

Luiz Fernando da Silva Gouveia

Sistemas Dinâmicos com Simetrias e Equações Diferenciais Implícitas

Relatório de Pós-doutorado realizado na Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Campus de São José do Rio Preto.

Supervisor: Professor Doutor Paulo Ricardo da Silva.

FAPESP - 2020/04717-0 e 2022/03801-3
São José do Rio Preto - 2024

Contents

A	Resumo do Projeto	1
A.1	Equações Diferenciais Implícitas	1
A.2	Sistemas Dinâmicos com Simetrias	1
B	Introdução e Justificativa	2
B.1	Objetivos Gerais	2
C	Detalhamento	3
C.1	Constantes de Lyapunov	3
C.2	Sistemas de Kolmogorov	4
C.3	Sistemas Descontínuos	6
D	Bolsa Estágio de Pesquisa no Exterior - BEPE	7
E	Trabalhos em Desenvolvimento	7
F	Descrição dos Dados e Metadados	9
F.1	Aspectos Legais e Facilidade de Acesso aos Dados	9
F.2	Gestão de Dados e Armazenamento	9
G	Execução do Plano de trabalho e Divulgação dos resultados obtidos	10
H	Participações em eventos científicos	10
I	Lista de trabalhos realizados durante o período vigente do relatório.	10
J	Lista dos trabalhos em formato preprint	11
K	Orientações	11
L	Disciplinas Ministradas	11
M	Atividades de Extensão	11
N	Comentários do Supervisor	11

A Resumo do Projeto

O estudo geométrico-qualitativo de fluxos em sistemas dinâmicos (discretos ou contínuos) tem sido durante décadas objeto de grande interesse em vários setores da matemática pura e aplicada. Hoje em dia esta teoria é acessível a uma enorme e heterogênea audiência em muitos ramos da ciência. Dentro desta linha de pesquisa situam-se os sistemas com simetrias e aqueles modelados por equações diferenciais implícitas. As simetrias surgem naturalmente em muitos fenômenos que evoluem em função do tempo.

A.1 Equações Diferenciais Implícitas

O estudo clássico de equações diferenciais ordinárias [6] propõe o estudo de equações diferenciais que podem ser escritas na forma

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n,$$

onde f é uma função definida em $I \times U \subseteq \mathbb{R}^n$ e com contra-domínio sendo $\mathbb{R}^n$. Tal forma é chamada de forma canônica. No entanto, muitos problemas na teoria de controle, na economia e em oscilações não lineares modelam-se em termos de Equações Diferenciais Implícitas $F(t, x, \dot{x}) = 0$. Dentro desta ampla classe de equações encontramos, além de obviamente as equações que já estão na forma canônica, as equações diferenciais com impasses e mais especificadamente os problemas de perturbação singular.

Dito isto, estamos interessado em estudar métodos de regularização de sistemas descontínuos e sua relação com a *TGPS-Teoria Geométrica das Perturbações Singulares*.

A.2 Sistemas Dinâmicos com Simetrias

Os problemas a serem abordados neste projeto inserem-se no estudo da geometria das singularidades de campos vetoriais descontínuos definidos em $\mathbb{R}^n$ nos contextos reversível e equivariante, cujo conjunto de descontinuidade tem estrutura de uma variedade algébrica de codimensão 1. Mais precisamente, listamos a seguir as principais frentes de estudo sobre esse tema.

- Análise do campo vetorial descontínuo em torno de uma singularidade típica, quando este campo é reversível (respectivamente equivariante) em relação a uma involução ϕ cujo conjunto de pontos fixos está contido no conjunto de descontinuidade do campo inicial. A análise deve ser feita para os diversos casos sobre a codimensão do conjunto de pontos fixos da involução, ou seja, $1 \leq \text{CodFix}\phi \leq n$. Através do estudo para os casos $n = 2$ e $n = 3$, damos continuidade à análise em dimensões $n \geq 4$. Até onde sabemos existem poucos trabalhos nesta direção devido a sua complexidade em dimensão maior que 2, porém nesses trabalhos não é considerado a presença de simetrias.
- Estudo da existência de conjuntos minimais (órbitas periódicas, ciclos limites, toros invariantes etc) em alguns modelos de sistemas dinâmicos reversíveis e equivariantes, separadamente, quando o sistema inicial é perturbado quebrando-se suas propriedades simétricas. Alguns autores estudam a existência de órbitas periódicas no contexto reversível de um campo vetorial que possui a chamada T-singularidade (Singularidade Teixeira). Observamos que esse é o único trabalho nesta direção.

