



Mariana Aparecida Delfino de Souza

Analogia entre Propriedades de Alguns Polinômios Ortogonais em Uma e em Várias Variáveis

Souza, Mariana Aparecida Delfino de.

Analogia entre propriedades de alguns polinômios ortogonais em uma e em várias variáveis / Mariana Aparecida Delfino de Souza. -- São José do Rio Preto, 2014

73 f.

Orientador: Cleonice Fátima Bracciali

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Análise numérica. 3. Funções hipergeométricas. 4. Polinômios ortogonais. I. Bracciali, Cleonice Fátima. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517.588

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Mariana Aparecida Delfino de Souza

Analogia entre Propriedades de
Alguns Polinômios Ortogonais
em Uma e em Várias Variáveis

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali

São José do Rio Preto
2014

Mariana Aparecida Delfino de Souza

Analogia entre Propriedades de
Alguns Polinômios Ortogonais
em Uma e em Várias Variáveis

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto
Orientadora

Prof.^a Eliana Xavier Linhares de Andrade
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

Prof.^a Dr.^a Gilcilene Sanchez de Paulo
Professor Assistente Doutor
UNESP - Presidente Prudente

São José do Rio Preto, 26 de fevereiro de 2014.

*Aos meus pais,
Sebastião e Roseli,
dedico.*

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus que me deu força para nunca desistir de lutar e de sonhar e a Nossa Senhora, que guiou os meus passos em mais esta etapa da minha vida.

Agradeço especialmente

À Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali, pela orientação desde a graduação, pelos conhecimentos transmitidos, pela atenção e dedicação, indispensáveis para a concretização deste trabalho.

Aos membros do grupo de pesquisa *Polinômios Ortogonais e Similares*, em especial ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, que contribuíram na minha carreira acadêmica e, de modo especial, neste trabalho.

Aos membros da Banca Examinadora, por terem aceito o nosso convite.

Aos professores dos Departamentos de Matemática e de Matemática Aplicada deste Instituto, pela formação acadêmica e consideração para com os alunos, em especial ao Prof. Hermes Antonio Pedroso.

Ao Prof. Dr. Miguel A. Piñar e à Profa. Dra. Teresa E. Pérez, pelo apoio e amizade.

Aos meus pais Sebastião e Roseli, minha eterna gratidão pelo amor, ternura, incentivo e apoio diário na minha caminhada.

À minha irmã Cristina e ao meu sobrinho Gabriel, pela compreensão e paciência.

Ao meu namorado Ricardo, agradeço o carinho, o amor e a dedicação.

Aos amigos Cláudia, Cláudio, Pedro, Nanci, Marcelo, Melissa, Natan, Leticia, Suelen, Renata, Paula e Tiago, por compreender a minha ausência, me encorajar nas dificuldades e celebrar comigo cada conquista.

Aos demais amigos por me acompanharem nesta caminhada, fazendo-me capaz de superar os momentos mais difíceis.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Enfim, deixo meus sinceros agradecimentos a todos que contribuíram, de alguma forma, para a conclusão desta etapa.

*“É graça divina começar bem.
Graça maior é persistir na caminhada certa.
Mas a graça das graças é não desistir nunca!”*

(Dom Hélder Câmara)

Resumo

Utilizando os conceitos da representação hipergeométrica dos polinômios ortogonais em uma variável, da fórmula de Rodrigues e da função geratriz, pode-se obter polinômios em várias variáveis.

Neste trabalho, detalhamos, especificamente, os polinômios de Jacobi em duas variáveis, os polinômios de Legendre e de Gegenbauer em várias variáveis, mostrando suas representações como função hipergeométrica, as fórmulas de Rodrigues, as relações de recorrência, a ortogonalidade, entre outras propriedades. Estes resultados são obtidos generalizando-se os conceitos e propriedades dos polinômios ortogonais em uma variável.

Palavras-chave: Funções hipergeométricas, Polinômios ortogonais, Polinômios ortogonais em várias variáveis.

Abstract

By using the concepts about hypergeometric representation of orthogonal polynomials in one variable, Rodrigues formula and generating function, one can obtain orthogonal polynomials of several variables.

In this work, we detail, specifically, the Jacobi polynomials in two variables, the Legendre and Gegenbauer polynomials in several variables, by presenting their representations in terms of hypergeometric functions, by Rodrigues formulae, recurrence relations, orthogonality, among many others. These results are obtained by generalizing the concepts and properties of orthogonal polynomials in one variable.

Keywords: Hypergeometric functions, Orthogonal polynomials, Orthogonal polynomials of several variables.

Sumário

Introdução	11
1 Conceitos Preliminares	13
1.1 Função Gama e função Beta	13
1.2 Símbolo de Pochhammer	15
1.3 Séries hipergeométricas	17
1.4 Séries hipergeométricas em duas variáveis	20
1.5 Séries hipergeométricas em várias variáveis	21
1.6 Polinômios em várias variáveis	22
2 Polinômios Ortogonais na Reta Real	25
2.1 Sequência de polinômios ortogonais	25
2.2 Polinômios ortogonais de Jacobi	28
2.2.1 Polinômios ortogonais de Jacobi no intervalo $[0,1]$	29
2.2.2 Polinômios ortogonais de Legendre	33
2.2.3 Polinômios ortogonais de Gegenbauer	37
2.2.4 Polinômios ortogonais de Chebyshev de 1ª e de 2ª espécies	38
2.3 Polinômios ortogonais de Laguerre	40
2.4 Polinômios ortogonais de Hermite	41
3 Polinômios Ortogonais em Várias Variáveis	42
3.1 Introdução	42
3.2 Polinômios ortogonais de Jacobi em duas variáveis	44
3.2.1 Ortogonalidade	47
3.2.2 Algumas propriedades	50
3.3 Polinômios ortogonais de Legendre em várias variáveis	54
3.3.1 Ortogonalidade	61
3.3.2 Algumas propriedades	63
3.4 Polinômios ortogonais de Gegenbauer em várias variáveis	65
3.4.1 Ortogonalidade	67
4 Considerações Finais	69
Glossário	71
Referências	73

Introdução

Os polinômios ortogonais em uma variável são ferramentas importantes na solução de diversos tipos de problemas e sua teoria contribui nos estudos relacionados à estabilidade numérica, equações diferenciais, frações contínuas, teoria da aproximação, entre outros. A teoria desses polinômios é amplamente estudada, com muitos trabalhos publicados na área, como os livros de T. S. Chihara [4] e G. Szegő [10].

Em várias variáveis, os estudos desses polinômios têm-se difundido com maior intensidade nas últimas décadas. Segundo C. F. Dunkl e Y. Xu em [5], o primeiro trabalho nessa área é o livro [2] “Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynomes D’Hermite” de P. Appell e J. Kampé de Fériet, de 1926, que foi tomado como base neste trabalho.

De acordo com [5], os poucos livros dedicados à teoria geral dos polinômios ortogonais em várias variáveis têm como ênfase o tipo clássico desses polinômios, ou seja, as famílias de polinômios cujas funções peso têm como domínio as regiões regulares: o quadrado, o simplex, a bola em $\mathbb{R}^n$ ou o próprio $\mathbb{R}^n$.

Os polinômios ortogonais no quadrado são aqueles obtidos pelo produto tensor entre vários polinômios ortogonais em uma variável (veja seção 3.1), onde a região do domínio é o produto cartesiano entre os intervalos de ortogonalidade de cada um dos polinômios.

O simplex é a região $T^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n \geq 0\}$. Para $n = 2$, a região T^2 é o triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$. É nessa região que estão definidos os polinômios ortogonais de Jacobi em duas variáveis.

Os polinômios ortogonais na bola unitária, definida por $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 \geq 0\}$, são estudados neste trabalho nos casos de

Legendre e de Gegenbauer.

Além desses, Koornwinder [7] apresenta um método que gera polinômios ortogonais em duas variáveis através de polinômios ortogonais em uma variável.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar como alguns polinômios ortogonais em várias variáveis e suas propriedades podem ser obtidos através da extensão de alguns conceitos e propriedades dos polinômios ortogonais em uma variável. Estes estudos estão baseados no clássico livro de P. Appell e J. Kampé de Fériét [2] de 1926.

Visando uma melhor organização e buscando facilitar o entendimento, este trabalho está dividido em três capítulos.

O primeiro capítulo traz os pré-requisitos para o desenvolvimento e entendimento dos capítulos posteriores. É dedicado ao estudo de alguns conceitos, tais como as funções Gama e Beta e o símbolo de Pochhammer. Em seguida, são dadas as definições e algumas propriedades das funções hipergeométricas em uma e em várias variáveis. Encerra-se esse capítulo com os principais conceitos sobre os polinômios em várias variáveis. As principais referências utilizadas para o estudo desses tópicos foram [1], [4] [5], [6] e [8].

O segundo capítulo tem início com uma introdução à teoria dos polinômios ortogonais em uma variável. Posteriormente, são catalogados os polinômios ortogonais clássicos, que, segundo Chihara [4], são os polinômios ortogonais de Jacobi, incluindo os casos especiais de Legendre, Gegenbauer e Chebyshev de 1ª e de 2ª espécies, de Laguerre e Hermite. Uma seção é dedicada ao estudo dos polinômios ortogonais de Jacobi no intervalo $[0, 1]$, que é estendido posteriormente para duas variáveis. São feitas, nesse capítulo, algumas demonstrações importantes para observarmos analogias entre algumas propriedades dos polinômios ortogonais em uma variável e em várias variáveis. As referências utilizadas foram [2], [4], [6] e [10].

O terceiro e último capítulo trata do objetivo deste trabalho: os polinômios ortogonais em várias variáveis. Apresentamos algumas propriedades dos polinômios ortogonais clássicos cuja ortogonalidade está definida em intervalos limitados que estendem os conceitos de uma variável para várias variáveis. Trabalhamos especificamente com os polinômios ortogonais de Jacobi, Legendre e Gegenbauer. Utilizamos, como referência, [2],[5] e [9].

Conceitos Preliminares

Neste capítulo são apresentados alguns tópicos de fundamental importância para o entendimento e o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

Iniciamos com os conceitos de função Gama e de função Beta, muito úteis no desenvolvimento das propriedades das séries hipergeométricas, onde é aplicado também o símbolo de Pochhammer. Essas séries são utilizadas na teoria de polinômios ortogonais, pois podemos obtê-los através delas.

Descrevemos, também, as definições e algumas propriedades das séries hipergeométricas em várias variáveis, com as quais podemos também gerar polinômios.

Por fim, abordamos alguns conceitos dos polinômios em várias variáveis. Os assuntos abordados aqui são encontrados em [1, 2, 5, 6, 8].

1.1 Função Gama e função Beta

A função Gama, denotada por $\Gamma(x)$, foi descoberta por Euler por volta de 1729 (veja [1]) no estudo do problema de estender o domínio da função fatorial. Ela foi inicialmente definida, para $x \in \mathbb{C}$ e $x \neq -1, -2, \dots$, como

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x-1}}{(x)_n},$$

onde $(x)_n = x(x+1)(x+2) \cdots (x+n-1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ e $(x)_0 = 1$.

Euler mostrou que a função Gama pode ser dada pela integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0. \quad (1.1)$$

Por (1.1) pode-se demonstrar a Proposição a seguir.

Proposição 1.1.1 Para $\operatorname{Re}(x) > 0$,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Demonstração: Temos de (1.1), já que $\operatorname{Re}(x) > 0$,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \left[(-e^{-t}) t^x \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) x t^{x-1} dt \\ &= 0 + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x). \end{aligned}$$

□

Apesar de $\Gamma(x)$ não estar definido para $x = -1, -2, \dots$, é possível mostrar a Proposição a seguir.

Proposição 1.1.2 Para $n \in \mathbb{Z}^+$,

$$\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0.$$

Demonstração: Pela Proposição 1.1.1, temos

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \Gamma(x+1).$$

Assim, por (1.1) temos que $\Gamma(1) = 1$ e se $x = 0$, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \infty.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \Gamma(-1) &= -\frac{1}{1} \Gamma(0) \rightarrow \infty, \\ \Gamma(-2) &= -\frac{1}{2} \Gamma(-1) \rightarrow \infty, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\Gamma(-n) = -\frac{1}{n}\Gamma(-n+1) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Logo, como $\Gamma(-n) \rightarrow \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$. $\square$

Definição 1.1.1 A função Beta, $B(x, y)$, é definida por

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0. \quad (1.2)$$

Proposição 1.1.3 A função Beta está relacionada à função Gama da seguinte forma:

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= \int_0^\infty s^{x-1}e^{-s}ds \int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty s^{x-1}t^{y-1}e^{-s-t}dsdt. \end{aligned}$$

Na integral acima, fazendo as mudanças de variáveis $s = uv$ e $t = (1-u)v$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^1 (uv)^{x-1}[(1-u)v]^{y-1}e^{-uv-(1-u)v} v du dv &= \int_0^\infty v^{x+y-1}e^{-v}dv \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}du \\ &= \Gamma(x+y)B(x, y). \end{aligned}$$

$\square$

No decorrer deste trabalho são utilizadas algumas propriedades de $\Gamma(x)$ e $B(x, y)$. Suas demonstrações serão omitidas, mas podem ser encontradas em [1].

1.2 Símbolo de Pochhammer

O símbolo $(a)_n$, encontrado na definição dada por Euler para a função Gama, é o Símbolo de Pochhammer, também chamado de fatorial deslocado. Sua definição, para $a \in \mathbb{C}$, é

$$\begin{aligned} (a)_0 &= 1, \\ (a)_n &= (a)(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

A partir dessa definição, diversas propriedades podem ser obtidas. Mostramos algumas a seguir.

Proposição 1.2.1 *A função Gama, para $\text{Re}(x) > 0$, e o símbolo de Pochhammer estão relacionados por*

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}.$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= (x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) \\ &\quad \vdots \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)\Gamma(x+1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\Gamma(x) \\ &= (x)_n\Gamma(x). \end{aligned}$$

□

De (1.3), pode-se facilmente observar que

$$(a+m-i)_i = \frac{(a)_m}{(a)_{m-i}}. \quad (1.4)$$

De fato,

$$\begin{aligned} (a+m-i)_i &= (a+m-i)(a+m-i+1)\cdots(a+m-i+i-1) \\ &= (a+m-i)(a+m-i+1)\cdots(a+m-1)\frac{a(a+1)\cdots(a+m-i-1)}{a(a+1)\cdots(a+m-i-1)} \\ &= \frac{(a)_m}{(a)_{m-i}}. \end{aligned}$$

Também é fácil verificar que

$$(-a)_n = (-1)^n(a-n+1)_n. \quad (1.5)$$

De fato,

$$\begin{aligned} (-a)_n &= (-a)(-a+1)\cdots(-a+n-1) \\ &= (-1)^n(a-n+1)(a-n)\cdots(a-1) \\ &= (-1)^n(a-n+1)_n. \end{aligned}$$

1.3 Séries hipergeométricas

As séries hipergeométricas são definidas por

$${}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix}; x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j \cdots (a_r)_j}{(b_1)_j \cdots (b_s)_j j!} x^j, \quad (1.6)$$

onde $r, s \in \mathbb{Z}^+$, $x \in \mathbb{C}$, $a_i, b_k \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3, \dots, r$, $k = 1, 2, 3, \dots, s$ e $\operatorname{Re}(b_k) > 0$.

Considerando ρ o raio de convergência das séries hipergeométricas, em [1] encontra-se a demonstração de que

$$\rho = \begin{cases} \infty, & \text{se } r < s+1; \\ 1, & \text{se } r = s+1; \\ 0, & \text{se } r > s+1. \end{cases}$$

Muitas das funções especiais podem ser expressas em termos das séries hipergeométricas, como, por exemplo, os polinômios ortogonais.

Quando $r = s = 1$, essas séries são chamadas de funções de Kummer e quando $r = 2$ e $s = 1$ são chamadas de funções de Gauss. Utilizamos, também, a seguinte notação:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = F(a, b; c; x).$$

Uma função hipergeométrica muito utilizada é

$${}_1F_0\left(\begin{matrix} \beta \\ - \end{matrix}; x\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta)_j}{j!} x^j = (1-x)^\beta. \quad (1.7)$$

Essa série converge para $|x| < 1$. A última igualdade acima se dá pelo desenvolvimento em série de Taylor.

