



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

TESE DE DOUTORAMENTO

IFT-T.002/97

**Estudo de Flutuações Estatísticas na Transição
Caos-Ordem**

Claudia Ianes Barbosa

Orientador

Prof. Dr. Celso Luiz Lima



Junho 1997

Agradecimentos

- ao Marcus Aguiar, Ricardo Egydio, Bajay, Otaviano Helene. Maurício Porto Pato, Mahir Hussein e Caio Lewenkopf pela paciência, incentivo e pelas discussões e sugestões ao longo destes anos de trabalho;

- à Maísa, Marcelão e Kokubun pelas valiosas discussões e pelo incentivo sempre presente nas mensagens de carinho, mesmo quando à distância;

- ao Jaime, Christiane, Kita, George, Samuel e aos colegas de sala. Chico, Fernando e Clisthenis. pela amizade:

- ao Eduardo Gregores pela ajuda com o LATEX:

- ao Dimiter, pelos muitos bons momentos e por tudo o que me ensinou;

- ao Galetti e ao Pimentel pelo carinho, apoio e incentivo. principalmente nos momentos mais difíceis:

- ao Celso pela orientação, pela amizade e pela compreensão. quando tudo isto foi necessário;

- à Regina e ao Frank pelo carinho e amizade;

- aos funcionários do instituto, Zezé. Lucimara. Walter. Sr. Antônio. Rosane. Wilma. Luzinete, Marcelo. sr. Jorge, sr. Laércio, sr. Francisco. Alexandre (Belov!), Meire. Marinha, Ana Luíza. Renata e Edna, pela paciência, amizade e pela disposição em ajudar:

- às “meninas”. Ana Célia. Aninha, Isabela. Izabelita. Léca. Taninha e Bia. amigas de muitos anos e dificuldades;

- ao Instituto de Física Teórica por ter me dado condições de desenvolver este trabalho:

- ao IFUSP, pelo uso de suas instalações ;

- aos amigos do FINPE pelo companheirismo ao longo destes anos;
- ao CCE-USP pela utilização do CRAY e ao pessoal de apoio pela ajuda com as dificuldades de cálculo numérico;
- à CAPES, DAAD e FAPESP pelo apoio financeiro;
- ao Daniel Klotzel pela competência profissional e pelo carinho num período difícil;
- to professor Achim Richter for his encouragement and the opportunities he offered me;
- to the friends from "Institut für Kernphysik", TH-Darmstadt (Germany) who made me feel at home when I was working there;
- to Giovanna, Adri, Simone, Pilly, Petra, Andreas, the little Florian, Sigrid, Herbert, Peter, Kerstin and all "Turner" for the friendship;
- to Henny, Bert, Dembo and Heiko, "the boys - the best";
- to Steffen;
- ao Ricardo, Karina, João, Paula, ao pequeno Pedro e a "quem mais chegar";
- ao meu Pai e a minha Mãe por terem sempre estado ao meu lado, mesmo quando isto não era fácil.

Il est bon que tout d'abord vous trouviez accès à une profession qui vous rende indépendant et vous donne une complète autonomie à tous égards. Attendez patiemment de voir si votre vie la plus intérieure se sent limitée par le cadre de cette profession. Je tiens cette dernière pour très difficile et très exigeant, car elle porte le poids de grandes conventions, et ne laisse guère de place à une conception personnelle des devoirs. Mais votre solitude, au couer même de conditions tout étrangères, sera votre appui, votre foyer, et c'est à partir d'elle que vous trouverez tous vos chemins.

(Rainer Maria Rilke, "Lettres à un jeune poète")

Resumo

O problema da descrição de sistemas na situação de transição caos-ordem, é estudado comparando-se os resultados fornecidos para a distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo, por cinco modelos correntes na literatura: a proposta de T. A. Brody, o modelo de M. V. Berry e M. Robnik, o de E. Caurier, B. Grammaticos e A. Ramani, o de G. Lenz e F. Haake, e o de M. S. Hussein e M. P. Pato. Essas descrições foram testadas e discutidas em três sistemas distintos, o oscilador quártico isotrópico, um conjunto de espectros experimentais nucleares e os bilhares de Bunimovich medidos pelo grupo do "Institut für Kernphysik", TH-Darmstadt (Alemanha). Em linhas gerais, os resultados obtidos sugerem que, com exceção do modelo de Caurier, Grammaticos e Ramani, todos os outros modelos são adequados para descrever as correlações de curto alcance entre os níveis, de modo que novos estudos sobre as correlações de longo alcance tornam-se necessários para distinguir qual a descrição mais adequada à situação de transição caos-ordem.

Palavras-chaves: caos, ordem, flutuações estatísticas, matrizes aleatórias.

Área de conhecimento: 1.05.04.00-1

Abstract

The problem concerning the description of systems in the chaos-order transition is studied by means of a comparison between the results of the nearest neighbor spacing distribution for five well known models proposed by: 1) T. A. Brody, 2) G. Lenz and F. Haake, 3) E. Caurier, B. Grammaticos and A. Ramani, 4) M. V. Berry and M. Robnik and 5) M. S. Hussein and M. P. Pato. These descriptions were tested and discussed in three different systems, the isotropic quartic oscillator, the *ensemble* of experimental nuclear spectra and the Bunimovich billiards measured by the group from "Institut für Kernphysik", TH-Darmstadt (Germany). In summary, the results suggest that all models provide good description for the short range correlations between levels, with exception of that by Caurier, Grammaticos and Ramani, and new studies concerning the description of long range correlations are necessary in order to decide which one is the correct description of the chaos-order transition.

Key words: chaos. order, statistical fluctuations, random matrices.

Índice

I	Introdução	3
II	Os Modelos	9
II.1	Flutuações Estatísticas e a Distribuição Poissoniana	9
II.2	O Ensemble Gaussiano Ortogonal	11
II.3	A Proposta de Brody	17
II.4	O Modelo de Berry e Robnik	19
II.5	O Modelo de Caurier, Grammaticos e Ramani	22
II.6	O Modelo de Lenz e Haake	24
II.7	O DGOE	26
III	O Oscilador Quártico	31
IV	O Espectro Nuclear	61
V	Os Bilhares Quânticos	68
VI	Considerações Finais e Perspectivas	78
A	Gráficos da Convergência do Oscilador Quártico	81
B	O Unfolding do Oscilador Quártico	88
C	Gráficos de NND para o Oscilador Quártico	107
D	Dados dos Nuclídeos	132

E Gráficos de NND para o Espectro Nuclear	139
F Gráficos de NND para os Bilhares	152
Referências Bibliográficas	161

Capítulo I

Introdução

No início da década de 50 o grande desafio da Física Nuclear era a descrição dos estados de energia mais alta do núcleo: os estados mais baixos já haviam sido satisfatoriamente descritos em termos de potenciais médios, mas esta descrição não funcionava adequadamente para as energias mais altas devido ao grande aumento da densidade de estados com a energia [1]. Segundo Wigner, esta densidade tornar-se-ia tão alta que uma descrição de cada estado individualmente perderia sentido, cabendo apenas uma descrição estatística.

Seguindo a sugestão de Wigner, Dyson propôs em 1962 [2] -[4] a “Teoria de Matrizes Aleatórias” (RMT)¹. Nesta teoria as propriedades estatísticas dos estados seriam adequadamente descritas por um *ensemble* de matrizes aleatórias escolhido convenientemente, sendo esta escolha orientada pelas simetrias do sistema em questão. Nestes trabalhos e nos seguintes [5], [6], Dyson e Mehta elaboraram, usando técnicas de teoria de grupos, os chamados “Ensembles Gaussianos”, quais sejam o Ensemble Gaussiano Ortogonal (GOE), Ensemble Gaussiano Unitário (GUE) e o Ensemble Gaussiano Simplético (GSE)², cujas características são apresentadas na figura I.1 [7]. Novos *ensembles* foram sendo posteriormente desenvolvidos para lidar com outras situações físicas ou como alternativa aos *ensembles* de Wigner, como é o caso dos *ensembles* circulares [36].

Finalmente, em 1982, a boa qualidade da descrição estatística dos estados de sistemas

¹A abreviação vem da expressão em inglês *Random Matrix Theory*, que é muito utilizada e por isso não foi modificada. Casos como este serão indicados por notas de rodapé.

²*Gaussian Orthogonal Ensemble*, *Gaussian Unitary Ensemble* e *Gaussian Symplectic Ensemble* respectivamente.

Invariância por reversão temporal	Momento angular	Invariância rotacional	Matriz hamiltoniana	Grupo canônico	Número de parâmetros reais independentes
Sim	Inteiro	–	Real simétrica	Ortogonal	$\frac{1}{2}N(N+1)$
Sim	Semi- -inteiro	Sim	Quaternion real	Simplético	$N(2N-1)$
Não	–	–	Hermitiana complexa	Unitário	N^2

Figura I.1: Propriedades de invariância do sistema e estrutura da correspondente matriz hamiltoniana.

nucleares pela RMT foi definitivamente estabelecida por R. U. Haq, A. Pandey e O. Bohigas [8].

Paralelamente a isto desenvolveu-se o conceito de caos clássico: certos sistemas físicos clássicos apresentavam na sua evolução temporal características bastante distintas das conhecidas até então, tais como a divergência exponencial de trajetórias vizinhas com a evolução temporal e a forte sensibilidade às condições iniciais [10]. Tais sistemas têm sido extensivamente estudados ao longo dos anos e hoje sabe-se que sistemas de dinâmica regular formam uma classe consideravelmente pequena, assim como sistemas totalmente caóticos. De fato, a grande maioria dos casos constitui-se de sistemas na situação intermediária, qual seja aquela em que órbitas caóticas dividem o espaço de fase com órbitas regulares.

Até 1977 os estudos de dinâmica faziam uso principalmente de técnicas semi-clássicas [12], quando então M. V. Berry e M Tabor [11] mostraram que sistemas clássicos regulares apresentavam histogramas de distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo (NND)³ (uma das grandezas tipicamente utilizadas pela RMT) fortemente poissonianos, enquanto os casos caóticos apresentavam comportamento similar àquele dos *ensembles* gaus-

³Nearest Neighbor Distribution.

sianos. Posteriormente, em 1984, O. Bohigas, M. -J. Giannoni e C. Schmit [13] mostraram que sistemas clássicos regulares tinham análogos quânticos cuja estatística de NND era poissoniana e, da mesma forma, sistemas classicamente caóticos, tinham análogos quânticos com NND gaussiana. Estava lançado o conceito de “caos quântico” e, mais do que isso, a RMT surgia como uma ferramenta natural para esta investigação.

Um pequeno comentário sobre a terminologia utilizada nesta tese: como as bases deste “caos quântico” ainda não estão bem estabelecidas⁴ é comum fazer-se referência a um sistema quântico de comportamento poissoniano como um sistema “do tipo Poisson”, “poissoniano” ou simplesmente regular, o mesmo acontecendo para os termos “gaussiano”, “do tipo GOE” (ou GUE ou GSE) ou caótico, para sistemas quânticos que apresentem flutuações estatísticas gaussianas. Este abuso de linguagem não foi evitado ao longo deste texto, visto fazer parte do jargão da área.

Os trabalhos de Bohigas, Berry, Giannoni, Robnik dentre outros, fortaleceram a crença de que sistemas caóticos, clássicos ou quânticos, devem apresentar flutuações estatísticas gaussianas, assim como os sistemas regulares devem ter estatística poissoniana, e esta crença foi tão fortemente estabelecida, que hoje o comportamento das flutuações é considerado um indicativo da presença ou ausência de caos em sistemas físicos.

A questão que surge naturalmente neste ponto diz respeito à descrição de sistemas na situação de transição entre a máxima caoticidade e a máxima regularidade, visto as distribuições gaussianas e a poissoniana só se aplicarem nestes limites, tendo sido propostos diversos modelos na tentativa de responder a esta pergunta. Dentre estes, tem-se a proposta de T. A. Brody [30], os modelos de M. V. Berry e M. Robnik [31], E. Caurier, B. Grammaticos, A. Ramani [32], G. Lenz e F. Haake [33] e M. S. Hussein e M. P. Pato [35].

A proposta de T. A. Brody foi publicada em 1973, anos antes da RMT começar a ser usada para descrever sistemas caóticos. Não se pode dizer que seja exatamente um modelo, visto a expressão para a NND ser obtida por meio de um *ansatz* sem conteúdo físico, mas é largamente utilizada pelo comportamento adequado das curvas obtidas, que são facilmente ajustadas aos dados. De fato, o interesse de Brody era obter uma grandeza que

⁴Recentemente surgiu a tendência de fazer-se referência a este fenômeno como “caologia quântica”, visto caos ser um conceito muito bem definido na física clássica [14].

medisse a chamada “repulsão de níveis”, caracterizada na NND pela baixa probabilidade de ocorrência de espaçamentos pequenos, não só para os casos gaussianos como também para as situações intermediárias, entre gaussiano e Poisson, sendo que o comportamento inverter-se-ia no limite poissoniano, quando então os pequenos espaçamentos seriam aqueles de maior probabilidade. Este comportamento foi largamente discutido na literatura (vide [36]), sendo que hoje tem-se como bem estabelecido que apenas sequências de níveis puras, isto é, aquelas de simetrias bem definidas, devam apresentar a citada repulsão. Isto explica porque, ao longo deste trabalho, tomou-se o cuidado de dessimetrizar convenientemente os três sistemas estudados.

Em 1984 Berry e Robnik [31] propuseram outra expressão para a NND de sistemas de dinâmica mista, obtida por meio de argumentos semi-clássicos: o espaço de fase do sistema é considerado como sendo constituído por duas partes independentes, uma associada a parte regular do espectro e outra a parte caótica, e o parâmetro do modelo mede a fração regular do espaço de fase. Já em 1990, Caurier, Grammaticos e Ramani [32] propuseram um modelo matricial simplificado que também fornecia uma expressão para NND e da mesma forma em 1991, com o modelo matricial de Lenz e Haake [33]. Mais recentemente, em 1993, Hussein e Pato propuseram um modelo matricial [35] cujo *ensemble* correspondente recebeu o nome de “Ensemble Gaussiano Ortogonal Deformado” (DGOE)⁵, graças ao qual não só a NND pode ser obtida, e dessa maneira podem ser estudadas as flutuações estatísticas do espectro de energias, mas também permite a análise do comportamento estatístico dos coeficientes dos autovetores. Este e outros aspectos do DGOE e dos outros modelos serão discutidos com mais detalhes nos próximos capítulos.

Nesta tese a qualidade da descrição dos cinco modelos acima apresentados foi testada em três situações diferentes. Na primeira, tomou-se o oscilador quártico isotrópico [15]

$$H = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{\beta(x^4 + y^4)}{4},$$

(β é um parâmetro) na sua versão quântica e determinou-se numericamente o espectro do sistema, que deve apresentar uma transição suave entre caos e ordem quando β é variado de

⁵*Deformed Gaussian Orthogonal Ensemble.*

0 a 1. A matriz hamiltoniana correspondente foi diagonalizada numericamente e o espectro obtido analisado segundo os cinco modelos a serem testados.

O segundo caso estudado foi o do conjunto de dados nucleares coletado por J. F. Shriner Jr., G. E. Mitchel e T. von Egidy [25], que foram organizados em grupos segundo número de massa, spin, paridade e deformação dos núcleos.

Finalmente no terceiro caso foram analisados os níveis de energia do bilhar de Bunimovich (ou tipo estádio) quântico, que nada mais é do que uma cavidade ressonante bidimensional submetida a fontes de microondas, níveis estes determinados experimentalmente pelo grupo do professor Achin Richter do “Institut für Kernphysik” da TH-Darmstadt, Alemanha (vide [42] e referências nela contidas). Estes bilhares costumam ser caracterizados pela razão entre o seu comprimento maior e o menor, conforme a ilustração I.2, sendo que

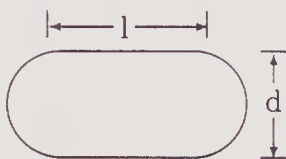


Figura I.2: Exemplo de um bilhar de Bunimovich.

o análogo clássico deste sistema apresenta comportamento regular quando esta razão tem valor nulo ou infinito e a situação de máxima caoticidade ocorre para o valor unitário.

Estes três sistemas constituem um campo de provas bastante amplo para as cinco descrições estudadas: o oscilador quártico e o bilhar de Bunimovich são sistemas cujos análogos clássicos apresentam uma dinâmica bastante conhecida e os sistemas nucleares são o berço original da RMT. No caso nuclear, os resultados obtidos com os cinco modelos também foram utilizados para inferir quais características destes sistemas poderiam ser responsáveis pelo comportamento caótico do espectro. Já no caso dos bilhares de Bunimovich, os dados recentemente obtidos para o acoplamento de dois destes bilhares podem trazer novas informações sobre o papel das simetrias na situação de transição entre caos e ordem.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo são apresentados os cinco modelos estudados e os cálculos para obter-se a expressão analítica para a NND

em cada caso são esquematizados; no segundo, terceiro e quarto capítulos são apresentados o oscilador quártico, os sistemas nucleares e os bilhares respectivamente, mostrando em cada caso a maneira pela qual os dados utilizados foram obtidos, como foram analisados e os resultados conseguidos. Comentários sobre estes resultados são tecidos ao final de cada capítulo e por fim, no último capítulo, os resultados são sumarizados e novas perspectivas são apresentadas, em particular, referentes à descrição de correlações de longo alcance no espectro. De modo a tornar a leitura do texto mais fluída, as figuras com os histograma de NND e as curvas referentes ao ajuste feito para cada modelo foram, em todos os casos analisados, colocadas em apêndices ao final da tese.

Capítulo II

Os Modelos

II.1 Flutuações Estatísticas e a Distribuição Poissoniana

Existem muitos exemplos até certo ponto cotidianos, que apresentam entre suas características flutuações estatísticas como as que serão aqui abordadas: uma sequência de números primos, o espectro de energia das ondas vibracionais na membrana de um tambor, a distribuição de automóveis num estacionamento, o espectro de energia de um sistema nuclear entre outros (vide [9] para alguns exemplos). Existem ainda muitas maneiras de caracterizar-se estas flutuações estatísticas e será apresentada a seguir aquela que foi aqui utilizada.

Considere-se por exemplo o caso de automóveis parados num estacionamento com vagas demarcadas; pode-se supor que o estacionamento não esteja completamente lotado, de modo que ainda existam vagas disponíveis. Estabelecendo-se uma direção e um sentido para a contagem, pode-se averiguar de vários modos como estão distribuídas as vagas remanescentes. Por exemplo, pode-se averiguar quantas vagas livres existem entre cada carro e o seguinte e montar-se um histograma com estes espaçamentos, ou definir-se um intervalo de, por exemplo, cinco vagas e verificar quantos automóveis estão parados a cada cinco vagas. As grandezas estatísticas aqui estudadas são análogas a estas, como por exemplo a chamada “distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo” (NND), que mede a distribuição média de espaçamentos entre eventos vizinhos numa sequência, seja ela uma sequência de carros, números primos ou níveis de energia. Em particular para

espectros de energia, as conclusões que podem ser obtidas destas grandezas são bastante ricas, como já foi dito na introdução. Conclusões a respeito do comportamento caótico de um sistema podem ser inferidas usando tais métodos estatísticos, reforçando os resultados obtidos através de métodos semi-clássicos.

Seja então o espectro de energia de um sistema físico qualquer. Pode-se montar a função escada dos níveis somando um à ordenada cada vez que um nível de energia aparece na sequência, sendo a energia a abscissa. De modo a tornar os resultados desta análise passível de comparação com resultados obtidos de outros sistemas, realiza-se o processo de *unfolding* dos dados¹. Basicamente, define-se a função escada do espectro como composta por duas partes, uma que descreve o seu comportamento médio e outra que descreve as flutuações estatísticas propriamente ditas; através de um mapeamento adequado, reescreve-se o espectro transformando-o em outro de espaçamento médio unitário, de modo que diferentes espectros apresentem entre si, de fato, uma única diferença, a parte flutuante da função escada.

Conforme o exposto acima, a função escada $N(E)$ pode então ser escrita

$$N(E) = N_{med}(E) + N_{flut}(E), \quad (II.1)$$

de modo que o novo espectro será dado por

$$E' = N_{med}(E). \quad (II.2)$$

Na prática, nem sempre a expressão que descreve o comportamento médio da função escada é conhecida, como é o caso do oscilador quártico isotrópico bidimensional, que será estudado no próximo capítulo. Neste caso o procedimento usual costuma ser a procura pela forma polinomial aproximada para $N_{med}(E)$, por ser relativamente simples e oferecer bons resultados.

¹O termo *unfolding* foi mantido em inglês por não existir tradução adequada para o português. Apesar da tradução literal “desdobramento” existir, o termo aqui não tem significação clara. Curiosamente, nos últimos anos, tem surgido na literatura a expressão alternativa “retificação do espectro”, que não foi entretanto utilizada por não estar ainda bem estabelecida entre a comunidade.

A partir do novo espectro E' determina-se a grandeza estatística desejada, que pode ser uma medida de correlações de curto ou longo alcance entre os níveis.

A NND é uma grandeza que mede correlações de curto alcance. Para obtê-la, determina-se a partir do espectro E' o histograma de ocorrência dos espaçamentos entre um nível e o seguinte no espectro. Novamente, de modo a tornar os resultados úteis para uma comparação com aqueles de outros sistemas, o histograma é normalizado de modo a ficar com área unitária.

As grandezas que medem correlações de longo alcance são em maior número, como por exemplo a estatística de Dyson-Mehta ou rigidez espectral e a função de agrupamento de N níveis² entre outras. As análises feitas neste trabalho enfocaram prioritariamente a distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo, mas comentários referentes à rigidez espectral serão apresentados no capítulo final.

Tais histogramas de espaçamentos do vizinho mais próximo foram primeiramente utilizados no contexto da Teoria de Matrizes Aleatórias, comparando-se seus resultados com as formas previstas para GOE, GUE e GSE (vide por exemplo [1] - [7]). Entretanto, em 1977, M. V. Berry e M. Tabor [11] mostraram que no caso de sistemas de osciladores harmônicos, as situações de dinâmica clássica regular eram fortemente poissonianas, isto é (vide figura II.1)

$$P(s) = e^{-s}. \quad (\text{II.3})$$

Atualmente, apesar de não existir uma determinação destes resultado a partir de primeiros princípios, tem-se como bem aceito que sistemas regulares clássicos, e por extensão quânticos, apresentam uma estatística de NND poissoniana. Por conseguinte, esta expressão será usada ao longo deste trabalho como indicação de um sistema de regular e vice-versa.

II.2 O Ensemble Gaussiano Ortogonal

²*N-level cluster function.*

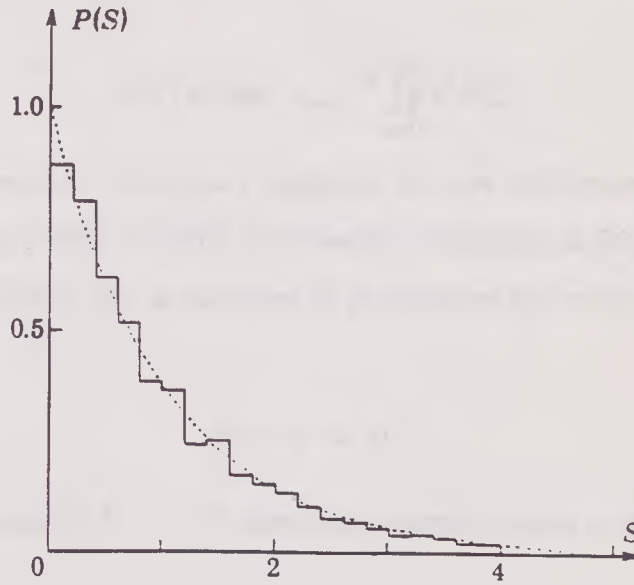


Figura II.1: Distribuição de espaçamentos para um sistema de osciladores de comportamento fortemente poissoniano, originalmente apresentada por M. V. Berry e M. Tabor em 1977 (vide texto).

No capítulo anterior mencionou-se que quando a RMT foi desenvolvida foram propostos três *ensembles* gaussianos para descrever a distribuição estatística de sistemas com diferentes propriedades de simetria (figura I.1). Também foi dito que sistemas de dinâmica totalmente caótica, clássicos ou quânticos, apresentam estatísticas como as dos *ensembles* gaussianos da RMT, ainda conforme as simetrias em questão. Assim, como os sistemas aqui estudados são invariantes por reversão temporal, a situação de máxima caoticidade deverá ser descrita em todos os casos pela estatística do “Ensemble Gaussiano Ortogonal” (GOE), que é apresentado a seguir com mais detalhes.

Inicialmente, define-se uma métrica apropriada no espaço de matrizes H como ([1], [7], [9])

$$ds^2 = \text{Tr} \delta H \delta H^\dagger = \sum_{\mu, \nu=1}^M g_{\mu\nu} \delta H_\mu H_\nu, \quad (\text{II.4})$$

onde M é o número de elementos da matriz. Assim, o elemento $d[H]$ fica definido como

$$d[H] = (\det g_{\mu\nu})^{1/2} \prod_{\mu=1}^M d[H]_{\mu}. \quad (\text{II.5})$$

Esta relação é geral e válida para qualquer um dos três *ensembles* gaussianos. Para obter então o elemento $d[H]$ do GOE, é necessário considerar as simetrias envolvidas, o que fornece, no caso do GOE, que as matrizes H procuradas são reais e simétricas [1]

$$H = H^* = H^T, \quad (\text{II.6})$$

tendo portanto apenas $N(N-1)/2$ elementos independentes fora da diagonal principal. Logo

$$ds^2 = \sum_{i=1}^N (\delta H_{ii})^2 + 2 \sum_{j>i \geq 1}^N (\delta H_{ij})^2 \quad (\text{II.7})$$

$$\Rightarrow d[H] = 2^{N(N-1)/4} \prod_{i=1}^N d[H]_{ii} \prod_{j>i \geq 1}^N d[H]_{ij}. \quad (\text{II.8})$$

De modo a definir o GOE é necessário agora considerar mais duas condições. A primeira garante que o *ensemble* é invariante sob toda transformação ortogonal, isto é

$$H' = W^T H W, \quad (\text{II.9})$$

onde W é uma matriz real ortogonal, de modo que a probabilidade de que exista uma matriz H no elemento de volume do espaço de matrizes $d[H]$, será invariante por transformações ortogonais

$$P(H') d[H]' = P(H) d[H], \quad (\text{II.10})$$

tal que todos os estados sejam igualmente prováveis. A questão de quão física é esta condição foi bastante discutida e a busca por alternativas deu origem a novos *ensembles*³.

³É o caso dos *ensembles* circulares de Dyson [1].

A segunda condição exige que os elementos de matriz H_{ij} sejam variáveis aleatórias independentes entre si. Esta condição é imposta apenas devido à dificuldade de se tentar estabelecer todas as correlações entre os diversos elementos, não contendo nenhum argumento físico em sua base.

No caso dos ensembles ortogonais a distribuição de probabilidades é da forma

$$P(H) \propto \exp \left(\frac{-\text{tr}(H^2)}{4\sigma^2} \right), \quad (\text{II.11})$$

onde à expressão II.11 falta uma constante de normalização e σ define a dispersão desta gaussiana.

Considere-se agora a questão da distribuição de probabilidades dos autovalores. O elemento no espaço de matrizes $d[H]$ pode ser escrito

$$d[H] = \prod_{i,j=1}^N d[H]_{ij} = J_N \prod_{i=1}^N dE_i \prod_{j=1}^{N(N-1)/2} dC_j, \quad (\text{II.12})$$

onde J_N é o jacobiano

$$J_N = \frac{\partial(H_{11}, H_{22}, \dots, H_{NN}, H_{12}, \dots, H_{N-1,N})}{\partial(E_1, E_2, \dots, E_N, C_1, C_2, \dots, C_{N(N-1)/2})}, \quad (\text{II.13})$$

E são os autovalores e C os coeficientes das autofunções. Este jacobiano pode ser decomposto em duas partes, uma dependente apenas dos autovalores e outra dependente apenas dos autovetores.

Lembrando que a matriz real simétrica pode ser diagonalizada por uma matriz real ortogonal

$$H = O E O^{-1} = O E O^T \quad (\text{II.14})$$

$$\Rightarrow H_{ij} = \sum_k E_k O_{ik} O_{jk}, \quad (\text{II.15})$$

de modo que

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial C_\mu} = \sum_k E_k \left(\frac{\partial O_{ik}}{\partial C_\mu} O_{jk} + O_{ik} \frac{\partial O_{jk}}{\partial C_\mu} \right). \quad (\text{II.16})$$

Multiplicando por $O_{ih}O_{jl}$, com $(l \geq h)$ e somando sobre i e j obtém-se

$$\sum_{i,j} \frac{\partial H_{ij}}{\partial C_\mu} O_{ih}O_{jl} = \sum_i \left(\frac{\partial O_{ih}}{\partial C_\mu} O_{il} E_h + \frac{\partial O_{il}}{\partial C_\mu} O_{ih} E_l \right), \quad (\text{II.17})$$

$$\sum_i \frac{\partial H_{ij}}{\partial C_\mu} O_{ih}O_{jl} + \sum_{j>i} \frac{\partial H_{ij}}{\partial C_\mu} (O_{ih}O_{jl} + O_{il}O_{jh}) = (E_h - E_l) \sum_i \frac{\partial O_{ih}}{\partial C_\mu} O_{il}, \quad (\text{II.18})$$

com

$$\sum_i \frac{\partial O_{il}}{\partial C_\mu} O_{ih} = - \sum_i \frac{\partial O_{ih}}{\partial C_\mu} O_{il} \quad (\text{II.19})$$

e

$$\sum_i O_{ih}O_{il} = \delta_{hl}. \quad (\text{II.20})$$

Derivando da mesma maneira em relação às componentes dos autovalores obtém-se

$$\sum_i \frac{\partial H_{ij}}{\partial E_k} O_{ih}O_{jl} + \sum_{j>i} \frac{\partial H_{ij}}{\partial E_k} (O_{ih}O_{jl} + O_{il}O_{jh}) = \delta_{hk}\delta_{lk}. \quad (\text{II.21})$$

Isto mostra que o jacobiano será um produto de duas partes, uma com dependência apenas dos autovalores e outra com dependência apenas dos coeficientes dos autovetores na forma

$$J_N = f(C) \prod_{j \geq i} |E_i - E_j|. \quad (\text{II.22})$$

Deste modo, a distribuição de probabilidades também será produto de duas partes, uma devida aos autovalores e outra aos autovetores,

$$P(H) = P(C) P(E)$$

e para obter a distribuição de probabilidades dos autovalores bastará integrar $P(H)$ nas componentes dos autovetores, obtendo-se finalmente

$$P(E) \propto \exp \left(-\alpha \sum_i E_i^2 \right) \prod_{j>i} |E_j - E_i|.$$

A constante de normalização é determinada da maneira usual

$$\int P(E) d(E) = 1. \quad (\text{II.23})$$

De maneira a obter uma expressão para a distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo é necessário realizar uma substituição de variáveis conveniente, isto é

$$(E_{i+1} - E_i) = s_i, \quad (E_{i+1} + E_i) = t_i \quad (\text{II.24})$$

e integrar na variável t . Entretanto, este cálculo torna-se impossível de ser realizado para matrizes grandes devido ao correspondente aumento no número de integrações a serem realizadas. Felizmente, os resultados obtidos para matrizes de tamanho 2 são bastante próximos daqueles obtidos nos casos limites de $N \rightarrow \infty$ (em particular para o caso do GOE, a razão entre o resultados para pequenos valores de s obtidos para matrizes de tamanho $N \rightarrow \infty$ e $N = 2$ é de aproximadamente 1.047 [7]).

Assim, finalmente, a expressão da NND para o GOE é dada por

$$P_{GOE}(s) = \frac{\pi}{2} s \exp \left(\frac{-\pi}{4} s^2 \right), \quad (\text{II.25})$$

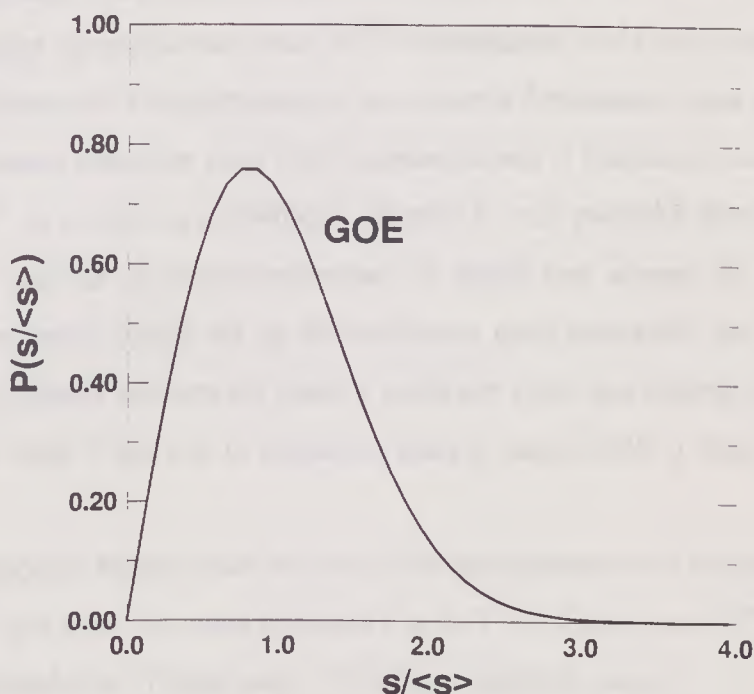


Figura II.2: Distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo para o GOE, obtida no caso 2×2 .

obtida para o caso $N = 2$ e com s médio igual a 1 (o comportamento de II.25 está ilustrado na figura II.2). A validade desta expressão foi diversas vezes testada, sempre com excelentes resultados, não só na descrição de sistemas nucleares, como também na descrição de sistemas na situação de máxima caoticidade [7] - [10].

É fácil imaginar qual a próxima questão a ser discutida: a da descrição de sistemas na situação de transição caos-ordem. Na tentativa de explicar esta transição, várias propostas foram feitas, utilizando técnicas da RMT ou métodos semi-clássicos, dentre os quais a de T. A. Brody [30], o modelo de M. V. Berry e M. Robnik [31], o modelo de E. Caurier, B. Grammaticos e A. Ramani [32], o de G. Lenz e F. Haake [33] e o “Ensemble Gaussiano Ortogonal Deformado”, proposto por M. S. Hussein e M. P. Pato [35], que serão apresentados a seguir.

II.3 A Proposta de Brody

Já alguns anos antes da proposta de M. V. Berry e M. Tabor em 1977 [11] de que sistemas de dinâmica regular apresentavam uma NND poissoniana, e de que sistemas de dinâmica caótica apresentavam um comportamento que sugeria fortemente uma distribuição GOE, sabia-se que sistemas descritos pelo GOE apresentavam o fenômeno conhecido como “repulsão de níveis”, já citado na introdução: mesmo a mais pequena perturbação dos níveis de energia deve quebrar as degenerescências, de modo que apenas no limite poissoniano pequenos espaçamentos devem ser os de ocorrência mais provável. Isto foi realmente verificado para um grande número de casos e pode ser visto nas figuras II.1 e II.2: a curva poissoniana tem valor 1 em $s = 0$, enquanto para a curva GOE o valor é nulo na mesma situação.

Algumas propostas foram feitas ao longo dos anos sobre como mensurar esta repulsão de níveis, sendo que uma das mais notáveis é a de T. A. Brody em 1973. Brody propôs a extensão da expressão de Wigner para o GOE por meio do *ansatz*

$$P_{\omega}(s) = A s^{\omega} \exp(-\alpha s^{\omega+1}), \quad (\text{II.26})$$

onde ω é um parâmetro ajustado a cada conjunto de dados e que mede a repulsão dos níveis no espectro, com s médio igual a 1 e

$$A = (\omega + 1)\alpha \quad , \quad \alpha = \left[\Gamma\left(\frac{\omega + 2}{\omega + 1}\right) \right]^{\omega+1}. \quad (\text{II.27})$$

Note que os limites $\omega = 0$ e $\omega = 1$ correspondem às expressões de Poisson e GOE respectivamente. A transição entre as duas situações é feita de maneira suave e os resultados obtidos com esta parametrização têm sido excelentes, tanto para dados obtidos experimentalmente, quanto para espectros obtidos de hamiltonianas diagonalizadas analítica ou numericamente.

Esta expressão foi usada com tanto sucesso ao longo dos anos para mensurar a repulsão de níveis, que a sua utilização para medir a caoticidade dos sistemas físicos, quando da proposta de Berry e Tabor, foi praticamente imediata. Entretanto, o maior problema neste caso continua sendo a falta de conteúdo físico do parâmetro ω , de modo que novos modelos foram propostos.

II.4 O Modelo de Berry e Robnik

Em 1984 M. V. Berry e M. Robnik propuseram que sistemas de dinâmica mista fossem descritos pela superposição das partes regular e caótica do espectro, consideradas independentes estatisticamente [31]. Mais do que isto, eles propuseram uma expressão para a NND baseada em argumentos semi-clássicos.

A densidade de níveis média para um sistema de f graus de liberdade descrito pela hamiltoniana $H(q_1, \dots, q_f, p_1, \dots, p_f)$ é dada por

$$\rho = (2\pi)^{-f} \int dq_1 \dots \int dq_f \int dp_1 \dots \int dp_f \delta(E - H(q_1 \dots p_f)). \quad (\text{II.28})$$

No caso do espectro ser composto por N partes estatisticamente independentes, a densidade média de níveis pode ser ainda escrita como a soma das densidades de cada uma das N partes, ou seja

$$\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i. \quad (\text{II.29})$$

A distribuição de espaçamentos $P(s)$, que fornece a probabilidade de ocorrência dos espaçamentos s , ou ainda, a probabilidade de que não exista nenhum nível entre E e $E + s$, é escrita, em termos das N sequências independentes, como

$$\int_s^\infty dx P(x) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\rho_i}{\rho} \int_s^\infty dy P_i(y) \prod_{j \neq i, j=1}^N Q_j(s) \right), \quad (\text{II.30})$$

onde Q_j é a probabilidade de que nenhum nível da sequência j , com $j \neq i$, caia no intervalo investigado. Esta probabilidade Q_j pode ainda ser escrita como

$$Q_j(s) = \rho_j \int_s^\infty d\sigma P_j(\sigma)(\sigma - s), \quad (\text{II.31})$$

de modo que

$$\int_s^\infty dx P(x) = \frac{1}{\rho} \left(\prod_{k=1}^N \rho_k \right) \sum_{i=1}^N \left(\int_s^\infty dy P_i(y) \prod_{j \neq i, j=1}^N \int_s^\infty d\sigma P_j(\sigma)(\sigma - s) \right). \quad (\text{II.32})$$

Definindo

$$Z_i(s) \equiv \int_s^\infty d\sigma \int_\sigma^\infty dx P_i(x) = \int_s^\infty d\sigma P_i(\sigma)(\sigma - s) \quad (\text{II.33})$$

e integrando II.32 sobre s obtem-se a forma simplificada

$$Z(s) \equiv \int_s^\infty d\sigma \int_\sigma^\infty dx P(x) = \frac{1}{\rho} \prod_{i=1}^N \rho_i Z_i(s). \quad (\text{II.34})$$

(Notar que $P(s)$ será dada pela derivada segunda de $Z(s)$ em relação a s .)

Lembrando que a superposição de m espectros poissonianos independentes é sempre um espectro poissoniano, qualquer que seja o valor de m , ρ_1 denotará daqui por diante a densidade de níveis de todas as sequências regulares juntas. Da mesma forma, ρ_i , com $i = 2, 3, \dots, N$, corresponderá as densidades dos espectros independentes caóticos. Assim, considerando-se as distribuições poissoniana e GOE, válidas respectivamente para o caso regular e caótico, tem-se

$$Z_1(s) = \frac{e^{-\rho_1 s}}{\rho_1}$$

$$Z_i(s) = \frac{1}{\rho_i} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_i s \right) \quad i \geq 2$$

onde $\operatorname{erfc}(x)$ é a função erro complementar dada por

$$\operatorname{erfc}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt e^{-t^2}. \quad (\text{II.35})$$

Finalmente, a distribuição de espaçamentos procurada é dada por

$$P(s) = \frac{1}{\rho} \frac{d^2}{ds^2} \left[e^{-\rho_1 s} \prod_{i=2}^N \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_i s \right) \right]. \quad (\text{II.36})$$

O comportamento da distribuição $P(s)$ para diferentes valores de N foi verificada em [31]; observou-se que a distribuição procurada é obtida para $N = 2$,

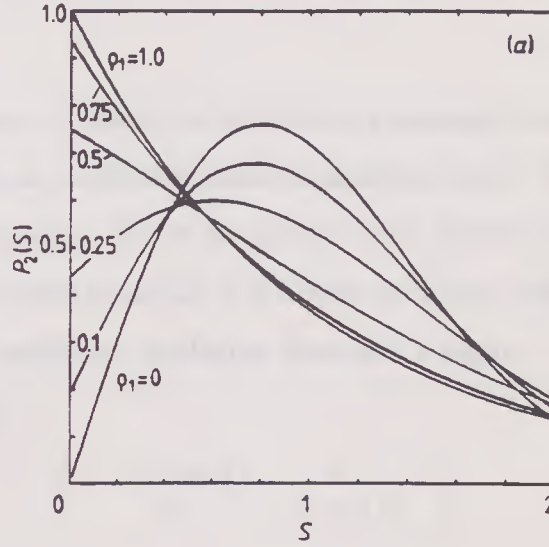


Figura II.3: Distribuição de espaçamentos da distribuição de Berry e Robnik para diferentes valores de ρ .

$$P_\rho(s) = \rho^2 e^{-\rho s} \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - \rho) s \right) + \left[2\rho(1 - \rho) + \frac{1}{2}\pi(1 - \rho)^3 s \right] \times \exp \left(-\rho s - \frac{1}{4}(1 - \rho)^2 s^2 \right),$$

quando então a distribuição interpola entre a expressão para o GOE ($\rho = 0$) e a poissoniana ($\rho = 1$) suavemente (a notação foi agora simplificada: $\rho_1 \rightarrow \rho$ e $\rho_2 \rightarrow (1 - \rho)$.)

Um último comentário relevante neste contexto, diz respeito ao comportamento de $P_\rho(s)$ quando $s = 0$ para diferentes valores de ρ : conforme ilustrado na figura II.3, a repulsão de níveis não é mais observada, a não ser quando $\rho = 0$, sendo este comportamento um resultado direto da hipótese inicial de independência entre as partes caótica e regular do espectro, e uma consequência indesejável, visto a não-repulsão de níveis só ser esperada no limite poissoniano. Vale dizer ainda que justamente a hipótese de independência entre as diferentes partes consideradas do espectro é que faz com que o caso $N = 2$ seja a única solução possível, visto $N \geq 3$ significar a superposição de $N - 1$ GOE's e um Poisson, todos independentes entre si, e esta superposição independente de vários GOE's nunca apresenta repulsão de níveis [7].

II.5 O Modelo de Caurier, Grammaticos e Ramani

Apesar de largamente utilizadas, as expressões propostas por Brody, e por Berry e Robnik apresentam problemas, conforme discutido anteriormente. Sendo assim, novos modelos continuaram sendo propostos, dentre os quais o de E. Caurier, B. Grammaticos e A. Ramani [32]. Este é um modelo matricial 2×2 onde os termos fora da diagonal principal são “modulados” por um parâmetro, conforme mostrado a seguir.

Seja a matriz 2×2

$$\begin{pmatrix} \varepsilon - a/2 & b \\ b & \varepsilon + a/2 \end{pmatrix}.$$

As únicas condições impostas sobre as variáveis a e b são

$$\begin{aligned} p(a > A) &= e^{-A}, \\ p(b > B) &= F(B), \end{aligned}$$

com $F(0) = 1$ e $F(\infty) = 0$, isto é, a probabilidade de um espaçamento b ser maior que zero é igual a 1, e a de que ele seja maior que infinito é nula. Na ausência da perturbação b obtem-se a distribuição poissoniana usual; entretanto, quando b for não nulo, o espaçamento δ entre dois níveis consecutivos será uma função de a e b

$$\delta = (a^2 + 4b^2)^{1/2}$$

e a probabilidade deste espaçamento δ ser maior que um certo valor s será dada por

$$p(\delta > s) = e^{-s} + \int_0^s dA F\left(\frac{\sqrt{s^2 - A^2}}{2}\right) e^{-A}. \quad (\text{II.37})$$

A distribuição de espaçamentos entre os níveis será então

$$P(s) \equiv -\frac{dp}{ds} = \int_0^s dA \frac{s}{2\sqrt{s^2 - A^2}} f\left(\frac{\sqrt{s^2 - A^2}}{2}\right) e^{-A}, \quad (\text{II.38})$$

com $f(u) = -dF/du$. Fazendo agora uma escolha conveniente para A , qual seja

$$A = s \operatorname{sen} \theta, \quad (\text{II.39})$$

pode-se reescrever $P(s)$ como

$$P(s) = \frac{s}{2} \int_0^{\pi/2} d\theta f\left(\frac{s}{2} \cos \theta\right) e^{-s \operatorname{sen} \theta}. \quad (\text{II.40})$$

Introduzindo agora um parâmetro λ , que quantifique a perturbação aplicada à matriz original, como

$$F(u) = \Phi\left(\frac{u}{\lambda}\right)$$

com

$$\phi = -\frac{\partial \Phi}{\partial u}$$

obtem-se

$$P(s) = \frac{s}{2\lambda} \int_0^{\pi/2} d\theta \phi\left(\frac{s}{2\lambda} \cos \theta\right) e^{-s \operatorname{sen} \theta}. \quad (\text{II.41})$$

Retomando o significado de Φ a partir da definição da função F , vê-se que para obter uma expressão que interpole entre o caso GOE e o Poisson, Φ deve ser a função erro complementar na forma

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt,$$

de modo que

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Assim, II.41 é reescrita como

$$P(s) = \frac{s}{2\lambda} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi/2} d\theta \exp \left(-s \sin \theta - \frac{s^2}{8\lambda^2} \cos^2 \theta \right). \quad (\text{II.42})$$

Lembrando de II.39, pode-se afirmar que a principal contribuição para a integral II.42 vem da região $\theta \approx \pi/2$, de modo que $\cos \theta \ll 1$ e $e^{-s \sin \theta} \rightarrow e^{-s}$. Mais ainda, impondo-se $s/\lambda \gg 1$ e $s \approx 1$, pode-se obter uma expressão aproximada para $P(s)$,

$$P(s) = \frac{s}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{8}} I_0 \left(\frac{s^2}{16\lambda^2} \right) e^{-\frac{s^2}{16\lambda^2}} e^{-s}. \quad (\text{II.43})$$

Esta expressão fornece o caso poissoniano como um limite quando $\lambda \rightarrow 0$ e o caso GOE quando $\lambda \rightarrow \infty$. Entretanto, as fortes condições impostas fazem com que $P(s)$ só seja corretamente normalizado à unidade quando o sistema é fortemente regular, sendo tão maior a diferença quanto maior o valor de λ .

II.6 O Modelo de Lenz e Haake

O modelo proposto por G. Lenz e F. Haake em 1991 [33] baseia-se numa idéia devida a Dyson [2]: a de que sistemas com mistura de simetrias podem ser descritos por um *ensemble* de matrizes aleatórias composto, isto é

$$H = H_0 + \lambda V, \quad (\text{II.44})$$

onde H_0 é a matriz correspondente à simetria original do sistema e V é a matriz associada à perturbação: à medida que o parâmetro λ for aumentado de zero até infinito, o sistema efetuará uma transição entre a situação descrita por H_0 e aquela de V .

Como as energias crescem aproximadamente com λ , é aconselhável um reescalonamento da hamiltoniana, isto é

$$H = g(H_0 + \lambda V), \quad (\text{II.45})$$

onde $g(\tau)$ e $\lambda(\tau)$ são funções do tempo τ fictício, de modo que a densidade média de níveis fique independente de λ .

Impondo-se as condições de contorno

$$\begin{aligned} g &= 1 & \text{para } \lambda &= 0, \\ g\lambda &\rightarrow 1 & \text{para } \lambda &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

e escolhendo as unidades de τ convenientemente obtém-se

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \cos \tau, \\ \lambda(\tau) &= \tan \tau, \end{aligned}$$

(notar que $\ddot{g}/g = -1$) para $0 \leq \tau \leq \pi/2$. Eliminando τ das duas expressões, tem-se finalmente

$$g = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}. \quad (\text{II.46})$$

Assim

$$H = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}(H_0 + \lambda V). \quad (\text{II.47})$$

Assumindo agora que V seja um ensemble de matrizes 2×2 do tipo GOE e a hamiltoniana de partida H_0 descreva um sistema poissoniano, cuja distribuição de probabilidades dos elementos de matriz será escrita

$$P_{\text{poi}}(H) = \{(Tr H)^2 - 4 \det H\}^{-1/2} e^{-(Tr H)^2} \exp\{ -[(tr H)^2 - 4 \det H]^{-1/2} \}, \quad (\text{II.48})$$

e escrevendo a condição de ergodicidade para o sistema

$$P(H) = \langle \delta(H - g(H_0 + \lambda V)) \rangle, \quad (\text{II.49})$$

chega-se a uma expressão final para a distribuição de probabilidades dos elementos da matriz, H_{11} , H_{12} e H_{22} , que, após a integração nos coeficientes dos autovetores e na variável

$t_i = E_{i+1} + E_i$, fornece a expressão procurada para a NND, convenientemente escrita na forma final

$$P(s) = \frac{su(\lambda)^2}{\lambda} \exp\left(\frac{-u(\lambda)^2 s^2}{4\lambda^2}\right) \int_0^\infty e^{-(\xi^2 + 2\xi\lambda)} I_0\left(\frac{s\xi u(\lambda)}{\lambda}\right) d\xi, \quad (\text{II.50})$$

onde $u(\lambda) = \sqrt{\pi}U(-\frac{1}{2}, 0, \lambda^2)$ é a função de Kummer, I_0 é a função de Bessel modificada de ordem zero e $U(a, c, x)$ é a função de Tricomi. A forma da função de Kummer aqui utilizada é dada por [34]

$$u(\lambda) = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right) \int_0^{\pi/2} \cos\left[\frac{\lambda^2}{2} \operatorname{tg} \theta - \theta\right] d\theta. \quad (\text{II.51})$$

A expressão II.50 acima reduz-se à exponencial quando $\lambda \rightarrow 0$ e para valores suficientemente grandes, a curva terá o comportamento gaussiano desejado. De fato, para efeito de cálculo numérico, a curva para $\lambda = 1$ já é fortemente GOE.

II.7 O DGOE

Os casos apresentados até agora ilustram algumas das técnicas utilizadas na busca de uma descrição satisfatória para as situações intermediárias entre GOE e Poisson. Apesar de seus méritos, todas apresentam certas desvantagens, tais como a falta de conteúdo físico do parâmetro de Brody, a ausência da repulsão de níveis para o caso de Berry e Robnik, os problemas com a normalização de Caurier, Grammaticos e Ramani e o modelo de Lenz e Haake que, assim como os outros, só oferece descrição para a estatística dos autovalores.

De modo a tentar descrever também a estatística dos autovetores, M. S. Hussein e M. P. Pato propuseram um novo modelo, chamado de “Ensemble Gaussiano Ortogonal Deformado”⁴ (DGOE) [35], usando o método proposto por R. Balian que utiliza conceitos da teoria de informação [37].

⁴O termo “deformado” é devido a Dyson [36].

A idéia de Balian consiste em definir o conteúdo de informação do *ensemble* de matrizes aleatórias como sendo análogo ao conteúdo de informação usualmente definido para outros tipos de *ensembles*, isto é

$$I\{P_m\} = \sum_m P_m \log P_m \rightarrow I\{P[H]\} = \int d[H] P[H] \log P[H], \quad (\text{II.52})$$

onde

$$d[H] = \prod_{i \geq j} d[H]_{ij}. \quad (\text{II.53})$$

O GOE é obtido quando o conteúdo de informação expresso em II.52 é minimizado sujeito às condições

$$\begin{aligned} \int d[H] P[H] &= C_1, \\ \langle \text{Tr } H^2 \rangle &= \int P[H] \text{Tr } H^2 d[H] = C_2. \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

com $d[H]$ como em II.8. Aqui a primeira das equações II.54 expressa a condição de normalização usual da distribuição de probabilidades, enquanto a segunda impede que o traço da matriz varie até infinito. Minimizando então a informação do sistema obtem-se

$$P[H] = \exp\{\lambda_1 + \lambda_2 \text{Tr } H^2\}, \quad (\text{II.55})$$

para o caso GOE.

Para obter um *ensemble* capaz de descrever sistemas na situação de transição entre Poisson e GOE é necessário impor-se uma terceira condição, que descreva esta situação “mista”. Para isto, Hussein e Pato usaram a sugestão de Dyson

$$H = H_o + \varepsilon H_1, \quad (\text{II.56})$$

como Lenz e Haake o fizeram, onde H_o é a matriz que descreve a situação original do sistema e H_1 é a matriz associada à perturbação: à medida que o parâmetro ε for aumentado de zero até infinito, o sistema efetuará uma transição entre H_o e H_1 .

Usando os operadores de projeção

$$P = \sum_{i=1}^M |i\rangle\langle i|,$$

e $Q = 1 - P$, a matriz H pode ser escrita na forma de blocos

$$\left(\begin{array}{c|c} PHP & PHQ \\ \hline QHP & QHQ \end{array} \right).$$

Quando $\varepsilon \rightarrow 0$ a matriz H torna-se diagonal em blocos, enquanto valores crescentes implicam em maior “mistura” com os blocos fora da diagonal. A condição procurada para o DGOE deve conter esta informação; logo, escolhe-se uma que torne a variância dos termos fora da diagonal da matriz diferente daqueles da diagonal, isto é

$$\langle \text{Tr } H_1^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \int d[H] P[H] \text{Tr}(P_i H Q_i H P_i) = C_3, \quad (\text{II.57})$$

que juntamente com as condições II.54 fornece, após a minimização de $I\{P[H]\}$,

$$P_{DGOE}[H] = P_{GOE}[H](1 + \alpha)^{(N-1)/2} \exp \left[\alpha \sum_i \text{Tr}(P_i H Q_i H P_i) \right] \quad (\text{II.58})$$

e onde

$$P_{GOE}[H] = 2^{-N/2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^{-1/4 N(N-1)} \exp(-\text{Tr } H^2). \quad (\text{II.59})$$

Tomando agora matrizes de dimensão 2, fazendo mais uma vez as devidas integrações e reescrevendo convenientemente o resultado, obtem-se para a NND

$$P_{DGOE}(s) = \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{1/2} s \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{8}\right)s^2\right\} I_0\left(\frac{\alpha s^2}{8}\right), \quad (\text{II.60})$$

onde α é o parâmetro que caracteriza a transição e $I_0(x)$ é a função de Bessel modificada. Aqui o caso GOE é obtido para $\alpha = 0$ e o limite poissoniano quando $\alpha \rightarrow \infty$.

Um ponto interessante que vale a pena ressaltar, diz respeito à distribuição II.58: visto que esta expressão foi obtida para matrizes de dimensão N arbitrária, é possível a partir dela estudar a distribuição estatística dos autovetores, o que foi feito por Hussein e Pato [38]. Mais do que isto, a posse de uma distribuição válida para matrizes de tamanho arbitrário permite iniciar a investigação em busca de uma descrição para as correlações de longo alcance, o que será discutido no capítulo final desta tese.

Na figura II.4 estão sumarizados os valores dos parâmetros para cada um dos cinco modelos acima citados, que fornecem os casos poissoniano e GOE. De fato, no caso do modelo de Lenz e Haake o limite GOE é atingido para valores “suficientemente grandes” do respectivo parâmetro, o que na prática corresponde a aproximadamente 1; no caso do DGOE o limite poissoniano é atingido para o parâmetro tendendo a infinito e no caso do modelo de Caurier, Grammaticos e Ramani, as aproximações introduzidas na determinação da expressão II.43 implicam que a forma exata da expressão GOE não é nunca obtida, mas a curva é tão menos poissoniana quanto maior o valor do respectivo parâmetro, que foi então tomado como sendo 1.

Os modelos aqui apresentados foram testados em três problemas distintos: o de um oscilador quártico isotrópico, um conjunto de dados nucleares experimentais e os dados dos bilhares quânticos do grupo de caos do “Institut für Kernphysik” da TH-Darmstadt na Alemanha. Estes três casos serão apresentados nos capítulos a seguir.

