **Fractais/Níveis** verifique o processo de desenvolvimento deste fractal. Faça um comentário do que ocorre.

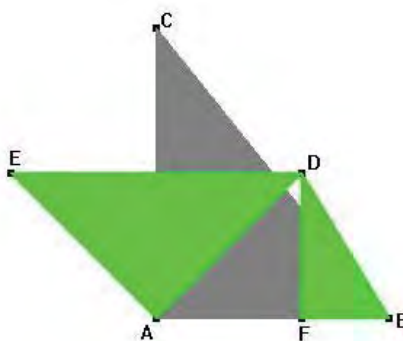
2.4 Com as figuras abaixo descubra a sequência que gera os fractais e verifique usando o comando **Fractais/Níveis**.



ANEXO I

Explorando Fractais – Atividade 3

3. Desenhar o fractal cujo nível 0 (em cinza) e o nível 1 (em verde) são mostrados na figura abaixo:



Observe que no nível 1 o triângulo ABC é substituído pelos triângulos FBD e ADE que parecem ser respectivamente uma redução e uma rotação de ABC .

Podemos imaginar o que seria o nível 2 desse fractal. Nesse nível, o que foi aplicado em ABC é aplicado em ADE e FBD resultando quatro novos triângulos. No nível 3, a mesma aplicação é feita em cada um dos novos triângulos, resultando assim 8 novos triângulos, e assim o processo se repete para cada novo triângulo.

Crie 7 pontos livres dispostos como na figura anterior. Nomeie-os de **A, B, C, D, E, F**.

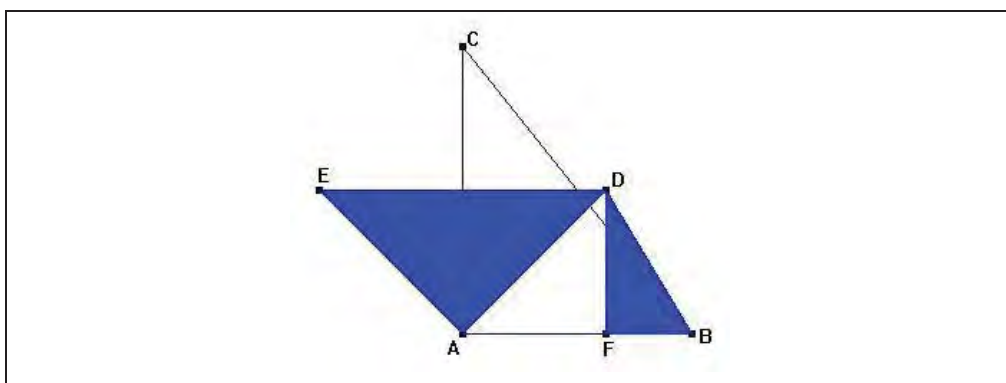
Clique em **Fractais/Definir fractal**.

Digite 3 e clique nas ternas **(A,B,C)**, **(F,B,D)** e **(A,D,E)**.

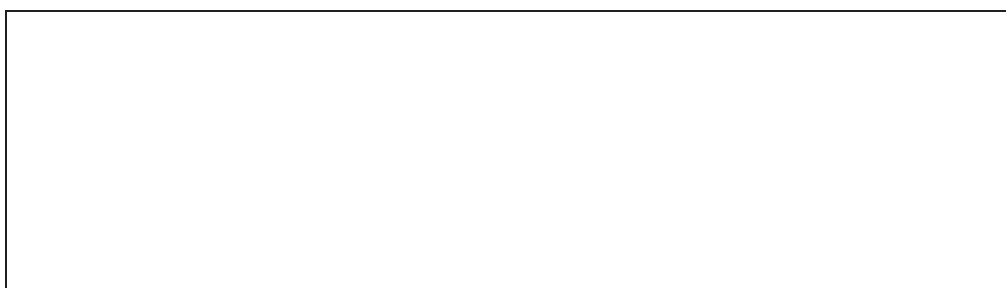
Clique em **Fractais/Níveis**.

Digite o número 1.

Aparecerá uma figura semelhante a esta:



3.1. Utilizando o comando **Fractais/Níveis** digite o número 2, depois o número 3 e por fim o número 4. Descreva o que ocorre com o desenho na tela do computador. (Sugestão: clicando na cor desejada, escolha cores diferentes para os níveis 2, 3 e 4).

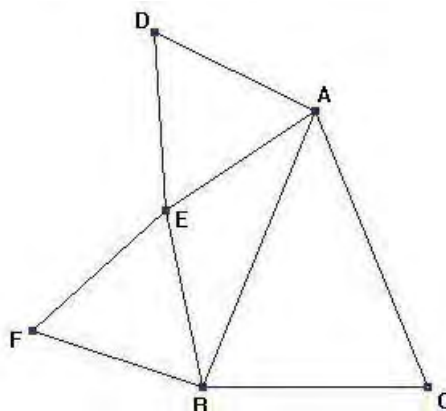


Clique em **Fractais/Desenhar** fractal.