Proposição 1.3.1 *Se para algum i , $a_i = -n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, a série hipergeométrica (1.6) gera um polinômio de grau n em x .*

Demonstração: Ao desenvolvermos $(-n)_j$, obtemos

$$(-n)_j = (-n)(-n+1)(-n+2) \cdots (-n+j-1) = (-1)^j \frac{n!}{(n-j)!}, \quad \text{se } j \leq n.$$

Se $j \geq n + 1$, então $(-n)_j = 0$. Logo,

$${}_rF_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, -n, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} ; x \right) = \sum_{j=0}^n \frac{(a_1)_j \cdots (-n)_j \cdots (a_r)_j}{(b_1)_j \cdots (b_s)_j j!} x^j.$$

□

Algumas propriedades da função de Gauss

Lembramos que as funções de Gauss são as séries hipergeométricas com $r = 2$ e $s = 1$.

Propriedade 1.3.1 Para $\operatorname{Re}(c - b) > 0$, $\operatorname{Re}(b) > 0$ e $|x| < 1$, valem as igualdades a seguir.

1. *Representação integral de Euler:*

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt;$$

2. *Fórmula de transformação de Pfaff:*

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix} ; \frac{x}{x-1} \right);$$

3. *Fórmula de transformação de Pfaff com $a = -n$:*

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix} ; x \right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, b \\ b+1-n-c \end{matrix} ; 1-x \right).$$

Demonstração:

1. Por (1.7), se $|x| < 1$, então $(1-xt)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (xt)^n$ e essa é uma série convergente.

Assim,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} (xt)^n \right) dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \int_0^1 t^{n+b-1} (1-t)^{c-b-1} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n B(n+b, c-b) \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \frac{\Gamma(n+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(n+b+c-b)} \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n \frac{(b)_n \Gamma(b)\Gamma(c-b)}{(c)_n \Gamma(c)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \\
&= {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right).
\end{aligned}$$

2. Como $F(a, b; c; x)$ converge para $|x| < 1$, então

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt.$$

Fazendo a mudança de variável $t = 1 - u$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt \\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_1^0 (1-u)^{b-1} u^{c-b-1} (1-x+xu)^{-a} (-du) \\
&= (1-x)^{-a} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-b)\Gamma(b)} \int_0^1 u^{c-b-1} (1-u)^{b-1} \left(1 - \frac{x}{(x-1)}u\right)^{-a} du \\
&= (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right).
\end{aligned}$$

3. Em [1], no Teorema 2.3.2, é dada a seguinte relação:

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a+b+1-c \end{matrix}; 1-x\right) = A {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) + B x^{1-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1+a-c, 1+b-c \\ 2-c \end{matrix}; x\right), \quad (1.8)$$

onde

$$A = \frac{\Gamma(a+b+1-c)\Gamma(1-c)}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(b+1-c)} \quad \text{e} \quad B = \frac{\Gamma(c-1)\Gamma(a+b+1-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}.$$

Substituindo, na equação (1.8), x por $1 - x$ e c por $a + b + 1 - c$, temos

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1 - x\right) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - b)\Gamma(c - a)} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ a + b + 1 - c \end{matrix}; 1 - x\right) \\ &+ \frac{\Gamma(a + b - c)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1 - x)^{c - a - b} {}_2F_1\left(\begin{matrix} c + b, c + a \\ c + 1 - a - b \end{matrix}; 1 - x\right). \end{aligned}$$

Tomando $a = -n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, como, pela Proposição 1.1.2, $\frac{1}{\Gamma(-n)} = 0$ e, pela Proposição 1.2.1, $(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha)}$, concluímos a demonstração.

□

1.4 Séries hipergeométricas em duas variáveis

Considerando duas funções de Gauss

$$F(\alpha, \beta; \gamma; x) \quad \text{e} \quad F(\alpha', \beta'; \gamma'; y),$$

com parâmetros $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ reais ou complexos e $Re(\gamma), Re(\gamma') > 0$. Ao efetuarmos o produto entre elas, obtemos séries que dependem de x e y .

Segundo Appell e Kampé de Fériét [2], no trabalho de P. Appell “Sur les fonctions hypergéométriques de deux variables”, de 1882, foram apresentadas todas as possibilidades para o termo geral das séries duplas e foram definidos quatro tipos de séries, a saber,

$$\begin{aligned} F_1(\alpha, \beta, \beta'; \gamma; x, y) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!} x^m y^n, \\ F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!} x^m y^n, \\ F_3(\alpha, \alpha', \beta, \beta'; \gamma; x, y) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(\alpha')_n(\beta)_m(\beta')_n}{(\gamma)_{m+n}m!n!} x^m y^n, \\ F_4(\alpha, \beta; \gamma, \gamma'; x, y) &= \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n}(\beta)_{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n m!n!} x^m y^n. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Utilizaremos a série $F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y)$ na seção 3.2 sobre os polinômios de Jacobi em duas variáveis. Essa série converge na região $\{(x, y); |x| + |y| < 1\}$, e é escrita, em função de

$F(a, b; c; x)$, como

$$F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_m m!} F(\alpha + m, \beta'; \gamma'; y) x^m.$$

1.5 Séries hipergeométricas em várias variáveis

Ao efetuarmos o produto de n funções de Gauss $F(\alpha_i, \beta_i; \gamma_i; x_i)$, $1 \leq i \leq n$, geramos séries que dependem de $x_1, \dots, x_n$. De acordo com Appell e Kampé de Fériét [2], no trabalho de M. Lauricella “Sulle funzioni ipergeometriche a piu variabili”, de 1893, estão descritos os resultados referentes às seguintes séries

$$\begin{aligned} F_A(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma_1, \dots, \gamma_n; x_1, \dots, x_n) &= \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\dots+m_n} (\beta_1)_{m_1} \dots (\beta_n)_{m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \dots (\gamma_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \\ F_B(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; x_1, \dots, x_n) &= \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{m_1} \dots (\alpha_n)_{m_n} (\beta_1)_{m_1} \dots (\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n} m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$F_C(\alpha, \beta; \gamma_1, \dots, \gamma_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\dots+m_n} (\beta)_{m_1+\dots+m_n}}{(\gamma_1)_{m_1} \dots (\gamma_n)_{m_n} m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

$$F_D(\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m_1+\dots+m_n} (\beta_1)_{m_1} \dots (\beta_n)_{m_n}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n} m_1! \dots m_n!} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n},$$

onde os parâmetros $\alpha, \alpha_i, \beta, \beta_i, \gamma, \gamma_i$ são reais ou complexos, com $Re(\gamma), Re(\gamma_i) > 0$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Para estudar os polinômios de Legendre e de Gegenbauer em várias variáveis, seções 3.3 e 3.4, respectivamente, utilizaremos a série $F_B(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; x_1, \dots, x_n)$, que converge quando $|x_1| < 1, |x_2| < 1, \dots, |x_n| < 1$.

1.6 Polinômios em várias variáveis

Nesta seção, daremos algumas definições que são utilizadas na seção 3.1 na conceituação dos polinômios em várias variáveis.

Definição 1.6.1 *Seja $\alpha_i \in \mathbb{Z}^+$, $i = 1, \dots, n$. Um multi-índice α é dado pela n -upla*

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

A norma de um multi-índice α é

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Definição 1.6.2 *Sejam $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e α um multi-índice. O monômio $\mathbf{x}^\alpha$ é definido pelo produto*

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

onde x_i são as variáveis e $|\alpha|$ é o grau total do monômio $\mathbf{x}^\alpha$.

Definição 1.6.3 *Um polinômio $\mathbf{P}_\mu$ em n variáveis é uma combinação linear de monômios, ou seja,*

$$\mathbf{P}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=0}^{\mu} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha,$$

onde cada coeficiente c_α é uma constante que depende apenas de α e que pertence a um corpo $\mathbb{K}$ (usualmente $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e μ é o grau total do polinômio, definido como o maior grau total dos monômios.

Definição 1.6.4 *$\mathbf{P}_\mu(\mathbf{x})$ é um polinômio mônico se ele possui um único termo de maior grau e, além disso, o coeficiente desse termo é 1.*

Um exemplo de um polinômio mônico de grau 4 nas variáveis x , y e z é

$$\mathbf{P}_4(x, y, z) = x^2 y^2 + 3xyz + x + 2z.$$

Uma diferença essencial entre polinômios em uma variável e em várias variáveis é a falta de uma ordem natural entre seus monômios. Em uma variável a ordem lexicográfica é dada pela sequência dos expoentes. Para os polinômios em várias variáveis, existem muitas opções de ordens lexicográficas bem definidas. Neste trabalho, a ordem lexicográfica usada é a seguinte: $\mathbf{x}^\alpha < \mathbf{x}^\beta$ se $|\alpha| < |\beta|$ ou se $|\alpha| = |\beta|$ e a primeira componente não-nula de $\alpha - \beta$ é positiva, onde $\alpha - \beta = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \dots, \alpha_n - \beta_n)$.

Nas variáveis x e y , por exemplo, a ordem dos monômios aqui utilizada é

$$1, \ x, \ y, \ x^2, \ xy, \ y^2, \ x^3, \ x^2y, \ xy^2, \ y^3, \ \dots$$

Definição 1.6.5 *Uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, com $A \subset \mathbb{R}^n$, denomina-se homogênea de grau k se $f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, para todo $t > 0$ e $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, tal que $(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) \in A$.*

Assim, um polinômio é homogêneo se todos os seus monômios têm o mesmo grau total, ou seja,

$$\mathbf{P}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha|=\mu} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Logo, todo polinômio pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios homogêneos, ou seja,

$$\mathbf{P}_\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\mu} \sum_{|\alpha|=k} c_\alpha \mathbf{x}^\alpha.$$

Um exemplo de um polinômio em 3 variáveis de grau 4 é

$$\mathbf{P}_4(x, y, z) = 2x + 3z + xy + y^2 + x^2z + yz^3 + x^4.$$

Definição 1.6.6 *Seja G um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. A função $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica se a sua primeira e segunda derivadas parciais são contínuas e se satisfaz a equação de Laplace $\Delta f = 0$, onde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ é o operador Laplaciano.*

São exemplos de polinômios harmônicos e homogêneos:

- em duas variáveis,

$$\mathbf{P}_\mu(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^k C_\mu^{2k} x^{\mu-2k} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{\mu-1}{2} \rfloor} (-1)^{k+1} C_\mu^{2k+1} x^{\mu-2k-1} y^{2k+1},$$

onde

$$C_\mu^k = \binom{\mu}{k} = \frac{\mu!}{(\mu-k)!k!}$$

e $\lfloor \lambda \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a λ .

- em três variáveis,

$$\mathbf{P}_3(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - \frac{3}{2}(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 6xyz,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_4(x, y, z) &= x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^3y + x^3z + y^3x + y^3z + z^3x + z^3y) \\ &\quad - 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) + 12(x^2yz + y^2xz + z^2xy).\end{aligned}$$

Polinômios Ortogonais na Reta Real

Neste capítulo, vamos abordar alguns conceitos relacionados aos polinômios ortogonais em uma variável, tais como a sua definição, relação de recorrência de três termos, ortogonalidade e função geratriz.

Alguns desses polinômios são denominados polinômios ortogonais clássicos. De acordo com Chihara [4], esses polinômios são aqueles cuja função peso $w(x)$ satisfaz a uma equação do “tipo Pearson”, dada por

$$\frac{w'(x)}{w(x)} = \frac{ax + b}{\rho(x)},$$

onde $\rho(x)$ é um polinômio de grau no máximo 2, com zeros reais e distintos. Assim, os polinômios ortogonais clássicos são os polinômios ortogonais de Jacobi, incluindo os casos especiais de Legendre, Gegenbauer, Chebyshev de 1ª e 2ª espécie, Laguerre e Hermite. Tratamos com maior atenção dos polinômios ortogonais de Jacobi, Legendre e Gegenbauer, pois apresentamos, no Capítulo 3, propriedades desses polinômios em várias variáveis.

Algumas demonstrações são omitidas aqui, mas são facilmente encontradas em [2], [4], [6] e [10].

2.1 Sequência de polinômios ortogonais

A seguir, apresentamos diversas definições que caracterizam os polinômios ortogonais e algumas de suas principais propriedades.

Definição 2.1.1 Chamamos função peso uma função $w(x)$ não negativa, contínua, não identicamente nula em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tal que

$$\int_a^b x^m w(x) dx < \infty, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Dadas as funções f e g pertencentes ao conjunto das funções contínuas em (a, b) , definimos o produto interno com relação à função peso $w(x)$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx. \quad (2.1)$$

Definição 2.1.2 Uma sequência de polinômios $\{P_m(x)\}_{m=0}^\infty$, de grau exatamente m , é denominada Sequência de Polinômios Ortogonais no intervalo (a, b) com respeito à função peso $w(x)$, se

$$\langle P_m, P_n \rangle = \int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

Quando $m = n$ na equação (2.2), pode-se obter o valor da norma do polinômio, ou seja,

$$\|P_m\|^2 = \langle P_m, P_m \rangle = \int_a^b P_m^2(x)w(x)dx = \sigma_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Equivalentemente, dado um polinômio $\pi(x)$ de grau menor que m , se

$$\langle P_m, \pi \rangle = \int_a^b P_m(x)\pi(x)w(x)dx = 0,$$

então $\{P_m(x)\}_{m=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) com relação à função peso $w(x)$.

Denotando

$$P_m(x) = \kappa_m x^m + \text{termos de graus inferiores}, \quad (2.4)$$

temos

- Se $\sigma_m = 1$ para todo $m = 0, 1, 2, \dots$, a sequência de polinômios é chamada ortonormal. Se, além disso, $\kappa_m > 0$, o polinômio é unicamente determinado.
- Se $\kappa_m = 1$, o polinômio é denominado mônico, também mantendo a unicidade.

Utilizando a função Delta de Kronecker definida por

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

a relação de ortogonalidade (2.2) junto com (2.3) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)w(x)dx = \sigma_n\delta_{mn}, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots$$

Existem várias formas de construir uma sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (2.2). Uma delas é o Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt, que consiste em, a partir de uma base em um espaço vetorial, gerar uma nova base ortogonal. Pode-se, por exemplo, tomar a base $b_k = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, e calcular $P_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, polinômios mônicos. Para $k = 1, 2, 3, \dots$, temos

$$P_k(x) = x^k + \alpha_{k,0}P_0(x) + \alpha_{k,1}P_1(x) + \dots + \alpha_{k,k-1}P_{k-1}(x),$$

onde

$$\alpha_{k,i} = -\frac{\langle x^k, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

e $P_0(x) = b_0 = 1$.

Pode-se obter uma sequência de polinômios ortogonais através do desenvolvimento de uma função em duas variáveis, $g(x, t)$, denominada função geratriz, que possui uma expressão em série de Taylor da forma

$$g(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} P_m(x)t^m.$$

Uma sequência de polinômios ortogonais satisfaz a uma relação de recorrência de três termos dada por

$$P_{m+1}(x) = (\gamma_{m+1}x - \beta_{m+1})P_m(x) - \alpha_{m+1}P_{m-1}(x), \quad m \geq 0,$$

com $P_0(x) = 1$, $P_{-1}(x) = 0$, $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m \in \mathbb{R}$ e

$$\gamma_{m+1} = \frac{\kappa_{m+1}}{\kappa_m} \neq 0, \quad \beta_{m+1} = \gamma_{m+1} \frac{\langle xP_m, P_m \rangle}{\langle P_m, P_m \rangle}, \quad m \geq 0,$$

e

$$\alpha_{m+1} = \frac{\gamma_{m+1}}{\gamma_m} \frac{\langle P_m, P_m \rangle}{\langle P_{m-1}, P_{m-1} \rangle} \neq 0, \quad m \geq 1.$$

Observa-se que a relação de recorrência de três termos também é uma forma de gerar os polinômios ortogonais com relação ao produto interno (2.1).

Uma das propriedades mais importantes dos polinômios ortogonais é que seus zeros são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) . Além disso, dois polinômios consecutivos, $P_m(x)$ e $P_{m-1}(x)$, não têm zeros em comum e, entre dois zeros consecutivos de $P_{m-1}(x)$ existe somente um zero de $P_m(x)$.

As afirmações citadas anteriormente estão demonstradas em [4] e [10].

2.2 Polinômios ortogonais de Jacobi

Os polinômios ortogonais de Jacobi, denotados por $P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x)$, podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) = \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-x)^{-\tilde{\alpha}} (1+x)^{-\tilde{\beta}} \frac{d^m}{dx^m} [(1-x)^{m+\tilde{\alpha}} (1+x)^{m+\tilde{\beta}}]. \quad (2.5)$$

Eles também podem ser obtidos pela seguinte função hipergeométrica:

$$P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) = \frac{(\tilde{\alpha}+1)_m}{m!} F\left(-m, m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1; \tilde{\alpha}+1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (2.6)$$

com $\tilde{\alpha} > -1$ e $\tilde{\beta} > -1$.