Modelo	GOE	Poisson
DGOE	0	$\rightarrow \infty$
C-G-R	1	0
L-H	1	0
Brody	1	0
B-R	0	1

Figura II.4: Valores dos parâmetros dos modelos do DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani, Lenz-Haake, Brody e Berry-Robnik que descrevem as situações de máxima caoticidade (GOE) e máxima regularidade (Poisson).

Capítulo III

O Oscilador Quártico

O oscilador quártico bidimensional isotrópico é o sistema cuja versão clássica é representada pela hamiltoniana

$$H = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{\beta(x^4 + y^4)}{4} \quad (\text{III.1})$$

e a equação de Schrödinger do análogo quântico é escrita

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{\beta(x^4 + y^4)}{4} \right\} \psi = E \psi . \quad (\text{III.2})$$

A figura III.1 ilustra o comportamento do potencial deste oscilador para diferentes valores do parâmetro β .

Este sistema foi escolhido para análise por apresentar uma transição caos-ordem aparentemente suave quando o parâmetro β é variado de 0 a 1, de acordo com a literatura disponível sobre o assunto (vide por exemplo [15] - [18] e referências nelas contidas). Não se conhece até o momento nenhum sistema físico representado por este potencial quártico [19], mas acredita-se que seu comportamento caótico possa ser importante em várias áreas da física, como por exemplo na QCD, visto as equações de Yang-Mills possuírem esta mesma forma funcional ([17], [18]).

É possível ver a partir da expressão III.1 que quando $\beta = 1$ o potencial do sistema pode ser escrito como a soma dos potenciais de dois osciladores unidimensionais, ao quadrado, e

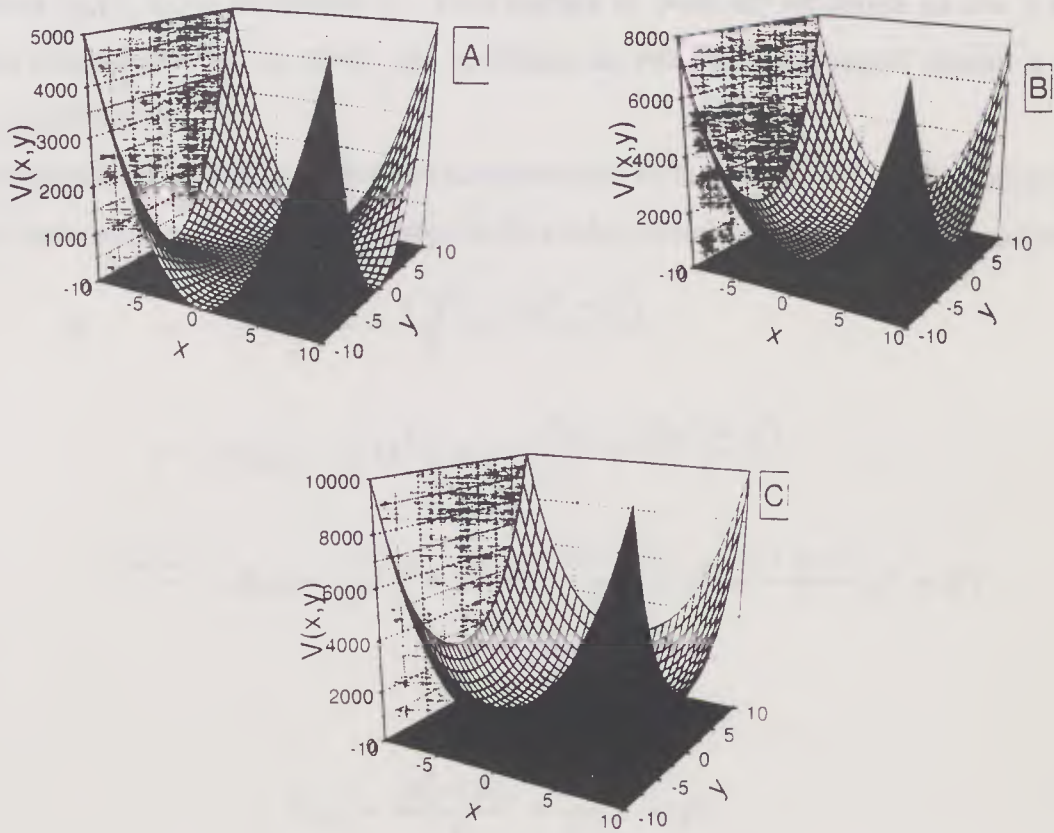


Figura III.1: Potencial do oscilador quártico isotrópico para diferentes valores do parâmetro β ((A): $\beta = 0.$, (B): $\beta = 0.5$, (C): $\beta = 1.0$).

que à medida que o valor do parâmetro decresce, o sistema evolui continuamente até que em zero a situação de “máxima caoticidade” é atingida, onde resta apenas o termo misto¹.

Uma das propriedades mais importantes da dinâmica deste sistema é a sua propriedade de escala, que se acredita ser uma garantia da invariância das flutuações estatísticas por translação no espectro de energias [24]. No caso do oscilador quártico isotrópico esta propriedade de escala é garantida pela existência das relações

$$p(t) = \varepsilon^{2/3} p_o(\varepsilon^3 t), \quad q(t) = \varepsilon^{1/3} q_o(\varepsilon^3 t), \quad (\text{III.3})$$

onde $\varepsilon = (E/E_o)^{3/4}$ é o fator de escala, entre a trajetória $(p(t), q(t))$ de energia E e a

¹Em [19] os autores comentam sobre a descoberta em 1990 de algumas órbitas periódicas para o potencial $x^2 y^2$ puro, que dariam origem a pequenas ilhas de regularidade não detectadas anteriormente.

trajetória $(p_o(t), q_o(t))$ de energia E_o . Esta energia E_o pode ser escolhida *ad hoc*, e foi aqui tomada como sendo 0.5 de modo que a energia do estado fundamental passou a ser um valor próximo de 1.

Inicialmente a matriz hamiltoniana do sistema foi rodada de $\pi/4$ de modo a minimizar a região classicamente proibida do espaço de fase e favorecer a convergência dos autovalores:

$$\begin{aligned} H &= \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{\beta(x^4 + y^4)}{4} \\ &\equiv H_{OH} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{\beta(x^4 + y^4)}{4} \\ &\xrightarrow{\text{rot. } \pi/4} H_{OH} - \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(3\beta - 1)}{2}x^2 y^2 + \frac{(1 + \beta)}{8}(x^4 + y^4), \end{aligned}$$

onde

$$H_{OH} = \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2} + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) \quad (\text{III.4})$$

é a hamiltoniana do oscilador harmônico bidimensional isotrópico de massa unitária e frequência natural ω .

O valor esperado da hamiltoniana para uma transição entre os estados inicial e final identificados pelos números quânticos n_x, n_y e m_x, m_y respectivamente, foi calculado na representação dos operadores de criação e aniquilação nos dois subespaços [20],

$$\begin{aligned} a_x^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip_x}{\omega} \right), \quad a_x = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip_x}{\omega} \right), \\ a_y^\dagger &= \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(y - \frac{ip_y}{\omega} \right), \quad a_y = \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \left(y + \frac{ip_y}{\omega} \right), \end{aligned}$$

obedecendo às relações usuais de comutação

$$\begin{aligned} [a_x, a_x^\dagger] &= [a_y, a_y^\dagger] = 1, \\ [a_x, a_x] &= [a_y, a_y] = [a_x^\dagger, a_x^\dagger] = [a_y^\dagger, a_y^\dagger] = 0, \\ [a_x, a_y^\dagger] &= [a_y, a_x^\dagger] = [a_x, a_y] = [a_x^\dagger, a_y^\dagger] = 0, \end{aligned}$$

obtendo-se

$$\begin{aligned}
\langle m_x m_y | H | n_x n_y \rangle &= \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y} \{ A(n_x + n_y + 1) + B[1 + 2(n_x + n_y) + 4n_x n_y] \\
&+ C(n_x^2 + n_y^2 + n_x + n_y + 1) \} \\
&+ \delta_{m_x n_x-2} \delta_{m_y n_y} \{ D[n_x(n_x - 1)]^{1/2} + B \{ [n_x(n_x - 1)]^{1/2} \\
&+ 2[n_x(n_x - 1)n_y^2]^{1/2} \} + E \{ [n_x(n_x - 1)]^{1/2} + 2[n_x^3(n_x - 1)]^{1/2} \\
&+ [n_x(n_x - 1)]^{1/2} + 2[n_x(n_x - 1)(n_x - 2)^2]^{1/2} \} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x+2} \delta_{m_y n_y} \{ D[(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} + B \{ [(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} \\
&+ 2[(n_x + 1)(n_x + 2)n_y^2]^{1/2} \} + E \{ [(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} \\
&+ 2[n_x^2(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} + [(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} \\
&+ 2[(n_x + 1)(n_x + 2)^3]^{1/2} \} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y-2} \{ D[n_y(n_y - 1)]^{1/2} + B \{ [n_y(n_y - 1)]^{1/2} \\
&+ 2[n_y(n_y - 1)n_x^2]^{1/2} \} + E \{ [n_y(n_y - 1)]^{1/2} + 2[n_y^3(n_y - 1)]^{1/2} \\
&+ [n_y(n_y - 1)]^{1/2} + 2[n_y(n_y - 1)(n_y - 2)^2]^{1/2} \} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y+2} \{ D[(n_y + 1)(n_y + 2)]^{1/2} + B \{ [(n_y + 1)(n_y + 2)]^{1/2} \\
&+ 2[(n_y + 1)(n_y + 2)n_x^2]^{1/2} \} + E \{ [(n_y + 1)(n_y + 2)]^{1/2} \\
&+ 2[n_y^2(n_y + 1)(n_y + 2)]^{1/2} + [(n_y + 1)(n_y + 2)]^{1/2} \\
&+ 2[(n_y + 1)(n_y + 2)^3]^{1/2} \} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x-2} \delta_{m_y n_y-2} \{ B[n_y(n_y - 1)n_x(n_x - 1)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x-2} \delta_{m_y n_y+2} \{ B[(n_y + 1)(n_y + 2)n_x(n_x - 1)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x+2} \delta_{m_y n_y-2} \{ B[n_y(n_y - 1)(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x+2} \delta_{m_y n_y+2} \{ B[(n_y + 1)(n_y + 2)(n_x + 1)(n_x + 2)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x-4} \delta_{m_y n_y} \{ E[n_x(n_x - 1)(n_x - 2)(n_x - 3)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x+4} \delta_{m_y n_y} \{ E[(n_x + 1)(n_x + 2)(n_x + 3)(n_x + 4)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y-4} \{ E[n_y(n_y - 1)(n_y - 2)(n_y - 3)]^{1/2} \} \\
&+ \delta_{m_x n_x} \delta_{m_y n_y+4} \{ E[(n_y + 1)(n_y + 2)(n_y + 3)(n_y + 4)]^{1/2} \} ,
\end{aligned}$$

onde

$$A = \frac{\hbar\omega}{2},$$

$$B = \frac{\hbar^2(3\beta - 1)}{16\omega^2},$$

$$C = \frac{3\hbar^2(1 + \beta)}{16\omega^2},$$

$$D = -\frac{\hbar\omega}{4},$$

$$E = \frac{\hbar^2(1 + \beta)}{32\omega^2}.$$

A expressão apresentada constitui-se de treze termos agrupados conforme os produtos entre as funções delta que relacionam os números quânticos dos estados inicial e final. É interessante observar que o primeiro termo fornece os elementos associados a diagonal principal da matriz de transição em questão, enquanto os outros termos deixam explícita a propriedade de isotropia da hamiltoniana (por exemplo, trocar $x \leftrightarrow y$ transforma o segundo termo no quarto e vice-versa. O mesmo acontece para o terceiro e o quinto termos, o sétimo e o oitavo, o décimo e o décimo segundo, o décimo primeiro e o décimo terceiro e finalmente o primeiro, o sexto e o nono termos voltam a si mesmos). Além disso, vemos que a matriz formada é simétrica, visto que a troca simultânea de $m_x \leftrightarrow n_x$ e $m_y \leftrightarrow n_y$ não altera o valor dos elementos da matriz (estão assim relacionados o segundo e o terceiro termos, o quarto e o quinto, o sexto e o nono, o sétimo e o oitavo, o décimo e o décimo primeiro, o décimo segundo e o décimo terceiro termos).

De modo a dessimetrizar convenientemente este oscilador, considerou-se que os autoestados do sistema quântico apresentam simetrias que podem ser classificadas segundo as simetrias do grupo C_{4v} . As representações irredutíveis do grupo correspondem a quatro representações unidimensionais e uma bidimensional [21] duplamente degenerada, motivo pelo qual este trabalho será restrito às representações unidimensionais.

Estas quatro representações são usualmente rotuladas como A1, para os estados que são simétricos sob reflexão nos eixos e nas diagonais, B2 antissimétricos sob reflexão nos eixos,

simétricos sob reflexão nas diagonais, B1, simétricos, antissimétricos e A2, antissimétricos, antissimétricos. Sabendo isto, foram montadas combinações lineares de funções de onda de osciladores harmônicos unidimensionais que apresentassem as propriedades de simetria das classes A1, B2, B1 e A2 acima citadas, formando as bases necessárias. Explicitamente

$$\psi_{n_x n_y}(x, y) \propto \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y) \pm \psi_{n_x}(y)\psi_{n_y}(x) \quad (\text{III.5})$$

$$\Rightarrow \langle m_x m_y | H | n_x n_y \rangle_{+-} \propto \langle m_x m_y | H | n_x n_y \rangle \pm \langle m_x m_y | H | n_y n_x \rangle, \quad (\text{III.6})$$

(a proporcionalidade refere-se à falta da constante de normalização) com

$$\psi_{n_x}(x) = [2^n n!]^{-1/2} \left(\frac{m\omega}{\pi \hbar} \right)^{1/4} \exp \left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right) H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right)$$

e $H_n(z)$ é o polinômio de hermite de ordem n e argumento z , apresentando a propriedade $(-1)^n H_n(z) = H_n(-z)$, fornecendo finalmente o resultado sumarizado na figura III.2.

classe	tipo de combinação	n_x, n_y
A1	soma	pares
B2	soma	ímpares
B1	subtração	pares
A2	subtração	ímpares

Figura III.2: Combinação linear e números quânticos que fornecem a base adequada a cada classe de simetria.

Pode-se agora calcular a constante de normalização da expressão III.6 obtendo-se

$$\langle m_x m_y | H | n_x n_y \rangle_{+-} = \frac{1}{\sqrt{4(1 \pm \delta_{n_x n_y})(1 \pm \delta_{m_x m_y})}} \times \{ \langle m_x m_y | H | n_x n_y \rangle \pm \langle m_x m_y | H | n_y n_x \rangle \}, \quad (\text{III.7})$$

onde o sinal positivo é tomado para as classes de simetria A1 e B2, e o sinal negativo para B1 e A2. Esta expressão deixa claro que para as classes de simetria obtidas pela subtração (classes B1 e A2), os estados com mesmo número quântico para a coordenada x e para y não representam estados físicos e devem portanto ser eliminados do cálculo dos autovalores.

Com a expressão analítica para os elementos da matriz de transição $\langle m_x m_y | H | n_x n_y \rangle$ apresentada e com III.7, foi construído um código numérico usando linguagem FORTRAN que fornecesse os autovalores do sistema para cada classe de simetria e valor do parâmetro β . A frequência ω do oscilador harmônico de base foi calculada numericamente impondo-se a condição de mínimo para o traço da matriz hamiltoniana [15]. A dimensão total da matriz possui uma relação simples com o número de estados por grau de liberdade:

$$N = 0.125[(2A \pm 1)^2 - 1],$$

onde N é a dimensão total da matriz, A é o número de estados por grau de liberdade (o mesmo valor para as duas dimensões) e o sinal positivo é para as classes de simetria A1 e B2, e o negativo para as classes B1 e A2. Por sugestão de [15], foram tomados no máximo 80 estados por grau de liberdade para as classes A1 e B2 e 79 para as classes B1 e A2, fornecendo matrizes de dimensão 3240 e 3160 respectivamente, que segundo aqueles autores, fornece autovalores com excelente convergência².

Como já foi dito anteriormente, para realizar a análise segundo a RMT é necessário que o espectro escolhido esteja completo e com as energias corretamente atribuídas dentro da faixa considerada. No caso do espectro do oscilador quártico, como o espectro foi calculado numericamente, o desvio dos autovalores está associado ao truncamento do espaço de Hilbert, que deve afetar mais fortemente os últimos níveis de energia e estes devem então

²É importante aqui lembrar das dificuldades que envolvem a obtenção e diagonalização numérica de matrizes de grandes dimensões. Na máquina utilizada para a realização destes cálculos, o CRAY 9000 do CCE-USP, o tempo de CPU e a memória necessários para a obtenção dos autovalores de uma matriz de dimensão 1830 era de aproximadamente 10 min. e 25 MW respectivamente; para matrizes de dimensão 3160 estes valores sobem para 50 min. e 27 MW; finalmente para matrizes de dimensão 3240 são necessários ainda em torno de 27 MW de memória, mas aproximadamente 61 min. de tempo de CPU, não sendo considerado neste valor, obviamente, o tempo de espera na fila de usuários.

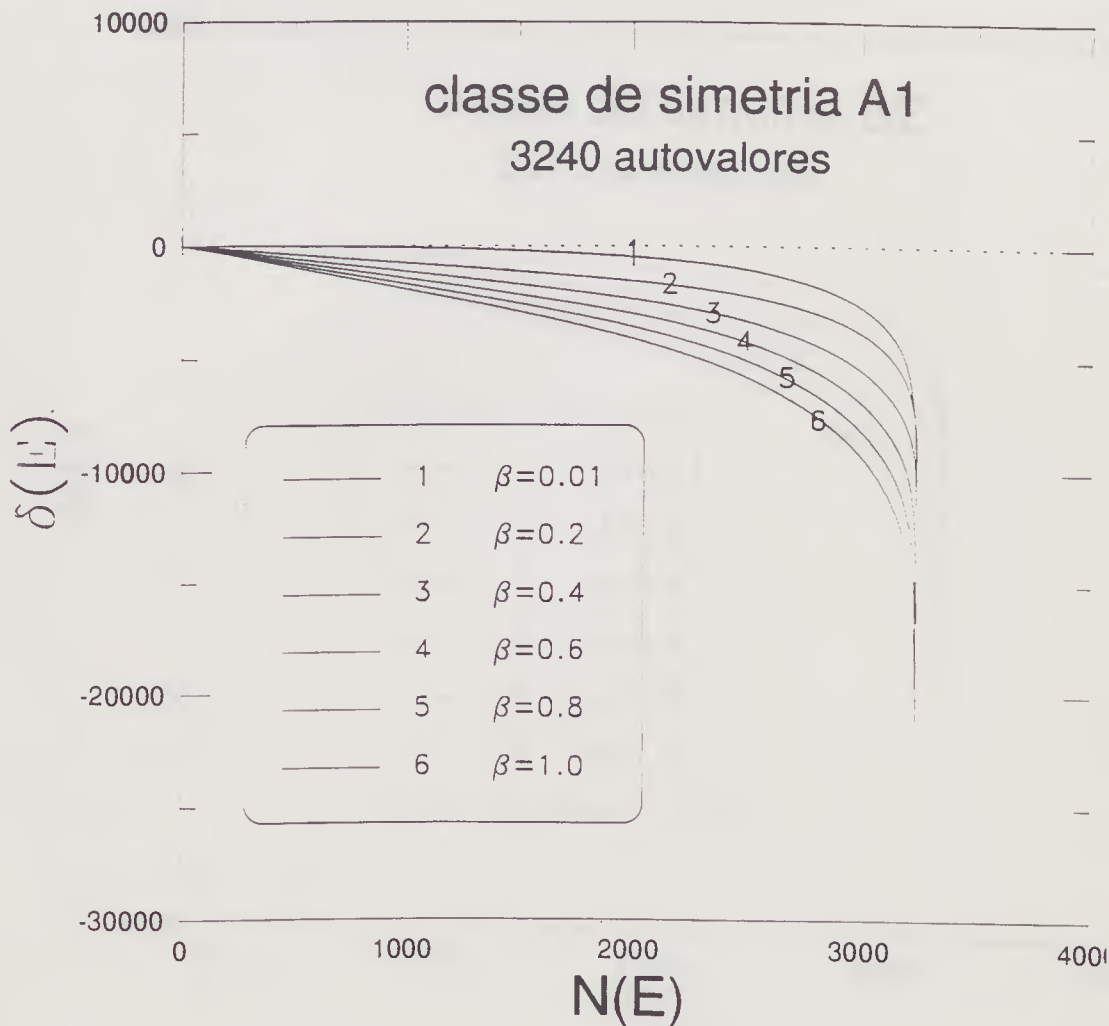


Figura III.3: $\delta(E)$ para a classe de simetria A1, 3240 autovalores e $\beta = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

altos, as curvas estão tão mais afastadas de zero quanto maior o valor do parâmetro β e que para $\beta = 0.01$ a curva é a menos retilínea de todas as seis apresentadas. Esta última característica pode ser entendida considerando-se que este é o valor de β em que o sistema é mais fortemente caótico, sendo a convergência muito pior aqui. No apêndice referente à convergência deste sistema pode-se ainda observar o comportamento de $\delta(E)$ para autovalores obtidos de matrizes de diferentes tamanhos e os resultados da comparação de diferentes classes de simetria para um mesmo valor do parâmetro β , que sugerem a dependência de $\overline{N(E)}$ com as simetrias como em [19].

A partir das figuras III.3-III.6, decidiu-se inicialmente considerar como “bons” autova-

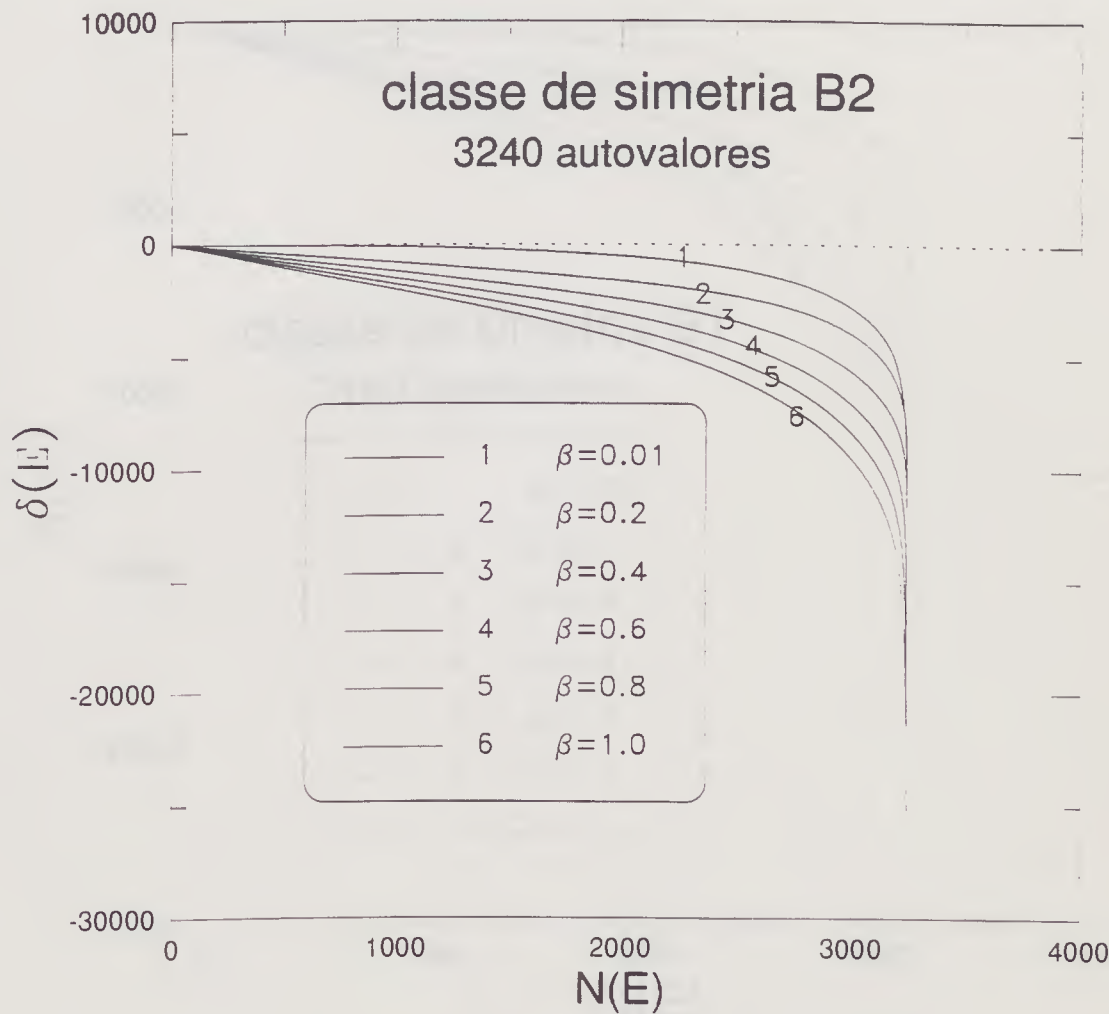


Figura III.4: $\delta(E)$ para a classe de simetria B2, 3240 autovalores e $\beta = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

lores para $\beta = 0.01$ os 2100 primeiros das classes de simetria A1 e B2 e os 1800 das classes B1 e A2, e para valores mais altos do parâmetro β os primeiros 2300 autovalores das classes A1 e B2 e os 2100 das classes B1 e A2, conforme a figura III.13.

Estabelecido este critério, considerou-se então a questão do *unfolding*: como determinar, na ausência de expressão analítica para $\overline{N(E)}$, a expressão mais adequada para realizar o *unfolding* dos autovalores do sistema? Para este fim, tomou-se a função escada $N(E)$ como função de ε^2 e determinou-se qual o polinômio que melhor ajustava os dados, isto é, qual o polinômio que melhor ajustava o comportamento médio da função escada quando esta era escrita como função de ε^2 . Como a relação III.9 é conhecida, este melhor ajuste deve

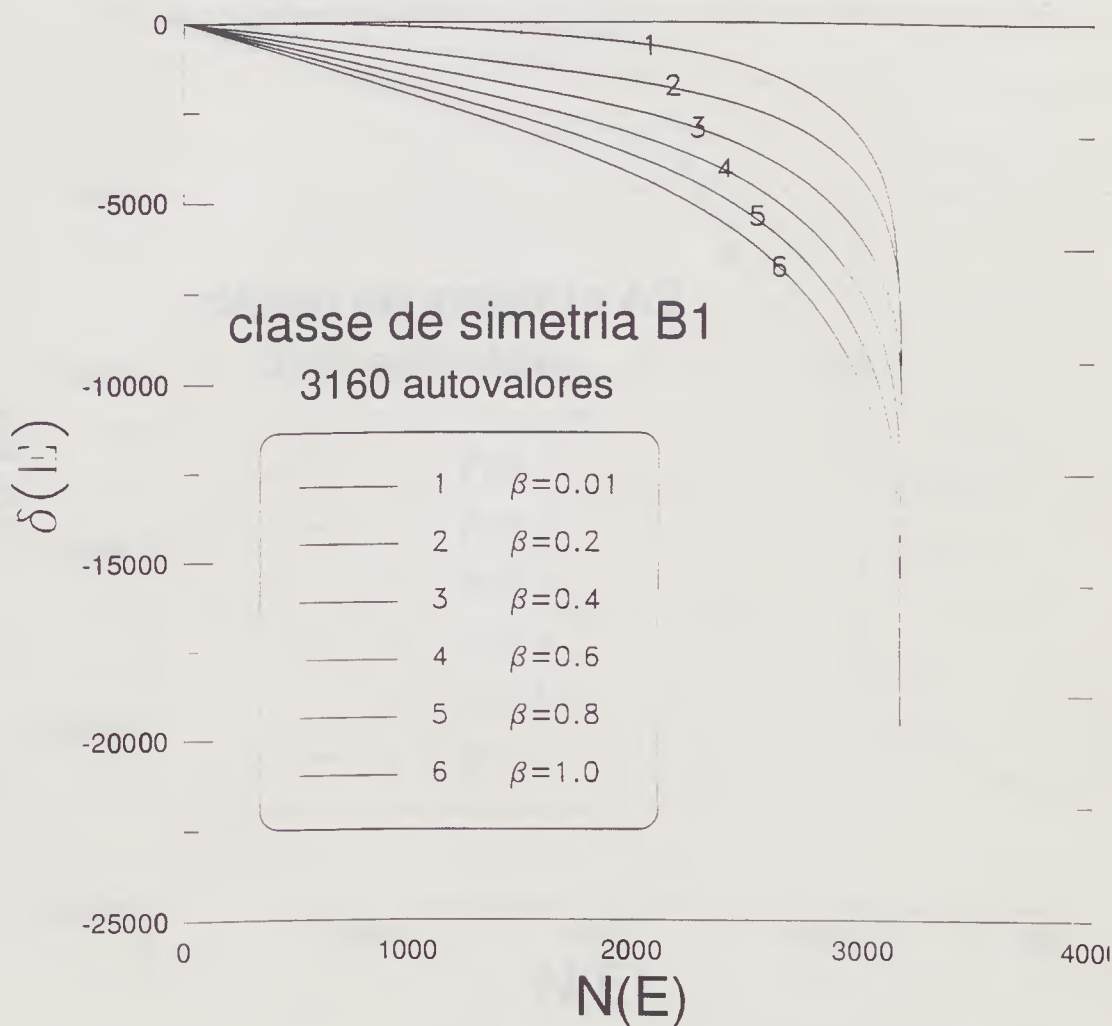


Figura III.5: $\delta(E)$ para a classe de simetria B1, 3160 autovalores e $\beta = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

ser fornecido por polinômios de grau um ou bastante próximo de um e os desvios deste comportamento dever-se-iam aos termos desprezados em III.9. A verificação da qualidade do ajuste seria feita tomando-se o resultado de III.9 com $\overline{N(E)}$ agora substituído por $\overline{N_{pol}(E)}$ e verificando se de fato o resultado oscila em torno do valor nulo. Polinômios de grau maior que um poderiam eventualmente ser mais adequados, visto não se saber qual a influência dos termos desprezados na expressão III.9 no resultado. mas ao mesmo tempo, graus muito maiores teriam o efeito de eliminar da função escada parte das flutuações estatísticas que se desejava estudar. Os resultados obtidos para a classe de simetria A1 e valores de β entre 0.01 e 1.0 estão ilustrados nas figuras III.7 a III.12: aqui está representado

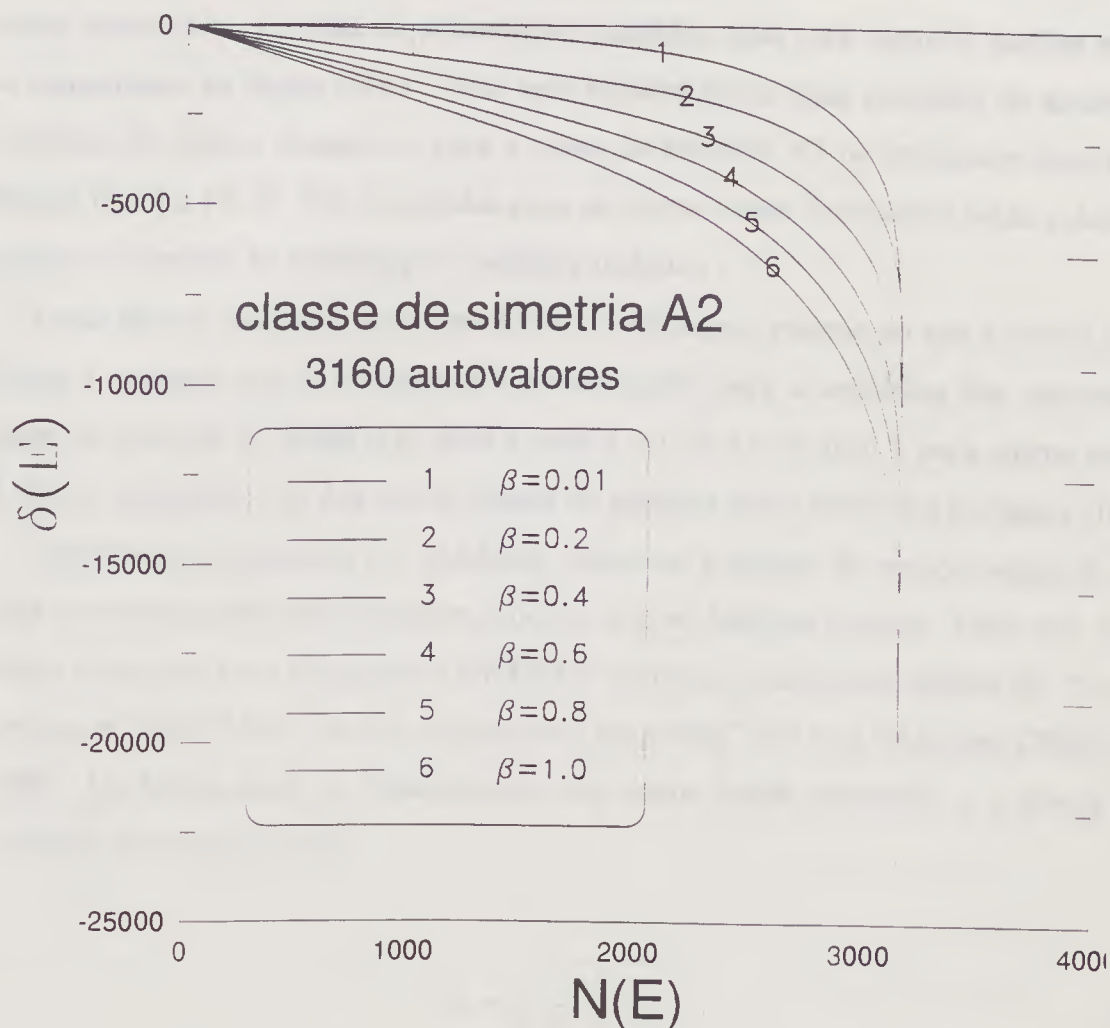


Figura III.6: $\delta(E)$ para a classe de simetria A2, 3160 autovalores e $\beta = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

o comportamento de $\delta(E)$ dada por III.8, onde $\overline{N_{pol}(E)}$ é o polinômio de grau indicado (o comportamento do *unfolding* para as outras classes de simetria é análogo ao da classe A1).

Olhando estas figuras, pode-se ver que em todos os casos, à exceção de $\beta = 0.01$ (fortemente caótico), o resultado obtido com o melhor polinômio de grau 1 ajustado é praticamente uma reta até um determinado ponto, a partir do qual o comportamento desvia-se fortemente do inicial. Isto sugere que ainda existam no espectro autovalores fortemente afetados pelo truncamento da base, que devem então ser eliminados da análise. justamente aqueles para os quais o comportamento retilíneo inicial das curvas deixa de ser válido; o caso particular de $\beta = 0.01$ é o mais crítico, sendo necessário um rigor ainda

maior neste caso. O total de autovalores mantidos após esta segunda análise encontra-se sumarizado na figura III.13. Com este número ainda mais reduzido de autovalores o *unfolding* foi refeito obtendo-se para a classe de simetria A1 os resultados ilustrados nas figuras III.14 a III.19. (Os resultados para as outras classe de simetria estão colocados no apêndice referente ao *unfolding* do oscilador quártico.)

Estas figuras mostram uma considerável melhora em relação ao que foi feito anteriormente e sugerem que os polinômios a serem usados para o *unfolding* dos autovalores da classe de simetria A1 sejam o de grau 2 para $\beta = 0.01$ e o de grau 3 para outros valores de β . Estes resultados e os das outras classes de simetria estão indicados na figura III.20.

Definida a convergência e o *unfolding*, passou-se a análise de espaçamentos de vizinho mais próximo através dos diferentes modelos que se desejava estudar. Para isto, foi construída uma rotina em linguagem FORTRAN utilizando subrotinas padrão do “Numerical Recipes in FORTRAN - the Art of Scientific Computing” [22] e da biblioteca CERN (versão 1996). Os histogramas de espaçamentos dos dados foram montados e o desvio padrão calculado da maneira usual

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{N_i}{N \times \text{bin}}}, \quad (\text{III.10})$$

onde σ_i é o desvio padrão do i -ésimo intervalo do histograma, N_i é o número de autovalores que contribuem para este intervalo, N é o número total de autovalores e bin é o passo escolhido para o histograma. Esta expressão é válida desde que $N_i \geq 4$, de modo que foram desconsiderados para o ajuste os pontos do histograma que não satisfizeram este critério [23].

Os histogramas assim obtidos foram normalizados para área unitária e os resultados estão expressos nas figuras C.1-C.24 e na tabela 1. Nesta tabela vê-se os grupos formados pela escolha de uma das quatro classes de simetria e um valor do parâmetro β , o número de espaçamentos usado no histograma ($N-1$), o número de intervalos (M), o valor médio do desvio padrão dos pontos e os vários parâmetros ajustados para os vários modelos [DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani (C-G-R), Lenz-Haake (L-H), Brody e Berry-Robnik (B-R)], chamados genericamente de γ , com os respectivos desvio padrão e chi-quadrado normalizado

maior neste caso. O total de autovalores mantidos após esta segunda análise encontra-se sumarizado na figura III.13. Com este número ainda mais reduzido de autovalores o *unfolding* foi refeito obtendo-se para a classe de simetria A1 os resultados ilustrados nas figuras III.14 a III.19. (Os resultados para as outras classe de simetria estão colocados no apêndice referente ao *unfolding* do oscilador quártico.)

Estas figuras mostram uma considerável melhora em relação ao que foi feito anteriormente e sugerem que os polinômios a serem usados para o *unfolding* dos autovalores da classe de simetria A1 sejam o de grau 2 para $\beta = 0.01$ e o de grau 3 para outros valores de β . Estes resultados e os das outras classes de simetria estão indicados na figura III.20.

Definida a convergência e o *unfolding*, passou-se a análise de espaçamentos de vizinho mais próximo através dos diferentes modelos que se desejava estudar. Para isto, foi construída uma rotina em linguagem FORTRAN utilizando subrotinas padrão do “Numerical Recipes in FORTRAN - the Art of Scientific Computing” [22] e da biblioteca CERN (versão 1996). Os histogramas de espaçamentos dos dados foram montados e o desvio padrão calculado da maneira usual

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{N_i}{N \times bin}}, \quad (\text{III.10})$$

onde σ_i é o desvio padrão do i-ésimo intervalo do histograma, N_i é o número de autovalores que contribuem para este intervalo, N é o número total de autovalores e *bin* é o passo escolhido para o histograma. Esta expressão é válida desde que $N_i \geq 4$, de modo que foram desconsiderados para o ajuste os pontos do histograma que não satisfizeram este critério [23].

Os histogramas assim obtidos foram normalizados para área unitária e os resultados estão expressos nas figuras C.1-C.24 e na tabela 1. Nesta tabela vê-se os grupos formados pela escolha de uma das quatro classes de simetria e um valor do parâmetro β , o número de espaçamentos usado no histograma ($N-1$), o número de intervalos (M), o valor médio do desvio padrão dos pontos e os vários parâmetros ajustados para os vários modelos [DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani (C-G-R), Lenz-Haake (L-H), Brody e Berry-Robnik (B-R)], chamados genericamente de γ , com os respectivos desvio padrão e chi-quadrado normalizado

do ajuste, calculado da maneira usual

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left(\frac{P_{\text{dados}}(x_i) - P_{\text{mod}}(x_i, \gamma_{\text{mod}})}{\sigma_i} \right)^2, \quad (\text{III.11})$$

onde x_i corresponde ao espaçamento normalizado $s_i / \langle s \rangle$.

Antes de passar aos comentários sobre os resultados da tabela 1, vale a pena lembrar os limites dos parâmetros dos vários modelos que fornecem as situações de máxima regularidade e máxima caoticidade. Para o DGOE as situações de máxima caoticidade e de máxima regularidade são obtidas quando o parâmetro $\gamma_{\text{DGOE}} = 0$ e quando $\gamma_{\text{DGOE}} \rightarrow \infty$, respectivamente; para C-G-R, L-H e Brody estes valores são 1 e 0 respectivamente e para B-R, 0 e 1. Estes valores estão expressos na tabela da figura II.4.

A primeira observação importante que pode ser feita sobre a tabela 1 diz respeito à coerência entre os diversos modelos no que tange à transição caos-ordem: vemos que os parâmetros dos diversos modelos mostram esta transição quando o parâmetro β da hamiltoniana do oscilador quártico varia entre 0.01 e 1.0 para uma mesma classe de simetria, respeitados os respectivos desvios padrão. A discrepância mais notável é apresentada pelo modelo de C-G-R, onde sequer a faixa de variação do desvio padrão comporta a idéia de uma transição caos-ordem suave para $\beta = 0.01 \rightarrow 1.0$. Considerando o excelente acordo entre os outros modelos, pode-se concluir que tais discrepâncias estão associadas às fortes aproximações usadas nos cálculos do modelo de C-G-R, comprometendo a qualidade desta descrição.

Ainda falando sobre os modelos, vemos que o parâmetro do modelo DGOE apresenta uma rápida saturação para seu valor máximo admitido para o cálculo numérico (500.00). Este comportamento deve ser influenciado por dois fatores: primeiramente o fato de que o modelo do DGOE só atinge a situação de máxima regularidade quando $\gamma_{\text{DGOE}} \rightarrow \infty$ e para efeito de cálculo numérico é necessário estabelecer uma faixa dentro da qual o parâmetro poderá ser ajustado³. Esta dificuldade entretanto pode ser contornada considerando-se os valores de $\overline{\chi^2}$, visto valores maiores desta grandeza indicarem um desvio maior dos dados

³Para verificar uma possível dependência deste comportamento com a subrotina de ajuste foram ainda testadas as subrotinas do pacote IMSL, sem mudança perceptível dos resultados.

com relação a curva ajustada (isto foi testado ampliando-se a faixa de valores permitidos para o parâmetro do modelo e verificando que os $\overline{\chi^2}$ diminuíam para valores do parâmetro maiores que 500.00, nas situações em questão). Além disso, vê-se que os modelos L-H, Brody e B-R também apresentam uma saturação, não necessariamente no valor limite para o parâmetro em cada caso.

Em segundo fator relevante é o próprio comportamento dos dados. Vemos das figuras C.1 - C.24 que quando o valor de β cresce os dados não apresentam a repulsão de níveis em $x_i = 0$, que só deveria desaparecer na situação de máxima regularidade. Este comportamento aparentemente estranho não deve mais ser observado se tomada uma resolução menor para o histograma próximo a $s = 0$, como feito em [24]. Como dentre os modelos estudados apenas aquele de Berry e Robnik é capaz de descrever esta situação, é razoável esperar que neste caso os valores de $\overline{\chi^2}$ sejam os menores.

Pode-se comparar ainda os resultados para um mesmo valor de β para diferentes classes de simetria. Vê-se que para $\beta = 0.01$, na passagem $A1 \rightarrow B2 \rightarrow B1 \rightarrow A2$ (sentido de crescimento do estado de mais baixa energia) os resultados sugerem um aumento da caoticidade que falha para a classe B1; já para outros valores de β este aumento não é tão claro mesmo quando considerados os desvios padrão. Ao contrário, os resultados parecem sugerir uma tendência de aumento da regularidade na passagem $A1 \rightarrow B2 \rightarrow B1 \rightarrow A2$, que parece falhar em A2 (vide o caso $\beta = 1.0$). Estas fortes variações de comportamento são mostradas por todos os modelos, com maior ou menor clareza, sugerindo ser esta uma característica do próprio sistema, mais do que falha nas descrições propostas.

GRUPO	N-1	M	DGOE		C-G-R		L-H		Brody		B-R	
			$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2
classe A1, $\beta = 0.01$	499	12	0.05	1.42	0.35 $\pm$ 0.01	5.03	0.62 $\pm$ 0.14	1.64	0.83 $\pm$ 0.07	1.23	0.06 $\pm$ 0.03	1.12
classe A1, $\beta = 0.2$	1499	30	0.06	3.69	0.23 $\pm$ 0.01	3.19	0.29 $\pm$ 0.02	2.39	0.48 $\pm$ 0.03	0.91	0.22 $\pm$ 0.02	1.47
classe A1, $\beta = 0.4$	1496	34	0.06	500.00 $\pm$ 0.15	0.23 $\pm$ 0.01	4.86	0.26 $\pm$ 0.03	6.19	0.13 $\pm$ 0.02	0.83	0.52 $\pm$ 0.02	0.48
classe A1, $\beta = 0.6$	1496	33	0.05	500.00 $\pm$ 0.15	0.17 $\pm$ 0.01	4.51	0.26 $\pm$ 0.03	6.38	0.15 $\pm$ 0.03	1.29	0.50 $\pm$ 0.02	0.99
classe A1, $\beta = 0.8$	1495	34	0.06	500.00 $\pm$ 0.16	0.28 $\pm$ 0.01	5.47	0.27 $\pm$ 0.03	5.98	0.14 $\pm$ 0.03	1.08	0.54 $\pm$ 0.02	0.81
classe A1, $\beta = 1.0$	1495	35	0.06	500.00 $\pm$ 0.17	0.31 $\pm$ 0.01	6.84	0.25 $\pm$ 0.03	7.29	0.10 $\pm$ 0.03	1.77	0.64 $\pm$ 0.02	1.80
classe B2, $\beta = 0.01$	499	12	0.07	3.12 $\pm$ 0.08	0.25	4.85	0.76 $\pm$ 0.10	0.52	0.91 $\pm$ 0.03	0.24	0.03 $\pm$ 0.01	0.25
classe B2, $\beta = 0.2$	1482	33	0.06	24.59 $\pm$ 0.11	2.44	4.64	0.27 $\pm$ 0.02	2.44	0.35 $\pm$ 0.03	1.95	0.33 $\pm$ 0.04	4.00
classe B2, $\beta = 0.4$	1489	35	0.05	500.00 $\pm$ 0.15	4.15	6.32	0.23 $\pm$ 0.02	7.60	0.04 $\pm$ 0.02	1.19	0.75 $\pm$ 0.01	1.21
classe B2, $\beta = 0.6$	1489	37	0.05	500.00 $\pm$ 0.14	3.64	5.52	0.24 $\pm$ 0.02	6.42	0.07 $\pm$ 0.02	1.11	0.65 $\pm$ 0.02	1.14
classe B2, $\beta = 0.8$	1489	35	0.06	500.00 $\pm$ 0.16	4.69	5.58	0.24 $\pm$ 0.03	7.63	0.03 $\pm$ 0.02	0.88	0.72 $\pm$ 0.01	0.81
classe B2, $\beta = 1.0$	1487	37	0.06	500.00 $\pm$ 0.14	3.94	2.49	0.23 $\pm$ 0.02	7.11	0.01 $\pm$ 0.02	0.60	0.86 $\pm$ 0.01	0.61
classe B1, $\beta = 0.01$	449	12	0.08	3.05 $\pm$ 0.12	0.45	4.91	0.71 $\pm$ 0.11	0.67	0.96 $\pm$ 0.05	0.54	0.02 $\pm$ 0.02	0.55
classe B1, $\beta = 0.2$	1385	31	0.06	24.09 $\pm$ 0.08	1.24	3.68	0.25 $\pm$ 0.01	1.39	0.46 $\pm$ 0.03	1.65	0.20 $\pm$ 0.04	3.73
classe B1, $\beta = 0.4$	1388	35	0.06	500.00 $\pm$ 0.15	3.99	4.39	0.25 $\pm$ 0.03	7.47	0.03 $\pm$ 0.02	1.06	0.77 $\pm$ 0.02	1.05
classe B1, $\beta = 0.6$	1394	36	0.06	500.15 $\pm$ 0.17	5.48	8.01	0.21 $\pm$ 0.02	9.07	0.01 $\pm$ 0.01	1.24	0.81 $\pm$ 0.01	1.27
classe B1, $\beta = 0.8$	1393	35	0.06	500.17 $\pm$ 0.17	5.45	8.12	0.25 $\pm$ 0.03	8.50	2.21 $\pm$ 0.02	1.11	0.76 $\pm$ 0.02	1.11
classe B1, $\beta = 1.0$	1389	37	0.05	500.00 $\pm$ 0.14	3.97	3.11	0.23 $\pm$ 0.02	7.00	0.01 $\pm$ 0.02	0.65	0.88 $\pm$ 0.01	0.65
classe A2, $\beta = 0.01$	449	11	0.08	2.93 $\pm$ 0.24	1.66	6.36	0.83 $\pm$ 0.23	2.17	0.99 $\pm$ 0.01	1.34	0.01 $\pm$ 0.01	1.34
classe A2, $\beta = 0.2$	1399	30	0.06	8.75 $\pm$ 0.13	2.47	2.63	0.29 $\pm$ 0.02	1.56	0.56 $\pm$ 0.02	0.64	0.16 $\pm$ 0.02	1.44
classe A2, $\beta = 0.4$	1398	34	0.06	500.00 $\pm$ 0.16	4.10	6.07	0.25 $\pm$ 0.03	6.48	0.12 $\pm$ 0.02	1.03	0.56 $\pm$ 0.02	0.83
classe A2, $\beta = 0.6$	1395	33	0.06	500.00 $\pm$ 0.14	3.41	4.17	0.26 $\pm$ 0.03	5.68	0.14 $\pm$ 0.03	1.16	0.52 $\pm$ 0.02	0.93
classe A2, $\beta = 0.8$	1397	34	0.06	500.00 $\pm$ 0.14	3.51	4.60	0.26 $\pm$ 0.03	6.10	0.10 $\pm$ 0.02	0.97	0.60 $\pm$ 0.02	0.91
classe A2, $\beta = 1.0$	1396	35	0.06	500.00 $\pm$ 0.16	4.20	3.90	0.26 $\pm$ 0.03	5.25	0.13 $\pm$ 0.03	1.34	0.57 $\pm$ 0.02	1.36

Tabela 1 - Conjuntos de dados do oscilador quártico separados segundo classe de simetria e valor do parâmetro da hamiltoniana (β), número de espaçamentos usados no histograma (N-1), número de pontos do histograma (M), desvio padrão médio dos pontos do histograma ($\bar{\sigma}_{hist}$), valores de parâmetro e respectivos desvios padrão ($\gamma \pm \sigma_{par}$) e χ^2 dos ajustes dos diversos modelos: DGOE, Cauchy-Grammaticos-Ramani (C-G-R), Lenz-Haake (L-H), Brody (Brody) e Berry-Robnik (B-R), conforme o texto.

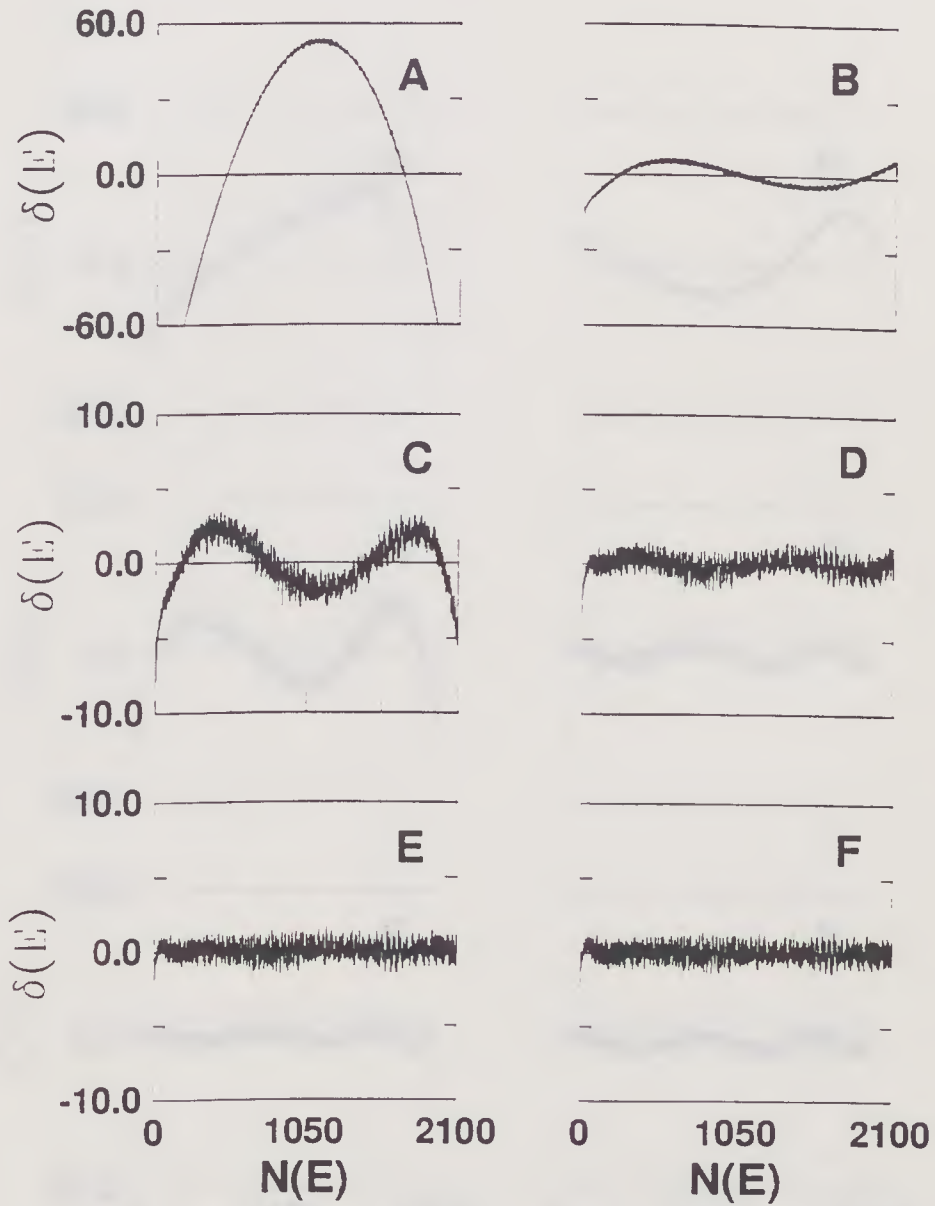


Figura III.7: $\delta(E) = N(E) - \overline{N_{pol}(E)}$ para a classe de simetria A1, 2100 primeiros autovalores e $\beta = 0.01$. (A) corresponde a $\overline{N_{pol}(E)}$ ajustado por um polinômio de grau 1, (B) por um polinômio de grau 2 e assim sucessivamente até (F), ajuste através de um polinômio de grau 6.