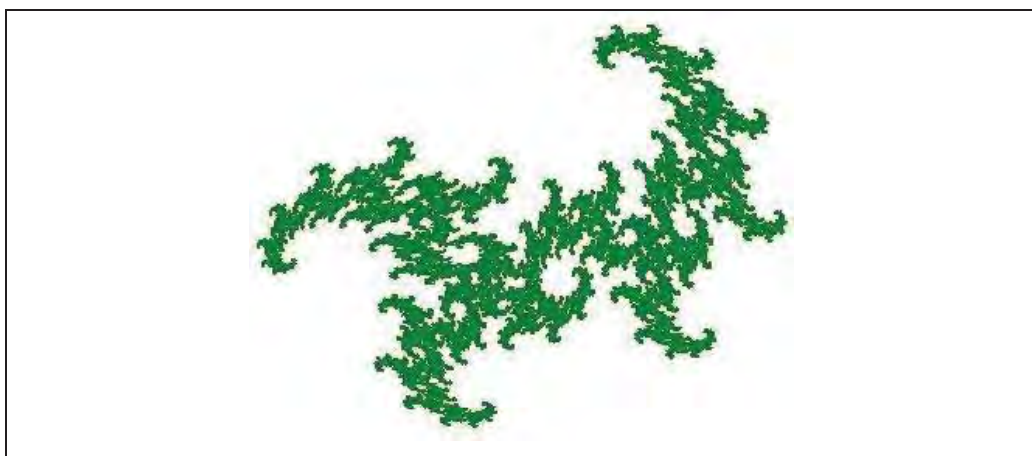
Aparecerá uma figura semelhante a esta:



3.2. Utilizando os recursos do programa construa a figura abaixo:



3.3. Usando o comando **Fractais/Definir fractais** determine uma sequência de uma sequência de ternas para determinar o fractal da figura abaixo:



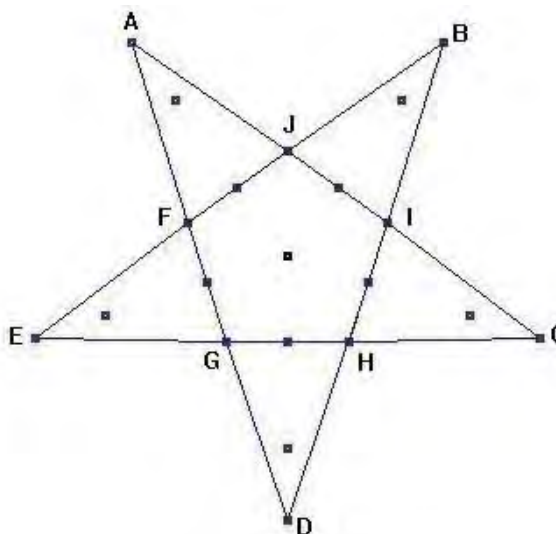
3.3. Faça uma breve descrição como foi o processo de obtenção do fractal acima encontrado e qual foi a sequência de ternas necessárias para construir o fractal.



ANEXO J

Explorando Fractais – Atividade 4

4. Através do seu conhecimento de Desenho Geométrico e Geometria, construa a figura abaixo:



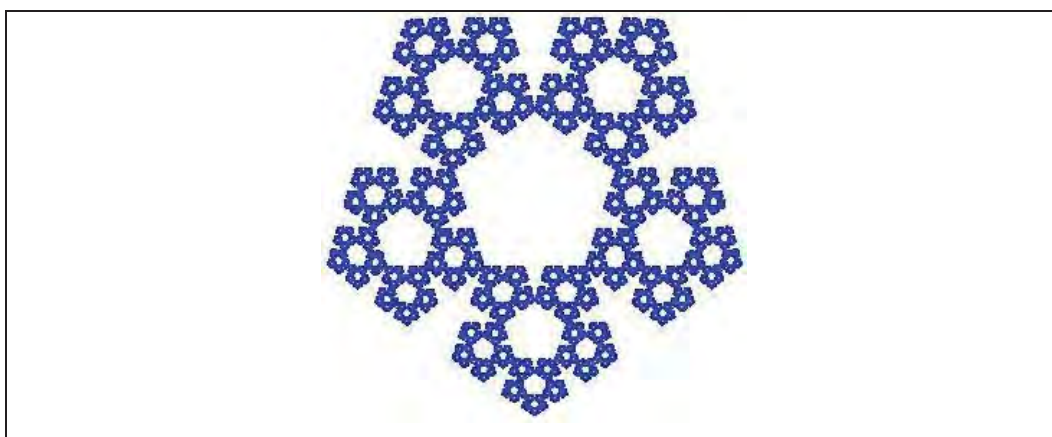
4.1. Feito isso desenhar o fractal seguindo procedimento:

Clique em **Fractais/Definir fractal**.

Digite 6 e clique nas ternas (A,D,C), (A,F,J), (E,G,F), (D,H,G), (C,I,H) e (B,J,I).

Clique em **Fractais/Desenhar fractal**.

Aparecerá uma figura semelhante a esta:



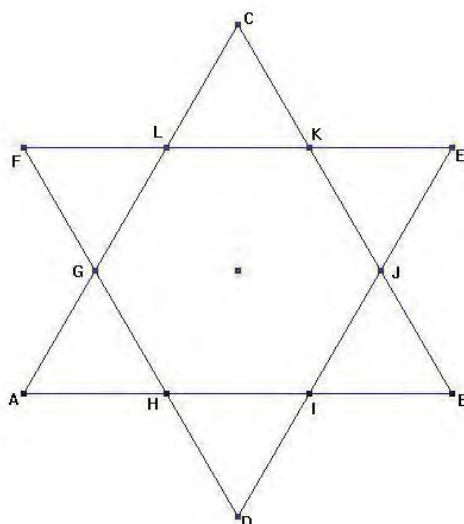
4.2. Utilizando o comando **Fractais/Níveis** faça uma verificação do processo de construção do fractal. Descreva o que ocorre nesse processo.