Considerando a função peso

$$\tilde{w}(x) = (1-x)^{\tilde{\alpha}} (1+x)^{\tilde{\beta}}, \quad (2.7)$$

com $\tilde{\alpha} > -1$, $\tilde{\beta} > -1$ e $x \in [-1, 1]$, é possível demonstrar que

$$\int_{-1}^1 P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) P_n^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x) (1-x)^{\tilde{\alpha}} (1+x)^{\tilde{\beta}} dx = \frac{2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1}}{2n+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1} \frac{\Gamma(m+\tilde{\alpha}+1)\Gamma(m+\tilde{\beta}+1)}{\Gamma(m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1)m!} \delta_{mn}, \quad (2.8)$$

ou seja, os polinômios de Jacobi, definidos por (2.5) ou (2.6), são ortogonais com relação a $\tilde{w}(x) = (1-x)^{\tilde{\alpha}} (1+x)^{\tilde{\beta}}$ no intervalo $[-1, 1]$.

Sua função geratriz é dada por

$$\frac{2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}}{R(1+R-t)^{\tilde{\alpha}}(1+R+t)^{\tilde{\beta}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_m^{(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})}(x)t^n, \quad R = \sqrt{1-2xt+t^2}.$$

Para $m \geq 0$, com $P_0^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x) = 1$ e $P_{-1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x) = 0$, os polinômios $P_m^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)$ satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$\begin{aligned} xP_m^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x) &= \frac{2(m+1)(m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1)}{(2m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1)(2m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+2)} P_{m+1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x) \\ &+ \frac{\tilde{\beta}^2 - \tilde{\alpha}^2}{(2m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(2m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+2)} P_m^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x) + \frac{2(m+\tilde{\alpha})(m+\tilde{\beta})}{(2m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})(2m+\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+1)} P_{m-1}^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x). \end{aligned}$$

Tomando $y(x) = P_m^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)$, observamos que $P_m^{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}(x)$ satisfaz à equação diferencial ordinária

$$(1-x^2)y''(x) + [\tilde{\beta} - \tilde{\alpha} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 2)x]y'(x) + m(m + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 1)y(x) = 0. \quad (2.9)$$

2.2.1 Polinômios ortogonais de Jacobi no intervalo $[0,1]$

Vamos, agora, aplicar a mudança de variáveis $t = \frac{x+1}{2}$ na função peso (2.7), com $x \in [-1, 1]$ e $t \in [0, 1]$. Deste modo, obtemos $\tilde{w}(t) = 2^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}}(1-t)^{\tilde{\alpha}}t^{\tilde{\beta}}$ e, então, $(1-t)^{\tilde{\alpha}}t^{\tilde{\beta}}$ é uma função peso definida em $[0, 1]$.

Para utilizar a notação dada em [2], tomamos $\tilde{\alpha} = \alpha - \gamma$, $\tilde{\beta} = \gamma - 1$ e $t = x$. Logo, os polinômios ortogonais de Jacobi $P_m^{\alpha-\gamma,\gamma-1}(x)$ têm como função peso $w(x) = (1-x)^{\alpha-\gamma}x^{\gamma-1}$, com $x \in [0, 1]$.

Seguindo a notação de [2], consideremos os seguintes polinômios

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = \frac{(-1)^m m!}{(\gamma)_m} P_m^{\alpha-\gamma,\gamma-1}(x). \quad (2.10)$$

Esses são os polinômios ortogonais de Jacobi no intervalo $[0, 1]$, denotados por $J_m(\alpha, \gamma, x)$, cuja relação de ortogonalidade é dada por

$$\int_0^1 J_n(\alpha, \gamma, x) J_m(\alpha, \gamma, x) x^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\gamma} dx = 0, \quad m \neq n.$$

Fazendo as mesmas mudanças de variáveis e de parâmetros nas propriedades dos polinômios ortogonais de Jacobi no intervalo $[-1, 1]$, mostra-se que os polinômios $J_m(\alpha, \gamma, x)$ satisfazem as propriedades a seguir.

Propriedade 2.2.1 (*Fórmula de Rodrigues*) Para $m \geq 0$, temos

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma)_m} \frac{d^m}{dx^m} [x^{\gamma+m-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+m}]. \quad (2.11)$$

Demonstração: Fazendo, em (2.5), as mudanças $\tilde{\alpha} = \alpha - \gamma$, $\tilde{\beta} = \gamma - 1$ e $x = 2t - 1$, temos

$$\begin{aligned} P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(t) &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} (1-2t+1)^{-\alpha+\gamma} (1+2t-1)^{1-\gamma} \frac{d^m}{2^m dt^m} [(1-2t+1)^{\alpha-\gamma+m} (1+2t-1)^{\gamma+m-1}] \\ &= \frac{(-1)^m}{2^m m!} (2-2t)^{-\alpha+\gamma} (2t)^{1-\gamma} \frac{d^m}{2^m dt^m} [(2-2t)^{\alpha-\gamma+m} (2t)^{\gamma+m-1}] \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} 2^{-\alpha+\gamma-\gamma+1} (1-t)^{-\alpha+\gamma} t^{1-\gamma} \frac{2^{\alpha-\gamma+m} \cdot 2^{\gamma+m-1}}{2^{2m}} \frac{d^m}{dt^m} [(1-t)^{\alpha-\gamma+m} t^{\gamma+m-1}]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(t) = \frac{(-1)^m}{m!} (1-t)^{-\alpha+\gamma} t^{1-\gamma} \frac{d^m}{dt^m} [t^{\gamma+m-1} (1-t)^{\alpha-\gamma+m}]. \quad (2.12)$$

Substituindo t por x em (2.12) e usando (2.10), obtemos

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = \frac{(-1)^m m!}{(\gamma)_m} P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma)_m} \frac{d^m}{dx^m} [x^{\gamma+m-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+m}].$$

□

Propriedade 2.2.2 (*Representação por função hipergeométrica*) O polinômio ortogonal $J_m(\alpha, \gamma, x)$ também é dado por

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = F(-m, \alpha + m; \gamma; x). \quad (2.13)$$

Demonstração: Como $\frac{1-x}{2} = 1-t$, por (2.6) temos

$$P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(t) = \frac{(\alpha - \gamma + 1)_m}{m!} F(-m, m + \alpha - \gamma + \gamma - 1 + 1; \alpha - \gamma + 1; 1-t)$$

e consequentemente,

$$P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(t) = \frac{(\alpha - \gamma + 1)_m}{m!} F(-m, m + \alpha; \alpha - \gamma + 1; 1 - t).$$

Logo,

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = \frac{(-1)^m m!}{(\gamma)_m} P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(x) = \frac{(-1)^m m!}{(\gamma)_m} \frac{(\alpha - \gamma + 1)_m}{m!} F(-m, m + \alpha; \alpha - \gamma + 1; 1 - x).$$

Pela fórmula de Transformação de Pfaff dada no item 3 da Propriedade 1.3.1,

$$F(-m, b; c; x) = \frac{(c - b)_m}{(c)_m} F(-m, b; b + 1 - m - c; 1 - x). \quad (2.14)$$

Fazendo, na fórmula (2.14), as substituições $b = \alpha + m$ e $c = \gamma$, segue que

$$F(-m, \alpha + m; \gamma; x) = \frac{(\gamma - \alpha - m)_m}{(\gamma)_m} F(-m, m + \alpha; \alpha - \gamma + 1; 1 - x).$$

Como $(\gamma - \alpha - m)_m = (-1)^m (\alpha - \gamma + 1)_m$, obtemos

$$F(-m, \alpha + m; \gamma; x) = \frac{(-1)^m}{(\gamma)_m} (\alpha - \gamma + 1)_m F(-m, m + \alpha; \alpha - \gamma + 1; 1 - x).$$

Portanto,

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = F(-m, \alpha + m; \gamma; x).$$

□

Propriedade 2.2.3 (*Equação diferencial ordinária*) Para $y(x) = J_m(\alpha, \gamma, x)$, temos

$$x(1 - x) \frac{d^2}{dx^2} y(x) + [\gamma - (\alpha + 1)x] \frac{d}{dx} y(x) + m(\alpha + m)y(x) = 0. \quad (2.15)$$

Demonstração: Na equação diferencial (2.9), ou seja, em

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} y(x) + [\tilde{\beta} - \tilde{\alpha} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 2)x] \frac{d}{dx} y(x) + m(m + \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 1)y(x) = 0$$

fazendo as mudanças

$$x = 2t - 1, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \gamma \quad e \quad \tilde{\beta} = \gamma - 1,$$

obtemos

$$4t(1 - t) \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 2[\gamma - (\alpha + 1)t] \frac{d}{dt} y(t) + m(m + \alpha)y(t) = 0.$$

Logo, a equação diferencial

$$t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}y(t) + [\gamma - (\alpha + 1)t]\frac{d}{dt}y(t) + m(\alpha + m)y(t) = 0.$$

tem como solução $y(x) = P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x)$ e, sendo $J_m(\alpha, \gamma, x)$ um múltiplo de $P_m^{\alpha-\gamma, \gamma-1}(x)$, então $J_m(\alpha, \gamma, x)$ é solução de (2.15). $\square$

Para a analogia ser observada no Capítulo 3, faremos explicitamente a prova da relação de ortogonalidade de $J_m(\alpha, \gamma, x)$.

Propriedade 2.2.4 (*Relação de ortogonalidade*) Para $\alpha > -1$ e $\gamma > 0$, temos

$$\langle J_m, J_n \rangle = \int_0^1 J_m(\alpha, \gamma, x) J_n(\alpha, \gamma, x) (1-x)^{\alpha-\gamma} x^{\gamma-1} dx = \delta_{mn} \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha+1-\gamma) (\alpha+1-\gamma)_m m!}{\Gamma(\alpha) (\alpha)_m (\gamma)_m (\alpha+2m)}.$$

Demonstração: Primeiramente, vamos considerar, sem perda de generalidade, $m < n$. Por (2.11), temos

$$\begin{aligned} \langle J_m, J_n \rangle &= \int_0^1 J_m(\alpha, \gamma, x) J_n(\alpha, \gamma, x) (1-x)^{\alpha-\gamma} x^{\gamma-1} dx \\ &= \int_0^1 J_m(\alpha, \gamma, x) \left\{ \frac{x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma)_n} \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1} (1-x)^{\alpha-\gamma+n}] \right\} (1-x)^{\alpha-\gamma} x^{\gamma-1} dx \\ &= \frac{1}{(\gamma)_n} \int_0^1 J_m(\alpha, \gamma, x) \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1} (1-x)^{\alpha-\gamma+n}] dx. \end{aligned}$$

Daí, integrando a última igualdade n vezes por partes,

$$\langle J_m, J_n \rangle = \frac{(-1)^n}{(\gamma)_n} \int_0^1 \frac{d^n}{dx^n} [J_m(\alpha, \gamma, x)] [x^{\gamma+n-1} (1-x)^{\alpha-\gamma+n}] dx.$$

Como $\frac{d^n}{dx^n} J_m(\alpha, \gamma, x) = 0$, concluímos que

$$\int_0^1 J_m(\alpha, \gamma, x) J_n(\alpha, \gamma, x) (1-x)^{\alpha-\gamma} x^{\gamma-1} dx = 0, \quad m \neq n.$$

Agora, se $n = m$

$$\langle J_m, J_m \rangle = \frac{(-1)^m}{(\gamma)_m} \frac{d^m}{dx^m} [J_m(\alpha, \gamma, x)] \int_0^1 x^{\gamma+m-1} (1-x)^{\alpha-\gamma+m} dx.$$

Por (1.2) e pela Proposição 1.1.3,

$$\langle J_m, J_m \rangle = \frac{(-1)^m}{(\gamma)_m} \frac{d^m}{dx^m} [J_m(\alpha, \gamma, x)] \frac{\Gamma(\gamma + m) \Gamma(\alpha + m - \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 2m + 1)}.$$

De (2.4), temos

$$\frac{d^m}{dx^m} [J_m(\alpha, \gamma, x)] = \kappa_m m! = \frac{(-1)^m m! (\alpha + m)_m}{(\gamma)_m}.$$

Pela Proposição 1.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \langle J_m, J_m \rangle &= \frac{(-1)^m}{(\gamma)_m} \frac{(-1)^m m! (\alpha + m)_m}{(\gamma)_m} \frac{\Gamma(\gamma + m) \Gamma(\alpha + m - \gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + 2m + 1)} \\ &= \frac{m!}{(\gamma)_m} \frac{(\alpha + m)_m (\gamma)_m \Gamma(\gamma) (\alpha - \gamma + 1)_m \Gamma(\alpha - \gamma + 1)}{(\gamma)_m (\alpha + 2m) (\alpha + m)_m \Gamma(\alpha + m)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\alpha + 1 - \gamma) (\alpha + 1 - \gamma)_m m!}{\Gamma(\alpha) (\alpha)_m (\gamma)_m (\alpha + 2m)}. \end{aligned}$$

□

2.2.2 Polinômios ortogonais de Legendre

Os polinômios ortogonais de Legendre, $V_m(x)$, são um caso especial dos polinômios ortogonais de Jacobi, onde $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$. São definidos pela fórmula de Rodrigues por

$$V_m(x) = \frac{(-1)^m}{2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(1 - x^2)^m]. \quad (2.16)$$

De (2.6) conclui-se que

$$V_m(x) = P_m^{0,0}(x) = F\left(-m, m+1; 1; \frac{1-x}{2}\right).$$

Como $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 0$, os polinômios V_m são ortogonais com relação à função peso $w(x) = 1$, $x \in [-1, 1]$, ou seja,

$$\int_{-1}^1 V_m(x) V_n(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}.$$

A relação de recorrência de três termos é dada por

$$V_m(x) = \frac{2m-1}{m} x V_{m-1}(x) - \frac{m-1}{m} V_{m-2}(x), \quad m \geq 1 \quad (2.17)$$

com $V_0(x) = 1$ e $V_{-1}(x) = 0$.

Os polinômios $V_m(x)$ satisfazem à seguinte equação diferencial

$$(1 - x^2)y''(x) - 2xy'(x) + m(m+1)y(x) = 0.$$

Demonstramos, a seguir, algumas propriedades dos polinômios de Legendre.

Propriedade 2.2.5 *A função geratriz de $V_m(x)$ é*

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(x)t^m, \quad (2.18)$$

com $|t| < 1$ e $|x| \leq 1$.