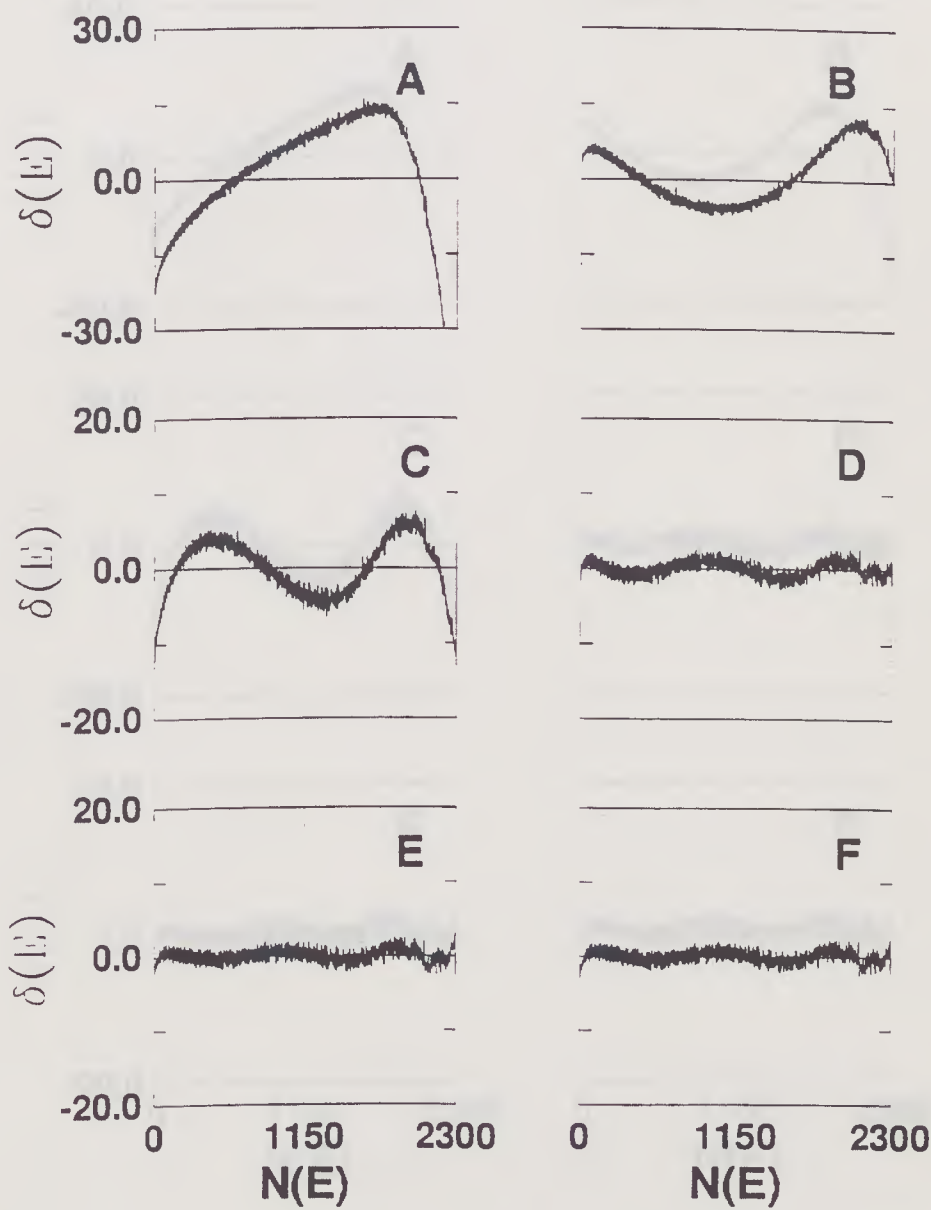
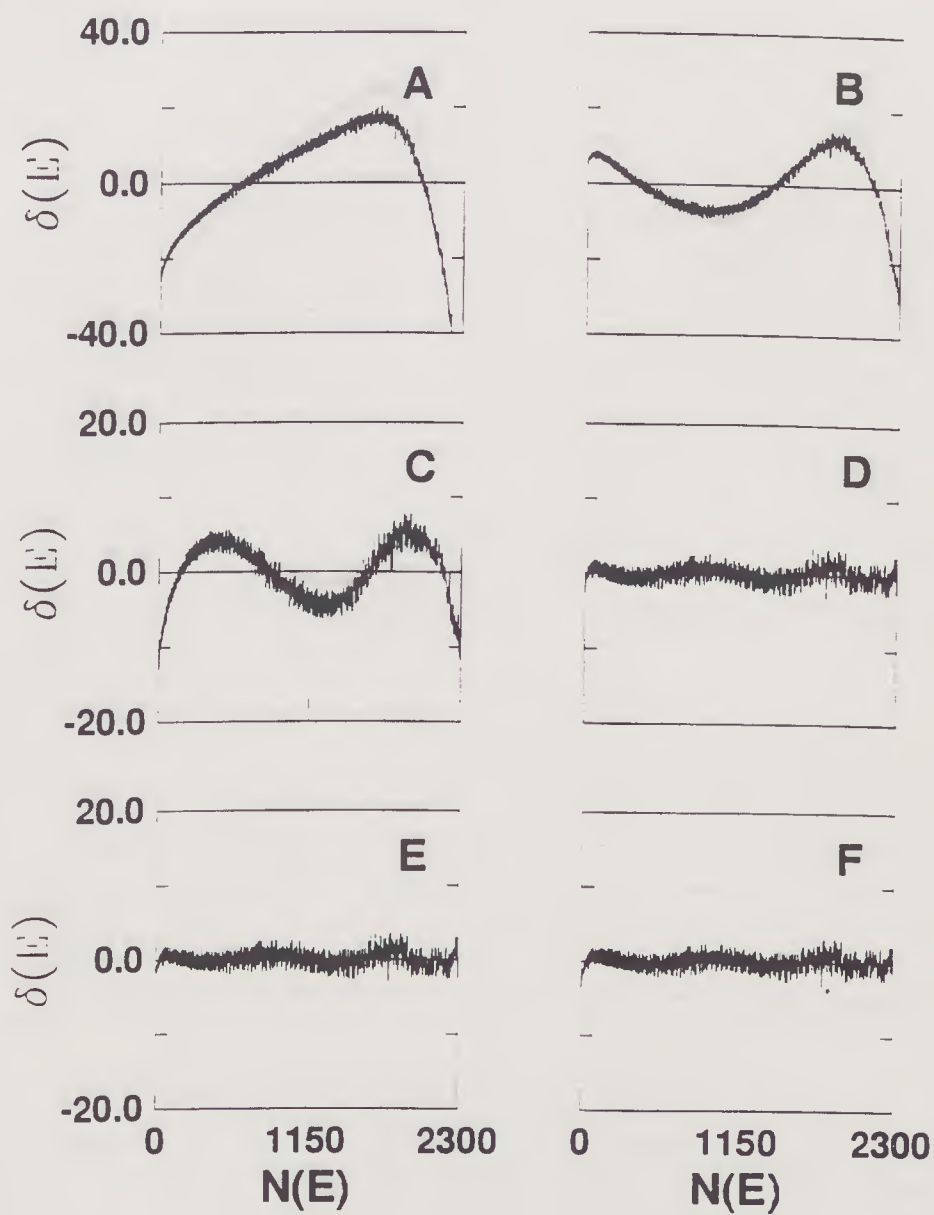


Figura III.8: Idem à figura anterior com 2300 autovalores e $\beta = 0.2$.

Figura III.9: Idem à figura anterior com 2300 autovalores e $\beta = 0.4$.

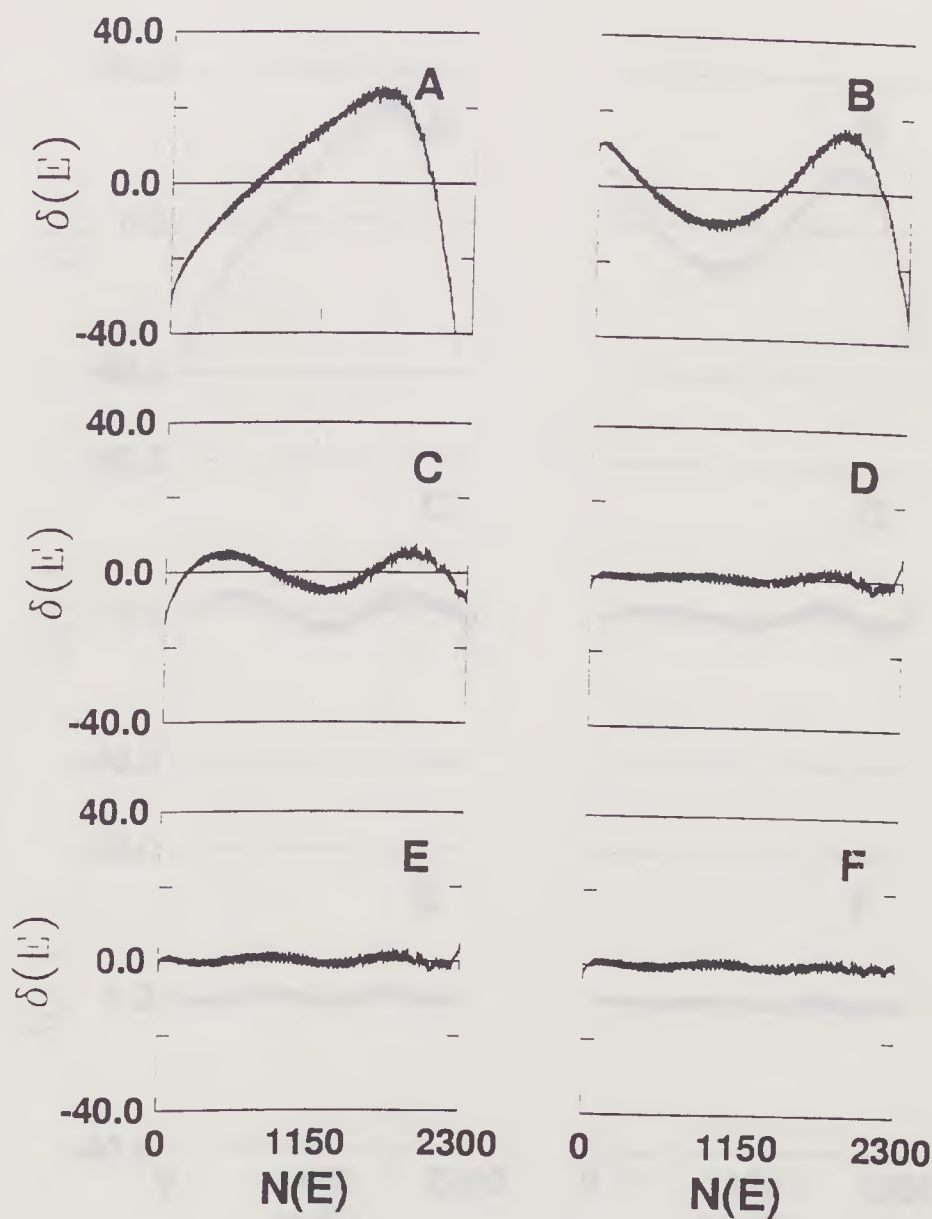


Figura III.10: Idem à figura anterior com 2300 autovalores e $\beta = 0.6$.

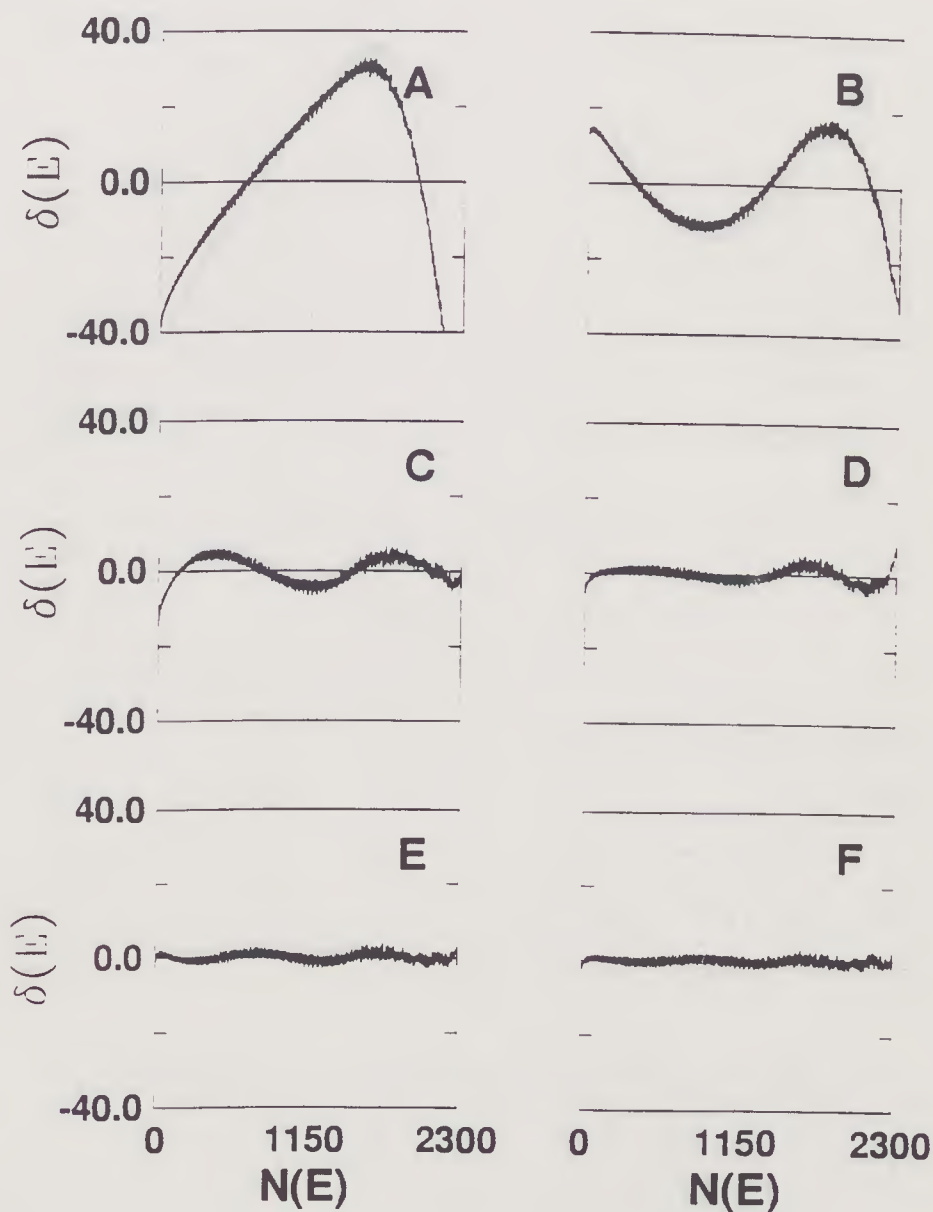


Figura III.11: Idem à figura anterior com 2300 autovalores e $\beta = 0.8$.

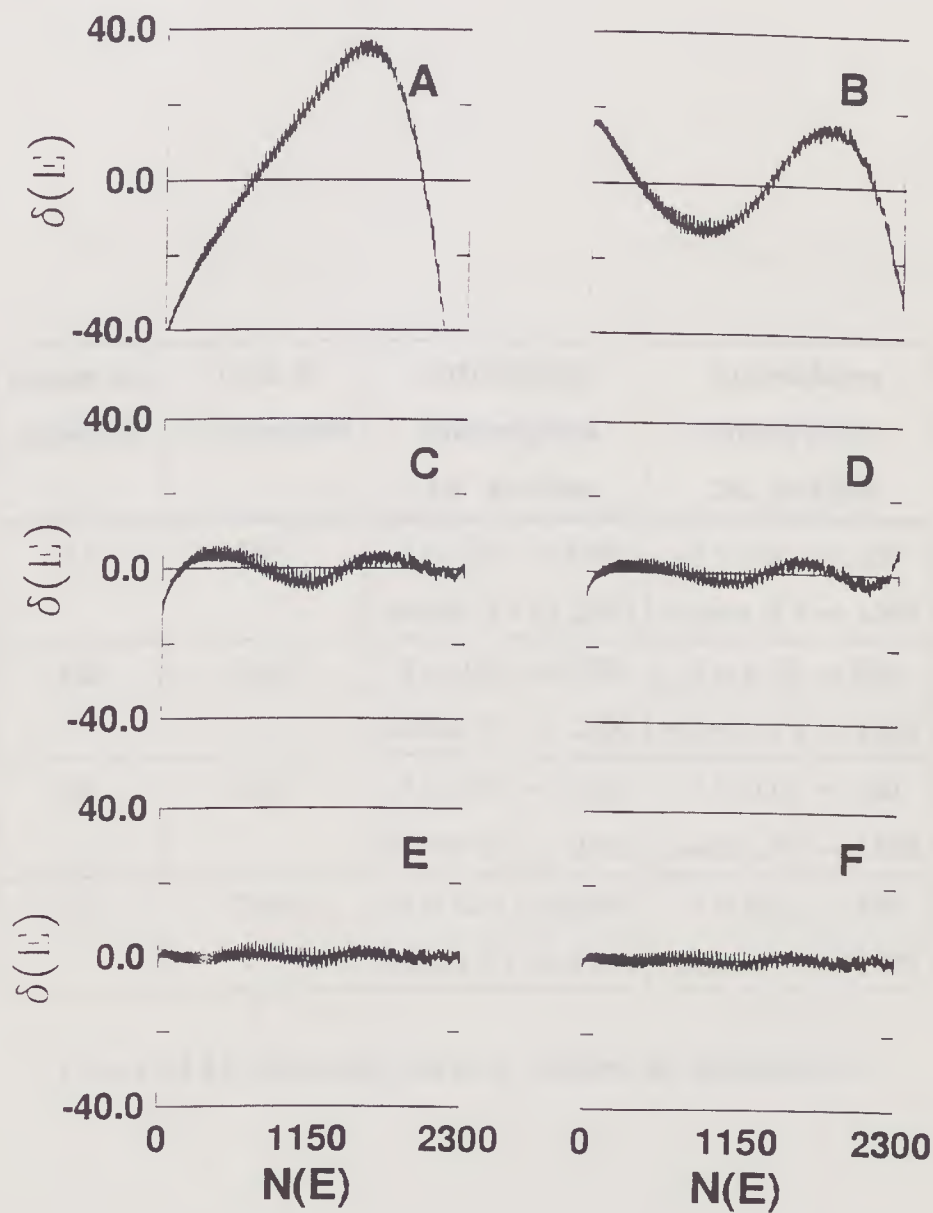


Figura III.12: Idem à figura anterior com 2300 autovalores e $\beta = 1.0$.

classe de simetria	total de autovalores	autovalores convergidos 1a. análise	autovalores convergidos 2a. análise
A1	3240	$\beta = 0.01 \rightarrow 2100$ outros β 's $\rightarrow 2300$	$\beta = 0.01 \rightarrow 500$ outros β 's $\rightarrow 1500$
B2	3240	$\beta = 0.01 \rightarrow 2100$ outros β 's $\rightarrow 2300$	$\beta = 0.01 \rightarrow 500$ outros β 's $\rightarrow 1500$
B1	3160	$\beta = 0.01 \rightarrow 1800$ outros β 's $\rightarrow 2100$	$\beta = 0.01 \rightarrow 450$ outros β 's $\rightarrow 1400$
A2	3160	$\beta = 0.01 \rightarrow 1800$ outros β 's $\rightarrow 2100$	$\beta = 0.01 \rightarrow 450$ outros β 's $\rightarrow 1400$

Figura III.13: Resultado das duas análises de convergência.

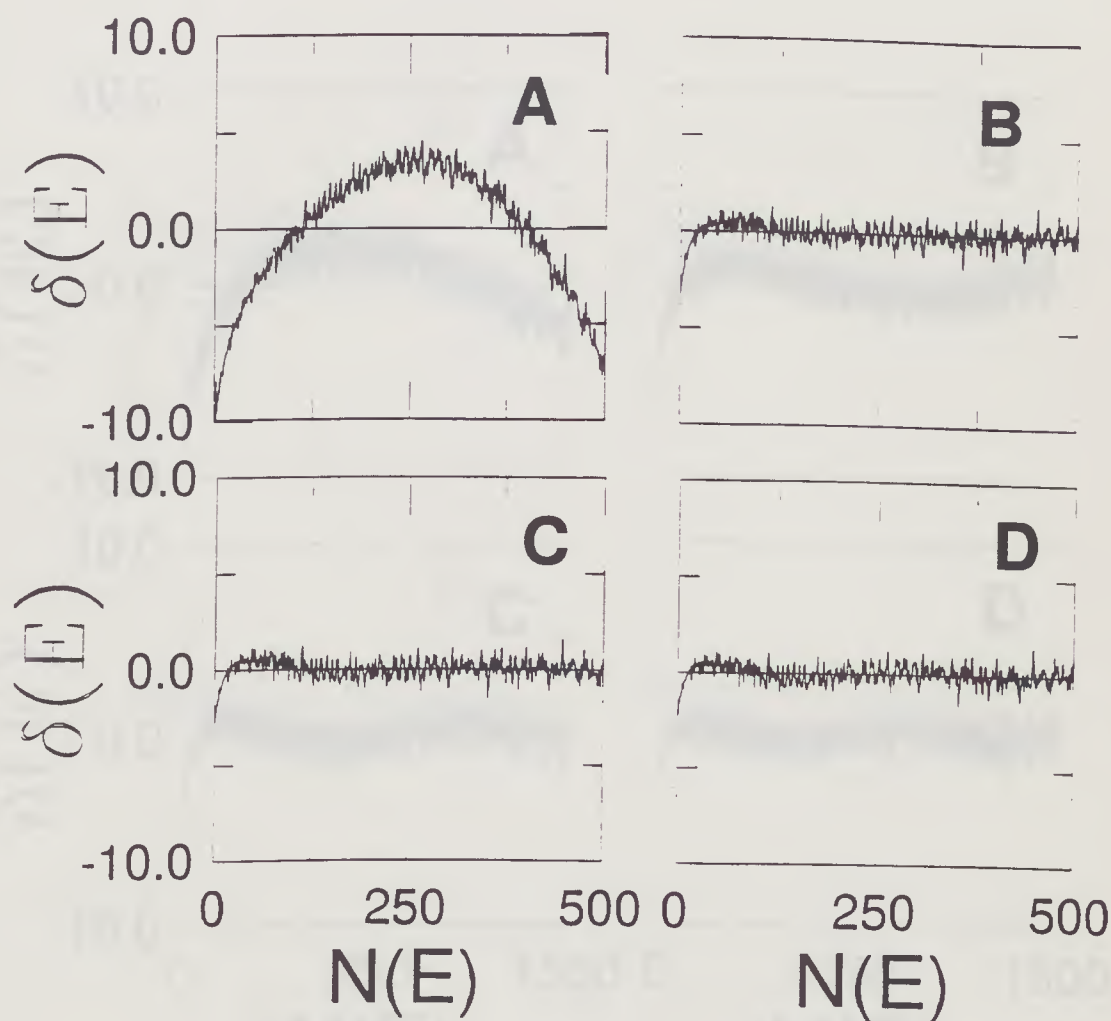


Figura III.14: $\delta(E) = N(E) - \overline{N_{pol}(E)}$ para a classe de simetria A1, 500 primeiros autovalores e $\beta = 0.01$. (A) corresponde a $\overline{N_{pol}(E)}$ ajustado por um polinômio de grau 1, (B) por um polinômio de grau 2 e assim sucessivamente até (D), ajuste através de um polinômio de grau 4.

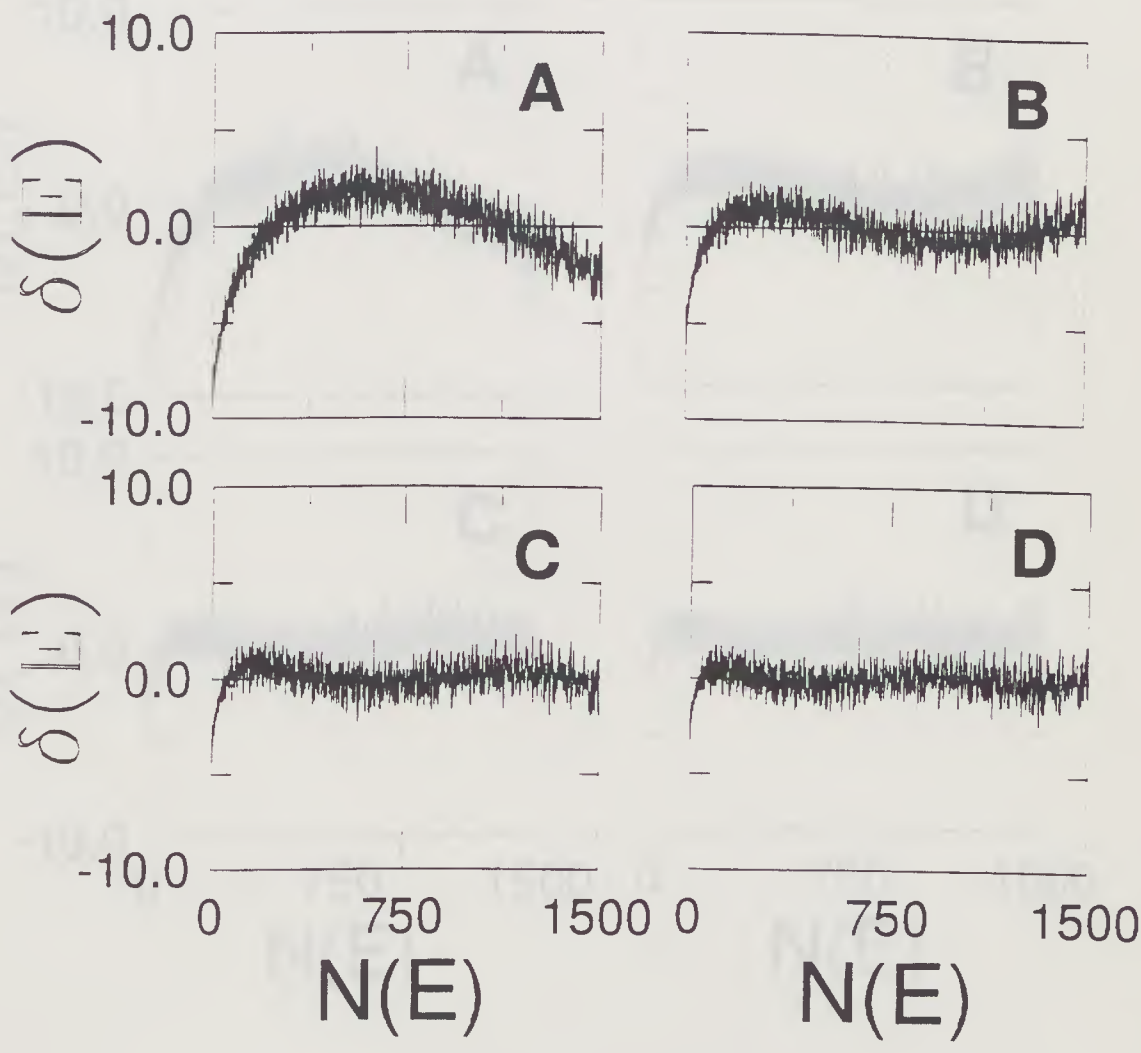


Figura III.15: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.2$.

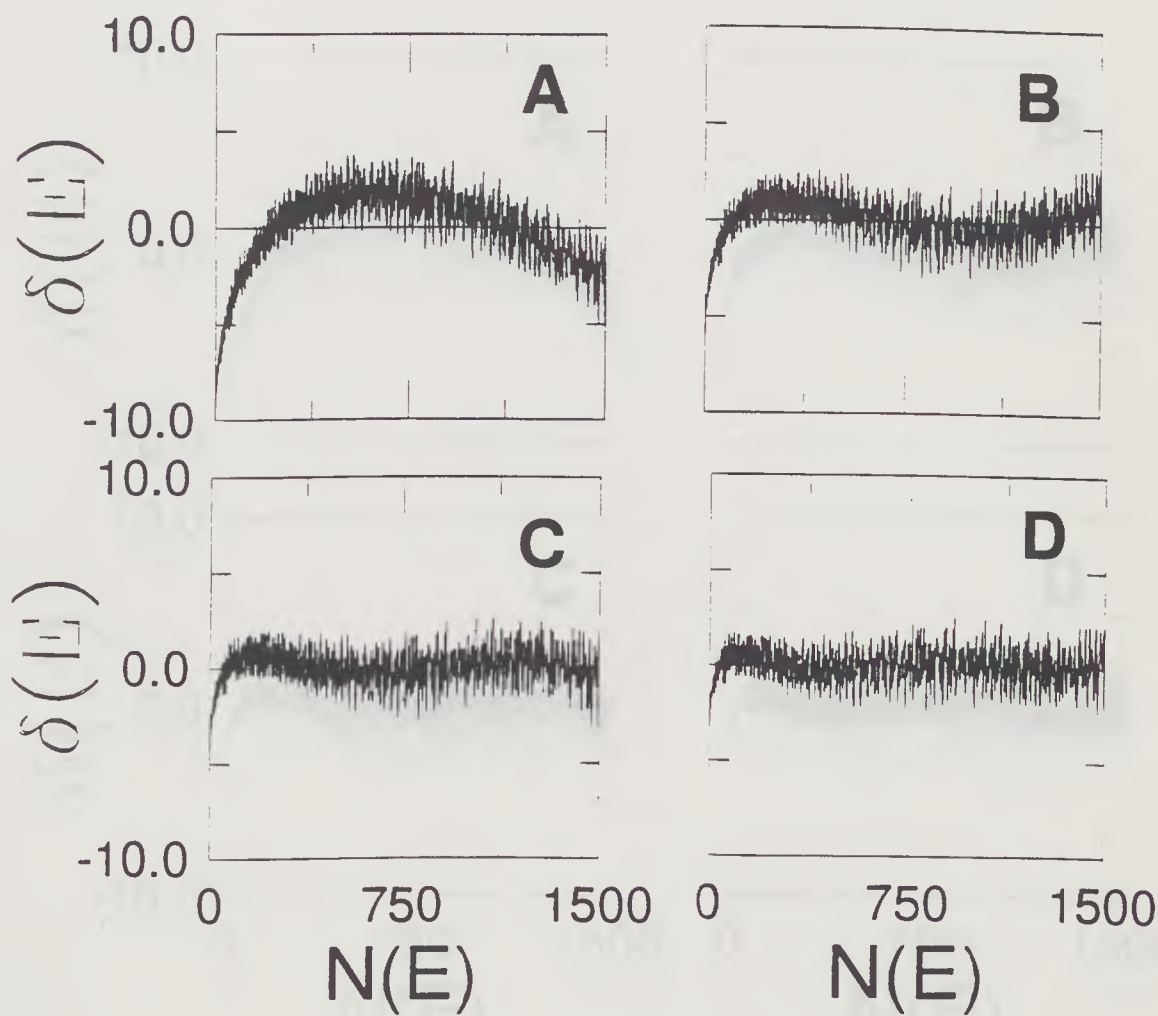


Figura III.16: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.4$.

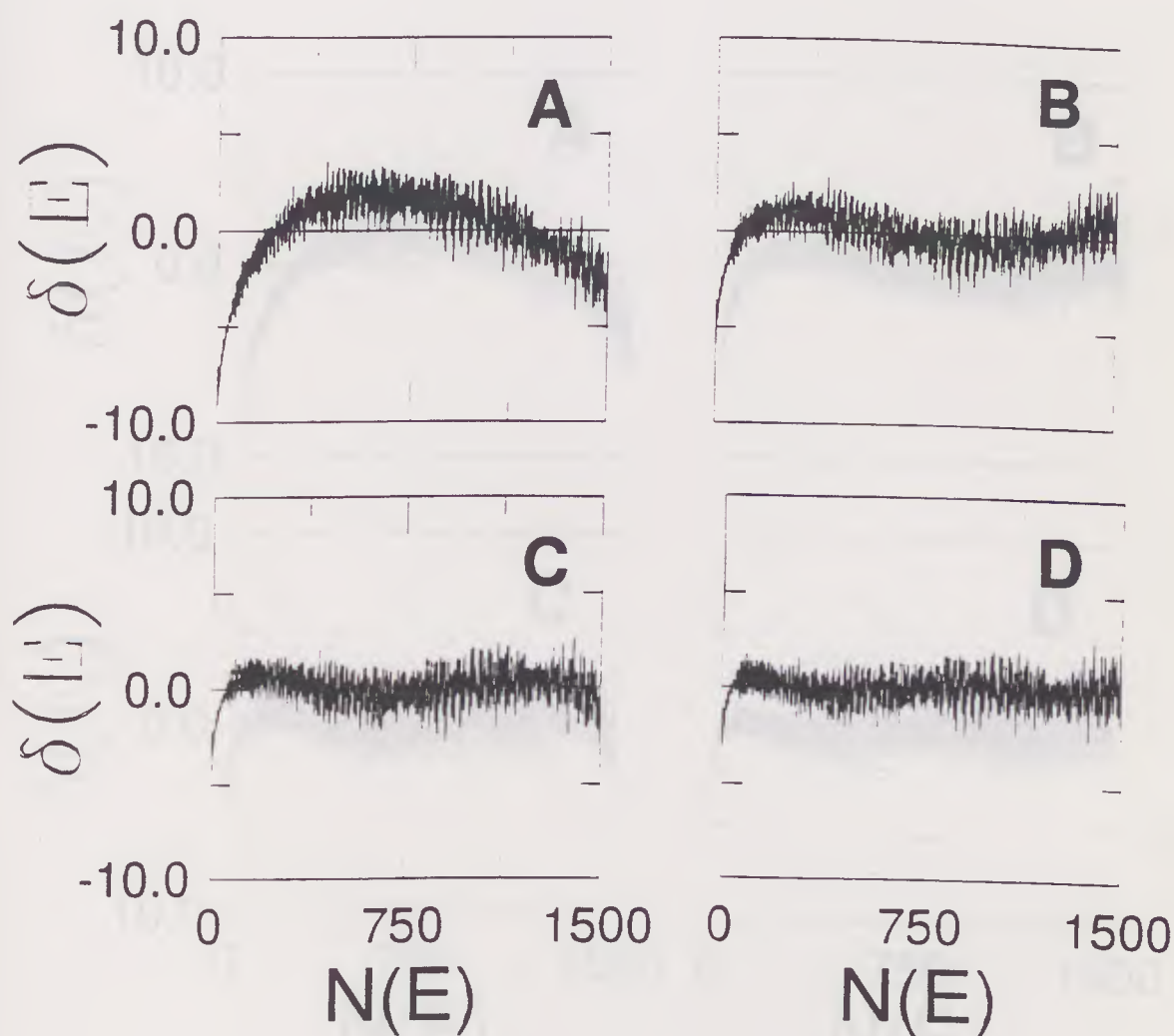


Figura III.17: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.6$.

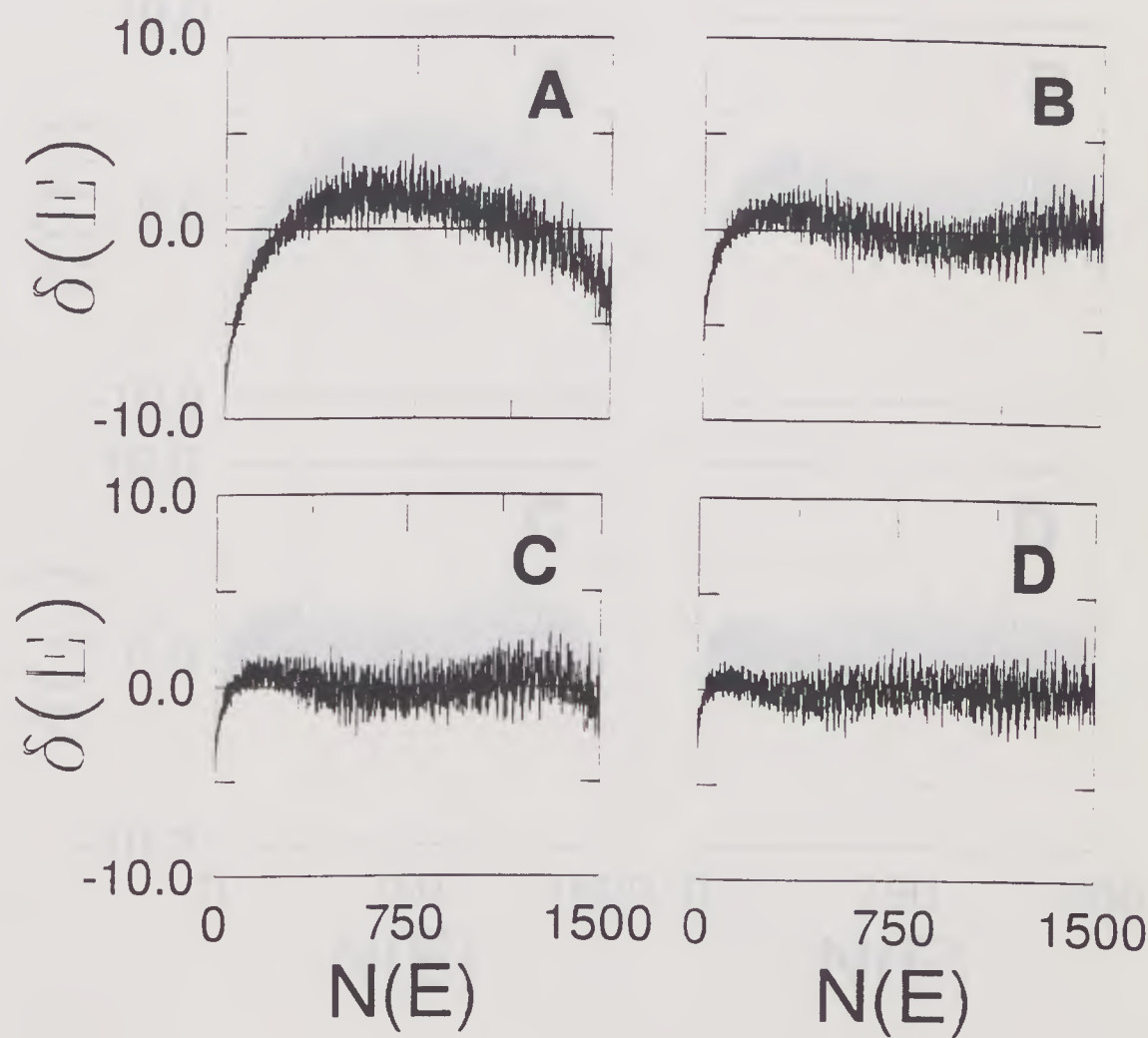


Figura III.18: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.8$.

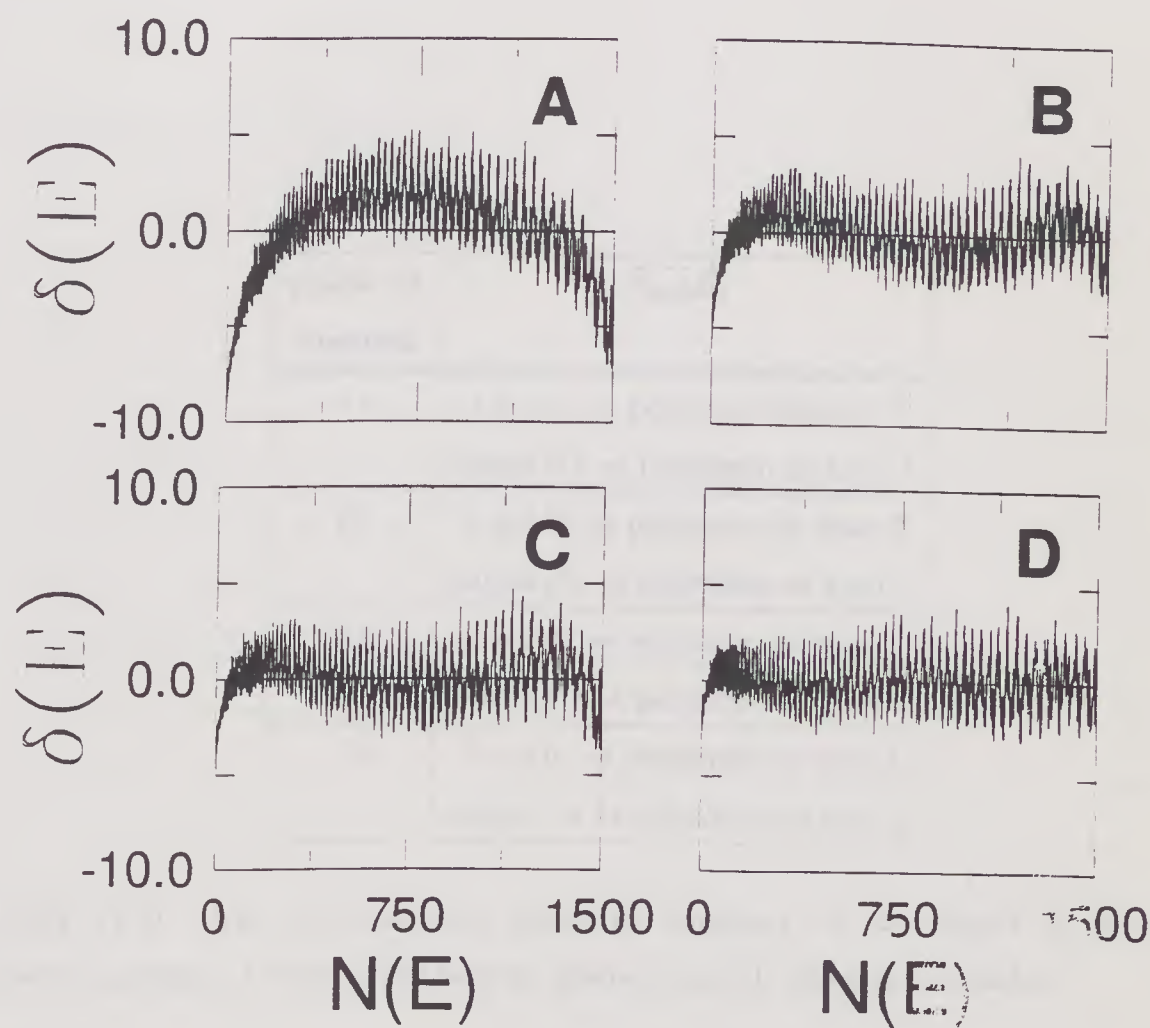


Figura III.19: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 1.0$.

classe de simetria	$\overline{N_{pol}(E)}$
A1	$\beta = 0.01 \rightarrow$ polinômio de grau 2 outros β 's $\rightarrow$ polinômio de grau 3
B2	$\beta = 0.01 \rightarrow$ polinômio de grau 2 outros β 's $\rightarrow$ polinômio de grau 1
B1	$\beta = 0.01 \rightarrow$ polinômio de grau 3 outros β 's $\rightarrow$ polinômio de grau 1
A2	$\beta = 0.01 \rightarrow$ polinômio de grau 3 outros β 's $\rightarrow$ polinômio de grau 3

Figura III.20: Grau dos polinômios usados no *unfolding* dos autovalores do oscilador quártico isotrópico bidimensional para as quatro classes de simetria analisadas.

Capítulo IV

O Espectro Nuclear

Outro problema analisado nesta tese foi o das distribuições de espaçamentos de vizinho mais próximo para sistemas nucleares apresentadas por J.F. Shriner Jr., G.E. Mitchell e T. von Egidy em [25]. Nesse trabalho os autores investigaram a possível relação entre propriedades usuais de sistemas nucleares, tais como massa, deformação, spin e paridade, com a presença de caos, usando para isso a estatística de espaçamentos de vizinho mais próximo obtida a partir de um conjunto de espectros nucleares retirado da literatura.

Conforme dito anteriormente, o problema da descrição dos estados nucleares de mais alta energia foi aquele para o qual a RMT foi originalmente desenvolvida e também o seu primeiro grande sucesso [8]. Entretanto, sistemas nucleares apresentam ainda outro aspecto relevante: há fortes indicações de que coexistam no núcleo estados regulares e caóticos [26], o que torna o estudo destes sistemas através das técnicas da RMT particularmente interessante e um teste bastante importante para todos os modelos propostos para descrever a região de transição caos-ordem. Ao contrário do oscilador quártico, não se tem um panorama muito claro das condições em que surge caos em sistemas nucleares. Isto transforma esta análise num trabalho recursivo: a partir dos resultados tentar-se-á inferir não só em que condições as várias descrições propostas são válidas mas também, se existe um padrão de comportamento para sistemas nucleares que possa ser identificado como caótico.

Uma das dificuldades encontradas na análise estatística segundo a RMT diz respeito a necessidade dos espectros estudados terem que ser completos e de extrema confiança, visto

variações no espectro afetarem drasticamente as flutuações estatísticas. Este problema já foi discutido quando se apresentou o problema do oscilador quártico e toda a análise de convergência necessária naquele caso. Aqui a questão da completeza do espectro surge sob outro prisma, o dos dados obtidos experimentalmente.

Inicialmente foram considerados espectros de 90 núclídeos, tomados a partir do nível fundamental até o último nível de spin e/ou paridade bem determinada. O critério de escolha destes núclídeos foi o de que pelo menos os dez primeiros níveis tivessem spin e paridade definidos; para os casos em que estes valores eram dúbios, informações obtidas dos modelos teóricos foram utilizadas. Tais espectros foram obtidos, na sua maioria, através da reação de captura de neutrons, visto esta reação fornecer um bom grau de completeza dos espectros obtidos. Acredita-se que menos que 5% dos níveis considerados estejam erroneamente atribuídos ou faltando, de modo que os espectros obtidos são de excelente confiança. Exigiu-se ainda que as sequências tivessem um número mínimo de 5 níveis, o que reduziu a lista original para 60 núclídeos, tabelados nas figuras D.1 - D.6 (transcritas de [25]).

Novamente, de maneira a tornar possível a comparação entre espectros distintos, é necessário realizar o *unfolding* destes, ou em outras palavras, convertê-los em sequências de espaçamento médio unitário. Isto já foi feito para o caso do oscilador quártico isotrópico usando-se polinômios, visto não existir forma analítica definida para a função $\overline{N(E)}$ daquele problema. Aqui, pode-se fazer uso da relação empírica para a densidade de níveis

$$\overline{\rho(E)} = \frac{1}{T} \exp\left(\frac{E - E_o}{T}\right), \quad (\text{IV.1})$$

onde T é a “temperatura nuclear”, e T e E_o são parâmetros ajustáveis a cada caso. Por conveniência utiliza-se $\overline{N(E)}$ ao invés de $\overline{\rho(E)}$ para o ajuste, isto é

$$\overline{N(E)} = \int_0^E \overline{\rho(E)} dE = \exp\left(\frac{E - E_o}{T}\right) - \exp\left(-\frac{E_o}{T}\right) + N_o. \quad (\text{IV.2})$$

Aqui como antes, $\overline{N(E)}$ é o número médio de níveis com energia entre 0 e E , e N_o é outro parâmetro ajustável. Os efeitos de realizar o ajuste utilizando-se polinômios ao invés

da expressão IV.2 também foram examinados em [25], sem que tenham sido observadas diferenças apreciáveis entre os resultados obtidos em ambos os casos.

Os valores de T são aqueles calculados em [27] e estão tabelados nas figuras D.1 - D.6. E_o e N_o são obtidos para cada sequência minimizando-se a função

$$G(E_o, N_o) = \int_{E_{min}}^{E_{max}} [N_{exp}(E) - N_{fit}(E)]^2 dE , \quad (IV.3)$$

onde E_{min} e E_{max} são os limites de energia inferior e superior da sequência considerada respectivamente e $N_{fit}(E)$ é dada por IV.2. Chamando de $F(E)$ a função $N_{fit}(E)$ com os valores de N_o , E_o e T ajustados, os níveis podem ser então recalculados como

$$E'_i = F(E_i) . \quad (IV.4)$$

Ainda $E_{min} = F(E_{min})$ e $E_{max} = F(E_{max})$. Desta forma, escreve-se os novos espaçamentos como

$$s_i = \frac{E'_{i+1} - E'_i}{\langle s \rangle} , \quad (IV.5)$$

onde

$$\langle s \rangle = \frac{1}{M} \sum_i^{N-1} (E'_{i+1} - E'_i) \quad (IV.6)$$

e N é o número total de níveis na sequência.

Como pode ser visto das tabelas D.1 - D.6, o número de níveis em cada sequência é muito pequeno para permitir uma análise estatística significativa, de modo que as sequências foram então agrupadas segundo número de massa, deformação, spin e paridade. Os valores da distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo para cada grupo para cada valor de espaçamento, foi obtida através da média ponderada destes valores para cada sequência individual e as barras de erro mostradas nos histogramas foram calculadas em [25] aplicando-se o método de *bootstrap* de Efron [28]. O histograma assim obtido foi então normalizado para área unitária.

Os núcleos foram então separados segundo número de massa, deformação, spin e paridade, conforme mostrado na tabela 2; quanto à massa, tem-se $0 < A \leq 50$, $50 < A \leq 100$, $100 < A \leq 150$, $150 < A \leq 180$, $180 < A \leq 210$, $230 < A$. Quanto à deformação, foram classificados como deformados os núcleos com $150 < A \leq 180$ e $230 < A$; outros números de massa foram classificados como esféricos (esta classificação está baseada nos valores de deformação quadrupolar β_2 [29]). Os núcleos par-par que foram aqui classificados como deformados apresentam valores de β_2 maiores que $12\beta_{2\ sp}$, e os esféricos apresentam valores inferiores a $7\beta_{2\ sp}$, onde $\beta_{2\ sp}$ é uma estimativa de β_2 a partir de um modelo de partícula independente.

Os resultados obtidos na análise dos dados segundo a expressão de distribuição de espaçamentos do vizinho mais próximo dos modelos DGOE, E. Caurier, B. Grammaticos e A. Ramani, G. Lenz e F. Haake, M. V. Berry e M. Robnik e T. A. Brody, estão apresentados na tabela 2 e nas figuras E.1 a E.12. Na tabela vemos os valores ajustados para os parâmetros dos vários modelos para cada grupo de núclídeos considerado, com os respectivos desvio padrão e chi-quadrado normalizado dos ajustes; no caso particular do modelo de Brody, são apresentados dois valores, chamados de “Brody1” e “Brody2”, que correspondem respectivamente aos valores obtidos aqui e o fornecido em [25], que concordam em todos os casos apresentados (de fato, a discrepância entre os dois valores é tão pequena que não havia diferença perceptível entre as duas curvas, sendo que apenas Brody1 é mostrada nas figuras). É importante mais uma vez ter em mente a faixa de valores dos parâmetros dos vários modelos, conforme a tabela apresentada anteriormente (na figura II.4). A tabela 2 mostra ainda o número total de níveis considerado para cada grupo de núclídeos (N), o número de pontos do histograma (M) e o desvio padrão destes pontos (σ_{hist}), calculado pelo método de Efron anteriormente citado. Os valores de σ_{hist} são sempre os mesmos para todos os pontos do histograma, com exceção do grupo de núclídeos par-par esféricos de spin $2^+ 4^+$, onde os valores variam entre 0.08 e 0.11, e o valor mostrado na tabela é uma média aproximada para estes desvios. Os valores de chi-quadrado normalizado para os ajustes, $\overline{\chi^2}$, foram calculados como no caso do oscilador quártico

$$\overline{\chi^2} = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left(\frac{P_{exp}(x_i) - P_{mod}(x_i, \gamma_{mod})}{\sigma_i} \right)^2, \quad (IV.7)$$

onde M é o número de pontos do histograma, x_i corresponde ao espaçamento normalizado $s_i / \langle s \rangle$, $P_{exp}(x_i)$ é o valor da distribuição de vizinhos mais próximos dos dados no ponto x_i , $P_{mod}(x_i, \gamma_{mod})$ é o valor da distribuição fornecida pelo modelo para o ponto x_i com o parâmetro γ ajustado.

A primeira observação importante que pode ser feita a partir da tabela 2 diz respeito à descrição do modelo de Caurier-Grammaticos-Ramani. Em todos os casos analisados, os valores de $\bar{\chi}^2$ obtidos com este modelo são os maiores, indicando um pior ajuste, o que já poderia ser inferido das figuras apresentadas. Além disso, os valores ajustados para o parâmetro deste modelo são muito próximos, o que não parece refletir a física envolvida. Novamente, as fortes aproximações feitas durante o desenvolvimento do modelo parecem ter comprometido definitivamente a qualidade de sua descrição. Por outro lado, existe excelente coerência entre os resultados dos outros modelos.

Lembrando a tabela II.4, vê-se que dos grupos de núclídeos organizados segundo número de massa, o grupo $50 < A \leq 100$ aparenta ser o de maior caoticidade, exatamente o resultado oposto do grupo $230 < A$. Estes resultados sugerem uma transição de caos a regularidade com o aumento do número de massa; os casos que aparentemente fogem deste comportamento, quais sejam $50 < A \leq 100$ e $180 < A \leq 210$ são justamente aqueles cuja estatística foi obtida a partir de um menor número de dados (vide o valor de N).

Resultados obtidos para modelos nucleares simplificados usando métodos semi-clássicos sugerem que a transição ordem-caos deva acontecer com o aumento da deformação [39]. Entretanto, comparando os resultados obtidos aqui para os casos com e sem deformação nota-se uma discrepância: os núclídeos par-par deformados de spin $2^+ 4^+$ apresentam valores que sugerem ser esta situação mais regular que aquela esférica, enquanto os núclídeos par-par deformados com outros spins forneceram valores mais próximos da situação de maior caoticidade, do que a situação esférica. Mais uma vez, à exceção de C-G-R, todos os modelos apresentam esta discrepância, que não pode ser explicada a luz dos modelos nucleares conhecidos, e sugerem que os resultados estão mais uma vez comprometidos pela baixa estatística conseguida.

Segundo o spin, os núcleos par-par deformados de spin $2^+ 4^+$ são muito mais regulares que os de spin $0^+ 3^+$ de mesma deformação e paridade. Estes resultados corroboram aqueles

obtidos em [25], de que exista uma dependência entre número de massa, deformação, spin e paridade com a existência de comportamento caótico em sistemas nucleares. Entretanto, fica mais uma vez expressa a necessidade de obter mais e melhores dados experimentais para uma opinião mais conclusiva sobre o assunto.

De maneira a comparar as descrições dos vários modelos pode-se ainda fazer uma análise “horizontal” da tabela 2. À exceção do modelo de Caurier-Grammaticos-Ramani, que como já foi dito, não apresenta resultados consistentes com aqueles de nenhum dos outros modelos, os modelos desenvolvidos segundo os argumentos da RMT, quais sejam o DGOE e o modelo de Lenz-Haake, mostram valores maiores de $\bar{\chi}^2$ para os casos mais fortemente poissonianos. Isto é razoável no âmbito do DGOE, visto este só fornecer a expressão poissoniana no limite $\gamma_{DGOE} \rightarrow \infty$, mas não foi encontrada explicação aceitável para este resultado pelo modelo de Lenz-Haake, que fornece a poissoniana quando $\gamma_{LH} = 0$.

Por outro lado, os modelos de Brody e Berry-Robnik descrevem muito bem situações poissonianas, sendo este último o que melhor descreve estes casos. Mais uma vez, como antes para o oscilador quártico, isto é esperado, visto o modelo semi-clássico de Berry-Robnik não apresentar a esperada repulsão de níveis em $s_i / \langle s \rangle = 0$ a menos que o histograma seja uma curva GOE perfeita. Este resultado é coerente com a interpretação de Berry-Robnik dos sistemas caóticos como tendo um espaço de fase caracterizado por uma fração preenchida por órbitas caóticas enquanto o restante é definido como a fração regular do espaço de fase, sendo estas duas frações do espaço “independentes” uma da outra [40]. Esta “independência” acarreta uma descrição análoga a da superposição de espectros independentes *à la* Mehta [7] e elimina a esperada repulsão de níveis, a menos no caso limite de máxima caoticidade. Para verificar se de fato ocorre a repulsão de níveis, é necessária uma investigação mais cuidadosa da distribuição para pequenos espaçamentos, o que requeriria um maior número de dados.

Entretanto, acredita-se que a repulsão de níveis seja uma característica inerente aos sistemas com alguma caoticidade, como já foi diversas vezes salientado na literatura (vide por exemplo [26]), que deverá ser representada por qualquer modelo que se proponha a descrever sistemas na situação de transição entre caos e ordem.

GRUPO	N	M	σ_{hist}	DGOE		C-G-R		L-H		Brody1		Brody2		B-R	
				$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\gamma \pm \sigma_{par}$	χ^2
$0 < A \leq 50$	121	9	0.12	8.66 ± 0.24	0.26	0.30 ± 0.02	1.39	0.36 ± 0.05	0.22	0.69 ± 0.11	0.59	0.72 ± 0.16	0.58	0.06 ± 0.07	0.84
$50 < A \leq 100$	38	9	0.20	3.00 ± 0.48	0.28	0.30 ± 0.01	0.55	0.65 ± 0.23	0.32	0.76 ± 0.12	0.25	0.88 ± 0.41	0.25	0.09 ± 0.06	0.22
$100 < A \leq 150$	229	12	0.08	7.30 ± 0.33	1.04	0.29 ± 0.08	1.49	0.36 ± 0.07	0.78	0.52 ± 0.06	0.49	0.55 ± 0.11	0.48	0.20 ± 0.04	0.58
$150 < A \leq 180$	388	12	0.06	43.47 ± 0.32	2.13	0.32 ± 0.01	3.29	0.22 ± 0.03	1.54	0.34 ± 0.04	0.37	0.33 ± 0.07	0.37	0.37 ± 0.03	0.29
$180 < A \leq 210$	55	12	0.16	19.05 ± 0.46	0.59	0.31 ± 0.01	0.78	0.23 ± 0.05	0.42	0.49 ± 0.13	0.54	0.43 ± 0.17	0.54	0.26 ± 0.10	0.61
$230 < A$	157	12	0.13	48.25 ± 0.26	0.30	0.23 ± 0.03	0.44	0.20 ± 0.02	0.28	0.24 ± 0.04	0.08	0.24 ± 0.11	0.08	0.48 ± 0.04	0.14
todos par-par def.	545	9	0.10	54.50 ± 0.47	1.70	0.38 ± 0.04	2.74	0.22 ± 0.05	1.54	0.30 ± 0.08	0.64	0.30 ± 0.06	0.64	0.41 ± 0.06	0.48
par-par $2^+ 4^+$ def.	88	9	0.12	71.04 ± 0.44	1.02	0.33 ± 0.03	2.28	0.18 ± 0.04	1.21	0.15 ± 0.07	0.38	0.16 ± 0.13	0.38	0.55 ± 0.06	0.35
par-par $0^+ 3^+$ def.	21	9	0.32	1.56 ± 0.59	0.14	0.38 ± 0.04	0.29	0.65 ± 0.30	0.19	0.78 ± 0.15	0.15	0.74 ± 0.52	0.15	0.14 ± 0.07	0.11
outros par-par def.	64	9	0.16	2.74 ± 0.69	0.87	0.38 ± 0.04	1.04	0.39 ± 0.15	0.78	0.50 ± 0.12	0.46	0.51 ± 0.21	0.46	0.24 ± 0.07	0.34
par-par $2^+ 4^+$ esf.	129	12	0.09*	11.00 ± 0.30	0.71	0.24 ± 0.03	0.86	0.32 ± 0.06	0.60	0.50 ± 0.08	0.51	0.52 ± 0.15	0.51	0.21 ± 0.06	0.67
outros par-par esf.	69	12	0.13	15.27 ± 0.31	0.41	0.21 ± 0.03	0.81	0.27 ± 0.05	0.45	0.50 ± 0.14	0.92	0.57 ± 0.16	0.90	0.15 ± 0.10	1.27

Tabela 2 - Grupos de núcleos analisados, número de níveis tomado em cada caso (N), número de pontos do histograma (M), desvio padrão dos pontos do histograma (σ_{hist}), valores de parâmetro e respectivos desvios padrão ($\gamma \pm \sigma_{par}$) e χ^2 dos ajustes dos diversos modelos: DGOE, Carrier-Granmaticos-Ramani (C-G-R), Lenz-Ilaake (L-I), Brody ajustado (Brody1), Brody fornecido (Brody2) e Berry-Robnik (B-R), conforme o texto [O valor de σ_{hist} marcado com (*) representa a média dos desvios padrão dos pontos do histograma (vide texto)].