- Análise entre a dinâmica das singularidades de um campo vetorial descontínuo reversível (respectivamente equivariante), e o fluxo da variedade lenta, a qual é obtida através do processo de regularização e da teoria de perturbação singular. Os primeiros resultados nesta direção estabelecem condições para a existência de órbitas periódicas e heteroclínicas para um campo vetorial reversível, a partir da teoria de perturbação singular. Existem estudos de singularidades de campos vetoriais descontínuos através da teoria de perturbação singular, porém sem simetrias. Porém, ressaltamos ainda que existem poucas frentes de estudo sobre esse tema e, portanto, ainda há muito o que fazer.

Enfatizamos que as principais ferramentas usadas para o desenvolvimento desse projeto envolvem a teoria clássica de singularidades de aplicações, resultados sobre campos de vetores definidos em uma variedade com bordo, Teoria do Averaging e Funções de Melnikov, regularização e teoria de perturbação singular.

B Introdução e Justificativa

No começo do século XIX, David Hilbert apresentou uma lista de problemas, que em sua opinião, ajudariam no avanço da matemática. Dentre os 23 problemas apresentados, um está relacionado a sistemas dinâmicos contínuos. A segunda parte do 16º Problema de Hilbert que consiste em determinar o número máximo de ciclos limites, que denominaremos de $H(n)$, e suas respectivas posições de um campo vetorial polinomial de grau n . Até os dias atuais, tal problema permanece sem resolução. Com o passar dos anos e sem uma resposta para o 16º Problema de Hilbert, versões mais fracas foram surgindo. Uma delas corresponde em determinar o número de ciclos limites que bifurcam de um centro elementar ou de um foco elementar. Seja $M(n)$ o valor máximo obtido para um campo de grau n . Bautin, em [2] provou que $M(2) = 3$. Sibirskii em [15] mostrou que para sistemas cúbicos sem termos quadráticos, não mais do que 5 ciclos limites bifurcam de um ponto de equilíbrio. Zoladek em [17] mostrou as primeiras evidências de um campo cúbico com 11 ciclos limites. Em 2006, Christopher em [5], estudando as partes lineares das constantes de Lyapunov apresentou uma prova simples de que $M(3) \geq 11$. Gouveia e Torregrosa em [8] mostraram que $M(3) \geq 12$ e $M(4) \geq 21$ e os mesmos autores em [11] usando algoritmos de cálculo em paralelo, foram capazes de mostrar que $M(5) \geq 33$, $M(7) \geq 61$, $M(8) \geq 73$, e $M(9) \geq 88$ e usando a equivalência entre as partes lineares das constantes de Lyapunov e as funções de Melnikov de primeira ordem, mostraram que $M(6) \geq 44$, ver [12]. Uma das propostas deste projeto vai ao encontro com esse problema. Dado um sistema de Kolmogorov, quantos ciclos limites é possível obter ao perturbarmos o sistema? Mais detalhes serão dados nos tópicos a seguir.

A outra proposta consistia em aprofundar o estudo de sistemas holomorfos descontínuos. Na subseção **C3** explicamos de forma resumida a abordagem adotada e o estado atual do trabalho.

B.1 Objetivos Gerais

- Estudo do fluxo em superfícies algébricas invariantes via análise de “constrained systems”. Investigar relação de tais problemas com a Teoria Geométrica das Perturbações Singulares.
- Utilizar técnicas de desingularização (blow ups) para estudar sistemas dinâmicos apresentando impasses em pontos singulares.

- Existência de conjuntos minimais e de variedades invariantes de sistemas com simetrias e de equações diferenciais implícitos.
- Sistemas suaves por partes com descontinuidade em superfícies algébricas.
- Existência e cotas de ciclos limites de sistemas suaves.
- Existência e cotas de ciclos limites de sistemas suaves por partes.
- Bifurcações globais de sistemas suaves por partes.

C Detalhamento

Para a renovação da bolsa, o pesquisador submeteu um projeto de pesquisa que apresentava duas propostas de estudo. Uma delas consistia em estudar a cota inferior de ciclos limites para sistemas Kolmogorov. Abaixo, explicaremos de forma resumida o problema proposto, a técnica utilizada e os principais resultados obtidos. Como fruto deste trabalho, foi elaborado um artigo científico intitulado “**New lower bound for the Hilbert number in low degree Kolmogorov systems**” que foi publicado na revista científica “**Chaos, Solitons and Fractals**” com o seguinte DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113937>.

A outra proposta consistia em aprofundar o estudo de sistemas holomorfos descontínuos. Na subseção **C3** explicamos de forma resumida a abordagem adotada e o estado atual do trabalho.