Demonstração: Na relação de recorrência (2.17), multiplicando ambos os lados por t^{m-1} e fazendo o somatório para $m = 1, 2, 3, \dots$, obtemos

$$\sum_{m=1}^{\infty} t^{m-1} m V_m(x) = 2x \sum_{m=1}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right) t^{m-1} V_{m-1}(x) - \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) t^{m-1} V_{m-2}(x). \quad (2.19)$$

Seja

$$\tilde{p}(t) = V_0(x) + V_1(x)t + V_2(x)t^2 + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} t^m V_m(x).$$

Logo,

$$\frac{d\tilde{p}(t)}{dt} = \tilde{p}'(t) = V_1(x) + 2V_2(x)t + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} V_m(x).$$

Note que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \left(m - \frac{1}{2}\right) t^{m-1} V_{m-1}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) t^{m-1} V_{m-1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} t^{m-1} V_{m-1}(x) \\ &= t \sum_{m=0}^{\infty} m t^{m-1} V_m(x) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} t^m V_m(x) \\ &= t \tilde{p}'(t) + \frac{1}{2} \tilde{p}(t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) t^{m-1} V_{m-2}(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} (m-2) t^{m-1} V_{m-2}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} t^{m-1} V_{m-2}(x) \\ &= t^2 \sum_{m=1}^{\infty} m t^{m-1} V_m(x) + t \sum_{m=0}^{\infty} t^m V_m(x) = t^2 \tilde{p}'(t) + t \tilde{p}(t). \end{aligned}$$

Agora, reescrevendo (2.19) em termos de $\tilde{p}(t)$ e $\tilde{p}'(t)$, obtemos

$$\tilde{p}'(t) = 2x \left[\frac{1}{2} \tilde{p}(t) + t \tilde{p}'(t) \right] - [t^2 \tilde{p}'(t) + t \tilde{p}(t)].$$

Assim,

$$\frac{\tilde{p}'(t)}{\tilde{p}(t)} = 2x \left[\frac{1}{2} + t \frac{\tilde{p}'(t)}{\tilde{p}(t)} \right] - \left[t^2 \frac{\tilde{p}'(t)}{\tilde{p}(t)} + t \right].$$

Logo,

$$\frac{\tilde{p}'(t)}{\tilde{p}(t)} [1 - 2xt + t^2] = x - t$$

e

$$\frac{\tilde{p}'(t)}{\tilde{p}(t)} = \frac{x - t}{1 - 2xt + t^2}.$$

Observando que $\tilde{p}(0) = V_0(x) = 1$ e integrando a última igualdade acima de 0 a t , temos

$$\int_0^t \frac{\tilde{p}'(v)}{\tilde{p}(v)} dv = \int_0^t \frac{x - v}{1 - 2xv + v^2} dv$$

e, assim,

$$\ln[\tilde{p}(t)] = -\frac{1}{2} \ln(1 - 2xt + t^2) = \ln(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\tilde{p}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}},$$

e, portanto,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{m=0}^{\infty} V_m(x) t^m.$$

□

Propriedade 2.2.6 (*Representação por função hipergeométrica*) Os polinômios ortogonais de Legendre também são dados por

$$V_m(x) = 2^m \left(\frac{1}{2} \right)_m \frac{x^m}{m!} F\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{1}{2} - m; \frac{1}{x^2} \right).$$

Demonstração: Sabemos, de (2.18), que

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m V_m(x) = (1 - 2tx + t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Usando a relação (veja (1.7)),

$$(1 - a)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_j}{j!} a^j,$$

a identidade

$$(a - b)^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j \frac{k!}{j!(k-j)!} a^{k-j} b^j$$

e as relações

$$\begin{aligned}
(\lambda)_{m-i} &= \frac{(\lambda)_m}{(\lambda + m - i)_i}, \\
\frac{(-m)_{2i}}{2^{2i}} &= \left(-\frac{m}{2}\right)_i \left(\frac{1-m}{2}\right)_i, \\
(-m)_i &= \frac{(-1)^i m!}{(m-i)!}, \\
(-m)_{2i} &= (-m)_i (-m+i)_i, \\
(a-i)_i &= (-1)^i (-a+1)_i, \\
\left(\frac{1}{2} + m - i\right)_i &= (-1)^i \left(\frac{1}{2} - m\right)_i,
\end{aligned}$$

que são obtidas de (1.4) e (1.5), temos

$$\begin{aligned}
[1 - (2tx - t^2)]^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_j}{j!} (2tx - t^2)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_j}{j!} \sum_{i=0}^j \frac{(-1)^i (2tx)^{j-i} t^{2i} j!}{i!(j-i)!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^j \frac{(\frac{1}{2})_j (-1)^i 2^{j-i} x^{j-i} t^{j+i}}{i!(j-i)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(\frac{1}{2})_{m-i} (-1)^i 2^{m-2i} x^{m-2i}}{i!(m-2i)!},
\end{aligned}$$

A última igualdade se dá devido à mudança de variáveis $j = m - i$. Assim,

$$\sum_{m=0}^{\infty} t^m V_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(\frac{1}{2})_{m-i} (-1)^i 2^{m-2i} x^{m-2i}}{i!(m-2i)!}$$

e

$$V_m(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(\frac{1}{2})_{m-i} (-1)^i 2^{m-2i} x^{m-2i}}{i!(m-2i)!} = \left(\frac{1}{2}\right)_m 2^m x^m \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{i!(m-2i)! (\frac{1}{2} + m - i)_i (2x)^{2i}}. \quad (2.20)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m!} F\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{1}{2} - m; \frac{1}{x^2}\right) &= \frac{1}{m!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{m}{2}\right)_i \left(\frac{1-m}{2}\right)_i}{\left(\frac{1}{2} - m\right)_i i! x^{2i}} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{\left(-\frac{m}{2}\right)_i \left(\frac{1-m}{2}\right)_i}{m! \left(\frac{1}{2} - m\right)_i i! x^{2i}} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-m)_{2i}}{2^{2i} m! \left(\frac{1}{2} - m\right)_i i! x^{2i}} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i m! (-1)^i (m-i)!}{(m-i)! (m-2i)! m! \left(\frac{1}{2} - m\right)_i i! x^{2i} 2^{2i}} \\
&= \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^i}{i! (m-2i)! \left(\frac{1}{2} + m - i\right)_i (2x)^{2i}}.
\end{aligned}$$

Por (2.20) e pela última igualdade, concluímos a demonstração. $\square$

2.2.3 Polinômios ortogonais de Gegenbauer

Os polinômios ortogonais de Gegenbauer, denotados por $G_m^\lambda(x)$, são um caso especial dos polinômios ortogonais de Jacobi, onde $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \lambda - \frac{1}{2}$ e são dados por

$$G_m^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_m}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_m} P_m^{\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2}}(x) = \frac{(2\lambda)_m}{m!} F\left(-m, m+2\lambda; \lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right),$$

com $\lambda > -\frac{1}{2}$. No caso em que $\lambda = 0$, temos os polinômios ortogonais de Chebyshev de 1ª espécie, que serão definidos na próxima seção. Os polinômios $G_m^\lambda(x)$ podem ser dados pela fórmula de Rodrigues

$$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} G_m^\lambda(x) = \frac{(-1)^m (2\lambda)_m}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_m 2^m m!} \frac{d^m}{dx^m} [(1-x^2)^{\lambda+m-\frac{1}{2}}] \quad (2.21)$$

e são ortogonais com relação a função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$ e $x \in [-1, 1]$, onde

$$\int_{-1}^1 G_m^\lambda(x) G_n^\lambda(x) (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi 2^{1-2\lambda} \Gamma(m+2\lambda)}{\{\Gamma(\lambda)\}^2 (m+\lambda) m!} \delta_{mn}.$$

Sua função geratriz é dada por

$$(1-2xt+t^2)^{-\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} G_m^\lambda(x) t^m \quad (2.22)$$

A partir da função geratriz, pode-se escrever os polinômios ortogonais de Gegenbauer como a seguinte função hipergeométrica:

$$G_m^\lambda(x) = 2^m(\lambda)_m \frac{x^m}{m!} F\left(-\frac{m}{2}, \frac{1-m}{2}; 1-\lambda-m; \frac{1}{x^2}\right).$$

Esta igualdade pode ser demonstrada de modo análogo à demonstração da Propriedade 2.2.6.

Os polinômios $G_m^\lambda(x)$ satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$(m+1)G_{m+1}^\lambda(x) = -2(m+\lambda)xG_m^\lambda(x) + (m+2\lambda-1)G_{m-1}^\lambda(x), \quad m \geq 0,$$

com $G_0^\lambda(x) = 1$ e $G_{-1}^\lambda(x) = 0$.

Além disso, $G_m^\lambda(x)$ é solução da equação diferencial ordinária

$$(1-x^2)y''(x) - (2\lambda+1)xy'(x) + m(m+2\lambda)y(x) = 0.$$

2.2.4 Polinômios ortogonais de Chebyshev de 1ª e de 2ª espécies

Os polinômios ortogonais de Chebyshev de 1ª espécie, $T_m(x)$, também são um caso especial dos polinômios de Jacobi, onde $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = -\frac{1}{2}$. A fórmula de Rodrigues de $T_m(x)$ é

$$T_m(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^m}{2^m (\frac{1}{2})_m} \frac{d^m}{dx^m} [(1-x^2)^{m-\frac{1}{2}}].$$

Por (2.6), $T_m(x)$ é dado em termos dos polinômios $P_m^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x)$ por

$$T_m(x) = \frac{P_m^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(x)}{P_m^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(1)} = F\left(-m, m; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Sendo a função peso $w(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, com $x \in [-1, 1]$, a relação de ortogonalidade é dada por:

- Se $m \neq 0$,

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}.$$

- Se $m = 0$,

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = \pi \delta_{mn}.$$

A função geratriz de $T_m(x)$ é

$$\frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(x) t^m.$$

Para $m \geq 1$, com $T_0(x) = 1$ e $T_1(x) = x$, os polinômios $T_m(x)$ satisfazem à relação de recorrência

$$2xT_m(x) = T_{m+1}(x) + T_{m-1}(x).$$

O polinômio $T_m(x)$ é solução da seguinte equação diferencial ordinária

$$(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + m^2y(x) = 0.$$

Os polinômios ortogonais de Chebyshev de 2ª espécie, denotados por $U_m(x)$, são um caso especial dos polinômios ortogonais de Jacobi, onde $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = \frac{1}{2}$, dados por

$$U_m(x) = \frac{P_m^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(x)}{P_m^{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(1)} = (m+1)F\left(-m, m+2; \frac{3}{2}; \frac{1-x}{2}\right).$$

Sua fórmula de Rodrigues é

$$U_m(x) = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{(m+1)(-1)^m}{2^m \left(\frac{3}{2}\right)_m} \frac{d^m}{dx^m} [(1 - x^2)^{m+\frac{1}{2}}]$$

e satisfazem a relação de ortogonalidade, dada por

$$\int_{-1}^1 U_m(x) U_n(x) (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \delta_{mn}.$$

Para $m \geq 1$, com $U_0(x) = 1$ e $U_1(x) = 2x$, esses polinômios satisfazem seguinte à relação de recorrência

$$2xU_m(x) = U_{m+1}(x) + U_{m-1}(x).$$

A função geratriz é dada por

$$\frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(x)t^m.$$

$U_m(x)$ é solução da equação diferencial ordinária

$$(1 - x^2)y''(x) - 3xy'(x) + m(m+2)y(x) = 0.$$

2.3 Polinômios ortogonais de Laguerre

Os polinômios ortogonais de Laguerre, $L_m^{(\alpha)}(x)$, são definidos, pela fórmula de Rodrigues, por

$$e^{-x}x^{\alpha}L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x}x^{m+\alpha}).$$

Eles podem ser dados pela seguinte função hipergeométrica:

$$L_m^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1)_m}{m!} {}_1F_1\left(\begin{matrix} -m \\ \alpha+1 \end{matrix}; x\right).$$

Esses polinômios são ortogonais com relação à função peso $w(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, com $\alpha > -1$ e $x \in [0, \infty)$, onde

$$\int_0^{\infty} e^{-x}x^{\alpha}L_m^{(\alpha)}(x)L_n^{(\alpha)}(x)dx = \frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!}\delta_{mn}.$$

Para $m \geq 1$, com $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$ e $L_1^{(\alpha)}(x) = \alpha+1-x$, os polinômios $L_m^{(\alpha)}(x)$ satisfazem à relação de recorrência

$$(m+1)L_{m+1}^{(\alpha)}(x) = (2m+\alpha+1-x)L_m^{(\alpha)}(x) - (m+\alpha)L_{m-1}^{(\alpha)}(x).$$

A função geratriz é dada por

$$(1-t)^{-\alpha-1} e^{\left(\frac{xt}{t-1}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m^{(\alpha)}(x) t^m.$$

Tomando $y(x) = L_m^{(\alpha)}(x)$, temos que $L_m^{(\alpha)}(x)$ satisfaz à equação diferencial ordinária

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x)y'(x) + my(x) = 0.$$

2.4 Polinômios ortogonais de Hermite

Os polinômios ortogonais de Hermite, $H_m(x)$, são definidos pela seguinte função hipergeométrica:

$$H_m(x) = (2x)^m {}_2F_0\left(-\frac{m}{2}, -\frac{(m-1)}{2}; -\frac{1}{x^2}\right).$$

Eles também são dados pela fórmula de Rodrigues

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m} (e^{-x^2}).$$

Sendo a função peso $w(x) = e^{-x^2}$, com $x \in (-\infty, \infty)$, a relação de ortogonalidade é

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}.$$

Sua função geratriz é dada por

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(x)}{m!} t^m.$$

Para $m \geq 1$, com $H_0(x) = 1$ e $H_1(x) = 2x$, temos que os polinômios $H_m(x)$ satisfazem à seguinte relação de recorrência

$$H_{m+1}(x) = 2xH_m(x) - 2mH_{m-1}(x).$$

Além disso, $H_m(x)$ é solução da equação diferencial ordinária

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2my(x) = 0.$$

Polinômios Ortogonais em Várias Variáveis

Neste capítulo, chegamos ao objetivo do trabalho, ou seja, a generalização de propriedades dos polinômios ortogonais em uma variável para o caso de várias variáveis.

Tendo como referência o livro [2], mostramos algumas propriedades dos polinômios ortogonais de Jacobi em duas variáveis e dos polinômios ortogonais de Legendre e de Gegenbauer em várias variáveis. Utilizamos, também, os textos [5] e [9].

Os polinômios ortogonais de Jacobi, definidos em (2.11), cujo intervalo de ortogonalidade é $[0, 1]$, são estendidos para duas variáveis na região $T^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n ; x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$, ou seja, no triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

Os polinômios ortogonais de Legendre e de Gegenbauer, dados, respectivamente, em (2.16) e (2.21), são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$. Em n variáveis, esses polinômios são ortogonais na bola unitária, denotada por B^n , definida por $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \geq 0\}$.

3.1 Introdução

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno definido no espaço dos polinômios em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ com coeficientes reais ou complexos. Dois polinômios $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ são ortogonais com respeito a um produto interno se $\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = 0$. O polinômio $\mathbf{P}$ é chamado ortogonal, se ele é ortogonal a todo

o polinômio de grau total menor, ou seja,

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{Q} \rangle = 0, \quad \forall \quad \mathbf{Q} \mid \text{grau}(\mathbf{Q}) < \text{grau}(\mathbf{P}).$$

Uma função $\mathbf{W}(\mathbf{x})$, não negativa num dado domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, é denominada função peso se ela é integrável em Ω , não identicamente nula e

$$0 < \int_{\Omega} \mathbf{W}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \infty.$$

Um sistema de polinômios $\{\mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{x})\}$ é ortogonal numa região $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com relação à função peso $\mathbf{W}(\mathbf{x})$, se

$$\langle \mathbf{P}_{\mu}, \mathbf{P}_{\mu'} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\mu'}(\mathbf{x}) \mathbf{W}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad \mu \neq \mu'.$$

Um sistema de polinômios ortogonais é chamado ortonormal se $\langle \mathbf{P}_{\mu}, \mathbf{P}_{\mu} \rangle = 1$ e ele é mônico se

$$\mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{\alpha} + \mathbf{R}_{\mu-1}(\mathbf{x}), \quad |\alpha| = \mu, \quad \text{grau}(\mathbf{R}_{\mu-1}) \leq \mu - 1,$$

lembrando que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{x}^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$.

Exemplos de polinômios ortogonais em várias variáveis podem ser obtidos pelo produto tensor, com o qual geramos um polinômio em n variáveis de grau μ , $\mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{x})$, através de n polinômios ortogonais em uma variável. Considerando $w^{\beta_k}(x_k)$, para $1 \leq k \leq n$, n funções peso definidas em $(a_{\beta_k}, b_{\beta_k}) \subset \mathbb{R}$, sejam $\{P_m^{\beta_k}\}$ as sequências dos polinômios em uma variável com relação à função peso $w^{\beta_k}(x_k)$, respectivamente. Definimos o polinômio em n variáveis como

$$\mathbf{P}_{\mu}(\mathbf{x}) = P_{\alpha_1}^{\beta_1}(x_1) P_{\alpha_2}^{\beta_2}(x_2) \dots P_{\alpha_n}^{\beta_n}(x_n),$$

com grau total $\mu = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, que é ortogonal com relação à função peso

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = w^{\beta_1}(x_1) w^{\beta_2}(x_2) \dots w^{\beta_n}(x_n)$$

no domínio

$$\Omega = (a_{\beta_1}, b_{\beta_1}) \times (a_{\beta_2}, b_{\beta_2}) \times \dots \times (a_{\beta_n}, b_{\beta_n}).$$

Quando $n = 2$ e o domínio $\Omega = (a_{\beta_1}, b_{\beta_1}) \times (a_{\beta_1}, b_{\beta_1})$, os polinômios ortogonais são chamados de polinômios ortogonais no quadrado.

Outro método para gerar polinômios ortogonais em duas variáveis foi dado por Koornwinder em [7]. Neste método, os polinômios são utilizados de forma vetorial.

Existem também duas regiões limitadas que são domínios de funções pesos de polinômios ortogonais em várias variáveis. Uma delas é a região

$$T^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_n \geq 0\},$$

denominada simplex. Os polinômios ortogonais em T^n são ortogonais com relação à função peso

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = x_1^{\nu_1 - \frac{1}{2}} \dots x_n^{\nu_n - \frac{1}{2}} (1 - x_1 - \dots - x_n)^{\nu_{n+1} - \frac{1}{2}}, \quad \nu_i > -\frac{1}{2}.$$

Outra região é a bola unitária

$$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 \geq 0\}.$$

A função peso dos polinômios ortogonais na bola é dada por

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = (1 - x_1^2 - \dots - x_n^2)^{\nu - \frac{1}{2}}, \quad \nu > -\frac{1}{2}, \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B^n.$$

Nas próximas seções, abordaremos alguns desses exemplos seguindo as idéias do livro de Appell e Kampé de Fériet [2].