Capítulo V

Os Bilhares Quânticos

Bilhares clássicos são definidos como sistemas constituídos por um contorno que pode ter as mais diversas formas e dentro do qual move-se livremente uma partícula pontual. A relevância destes sistemas para os estudos de dinâmica pode ser atestada pela vasta literatura sobre o assunto (vide por exemplo [41] e referências nele contidas), o que se deve basicamente à ampla gama de características apresentadas por sistemas relativamente tão simples.

Tais sistemas foram largamente estudados e hoje tem-se como bem estabelecido que os bilhares ditos regulares formam uma classe relativamente pequena, constituída pelos bilhares circular, retangular e elíptico entre outros. Em contrapartida existe um número consideravelmente maior de bilhares de dinâmica caótica, dentre os quais são dignos de nota os bilhares de Sinai e o tipo estádio ou de Bunimovich, ilustrados na figura V.1.

Os bilhares aqui analisados são os do tipo estádio usualmente caracterizados pelo fator

$$\gamma = \frac{l}{d}, \quad (\text{V.1})$$

onde l e d correspondem ao maior e ao menor comprimento do bilhar respectivamente (vide figura I.2).

Para estes sistemas a situação de máxima regularidade é atingida quando $\gamma = 0$ (equivalente ao bilhar circular) e quando $\gamma \rightarrow \infty$, sendo a dinâmica fortemente caótica quando $\gamma = 1.0$.

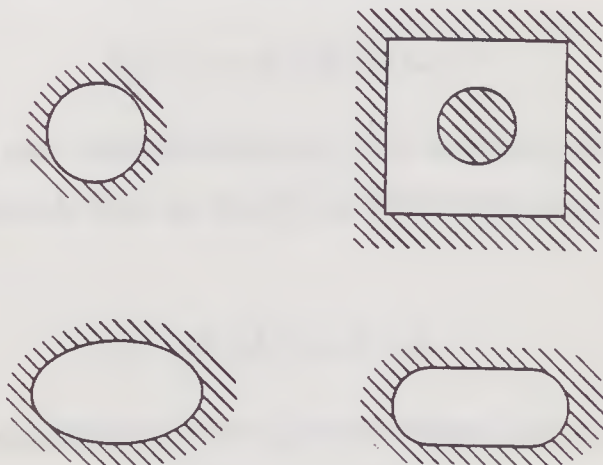


Figura V.1: À esquerda os bilhares circular e elíptico, representantes daqueles de dinâmica regular; do lado direito vê-se os bilhares de Sinai e tipo estádio ou de Bunimovich, de dinâmica caótica.

Há alguns anos estes sistemas trouxeram mais uma contribuição para os estudos de dinâmica, graças ao surgimento do conceito de “bilhar quântico”. A idéia baseia-se na analogia das formas funcionais das equações de Schrödinger e de Helmholtz homogêneas bidimensionais, aplicada a cavidades ressonantes bidimensionais sujeitas a fontes de ondas eletromagnéticas.

Seja a equação de Helmholtz tridimensional homogênea para o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$

$$(\Delta + k_{em}^2) \vec{E}(\vec{r}) = 0. \quad (V.2)$$

(A expressão para o campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$ é análoga.) Aqui k_{em}^2 é proporcional a frequência do campo elétrico

$$k_{em}^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c_o^2}, \quad (V.3)$$

com ϵ a constante dielétrica e μ a permeabilidade do meio, c_o é a velocidade da luz no vácuo

e $\omega = 2\pi f$, onde f é a frequência. As condições de contorno para cavidades tridimensionais com paredes ideais (condições de contorno de Dirichlet) escrevem-se

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r})|_{\partial G} = 0 \text{ e } \vec{B}_{\perp}(\vec{r})|_{\partial G} = 0.$$

É fácil ver que no caso tridimensional não existe analogia, visto ser o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r})$ um vetor e a função de onda da equação de Schrödinger um escalar

$$(\Delta + k_{qm}^2)\Phi(x, y, z) = 0, \quad (\text{V.4})$$

com $k_{qm}^2 = 2m\varepsilon/\hbar^2$, proporcional aos autovalores do sistema quântico. Entretanto, fazendo a cavidade ressonante considerada suficientemente pequena em uma das três dimensões, o problema fica reduzido ao caso bidimensional

$$\begin{aligned} (\Delta + k_{em}^2)\phi(x, y) &= 0, \\ (\Delta + k_{qm}^2)\Phi(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

sujeitas a condições de contorno de Dirichlet bidimensionais

$$\begin{aligned} \phi(x, y)|_{\partial G} &= 0, \\ \Phi(x, y)|_{\partial G} &= 0. \end{aligned}$$

No caso destas cavidades a condição de bidimensionalidade é satisfeita quando

$$d < \frac{c_0}{2\sqrt{\epsilon\mu}f_{max}} \quad (\text{V.5})$$

As primeiras experiências usando “bilhares quânticos” foram realizadas por H. -J. Stöckmann e J. Stein em 1990 [43] usando bilhares tipo estádio a temperatura ambiente sujeitos a fontes de microondas. Posteriormente, estas experiências foram melhoradas, graças a utilização de baixas temperaturas, que tornam o sistema supercondutor e diminuem a perda de autofrequências/autovalores ¹, o que é particularmente crítico para as frequências mais altas devido ao aumento de densidade de estados. Este comportamento está ilustrado na figura V.2 [42].

¹Neste capítulo expressões autofrequência e autovalor serão usadas indistintamente, como sinônimos.

Aqui como nos casos anteriores, este sistema precisa ser dessimetrizado, o que implica tomar-se 1/4 do bilhar tipo estádio (vide figura V.3).

As experiências realizadas pelo grupo do professor Achim Richter do “Institut für Kernphysik” da “Technische Hochschule” de Darmstadt na Alemanha utilizam cavidades ressonantes ou bilhares tipo estádio de fator $\gamma = 1.8$ e 1.0 . Tais cavidades foram construídas pela oficina de mecânica de precisão do laboratório CERN em Genebra utilizando Nióbio, que se torna supercondutor a temperatura de 9.2K , e as superfícies foram tratadas quimicamente de modo a conseguir a maior polidez possível e assim melhorar a qualidade das medidas. As dimensões finais destes bilhares são $360 \times 200 \times 8$ milímetros e $200 \times 200 \times 8$ milímetros (comprimento maior $\times$ comprimento menor $\times$ altura), sendo a faixa de frequências para medida 0.75 a 17.5GHz . As paredes apresentam 2mm de espessura e as antenas foram posicionadas em três pontos diferentes conforme a figura V.3, tomando-se o cuidado de que as mesmas penetrassem o mínimo necessário na cavidade. Com o aparato experimental assim constituído o fator de qualidade conseguido para a experiência é de $Q = f/\Delta f \approx 10^5 - 10^6$.

Nas primeiras medidas o conjunto cavidade-antenas era introduzido em uma seção do criostato do acelerador de eletrons S-DALINAC e resfriado a temperatura de 2K juntamente com as outras estruturas do acelerador. Atualmente as medidas são tomadas em um conjunto construído especialmente para este fim (figura V.3²).

Os espectros medidos experimentalmente passaram pelo processo de *unfolding* de modo a poder se estabelecer a comparação entre eles. Para isto foi utilizada a expressão de Weyl [42]

$$N_{Weyl}(f) = \frac{A\pi}{c^2}f^2 - \frac{P}{2c}f + K, \quad (\text{V.6})$$

onde $c = c_0/\sqrt{\epsilon\mu}$ é a velocidade da onda no meio, A é a área do estádio, P é o seu perímetro e K são correções devidas a imperfeições da superfície e do contorno e são da ordem de 0.1 . Assim, após o *unfolding* as energias são dadas por

²Agradecimentos a Henrik Alt, Ralph Hofferbert, Heiko Rehfeld e Christian Dembowski por esta e outras figuras aqui apresentadas, assim como pelas informações a respeito do aparato experimental e das medições.

$$E_i = N_{Weyl}(f_i). \quad (V.7)$$

Os resultados dos bilhares foram agrupados segundo o valor $\gamma = 1.0$ e 1.8 , e ainda conforme o acoplamento ou simplesmente superposição dos dados dos dois bilhares medidos independentemente (situação chamada aqui eventualmente de desacoplada). Mais do que isso, estão ainda ilustrados os resultados para os casos com e sem as “bouncing ball orbits” (bbos), que nada mais são do que um conjunto de órbitas periódicas que oscilam indefinidamente entre as duas retas paralelas do contorno do bilhar, nunca deixando seu setor retangular (vide tabela 3 e figuras F.1 a F.8). Os efeitos das bbos já haviam sido observados por H. -D. Gräf *et al.* em 1992 [44] para o caso do bilhar $\gamma = 1.8$, reproduzido na figura V.4. Como a expressão de Weyl (V.6) não leva em conta tais órbitas, é necessário realizar o *unfolding* considerando-se ainda a fórmula [42], [44]

$$N_{bbos}(f_i) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{l}{d} \sqrt{f_i d} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3/2} \cos \left[m f_i d - \frac{3\pi}{4} \right], \quad (V.8)$$

de modo que

$$E_i = N_{Weyl}(f_i) + N_{bbos}(f_i). \quad (V.9)$$

Novamente, quando considerados os valores dos desvios padrão dos ajustes e os dos chis-quadrados, vemos que os efeitos das bbos são fracamente percebidos nas correlações de curto alcance.

Comparados os resultados dos cinco modelos estudados, vê-se que, à excessão de C-G-R, todos concordam quando apresentam os bilhares isolados como mais caóticos do que os resultados de seu acoplamento e superposição. Além disso, o caso $\gamma = 1.0$ é ligeiramente mais caótico que o caso $\gamma = 1.8$, assim como o resultado do acoplamento é mais caótico que aquele da superposição. Ambos os resultados são razoáveis: o primeiro ilustra o fato, já conhecido a partir de análises semi-clássicas, de que $\gamma = 1.0$ é a situação de máxima caoticidade do bilhar tipo estádio; no segundo caso, vemos o fenômeno já discutido nos

capítulos anteriores de que a superposição de dois espectros com flutuações estatísticas do tipo GOE, dá origem a uma situação onde a repulsão de níveis não é mais observada, o que é representado nos resultados por valores dos parâmetros dos modelos mais próximos dos poissonianos. Curiosamente, no caso em que $\gamma = 1.0$, os modelos de L-H, DGOE e o caso de Brody não atingem o valor limite em que a perfeita curva GOE é obtida, o que seria de se esperar visto ser esta a situação de máxima caoticidade do sistema. Apenas o modelo de Berry e Robnik chegam a esta situação, apesar de apresentar maior valor para o chi-quadrado. Isto mostra a consistência entre os modelos de Lenz e Haake e o DGOE, ilustrando provavelmente a origem comum na proposta de Dyson (vide capítulo 2).

GRUPO	N	M	σ_{hist}	DGOE		C-G-R		L-H		Brody		B-R	
				$\alpha \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\alpha \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\alpha \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\alpha \pm \sigma_{par}$	χ^2	$\alpha \pm \sigma_{par}$	χ^2
$\gamma = 1.0$ sem bbos	954	25	0.06	3.94 ± 0.81	0.55	0.32 ± 0.01	3.68	0.64 ± 0.06	0.63	0.87 ± 0.03	0.59	0.01 ± 0.01	0.74
$\gamma = 1.0$ com bbos	954	27	0.06	3.90 ± 0.08	0.71	0.29 ± 0.03	3.64	0.66 ± 0.07	0.88	0.86 ± 0.03	0.76	0.01 ± 0.01	0.89
$\gamma = 1.8$ sem bbos	1059	27	0.06	3.89 ± 0.10	0.85	0.26 ± 0.01	4.04	0.66 ± 0.08	1.11	0.82 ± 0.03	0.67	0.05 ± 0.01	0.72
$\gamma = 1.8$ com bbos	1059	27	0.06	3.57 ± 0.12	1.55	0.27 ± 0.03	3.81	0.59 ± 0.08	1.61	0.79 ± 0.05	1.40	0.06 ± 0.02	1.53
acoplados sem bbos	1490	31	0.06	10.95 ± 0.13	3.10	0.29 ± 0.03	4.25	0.27 ± 0.02	2.49	0.50 ± 0.03	1.56	0.16 ± 0.03	2.52
acoplados com bbos	1490	30	0.06	6.52 ± 0.15	3.72	0.24 ± 0.01	3.77	0.37 ± 0.05	2.96	0.49 ± 0.03	1.37	0.20 ± 0.02	1.51
desacoplados sem bbos	1489	32	0.06	31.99 ± 0.17	4.93	0.19 ± 0.01	3.29	0.28 ± 0.02	3.17	0.41 ± 0.03	1.03	0.28 ± 0.02	1.12
desacoplados com bbos	1488	31	0.06	19.69 ± 0.17	4.88	0.24 ± 0.01	3.47	0.28 ± 0.03	3.13	0.38 ± 0.03	1.18	0.29 ± 0.03	1.63

Tabela 3 - Bilhares analisados agrupados segundo o fator γ , o acoplamento e a presença de “bouncing ball orbits”(bbos), número de níveis tomado em cada caso (N), número de pontos do histograma (M), desvio padrão médio dos pontos do histograma (σ_{hist}), valores de parâmetro e respectivos desvios padrão ($\alpha \pm \sigma_{par}$) e χ^2 dos ajustes dos diversos modelos: DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani (C-G-R), Lenz-Haake (L-H), Brody ajustado (Brody) e Berry-Robnik (B-R), conforme o texto.

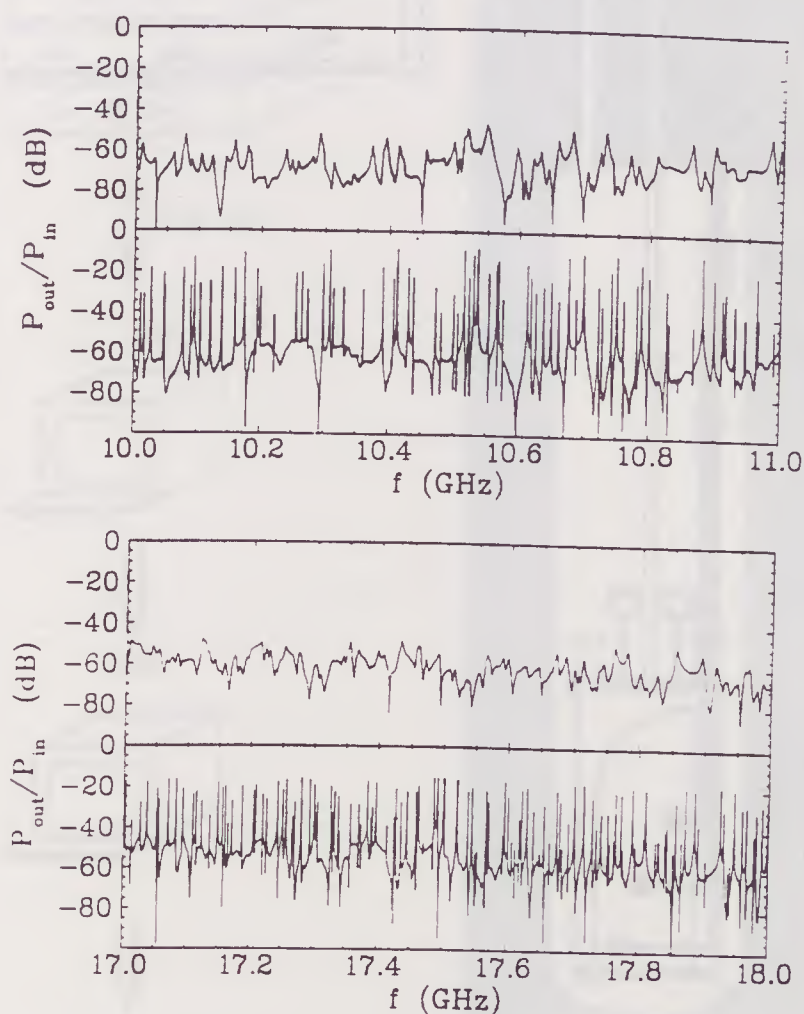


Figura V.2: Espectro de transmissão do bilhar tipo estádio de fator $\gamma = 1.8$. Em ambas as figuras, a parte superior ilustra os resultados obtidos a temperatura ambiente e a parte inferior os resultados obtidos na situação de supercondução, a temperatura de 2K.

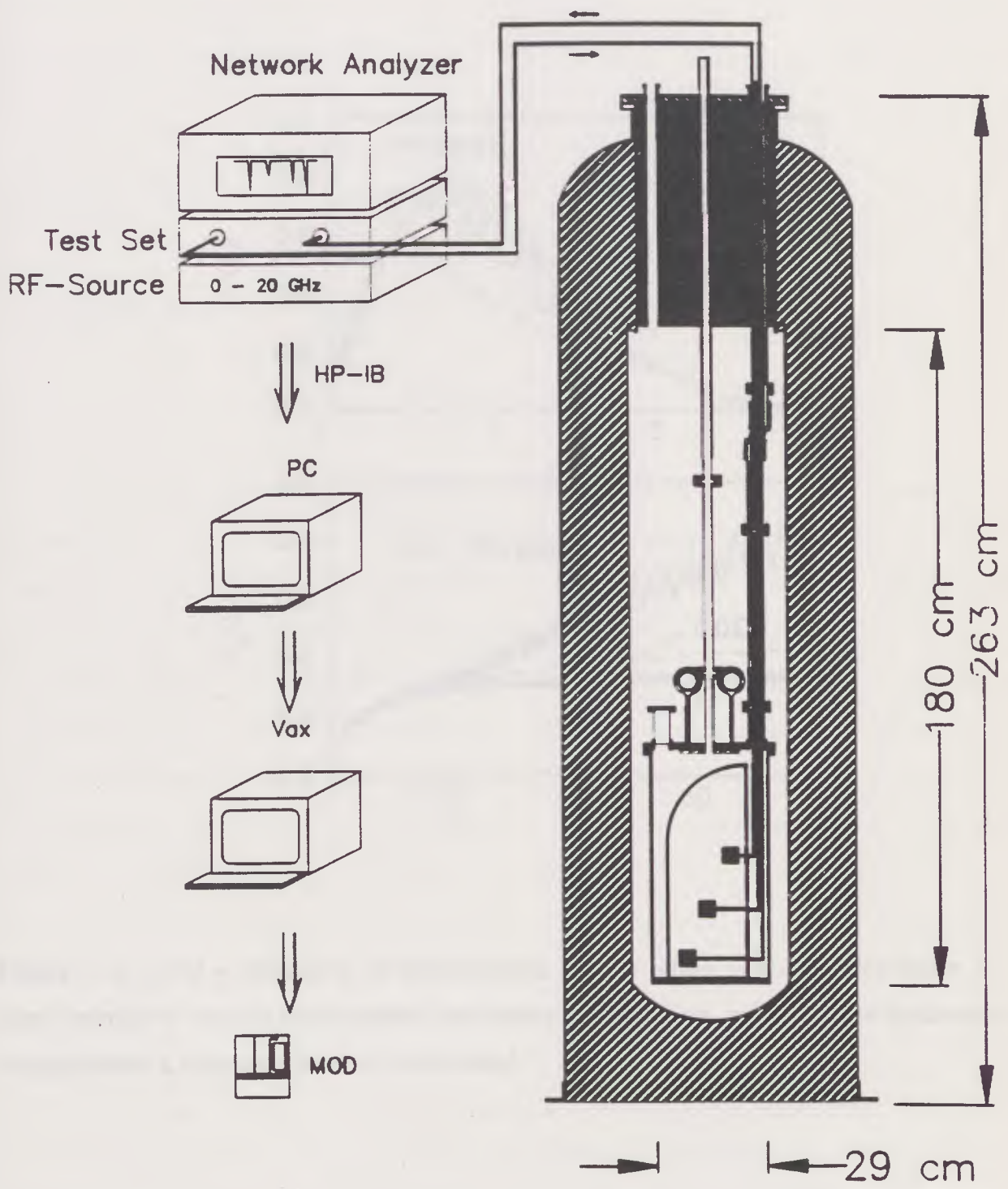


Figura V.3: Representação esquemática do aparato experimental utilizado com as respectivas dimensões.

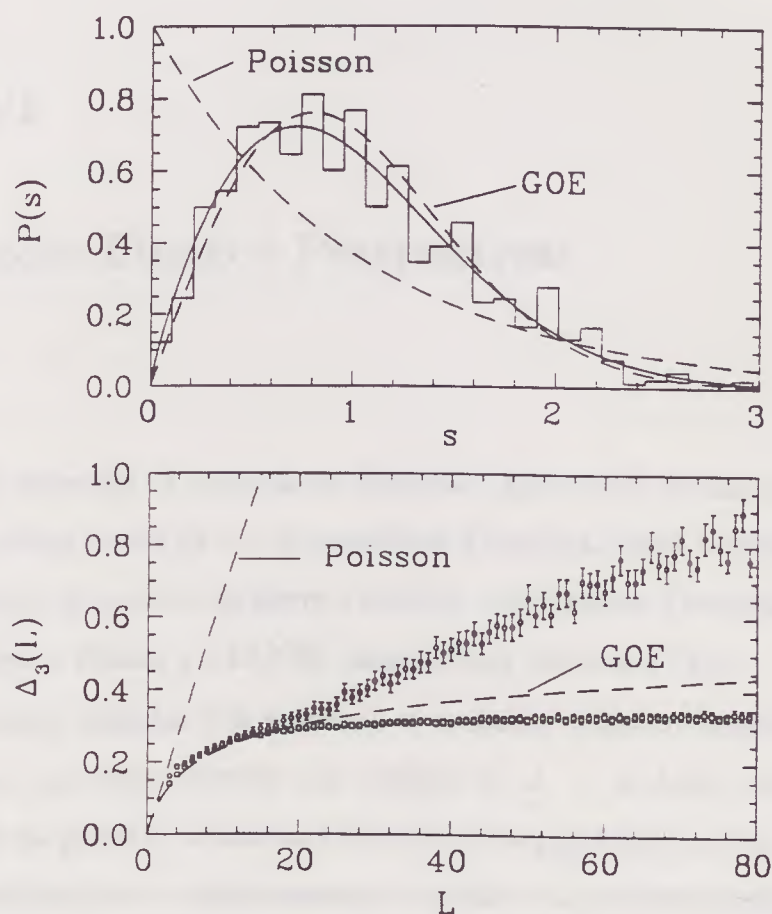


Figura V.4: NND e estatística de Dyson-Mehta para o bilhar $\gamma = 1.8$. Na figura da parte inferior os círculos correspondem aos dados *unfolded* com as bbos, e os quadrados correspondem à parte sem as bbos (vide texto).

Capítulo VI

Considerações Finais e Perspectivas

No âmbito da descrição de sistemas na transição caos-ordem, foram comparados neste trabalho cinco modelos dentre os vários candidatos à descrição desta transição, quais sejam a proposta de Brody, os modelos de Berry e Robnik, o de Caurier, Grammaticos e Ramani, o proposto por Lenz e Haake, e o DGOE, proposto por Hussein e Pato.

Para tanto, foram tomados três sistemas: o oscilador quártico isotrópico quântico, o conjunto de dados nucleares coletado por Shriner *et al.* e os dados experimentais dos bilhares quânticos do grupo de Darmstadt. Os espectros passaram por um *unfolding* e posteriormente as distribuições de espaçamentos do vizinho mais próximo foram determinadas, sendo os parâmetros dos vários modelos então ajustados.

Os resultados obtidos nos três casos mostram que, excetuando-se uma, todas as diferentes descrições são coerentes entre si, respeitados os desvios estatísticos de cada ajuste, no que tange ao grau de caoticidade dos sistemas para cada uma das situações examinadas. A descrição de Caurier, Grammaticos e Ramani discorda, na grande maioria dos casos, de todas as outras descrições, o que provavelmente se deve às fortes aproximações impostas à determinação da expressão para NND. Além disso, a coerência entre os resultados do DGOE e da distribuição de Lenz e Haake é mais do que um mero acaso, mas certamente consequência do elemento comum entre as duas descrições, qual seja a utilização da hipótese de Dyson na construção dos *ensembles*.

Os histogramas de NND obtidos para o caso do oscilador quártico mostram a esperada transição caos-ordem quando o parâmetro da hamiltoniana é variado convenientemente e

esta transição é satisfatoriamente descrita por todos os modelos, à exceção daquele de Caurier, Grammaticos e Ramani. Para o caso dos dados nucleares, os resultados aqui obtidos concordam com os de Shriner *et al.* quando sugerem que efeitos devidos à deformação devem ser mais decisivos para a dinâmica do que aqueles devido à massa, e que os casos de $2^+ 4^+$ são mais regulares que os $0^+ 3^+$; entretanto, mais dados são necessários na busca de conclusões mais definitivas sobre as propriedades relevantes à caoticidade de sistemas nucleares.

Finalmente, os bilhares de Bunimovich estudados forneceram os resultados esperados para os dois valores do parâmetro γ do sistema estudados, $\gamma = 1.0$ e 1.8 , isto é, o de que o primeiro caso é mais caótico que o segundo. Também esperado era o resultado de que os casos com acoplamento e sem acoplamento aparentariam ser mais regulares que os resultados para os bilhares isolados, sendo o caso acoplado mais caótico que o desacoplado. Entretanto é importante lembrar que a descrição mais adequada para os casos acoplado e desacoplado não é exatamente aquela de uma transição caos-ordem, mas mais provavelmente a de uma transição GOE-2GOE's, que já foi tratada na literatura (por exemplo, [38]).

A concordância entre a descrição dos modelos de Berry e Robnik, Lenz e Haake, e do DGOE nos casos acima, sugerem que as correlações de curto alcance não contêm os elementos necessários à distinção da qualidade das descrições propostas. Entretanto, expressões para as correlações de longo alcance são de difícil determinação analítica para os modelos matriciais como o de Lenz e Haake, visto os cálculos envolverem matrizes de grandes dimensões e portanto, tantas integrais quanto o dobro desta dimensão; para a NND matrizes 2×2 fornecem resultados bastante satisfatórios, mas o mesmo não acontece para, por exemplo, a rigidez espectral. Mais ainda, pode-se ver no capítulo II, que a distribuição de probabilidades dos elementos de matriz no caso de Lenz e Haake já foi obtida para matrizes de dimensão 2, o que a torna de pouca utilidade para o cálculo de correlações de longo alcance.

O problema da distribuição de probabilidades de Lenz e Haake não ocorre no caso do DGOE, graças à técnica de Balian, e a expressão neste caso é função da dimensão N da matriz desejada. Sendo assim, tentou-se ao longo do último período deste trabalho ob-

ter também uma expressão analítica para a rigidez espectral do DGOE, sem resultados significativos devidos novamente a dificuldades com o cálculo analítico.

Recentemente, por sugestão de V. Zelevinskii [40], deu-se início a uma nova tentativa de determinar a expressão para a rigidez espectral para o DGOE, desta vez utilizando-se as chamadas “equações estocásticas gaussianas”. Este novo trabalho encontra-se ainda em fase preliminar.

Apêndice A

Gráficos da Convergência do Oscilador Quártico

A seguir são apresentados os gráficos $N(E) \times \delta(E)$ com os resultados da análise de convergência do oscilador quártico isotrópico para autovalores obtidos a partir de matrizes de diferentes tamanhos para a classe de simetria A1 (os resultados para as B2, B1 e A2 são idênticos). Aqui $\delta(E)$ é a grandeza definida pela expressão III.9. Também estão representados os resultados da comparação entre as diferentes classes de simetria para um mesmo valor de β , quais sejam $\beta = 0.01, 0.6$ e 1.0 (outros valores de β fornecem os mesmos resultados).

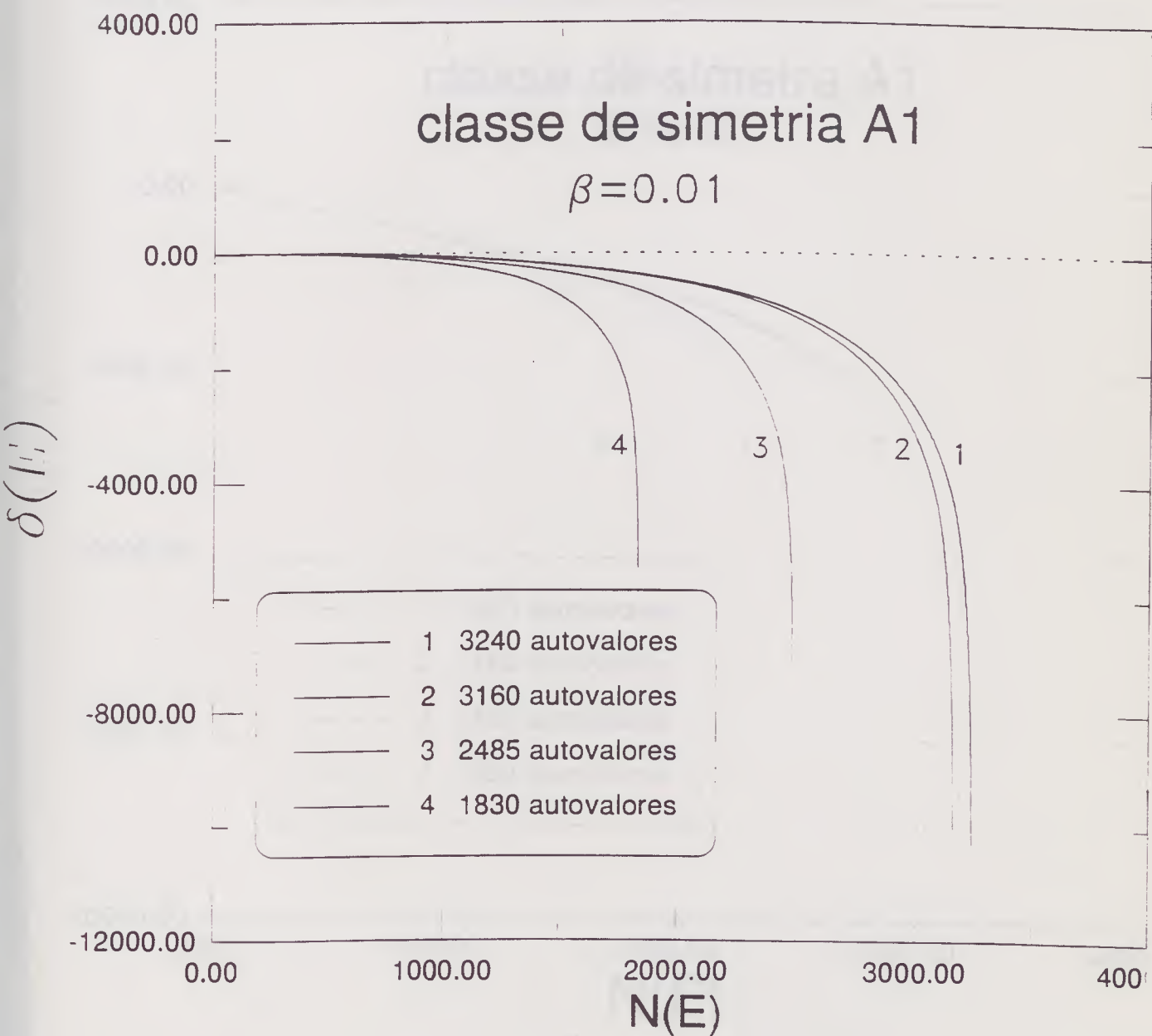


Figura A.1: $\delta(E)$ para a classe de simetria A1, $\beta = 0.01$ e autovalores obtidos a partir de matrizes de diferentes tamanhos.

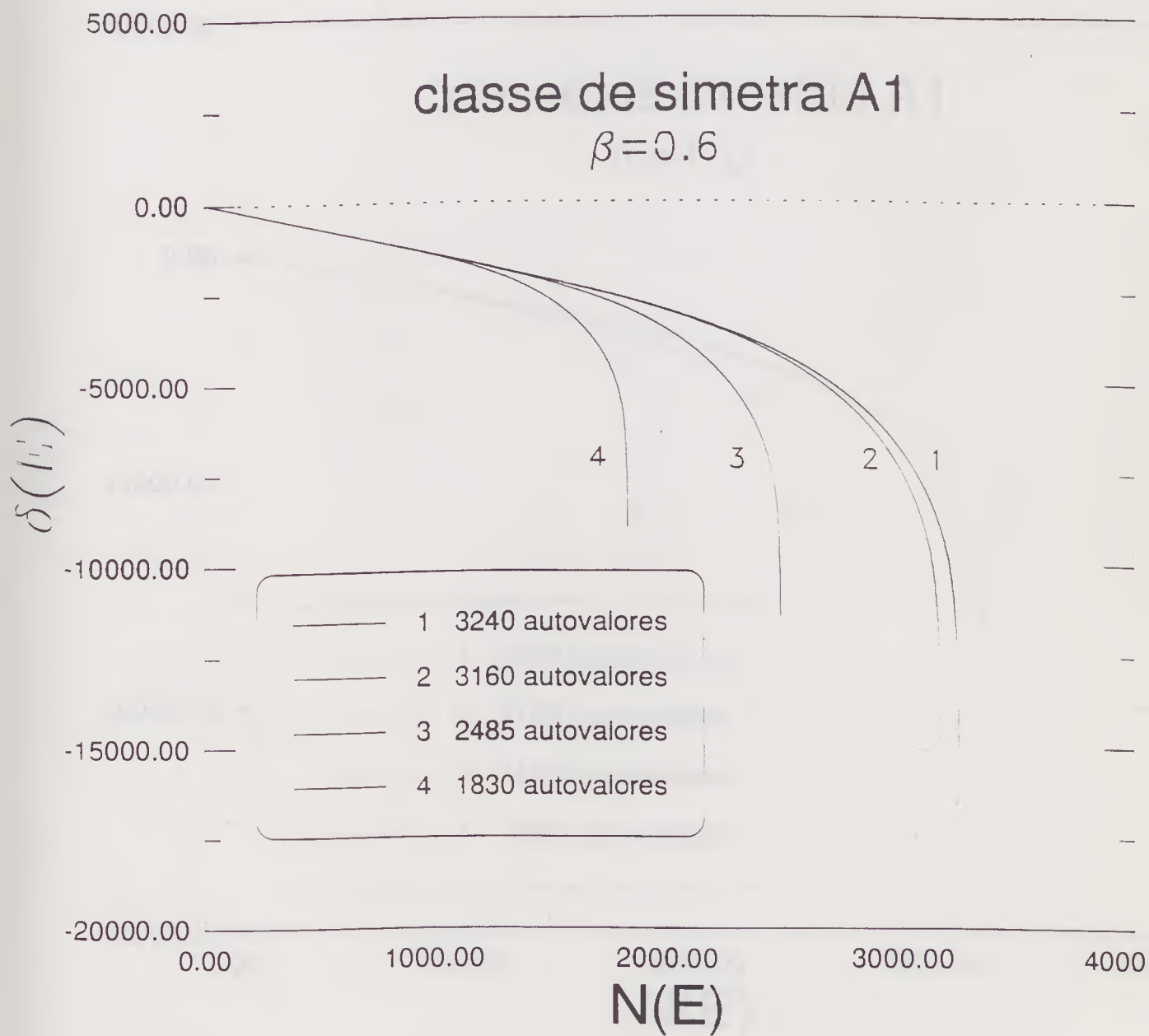


Figura A.2: $\delta(E)$ para a classe de simetria A1, $\beta = 0.6$ e autovalores obtidos a partir de matrizes de diferentes tamanhos.

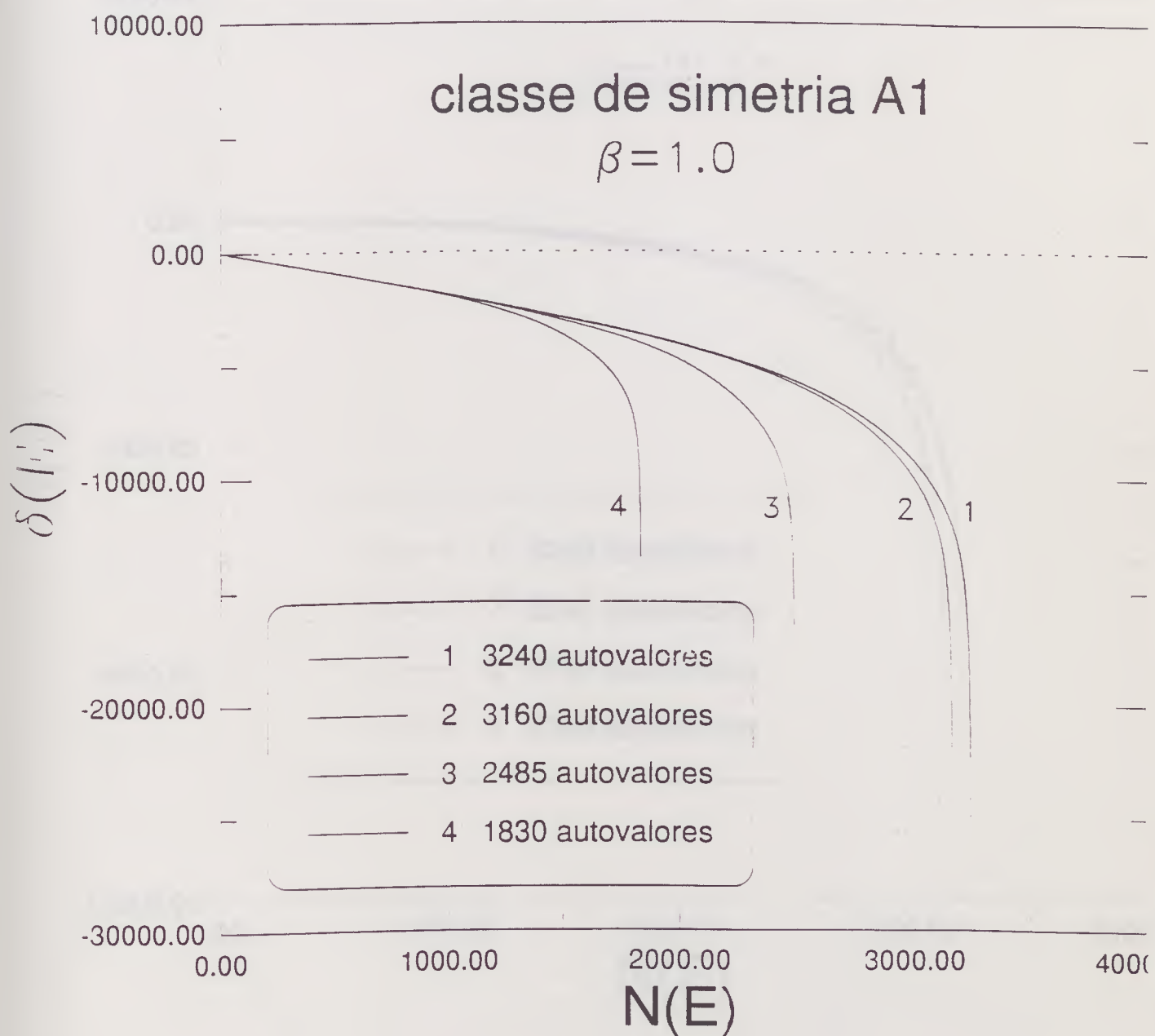


Figura A.3: $\delta(E)$ para a classe de simetria A1, $\beta = 1.0$ e autovalores obtidos a partir de matrizes de diferentes tamanhos.

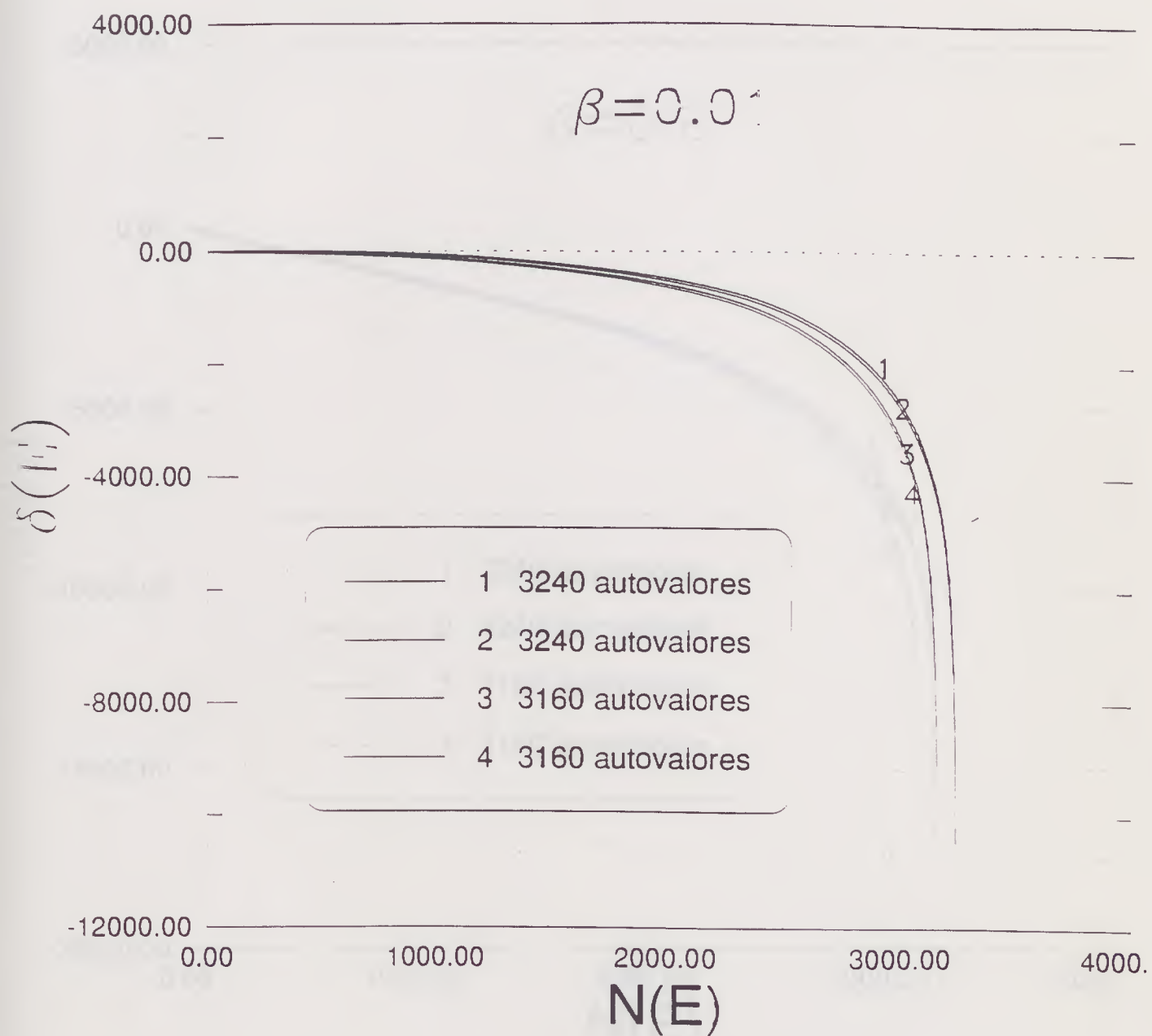


Figura A.4: $\delta(E)$ para $\beta = 0.01$ e para as classes de simetria A1 e B2 (3240 autovalores cada) e B1 e A2 (3160 autovalores).

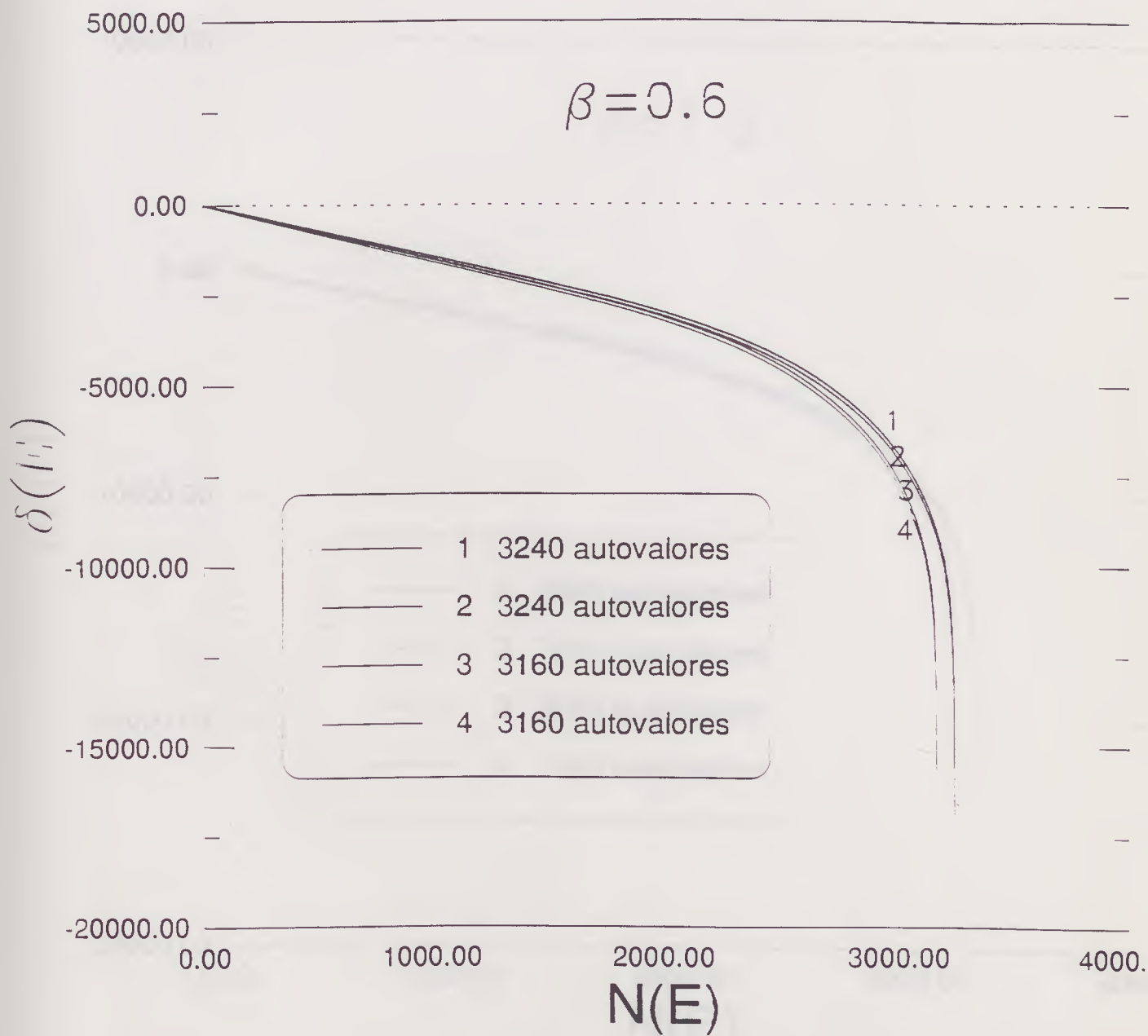


Figura A.5: $\delta(E)$ para $\beta = 0.6$ e para as classes de simetria A1 e B2 (3240 autovalores cada) e B1 e A2 (3160 autovalores).

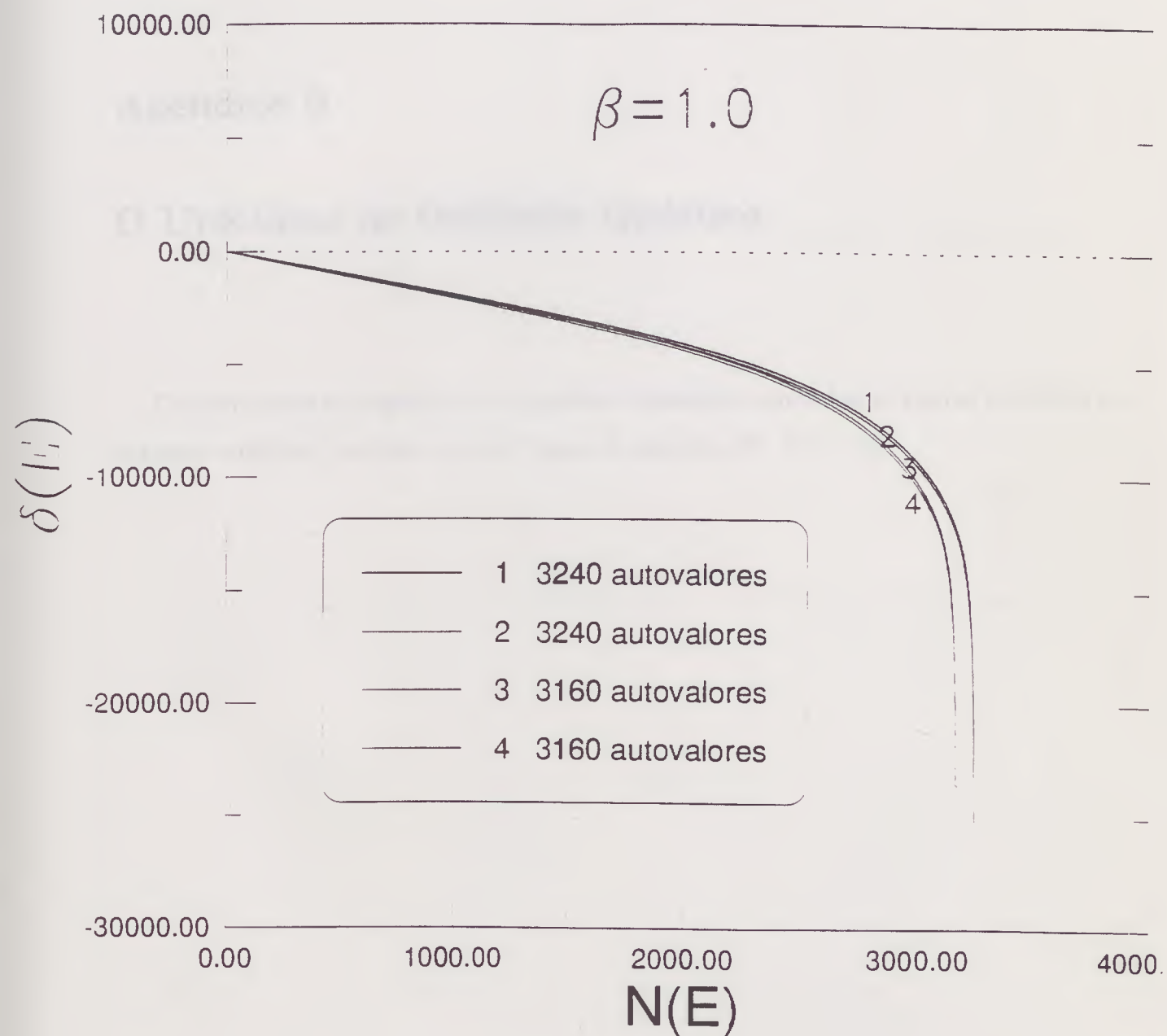


Figura A.6: $\delta(E)$ para $\beta = 1.0$ e para as classes de simetria A1 e B2 (3240 autovalores cada) e B1 e A2 (3160 autovalores).

Apêndice B

O Unfolding do Oscilador Quártico

Conforme dito no capítulo sobre o oscilador quártico, aqui estão as figuras referentes ao segundo *unfolding* realizado para as classes de simetria B2, B1 e A2.

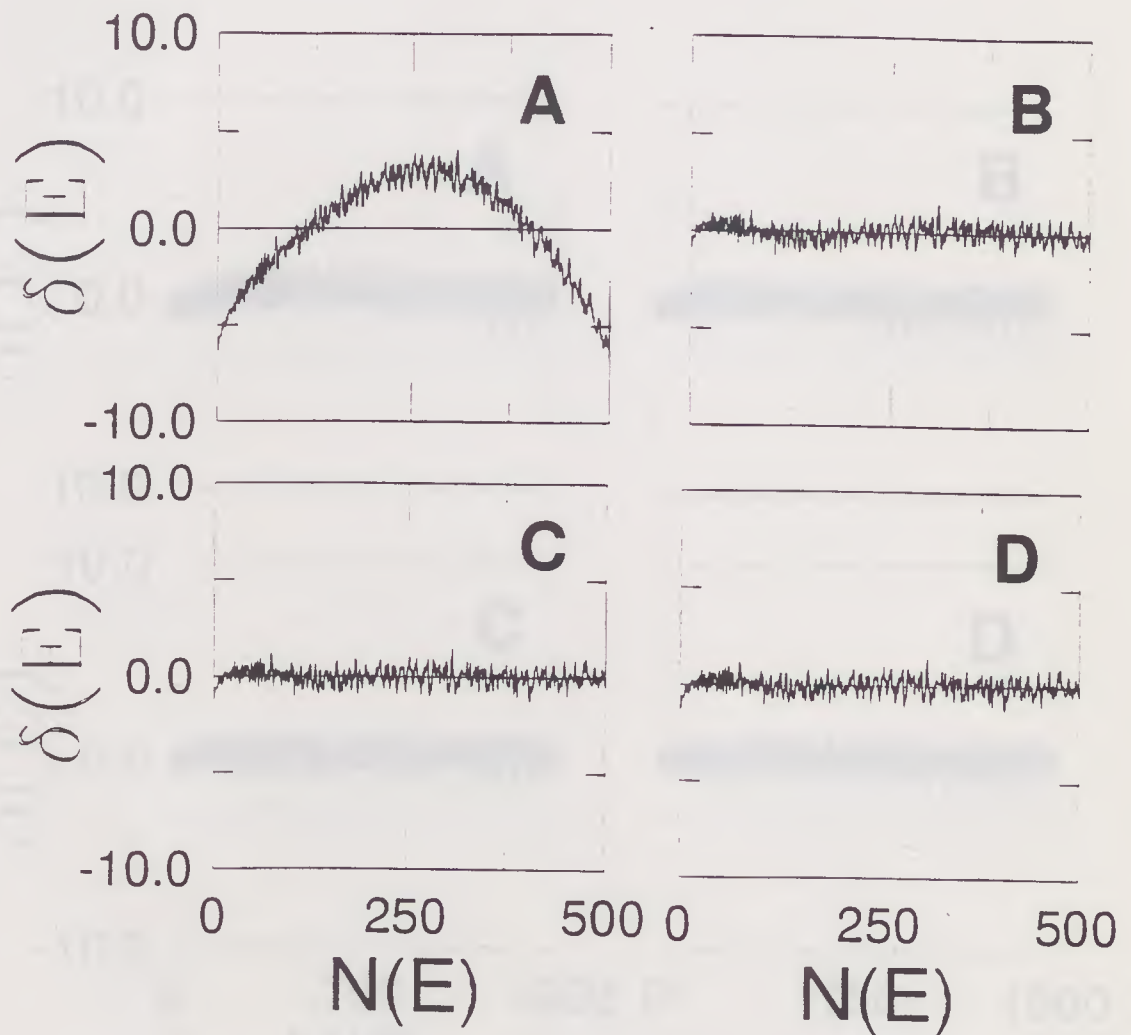


Figura B.1: $\delta(E) = N(E) - \overline{N_{pol}(E)}$ para a classe de simetria B2. 500 primeiros autovalores e $\beta = 0.01$. (A) corresponde a $\overline{N_{pol}(E)}$ ajustado por um polinômio de grau 1. (B) por um polinômio de grau 2 e assim sucessivamente até (D), ajuste através de um polinômio de grau 4.