C.1 Constantes de Lyapunov

Primeiramente, vamos introduzir alguns conceitos básicos sobre constantes de Lyapunov. Tal teoria é uma ferramenta muito útil para se estudar o número de órbitas periódicas isoladas (ciclos limites) de pequena amplitude. Uma vez que determinar a cota maximal de ciclos limites de um sistema de equações diferenciais é um problema ainda sem resolução, estudar o problema através das cotas minimais de ciclos limites de pequena amplitude é uma abordagem que nos permite ter uma melhor compreensão sobre o comportamento do sistema ao sofrer uma perturbação. Sem perda de generalidade, vamos assumir que a origem é um ponto de equilíbrio e considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= a x - y + \sum_{k=2}^n P_k(x, y), \\ \dot{y} &= x + a y + \sum_{k=2}^n Q_k(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

com P_k and Q_k polinômios homogêneos de grau k nas variáveis x, y . Escrevendo o sistema em coordenadas polares, $(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, temos

$$\frac{dr}{d\theta} = a r + \sum_{k=2}^{\infty} S_k(\theta) r^k, \quad (2)$$

onde $S_k(\theta)$ são polinômios trigonométricos nas variáveis $\sin \theta, \cos \theta$. Seja $r(\theta, \rho)$ a solução do sistema (2) tal que $r(0, \rho) = \rho$. Quando $a = 0$, a estabilidade do problema é conhecida como

Problema do Centro-Foco. Além disso, para $a = 0$ e em uma vizinhança de $\rho = 0$, podemos desenvolver a solução em série com respeito a ρ ,

$$r(\theta, \rho) = \rho + \sum_{k=2}^{\infty} r_k(\theta) \rho^k,$$

onde $r_k(0) = 0$ para todo $k \geq 2$. Assim, a Aplicação de Retorno $\Pi(\rho)$, pode ser obtida tomando $\theta = 2\pi$,

$$\Pi(\rho) = r(2\pi, \rho) = \rho + \sum_{k=2}^{\infty} r_k(2\pi) \rho^k. \quad (3)$$

Quando $V_{\tilde{K}} = r_{\tilde{K}}(2\pi) \neq 0$ para algum valor $\tilde{K}$, dizemos que a origem do sistema (1) é um foco fraco. Por outro lado, para $V_{\tilde{K}} = r_{\tilde{K}}(2\pi) = 0$ para todo $\tilde{K}$, dizemos que a origem é um centro. Um dos resultados clássicos de constantes de Lyapunov é que se existe algum valor $\tilde{K}$ tal que $V_{\tilde{K}} \neq 0$, então $\tilde{K} = 2K + 1$, veja [1, 4, 6], e consequentemente a K -Constante de Lyapunov é definida como $L_K = V_{2K+1}$ quando $L_1 = \dots = L_{K-1} = 0$.

O conjunto $\mathcal{B}^{\mathbb{R}} = \langle L_1, L_2, \dots \rangle$ formado pelas constantes de Lyapunov é um ideal no anel de polinômios $\mathbb{R}[\rho]$. Tal ideal é denominado de Ideal de Bautin e possui uma grande importância ao se estudar o problema do centro-foco.

C.2 Sistemas de Kolmogorov

Este tema foi desenvolvido com os pesquisadores Yagor Romado Carvalho e Leonardo Pereira da Costa Cruz, pós-doutorandos do ICMC-USP, São Carlos. Neste trabalho abordamos a ciclicidade local de sistemas de Kolmogorov.

Sistemas de Kolmogorov são sistemas dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = xP_n(x, y), \\ \dot{y} = yQ_n(x, y), \end{cases} \quad (4)$$

onde $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios de grau n . Na literatura existente, considerando $n = 2$, Lloyd [14] apresenta um sistema com 6 ciclos limites quando o sistema é perturbado com perturbações que mantém o sistema do tipo Kolmogorov, isto é, perturbações do tipo

$$\begin{cases} \dot{x} = xP_n(x, y) + x \left(\sum_{i+j=0}^{n-1} a_{i,j} x^i y^j \right), \\ \dot{y} = yQ_n(x, y) + y \left(\sum_{i+j=0}^{n-1} b_{i,j} x^i y^j \right). \end{cases} \quad (5)$$

Em [13], os autores, para $n = 3$ apresentam um sistema no qual é possível obter 7 ciclos limites. No nosso trabalho, através do cálculo das constantes de Lyapunov, fomos capazes de apresentar um novo exemplo de um sistema com 6 ciclos limites para $n = 2$. Além disso, para $n = 3$ encontramos um sistema com 13 ciclos limites e por fim, apresentamos também um sistema com 18 ciclos limites quando $n = 4$. Note que para $n = 3$ e $n = 4$ o número de ciclos limites que encontramos é a melhor cota inferior até o momento.

Apresentamos a seguir, de forma resumida, os principais resultados obtidos.

Theorem C.1. *Dado o sistema de Kolmogorov de grau 3*

$$\begin{cases} \dot{x} = -(-\lambda_3 + x + 1)((\lambda_3^2 - 1)x + 1)y, \\ \dot{y} = (\lambda_3 - x + 1)(-(\lambda_3^2 - 1)y/\lambda_3 + 1)x. \end{cases} \quad (6)$$

existem parâmetros perturbativos no qual é possível obter 6 ciclos limites bifurcando da origem.