4.3. Construir o hexágono de Dürer.

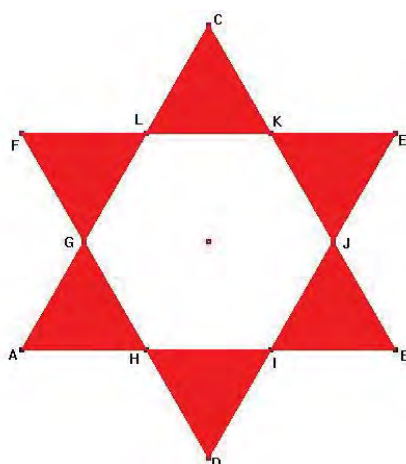
4.3.1. Construa um hexágono **GHIJKL**.

4.3.2. Construa nos lados do hexágono **GHIJKL** triângulos equiláteros. Agora você terá a seguinte figura geométrica:

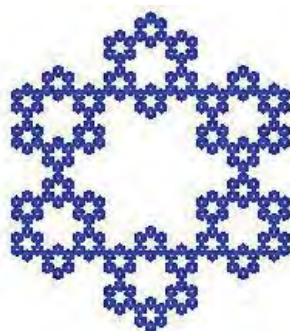


A figura acima é a figura geométrica geradora do fractal conhecido como *hexágono de Dürer*, tomando por base o fractal anterior, tente encontrar a sequência de ternas necessárias para gerar o fractal desejado.

O fractal procurado tem a seguinte forma no nível 1:



Clique em Fractais/Desenhar fractal e você terá a seguinte figura:



A figura acima é o fractal conhecido como fractal *hexágono de Dürer*.

4.4. Faça um comentário do grupo em relação a construção da figura inicialmente, a busca pela sequência correta de ternas, e a obtenção do fractal pedido.

ANEXO L

Questionário aplicado aos estudantes do curso de Licenciatura

Nome: _____

QUESTIONÁRIO

1. Que semestre você está no curso de Matemática? _____
2. Qual o ano da conclusão de sua graduação? _____
3. Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação? Se afirmativo, responda:
Quais foram? Quais conteúdos foram explorados?

4. Cursou disciplinas específicas de informática na graduação? Se afirmativo, responda:
Como ocorreu o uso dessa tecnologia?

5. Quais temas de Matemática você poderia explorar com os fractais?

6. A Geometria Fractal é um bom tema para ser explorado em sala de aula? Justifique.

7. Quais as suas dificuldades ao desenvolver os fractais nas atividades propostas e de utilizar o software LOGO na sua aplicação?

ANEXO M

QUESTIONÁRIO APLICADO AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Nome: _____

QUESTIONÁRIO

1. Você cursou a sua graduação em:

() Instituição Pública

() Instituição Privada

2. Qual o ano do término da sua graduação? _____

3. Cursou disciplinas específicas de geometria na graduação?

() Sim

() Não

4. Nesse período, vivenciou experiências que influenciaram seu modo de trabalhar a geometria na sala de aula? Quais?

5. Cursou disciplinas específicas de informática na graduação?

() Sim

() Não

6. Você utiliza as novas tecnologias em sala de aula?

() Sim

() Não

7. Fez cursos de capacitação para desenvolver atividades de ensino auxiliadas pelo computador?

() Sim () Não

8. A instituição onde você trabalha tem a seu dispor um laboratório de informática?

() Sim () Não

9. Se você marcou sim, responda: você desenvolve algum trabalho a esse respeito? Como? Por quê?

10. Gostaria de conhecer mais sobre o uso de novas tecnologias em educação? E sobre seu uso no ensino de geometria? Tem algum interesse em especial?

11. Você conhece o *Logo* ou o *Geometricks*? Se sim, comente como você usou esse tipo de recurso.

12. Você já ouviu falar sobre *Geometria Fractal* ou a *Teoria do Caos*? Se sim, o que você conhece sobre os dois assuntos.

ANEXO N

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - INSTITUIÇÃO

A pesquisa em andamento tem como responsável o discente, **Nilson Jorge Baldovinotti**, bem como sua orientadora, **Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado**, do Programa de Pós-Graduação - Mestrado em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP. O tema da pesquisa é **Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática**. Seu objetivo é **analisar e discutir o estudo de Fractais Geométricos na formação de professores de Matemática, a partir do uso de tecnologia informática e materiais manipuláveis**. Sobre os resultados, **serão utilizados apenas para fins acadêmicos**.

Seguindo os preceitos éticos, informamos que o envolvimento desta Instituição, pretendo *lócus* de pesquisa, na realização de um curso onde serão feitos registros de vídeo, áudio, anotações escritas no caderno de campo e fotografias, que poderão ser divulgadas aos demais profissionais que trabalham na área em Educação Matemática. Portanto, seu envolvimento não acarretará quaisquer danos à sua reputação ou de seus colaboradores diretos e indiretos.

A Instituição tem a total liberdade de recusa, assim como pode solicitar a exclusão dos seus dados, retirando seu consentimento sem qualquer penalidade ou prejuízo, quando assim o desejar.

Agradecemos sua colaboração, enfatizando que a mesma em muito contribui para a formação e para a construção de um conhecimento atual nesta área.

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado

Orientadora da Pesquisa

Nilson Jorge Baldovinotti

Pesquisador

Tendo ciência das informações contidas neste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, eu, _____, portador do RG nº _____, portador do CPF nº _____, no exercício da função de gestor desta unidade de ensino, _____, autorizo a utilização nesta pesquisa dos dados necessários, tanto no que se refere às informações prestadas por nossos colaboradores e alunos/responsáveis, quanto das imagens captadas ao longo da pesquisa.

Assinatura

ANEXO O

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - SUJEITO

A pesquisa em andamento tem como responsável o discente, **Nilson Jorge Baldovinotti**, bem como sua orientadora, **Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado**, do Programa de Pós-Graduação - Mestrado em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP. O tema da pesquisa é **Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática**. Seu objetivo é **analisar e discutir o estudo de Fractais Geométricos na formação de professores de Matemática, a partir do uso de tecnologia informática e materiais manipuláveis**. Sobre os resultados, **serão utilizados apenas para fins acadêmicos**.