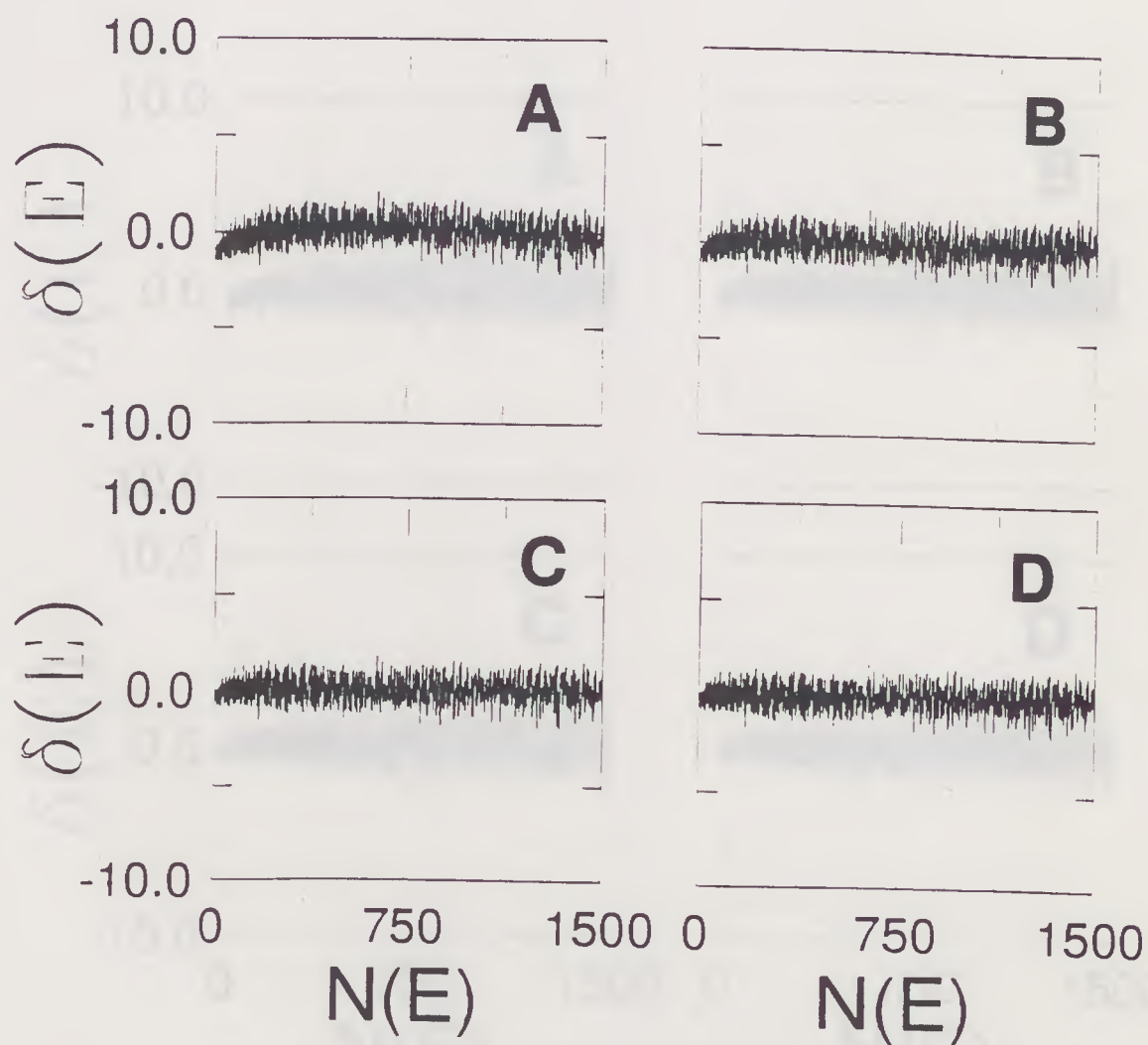


Figura B.2: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.2$.

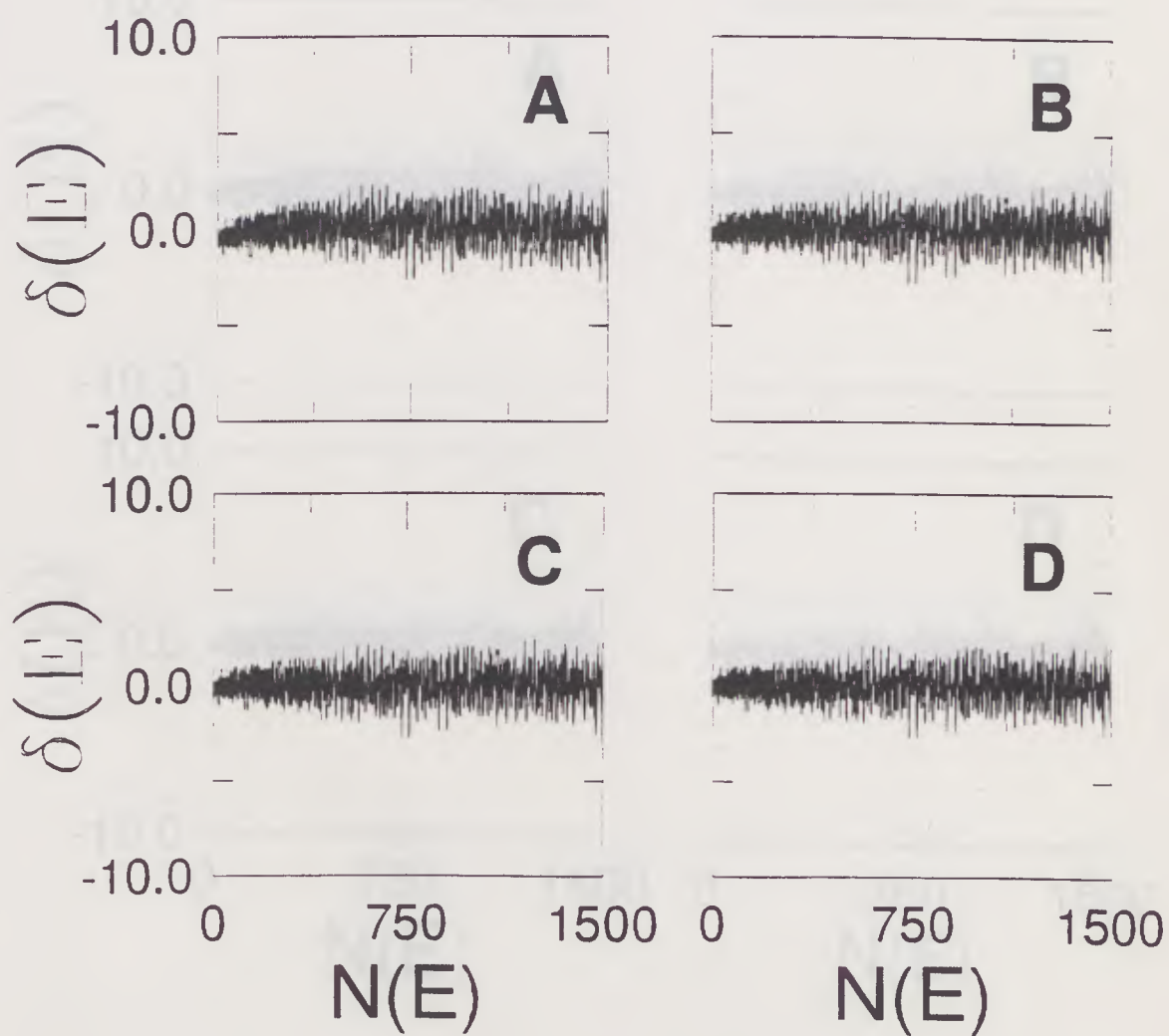


Figura B.3: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.4$.

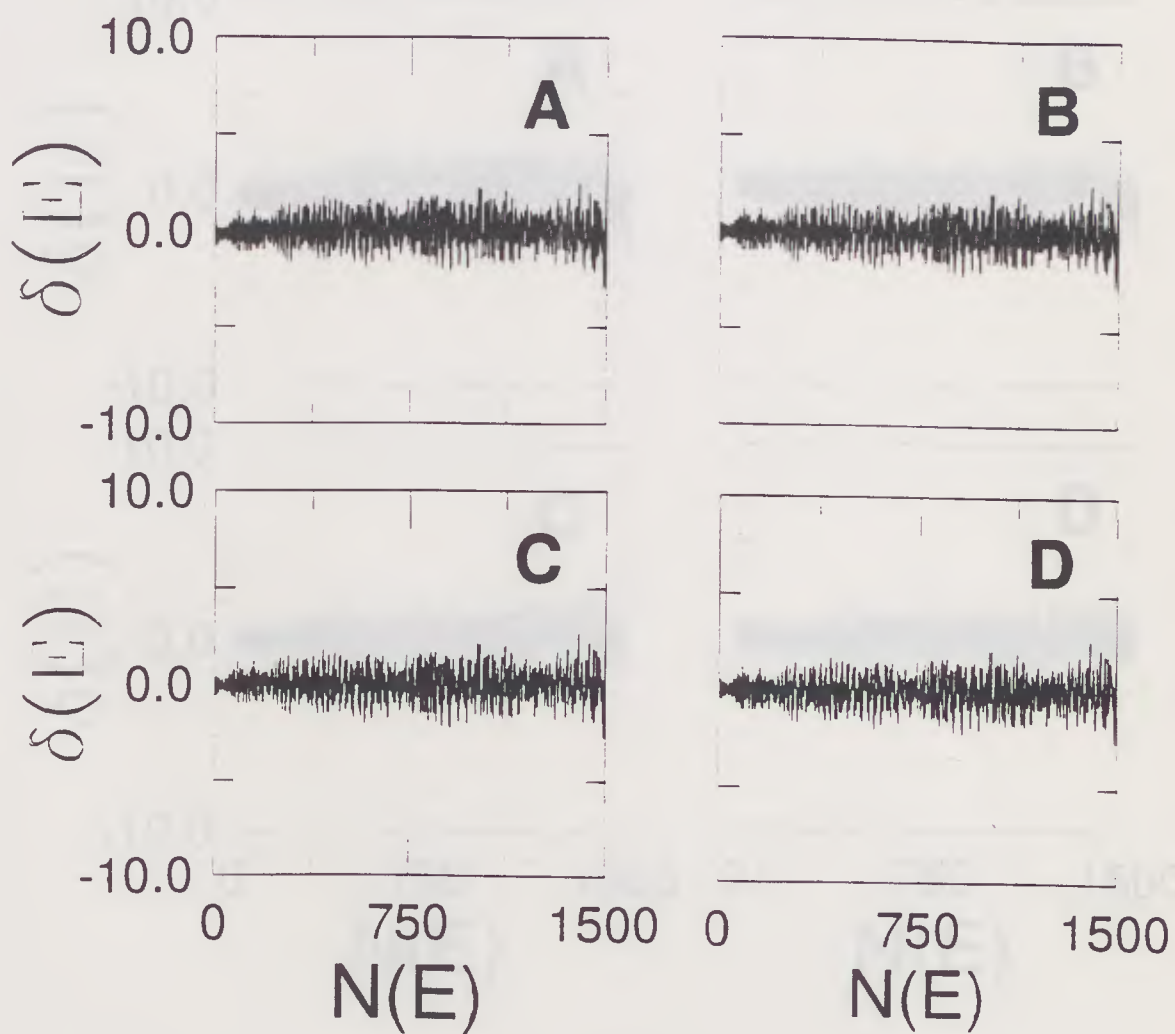


Figura B.4: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.6$.

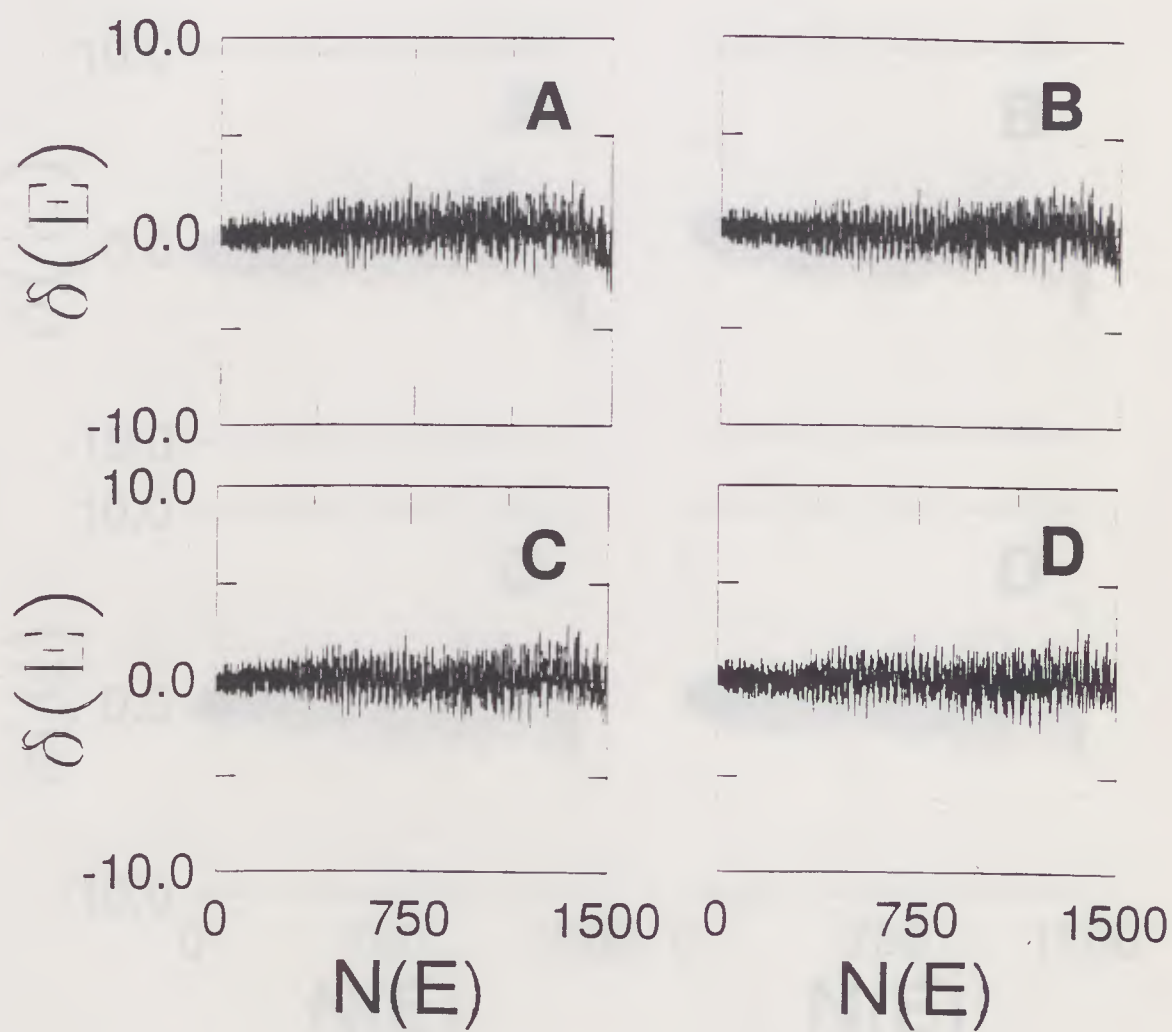


Figura B.5: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 0.8$.

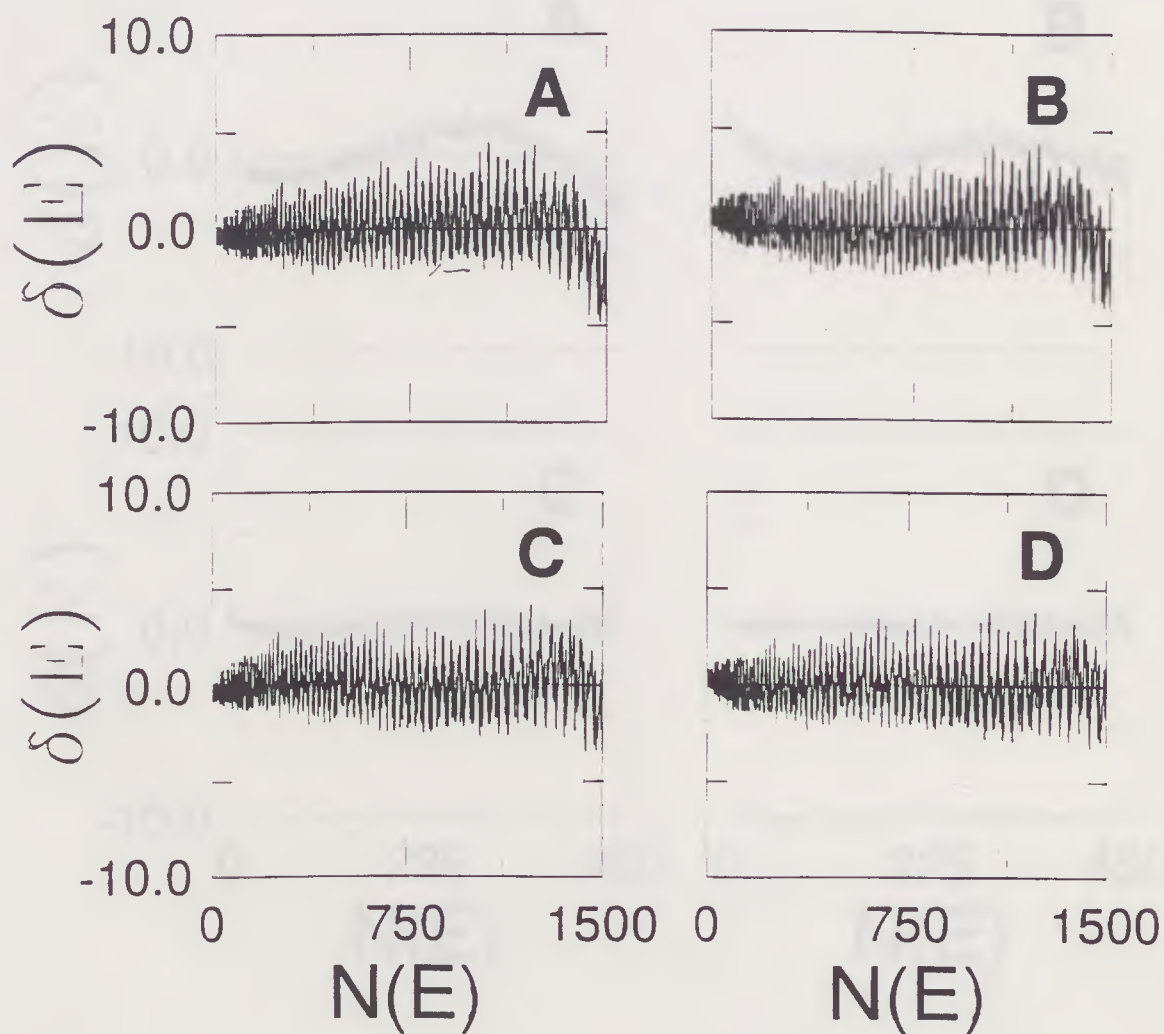


Figura B.6: Idem à figura anterior com 1500 autovalores e $\beta = 1.0$.

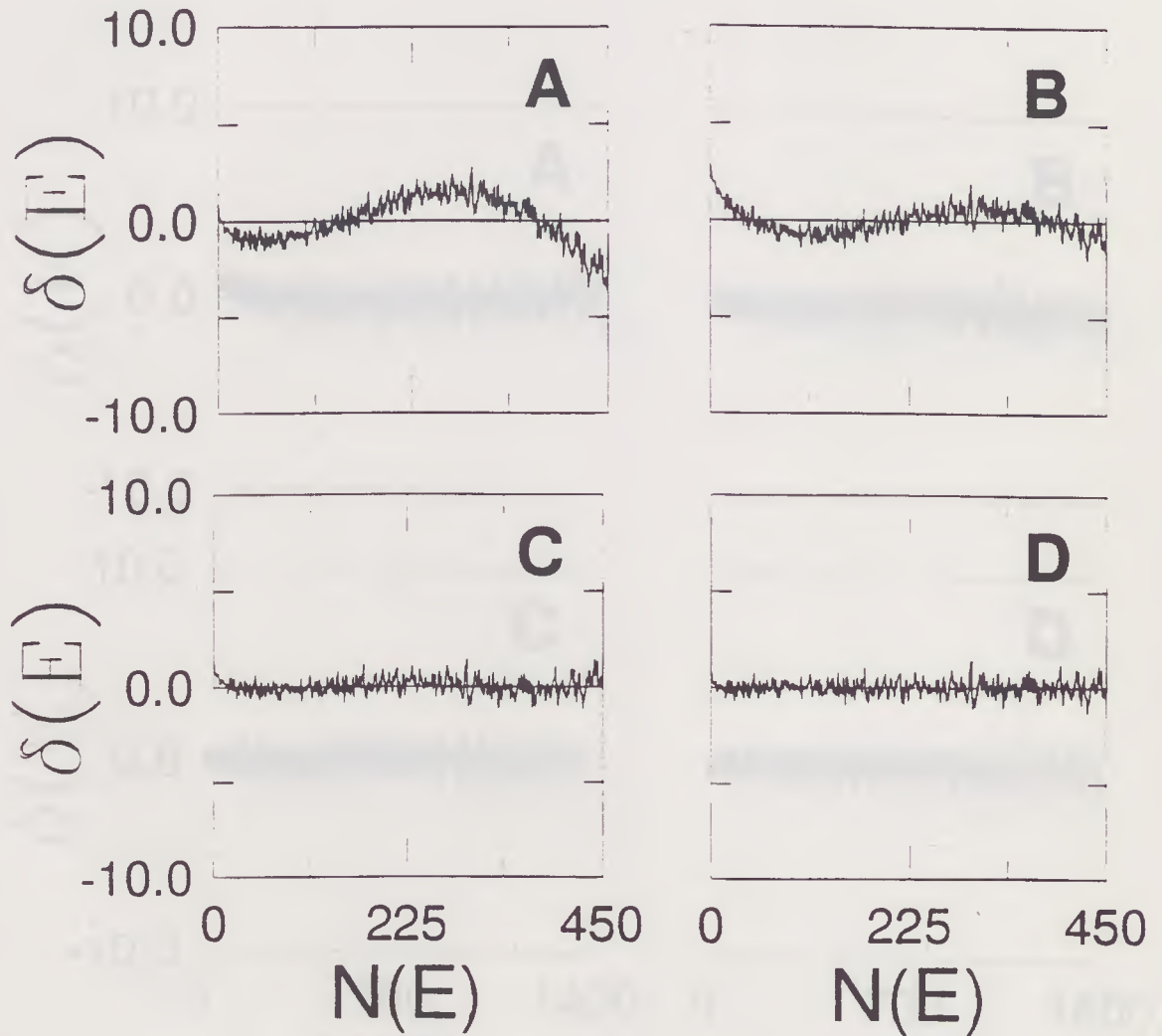


Figura B.7: $\delta(E) = N(E) - \overline{N_{pol}(E)}$ para a classe de simetria B1. 450 primeiros autovalores e $\beta = 0.01$. (A) corresponde a $\overline{N_{pol}(E)}$ ajustado por um polinômio de grau 1, (B) por um polinômio de grau 2 e assim sucessivamente até (D), ajuste através de um polinômio de grau 4.

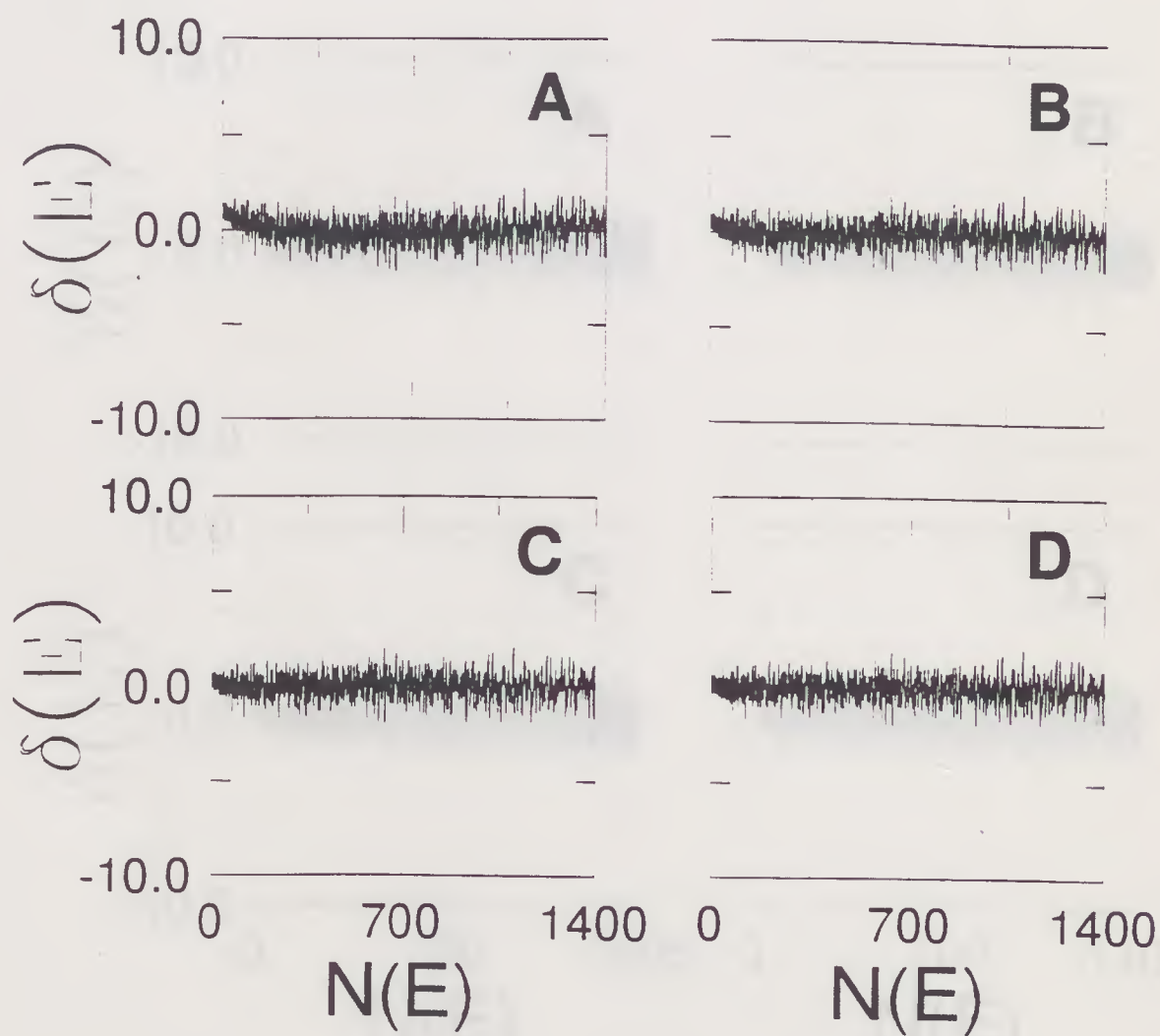


Figura B.8: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.2$.

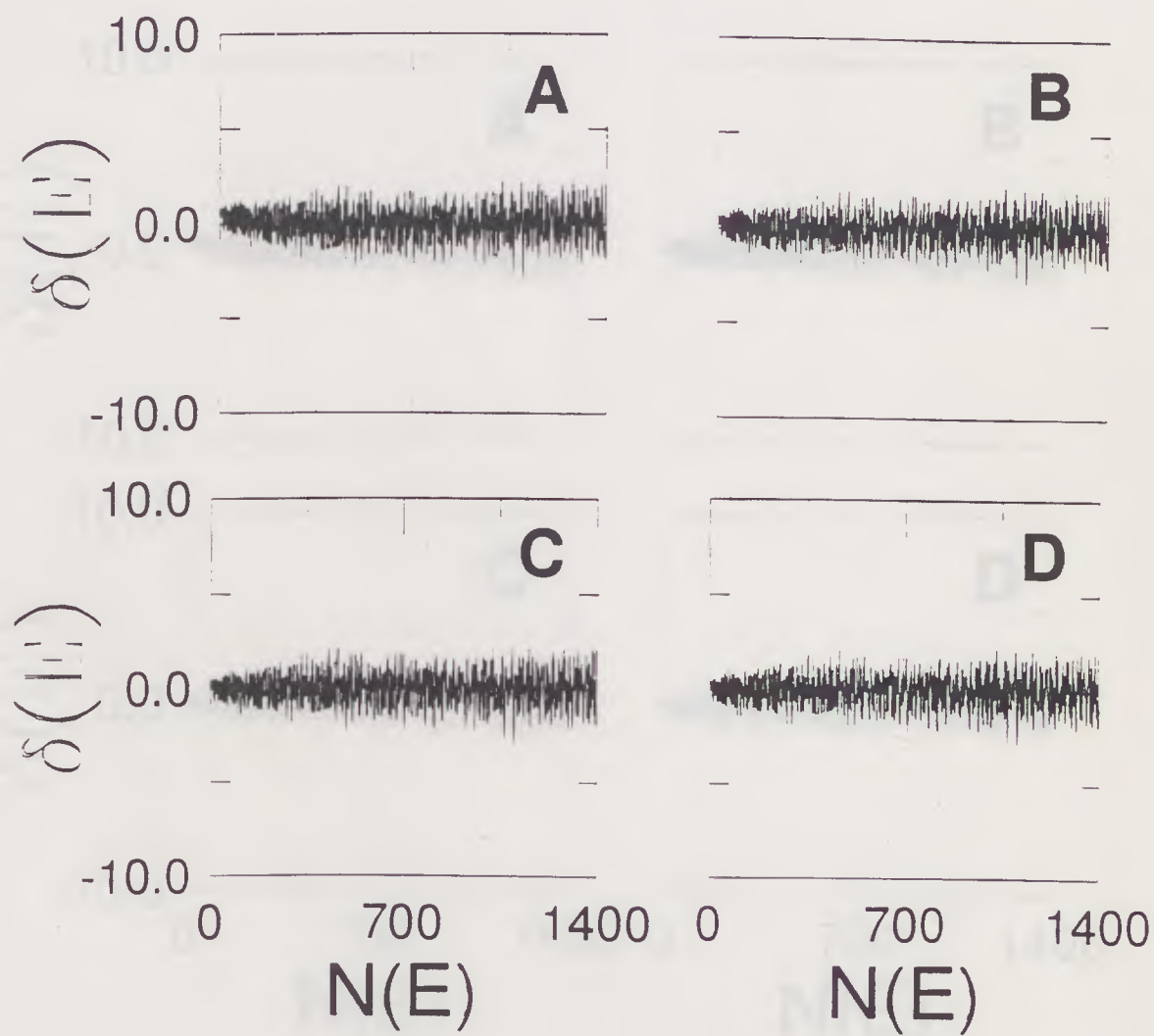


Figura B.9: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.4$.

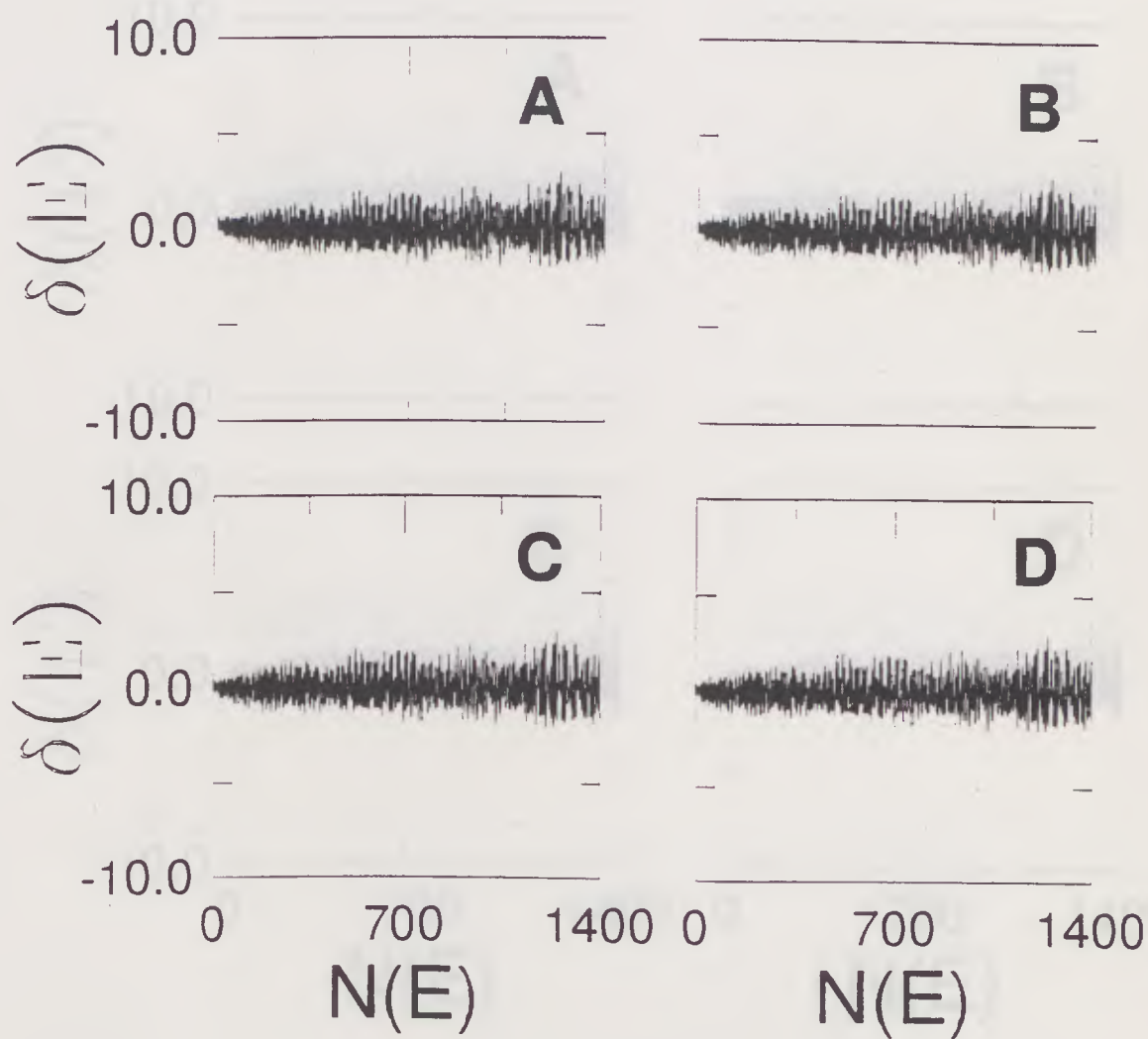


Figura B.10: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.6$.

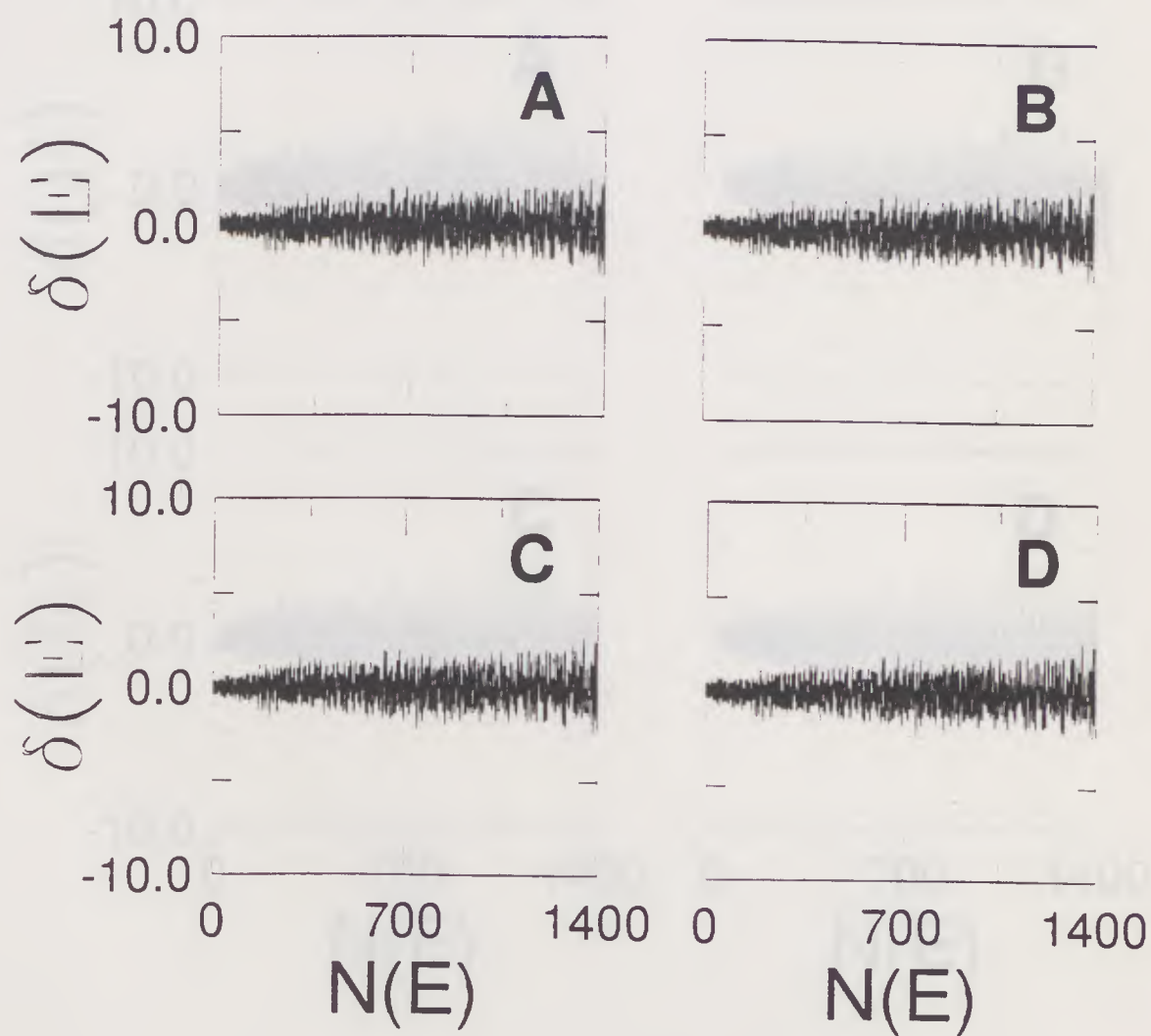


Figura B.11: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.8$.

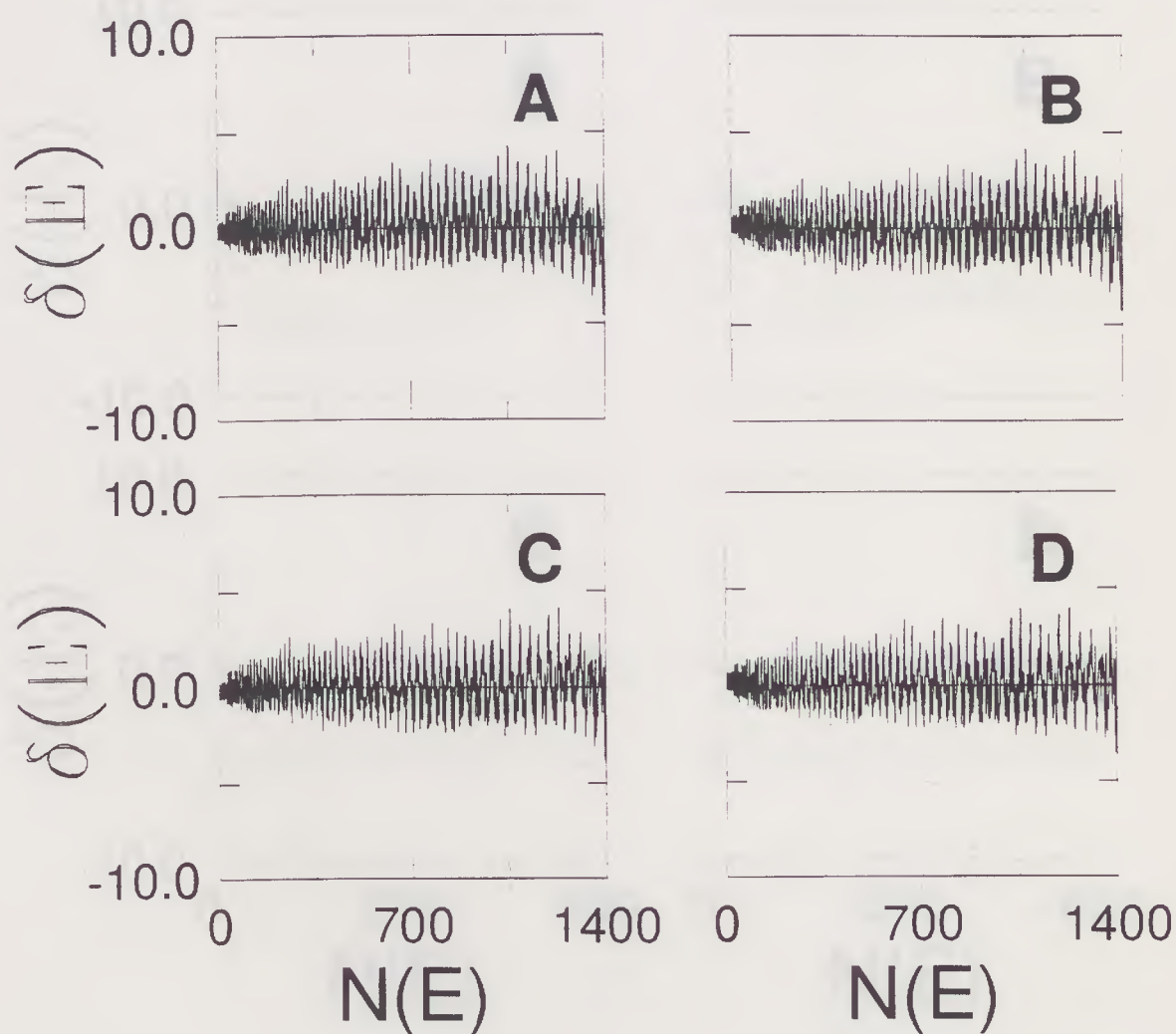


Figura B.12: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 1.0$.

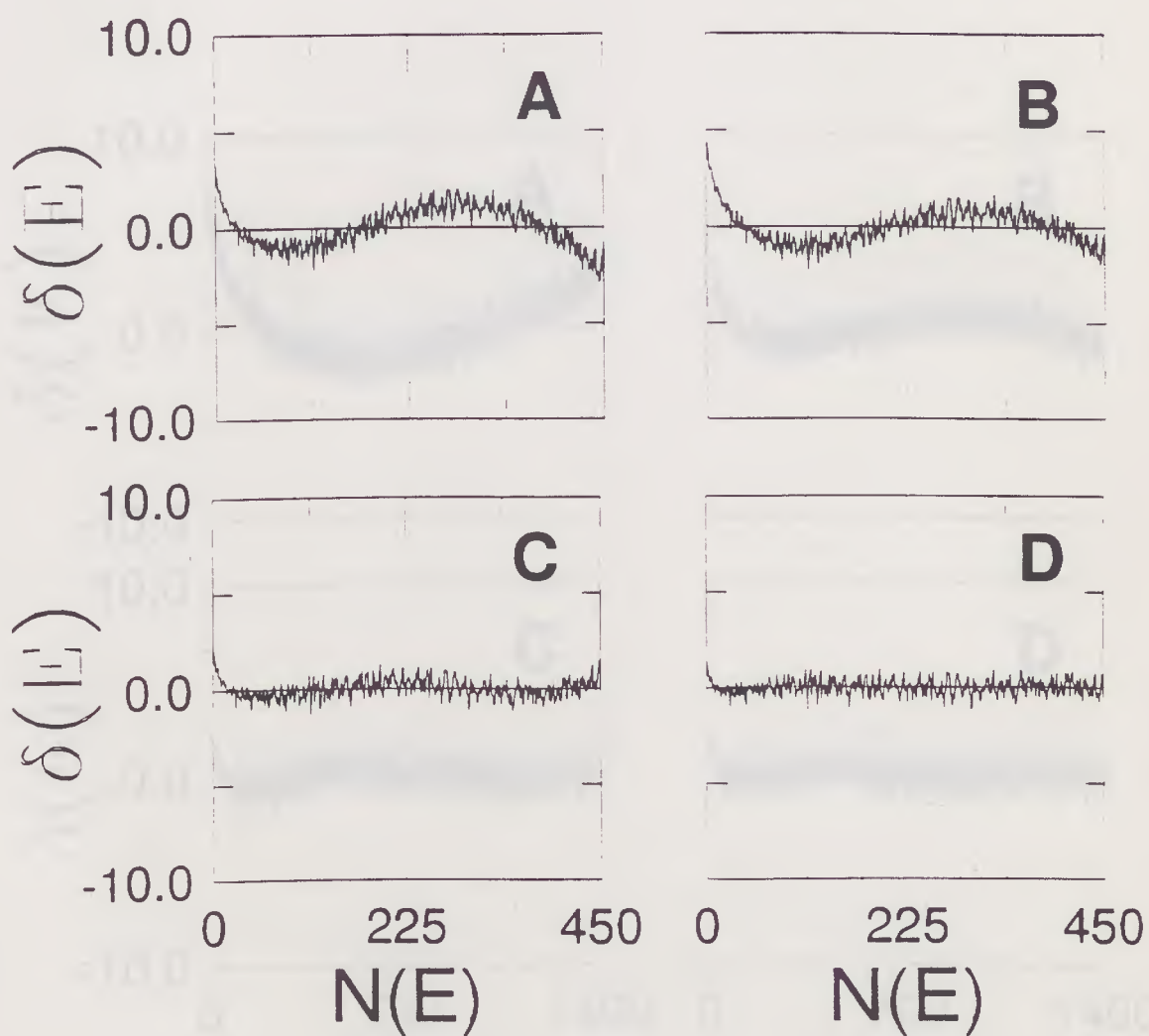


Figura B.13: $\delta(E) = N(E) - \overline{N_{pol}(E)}$ para a classe de simetria A2. 450 primeiros autovalores e $\beta = 0.01$. (A) corresponde a $\overline{N_{pol}(E)}$ ajustado por um polinômio de grau 1, (B) por um polinômio de grau 2 e assim sucessivamente até (D), ajuste através de um polinômio de grau 4.

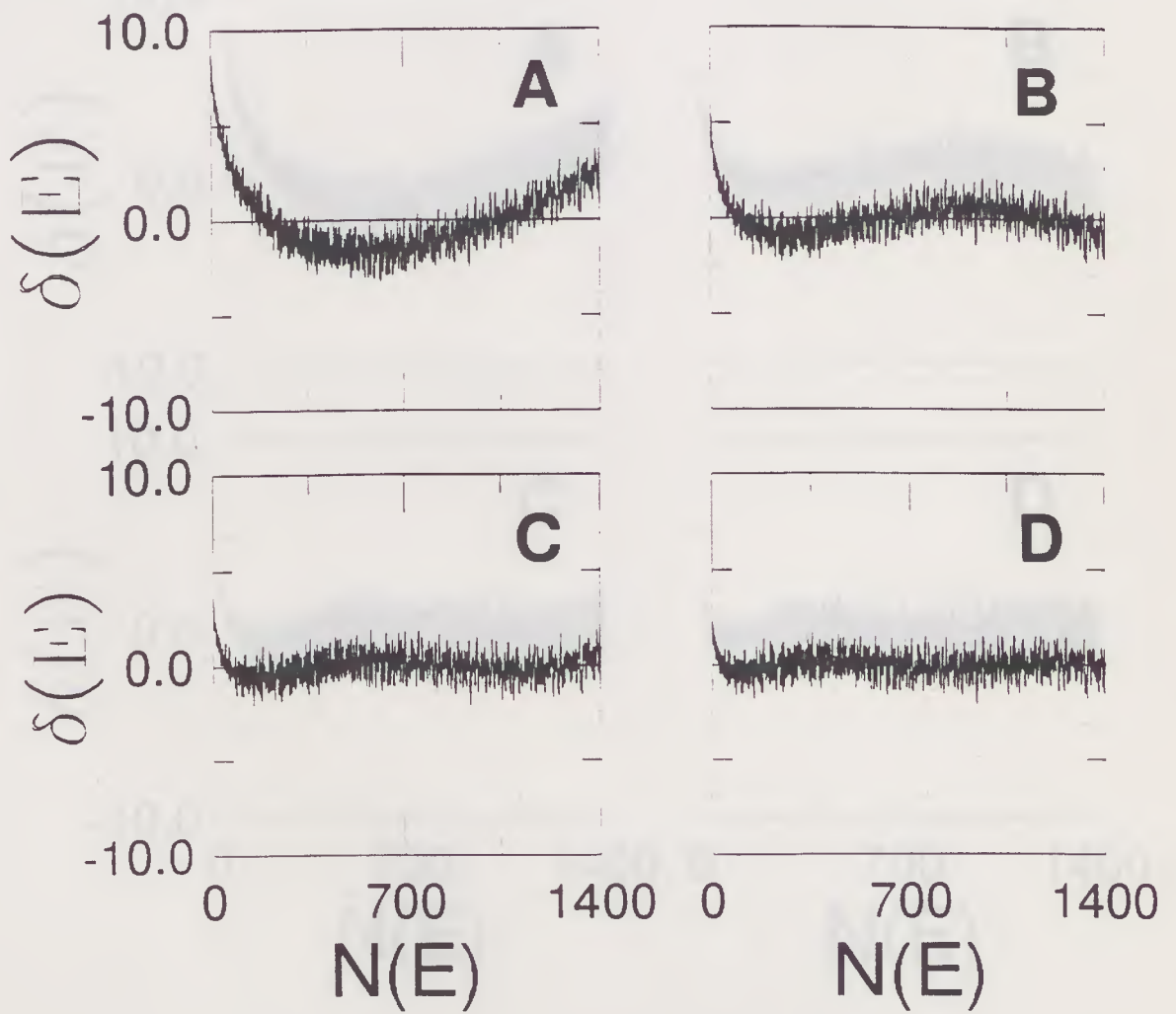


Figura B.14: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.2$.

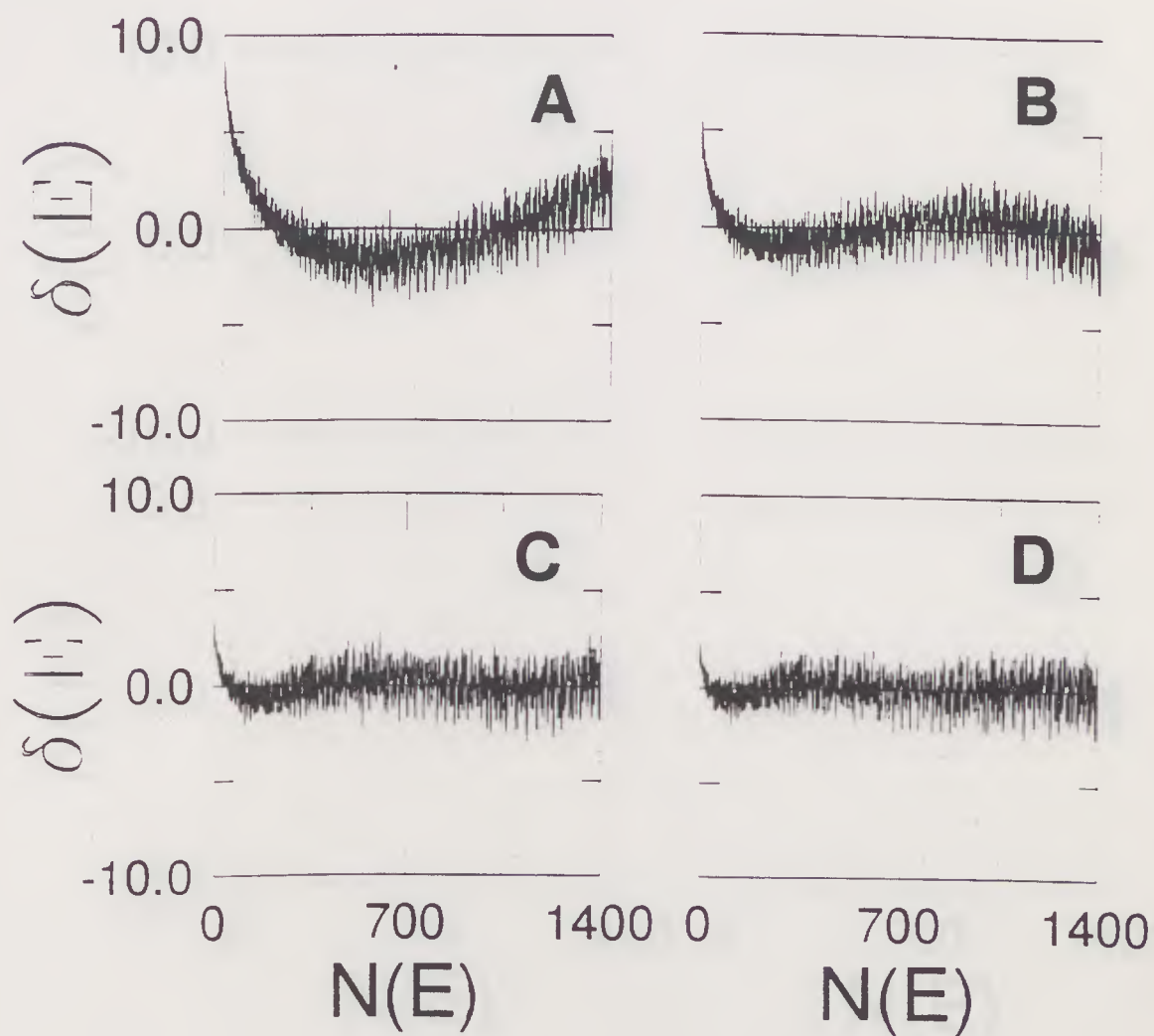


Figura B.15: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.4$.

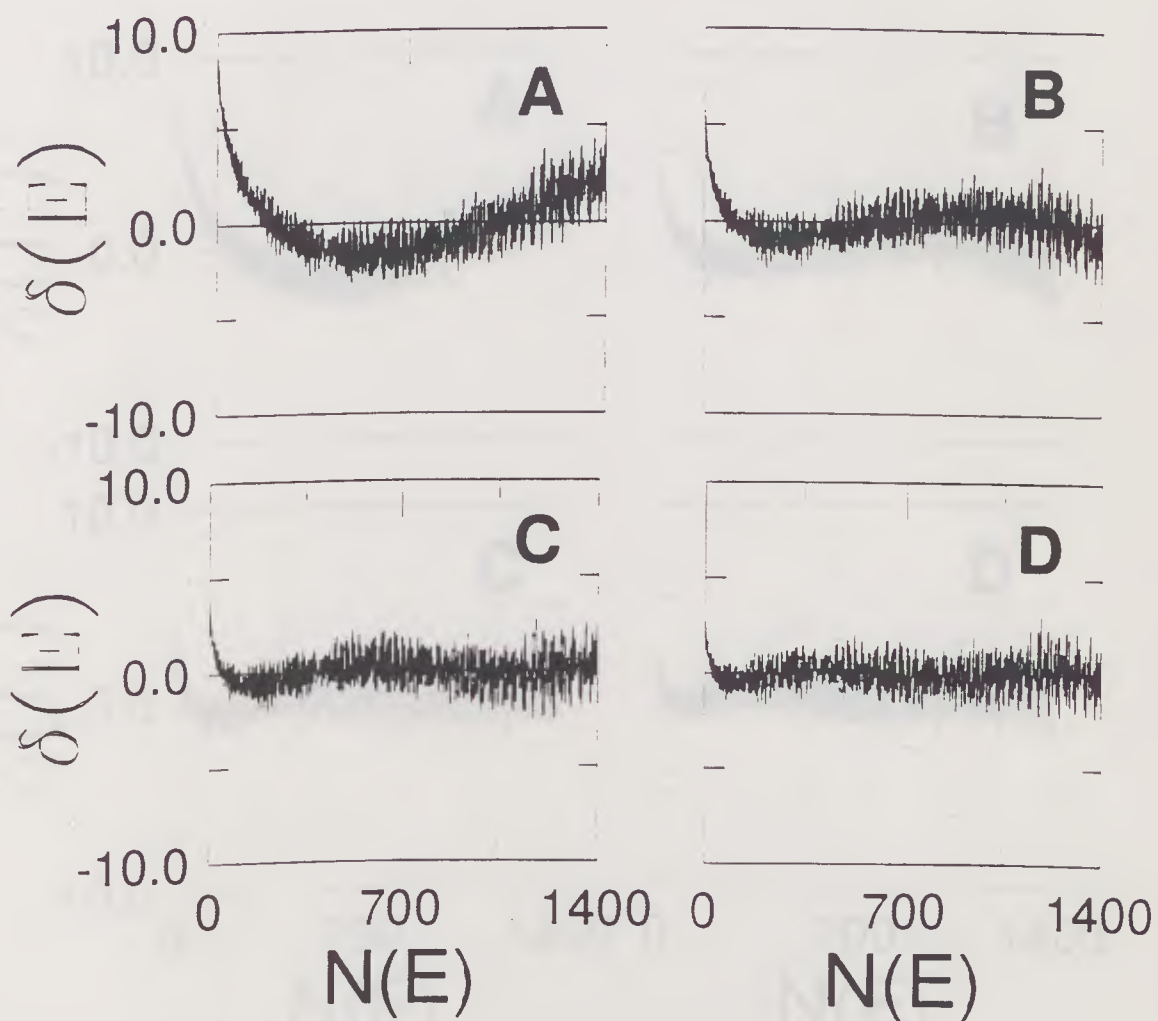


Figura B.16: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.6$.