Proof. Para provar este resultado, basta calcularmos as partes lineares das seis primeiras Constantes de Lyapunov, $L_1, \dots, L_6$ em relação aos parâmetros perturbativos $\left(\sum_{i+j=0}^2 a_{i,j}x^i y^j\right)$ e $\left(\sum_{i+j=0}^2 b_{i,j}x^i y^j\right)$, e verificar que o rank da matriz Jacobiana de $L_1, \dots, L_6$ em relação aos parâmetros perturbativos é 5. Para obter o sexto ciclo limite, basta usar o parâmetro livre λ . $\square$

Theorem C.2. *Dado o sistema de Kolmogorov de grau 4*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(\lambda(y+1) - \lambda - x)(-\lambda^2(y+1) + \lambda^2 + \lambda(y+1) + \lambda + 2x)(-\beta x - y + 1) \\ \dot{y} = (y+1)(\lambda(y+1) - \lambda - 2x)(-\lambda(y+1) + \lambda + 2x + y + 2)(-\beta x - y + 1). \end{cases} \quad (7)$$

existem parâmetros perturbativos no qual é possível obter 13 ciclos limites bifurcando da origem.

Proof. Para provar este resultado, basta calcularmos as partes lineares das seis primeiras Constantes de Lyapunov, $L_1, \dots, L_{13}$ em relação aos parâmetros perturbativos $\left(\sum_{i+j=0}^3 a_{i,j}x^i y^j\right)$ e $\left(\sum_{i+j=0}^3 b_{i,j}x^i y^j\right)$, e verificar que o rank da matriz Jacobiana de $L_1, \dots, L_{13}$ em relação aos parâmetros perturbativos é 11. Para obter os dois ciclos limites restantes, basta usar os dois parâmetros livres λ e β . $\square$

Theorem C.3. *Dado o sistema de Kolmogorov de grau 4*

$$\begin{cases} \dot{x} = -1/4(x^2 + xy + 2y^2 + x + y + 1)(13x + 4)y \\ \dot{y} = -1/2(x^2 + xy + 2y^2 + x + y + 1)(-3y - 2)x. \end{cases} \quad (8)$$

existem parâmetros perturbativos no qual é possível obter 13 ciclos limites bifurcando da origem.

Proof. Para provar este resultado, basta calcularmos as treze primeiras Constantes de Lyapunov, $L_1, \dots, L_{13}$ até ordem 2 em relação aos parâmetros perturbativos $\left(\sum_{i+j=0}^3 a_{i,j}x^i y^j\right)$ e $\left(\sum_{i+j=0}^3 b_{i,j}x^i y^j\right)$, e verificar que o rank da matriz Jacobiana de $L_1, \dots, L_{13}$ em relação aos parâmetros perturbativos é 8. Efetuando uma mudança de variável que nos permite eliminar a parte linear das constantes $L_9, \dots, L_{13}$, obtemos equações homogêneas de ordem 2. Com estas equações, basta procurar um ponto no qual $L_9, \dots, L_{12}$ se anulam, $L_{13} \neq 0$ e a interseção de $L_9, \dots, L_{12}$ seja transversal. Tal fato ocorre e assim provamos a existência de ao menos 13 ciclos limites bifurcando da origem. $\square$

Theorem C.4. *Dado o sistema de Kolmogorov de grau 5*

$$\begin{cases} \dot{x} &= -(-3x + y + 1)((8x)/3 + 1)y(-2x^2 - 4y^2 + 1) \\ \dot{y} &= (3x - y + 1)(-8y + 1)x(-2x^2 - 4y^2 + 1). \end{cases} \quad (9)$$

existem parâmetros perturbativos no qual é possível obter 18 ciclos limites bifurcando da origem.

Proof. Para provar este resultado, basta calcularmos a parte linear das 24 primeiras Constantes de Lyapunov, $L_1, \dots, L_{24}$ em relação aos parâmetros perturbativos $\left(\sum_{i+j=0}^4 a_{i,j}x^i y^j\right)$ e $\left(\sum_{i+j=0}^4 b_{i,j}x^i y^j\right)$, e verificar que o rank da matriz Jacobiana de $L_1, \dots, L_{24}$ em relação aos parâmetros perturbativos é 18. $\square$

O artigo desenvolvido sobre este tema encontra-se publicado em “**Chaos, Solitons and Fractals**” com o título “**New lower bound for the Hilbert number in low degree Kolmogorov systems**” e DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113937>. Na seção I deste relatório, intitulada “Lista de trabalhos realizados durante o período vigente do relatório”, este artigo corresponde ao primeiro item da lista.