3.2 Polinômios ortogonais de Jacobi em duas variáveis

Seja a função hipergeométrica F_2 definida como em (1.9), isto é,

$$F_2(\alpha, \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{p+q}(\beta)_p(\beta')_q}{(\gamma)_p(\gamma')_q p! q!} x^p y^q.$$

Quando não houver dúvida, será denotada por F_2 . Utilizando F_2 pode-se generalizar os resultados sobre os polinômios ortogonais de Jacobi em uma variável no intervalo $[0, 1]$.

Considerando a função, similar à fórmula de Rodrigues,

$$J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m (\gamma')_n} (1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}], \quad (3.1)$$

vamos mostrar que este é um polinômio de grau total $m+n$ em x e y e, também, é representada pela função hipergeométrica F_2 .

Proposição 3.2.1 *Os polinômios $J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$ são dados pela função hipergeométrica F_2 , para $m, n \geq 0$, por*

$$J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-x-y)^{m+n} F_2\left(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n, -m, -n; \gamma, \gamma'; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}\right). \quad (3.2)$$

Demonstração: Considere a regra de Leibnitz para calcular a n -ésima derivada em duas variáveis

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [f^{a+m}(x) g^{b+n}(y) h^{c+m+n}(x, y)] = \\ \sum_{p,q=0}^{p=m, q=n} (-1)^{p+q} \frac{(-m)_p (-n)_q}{p! q!} \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} (f^{a+m}(x)) \frac{\partial^{n-q}}{\partial y^{n-q}} (g^{b+n}(y)) \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} (h^{c+m+n}(x, y)). \end{aligned}$$

Aplicando esta regra em (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma+m-1} y^{\gamma'+n-1} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}] = \\ \sum_{p,q=0}^{p=m, q=n} (-1)^{p+q} \frac{(-m)_p (-n)_q}{p! q!} \frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} (x^{\gamma+m-1}) \frac{\partial^{n-q}}{\partial y^{n-q}} (y^{\gamma'+n-1}) \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} ((1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como

- $\frac{\partial^{m-p}}{\partial x^{m-p}} (x^{\gamma+m-1}) = (\gamma)_{m-p} x^{\gamma-1+p} = \frac{(\gamma)_m}{(\gamma)_p} x^{\gamma-1+p},$
- $\frac{\partial^{n-q}}{\partial y^{n-q}} (y^{\gamma'+n-1}) = (\gamma')_{n-q} y^{\gamma'-1+q} = \frac{(\gamma')_n}{(\gamma')_q} y^{\gamma'-1+q},$
- $\frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} ((1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'}) = (\alpha+m+n-\gamma-\gamma')_{p+q} (-1)^{p+q} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'-p-q},$

de (3.3), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{p,q=0}^{p=m, q=n} \frac{(-m)_p (-n)_q}{p! q!} \frac{(\gamma)_m}{(\gamma)_p} x^{\gamma-1+p} \frac{(\gamma')_n}{(\gamma')_q} y^{\gamma'-1+q} (\alpha+m+n-\gamma-\gamma')_{p+q} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'-p-q} \\ = \sum_{p,q=0}^{p=m, q=n} x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'} \frac{(-m)_p (-n)_q (\gamma)_m (\gamma')_n}{p! q! (\gamma)_p (\gamma')_q} (\gamma+\gamma'-\alpha-m-n)_{p+q} \frac{x^p y^q}{(x+y-1)^{p+q}}. \end{aligned}$$

Daí, por (3.1),

$$\begin{aligned}
J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'} (1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha}}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \\
&\times \sum_{p,q=0}^{p=m, q=n} x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha+m+n-\gamma-\gamma'} \frac{(-m)_p (-n)_q (\gamma)_m (\gamma')_n}{p! q! (\gamma)_p (\gamma')_q} \\
&\times (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_{p+q} \frac{x^p y^q}{(x+y-1)^{p+q}} \\
&= (1-x-y)^{m+n} \sum_{p,q=0}^{\infty} \frac{(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_{p+q} (-m)_p (-n)_q}{(\gamma)_p (\gamma')_q p! q!} \left(\frac{x}{x+y-1} \right)^p \left(\frac{y}{x+y-1} \right)^q \\
&= (1-x-y)^{m+n} F_2(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n, -m, -n; \gamma, \gamma'; \frac{x}{x+y-1}, \frac{y}{x+y-1}).
\end{aligned}$$

Ao desenvolvermos a função hipergeométrica F_2 acima, os termos a partir de $p = m$ e $q = n$ são nulos. Assim, concluímos que (3.2) gera um polinômio de grau total $m + n$. $\square$

Os polinômios $J_{m,n}$ são uma generalização dos polinômios J_m , pois, ao aplicar em (2.13) a seguinte Fórmula de transformação de Pfaff, dada no item 2 da Propriedade 1.3.1,

$$F(-n, \alpha + n; \gamma; x) = (1-x)^n F\left(-n, \gamma - \alpha - n; \gamma; \frac{x}{x-1}\right),$$

obtemos

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = (1-x)^m F\left(\gamma - \alpha - m, -m; \gamma; \frac{x}{x-1}\right).$$

Comparando a expressão acima com (3.2), vemos que os polinômios $J_{m,n}$ são representados pela função F_2 da mesma maneira que os polinômios J_m são representados pela função de Gauss F . Além disso, a expressão (3.1) é uma generalização da fórmula de Rodrigues dada em (2.11).

Exemplo 3.2.1 *Polinômios $J_{m,n}$ de grau total 0, 1 e 2:*

- *Grau total 0:* $m = n = 0$,

$$J_{0,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = 1.$$

- *Grau total 1:* $m = 0$ e $n = 1$ ou $m = 1$ e $n = 0$,

$$J_{1,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = 1 + \frac{(\gamma' - \alpha - 1)}{\gamma}x - y;$$

$$J_{0,1}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = 1 - x + \frac{(\gamma - \alpha - 1)}{\gamma'}y.$$

- *Grau total 2:* $m = 2$ e $n = 0$ ou $m = 1$ e $n = 1$ ou $m = 0$ ou $n = 2$,

$$J_{2,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = 1 + \frac{2(\gamma' - \alpha - 2)}{\gamma}x - 2y$$

$$+ \frac{\{(\gamma + \gamma' - \alpha - 2)[(\gamma + \gamma' - \alpha - 1) - 2(\gamma + 1)] + \gamma(\gamma + 1)\}}{\gamma(\gamma + 1)}x^2 - 2\frac{(\gamma' - \alpha - 2)}{\gamma}xy + y^2;$$

$$J_{1,1}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = 1 + \frac{(\gamma' - \gamma - 2 - \alpha)}{\gamma}x + \frac{(\gamma - \gamma' - 2 - \alpha)}{\gamma'}y + \frac{(\alpha + 2 - \gamma')}{\gamma}x^2$$

$$+ \frac{(\alpha + 2 - \gamma)}{\gamma'}y^2 + \frac{\{(\gamma + \gamma' - \alpha - 2)[(\gamma + \gamma' - \alpha - 1) - \gamma - \gamma'] + 2\gamma\gamma'\}}{\gamma\gamma'}xy;$$

$$J_{0,2}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = 1 - 2x + \frac{(2\gamma - 2\alpha - 4)}{\gamma'}y + x^2 + 2\frac{(\alpha - \gamma + 2)}{\gamma'}xy$$

$$+ \frac{\{(\gamma' + 1)[\gamma' + 2(\alpha - \gamma - \gamma' + 2)] + (\gamma + \gamma' - \alpha - 2)(\gamma + \gamma' - \alpha - 1)\}}{\gamma'(\gamma' + 1)}y^2.$$

3.2.1 Ortogonalidade

A seguir, demonstraremos que os polinômios $J_{m,n}$ são ortogonais com respeito à função peso

$$\mathbf{W}(x, y) = x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'},$$

com $Re(\gamma) > 0$, $Re(\gamma') > 0$, $Re(\alpha + 1 - \gamma - \gamma') > 0$, na região T^n , que em duas variáveis é dada por

$$T^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\},$$

ou seja, são polinômios ortogonais no triângulo com vértices em $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$.

Primeiramente, vamos provar que os polinômios $J_{m,n}$ são ortogonais a todo polinômio de grau total menor que $m + n$, com relação à função peso $\mathbf{W}(x, y) = x^{\gamma-1}y^{\gamma'-1}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}$, no simplex.

Proposição 3.2.2 *Seja $\mathbf{P}(x, y)$ um polinômio qualquer de grau inferior a $m + n$. Então, para*

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, 1 - x - y \geq 0\}$ e $Re(\gamma) > 0, Re(\gamma') > 0, Re(\alpha + 1 - \gamma - \gamma') > 0$, temos

$$\int \int J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) \mathbf{P}(x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dx dy = 0. \quad (3.4)$$

Demonstração: Substituindo, em (3.4), $J_{m,n}$ pela expressão dada em (3.1), temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{1-x} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) P(x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{x^{1-\gamma} y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m (\gamma')_n} (1 - x - y)^{\gamma+\gamma'-\alpha} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}] \\ &\quad \times P(x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dy dx \\ &= \frac{1}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \int_0^1 \int_0^{1-x} P(x, y) \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}] dy dx. \end{aligned}$$

Vamos utilizar integração por partes. Tomemos

$$v(x, y) = P(x, y)$$

e

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}].$$

Logo,

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}$$

e

$$u(x, y) = \frac{\partial^{m+n-1}}{\partial x^m \partial y^{n-1}} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}].$$

Mas,

$$\frac{\partial^{m+n-1}}{\partial x^m \partial y^{n-1}} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}] P(x, y) \Big|_{y=0}^{y=1-x} = 0.$$

Assim,

$$I = 0 + \frac{-1}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \frac{\partial^{m+n-1}}{\partial x^m \partial y^{n-1}} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}] dy dx.$$

Integrando novamente por partes $m + n - 1$ vezes, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^{1-x} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) P(x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{P(x, y)}{(\gamma)_m (\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1 - x - y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}] dy dx \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \int_0^1 \int_0^{1-x} x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [P(x, y)] dy dx. \quad (3.5)$$

Como $P(x, y)$ é um polinômio de grau menor que $m + n$, temos

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} P(x, y) = 0.$$

Portanto, (3.5) se anula, ou seja, vale (3.4). $\square$

Agora, provaremos a relação de ortogonalidade entre $J_{m,n}$ e $J_{m',n'}$ com respeito à função peso $\mathbf{W}(x, y) = x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'}$, na região $\{(x, y); x \geq 0, y \geq 0, 1-x-y \geq 0\}$, com $Re(\gamma) > 0$, $Re(\gamma') > 0$ e $Re(\alpha + 1 - \gamma - \gamma') > 0$.

Proposição 3.2.3 *Para $m, n, m', n' \geq 0$ e $Re(\gamma) > 0$, $Re(\gamma') > 0$, $Re(\alpha + 1 - \gamma - \gamma') > 0$, temos que*

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dy dx$$

é nula se $m + n \neq m' + n'$. Se $m + n = m' + n'$, então a integral acima é dada por

$$\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha + m + n + 1 - \gamma - \gamma')}{\Gamma(\alpha + 2m + 2n + 1)} (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)].$$

Demonstração: Em (3.4), vamos substituir $\mathbf{P}(x, y)$ por $J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$. Como $m + n \neq m' + n'$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $m + n > m' + n'$. Assim,

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] = 0.$$

Logo, para $m + n \neq m' + n'$,

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dy dx = 0.$$

Por outro lado, se $m + n = m' + n'$, temos que $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)]$ é uma constante. Daí, por (3.5),

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^{1-x} J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) x^{\gamma-1} y^{\gamma'-1} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'} dy dx \\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \int_0^1 \int_0^{1-x} x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n} dy dx. \end{aligned}$$

Utilizando a definição de função Beta (1.2) e fazendo, na integral acima, a mudança $t = \frac{y-x}{1-x}$,

pode-se observar que

$$\int_0^{1-x} (1-x-y)^{\alpha-1} y^{\beta-1} dy = (1-x)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) = (1-x)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \int_0^1 \int_0^{1-x} x^{\gamma-1+m} y^{\gamma'-1+n} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n} dy dx \\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \int_0^1 x^{\gamma-1+m} \int_0^{1-x} y^{\gamma'-1+n} (1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n} dy dx \\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \int_0^1 x^{\gamma-1+m} (1-x)^{(\alpha+m+2n-\gamma+1-1)} \\ & \quad \times \frac{\Gamma(\alpha+m+n-\gamma-\gamma'+1)\Gamma(\gamma'+n)}{\Gamma(\alpha+m+2n-\gamma+1)} dx \\ &= \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \frac{\Gamma(\alpha+m+n-\gamma-\gamma'+1)\Gamma(\gamma'+n)}{\Gamma(\alpha+m+2n-\gamma+1)} \\ & \quad \times \frac{\Gamma(\gamma+m)\Gamma(\alpha+m+2n-\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+2m+2n-\gamma+1)}. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.2.1, temos $(\gamma)_m = \frac{\Gamma(\gamma+m)}{\Gamma(\gamma)}$. Logo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{m+n}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \frac{\Gamma(\alpha+m+n-\gamma-\gamma'+1)\Gamma(\gamma'+n)\Gamma(\gamma+m)}{\Gamma(\gamma+2m+2n-\gamma+1)} \\ &= (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)] \\ & \quad \times \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha+m+n-\gamma-\gamma'+1)\Gamma(\gamma'+n)\Gamma(\gamma+m)}{\Gamma(\gamma+m)\Gamma(\gamma'+n)\Gamma(\gamma+2m+2n-\gamma+1)} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha+m+n+1-\gamma-\gamma')}{\Gamma(\alpha+2m+2n+1)} (-1)^{m+n} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [J_{m',n'}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)]. \quad \square \end{aligned}$$

Note que a demonstração da ortogonalidade dos polinômios $J_{m,n}$ aqui apresentada é análoga ao caso de J_m , vista na Propriedade 2.2.4.

3.2.2 Algumas propriedades

A propriedade aqui apresentada nos dá uma relação entre os polinômios $J_{m,n}$ e J_m . Em seguida, veremos alguns casos particulares dessa relação.

Propriedade 3.2.1 *Os polinômios $J_{m,n}$ são expressos como uma soma limitada dos polinômios*

J_n , dados por

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x)^n \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \\ &\times J_n\left(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) x^p (1-x-y)^{m-p}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Demonstração: Como $(a)_{p+q} = (a)_p (a+p)_q$, por (3.2) temos

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x-y)^{m+n} \sum_{p,q=0}^{p=m, q=n} \frac{(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_{p+q} (-m)_p (-n)_q x^p y^q}{p! q! (\gamma)_p (\gamma')_q (x+y-1)^{p+q}} \\ &= (1-x-y)^{m+n} \sum_{p=0}^m \frac{(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \left(\frac{x}{x+y-1}\right)^p \\ &\times \sum_{q=0}^n \frac{(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n + p)_q (-n)_q}{q! (\gamma')_q} \left(\frac{y}{x+y-1}\right)^q. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x-y)^{m+n} \sum_{p=0}^m \frac{(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \\ &\times F\left(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n + p, -n; \gamma'; \frac{y}{x+y-1}\right) \left(\frac{x}{x+y-1}\right)^p. \end{aligned}$$

Em (2.13) temos

$$J_n(a, b, z) = (1-z)^n \sum_{k=0}^n \frac{(b-a-n)_k (-n)_k}{(b)_k k!} \left(\frac{z}{z-1}\right)^k.$$

Substituindo, na equação acima, $a = \alpha + m - \gamma - p$, $b = \gamma'$ e $z = \frac{y}{1-x}$, obtemos

$$\begin{aligned} J_n\left(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) &= \left(1 - \frac{y}{1-x}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma' - \alpha - m + \gamma + p - n)_k (-n)_k}{(\gamma')_k k!} \left(\frac{\frac{y}{1-x}}{\frac{y}{1-x} - 1}\right)^k \\ &= \left(\frac{1-x-y}{1-x}\right)^n \sum_{k=0}^n \frac{(\gamma' - \alpha - m + \gamma + p - n)_k (-n)_k}{(\gamma')_k k!} \left(\frac{y}{x+y-1}\right)^k. \end{aligned}$$

Logo,

$$F\left(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n + p, -n; \gamma'; \frac{y}{x+y-1}\right) = \left(\frac{1-x}{1-x-y}\right)^n J_n\left(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x-y)^m (1-x-y)^n \sum_{p=0}^m \frac{(\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \\ &\times \frac{(1-x)^n}{(1-x-y)^n} J_n\left(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) \left(\frac{x}{1-x-y}\right)^p \frac{1}{(-1)^p}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x)^n \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \\ &\times J_n\left(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) x^p (1-x-y)^{m-p}. \end{aligned}$$

□

Observação 3.2.1 *Os casos particulares em que $x = 0$, $y = 0$, $m = 0$ ou $n = 0$ são funções que envolvem os polinômios ortogonais de Jacobi em uma variável da seguinte forma:*

- $J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', 0, y) = (1-y)^m J_n(\alpha + m - \gamma, \gamma', y)$.