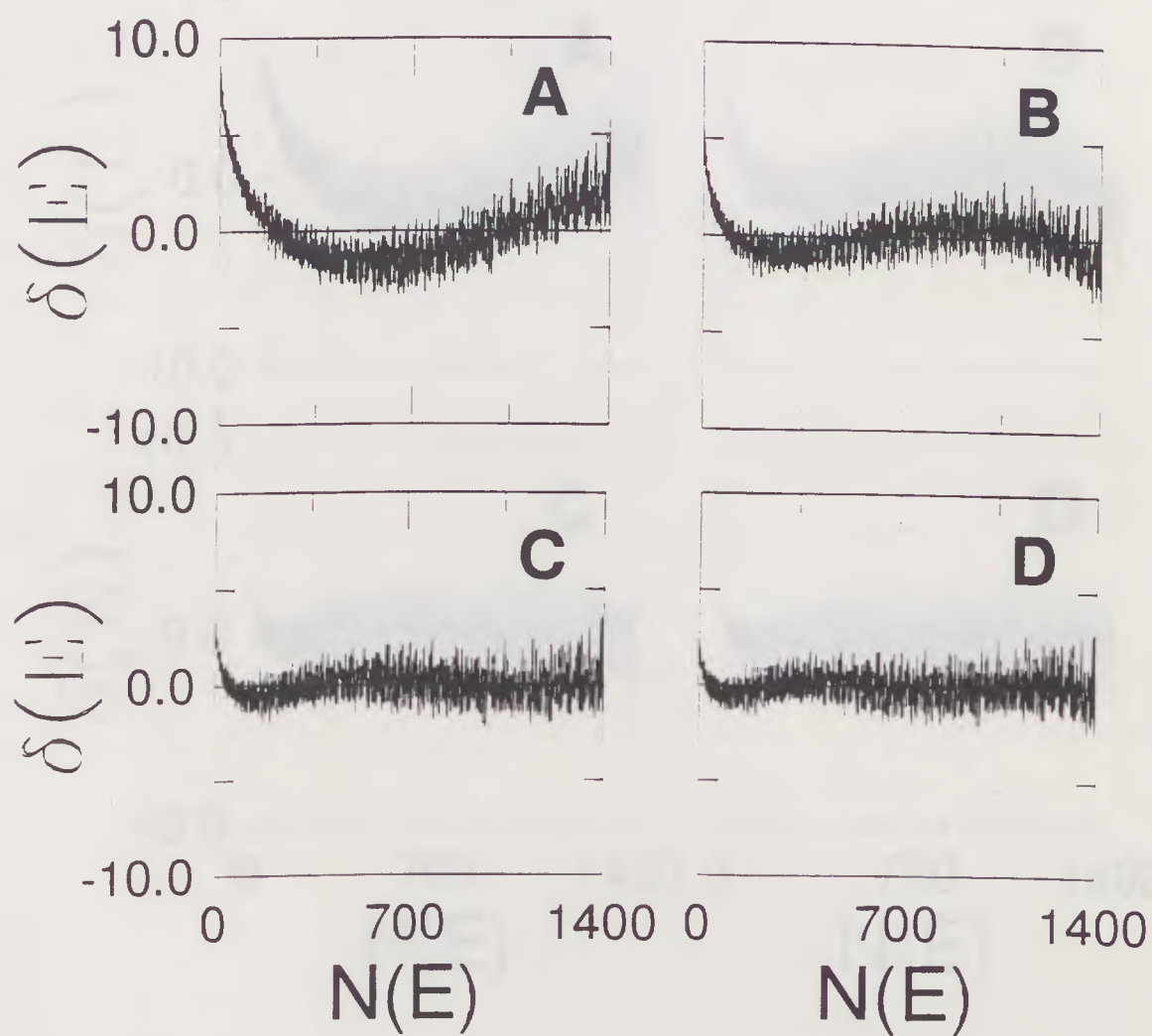


Figura B.17: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 0.8$.

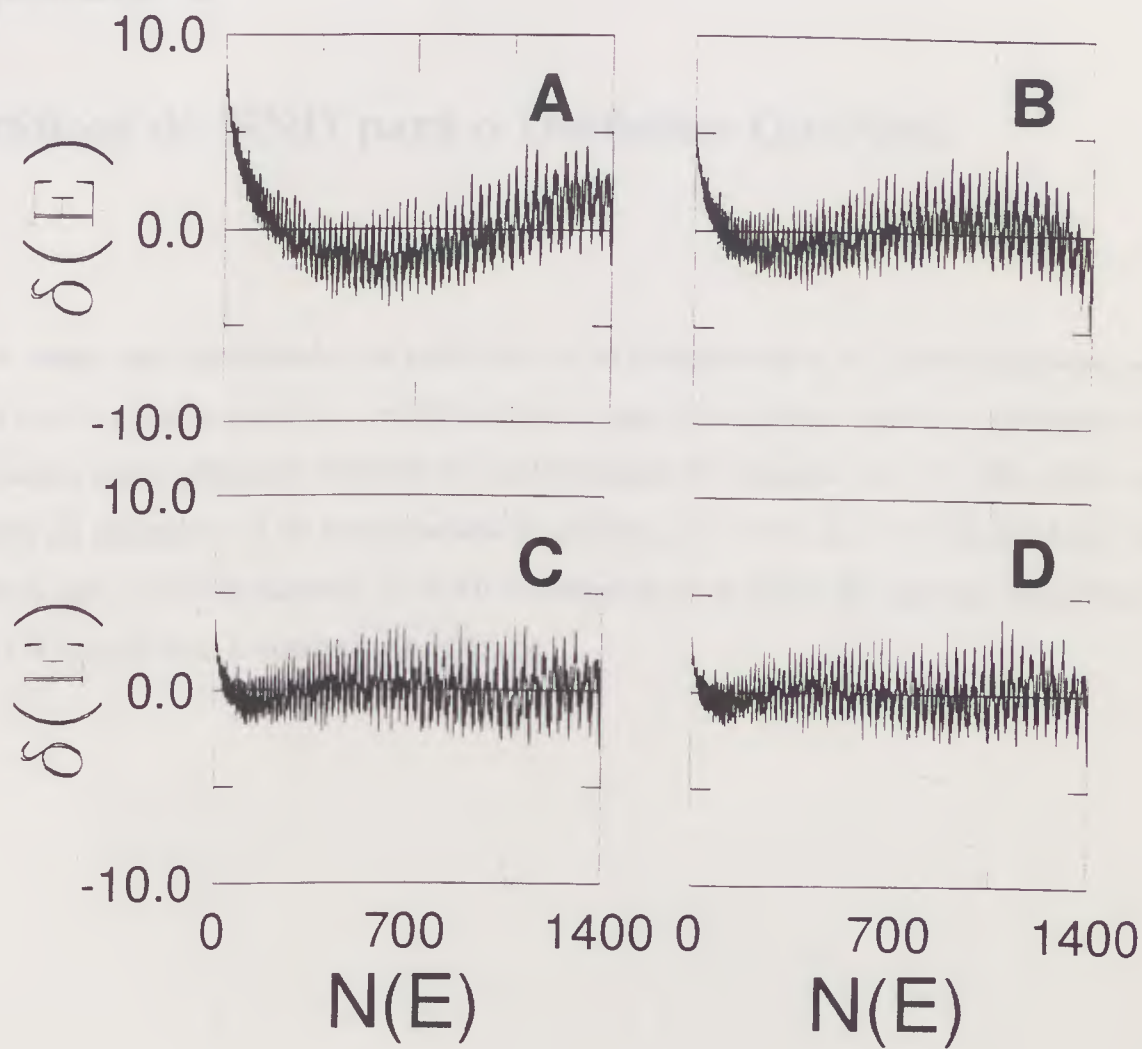


Figura B.18: Idem à figura anterior com 1400 autovalores e $\beta = 1.0$.

Apêndice C

Gráficos de NND para o Oscilador Quártico

A seguir são apresentados os gráficos com os histogramas e as curvas ajustadas para cada um dos cinco modelos estudados, para o caso do oscilador quártico isotrópico. Os resultados estão separados segundo as quatro classes de simetria (A1, B2, B1, A2) e seis valores do parâmetro β da hamiltoniana do sistema ($\beta = 0.01, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$). Vale lembrar que para este sistema, $\beta = 0.0$ corresponde à situação de máxima caoticidade e $\beta = 1.0$ corresponde à máxima regularidade.

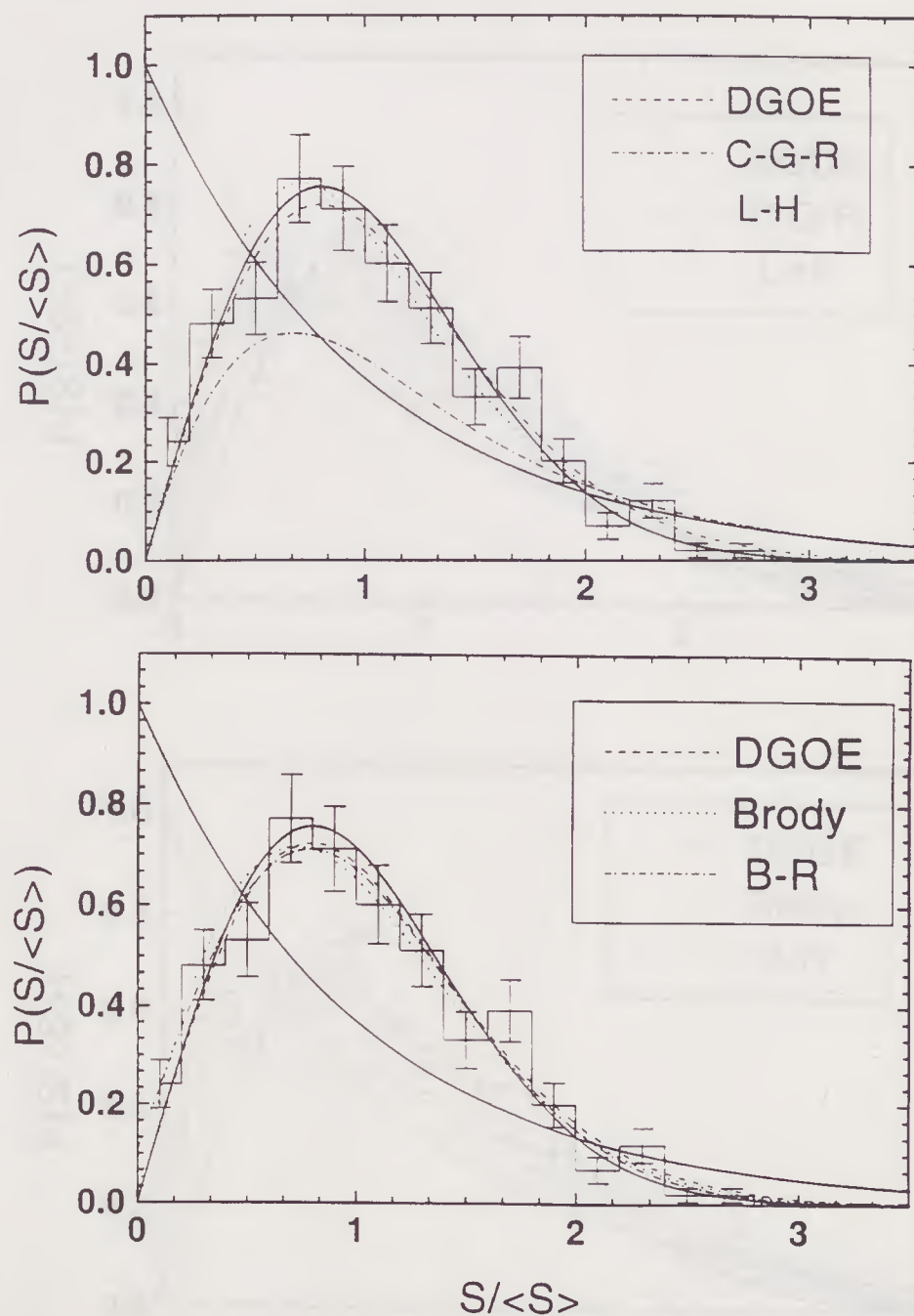


Figura C.1: Histogramas e distribuições de espaçamentos de vizinho mais próximo ajustadas segundo os modelos estudados (DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani, Lenz-Haake, Brody, Berry-Robnik) para a classe de simetria A1 e $\beta = 0.01$: em linha contínua são apresentadas as curvas GOE e Poisson.

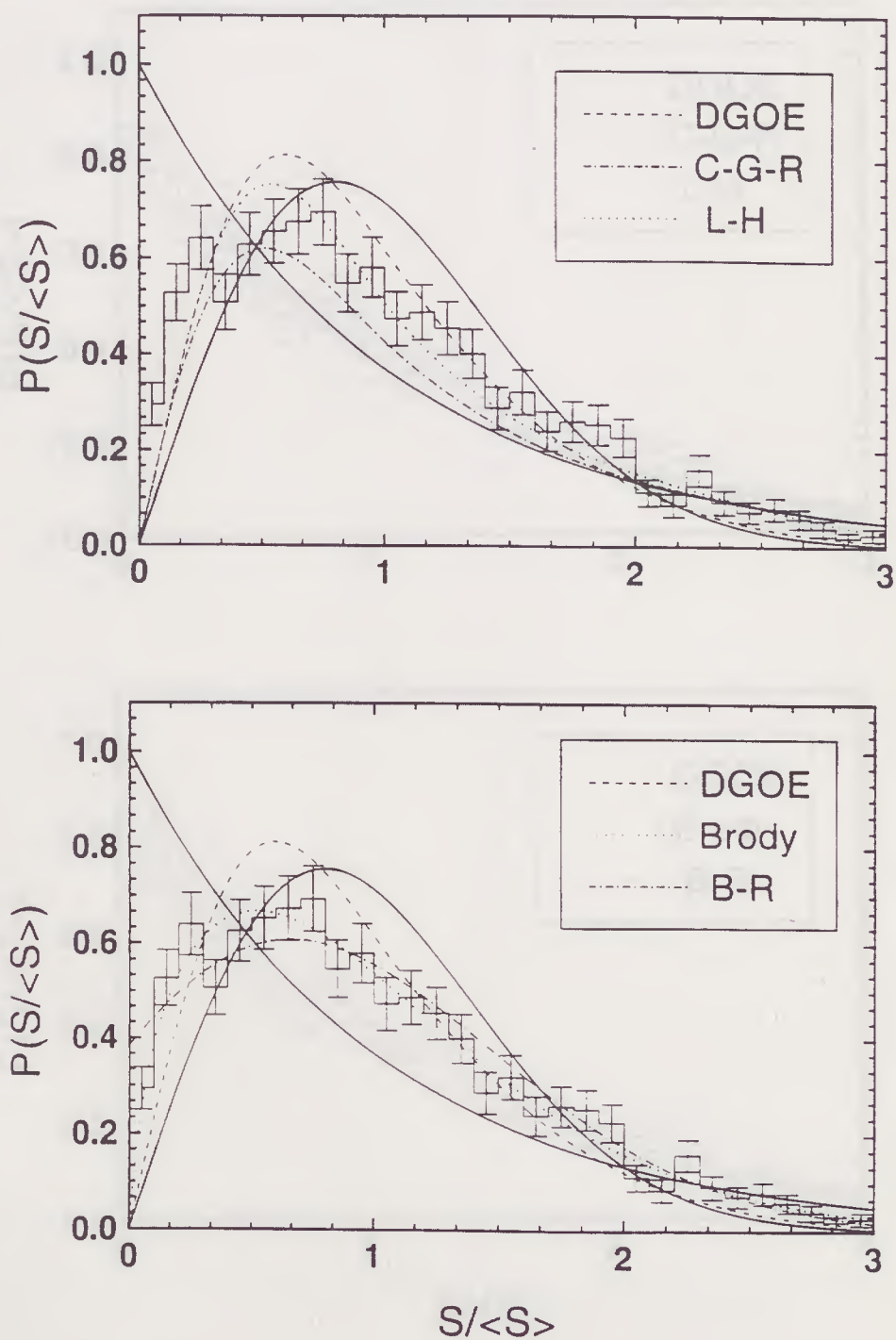


Figura C.2: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A1 e $\beta = 0.2$.

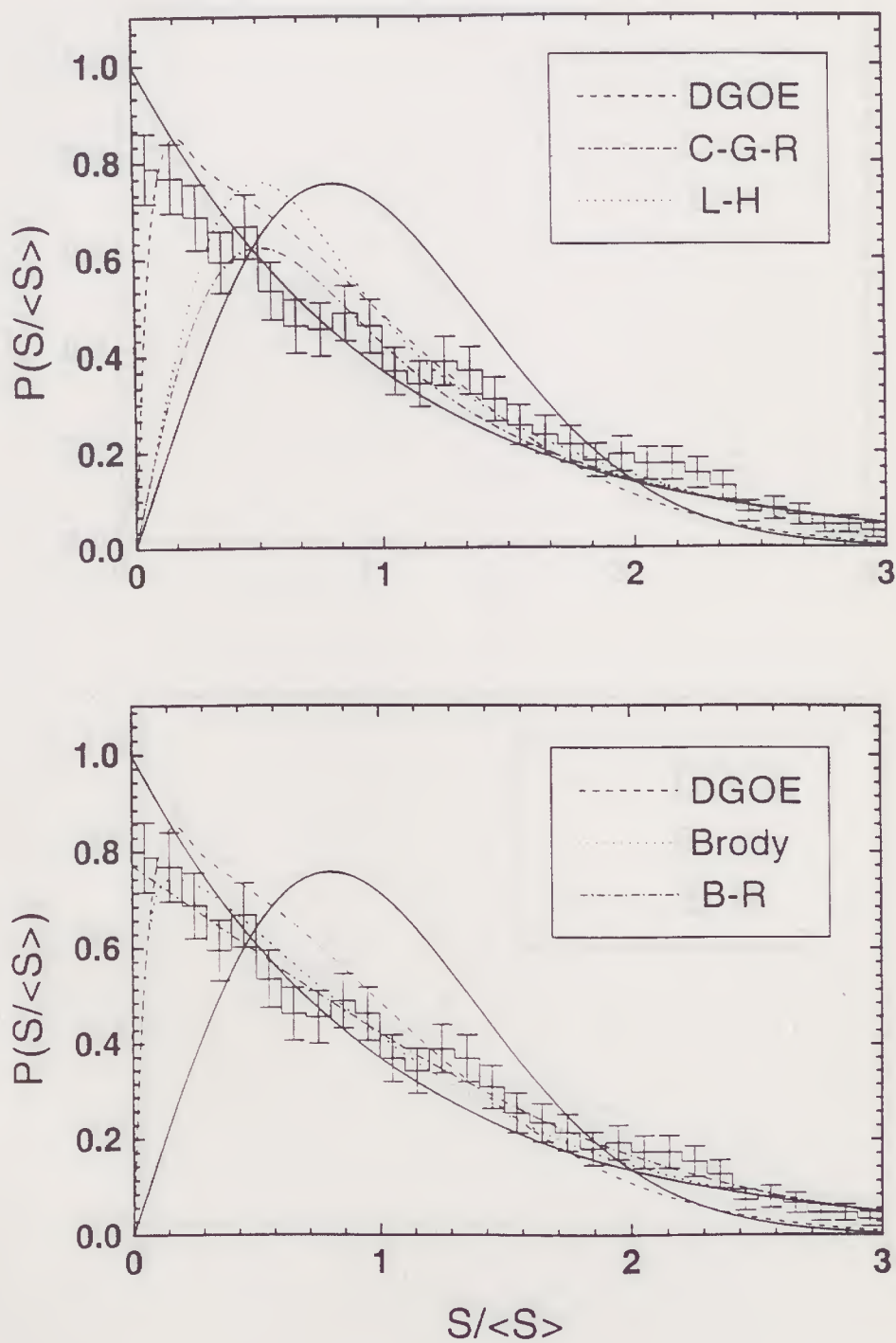


Figura C.3: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A1 e $\beta = 0.4$.

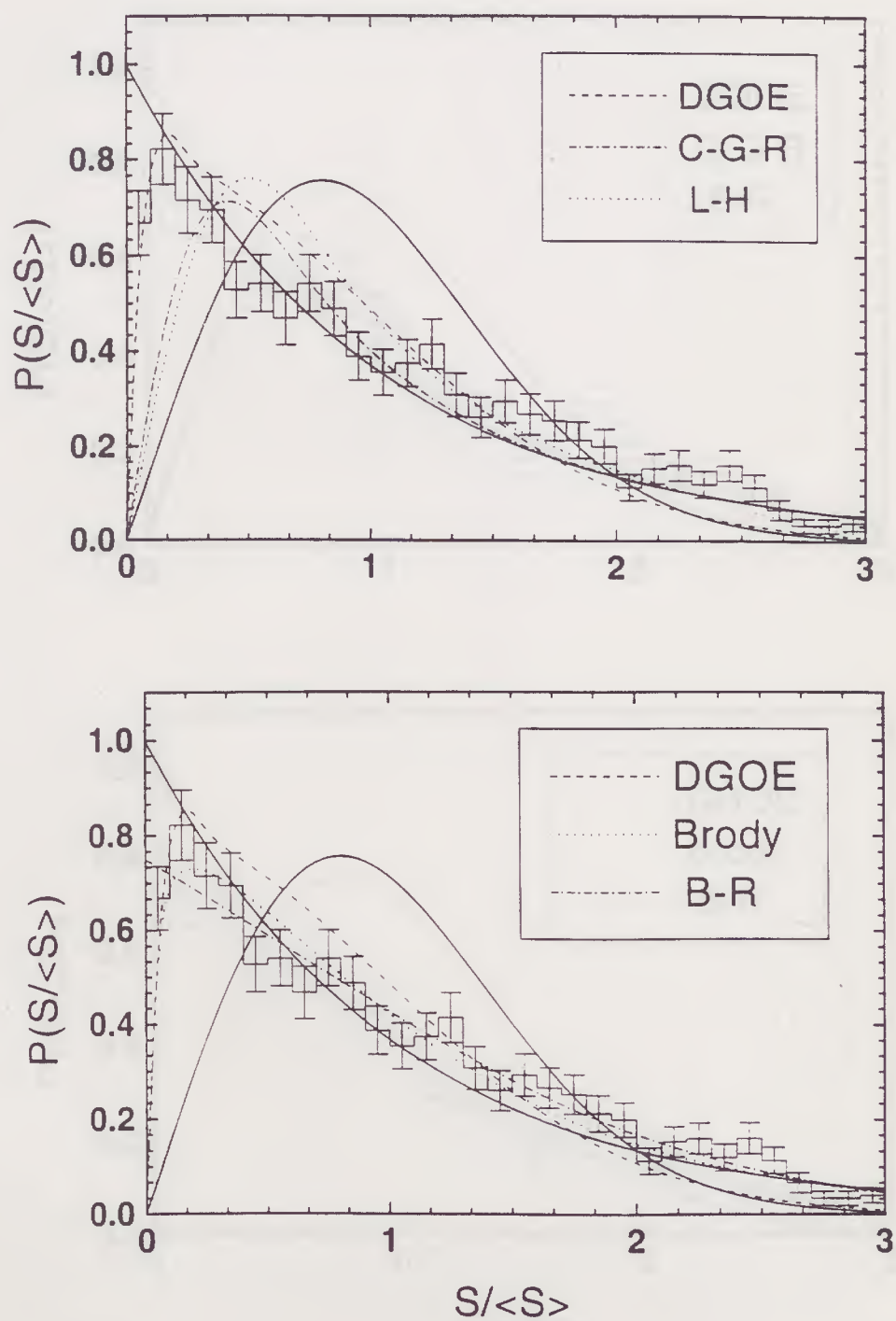


Figura C.4: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A1 e $\beta = 0.6$.

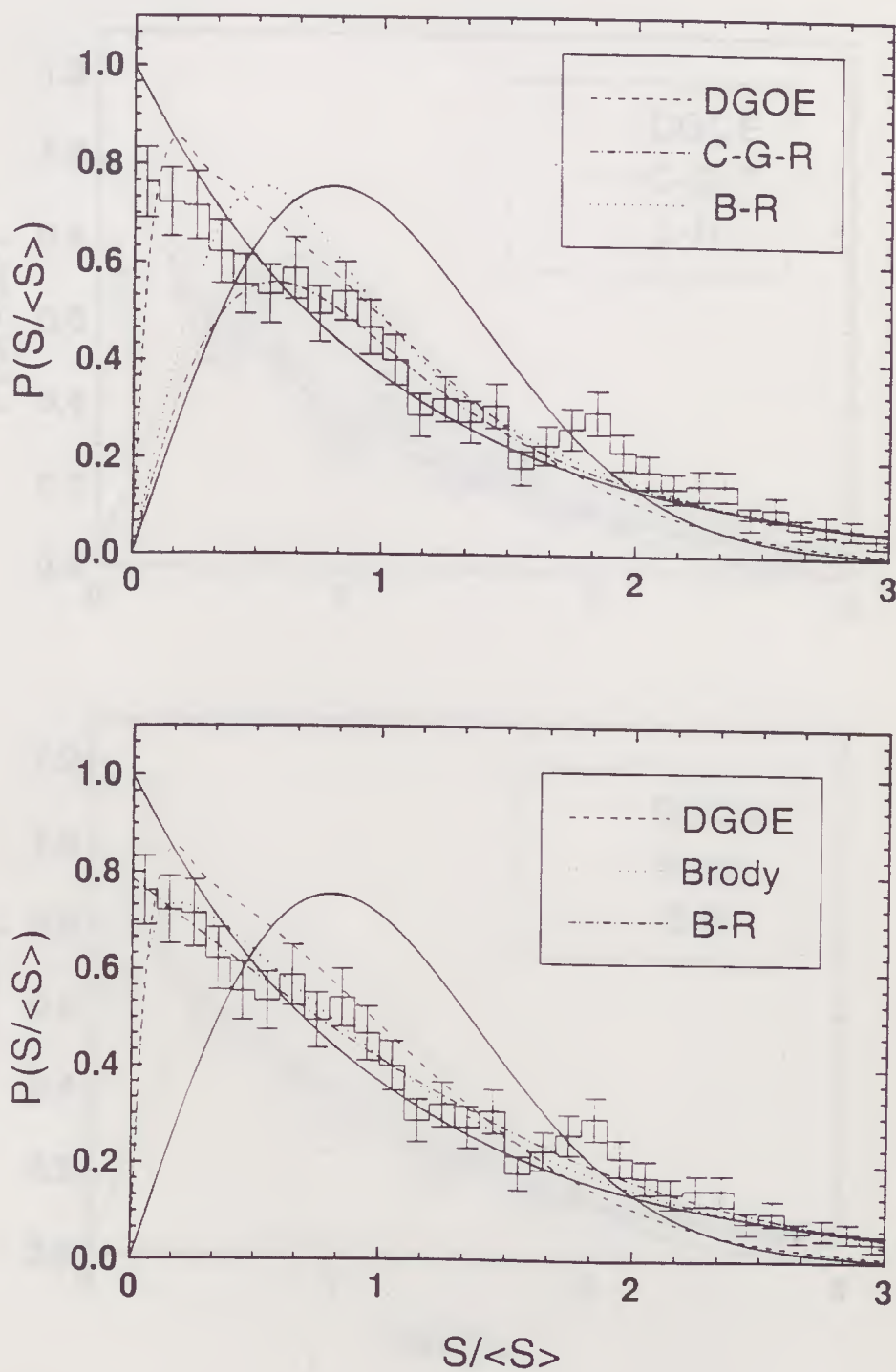


Figura C.5: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A1 e $\beta = 0.8$.

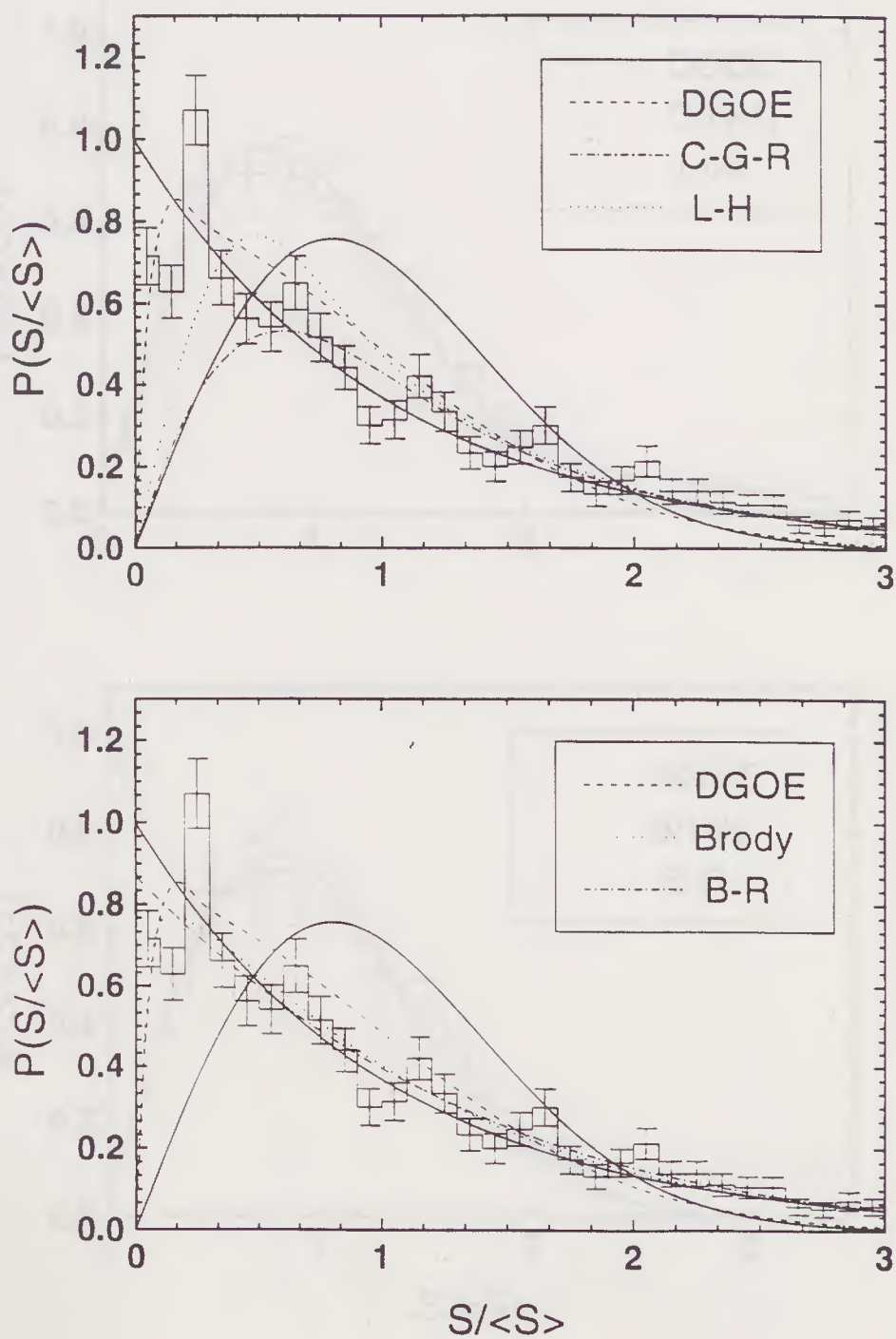


Figura C.6: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A1 e $\beta = 1.0$.

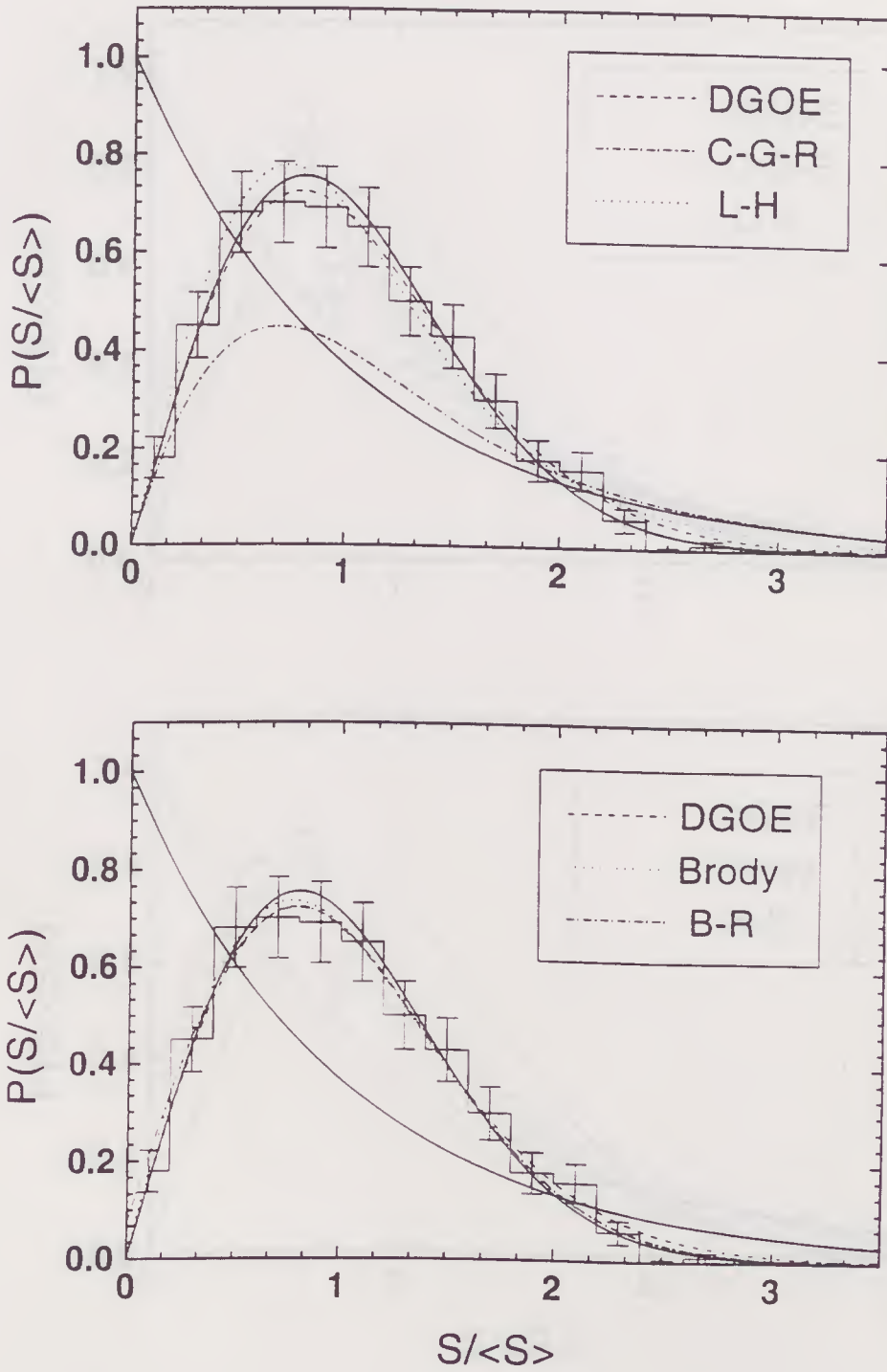


Figura C.7: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B2 e $\beta = 0.01$.

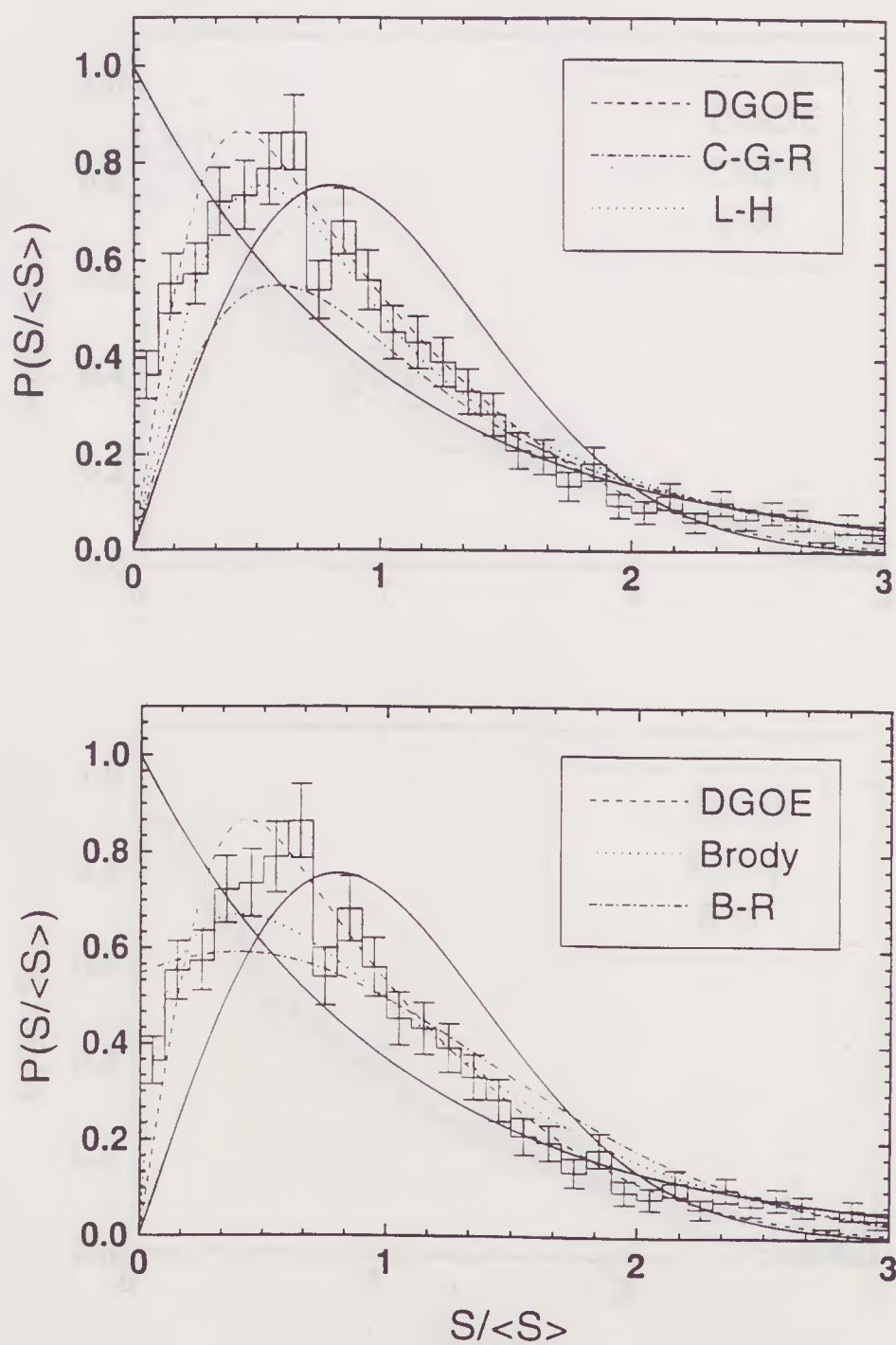


Figura C.8: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B2 e $\beta = 0.2$.

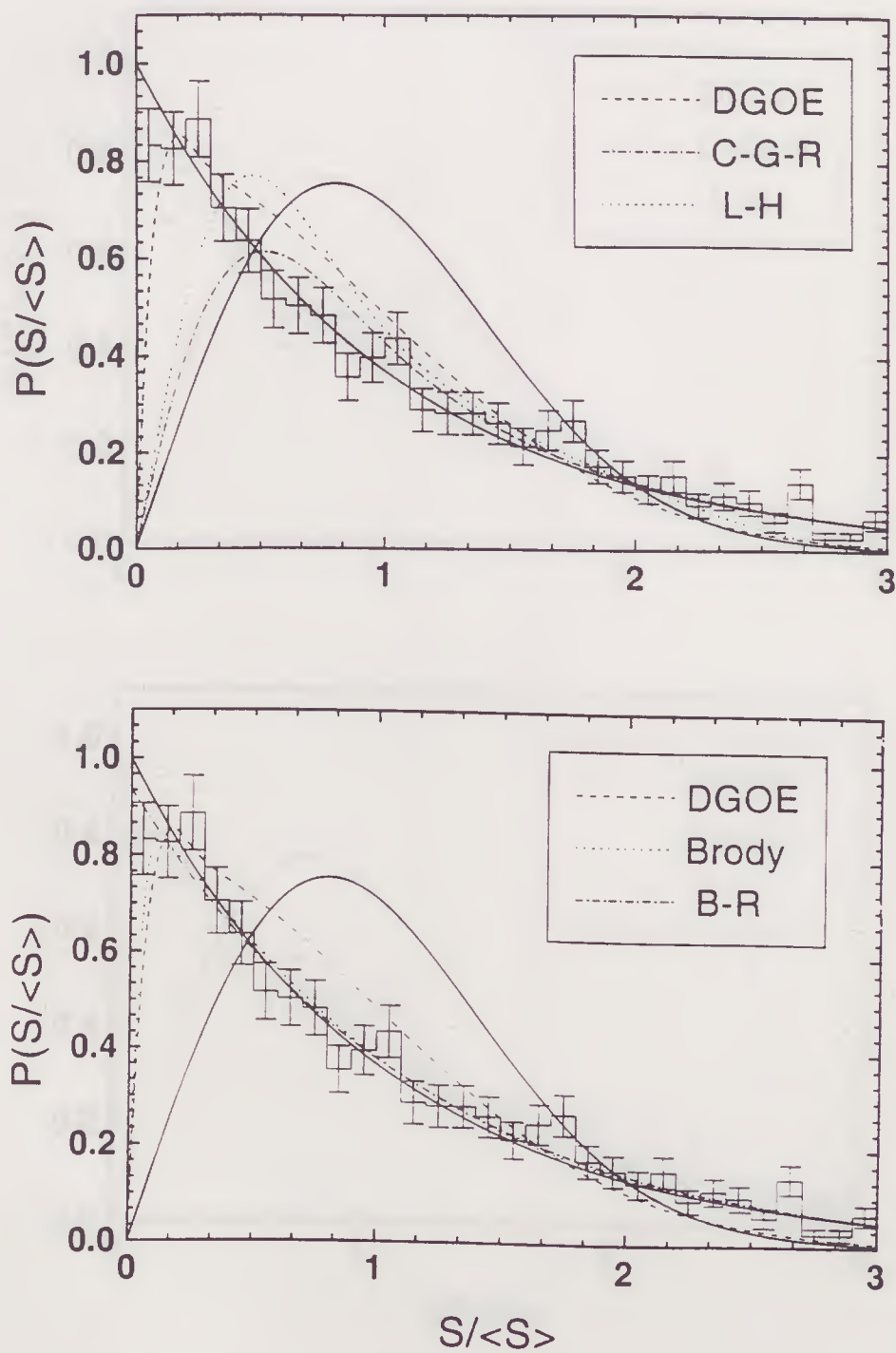


Figura C.9: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B2 e $\beta = 0.4$.

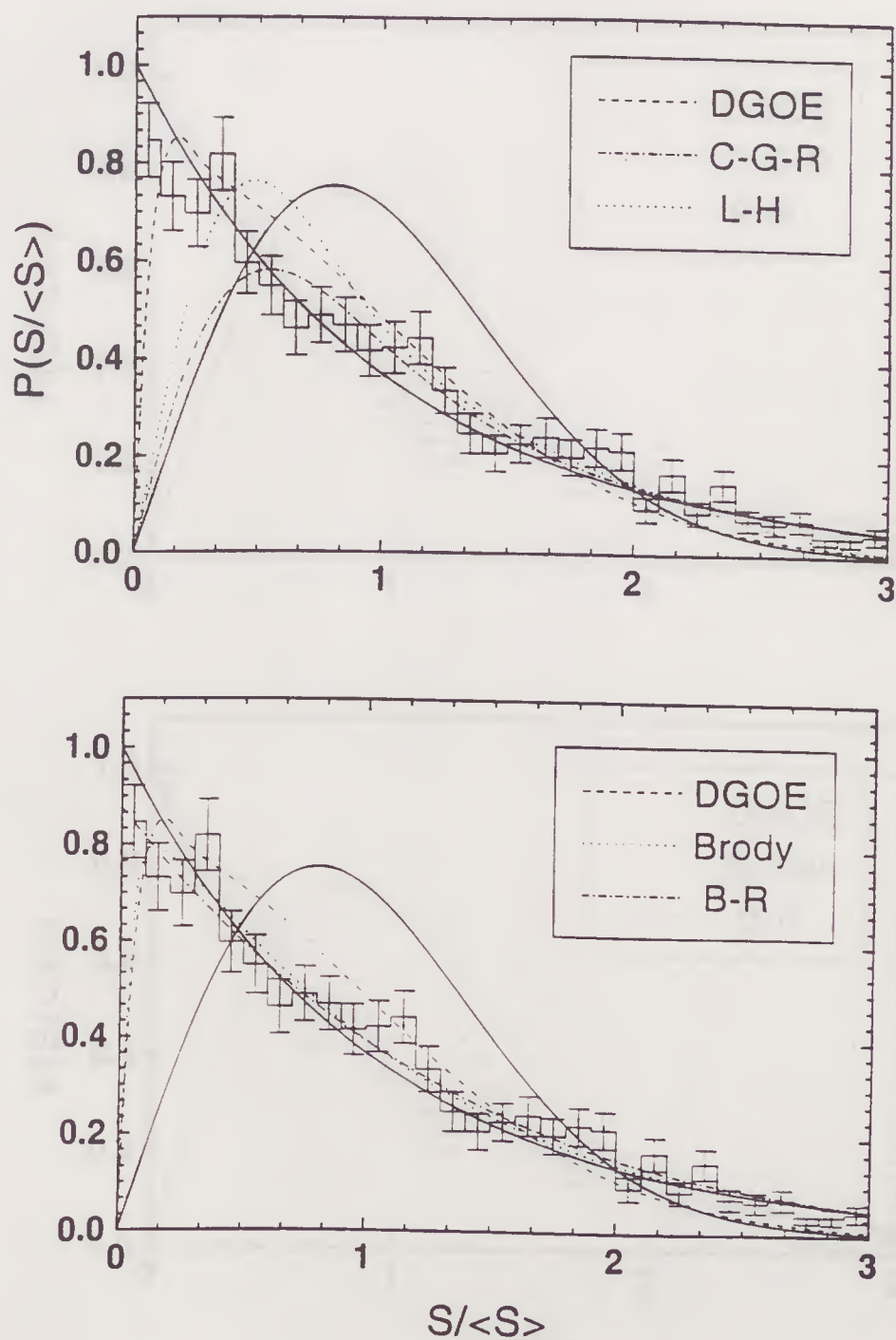


Figura C.10: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B2 e $\beta = 0.6$.

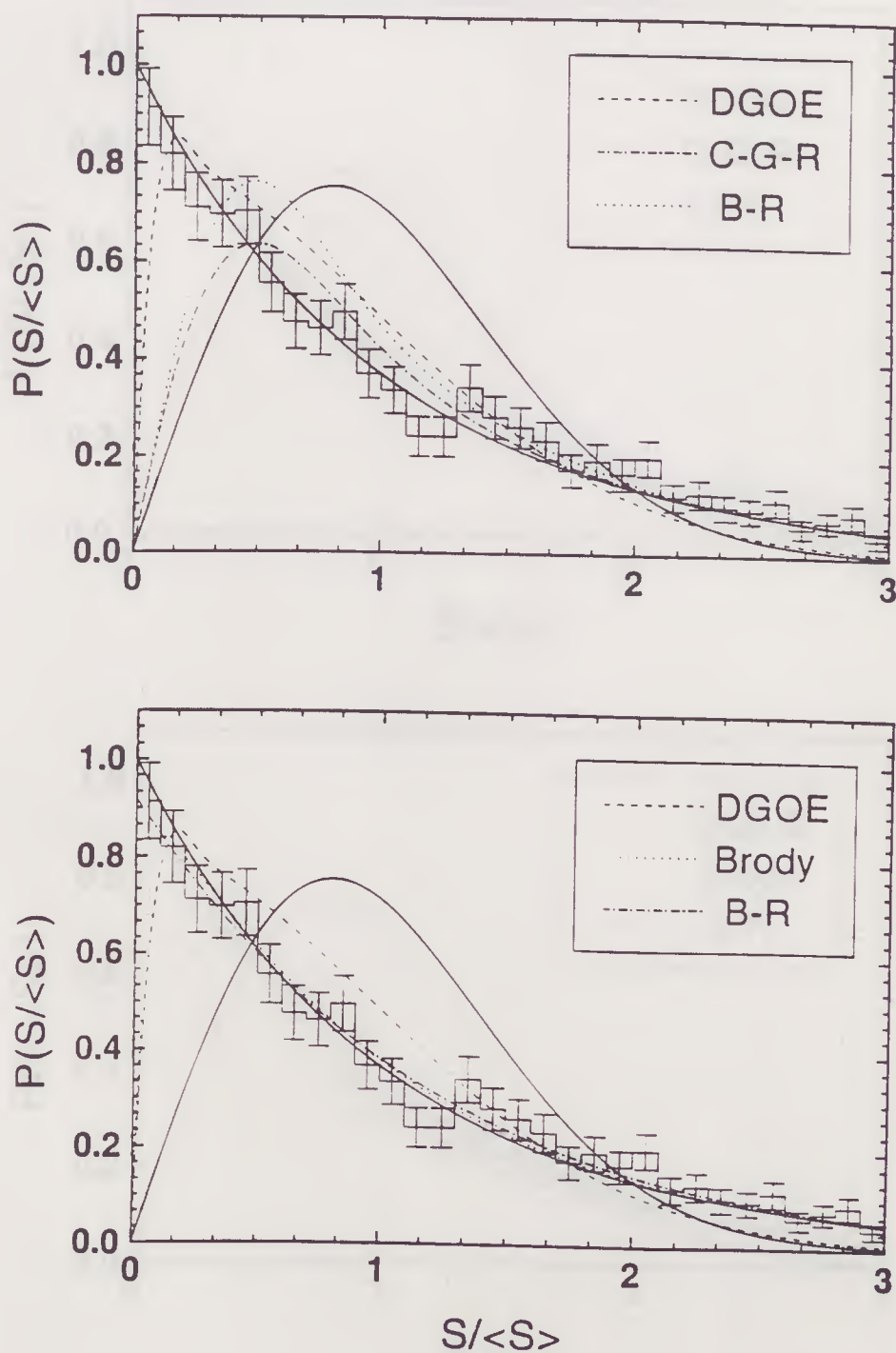


Figura C.11: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B2 e $\beta = 0.8$.

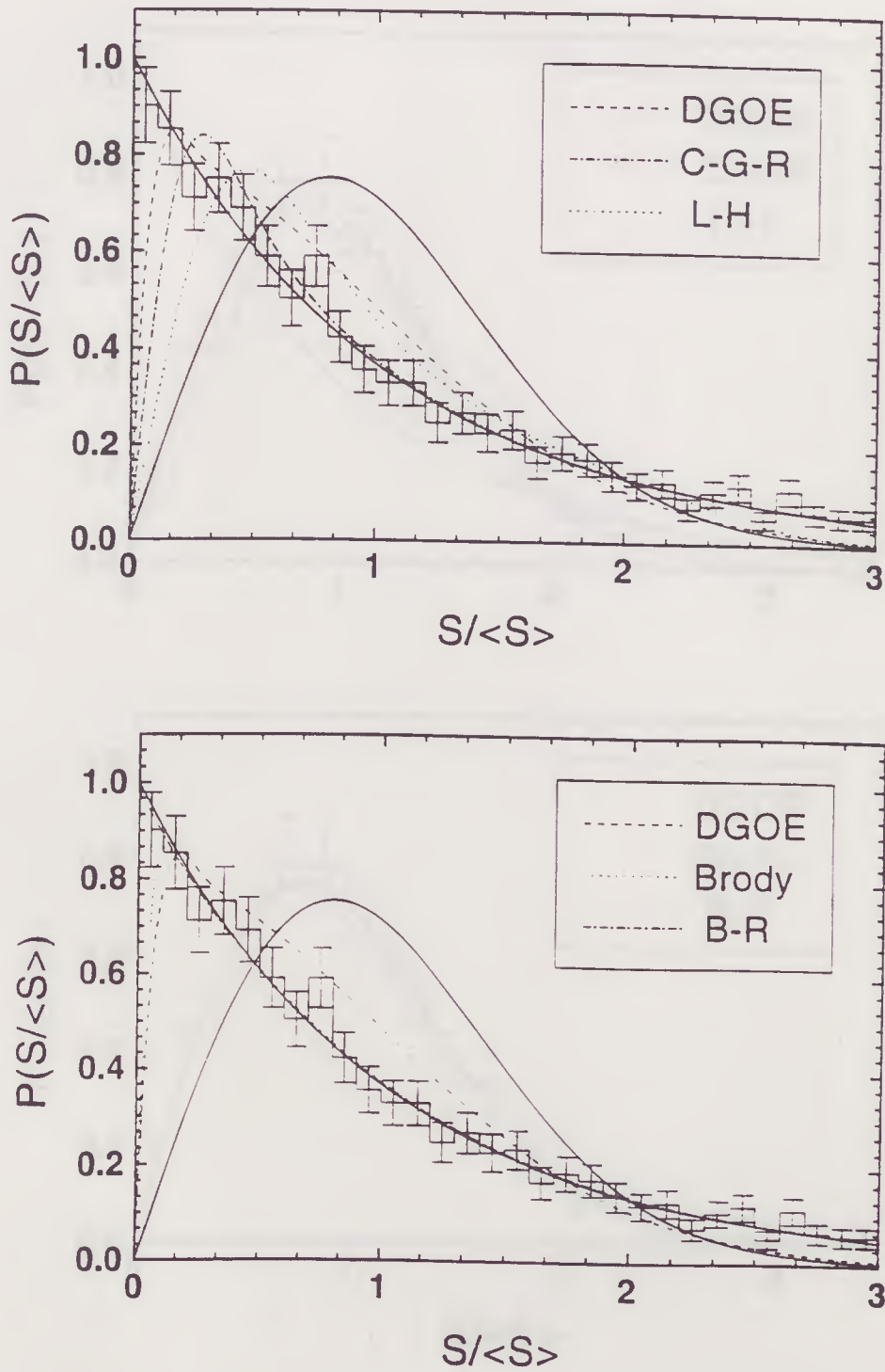


Figura C.12: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B2 e $\beta = 1.0$.