C.3 Sistemas Descontínuos

Vamos introduzir agora alguns conceitos básicos da Teoria de Sistemas de Filippov para sistemas descontínuos. Dado um sistema da forma

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & \text{se } f(x, y) \geq 0, \\ Y(x, y), & \text{se } f(x, y) < 0, \end{cases} \quad (10)$$

no qual $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função $\mathcal{C}^1$ tal que 0 é valor regular. Vamos supor que a curva de descontinuidade é dada por $\Sigma = f^{-1}(0)$. Seguindo a notação de Filippov, em Σ , quando os campos vetoriais se encontram, podemos ter em Σ três tipos de comportamento, que iremos denominar de costura, escape e deslize e denotaremos por Σ^C , Σ^E , Σ^D , respectivamente. Então, dado um ponto $p \in \Sigma$, dizemos que $p \in \Sigma^C$ se, e somente se, $Xf(p) \cdot Yf(p) > 0$, onde $Xf(p) = \langle \nabla f(p), X(p) \rangle$ e $Yf(p) = \langle \nabla f(p), Y(p) \rangle$. Consequentemente, $p \in \Sigma^E \cup \Sigma^D$ se, e somente se $Xf(p) \cdot Yf(p) < 0$.

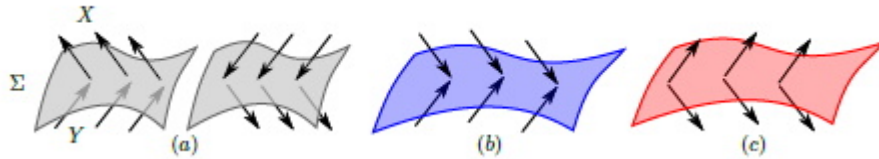


Figure 1: (a) Costura, (b) Deslize, (c) Escape

Se tratando de regiões de deslize, os autores Freire, Ponce e Torres em [7], mostraram que sob determinadas hipóteses específicas, há o surgimento de ao menos um ciclo limite em torno

da região de deslize para campos lineares por partes. Gouveia e Torregrosa em [9, 10] mostraram que para um foco fraco de ordem 1 em sistemas polinomiais por partes, existem perturbações que permitem a bifurcação de ao menos 2 ciclos limites. Um ciclo limite é a bifurcação de Hopf clássica e o surgimento do segundo ciclo limite é denominado de bifurcação de Pseudo-Hopf, ver [3].

Observemos que para sistemas descontínuos podemos também calcular constantes de Lyapunov e definir o Ideal de Bautin, que iremos denotar por $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{R}}$. No entanto, enquanto para o caso contínuo, as constantes L_k aparacem quando k é ímpar, no caso descontínuo aparecem também para k par. Logo, para sistemas descontínuos, devemos calcular, ao menos, o dobro de constantes de Lyapunov para se abordar o problema de cotas minimais de ciclos limites de pequena amplitude. Além disso, a dificuldade e o custo computacional para se calcular constantes de Lyapunov para sistemas descontínuos é muito maior.

Visando contornar este problema, através da regularização de Sotomayor–Teixeira [16], obtemos um sistema $Z_{\varepsilon}(x, y) = \frac{(1 + \phi(f(x, y)/\varepsilon))}{2}X(x, y) + \frac{(1 - \phi(f(x, y)/\varepsilon))}{2}Y(x, y)$ que é contínuo em uma faixa de tamanho ε . Para este sistema, denotamos o ideal de Bautin como $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_{\varepsilon}}^{\mathbb{R}}$. Uma pergunta natural é se existe alguma relação entre $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{R}}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_{\varepsilon}}^{\mathbb{R}}$, isto é, as constantes de Lyapunov do sistema regularizado possuem alguma relação com as constantes de Lyapunov do sistema descontínuo? Uma vez provada essa relação, conseguiremos contornar a dificuldade do cálculo das constantes de Lyapunov para sistemas descontínuos e consequentemente conseguiremos avançar no estudo das cotas de ciclos limites de pequena amplitude para um sistema descontínuo qualquer, em especial para sistemas descontínuos holomorfos.

Inicialmente, através de exemplos de sistemas holomorfos suaves por partes, encontramos evidências de que o ideal das constantes de Lyapunov do sistema regularizado esta contida no ideal das constantes de Lyapunov do sistema descontínuo, isto é, $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}_{\varepsilon}}^{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{Z}}^{\mathbb{R}}$. Nosso objetivo agora se concentra em provar formalmente tal relação e procurar responder se a inclusão inversa também é válida. Este trabalho ainda está em estágio de desenvolvimento.

D Bolsa Estágio de Pesquisa no Exterior - BEPE

O pesquisador realizou um estágio de pesquisa no exterior durante o período de 01/10/2022 à 30/09/2023. Durante esse período, o pesquisador desenvolveu trabalhos com o Professor Doutor Oleg Makarenkov, da Universidade do Texas em Dallas, e com o Professor Doutor Richard McGehee da Universidade de Minnesota.