Seguindo os preceitos éticos, informamos que os registros serão feitos durante o curso através de vídeo, áudio, anotações escritas no caderno de campo e fotografias, que poderão ser divulgadas aos demais profissionais que trabalham na área em Educação Matemática. Poderá haver benefícios diretos para você neste estudo, uma vez que estaremos desenvolvendo o ensino e a aprendizagem da Matemática. Além disso, há oportunidade de você poder falar de suas experiências. Após a comunidade em Educação Matemática tomar conhecimento de suas considerações, poderão ocorrer mudanças nas práticas de ensino de Matemática. Portanto, seu envolvimento não acarretará quaisquer danos a sua pessoa, família ou a Instituição na qual estuda.

Você tem a total liberdade de recusa, assim como pode solicitar a exclusão dos seus dados, retirando seu consentimento sem qualquer penalidade ou prejuízo, quando assim o desejar.

Agradecemos sua colaboração, enfatizando que a mesma em muito contribui para a formação e para a construção de um conhecimento atual nesta área.

Profa. Dra. Miriam Godoy Penteado

Nilson Jorge Baldovinotti

Orientadora da Pesquisa

Pesquisador

Tendo ciência das informações contidas neste Termo de _____, eu, _____, portador do RG nº _____, portador do CPF nº _____, autorizo a utilização de imagem, áudio e nome, nesta pesquisa, dos dados por mim fornecidos.

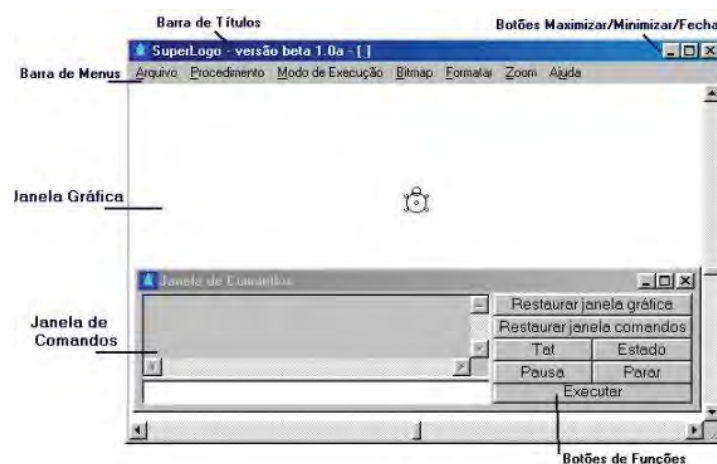
Assinatura

ANEXO P

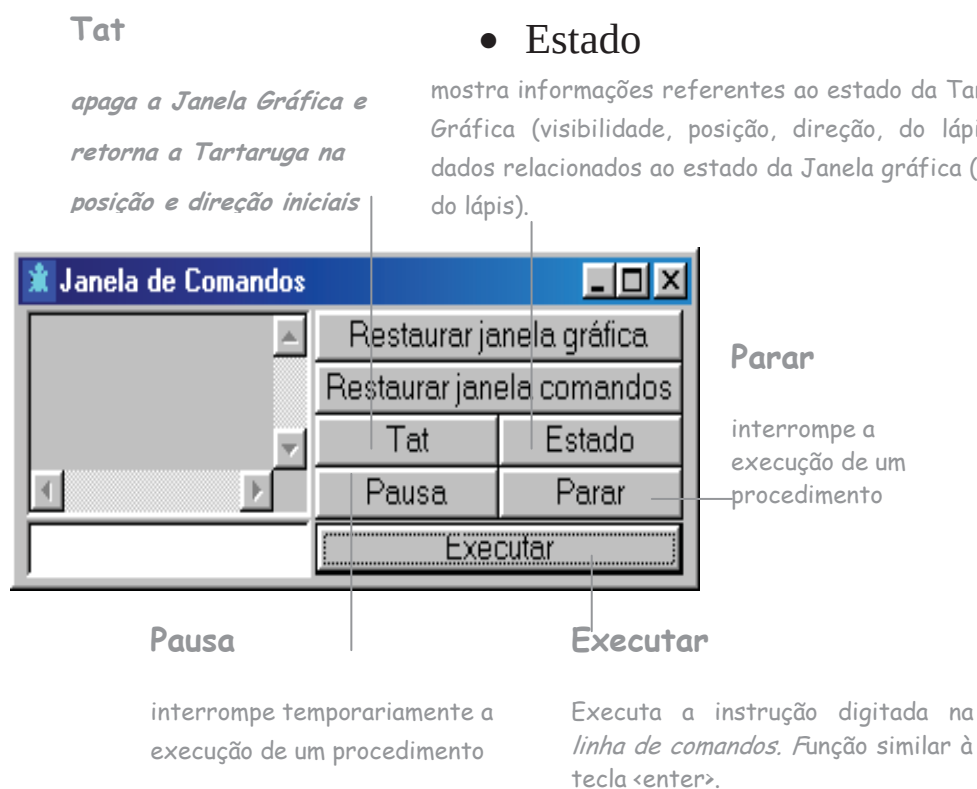
MANUAL DO USUÁRIO DO SOFTWARE SUPERLOGO

O software SuperLogo é constituído por duas janelas: a **Janela Gráfica** e a **Janela de Comandos**. No centro da *Janela Gráfica* aparece a imagem de uma Tartaruga, que representa um cursor gráfico, a partir de uma lista de comandos específicos movimenta-se na tela permitindo a construção de desenhos.