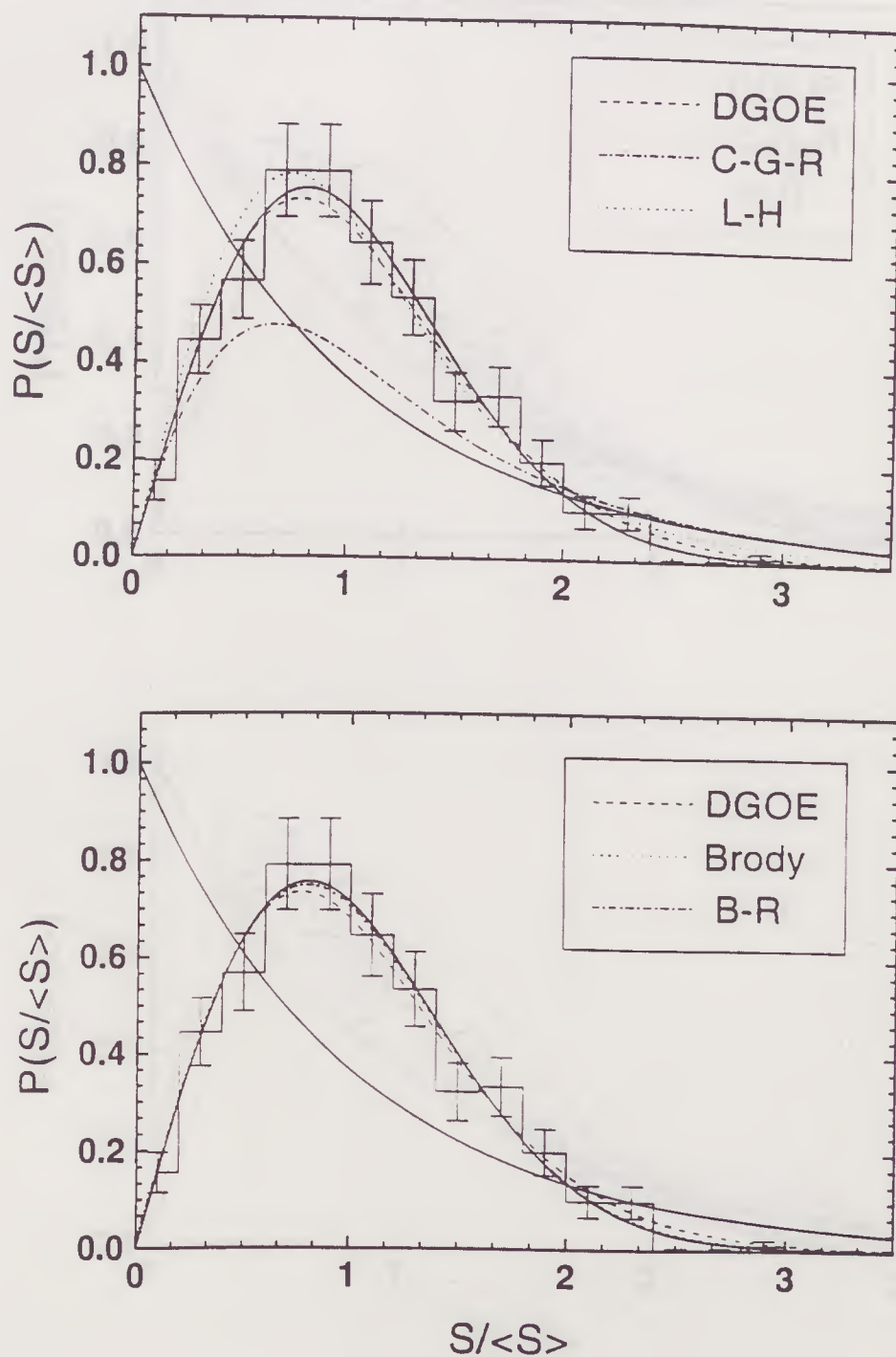


Figura C.13: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B1 e $\beta = 0.01$.

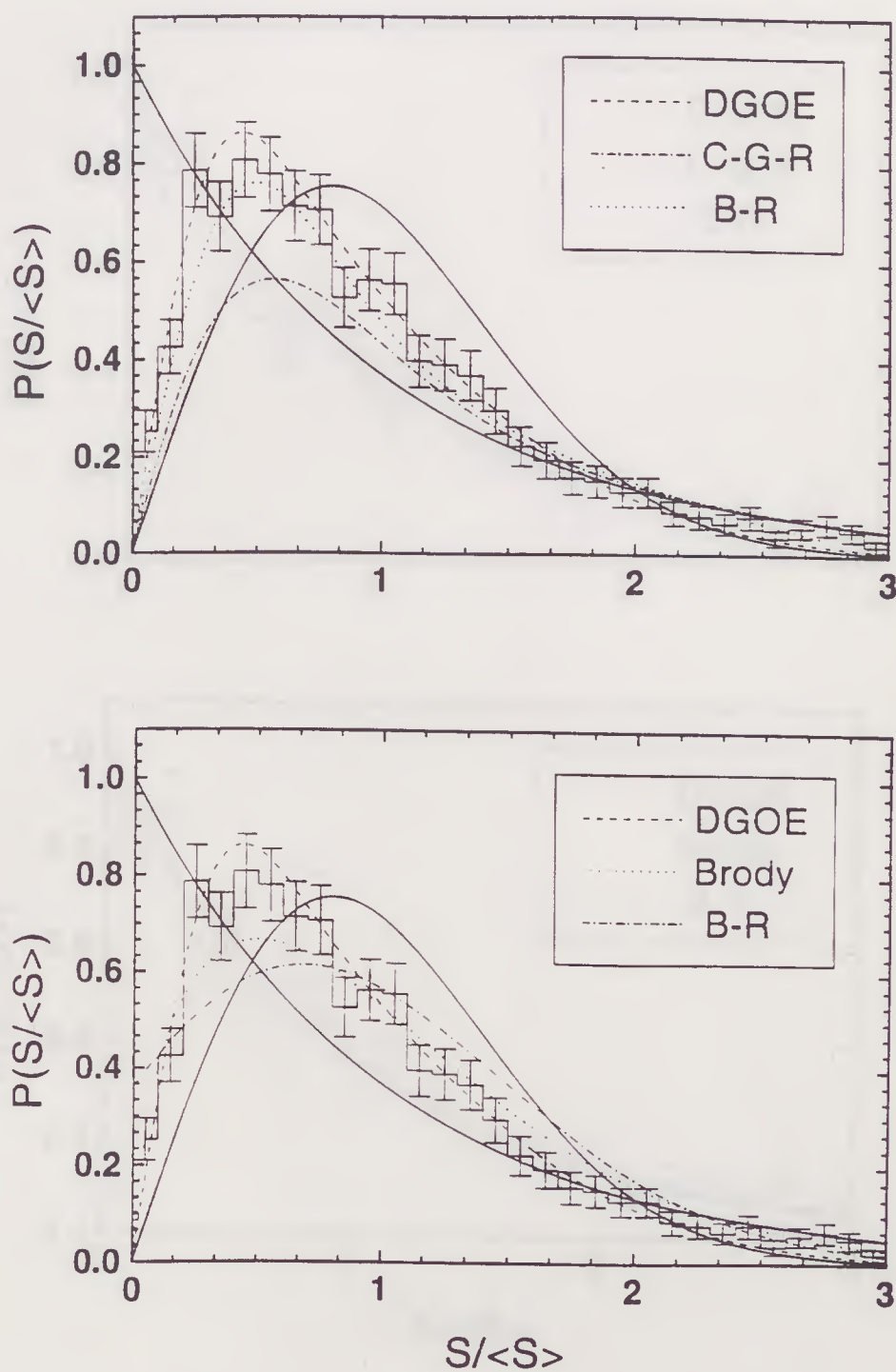


Figura C.14: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B1 e $\beta = 0.2$.

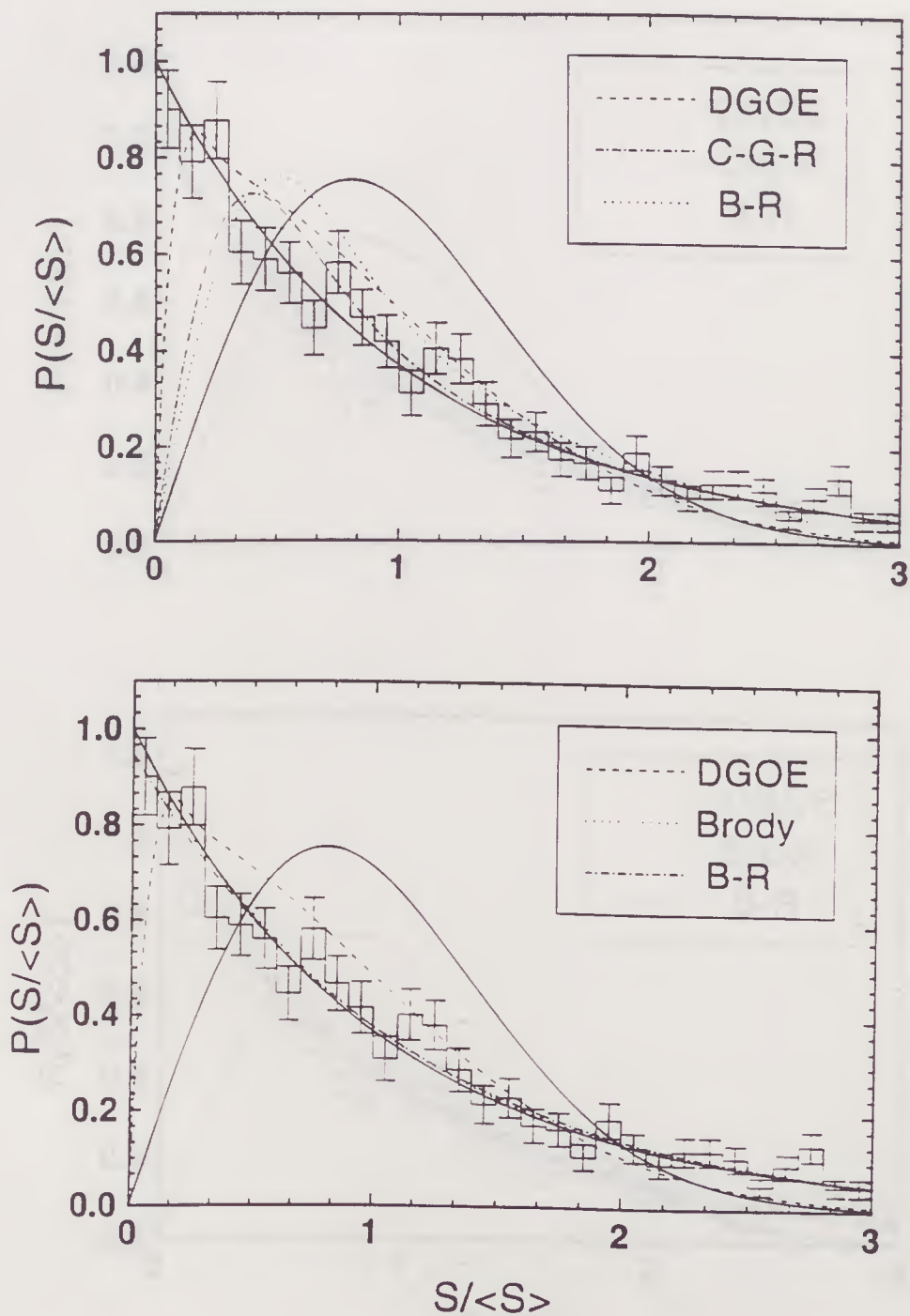


Figura C.15: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B1 e $\beta = 0.4$.

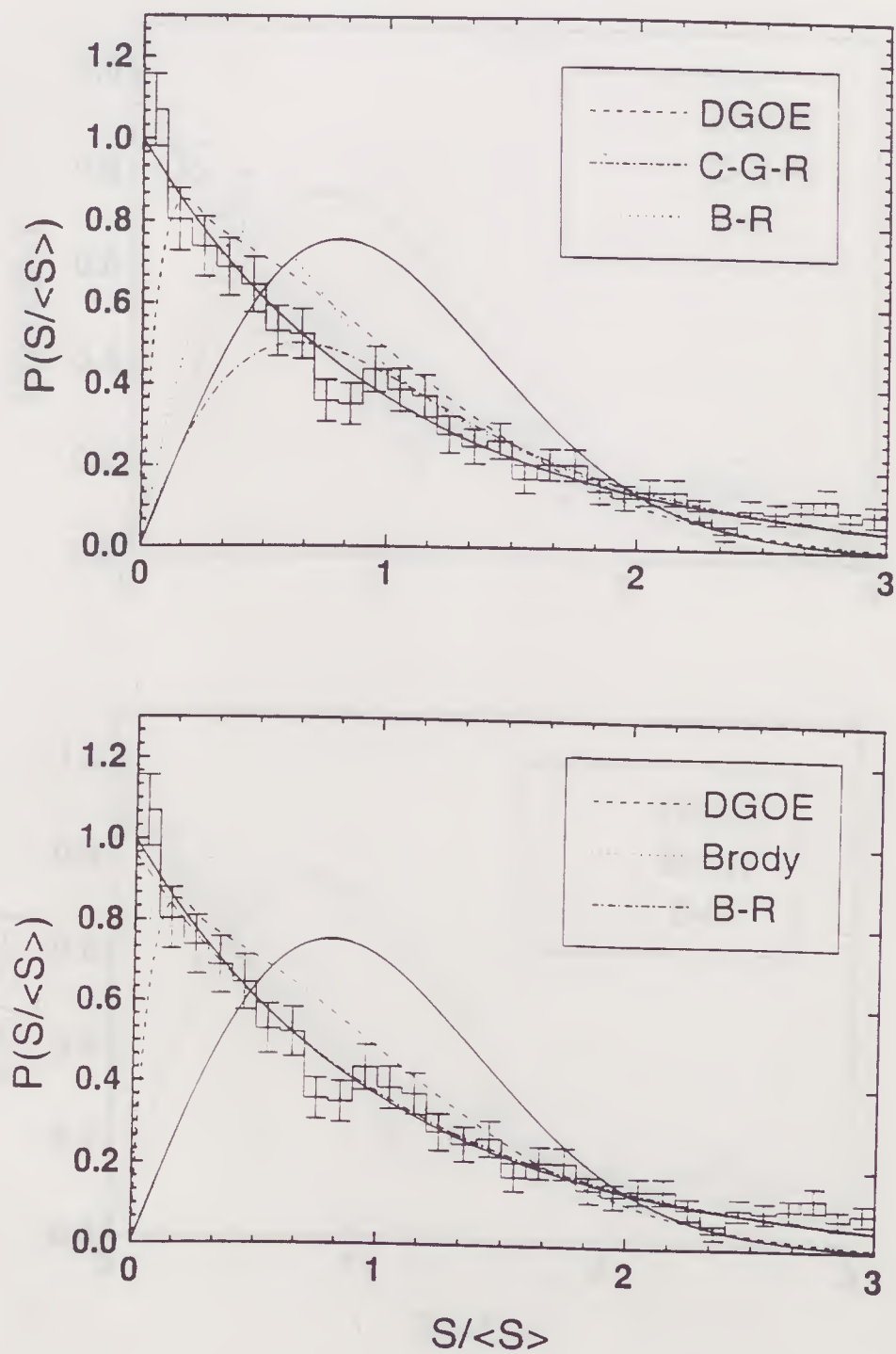


Figura C.16: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B1 e $\beta = 0.6$.

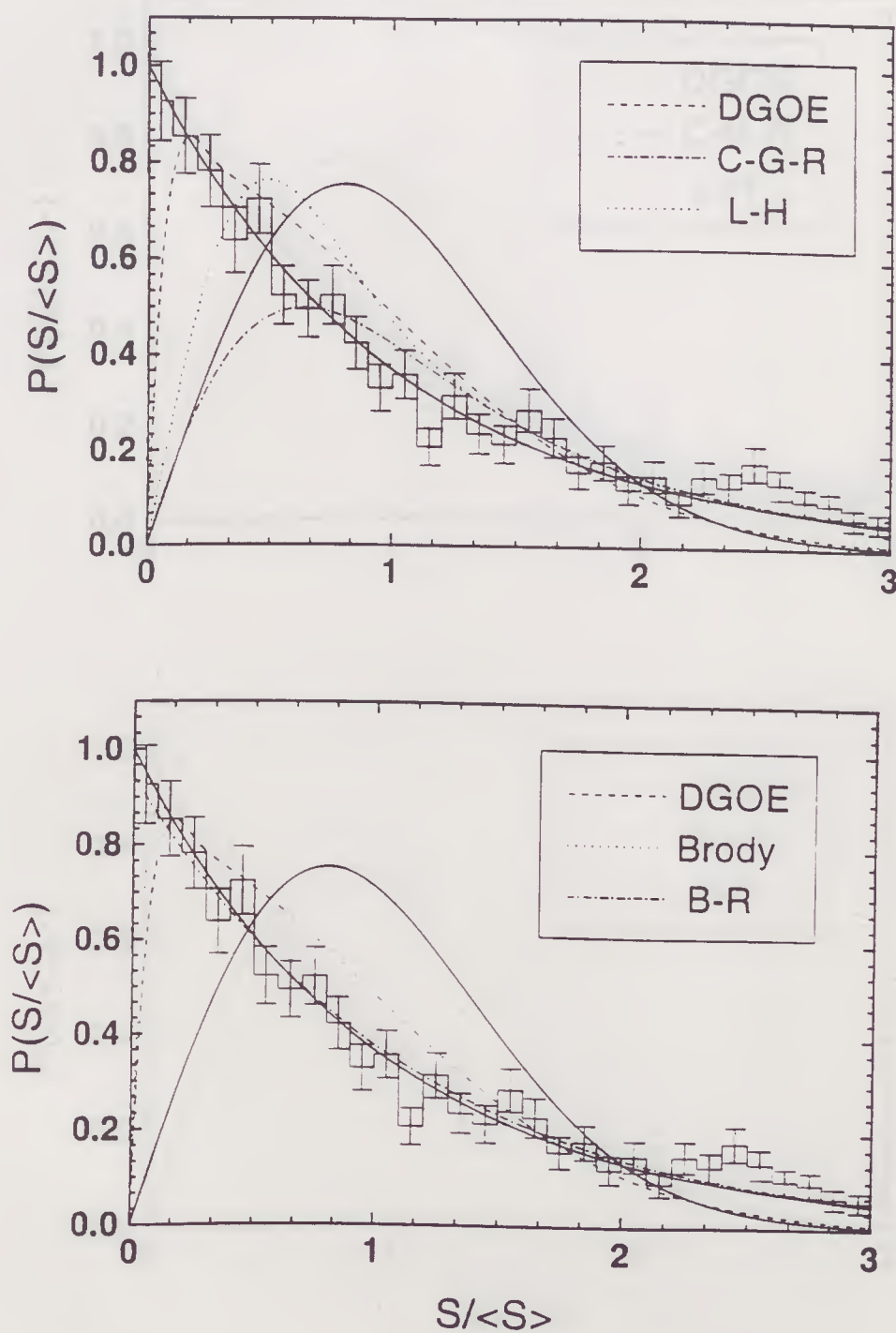


Figura C.17: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B1 e $\beta = 0.8$.

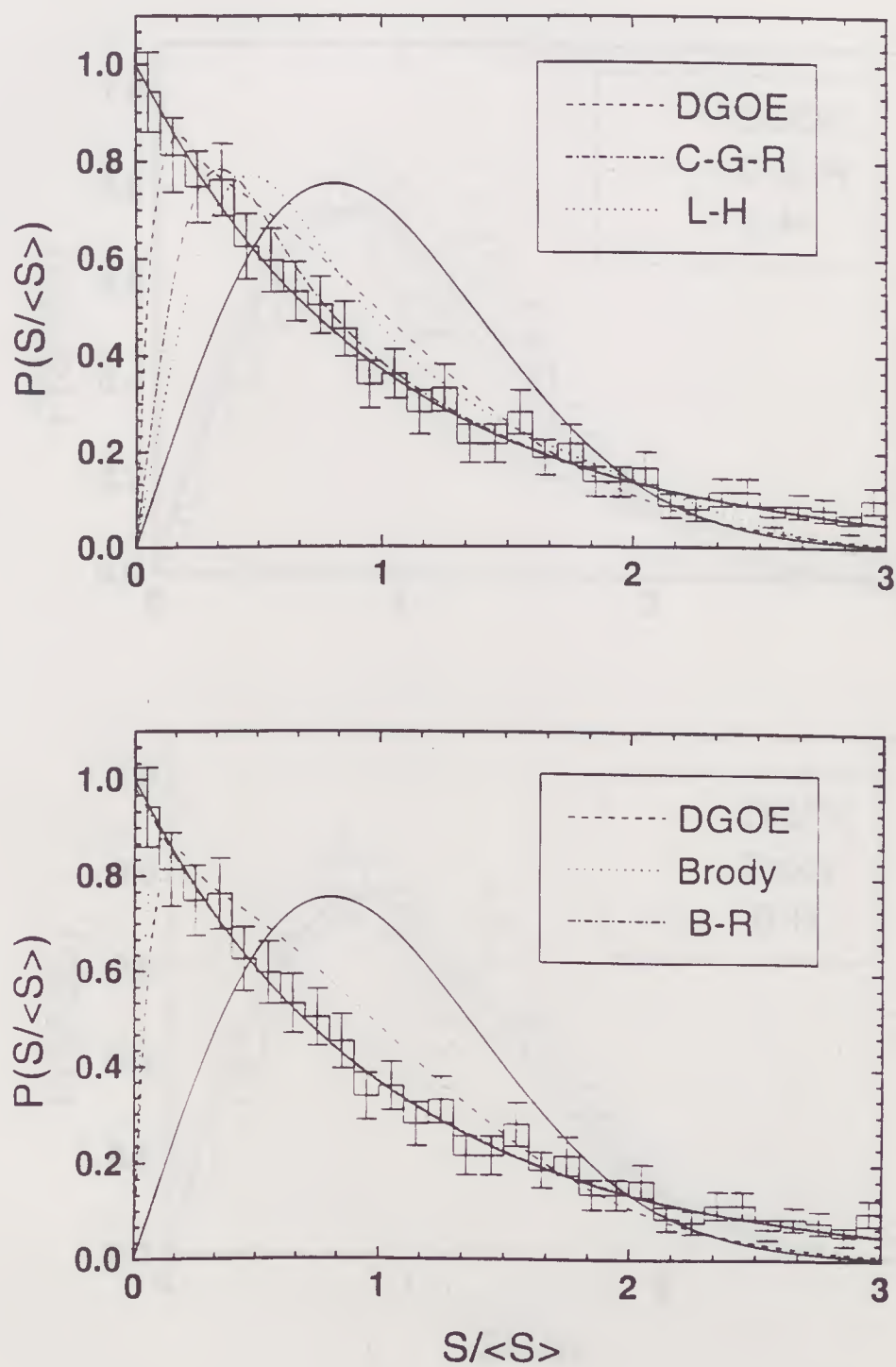


Figura C.18: Idem ao caso anterior para a classe de simetria B1 e $\beta = 1.0$.

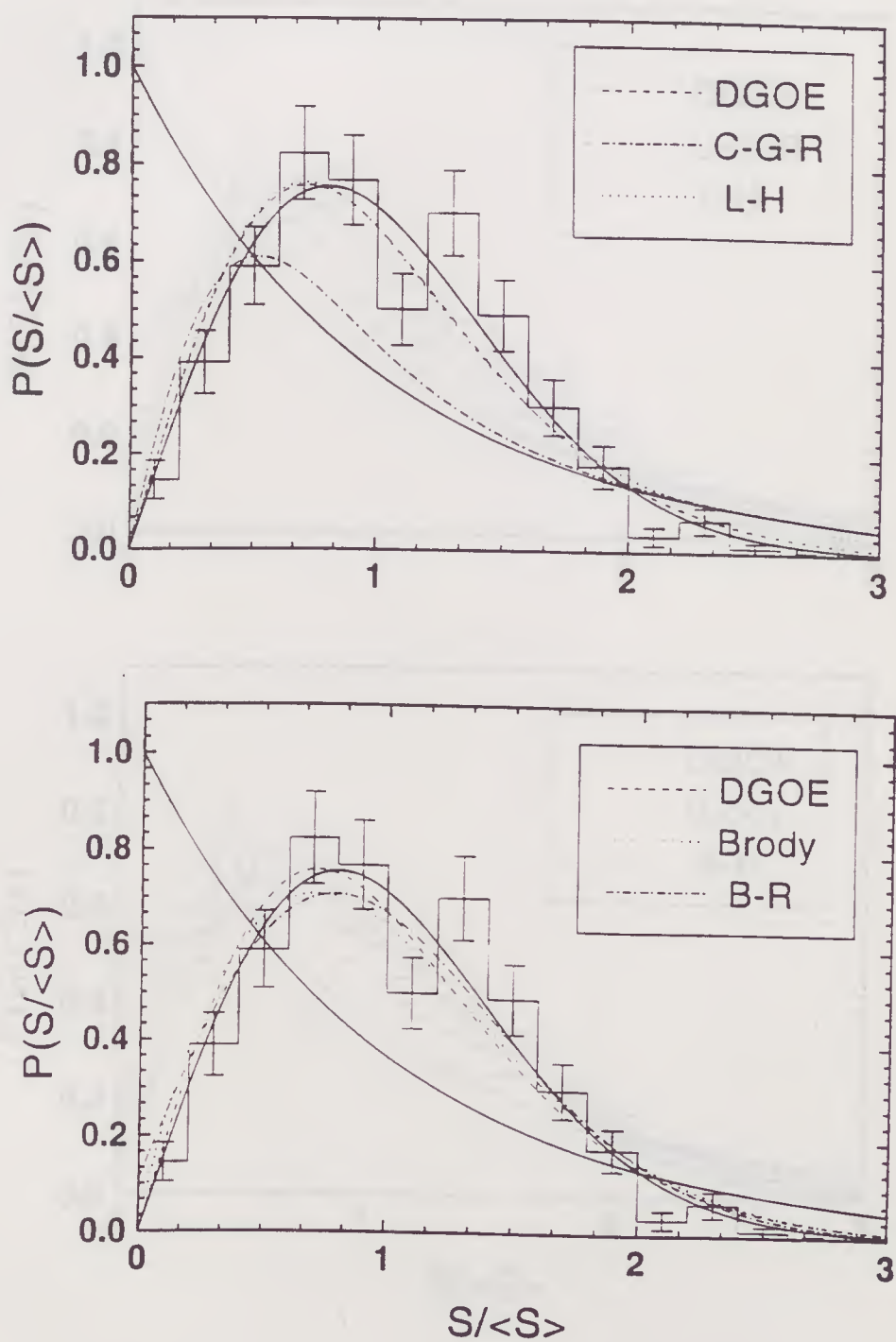


Figura C.19: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A_2 e $\beta = 0.01$.

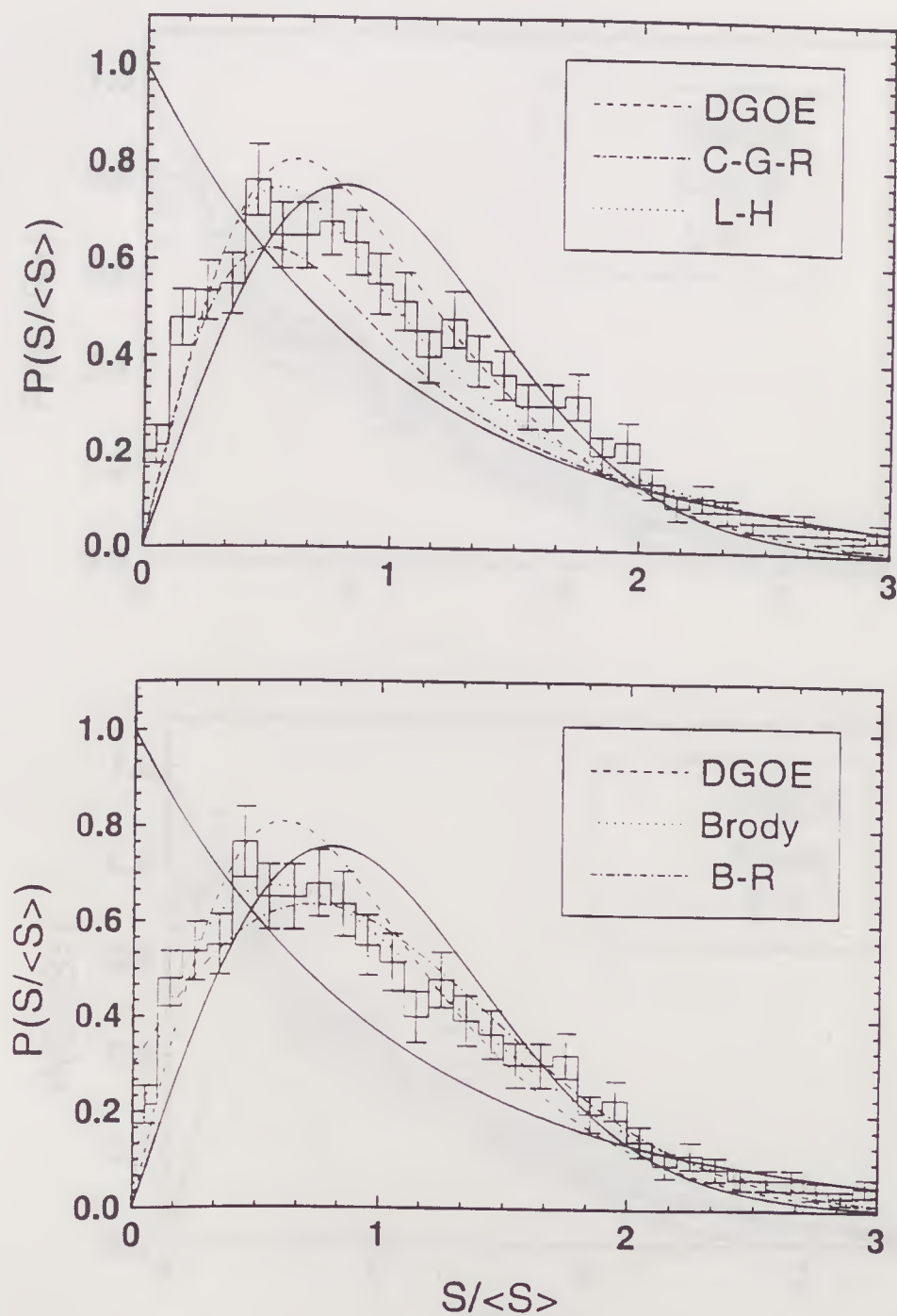


Figura C.20: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A_2 e $\beta = 0.2$.

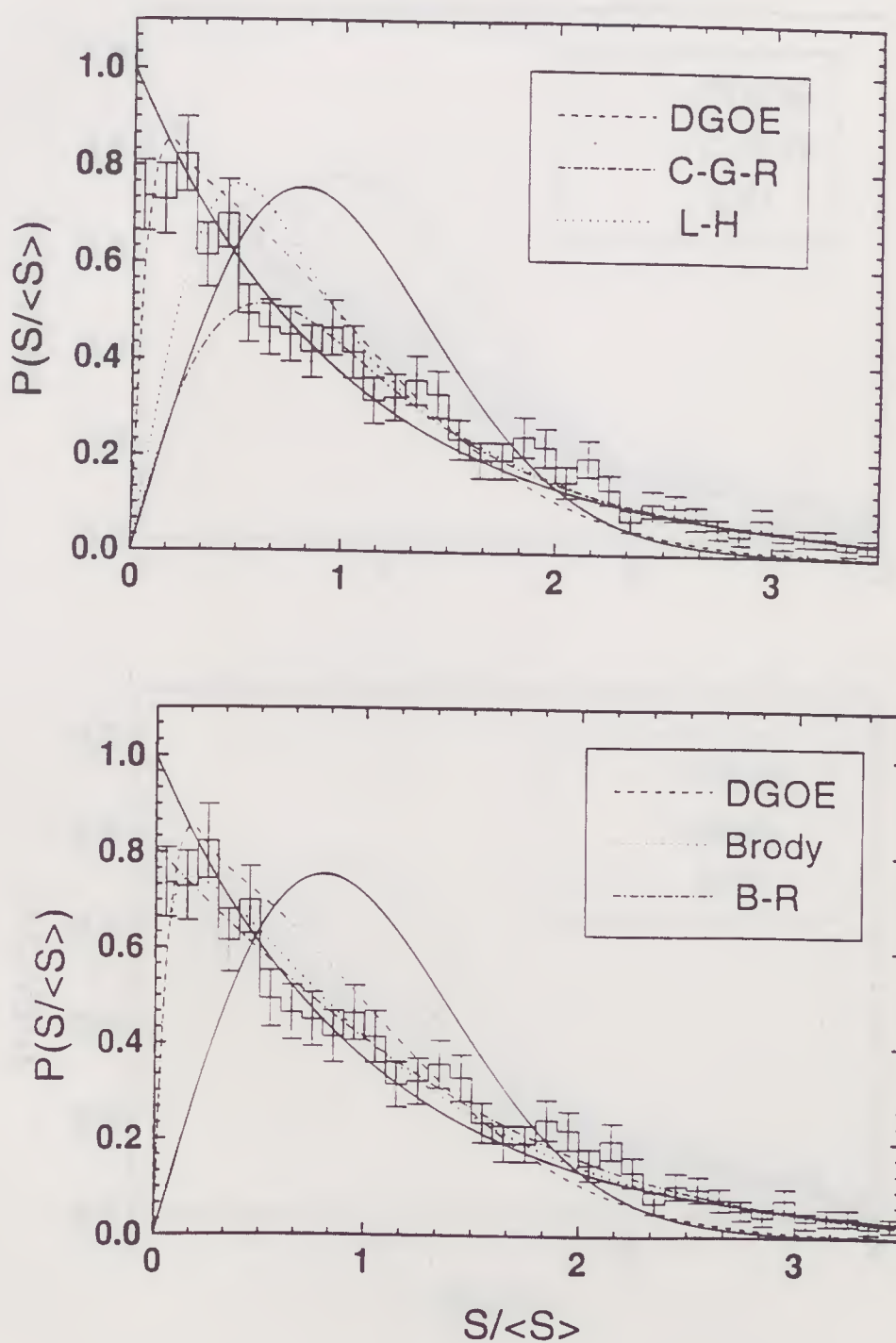


Figura C.21: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A_2 e $\beta = 0.4$.

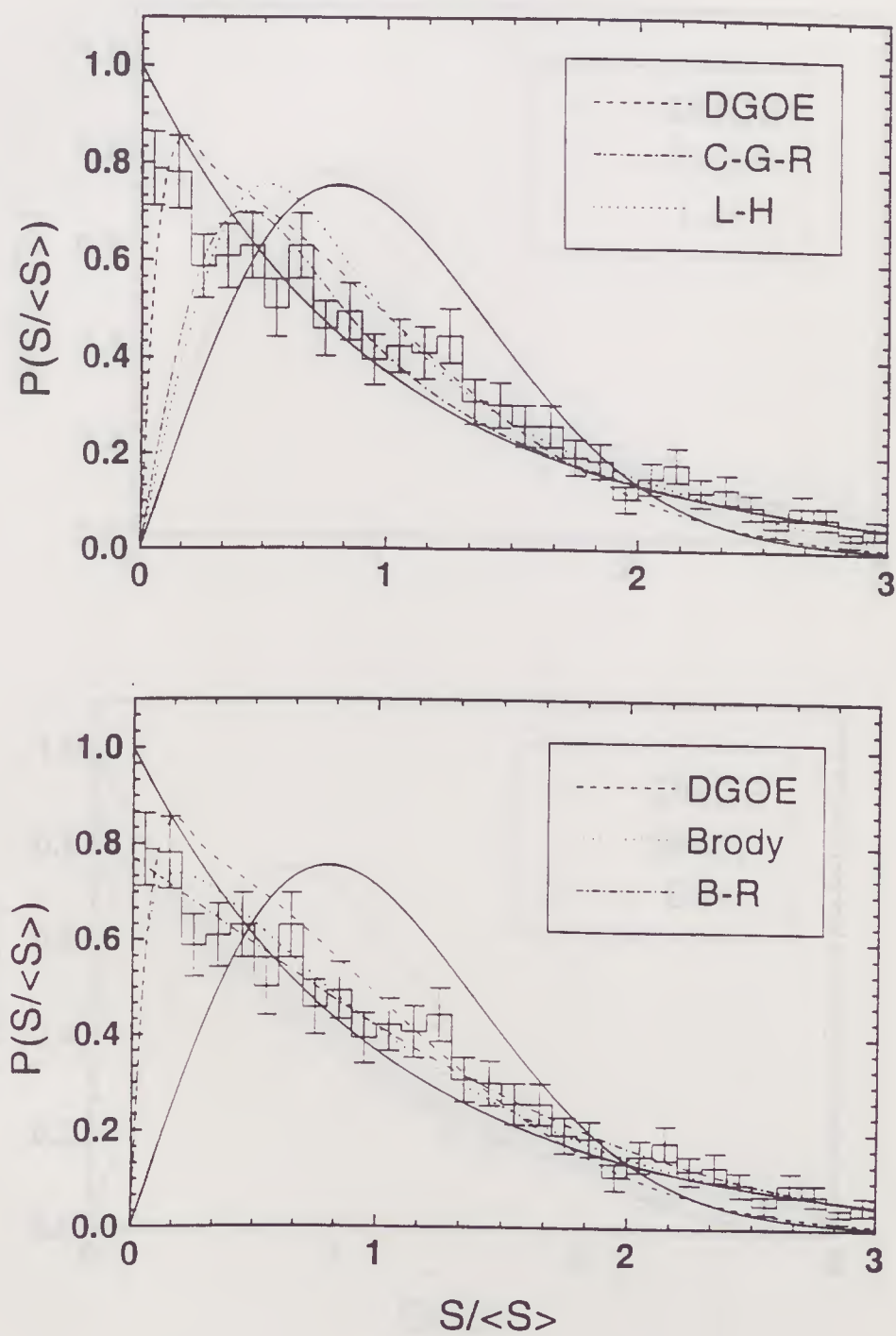


Figura C.22: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A2 e $\beta = 0.6$.

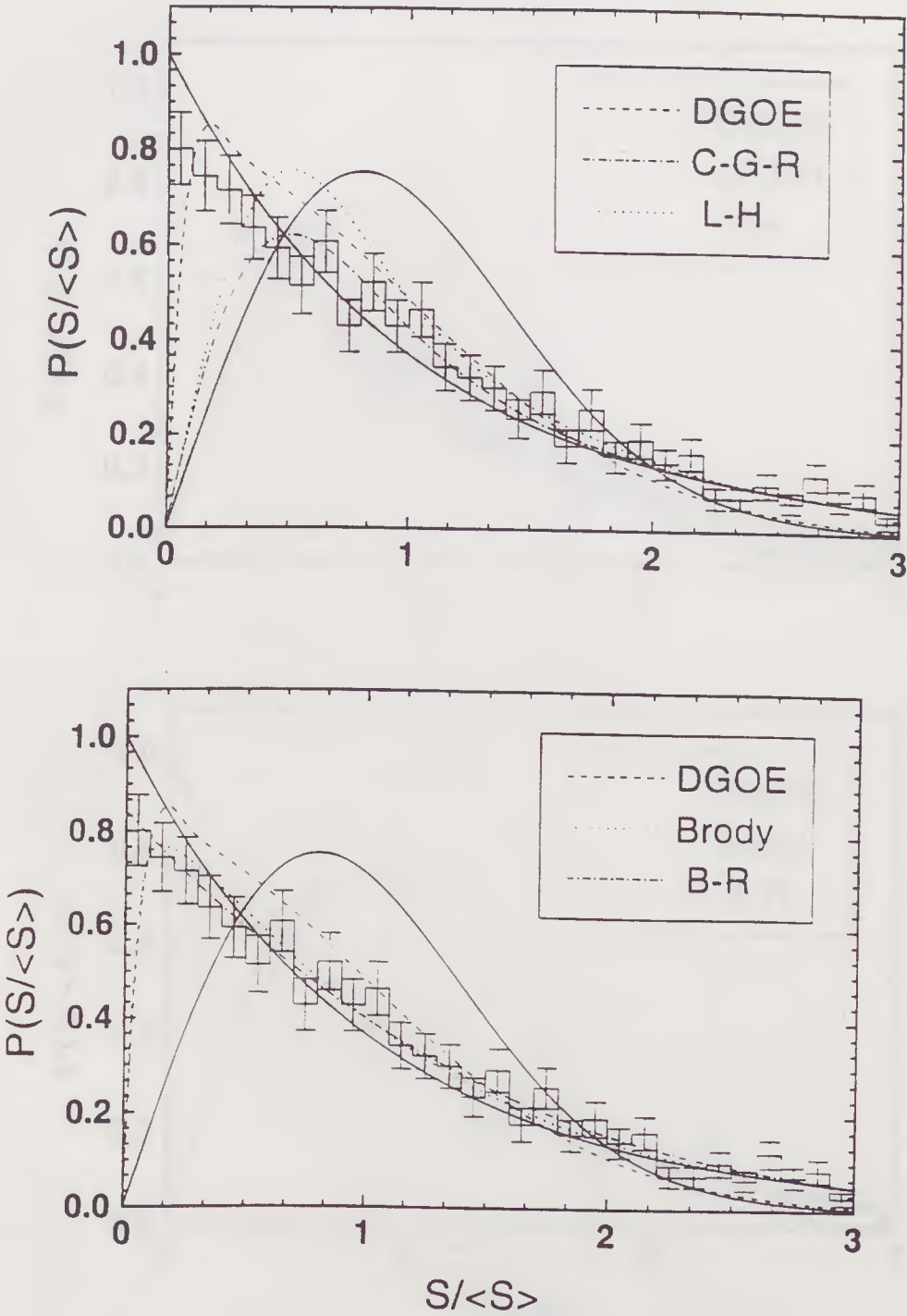


Figura C.23: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A2 e $\beta = 0.8$.

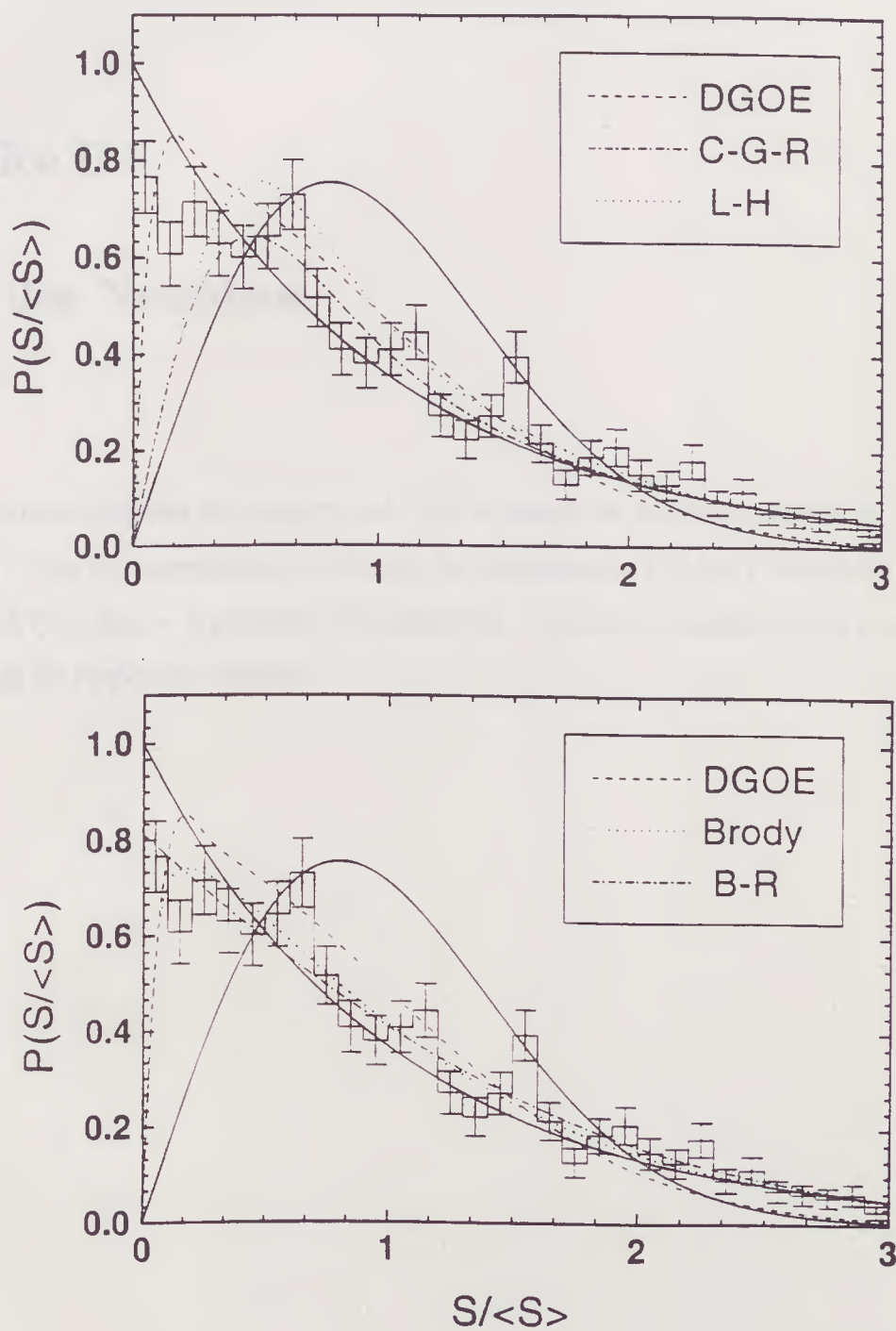


Figura C.24: Idem ao caso anterior para a classe de simetria A2 e $\beta = 1.0$.

Apêndice D

Dados dos Nuclídeos

Nas próximas páginas foi transcrita de [25] a tabela de nuclídeos usada na análise do capítulo IV. Nela são apresentados os dados da temperatura $T(MeV)$ (usada na expressão IV.2 de $N(E)$), o spin e a paridade dos nuclídeos, o número de autovalores e as energias inicial e final do respectivo espectro.

nuclídeo	$T(\text{MeV})$	J^π	N	$E_{ini}(\text{keV})$	$E_{fin}(\text{keV})$
^{24}Na	2.6(6)	2^+	8	563	4207
		3^+	5	1345	3628
^{24}Mg	2.3(5)	2^+	6	1369	9284
^{25}Mg	2.4(5)	$7/2^+$	5	1612	5978
^{26}Mg	2.2(3)	2^+	8	1809	7100
		4^+	5	4318	6623
^{28}Al	2.1(3)	2^+	9	30	4244
		3^+	6	0	3901
^{28}Si	2.25(29)	2^+	8	1779	9796
^{30}Si	2.0(5)	0^+	5	0	7443
		2^+	7	2235	7256
^{31}P	1.8(5)	$3/2^+$	6	1266	5559
		$5/2^+$	6	2234	5672
^{32}P	2.13(28)	1^+	7	0	4204
		2^+	5	78	3881
		3^+	5	1755	4317
^{33}S	1.90(22)	$3/2^+$	5	0	4424
^{34}S	1.88(20)	0^+	5	0	5598
		2^+	5	2127	6428
^{36}Cl	1.94(25)	2^-	5	0	3941
^{40}K	1.67(17)	2^-	9	800	3486
		3^-	5	30	3368
^{46}Sc	1.45(7)	3^-	5	228	1920
		4^+	5	0	1886
^{60}Co	1.19(5)	2^+	5	59	1877
		3^+	7	288	2275
		4^+	12	277	2310
^{61}Ni	1.29(7)	$3/2^-$	5	0	2410
		$5/2^-$	5	67	1998

Figura D.1: Nuclídeos utilizados na análise apresentada. N é o número de níveis considerados em cada caso.

nuclídeo	$T(MeV)$	J^π	N	$E_{ini}(keV)$	$E_{fin}(keV)$
^{75}Se	0.98(4)	$3/2^-$	6	287	1199
^{87}Sr	0.94(5)	$3/2^+$	5	2677	3278
^{104}Rh	0.820(21)	1^+	8	0	644
		2^-	7	51	645
		2^+	7	97	538
		3^-	6	269	649
^{106}Pd	0.753(18)	0^+	5	0	2278
		2^+	6	512	2309
		4^+	5	1229	2366
^{110}Ag	0.753(17)	1^-	7	237	665
		1^+	7	0	699
		2^-	12	1	654
		2^+	9	199	664
		3^+	6	119	640
^{112}Cd	0.729(21)	2^+	5	618	2156
^{114}Cd	0.718(17)	0^+	7	0	2637
		2^+	12	558	2812
^{116}Sn	0.72(4)	0^+	11	0	4028
		1^+	10	2586	4252
		2^+	28	1294	4278
		3^+	15	2996	4297
		4^+	13	2391	4076
		5^-	6	2366	3648
^{124}Sb	0.713(20)	3^-	5	0	1053
		3^+	7	41	804
		4^-	6	88	1060
		4^+	6	196	757
^{128}I	0.748(19)	2^+	5	28	426
		3^+	5	85	416

Figura D.2: Continuação.

nuclídeo	$T(MeV)$	J^π	N	$E_{ini}(keV)$	$E_{fin}(keV)$
^{130}I	0.66(3)	3^+	6	44	349
		4^+	5	43	374
^{134}Cs	0.782(18)	3^+	6	60	579
		4^+	6	0	584
^{144}Nd	0.654(18)	2^+	7	696	2693
		4^+	5	1314	2601
^{151}Sm	0.574(18)	$3/2^-$	8	5	951
		$3/2^+$	5	307	954
^{155}Sm	0.624(23)	$5/2^-$	6	53	984
^{152}Eu	0.596(13)	1^+	6	78	339
		2^-	9	111	341
		2^+	5	121	348
		3^-	13	0	348
		3^+	9	114	321
		4^-	8	90	338
		4^+	10	90	303
^{153}Eu	0.614(16)	$5/2^+$	5	0	707
^{154}Eu	0.603(10)	1^-	6	83	436
		1^+	5	72	425
		2^-	6	123	451
		2^+	8	68	451
		3^-	8	0	479
		3^+	7	100	401
		4^-	9	81	472
		4^+	10	101	429
		5^-	8	175	428
		5^+	7	137	416

Figura D.3: Continuação.

nuclídeo	$T(MeV)$	J^π	N	$E_{ini}(keV)$	$E_{fin}(keV)$
^{153}Gd	0.580(15)	$3/2^-$	6	0	684
		$5/2^-$	7	42	607
		$5/2^+$	5	183	695
		$7/2^-$	7	93	636
^{155}Gd	0.564(14)	$3/2^-$	6	0	1013
		$3/2^+$	6	105	1087
		$5/2^-$	7	60	1062
		$5/2^+$	7	87	1028
^{156}Gd	0.602(14)	0^+	5	0	1851
		2^+	10	89	2217
		3^+	5	1248	2017
		4^+	6	288	1893
^{158}Gd	0.609(11)	0^+	6	0	1958
		1^+	5	1848	2269
		2^+	12	80	2260
		3^+	5	1265	2250
		4^+	8	261	2030
^{161}Dy	0.611(15)	$5/2^+$	5	0	858
^{163}Dy	0.611(13)	$3/2^+$	5	766	1148
		$5/2^-$	6	0	1136
		$5/2^+$	5	251	1130
		$7/2^-$	6	73	1073
^{165}Dy	0.637(40)	$5/2^-$	5	181	658
		$7/2^-$	5	262	738

Figura D.4: Continuação.

nuclídeo	$T(MeV)$	J^π	N	$E_{ini}(keV)$	$E_{fin}(keV)$
^{168}Er	0.609(10)	2^+	8	80	2137
		3^-	7	1431	2022
		3^+	5	896	2187
		4^-	9	1094	2198
		4^+	9	264	2080
		5^-	9	1193	2200
		6^-	6	1311	2091
		6^+	5	549	1961
^{169}Er	0.598(17)	$5/2^-$	5	75	853
		$7/2^-$	5	177	850
^{172}Yb	0.596(11)	2^+	5	79	1609
		4^+	6	260	1749
^{176}Lu	0.540(9)	3^-	6	236	883
		4^-	6	464	861
		4^+	5	372	871
		5^-	6	437	870
		5^+	5	488	851
^{178}Hf	0.573(15)	2^+	9	93	1891
		3^-	5	1323	1803
		4^+	8	307	1870
^{179}Hf	0.556(13)	$3/2^-$	5	421	1269
		$7/2^-$	7	214	1074
		$9/2^-$	7	338	1200
^{196}Pt	0.611(18)	0^+	5	0	1919
		2^+	7	356	1888
^{198}Au	0.700(18)	1^-	8	55	571
		2^-	7	0	632
		3^-	8	236	672
^{200}Hg	0.779(25)	1^+	10	1570	2389
		2^+	17	368	2412

Figura D.5: Continuação.

nuclídeo	$T(MeV)$	J^π	N	$E_{ini}(keV)$	$E_{fin}(keV)$
^{231}Th	0.426(10)	$3/2^-$	7	591	1160
		$3/2^+$	9	221	1081
		$5/2^-$	7	186	982
		$5/2^+$	7	0	1066
^{233}Th	0.436(10)	$3/2^+$	5	17	768
		$5/2^+$	7	6	770
^{234}U	0.459(8)	2^+	6	44	1174
		4^+	5	143	1215
		6^+	5	296	1354
^{235}U	0.455(13)	$3/2^-$	5	637	990
		$3/2^+$	5	13	968
		$5/2^+$	7	52	905
^{237}U	0.430(17)	$5/2^+$	5	56	948
^{239}U	0.419(11)	$1/2^-$	5	739	1242
		$3/2^-$	6	746	1306
		$3/2^+$	7	146	1167
		$5/2^+$	8	0	1201
^{238}Np	0.455(14)	5^+	5	166	395
^{240}Pu	0.456(9)	2^+	5	43	1223
		4^+	5	142	1233
^{242}Am	0.443(8)	5^-	5	49	429
^{244}Am	0.445(7)	1^-	5	173	878
		1^+	5	85	840
		2^-	10	194	823
		2^+	8	97	872
		3^-	8	225	806
		3^+	9	120	856
		4^-	8	269	792
		4^+	7	145	694

Figura D.6: Continuação.

Apêndice E

Gráficos de NND para o Espectro Nuclear

As figuras a seguir apresentam os histogramas de NND e as curvas ajustadas pelos cinco modelos estudados para cada um dos grupos de núclídeos considerados: a divisão foi feita segundo o número de massa, deformação, spin e paridade.

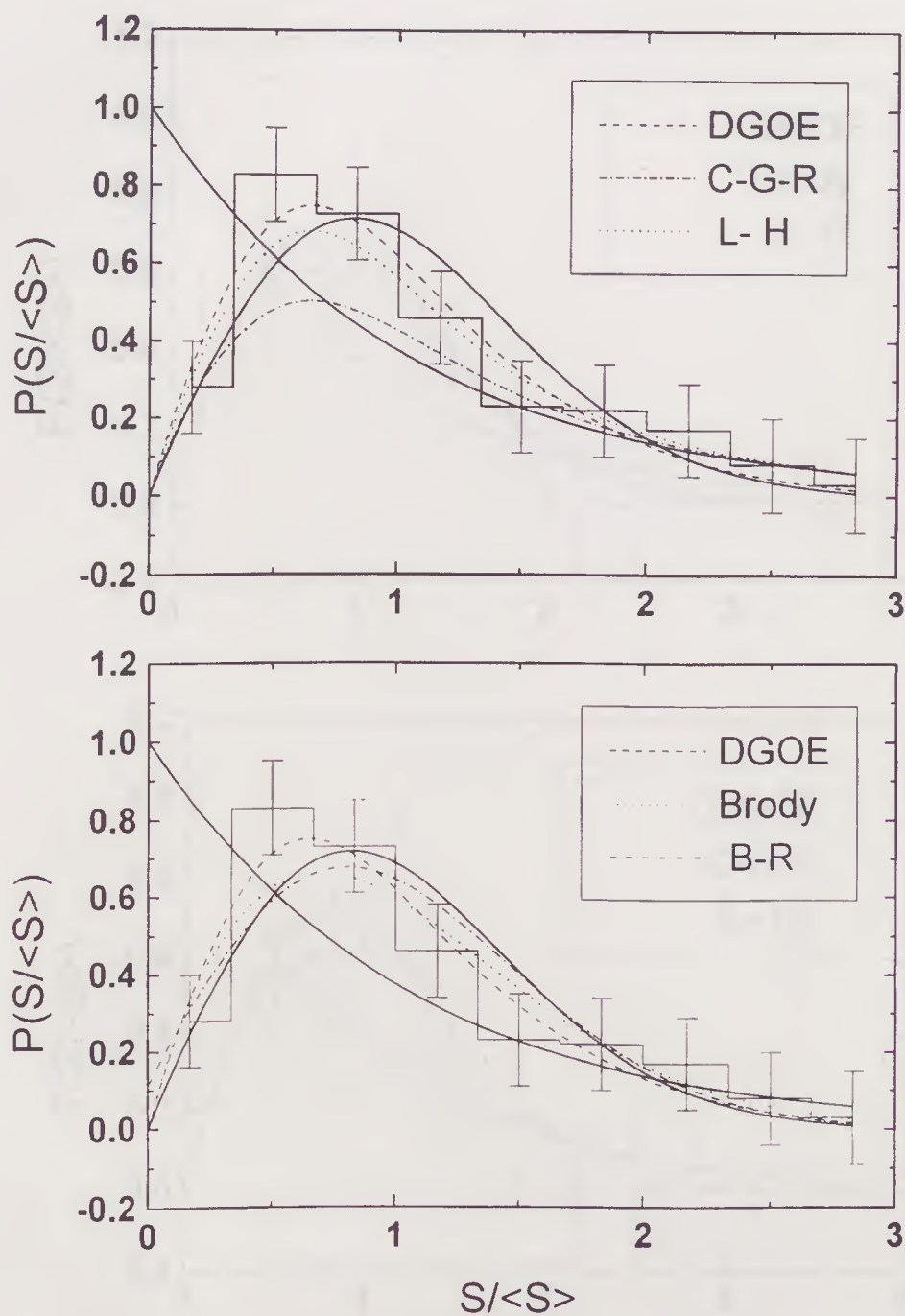


Figura E.1: Histograma e distribuições de espaçamentos de vizinho mais próximo ajustadas segundo os modelos estudados (DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani, Lenz-Haake, Brody, Berry-Robnik) para o caso dos núclídeos de número de massa $0 < A \leq 50$: as linhas contínuas indicam as curvas GOE e Poisson.