E Trabalhos em Desenvolvimento

Atualmente, o pesquisador está desenvolvendo mais dois trabalhos que tiveram início durante o período de abrangência desse relatório.

Em parceria com o supervisor Professor Dr. Paulo Ricardo da Silva e com o pesquisador Gabriel Rondón, estamos elaborando um artigo que aborda os sistemas de Kolmogorov através da Teoria de Perturbação Singular, ou seja, estamos estudando sistemas da forma

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x X_n(x, y), \\ \dot{y} = y Y_n(x, y), \end{cases} \quad (11)$$

onde $X_n(x, y)$ e $Y_n(x, y)$ são sistemas polinomiais de grau n . Em um primeiro momento, abordamos sistemas para $n = 1$ e $n = 2$, ou seja, sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a_0 + a_1x + a_2y), \\ \dot{y} = y(b_0 + b_1x + b_2y), \end{cases} \quad (12)$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2$, e sistemas da forma

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x} = x(a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5xy + a_0), \\ \dot{y} = y(b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4y^2 + b_5xy + b_0), \end{cases} \quad (13)$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Através do estudo dos parâmetros a_i, b_i , determinamos a variedade lenta e as respectivas singularidades que a variedade crítica pode conter. Por fim, estudamos quais as condições para que cada sistema possua o fenômeno de relaxamento de oscilação e apresentamos o primeiro exemplo na literatura de um sistema de Kolmogorov de grau $n = 2$ exibindo um ciclo canard, sendo X_n e Y_n polinômios.

Uma segunda abordagem foi feita considerando sistemas Kolmogorov em um ambiente descontínuo, isto é, dado uma curva Σ separando o plano em dois semi-planos, vamos tomar em cada semi-plano um sistema de Kolmogorov. Tais sistemas são dados da seguinte forma:

$$Z(x, y) = \begin{cases} (\dot{x}, \dot{y}) = (xP_n^+(x, y), yQ_n^+(x, y)), & \text{for } f(x) \geq 0, \\ (\dot{x}, \dot{y}) = (xP_n^-(x, y), yQ_n^-(x, y)), & \text{for } f(x) < 0, \end{cases} \quad (14)$$

Aplicando a regularização de Sotomayor-Teixeira para uma função de transição ϕ , mostramos que dado um sistema descontínuo, o sistema regularizado será do tipo Kolmogorov também, isto é, o sistema regularizado $Z_\epsilon(x, y)$ é da forma

$$Z_\epsilon(x, y) = \begin{cases} \dot{x} = x \left(\frac{1 + \phi(x/\epsilon)}{2} P_n^+(x, y) + \frac{1 - \phi(x/\epsilon)}{2} P_n^-(x, y) \right), \\ \dot{y} = y \left(\frac{1 + \phi(x/\epsilon)}{2} Q_n^+(x, y) + \frac{1 - \phi(x/\epsilon)}{2} Q_n^-(x, y) \right), \end{cases} \quad (15)$$

Este trabalho esta na fase final de desenvolvimento e a previsão é de termos uma versão preprint até o final do semestre.

Um segundo trabalho está sendo desenvolvido com o aluno de doutorado do programa de pós graduação do Ibilce/Unesp, Paulo Henrique e com o Professor Dr. Armengol Gasull da Universidad Autònoma de Barcelona. Neste trabalho, procuramos estudar a cota inferior de ciclos limites de pequena amplitude para sistemas da forma

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-1)(a_0 - a_1 + (a_1 + a_3 - a_4 - a_0)y), \\ \dot{y} = y(y-1)(b_0 - b_1 + (b_1 + b_3 - b_4 - b_0)x). \end{cases} \quad (16)$$

Tais sistemas possuem importantes aplicações em áreas como Teoria de Jogos e Biologia, quando duas, ou mais, espécies competem entre si. A seguir apresentamos um breve resumo dos principais resultados obtidos.

Dado $d \in \mathbb{N}$, considere χ_d o conjuntos de campos vetoriais de grau $X = (P, Q)$ dados por

$$\begin{cases} \dot{x} &= (2x-1)(2x+1)f(x,y), \\ \dot{y} &= (2y-1)(2y+1)g(x,y), \end{cases} \quad (17)$$

onde $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ são polinômios de grau no máximo d .

Em um primeiro momento mostramos que se $X \in \chi_2$, então o campo vetorial X possui no máximo dois centros não degenerados e é possível obter ao menos cinco ciclos limites de pequena amplitude. Posteriormente, mostramos que dado $X \in \chi_d$, então o campo vetorial X possui no máximo $\frac{1}{2}d(d+1)$ centros não degenerados e existem uma sequência $(d_k) \subset \mathbb{N}$ com $d_k \rightarrow \infty$ tal que para cada k existe $X_k \in \chi_{d_k}$ com ao menos $\frac{5}{9}d_k^2$ ciclos limites.