Esta janela além de permitir a execução dos desenhos elaborados pelo usuário permite também acessar o menu de opções do ambiente. A **Janela de Comandos** possibilita ao usuário digitar as instruções a serem executadas pelo SuperLogo e acionar os botões do ambiente. As duas janelas podem ser arrastadas, maximizadas e minimizadas, mas somente a Janela Gráfica pode ser fechada.



O *SuperLogo* dispõe de alguns recursos que podem ser ativados pelo menu de opções e por intermédio dos botões existentes da Janela de Comandos. Acessando o item **Índice** do menu **Ajuda**, por exemplo, pode-se obter a lista dos comandos do SuperLogo, informações sobre os menu de opções, etc.. Veja a seguir a funcionalidade de alguns botões da Janela de Comandos.



A trajetória da Tartaruga na **Janela Gráfica** pode ser realizada através de comandos de deslocamento e giro tais como: *para frente* (ou pf) e *para trás* (ou pt) e *para direita* (ou pd) e *para esquerda* (ou pe). Os comandos pf e pt alteram a posição da Tartaruga e os comandos pd e pe a sua orientação na **Janela Gráfica**. Para usar estes comandos é necessário especificar o número de passos ou o grau do giro. Por exemplo: pf 50 pd 90 pt 50 pe 45.

A exploração desses comandos, quando feita no **modo direto**, ou seja, executadas a partir da Janela de Comandos, possibilita que o usuário imediatamente veja o resultado na **Janela Gráfica**. Porém, este modo de trabalho não permite que as instruções sejam armazenadas na memória do computador para possíveis reutilizações ou reformulações.

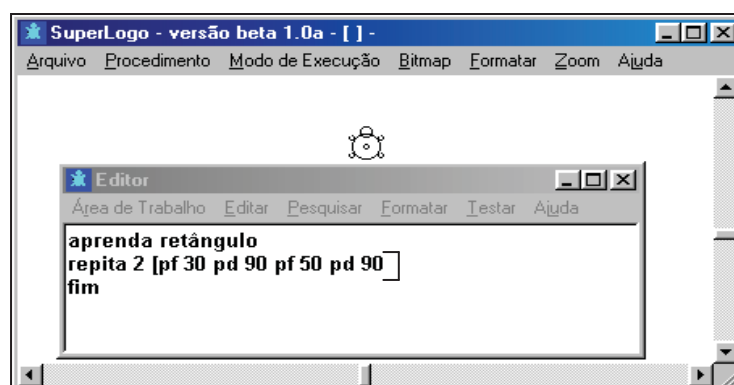
Para armazenar as informações feitas pelo usuário é necessário usar o **modo de Edição**. Neste modo são definidos os procedimentos em Logo, possibilitando assim que uma sequência de instruções fique guardada na memória do computador para ser executada no momento que o usuário desejar.

Modo de Edição

Para definir procedimento no SuperLogo é necessário acessar a **Janela Editor** que é acionada no item **Editar** do menu **Procedimento** da Janela gráfica. Ao clicar tal opção, aparece uma caixa de diálogo na qual deverá ser digitado um nome para o procedimento e clique no botão **OK**.



Em seguida, aparecerá à janela do editor onde os comandos deverão ser digitados entre as linhas dos comandos **aprenda** e **fim**.



Para executar o que foi definido no editor é necessário voltar para as Janelas Gráfica e de Comandos. Para tal deverá ser acionada a opção **Sair** do menu **Área de Trabalho** da Janela Editor. Um procedimento definido funciona de forma análoga aos comandos primitivos do SuperLogo: basta digitar o nome do procedimento na Janela de Comandos e acionar o botão executar (ou teclar *enter*) para que as instruções sejam executadas.

LISTA DE COMANDOS E OPERAÇÕES BÁSICOS DO LOGO

comando	Descrição
pf <número>	desloca a tartaruga para a frente um determinado número de passos
pd <número>	gira a tartaruga à direita um determinado ângulo
pe <número>	gira a tartaruga à esquerda um determinado ângulo
pt <número>	desloca a tartaruga para trás um determinado número de passos
tat	apaga a Janela Gráfica, colocando a tartaruga na sua posição e direção originais.
rotule <objeto>	imprime na Janela Gráfica o objeto especificado a partir da posição da tartaruga
ub	coloca uma borracha sob a tartaruga possibilitando apagar linhas já desenhadas
ul	coloca um lápis sob a tartaruga possibilitando o desenho de linhas por onde ela passar.
un	retira o lápis ou a borracha da tartaruga possibilitando deslocá-la sem deixar rastros visíveis.
repita <número> <lista>	é utilizado quando se deseja repetir uma mesma lista de instruções um determinado número de vezes
mudeel <lista>	altera a espessura do lápis de acordo com os números contidos na lista. Os dois números devem ser iguais.
mudecl <objeto>	muda a cor do lápis de acordo com o conteúdo de objeto.
mudecp <objeto>	muda a cor de preenchimento de acordo com o conteúdo de objeto. Este comando é utilizado para preencher áreas delimitadas.
pinte	pinta uma região com a cor especificada no comando mudecp <objeto>.
mudexy <número> <número>	movimenta a tartaruga na tela segundo o sistema de coordenadas cartesianas. O primeiro número corresponde à posição da tartaruga no eixo x e o segundo no eixo y.
mudedç <número>	gira a tartaruga o ângulo especificado (a mudança de direção considera o sentido horário)
coloque <objeto> <nome>	define uma variável para armazenar um dado valor. Este comando tem dois parâmetros: um objeto (que pode ser um número, palavra, lista) e um nome.
espere <número>	provoca uma pausa (em milissegundos) antes

	de executar o próximo comando.
(se <predicado> <lista1> <lista2>)	executa a lista 1 quando o retorno do predicado for verdadeiro ou executa a lista 2 quando o retorno for falso
pare	encerra a execução do procedimento atual e transfere o controle da execução para o procedimento que o chamou. Só é usado dentro de procedimentos.