De fato, de (3.6),

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x)^n J_n\left(\alpha + m - \gamma, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) (1-x-y)^m \\ &+ (1-x)^n \sum_{p=1}^m \left[\frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \right. \\ &\times J_n\left(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) x^p (1-x-y)^{m-p} \left. \right]. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Fazendo $x = 0$,

$$\begin{aligned} J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', 0, y) &= (1)^n J_n(\alpha + m - \gamma, \gamma', y) (1-y)^m \\ &+ (1)^n \sum_{p=1}^m \left[\frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \right. \\ &\times J_n(\alpha + m - \gamma - p, \gamma', y) 0^p (1-y)^{m-p} \left. \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', 0, y) = (1-y)^m J_n(\alpha + m - \gamma, \gamma', y).$$

- $J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, 0) = (1-x)^n J_m(\alpha - \gamma' + n, \gamma, x).$

De fato, fazendo $y = 0$ em (3.7),

$$\begin{aligned}
 J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, 0) &= (1-x)^n \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{p! (\gamma)_p} \frac{x^p}{(1-x)^p} (1-x)^m \\
 &= (1-x)^n (1-x)^m \sum_{p=0}^m \frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - m - n)_p (-m)_p}{(-1)^p p! (\gamma)_p} \left(\frac{x}{1-x} \right)^p \\
 &= (1-x)^n (1-x)^m F\left(\gamma - (\alpha - \gamma' + n) - m, -m; \gamma; \frac{x}{x-1}\right).
 \end{aligned}$$

Pela Propriedade 1.3.1, temos

$$F(-a, b+a; c; x) = (1-x)^a F\left(-a, c-b-a; c; \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^a F\left(c-b-a, -a; c; \frac{x}{x-1}\right).$$

Assim, tomando $a = m$, $b = \alpha - \gamma' + n$ e $c = \gamma$, concluímos que

$$(1-x)^n (1-x)^m F\left(\gamma - (\alpha - \gamma' + n) - m, -m; \gamma; \frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^n F(-m, \alpha - \gamma' + n + m; \gamma; x).$$

Logo,

$$J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, 0) = (1-x)^n J_m(\alpha - \gamma' + n, \gamma, x).$$

- $J_{0,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-x)^n J_n\left(\alpha - \gamma; \gamma'; \frac{y}{1-x}\right).$

De fato, substituindo $m = 0$ em (3.6), temos

$$\begin{aligned}
 J_{0,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) &= (1-x)^n \sum_{p=0}^0 \frac{(-1)^p (\gamma + \gamma' - \alpha - n)_p (0)_p}{p! (\gamma)_p} \\
 &\quad \times J_n\left(\alpha - \gamma - p, \gamma', \frac{y}{1-x}\right) x^p (1-x-y)^{-p}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_{0,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-x)^n J_n\left(\alpha - \gamma, \gamma', \frac{y}{1-x}\right).$$

- $J_{m,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-y)^m J_m\left(\alpha - \gamma'; \gamma; \frac{x}{1-y}\right).$

Substituindo x por $\frac{x}{1-y}$ em (3.6), temos

$$\begin{aligned}
 & (1-y)^m J_m\left(\alpha - \gamma', \gamma, \frac{x}{1-y}\right) \\
 &= (1-y)^m \left(1 - \frac{x}{1-y}\right)^m \sum_{k=0}^m \frac{(\gamma - \alpha + \gamma' - m)_k (-m)_k}{(\gamma)_k k!} \left(\frac{\frac{x}{1-y}}{\frac{x}{1-y} - 1}\right)^k \\
 &= (1-y)^m \frac{(1-x-y)^m}{(1-y)^m} \sum_{k=0}^m \frac{(\gamma - \alpha + \gamma' - m)_k (-m)_k}{(\gamma)_k k!} \left(\frac{x}{1-x-y}\right)^k (-1)^k \\
 &= \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (\gamma - \alpha + \gamma' - m)_k (-m)_k}{(\gamma)_k k!} x^k (1-x-y)^{m-k} = J_{m,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$J_{m,0}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = (1-y)^m J_m\left(\alpha - \gamma', \gamma, \frac{x}{1-y}\right).$$

3.3 Polinômios ortogonais de Legendre em várias variáveis

Seja $\mathbf{P}_\mu(z_1, \dots, z_{n+2})$ um polinômio harmônico e homogêneo. Pode-se substituir as coordenadas retangulares $z_1, \dots, z_{n+2}$ pelas coordenadas zonais $r, x_1, \dots, x_n, \varphi$, onde

$$\begin{aligned}
 z_1 &= rx_1, & |x_1| &\leq 1, \\
 z_2 &= rx_2, & |x_2| &\leq 1, \\
 &\vdots & &\vdots \\
 z_n &= rx_n, & |x_n| &\leq 1, \\
 z_{n+1} &= r\sqrt{\mathbb{X}_n} \cos(\varphi), \\
 z_{n+2} &= r\sqrt{\mathbb{X}_n} \sin(\varphi), & 0 \leq \varphi &\leq 2\pi,
 \end{aligned}$$

com

$$\mathbb{X}_n = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2.$$

Como $\mathbb{X}_n \geq 0$, então

$$\mathbb{X}_n \in B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \geq 0\}.$$

Assim,

$$\mathbf{P}_\mu(z_1, \dots, z_{n+2}) = r^\mu \mathbf{P}_\mu(x_1, \dots, x_n, \sqrt{\mathbb{X}_n} \cos(\varphi), \sqrt{\mathbb{X}_n} \sin(\varphi)).$$

Tomando $r = 1$, $\mathbf{P}_\mu$ é escrito como uma função hipersférica zonal Y_μ (isto é, uma função

cujo domínio é B^n), dada por

$$Y_\mu(x_1, \dots, x_n, \varphi) = \mathbf{P}_\mu(x_1, \dots, x_n, \sqrt{\mathbb{X}_n} \cos(\varphi), \sqrt{\mathbb{X}_n} \sin(\varphi)).$$

Como $\cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$ e $\sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$, pode-se escrever

$$Y_\mu(x_1, \dots, x_n, \varphi) = \mathbf{P}_\mu\left(x_1, \dots, x_n, \sqrt{\mathbb{X}_n} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right), \sqrt{\mathbb{X}_n} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)\right).$$

Ao desenvolver Y_μ em função de $e^{i\varphi}$ e $e^{-i\varphi}$, sendo $\mathbf{P}_\mu$ um polinômio homogêneo, ou seja, $\mathbf{P}_\mu(\mathbf{z}) = \sum_{|\alpha|=\mu} c_\alpha \mathbf{z}^\alpha$, com $\mathbf{z}^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_{n+2}^{\alpha_{n+2}}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+2}$, obtemos

$$Y_\mu(x_1, \dots, x_n, \varphi) = \sum_{|\alpha|=\mu} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} (\sqrt{\mathbb{X}_n})^{\alpha_{n+1}} (\sqrt{\mathbb{X}_n})^{\alpha_{n+2}} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^{\alpha_{n+1}} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^{\alpha_{n+2}}. \quad (3.8)$$

Notando que $|\alpha| = \mu$ e $0 \leq \alpha_j + \alpha_l \leq \mu$, podemos reescrever a soma dada em (3.8) como

$$Y_\mu(x_1, \dots, x_n, \varphi) = \sum_{k=0}^{\mu} (\mathbb{X}_n)^{\frac{k}{2}} \mathbf{Z}_\mu^{(k)}(x_1, \dots, x_n) [A_k e^{ki\varphi} + B_k e^{-ki\varphi}],$$

onde $\mathbf{Z}_\mu^{(k)}(x_1, \dots, x_n)$ é um polinômio de grau total μ e A_k e B_k são constantes.

Por exemplo, em uma variável, temos

$$Y_\mu(x, \varphi) = \mathbf{P}_\mu\left(x, \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right), \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)\right)$$

e

$$Y_\mu(x, \varphi) = \sum_{k=0}^{\mu} (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \mathbf{Z}_\mu^{(k)}(x) [A_k e^{ki\varphi} + B_k e^{-ki\varphi}],$$

com A_k e B_k constantes e $\mathbf{Z}_\mu^{(k)}(x)$ um polinômio de grau μ .

Ainda em uma variável, o termo independente de $Y_\mu(x, \varphi)$, $k = 0$, é $\mathbf{Z}_\mu^{(0)}(x)$ e este é o polinômio de Legendre de grau μ em uma variável. Vamos exemplificar este fato para $\mu = 3$ e para $\mu = 4$.

Tomando $\mu = 3$, temos

$$\begin{aligned} & P_3\left(x, \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right), \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)\right) \\ &= x^3 + (\sqrt{1-x^2})^3 \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right)^3 + (\sqrt{1-x^2})^3 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{3}{2} \left[x^2 \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) + x^2 \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) + x(1-x^2) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \right. \\
& + (1-x^2) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) (\sqrt{1-x^2}) \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 + (1-x^2) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 x \\
& \left. + (1-x^2) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 (\sqrt{1-x^2}) \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \right] + 6x(1-x^2) \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \\
& = x^3 + (1-x^2)(\sqrt{1-x^2}) \left(\frac{e^{3i\varphi} + 3e^{i\varphi} + 3e^{-i\varphi} + e^{-3i\varphi}}{8} \right) \\
& + (1-x^2)(\sqrt{1-x^2}) \left(\frac{e^{-3i\varphi} - 3e^{-i\varphi} + 3e^{i\varphi} - e^{3i\varphi}}{8i} \right) \\
& - \frac{3}{2} \left\{ \left[x^2 + (1-x^2) \left(\frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{4i} \right) \right] (\sqrt{1-x^2}) \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) + x - x^3 \right\} \\
& + 6(x-x^3) \left(\frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{4i} \right) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + \dots = V_3(x) + \dots
\end{aligned}$$

Agora, tomando $\mu = 4$,

$$\begin{aligned}
& P_4 \left(x, \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right), \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \right) \\
& = x^4 + (1-x^2)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^4 + (1-x^2) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^4 \\
& - \frac{4}{2} \left\{ x^3 \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) + (1-x^2)^{\frac{3}{2}} x \left[\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^3 + \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^3 \right] \right. \\
& + (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1-x^2} \left[\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) + \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^3 \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \right] \left. \right\} \\
& - 3 \left\{ x^2(1-x^2) \left[\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 \right] + (1-x^2)^2 \left[\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right)^2 \right] \right\} \\
& + 12x(1-x^2) \left\{ x \left(\frac{e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}}{4i} \right) + \sqrt{1-x^2} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \left[\left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) + \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \right) \right] \right\} \\
& = x^4 + (1-2x^2+x^4) \frac{3}{4} - 3(x^2-x^4) - \frac{3}{8}(1-2x^2+x^4) + \dots \\
& = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) + \dots = V_4(x) + \dots
\end{aligned}$$

Deste modo, os polinômios de Legendre são relacionados com as funções hipersféricas zonais.

Para $n > 1$, os polinômios $\mathbf{Z}_\mu^{(0)}(x_1, \dots, x_n)$ de Y_μ são os polinômios de Legendre em várias variáveis e são dados pela Proposição a seguir.

Proposição 3.3.1 *Os polinômios de Legendre em n variáveis e de grau total $\mu = m_1 + \dots + m_n$, denotados por $V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$, é dado pelo desenvolvimento da seguinte função geratriz*

$$\frac{1}{(\sqrt{1 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2})^n} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.9)$$

Demonstração: Sejam $F = [(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}}$ uma função, $P = (z_1, \dots, z_{n+2})$ um ponto em $S^{n+1} = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} ; x_1^2 + \dots + x_{n+2}^2 = 1\}$ e $A = (a_1, \dots, a_n, 0, 0)$ um ponto em $B^n = \{(x_1, \dots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} ; 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2 \geq 0\}$. Temos, então, que

(1) F satisfaz à equação de Laplace, pois

$$\frac{\partial F}{\partial z_i} = -n[(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}-1}(z_i - a_i),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} &= n(n+2)[(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}-2}(z_i - a_i)^2 \\ &\quad - n[(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}-1}, \end{aligned}$$

com $i = 1, \dots, n+2$. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta F &= \sum_{i=1}^{n+2} \frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2} = n[(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}-1} \\ &\quad \times \left\{ -(n+2) + (n+2) \frac{[(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]}{[(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]} \right\} = 0. \end{aligned}$$

(2) F é harmônica em todo o domínio, exceto no ponto A , pois F satisfaz a equação de Laplace e $\frac{\partial^2 F}{\partial z_i^2}$ é contínua em todo o domínio, exceto em A . Daí, conclui-se que F é infinitamente diferenciável.

Assim, por (1), (2) e usando a fórmula de Taylor para funções em várias variáveis, podemos expressar F em potências de $a_1, \dots, a_n$, obtendo

$$F = [(z_1 - a_1)^2 + \dots + (z_n - a_n)^2 + z_{n+1}^2 + z_{n+2}^2]^{-\frac{n}{2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} W_{m_1, \dots, m_n}(z_1, \dots, z_{n+2}),$$

onde

$$W_{m_1, \dots, m_n}(z_1, \dots, z_{n+2}) = \frac{(-1)^\mu}{m_1! \dots m_n!} \frac{\partial^\mu}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_n^{m_n}} \left[\frac{1}{(z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2)^{\frac{n}{2}}} \right].$$

Substituindo em F as coordenadas retangulares $z_1, \dots, z_{n+2}$ pelas coordenadas zonais $r, x_1, \dots, x_n, \varphi$, onde

$$z_1 = x_1 r, \quad \dots, \quad z_n = x_n r, \quad z_{n+1} = r \sqrt{\mathbb{X}_n} \cos \varphi, \quad z_{n+2} = r \sqrt{\mathbb{X}_n} \sin \varphi,$$

com $|x_i| \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $r^2 = z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2 = 1$, $\mathbb{X}_n = 1 - x_1^2 - \dots - x_n^2$, temos

$$\begin{aligned} F &= (z_1^2 + \dots + z_{n+2}^2 - 2a_1 z_1 - \dots - 2a_n z_n + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &= (r^2 - 2a_1 x_1 r - \dots - 2a_n x_n r + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Como $r = 1$,

$$F = (1 - 2a_1 x_1 - \dots - 2a_n x_n + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Logo, F é uma função que depende apenas de $x_1, \dots, x_n$ e $a_1, \dots, a_n$, não mais de φ . Deste modo, podemos reescrever a série como

$$F = (1 - 2a_1 x_1 - \dots - 2a_n x_n + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n),$$

com $\mu = m_1 + \dots + m_n$. Portanto,

$$\frac{1}{(\sqrt{1 - 2a_1 x_1 - \dots - 2a_n x_n + a_1^2 + \dots + a_n^2})^n} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n).$$

□

A função (3.9) é uma generalização da função (2.18), que é a função geratriz dos polinômios de Legendre em uma variável.

Os polinômios ortogonais de Legendre em n variáveis também são dados pela função hipergeométrica F_B , dada em (1.10), por

$$F_B(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n; \gamma; x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_i=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{j_1} (\beta_1)_{j_1} \dots (\alpha_n)_{j_n} (\beta_n)_{j_n}}{(\gamma)_{j_1+j_2+\dots+j_n}} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n},$$

com $j = j_1 + \dots + j_n$.