Este trabalho também está na fase final de desenvolvimento e a previsão é de termos uma versão preprint até o final do semestre.

F Descrição dos Dados e Metadados

Quais foram os dados coletados?

Uma vez que se trata de um projeto de pesquisa em Matemática, os dados coletados se dividem em teoremas, proposições, corolários e lemas e suas respectivas demonstrações. Tais resultados são coletados através de revisão bibliográfica.

Quais metadados foram anotados e qual padrão foi seguido?

Através dos avanços matemáticos decorridos durante o período vigente deste relatório, os resultados produzidos foram apresentados na forma de teoremas, proposições, corolários, lemas e suas respectivas demonstrações. Além disso, todos os resultados foram disponibilizados em um arquivo *.pdf*, redigido pelos pesquisadores envolvidos através do programa matemático TeXStudio.

F.1 Aspectos Legais e Facilidade de Acesso aos Dados

Uma vez que os objetos estudados são abstratos, não foram necessárias consultas a comissões de ética em pesquisa ou equipes jurídicas. Além disso, os créditos foram devidamente dados nas eventuais publicações científicas produzidas que constam resultados obtidos através do envolvimento de pesquisadores de outras instituições.

Quais são as políticas a serem utilizadas para o compartilhamento de dados?

O compartilhamento de dados foi realizado na forma de publicações científicas que seguiram as “Políticas para Acesso Aberto às Publicações Resultantes de Auxílios e Bolsas FAPESP”. As pré-publicações ou resultados parciais estão/serão disponibilizados em servidores especializados de acesso aberto (*ArXiv.org*).

F.2 Gestão de Dados e Armazenamento

Os arquivos resultantes da pesquisa foram armazenados em formato *.tex* e *.pdf*. Para manipular os dados em formato *.tex*, foi utilizado o programa TeXStudio.

Como e onde estes arquivos serão mantidos? Por quanto tempo ocorrerá esta preservação? Como será realizado o backup destes dados?

Os arquivos gerados encontram-se em uma pasta compartilhada entre os autores envolvidos em cada trabalho, como por exemplo o Dropbox. Logo, o backup é feito de maneira automática e conseqüentemente há mais de um servidor online com cópias dos arquivos.

G Execução do Plano de trabalho e Divulgação dos resultados obtidos

Durante o período vigente da bolsa, a maioria das reuniões com o supervisor foram feitas todas de forma remota, uma vez que a pandemia já estava em curso e posteriormente, o pesquisador se encontrava em estágio BEPE. Foram realizadas reuniões semanais, no qual discutíamos os problemas propostos no plano de trabalho do bolsista e também em problemas propostos pelo supervisor.

Quanto a divulgação dos resultados obtidos, estas foram feitas através da elaboração de artigos científicos e através da participação de eventos como congressos e seminários.

H Participações em eventos científicos

No período na qual se refere este relatório, o bolsista participou e apresentou trabalho em um evento científico de sua área de pesquisa. O trabalho intitulado “*Study of Poincaré map and limit cycles for non-smooth Welander’s ocean convection model*” foi apresentado na modalidade **palestra** no evento científico *XII Workshop on Dynamical Systems*, ocorrido de 06 a 09 de Novembro de 2023 no Ibilce/Unesp, campus de São José do Rio Preto.

I Lista de trabalhos realizados durante o período vigente do relatório.

Abaixo, encontra-se listado todos os trabalhos científicos publicados, ou aceito para publicação, durante o período de vigência da bolsa.

- New lower bound for the Hilbert number in low degree Kolmogorov systems. Chaos, Solitons and Fractals. DOI: 10.1016/j.chaos.2023.113937.

Link arXiv: <https://arxiv.org/abs/2304.05111>

- Lower bounds for the cyclicity of centers of quadratic three-dimensional systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications. DOI: 10.1016/j.jmaa.2023.127664.

Link arXiv: <https://arxiv.org/abs/2110.13255>

O trabalho científico “Lower bounds for the cyclicity of centers of quadratic three-dimensional systems” já havia sido detalhado em relatórios anteriores, no entanto, o artigo foi aceito para publicação apenas em 2023 e publicado em Fevereiro de 2024.

J Lista dos trabalhos em formato preprint

Durante o período no qual este relatório abrange, os seguintes trabalhos foram desenvolvidos:

- (A) **“Crossing limit cycles in piecewise Kolmogorov systems: An application to Palomba’s model”**. Desenvolvido durante o período BEPE com os pesquisadores Yagor Romano Carvalho e Professor Dr. Oleg Makarenkov.

Apesar da versão preprint já estar pronta e anexada neste relatório, ela não foi submetida ao arXiv a pedido de um dos autores que ainda está revisando o artigo.

- (B) **“Study of Poincaré map and limit cycles for non-smooth Welander’s ocean convection model”**. Desenvolvido durante o período BEPE com os pesquisadores Yagor Romano Carvalho e Professor Dr. Richard McGehee.