leiap	retorna a palavra dada como entrada pelo usuário.
sentença <objeto1> <objeto2> (sentença <objeto1> <objeto2> <objeto3>)	é uma operação que concatena objetos e os retorna em uma lista. Esta operação tem 2 parâmetros: <objeto1> e <objeto2>. quando a operação sentença tiver mais de 2 parâmetros deve-se abrir um parênteses antes do nome da operação e fechar após o último parâmetro dado.
palavra <palavra1> <palavra2>	retorna uma palavra composta pela concatenação de palavra1 e palavra2.
diferença <número1> <número2>	retorna o resultado da diferença entre número1 e número2.
quociente <número1> <número2>	retorna o quociente da divisão inteira de número1 por número2.
produto <número1> <número2>	retorna o produto dos números especificados
resto <número1> <número2>	retorna o valor do resto da divisão inteira de número1 por número2.
évazia <objeto>	retorna a palavra verd sempre que o objeto de entrada for vazio. Caso contrário, retorna a palavra falso.
émaior <número1> <número2>	retorna verd se número1 for maior que número 2. Caso contrário, retorna falso.
émenor <número1> <número2>	retorna verd se número1 for menor que número 2. Caso contrário, retorna falso.
sãoiguais <objeto1> <objeto2>	retorna a palavra verd se o objeto1 for igual ao objeto2. Caso contrário, retorna a palavra falso.
pri <objeto>	retorna o primeiro elemento de objeto. Se objeto for uma palavra, retorna o primeiro caracter da palavra. Se objeto for uma lista, retorna o primeiro elemento da lista.
sp <objeto>	retorna objeto sem seu primeiro elemento.
ult <objeto>	retorna o último elemento do objeto.
su <objeto>	retorna objeto sem seu último elemento.
elemento <número> <objeto>	retorna o elemento de objeto que for

	especificado em número.
numelem <objeto>	retorna o número de elementos que compõem objeto.

Tabela de Cores

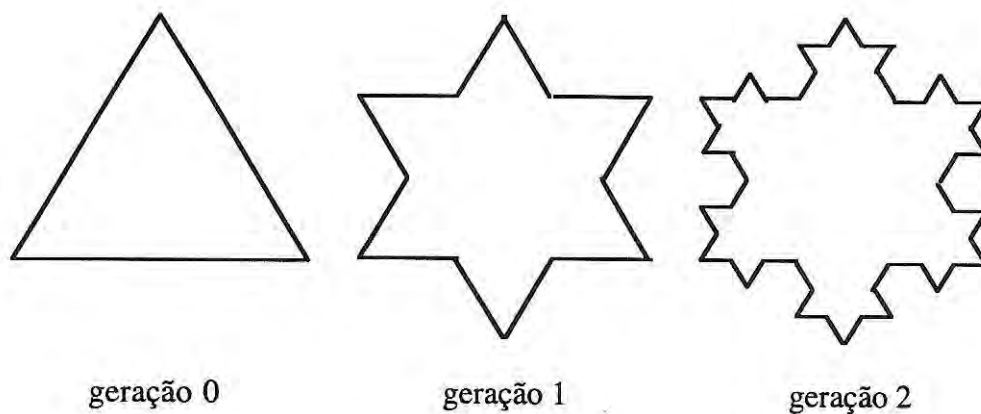
A seguir apresenta-se uma tabela de referência com os números e nomes das cores que podem ser utilizadas como parâmetros dos comandos: **mudecl**, **mudecp**, **mudecf**.

número	Nome
0	"preto
1	"azul
2	"verde
3	"ciano
4	"vermelho
5	"roxo
6	"marrom
7	"cinzaclaro
8	"cinzaescuro
9	"verdeágua
10	"verdeclaro
11	"cianoclaro
12	"vermelhoescuro
13	"rosachoque
14	"amarelo
15	"branco

APÊNDICE

APÊNDICE A

Floco de Neve



O número de lados

Ao investigar os números de lados obtidos em cada uma das gerações do fractal Floco de Neve, observar-se a existência da sequência $3 \cdot 4^n$.

Geração 0	→	3 lados	→	$3 \cdot 4^0$
Geração 1	→	12 lados	→	$3 \cdot 4^1$
Geração 2	→	48 lados	→	$3 \cdot 4^2$
Geração 3	→	192 lados	→	$3 \cdot 4^3$
Geração 4	→	768 lados	→	$3 \cdot 4^4$
⋮		⋮		⋮
Geração n	→	$3 \cdot 4^n$ lados	→	$3 \cdot 4^n$

Comprimento dos lados

Ao investigar as medidas dos comprimentos dos lados obtidos em cada uma das gerações do fractal Floco de Neve, observar-se a existência da sequência

$$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Geração 0	→	l	→	$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$
Geração 1	→	$\frac{l}{3}$	→	$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1$
Geração 2	→	$\frac{\frac{l}{3}}{3} = \frac{l}{9}$	→	$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
Geração 3	→	$\frac{\frac{l}{9}}{3} = \frac{l}{27}$	→	$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$
Geração 4	→	$\frac{\frac{l}{27}}{3} = \frac{l}{81}$	→	$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
Geração n	→	$\frac{l}{3^{n-1}} = \frac{l}{3^n}$	→	$l \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Perímetro

Ao analisar as medidas dos perímetros obtidos em cada uma das gerações do fractal Floco de Neve, observar-se a existência da sequência $3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n l$.