Proposição 3.3.2 Para $m_i \geq 0$, com $i = 1, \dots, n$, $\mu = m_1 + \dots + m_n$, temos

$$V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = 2^\mu \binom{n}{2}_\mu \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \dots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \times F_B \left(-\frac{m_1}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \dots, \frac{1-m_n}{2}; -\frac{n}{2} - \mu + 1; \frac{1}{x_1^2}, \dots, \frac{1}{x_n^2} \right). \quad (3.10)$$

Demonstração: Da função geratriz de $V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$ e utilizando as relações dadas no início da demonstração da Propriedade 2.2.6, temos

$$\begin{aligned} & \{1 - [(2a_1x_1 - a_1^2) + \dots + (2a_nx_n - a_n^2)]\}^{-\frac{n}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{n}{2})_k}{k!} [(2a_1x_1 - a_1^2) + \dots + (2a_nx_n - a_n^2)]^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{n}{2})_k}{k!} \sum_{p_1=0}^k \frac{k!}{p_1!(k-p_1)!} (2a_1x_1 - a_1^2)^{k-p_1} [(2a_2x_2 - a_2^2) + \dots + (2a_nx_n - a_n^2)]^{p_1} \\ & \quad \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)_k \sum_{p_1=0}^k \frac{(2a_1x_1 - a_1^2)^{k-p_1}}{(k-p_1)!} \dots \sum_{p_{n-1}=0}^{p_{n-1}} \frac{(2a_{n-1}x_{n-1} - a_{n-1}^2)^{p_{n-1}-p_n}}{(p_{n-1}-p_n)!} \frac{(2a_nx_n - a_n^2)^{p_n}}{(p_n)!} \\ & \quad \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)_k \sum_{p_1=0}^k \frac{1}{(k-p_1)!} \sum_{q_1=0}^{k-p_1} \frac{(-1)^{q_1} (k-p_1)!}{q_1!(k-p_1-q_1)!} (2a_1x_1)^{k-p_1-q_1} a_1^{2q_1} \dots \sum_{p_n=0}^{p_{n-1}} \frac{1}{(p_{n-1}-p_n)!} \\ & \quad \times \sum_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-p_n} \frac{(-1)^{q_{n-1}} (p_{n-1}-p_n)!}{q_{n-1}!(p_{n-1}-p_n-q_{n-1})!} (2a_{n-1}x_{n-1})^{p_{n-1}-p_n-q_{n-1}} a_{n-1}^{2q_{n-1}} \\ & \quad \times \sum_{q_n=0}^{p_n} \frac{(-1)^{q_n} (p_n)!}{q_n!(p_n-q_n)!} (2a_nx_n)^{p_n-q_n} a_n^{2q_n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)_k \sum_{p_1=0}^k \sum_{q_1=0}^{k-p_1} \frac{(-1)^{q_1} (2x_1)^{k-p_1-q_1} a_1^{k-p_1+q_1}}{q_1!(k-p_1-q_1)!} \dots \\ & \quad \times \sum_{p_n=0}^{p_{n-1}} \sum_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-p_n} \frac{(-1)^{q_{n-1}} (2x_{n-1})^{p_{n-1}-p_n-q_{n-1}} a_{n-1}^{p_{n-1}-p_n+q_{n-1}}}{q_{n-1}!(p_{n-1}-p_n-q_{n-1})!} \sum_{q_n=0}^{p_n} \frac{(-1)^{q_n} (2x_n)^{p_n-q_n} a_n^{p_n+q_n}}{q_n!(p_n-q_n)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p_1=0}^k \sum_{q_1=0}^{k-p_1} \dots \sum_{p_{n-1}=0}^{p_{n-1}} \sum_{q_{n-1}=0}^{p_{n-1}-p_n} \sum_{q_n=0}^{p_n} \left(\frac{n}{2}\right)_k \frac{(-1)^{q_1} (2x_1)^{k-p_1-q_1} a_1^{k-p_1+q_1}}{q_1!(k-p_1-q_1)!} \dots \frac{(-1)^{q_n} (2x_n)^{p_n-q_n} a_n^{p_n+q_n}}{q_n!(p_n-q_n)!}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Vamos fazer as seguintes substituições em (3.11):

$$\begin{aligned}
p_n + q_n &= m_n, & p_{n-1} - p_n + q_{n-1} &= m_{n-1}, \\
q_n &= j_n, & q_{n-1} &= j_{n-1}, \\
p_n - q_n &= m_n - 2j_n, & p_{n-1} - p_n - q_{n-1} &= m_{n-1} - 2j_{n-1}, \\
q_n &= 0, \dots, p_n, & q_{n-1} &= 0, \dots, p_{n-1}, \\
j_n &= 0, \dots, \lfloor \frac{m_n}{2} \rfloor, & j_{n-1} &= 0, \dots, \lfloor \frac{m_{n-1}}{2} \rfloor, \\
&\vdots \\
p_1 - p_2 + q_2 &= m_2, & k - p_1 + q_1 &= m_1, \\
q_2 &= j_2, & q_1 &= j_1, \\
p_1 - p_2 - q_2 &= m_2 - 2j_2, & k - p_1 - q_1 &= m_1 - 2j_{n-1}, \\
q_2 &= 0, \dots, p_1 - p_2, & q_1 &= 0, \dots, k - p_1, \\
j_2 &= 0, \dots, \lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor, & j_1 &= 0, \dots, \lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor.
\end{aligned}$$

Como $k = m_1 - j_1 + p_1 = m_1 - j_1 + m_2 - j_2 + p_2 = \dots = m_1 - j_1 + m_2 - j_2 + \dots + m_n - j_n$, então $k = 0, \dots, \infty \rightarrow \sum_{i=1}^n m_i = 0, \dots, \infty$. Daí, como $\mu = m_1 + \dots + m_n$, $j = j_1 + \dots + j_n$ e $i = 1, \dots, n$ em (3.11), temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \binom{n}{\mu-j} (-1)^j \frac{(2x_1)^{m_1-2j_1} a_1^{m_1}}{(m_1-2j_1)! j_1!} \frac{(2x_2)^{m_2-2j_2} a_2^{m_2}}{(m_2-2j_2)! j_2!} \dots \frac{(2x_{n-1})^{m_{n-1}-2j_{n-1}} a_{n-1}^{m_{n-1}}}{(m_{n-1}-2j_{n-1})! j_{n-1}!} \frac{(2x_n)^{m_n-2j_n} a_n^{m_n}}{(m_n-2j_n)! j_n!} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(\frac{n}{2})_{\mu-j} (-1)^j (2x_1)^{m_1-2j_1} (2x_2)^{m_2-2j_2} \dots (2x_{n-1})^{m_{n-1}-2j_{n-1}} (2x_n)^{m_n-2j_n}}{(m_1-2j_1)! (m_2-2j_2)! \dots (m_{n-1}-2j_{n-1})! (m_n-2j_n)! j_1! j_2! \dots j_{n-1}! j_n!}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(\frac{n}{2})_{\mu-j} (-1)^j (2x_1)^{m_1-2j_1} \dots (2x_n)^{m_n-2j_n}}{(m_1-2j_1)! \dots (m_n-2j_n)! j_1! \dots j_n!}.$$

Portanto,

$$V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(\frac{n}{2})_{\mu-j} (-1)^j (2x_1)^{m_1-2j_1} \dots (2x_n)^{m_n-2j_n}}{(m_1-2j_1)! \dots (m_n-2j_n)! j_1! \dots j_n!},$$

ou seja,

$$V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = \binom{n}{2}_{\mu} 2^{\mu} x^{m_1} \dots x^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j (2x_1)^{-2j_1} \dots (2x_n)^{-2j_n}}{(\frac{n}{2} + \mu - j)_j (m_1-2j_1)! \dots (m_n-2j_n)! j_1! \dots j_n!}. \quad (3.12)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
& 2^\mu \left(\frac{n}{2}\right)_\mu x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-m_1}{2}\right)_{j_1} \left(\frac{1-m_1}{2}\right)_{j_1} \cdots \left(\frac{-m_n}{2}\right)_{j_n} \left(\frac{1-m_n}{2}\right)_{j_n}}{m_1! \cdots m_n! j_1! \cdots j_n! \left(-\frac{n}{2} - \mu + 1\right)_j} \frac{1}{x_1^{2j_1}} \cdots \frac{1}{x_n^{2j_n}} \\
&= 2^\mu \left(\frac{n}{2}\right)_\mu x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(-m_1)_{2j_1} \cdots (-m_n)_{2j_n} x_1^{-2j_1} \cdots x_n^{-2j_n}}{2^{2j_1} \cdots 2^{2j_n} m_1! \cdots m_n! j_1! \cdots j_n! \left(-\frac{n}{2} - \mu + 1\right)_j} \\
&= 2^\mu \left(\frac{n}{2}\right)_\mu x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{2j} m_1! \cdots m_n! (2x_1)^{-2j_1} \cdots (2x_n)^{-2j_n}}{(m_1 - 2j_1)! \cdots (m_n - 2j_n)! m_1! \cdots m_n! j_1! \cdots j_n! \left(-\frac{n}{2} - \mu + 1\right)_j} \\
&= 2^\mu \left(\frac{n}{2}\right)_\mu x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} \sum_{j_i=0}^{\lfloor \frac{m_i}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j (2x_1)^{-2j_1} \cdots (2x_n)^{-2j_n}}{\left(\frac{n}{2} + \mu - j\right)_j (m_1 - 2j_1)! \cdots (m_n - 2j_n)! j_1! \cdots j_n!}
\end{aligned}$$

Logo, pela última igualdade acima e por (3.12), concluímos a demonstração. $\square$

Nota-se que a demonstração anterior é semelhante à realizada na Propriedade 2.2.6, que mostra, a partir da função geratriz dos polinômios $V_m(x)$, a função hipergeométrica dos polinômios ortogonais de Legendre.

3.3.1 Ortogonalidade

Os polinômios $V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$ são ortogonais com relação à função peso $\mathbf{W}(x_1, \dots, x_n) = 1$, na região $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 \geq 0\}$.

Para provar a ortogonalidade desses polinômios, primeiramente vamos mostrar, no lema a seguir, que os polinômios harmônicos e homogêneos $\mathbf{P}_\mu$ e $\mathbf{P}_{\mu'}$ são ortogonais em B^n . Daí, provaremos a ortogonalidade de $V_{m_1, \dots, m_n}$ utilizando a relação existente entre esses polinômios e $\mathbf{P}_\mu$.

Os polinômios harmônicos e homogêneos são dados na seção 1.6 e algumas de suas relações estão no início da seção 3.3.

Lema 3.3.1 *Sejam $\mathbf{P}_\mu(x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{P}_{\mu'}(x_1, \dots, x_n)$ polinômios harmônicos e homogêneos. Se $\mu \neq \mu'$, então*

$$\int_{B^n} \mathbf{P}_\mu(x_1, \dots, x_n) \mathbf{P}_{\mu'}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0. \quad (3.13)$$

Demonstração: Sendo $\mathbf{P}_\mu$ um polinômio harmônico, ele satisfaz à equação de Laplace, ou

seja, $\Delta \mathbf{P}_\mu = 0$. Daí, pelo Teorema de Green e pelo Lema 2.2.4, dados em [5], temos

$$\int_{S^{n-1}} \left(\frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial N} \mathbf{P}_{\mu'} - \frac{\partial \mathbf{P}_{\mu'}}{\partial N} \mathbf{P}_\mu \right) d\omega = \int_{B^n} (\mathbf{P}_{\mu'} \Delta \mathbf{P}_\mu - \mathbf{P}_\mu \Delta \mathbf{P}_{\mu'}) dx_1 \cdots dx_n = 0, \quad (3.14)$$

onde $S^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ e $\frac{\partial}{\partial N}$ denota a derivada normal. Em S^{n-1} , temos

$$\frac{\partial}{\partial N} \mathbf{P}_\mu = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial x_i}.$$

Daí, como $\mathbf{P}_\mu$ é um polinômio homogêneo, $\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \mathbf{P}_\mu}{\partial x_i} = \mu \mathbf{P}_\mu$. Logo, por (3.14), segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S^{n-1}} (\mu \mathbf{P}_\mu \mathbf{P}_{\mu'} - \mu' \mathbf{P}_{\mu'} \mathbf{P}_\mu) d\omega \\ &= (\mu - \mu') \int_{B^n} \mathbf{P}_{\mu'} \mathbf{P}_\mu dx_1 \cdots dx_n. \end{aligned}$$

Assim, se $\mu \neq \mu'$,

$$\int_{B^n} \mathbf{P}_{\mu'} \mathbf{P}_\mu dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

□

Enfim, mostraremos a relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre em várias variáveis.

Teorema 3.3.1 *Os polinômios de Legendre em n variáveis satisfaz à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\int_{B^n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) V_{m'_1, \dots, m'_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0, \quad (3.15)$$

se $m_1 + \cdots + m_n \neq m'_1 + \cdots + m'_n$.

Demonstração: De (3.13), sabemos que os polinômios harmônicos e homogêneos são ortogonais com relação à função peso $\mathbf{W}(x_1, \dots, x_n) = 1$ na região B^n . No início desta seção, foi mostrada a relação entre esses polinômios e os polinômios ortogonais de Legendre, onde

$$\mathbf{P}_\mu = Y_\mu = \sum_{k=0}^{\mu} (\mathbb{X}_n)^{\frac{k}{2}} \mathbf{Z}_\mu^{(k)}(x_1, \dots, x_n) [A_k e^{ki\varphi} + B_k e^{-ki\varphi}],$$

sendo $\mathbf{Z}_\mu^{(k)}(x_1, \dots, x_n)$ um polinômio de grau total μ e A_k, B_k constantes. Também já vimos que, para $k = 0$, o termo independente de $\mathbf{P}_\mu$ é o polinômio de Legendre de grau μ . Assim, sendo $\mu = m_1 + \dots + m_n$,

$$\mathbf{P}_\mu = V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) + \dots.$$

Daí, por (3.13), se $\mu \neq \mu'$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B^n} \mathbf{P}_\mu(x_1, \dots, x_n) \mathbf{P}_{\mu'}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{B^n} (V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) + \dots) (V_{m'_1, \dots, m'_n}(x_1, \dots, x_n) + \dots) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{B^n} (V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) V_{m'_1, \dots, m'_n}(x_1, \dots, x_n) + \dots) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{B^n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) V_{m'_1, \dots, m'_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \dots. \end{aligned}$$

Logo, se $m_1 + \dots + m_n \neq m'_1 + \dots + m'_n$,

$$\int_{B^n} V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) V_{m'_1, \dots, m'_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

□

3.3.2 Algumas propriedades

Em uma variável, a relação de recorrência de três termos é definida para um polinômio de grau m com relação aos polinômios de graus $m-1$ e $m-2$. No caso de várias variáveis, esta relação é dada para um polinômio de grau total $\mu = m_1 + \dots + m_i + \dots + m_n$, onde apenas um dos índices m_i sofre variação, ou seja, a relação de recorrência é dada para $\mathbf{P}_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$, com relação a $\mathbf{P}_{m_1, \dots, m_{i-1}, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$ e $\mathbf{P}_{m_1, \dots, m_{i-2}, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Daremos, a seguir, a relação de recorrência de três termos para os polinômios ortogonais de Legendre em várias variáveis.

Proposição 3.3.3 (*Relação de recorrência de três termos*) Para $m_i \geq 0$, com $i = 1, \dots, n$,

temos

$$\begin{aligned} \mu V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) &= (n + 2\mu - 2) \sum_{i=1}^n \xi(m_i - 1) x_i V_{m_1, \dots, m_i-1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &\quad - (n + \mu - 2) \sum_{i=1}^n \xi(m_i - 2) x_i V_{m_1, \dots, m_i-2, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde $\mu = m_1 + \dots + m_n$ e $\xi(q)$ é a Função Heaviside dada por

$$\xi(q) = \begin{cases} 1, & q \geq 0; \\ 0, & q < 0. \end{cases}$$

Demonstração: Seja $G_\mu^{\frac{n}{2}}(x)$ o polinômio de Gegenbauer de grau μ , definido pela fórmula de Rodrigues em (2.21) com $\lambda = \frac{n}{2}$. A função geratriz (2.22), neste caso, é

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} t^\mu G_\mu^{\frac{n}{2}}(x)$$

e a relação de recorrência de três termos, agora, é dada por

$$\mu G_\mu^{\frac{n}{2}}(x) = (n + 2\mu - 2)x G_{\mu-1}^{\frac{n}{2}}(x) - (n + \mu - 2)G_{\mu-2}^{\frac{n}{2}}(x).$$

Fazendo em (3.9) as mudanças $a^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2$ e $ax = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, temos

$$\left(\sqrt{1 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2} \right)^{-n} = (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} a^\mu G_\mu^{\frac{n}{2}}(x)$$

e

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \left(\sqrt{1 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2} \right)^{-n} \\ &= (1 - 2ax + a^2)^{-\frac{n}{2}} = \sum_{\mu=0}^{\infty} (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} G_\mu^{\frac{n}{2}} \left(\frac{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \right). \end{aligned}$$

Daí, comparando os termos dos somatórios acima, conclui-se que

$$\sum_{\sum m_k = \mu} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = (a_1^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} G_\mu^{\frac{n}{2}} \left(\frac{a_1x_1 + \dots + a_nx_n}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \right). \quad (3.16)$$

Assim, retomando a relação de recorrência de $G_\mu^{\frac{n}{2}}(x)$, utilizando (3.16) e multiplicando ambos

os lados por $(a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}}$, obtemos

$$\begin{aligned} & \mu(a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} G_{\mu}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \right) \\ &= [n + 2(\mu - 1)](a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}-1} G_{\mu-1}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \right) \\ & - (n + \mu - 2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)^{\frac{\mu}{2}} G_{\mu-2}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{\sum m_i = \mu} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) \\ &= [n + 2(\mu - 1)](a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n) \sum_{\sum m_i = \mu-1} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) \\ & - (n + \mu - 2)(a_1^2 + \cdots + a_n^2) \sum_{\sum m_i = \mu-2} a_1^{m_1} \cdots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Observando, na série acima, os coeficientes de a_k , $k = 1, \dots, n$, vemos que

$$\begin{aligned} \mu V_{m_1, \dots, m_i, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) &= (n + 2\mu - 2) \sum_{i=1}^n \xi(m_i - 1) x_i V_{m_1, \dots, m_i-1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) \\ & - (n + \mu - 2) \sum_{i=1}^n \xi(m_i - 2) x_i V_{m_1, \dots, m_i-2, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

onde $\mu = m_1 + \cdots + m_n$, $\xi(q) = 1$, se $q \geq 0$ ou $\xi(q) = 0$, se $q < 0$. □

Observação 3.3.1 *As condições iniciais para a relação de recorrência podem ser obtidas por (3.10).*

3.4 Polinômios ortogonais de Gegenbauer em várias variáveis

Para obter os polinômios ortogonais de Gegenbauer em várias variáveis, vamos partir dos polinômios ortogonais de Legendre em várias variáveis.