Link arXiv: <https://arxiv.org/abs/2309.03430>

- (C) **Holomorphic slow-fast systems**. Desenvolvido durante o período BEPE com os pesquisadores Professor Dr. Paulo Ricardo da Silva (supervisor) e Gabriel Rondón.

Link arXiv: <https://arxiv.org/abs/2304.00142>

K Orientações

Não houve orientações.

L Disciplinas Ministradas

Não houve disciplinas ministradas.

M Atividades de Extensão

Não houve atividades de extensão.

N Comentários do Supervisor

O pesquisador Luiz Fernando da Silva Gouveia cumpriu com todos os requisitos. O projeto submetido consistia em apresentar novas cotas inferiores de ciclos limites para sistemas Kolmogorov. O objetivo foi alcançado e um artigo sobre o tema foi publicado na revista **“Chaos, Solitons and Fractals”** com o título **“New lower bound for the Hilbert number in low degree Kolmogorov systems”** e DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2023.113937>.

Além disso, o pesquisador está envolvido em outros dois projetos no qual não constava inicialmente no projeto inicial proposto. Esses dois projetos são em parceria com o supervisor e com o pós-doutorando Gabriel Rondón. Um deles se intitula **Holomorphic slow-fast systems** que se encontra em formato preprint e o outro se intitula **On Kolmogorov slow-fast systems** que está em fase final de desenvolvimento.

References

- [1] A. A. ANDRONOV, E. A. LEONTOVICH, I. I. GORDON, AND A. G. MAĬER, *Theory of bifurcations of dynamic systems on a plane*, Halsted Press [A division of John Wiley & Sons], New York-Toronto, Ont.; Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem-London, 1973. Translated from the Russian.
- [2] N. N. BAUTIN, *On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type*, American Math. Soc. Translation, 1954 (1954), p. 19.
- [3] J. CASTILLO, J. LLIBRE, AND F. VERDUZCO, *The pseudo-Hopf bifurcation for planar discontinuous piecewise linear differential systems*, Nonlinear Dynam., 90 (2017), pp. 1829–1840.
- [4] C. CHICONE, *Ordinary differential equations with applications*, vol. 34 of Texts in Applied Mathematics, Springer, New York, second ed., 2006.
- [5] C. CHRISTOPHER, *Estimating limit cycle bifurcations from centers*, in Differential equations with symbolic computation, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2005, pp. 23–35.
- [6] F. DUMORTIER, J. LLIBRE, AND J. C. ARTÉS, *Qualitative theory of planar differential systems*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [7] E. FREIRE, E. PONCE, AND F. TORRES, *The discontinuous matching of two planar linear foci can have three nested crossing limit cycles*, Publ. Mat, 58(suppl.) (2014), pp. 221–253.
- [8] J. GINE, L. F. GOUVEIA, AND J. TORREGROSA, *Lower bounds for the local cyclicity for families of centers*, 275 (2021), pp. 309–331.
- [9] L. F. GOUVEIA AND J. TORREGROSA, *Local cyclicity in low degree planar piecewise polynomial vector fields*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, 60 (2021), p. 103278.
- [10] L. F. S. GOUVEIA AND J. TORREGROSA, *24 crossing limit cycles in only one nest for piecewise cubic systems*, Appl. Math. Lett., 103 (2020), p. 106189.
- [11] L. F. S. GOUVEIA AND J. TORREGROSA, *Lower bounds for the local cyclicity of centers using high order developments and parallelization*, Journal of Differential Equations, 271 (2021), pp. 447–479.
- [12] L. F. S. GOUVEIA AND J. TORREGROSA, *The local cyclicity problem: Melnikov method using Lyapunov constants*, Proc. Edinb. Math. Soc. (2), 65 (2022), pp. 356–375.
- [13] D. HE, W. HUANG, AND Q. WANG, *Small amplitude limit cycles and local bifurcation of critical periods for a quartic Kolmogorov system*, Qual. Theory Dyn. Syst., 19 (2020), pp. Paper No. 68, 18.
- [14] N. G. LLOYD, J. M. PEARSON, E. SAÉZ, AND I. SZÁNTÓ, *A cubic Kolmogorov system with six limit cycles*, Comput. Math. Appl., 44 (2002), pp. 445–455.
- [15] K. S. SIBIRSKIĬ, *On the number of limit cycles arising from a singular point of focus or center type*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 161 (1965), pp. 304–307.

- [16] J. SOTOMAYOR AND M. A. TEIXEIRA, *Regularization of discontinuous vector fields*, in International Conference on Differential Equations (Lisboa, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998, pp. 207–223.
- [17] H. ZOLADEK, *Eleven small limit cycles in a cubic vector field*, Nonlinearity, 8 (1995), pp. 843–860.