Geração 0	→	$3l$	→	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^0 l$
Geração 1	→	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right) l = 4l$	→	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^1 l$
Geração 2	→	$3 \cdot \left(\frac{16}{9}\right) l = \frac{16}{3} l$	→	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 l$
Geração 3	→	$3 \cdot \left(\frac{64}{27}\right) l = \frac{64}{9} l$	→	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 l$
Geração 4	→	$3 \cdot \left(\frac{256}{81}\right) l = \frac{256}{27} l$	→	$3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^4 l$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

$$\text{Geração } n \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{4^n}{3^n} \right) l = \frac{4^n}{3^{n-1}} l \rightarrow 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^n l$$

Área

Ao investigar as medidas das áreas obtidas em cada uma das gerações do fractal Floco de Neve, observar-se a existência de uma série convergente.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Geração } 0 & \rightarrow & A = \frac{l^2 \sqrt{3}}{2} \rightarrow A_0 = \frac{l^2 \sqrt{3}}{2} \\
 \text{Geração } 1 & \rightarrow & A = A_0 + \frac{l^2 \sqrt{3}}{6} \rightarrow A_0 \left(1 + \frac{1}{3} \right) \\
 \text{Geração } 2 & \rightarrow & A = A_0 + \frac{l^2 \sqrt{3}}{6} + \frac{4l^2 \sqrt{3}}{54} \rightarrow A_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} \right) \\
 \text{Geração } 3 & \rightarrow & A = A_0 + \frac{l^2 \sqrt{3}}{6} + \frac{4l^2 \sqrt{3}}{54} + \frac{16l^2 \sqrt{3}}{486} \rightarrow A_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} \right) \\
 \text{Geração } 4 & \rightarrow & A = A_0 + \frac{l^2 \sqrt{3}}{6} + \frac{4l^2 \sqrt{3}}{54} + \frac{16l^2 \sqrt{3}}{486} + \frac{64l^2 \sqrt{3}}{4374} \rightarrow A_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \frac{64}{2187} \right) \\
 \vdots & & \vdots \\
 \text{Geração } n & \rightarrow & A = A_0 + \frac{l^2 \sqrt{3}}{6} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \cdot A_0 \rightarrow A_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1} \right)
 \end{array}$$

A área do fractal Floco de Neve na e-nésima geração é calculada da seguinte forma:

$$A_0 \left(1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \frac{64}{2187} \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^{n-1}}_{\text{Soma dos } n \text{ primeiros termos de uma PG finita de razão } \frac{4}{9}} \right)$$

A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica finita é calculada da seguinte forma:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1}{\frac{4}{9} - 1} \right) = \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right)$$

$$A_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \frac{64}{2187} \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \right) = A_0 \left(1 + \frac{3}{5} \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) \right) = A_0 + \frac{3}{5} A_0 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right)$$

$$A_{Total} = \begin{cases} A_0 & , n = 0 \\ A_0 + \frac{3}{5} A_0 \left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) & , n \neq 0 \end{cases}$$

A soma dos n termos de uma progressão geométrica infinita é calculada da seguinte forma:

$$A_0 \left(1 + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \frac{64}{2187} \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}_{\text{Soma dos termos de PG infinita de razão } \frac{4}{9}} + \dots \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{3}{5}$$

$$A_0 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{27} + \frac{16}{243} + \frac{64}{2187} \dots + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} + \dots \right) = A_0 \left(1 + \frac{3}{5} \right) = A_0 + \frac{3}{5} A_0$$

APÊNDICE B

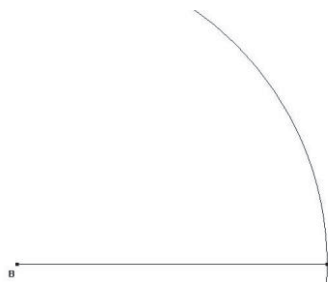
Construção da estrutura geométrica para a construção do triângulo de Sierpinski

Construa um triângulo equilátero ABC , sendo dada a medida do lado l .

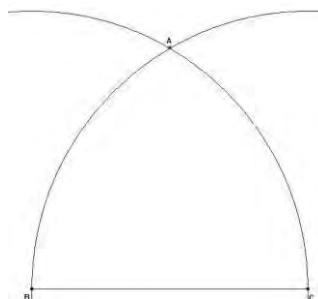
Sobre uma reta r qualquer e usando o compasso, marque o segmento $\overline{BC}$ cuja medida é l .



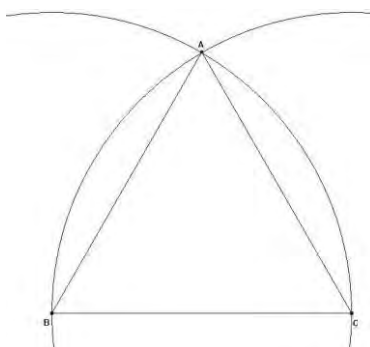
Com centro em B e raio igual a l , trace um arco.



Com centro em C e o mesmo raio, trace outro arco que corta o anterior no ponto A .

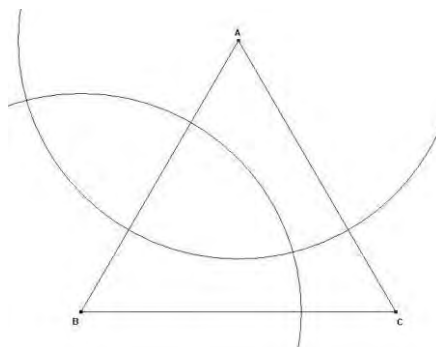


Una o ponto A aos pontos B e C e se obtém o triângulo equilátero ABC .