Seja $V_{m_1, \dots, m_{n+s-1}}(x_1, \dots, x_{n+s-1})$ um polinômio ortogonal de Legendre com $n + s - 1$ variáveis. Ao tomarmos, neste polinômio, os índices m_{n+1} até m_{n+s-1} nulos, ou seja, $m_{n+1} = \cdots = m_{n+s-1} = 0$, teremos um polinômio que não depende de $x_{n+1}, \dots, x_{n+s-1}$. Assim, denotamos

$$V_{m_1, \dots, m_n, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_{n+s-1}) = G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.17)$$

Note que, para $s = 1$, $G_{m_1, \dots, m_n}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) = V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Vamos mostrar que $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$ é uma generalização dos polinômios ortogonais de Gegenbauer $G_{\mu}^{\frac{s}{2}}(x)$.

Substituindo λ por $\frac{s}{2}$ em (2.21), a fórmula de Rodrigues de $G_{\mu}^{\frac{s}{2}}(x)$ é

$$G_{\mu}^{\frac{s}{2}}(x) = \frac{(-1)^{\mu}(s)_{\mu}}{\left(\frac{s+1}{2}\right)_{\mu} 2^{\mu} \mu!} (1-x^2)^{\frac{1-s}{2}} \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}} [(1-x^2)^{\frac{s-1}{2} + \mu}],$$

com $s > -1$, $-1 \leq x \leq 1$. Neste caso, a função peso é dada por $w(x) = (1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}$ e

$$G_{\mu}^{\frac{s}{2}}(x) = 2^{\mu} \left(\frac{s}{2}\right)_{\mu} \frac{x^{\mu}}{\mu!} F\left(-\frac{\mu}{2}, \frac{1-\mu}{2}; 1 - \frac{s}{2} - \mu; \frac{1}{x^2}\right). \quad (3.18)$$

A seguir, daremos algumas propriedades dos polinômios $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$, que serão demonstradas utilizando como ferramenta os polinômios ortogonais de Legendre em várias variáveis.

Proposição 3.4.1 *Os polinômios $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$ são dados pela função geratriz*

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) = (1 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{(n+s-1)}{2}}.$$

Demonstração: Adicionando, em (3.9), $s-1$ variáveis com $m_{n+1}, \dots, m_{n+s-1}$ nulos, temos

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} a_{n+1}^0 \dots a_{n+s-1}^0 V_{m_1, \dots, m_n, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_{n+s-1}) \\ &= \sum_{\mu=0}^{\infty} a_1^{m_1} \dots a_n^{m_n} V_{m_1, \dots, m_n, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_{n+s-1}) \\ &= (1 - 2a_1x_1 - \dots - 2a_nx_n + a_1^2 + \dots + a_n^2)^{-\frac{(n+s-1)}{2}}. \end{aligned}$$

O que demonstra o resultado. □

Proposição 3.4.2 *A função hipergeométrica de $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$ é*

$$\begin{aligned} & G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= 2^\mu \left(\frac{n+s-1}{2} \right)_\mu \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \\ & \times F_B \left[-\frac{m_1}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \dots, \frac{1-m_n}{2}; -\mu - \frac{(n+s-3)}{2}; \frac{1}{x_1^2}, \dots, \frac{1}{x_n^2} \right]. \end{aligned}$$

Demonstração: Em (3.10), vamos substituir n por $n+s-1$. Assim,

$$-\mu - \frac{(n+s-1)}{2} + 1 = -\mu - \frac{(n+s-3)}{2}$$

e

$$\begin{aligned} & G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) \\ &= 2^\mu \left(\frac{n+s-1}{2} \right)_\mu \frac{x_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \\ & \times F_B \left[-\frac{m_1}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \dots, \frac{1-m_n}{2}; -\mu - \frac{(n+s-3)}{2}; \frac{1}{x_1^2}, \dots, \frac{1}{x_n^2} \right]. \end{aligned}$$

□

Observa-se que a função hipergeométrica de $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$ é uma extensão da função (3.18) em uma variável.

3.4.1 Ortogonalidade

Os polinômios $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$ são ortogonais com respeito à função peso $\mathbf{W}(x_1, \dots, x_n) = (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{\frac{s-1}{2}}$ na região $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2 \geq 0\}$.

Proposição 3.4.3 *A relação de ortogonalidade dos polinômios de Gegenbauer em n variáveis é dada por*

$$\int_{B_n} (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{\frac{s-1}{2}} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) G_{m'_1, \dots, m'_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0,$$

se $m'_1 + \cdots + m'_n = m_1 + \cdots + m_n$.

Demonstração: Ao tomarmos $V_{m_1, \dots, m_{n+s-1}}(x_1, \dots, x_{n+s-1})$ com $m_i = 0, i = n+1, \dots, n+s-1$, por (3.15), temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B^{n+s-1}} V_{m_1, \dots, m_n, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_{n+s-1}) V_{m'_1, \dots, m'_n, 0, \dots, 0}(x_1, \dots, x_{n+s-1}) dx_1 \cdots dx_n \cdots dx_{n+s-1} \\ &= \int_{B^{n+s-1}} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) G_{m'_1, \dots, m'_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n dx_{n+1} \cdots dx_{n+s-1}. \end{aligned}$$

Além disso, pelas equações dadas no apêndice A do livro [3], segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B^{n+s-1}} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) G_{m'_1, \dots, m'_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n dx_{n+1} \cdots dx_{n+s-1} \\ &= V_{s-1}(B^{s-1}) \int_{B^n} (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{\frac{s-1}{2}} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) G_{m'_1, \dots, m'_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n, \end{aligned}$$

onde $V_{s-1}(B^{s-1}) = \frac{\pi^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma(\frac{s-1}{2} + 1)}$ é o volume da bola unitária. Logo,

$$\int_{B^n} (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{\frac{s-1}{2}} G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) G_{m'_1, \dots, m'_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

□

Observe que a função peso de $G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}$ é uma generalização da função peso de $G_{\mu}^{\frac{s}{2}}(x)$, dada no início da seção 3.4.

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos alguns polinômios ortogonais em várias variáveis, observando a analogia existente entre as propriedades desses polinômios e os equivalentes em uma variável. Essa semelhança também pode ser notada nas demonstrações.

Tomando como base o livro “Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynomes D’Hermite” de P. Appell e Kampé de Fériét, estudamos os polinômios ortogonais de Jacobi em duas variáveis e os polinômios ortogonais de Legendre e de Gegenbauer em várias variáveis. Foram demonstradas algumas propriedades desses polinômios, tais como as funções hipergeométricas pelas quais eles são obtidos, a ortogonalidade, entre outras.

Para generalizar os polinômios ortogonais de Jacobi, primeiramente fizemos uma mudança de variáveis que levou o intervalo de ortogonalidade desses polinômios de $[-1, 1]$ para $[0, 1]$. Daí, estendemos os polinômios ortogonais de Jacobi para n variáveis, tendo como região de ortogonalidade o simplex.

Um exemplo da analogia existente entre esses polinômios para o caso de duas variáveis é a fórmula de Rodrigues. Em uma variável essa fórmula é dada por

$$J_m(\alpha, \gamma, x) = \frac{x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha}}{(\gamma)_m} \frac{d^m}{dx^m} [x^{\gamma+m-1}(1-x)^{\alpha-\gamma+m}].$$

Em duas variáveis, os polinômios ortogonais de Jacobi são dados pela fórmula análoga à fórmula de Rodrigues

$$J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y) = \frac{x^{1-\gamma}y^{1-\gamma'}}{(\gamma)_m(\gamma')_n} (1-x-y)^{\gamma+\gamma'-\alpha} \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} [x^{\gamma-1+m}y^{\gamma'-1+n}(1-x-y)^{\alpha-\gamma-\gamma'+m+n}].$$

Nas duas equações acima, observa-se claramente a relação existente entre J_m e $J_{m,n}$.

No caso dos polinômios de Legendre e de Gegenbauer, a extensão para n variáveis é

ortogonal na bola unitária.

Uma das demonstrações mais interessantes dos polinômios de Legendre está dada na Proposição 3.3.2, onde a função hipergeométrica para estes polinômios em várias variáveis é dada por

$$V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n) = 2^\mu \binom{n}{\mu} \frac{x_1^{m_1}}{\mu m_1!} \cdots \frac{x_n^{m_n}}{m_n!} \times F_B \left(-\frac{m_1}{2}, \dots, -\frac{m_n}{2}, \frac{1-m_1}{2}, \dots, \frac{1-m_n}{2}; -\frac{n}{2} - \mu + 1; \frac{1}{x_1^2}, \dots, \frac{1}{x_n^2} \right).$$

A sequência lógica desta demonstração é a mesma da demonstração da Propriedade 2.2.6, onde a função hipergeométrica para uma variável, é dada por

$$V_m(x) = 2^m \binom{1}{m} \frac{x^m}{m!} F \left(\frac{-m}{2}, \frac{1-m}{2}; \frac{1}{2} - m; \frac{1}{x^2} \right).$$

Obviamente, em várias variáveis, existe uma dificuldade maior para se fazer a demonstração, devido à quantidade de índices que surgem durante o desenvolvimento da mesma.

Os polinômios de Gegenbauer são obtidos através dos polinômios de Legendre em várias variáveis. Estes polinômios são ortogonais com relação à função peso

$$w(x_1, \dots, x_n) = (1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2)^{\frac{s-1}{2}}.$$

Notamos que esta função peso é uma generalização para o caso de uma variável dos polinômios de Gegenbauer com $\lambda = \frac{s}{2}$, que é

$$w(x) = (1 - x^2)^{\frac{s-1}{2}}.$$

Também tivemos como objetivo estudar uma outra forma de mostrar propriedades de alguns dos polinômios ortogonais clássicos em várias variáveis além da forma matricial utilizada por C. F. Dunkl e Y. Xu em [5]. Esperamos que este trabalho possa colaborar com futuros estudos a cerca dos temas aqui abordados.

Glossário

$(a)_n$	- símbolo de Pochhammer
$\lfloor \lambda \rfloor$	- maior inteiro menor ou igual a λ
Δ	- operador Laplaciano
$F(a, b; c; x)$	- função de Gauss
$B(x, y)$	- função Beta
B^n	- bola unitária em $\mathbb{R}^n$
F_B	- uma função hipergeométrica em várias variáveis
F_2	- uma função hipergeométrica em duas variáveis
$G_m^\lambda(x)$	- polinômios ortogonais de Gegenbauer de grau m com parâmetro λ
$G_{m_1, \dots, m_n}^{(s)}(x_1, \dots, x_n)$	- polinômios ortogonais de Gegenbauer em n variáveis de grau total $m_1 + \dots + m_n$ com parâmetro s
$H_m(x)$	- polinômios ortogonais de Hermite de grau m
$J_m(\alpha, \gamma, x)$	- polinômios ortogonais de Jacobi de grau m no intervalo $[0, 1]$ com parâmetros α e γ
$J_{m,n}(\alpha, \gamma, \gamma', x, y)$	- polinômios ortogonais de Jacobi em duas variáveis de grau total $m + n$ com parâmetros α, γ e γ'
$L_m^{(\alpha)}(x)$	- polinômios ortogonais de Laguerre de grau m com parâmetro α
$P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x)$	- polinômios ortogonais de Jacobi de grau m com parâmetros $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$
$\{P_m(x)\}_{m=0}^\infty$	- sequência de polinômios ortogonais
$\mathbf{P}_\mu(\mathbf{x})$	- polinômio de grau total μ em várias variáveis
S^{n-1}	- esfera unitária em $\mathbb{R}^n$
$T_m(x)$	- polinômios ortogonais de Chebyshev de 1ª espécie de grau m
T^n	- simplex em $\mathbb{R}^n$
$U_m(x)$	- polinômios ortogonais de Chebyshev de 2ª espécie de grau m
$V_m(x)$	- polinômios ortogonais de Legendre de grau m
$V_{m_1, \dots, m_n}(x_1, \dots, x_n)$	- polinômios ortogonais de Legendre em n variáveis de grau total $m_1 + \dots + m_n$
$V_n(B^n)$	- volume da bola unitária em $\mathbb{R}^n$
$w(x)$	- função peso em uma variável

$\tilde{w}(x)$	- função peso dos polinômios $P_m^{\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}}(x)$
$\mathbf{W}(\mathbf{x})$	- função peso em várias variáveis
$\mathbf{x}$	- n-upla em $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{x}^\alpha$	- monômio em várias variáveis, com $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$
Y_μ	- função hiperesférica zonal
$\Gamma(x)$	- função Gama
δ_{mn}	- delta de Kronecker
κ_m	- coeficiente do termo de maior grau do polinômio de grau m

Referências Bibliográficas

- [1] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [2] P. Appell, J. Kampé de Fériét, *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques - Polynomes D'Hermite*, Ed. Gauthuer-Villars et C^{ie}, Paris, 1926.
- [3] S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [4] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Serie Mathematics and its Applications v. 13, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [5] C. F. Dunkl, Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [6] R. Koekoek, P. A. Lesky, R. F. Swarttouw, *Hypergeometric Orthogonal Polynomials and Their q -Analogues*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [7] T.H. Koornwinder, *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials*, Theory and Applications of Special Functions, 435-495, ed. R.A. Askey, Academic Press, New York, 1975.
- [8] N. N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Dover Publ., New York, 1972.
- [9] P. K. Suetin, *Orthogonal Polynomials in Two Variables*, Analytical Methods and Special Functions, v. 3 , Gordon and Breach, Russia, 1988.
- [10] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, v. 23, 4th ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Providence, RI, 1975.

Índice Remissivo

- Bola unitária, 44
- Coordenadas zonais, 54
- Delta de Kronecker, 27
- Equação de Laplace, 23
- Função
 - Beta, 15
 - de Gauss, 17
 - Gama, 13
 - geratriz, 27
 - harmônica, 23
 - Heaviside, 64
 - homogênea, 23
 - peso em uma variável, 26
 - peso em várias variáveis, 43
- Grau total, 22
- Monômio em várias variáveis, 22
- Multi-índice, 22
- Ordem lexicográfica, 22
- Polinômio homogêneo, 23
- Polinômios
 - em várias variáveis, 22
 - ortogonais de Gegenbauer em várias variáveis, 65
 - ortogonais de Jacobi no intervalo $[0,1]$, 29
 - ortogonais de Legendre, 33
 - ortogonais de Legendre em várias variáveis, 54
 - ortogonais na reta real, 25
 - ortogonais de Chebyshev de 1ª espécie, 38
 - ortogonais de Chebyshev de 2ª espécie, 39
 - ortogonais de Gegenbauer, 37
 - ortogonais de Hermite, 41
 - ortogonais de Jacobi, 28
 - ortogonais de Jacobi em duas variáveis, 44
 - ortogonais de Laguerre, 40
- Processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, 27
- Produto tensor, 43
- Séries hipergeométricas, 17
 - em duas variáveis, 20
 - em várias variáveis, 21
- Símbolo de Pochhammer, 15
- Simplex, 44
- Volume da bola unitária, 68