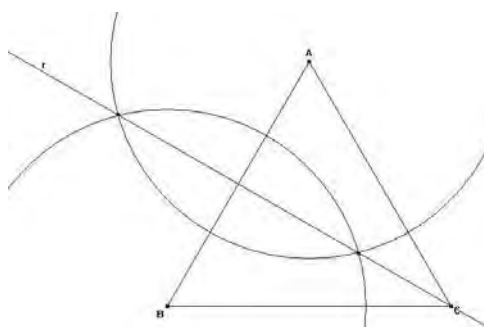


Construa o ponto médio D no segmento $\overline{AB}$.

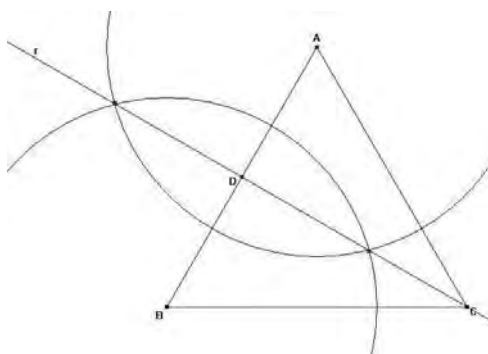
Com centro em B e raio r , sendo $r > \frac{l}{2}$, trace um arco. Com centro em A e mesmo raio, trace outro arco.



Os arcos se interceptam em dois pontos, trace uma reta r que una esses dois pontos.

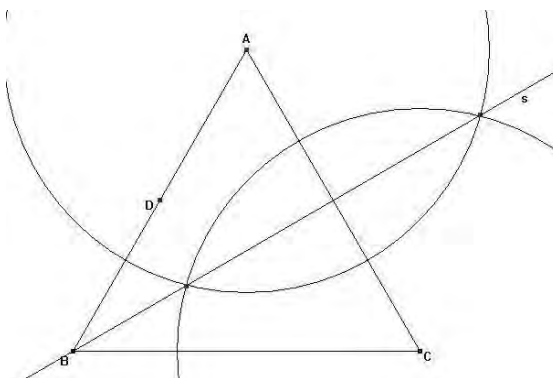


A intersecção da reta r com o segmento $\overline{AB}$ obtém o ponto médio D .

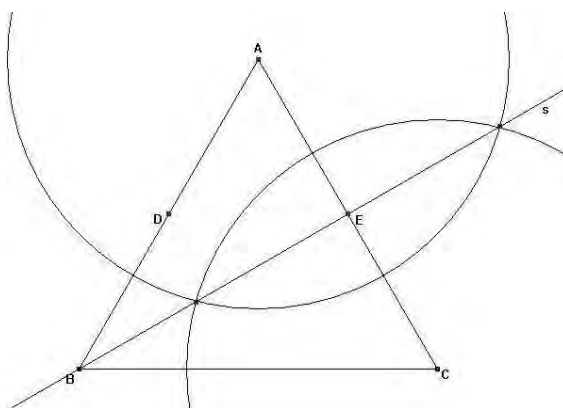


Construa o ponto médio E no segmento $\overline{AC}$.

Com centro em C e raio r , sendo $r > \frac{l}{2}$, trace um arco. Com centro em A e mesmo raio, trace outro arco. Os arcos se interceptam em dois pontos, trace uma reta s que una esses dois pontos.

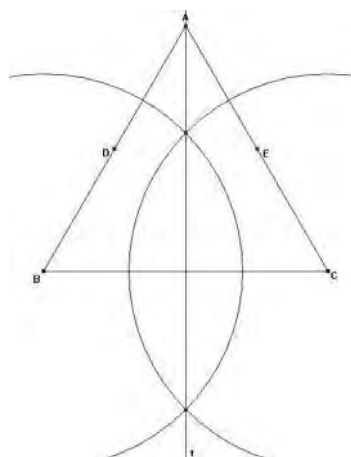


A intersecção da reta s com o segmento $\overline{AC}$ obtém o ponto médio E .

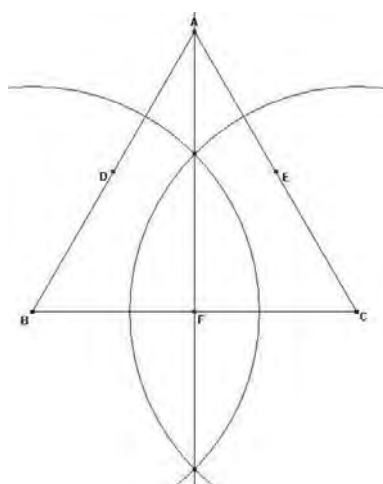


Construa o ponto médio F no segmento $\overline{BC}$.

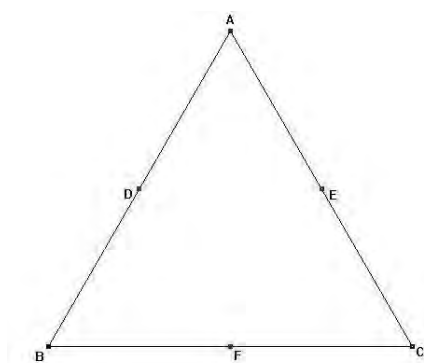
Com centro em B e raio r , sendo $r > \frac{l}{2}$, trace um arco. Com centro em C e mesmo raio, trace outro arco. Os arcos se interceptam em dois pontos, trace uma reta t que una esses dois pontos.



A intersecção da reta t com o segmento $\overline{BC}$ obtém o ponto médio F .



Tem-se o triângulo ABC com os seus respectivos pontos médios.



Una o ponto D aos pontos E e F , una também o ponto E com o ponto F . Assim, a estrutura geométrica para a construção do triângulo de Sierpinski está concluída.