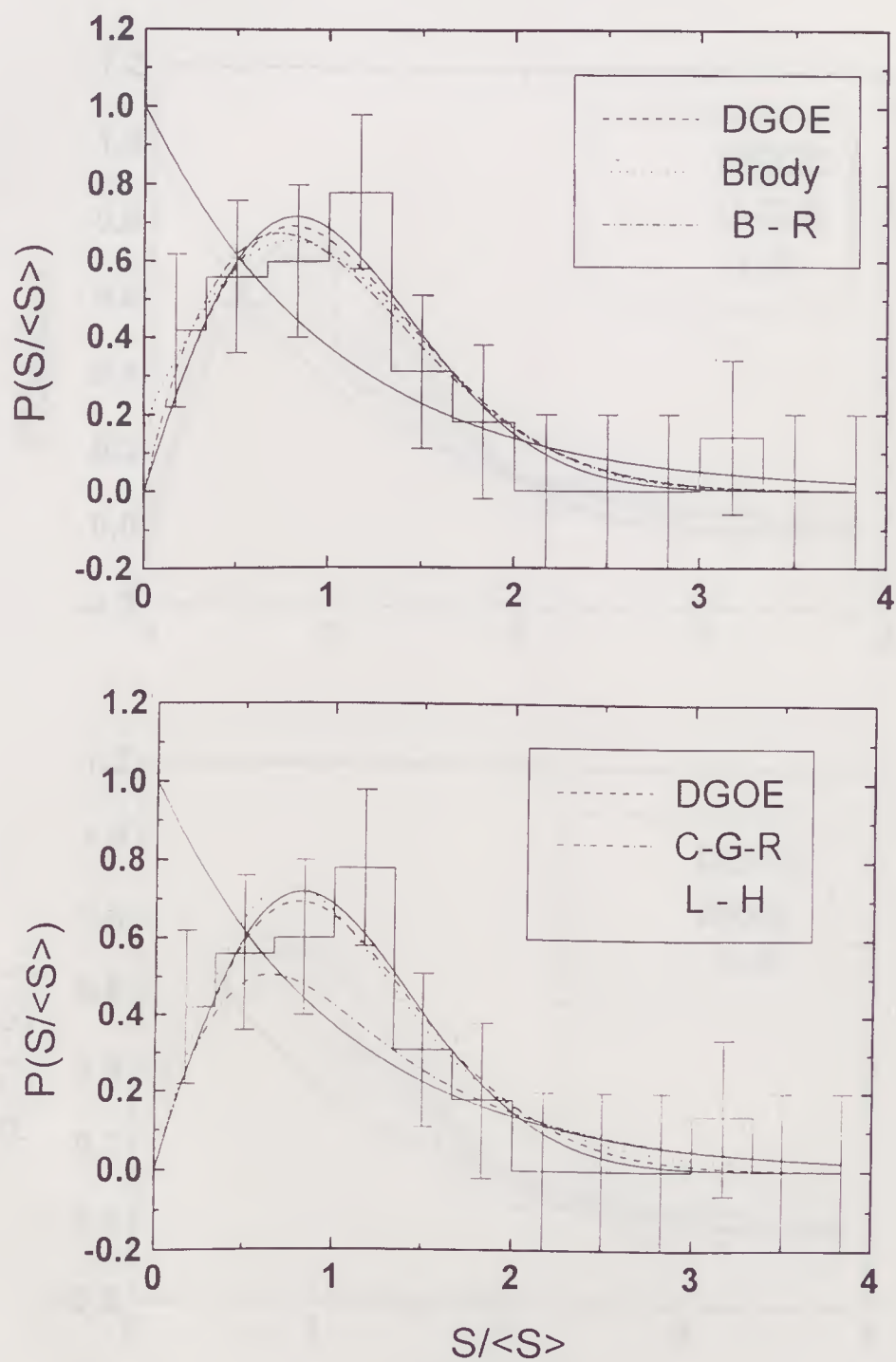


Figura E.2: Idem ao caso anterior para os núclídeos de número de massa $50 < A \leq 100$.

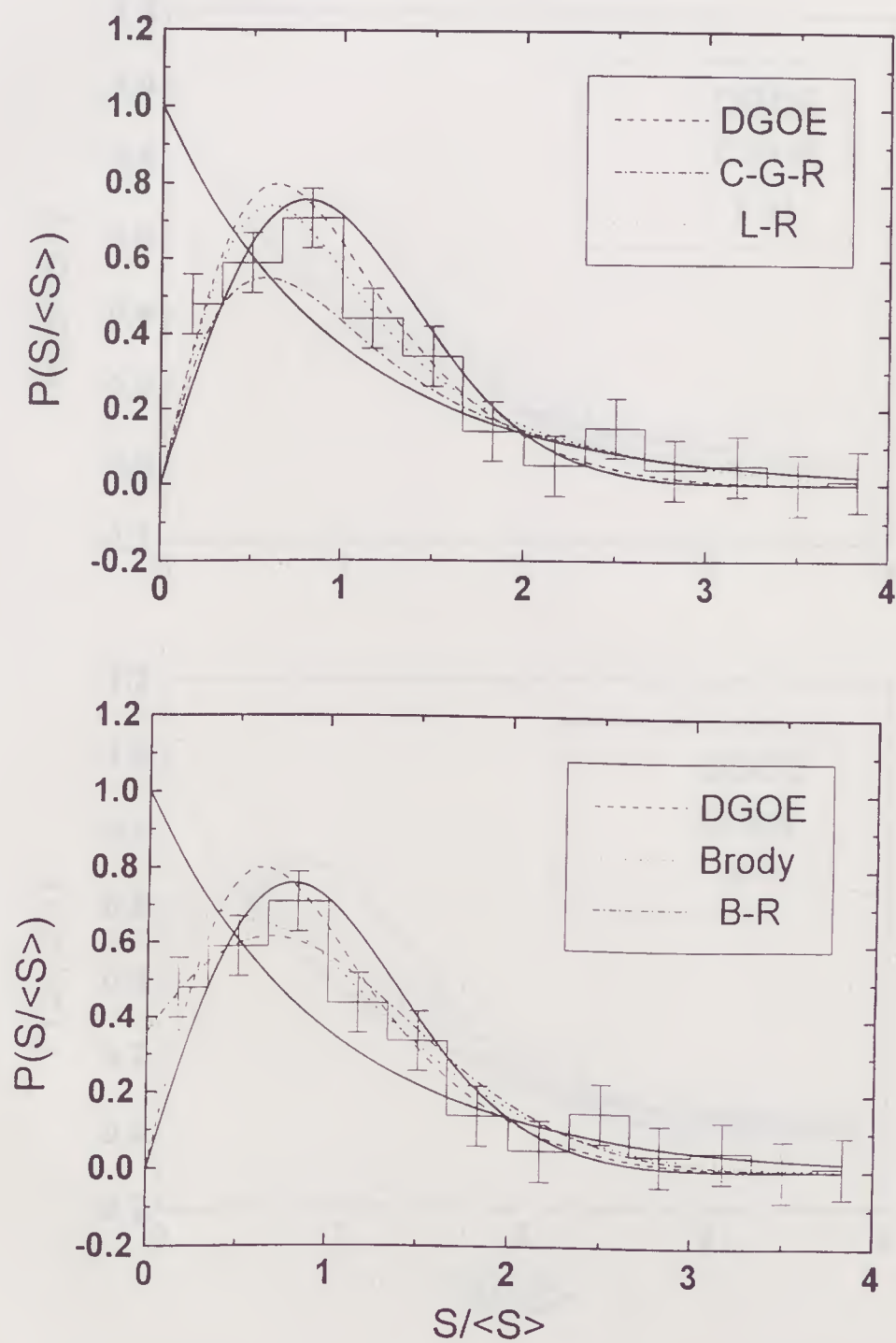


Figura E.3: Idem ao caso anterior para os núclídeos de número de massa $100 < A \leq 150$.

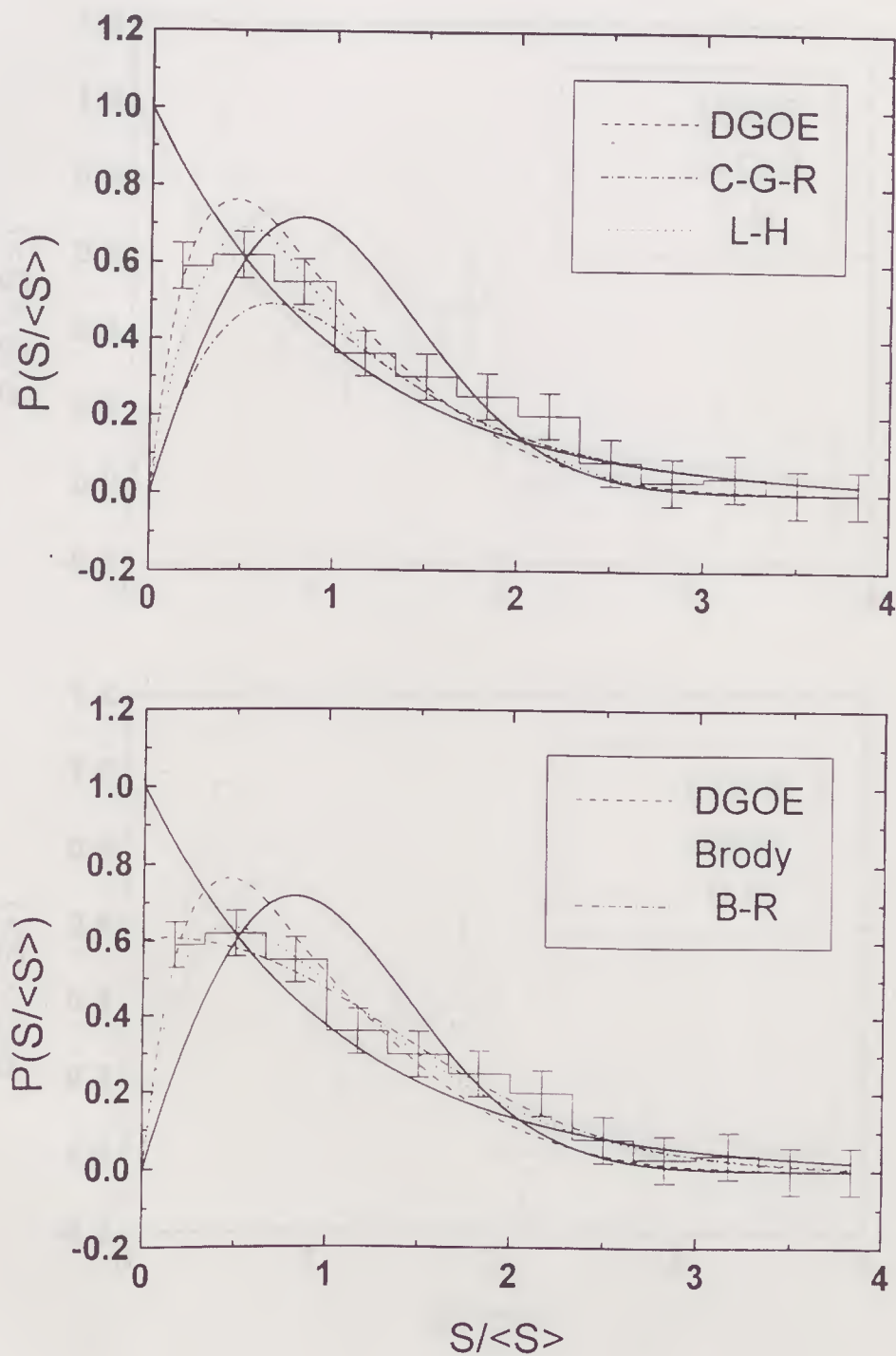


Figura E.4: Idem ao caso anterior para os núclídeos de número de massa $150 < A \leq 180$.

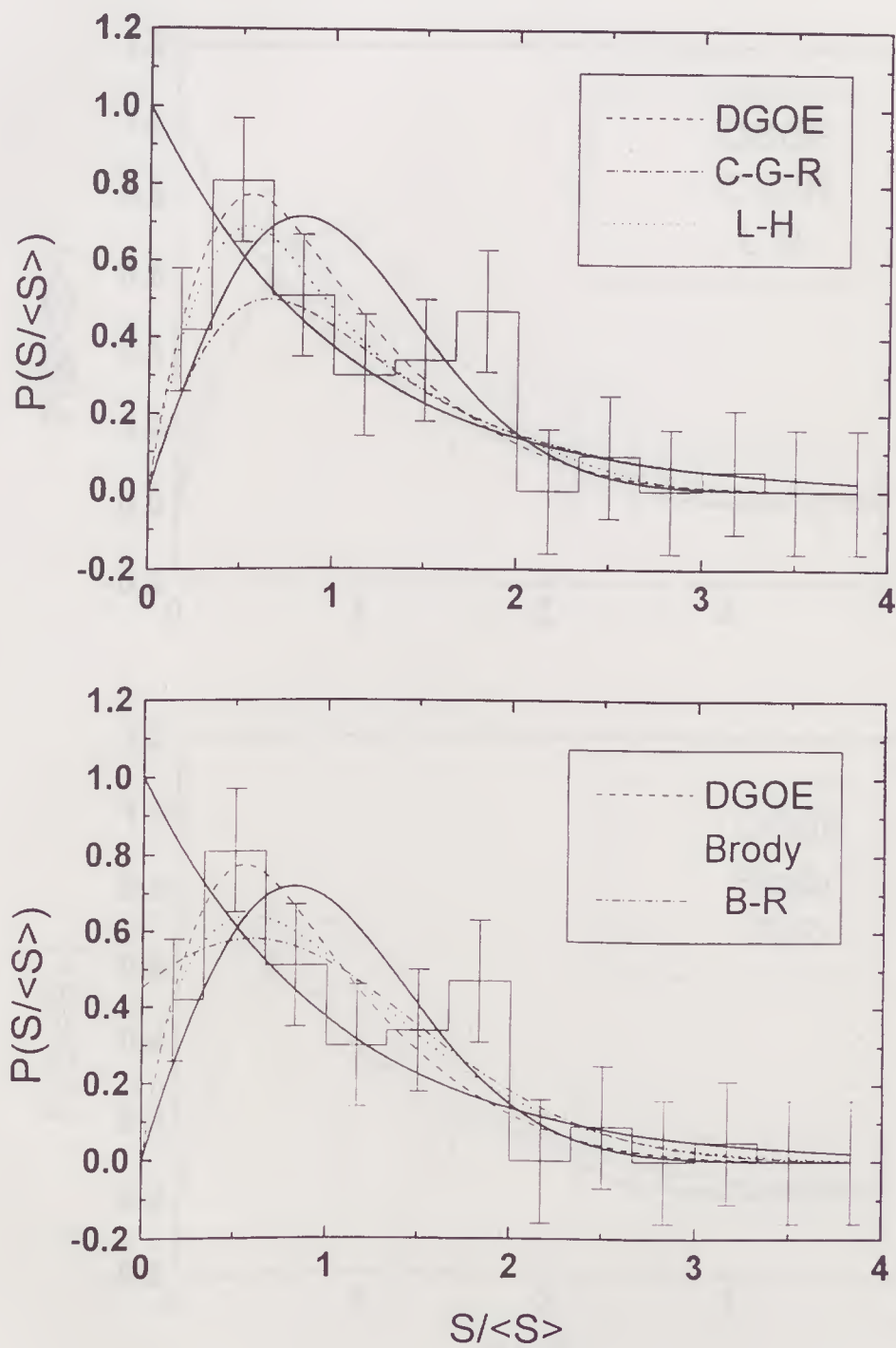


Figura E.5: Idem ao caso anterior para os núclídeos de número de massa $180 < A \leq 210$.

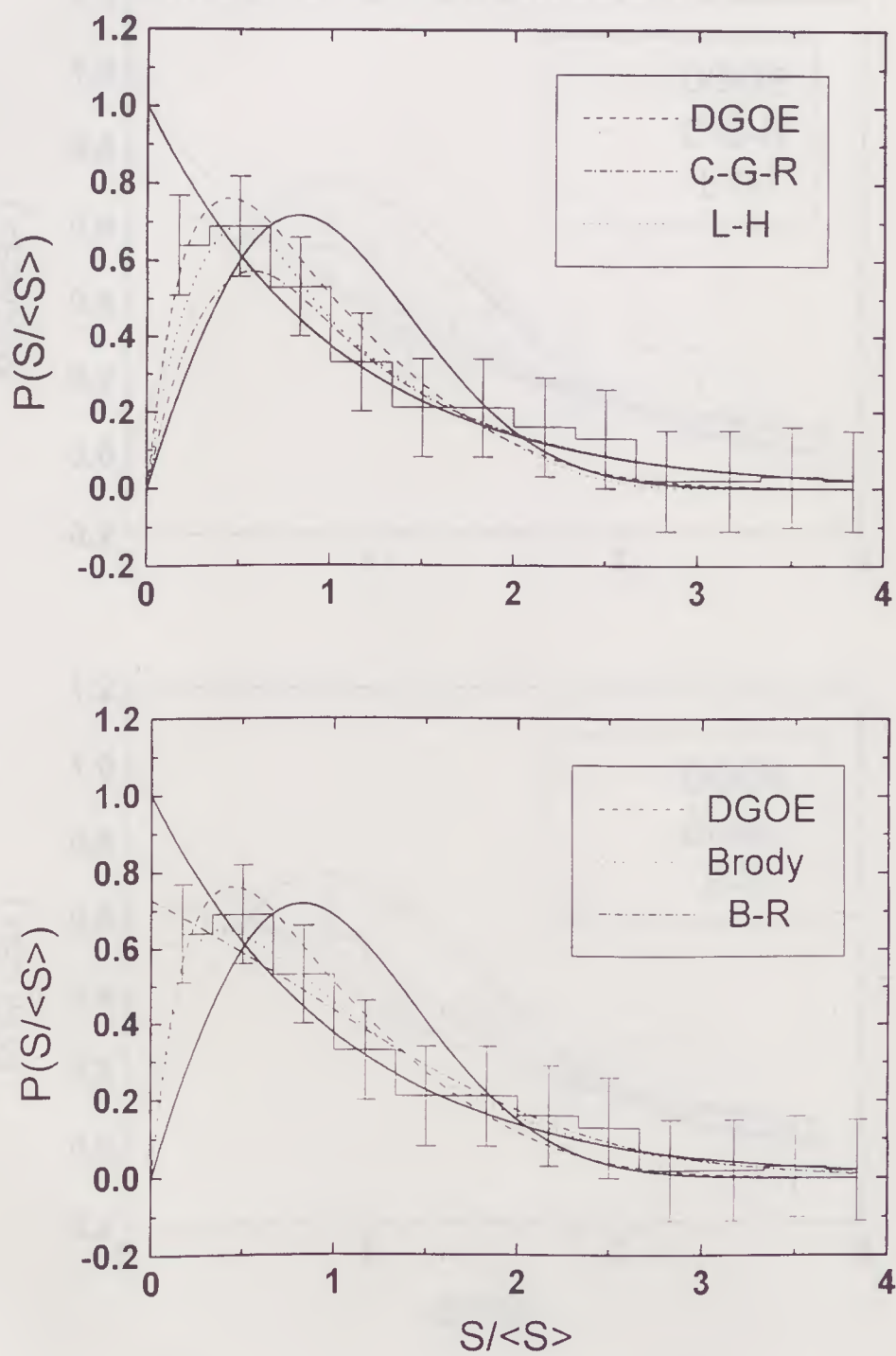


Figura E.6: Idem ao caso anterior para os núclídeos de número de massa $230 < A$.

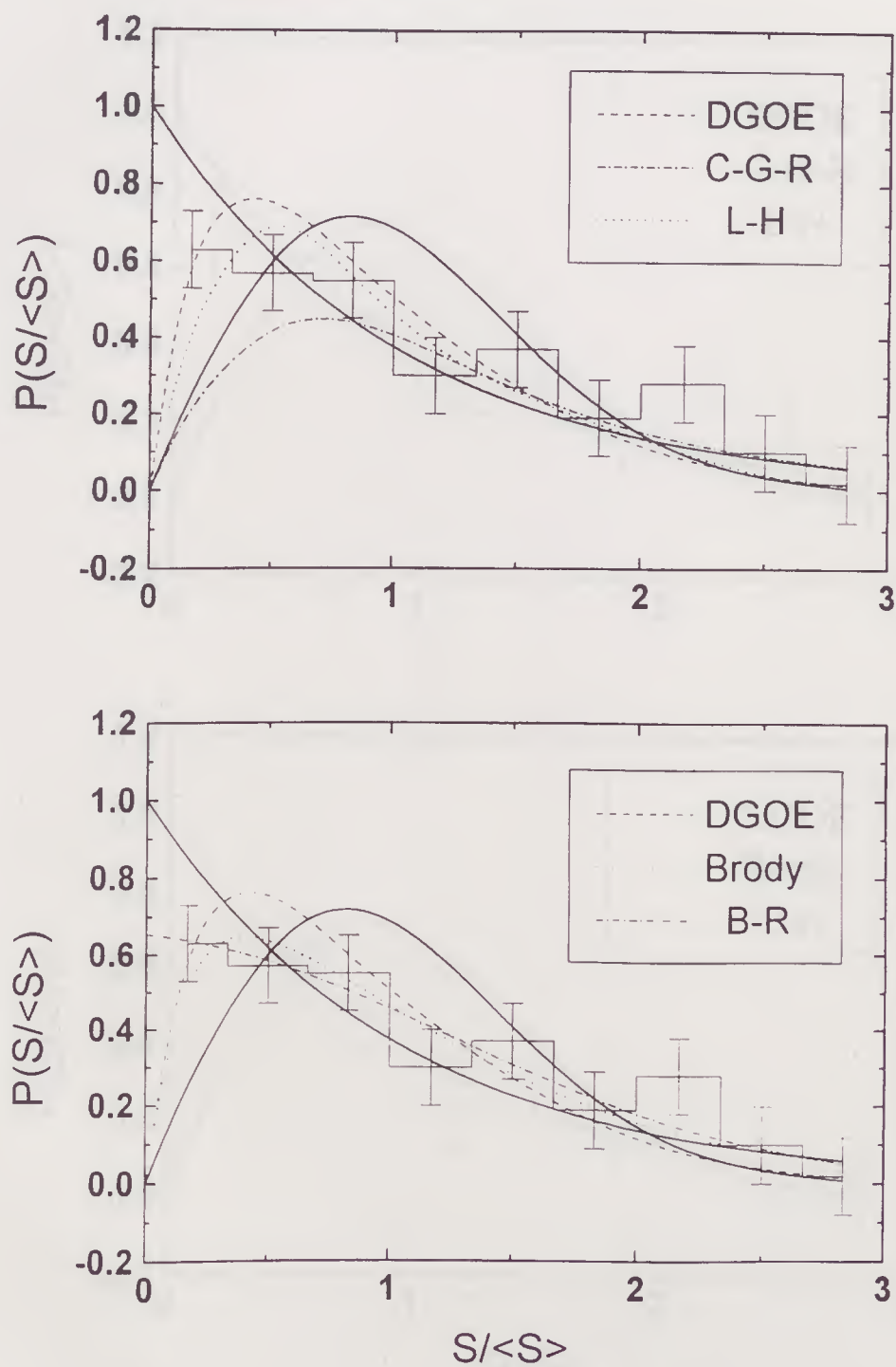


Figura E.7: Idem ao caso anterior para todos os núclídeos par-par deformados.

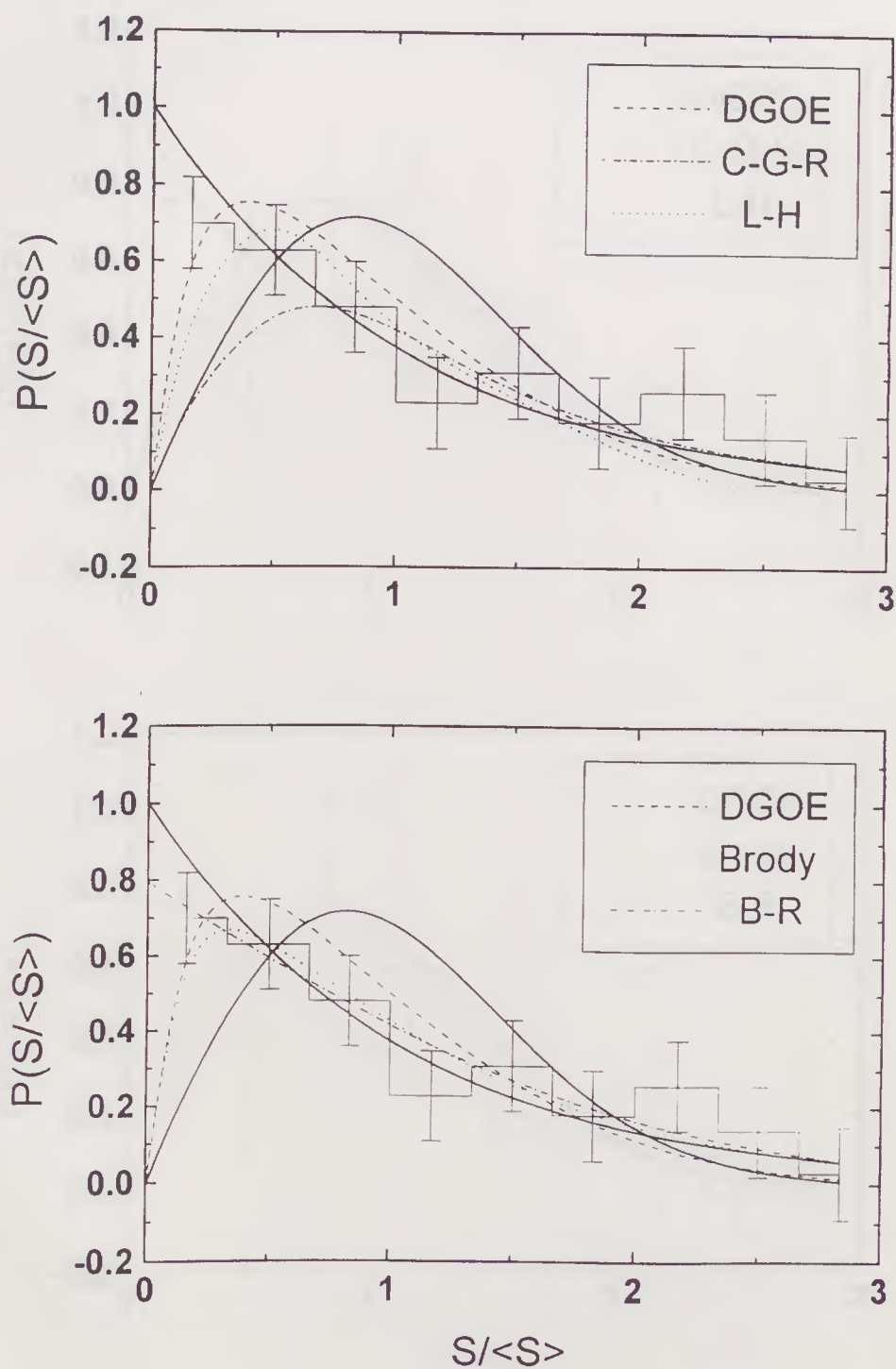


Figura E.8: Idem ao caso anterior para os núclídeos par-par deformados de spin $2^+ 4^+$.

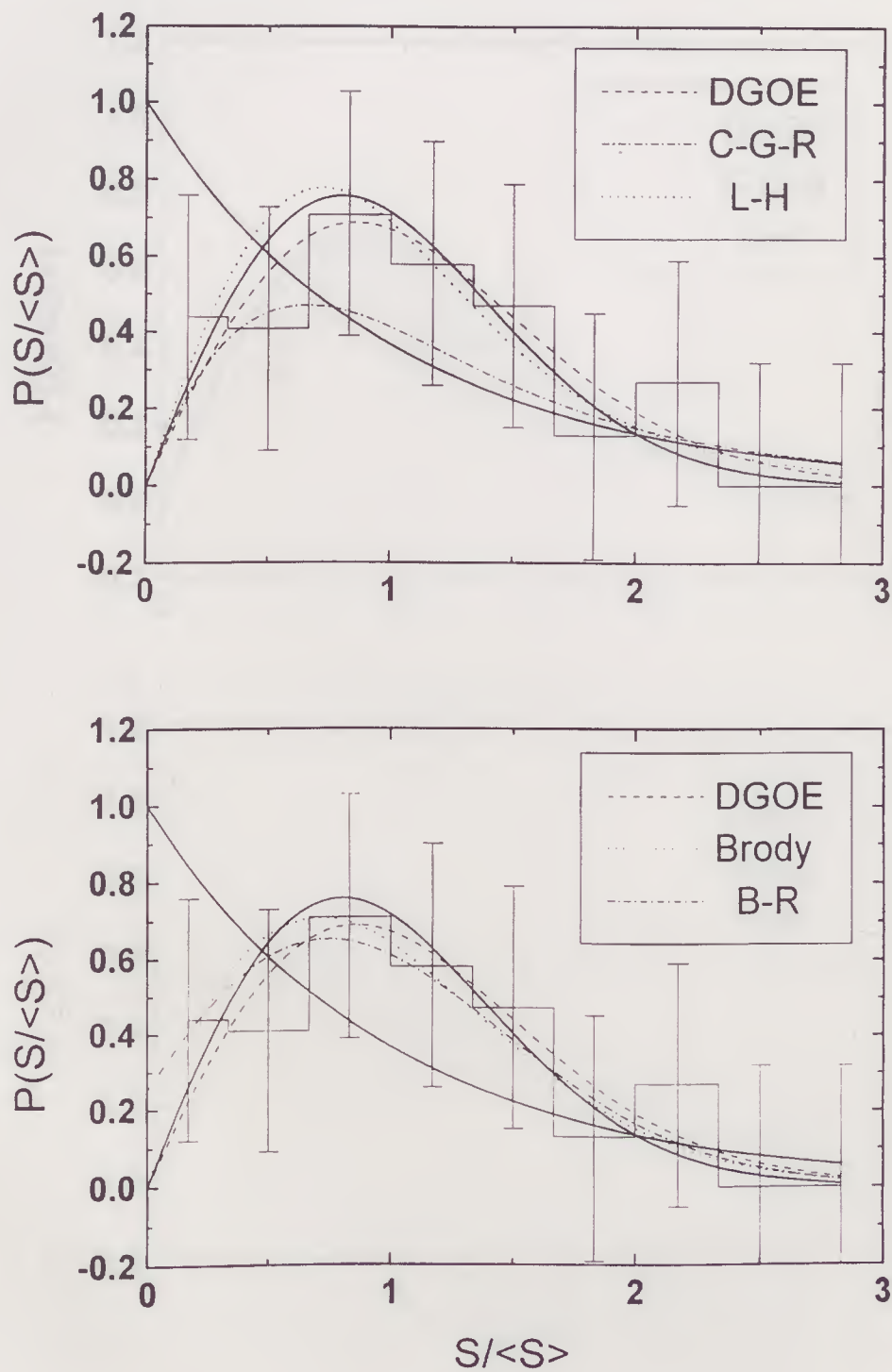


Figura E.9: Idem ao caso anterior para os núclídeos par-par deformados de spin $0^+ - 3^+$.

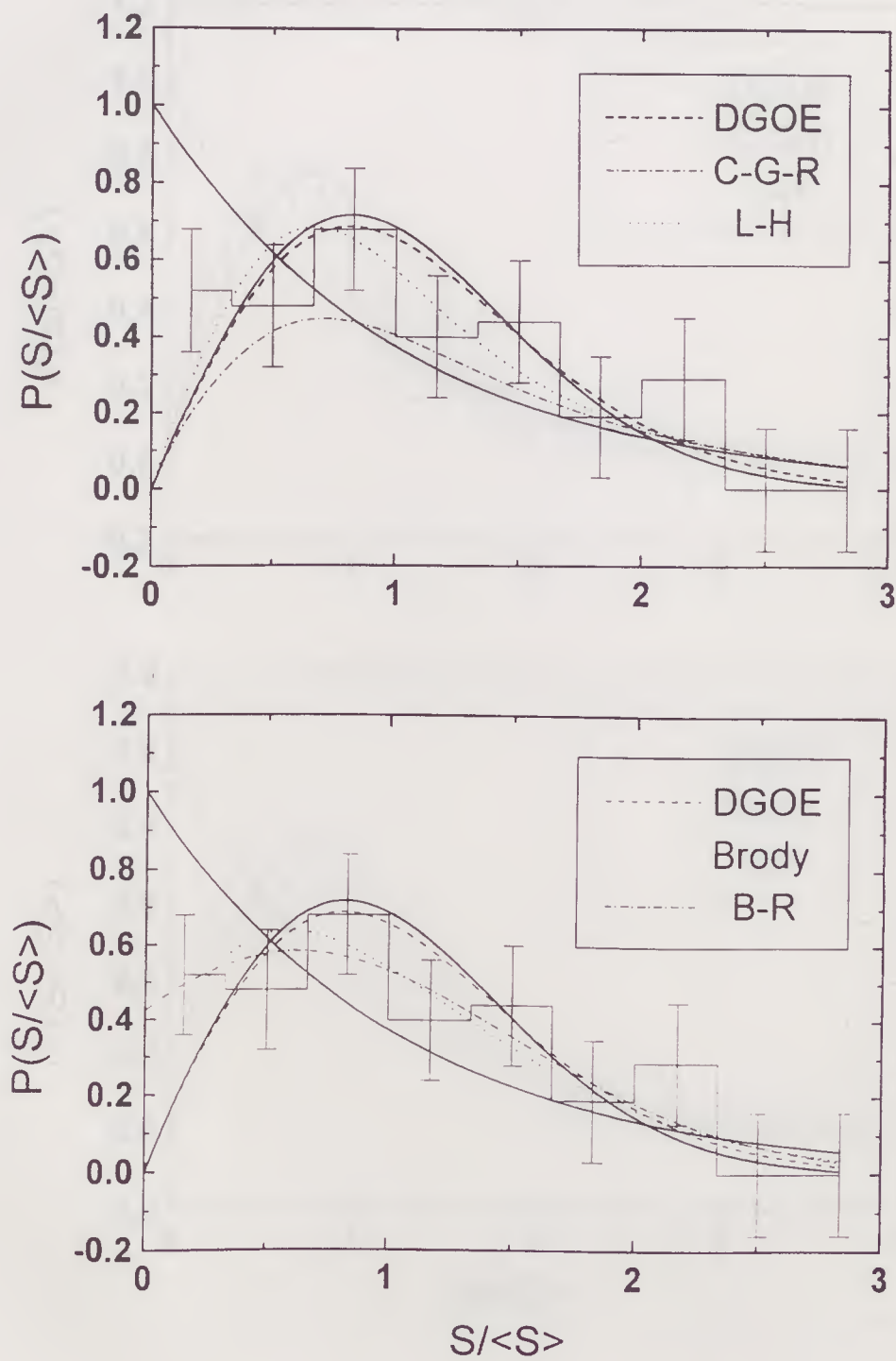


Figura E.10: Idem ao caso anterior para os outros núclídeos par-par deformados.

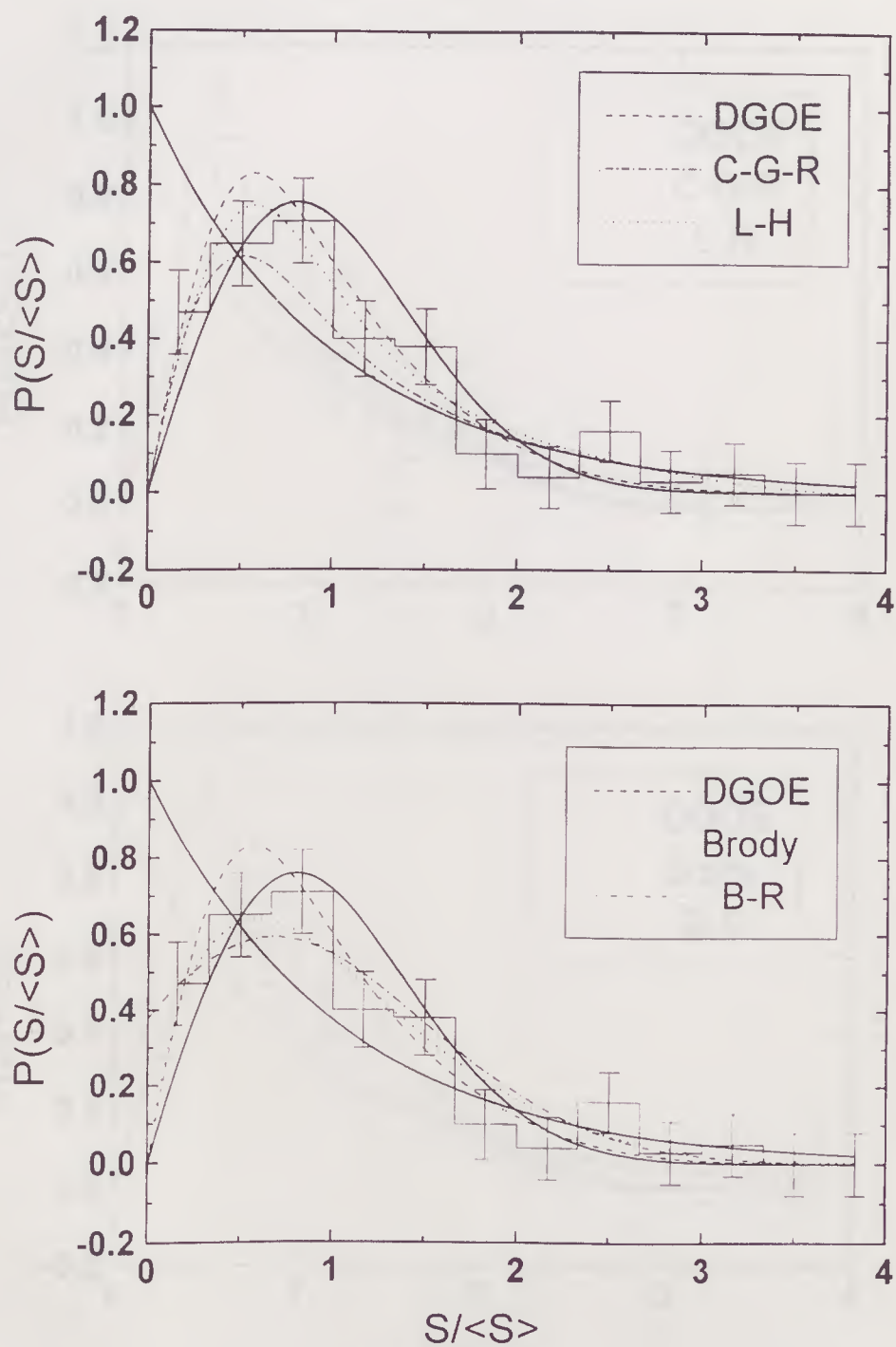


Figura E.11: Idem ao caso anterior para os núclídeos par-par esféricos de spin $2^+ 4^-$.

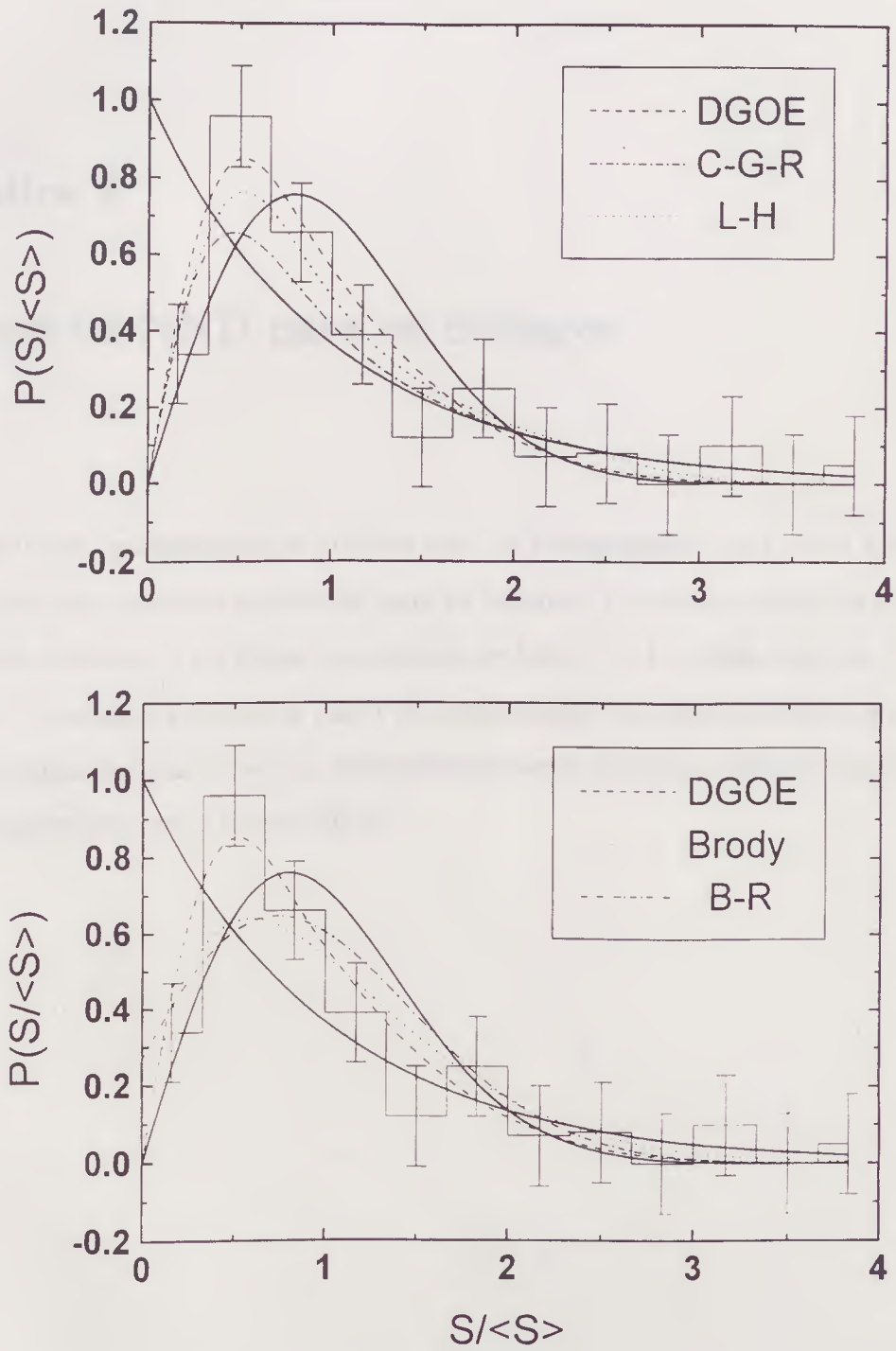


Figura E.12: Idem ao caso anterior para os outros núclídeos par-par esféricos.

Apêndice F

Gráficos de NND para os Bilhares

A seguir são apresentados os gráficos com os histogramas e as curvas ajustadas para cada um dos cinco modelos estudados, para os bilhares. Os dados analisados correspondem a oito casos distintos: o do bilhar tipo estádio de fator $\gamma = 1.0$ (vide capítulo V), aquele de fator $\gamma = 1.8$, os dados obtidos a partir do acoplamento dos dois anteriores e os resultados da superposição dos dois espectros independentemente medidos, todos os casos considerando-se os resultados com e sem as bbo's.

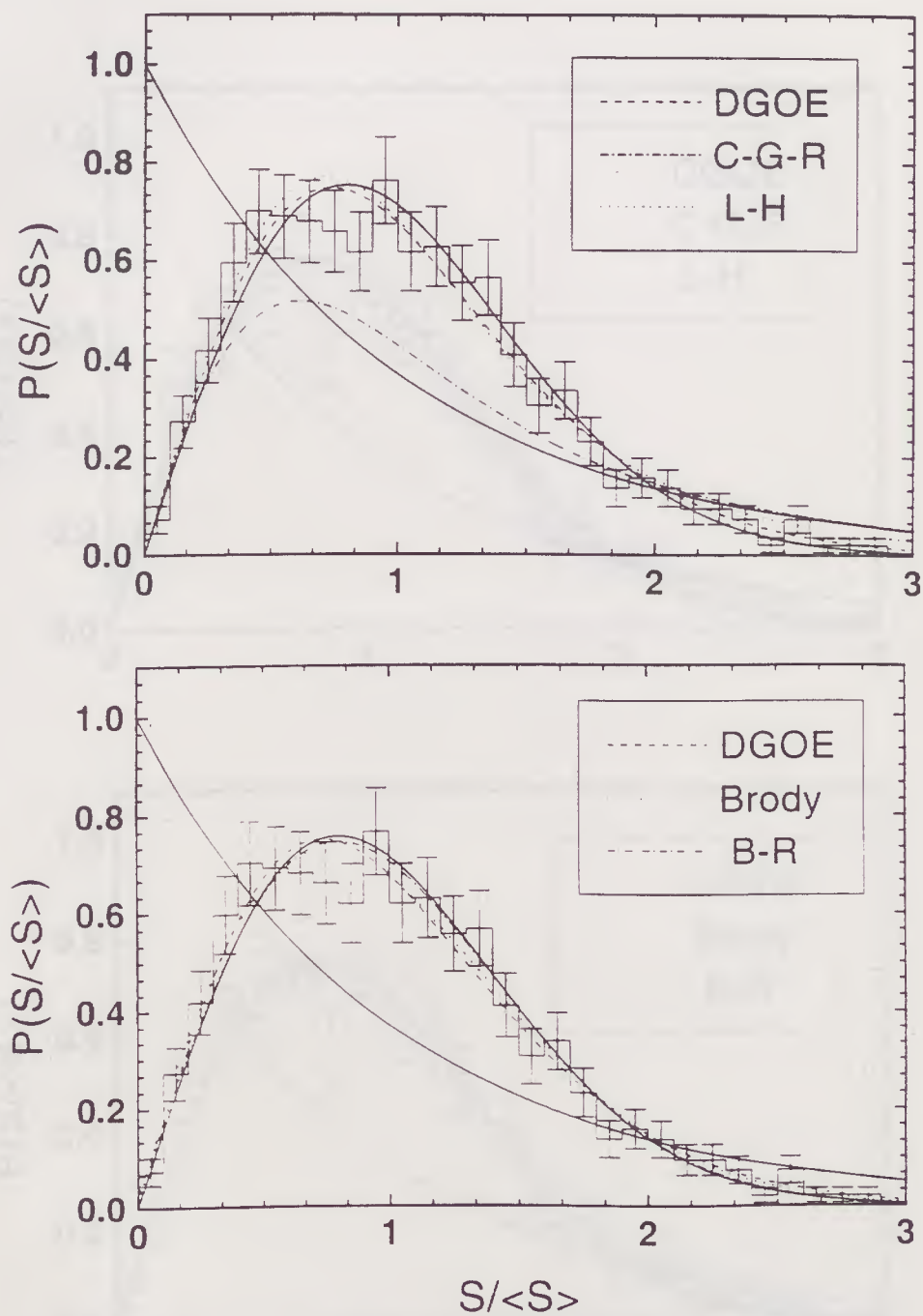


Figura F.1: Histogramas e distribuições de espaçamentos de vizinho mais próximo ajustadas segundo os modelos estudados (DGOE, Caurier-Grammaticos-Ramani, Lenz-Haake, Brody, Berry-Robnik) para o bilhar de fator $\gamma = 1.0$ sem as bbos: em linha contínua são apresentadas as curvas GOE e Poisson.

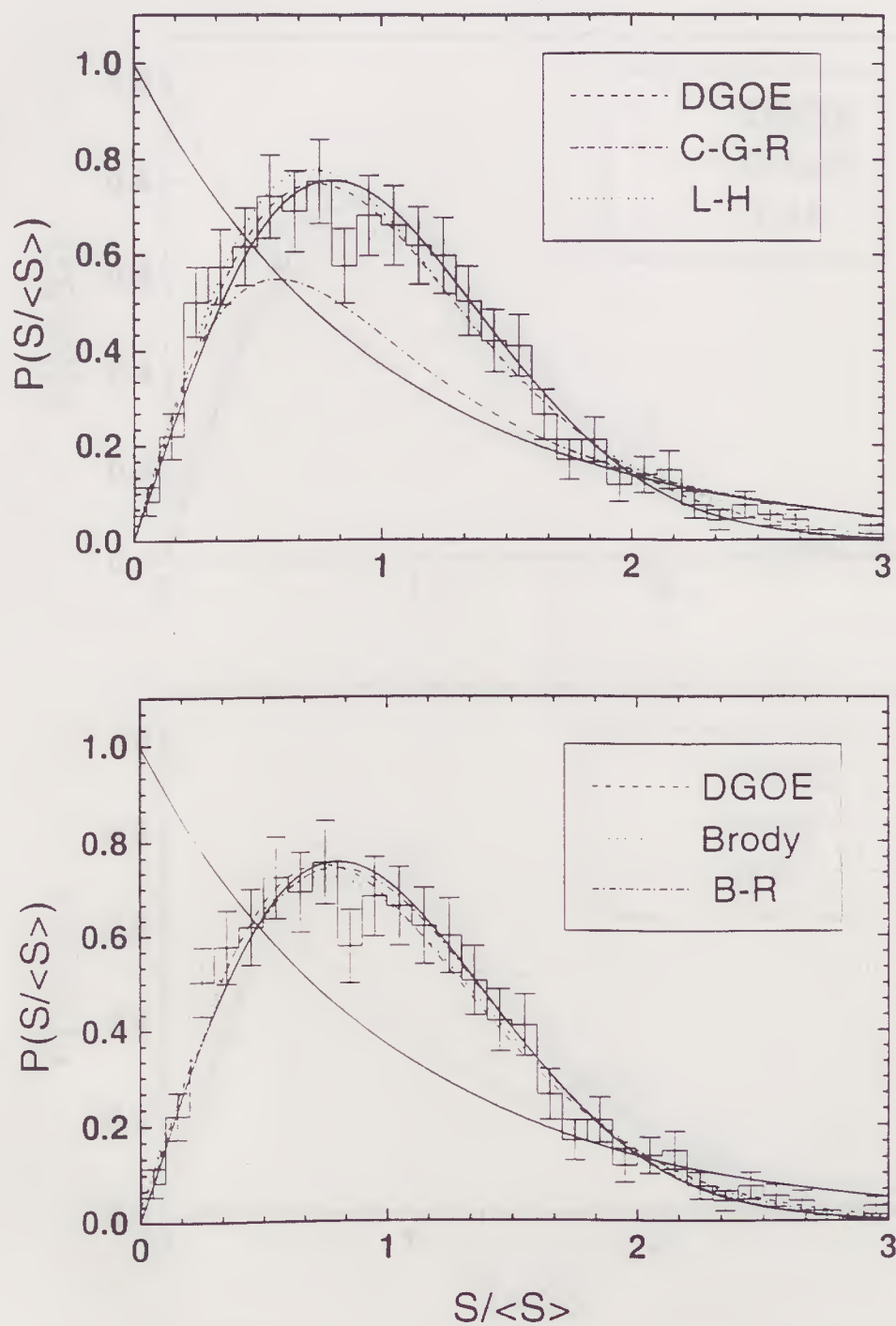


Figura F.2: Idem ao caso anterior para $\gamma = 1.0$ com as bbos.

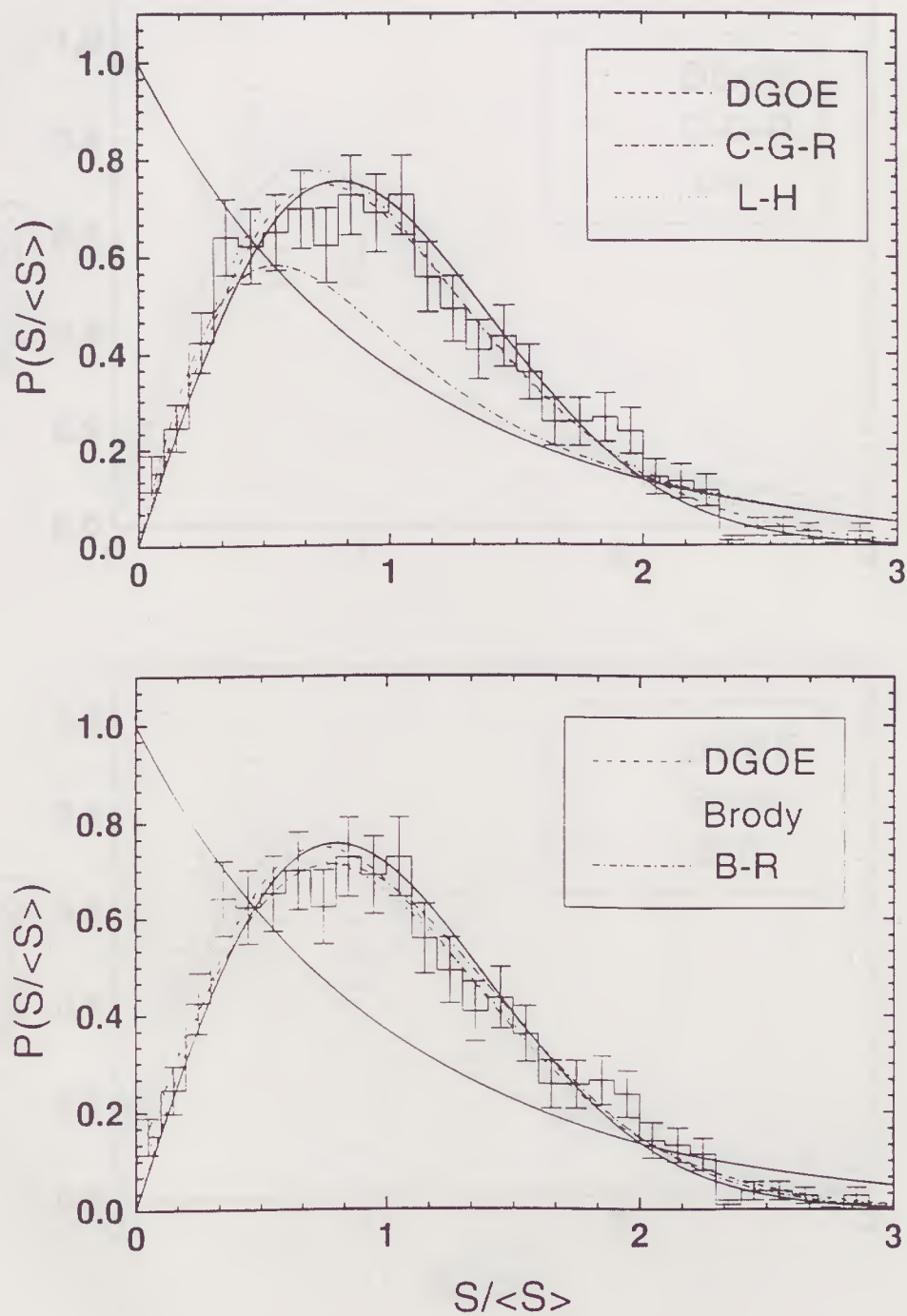


Figura F.3: Idem ao caso anterior para $\gamma = 1.8$ sem as bbos.

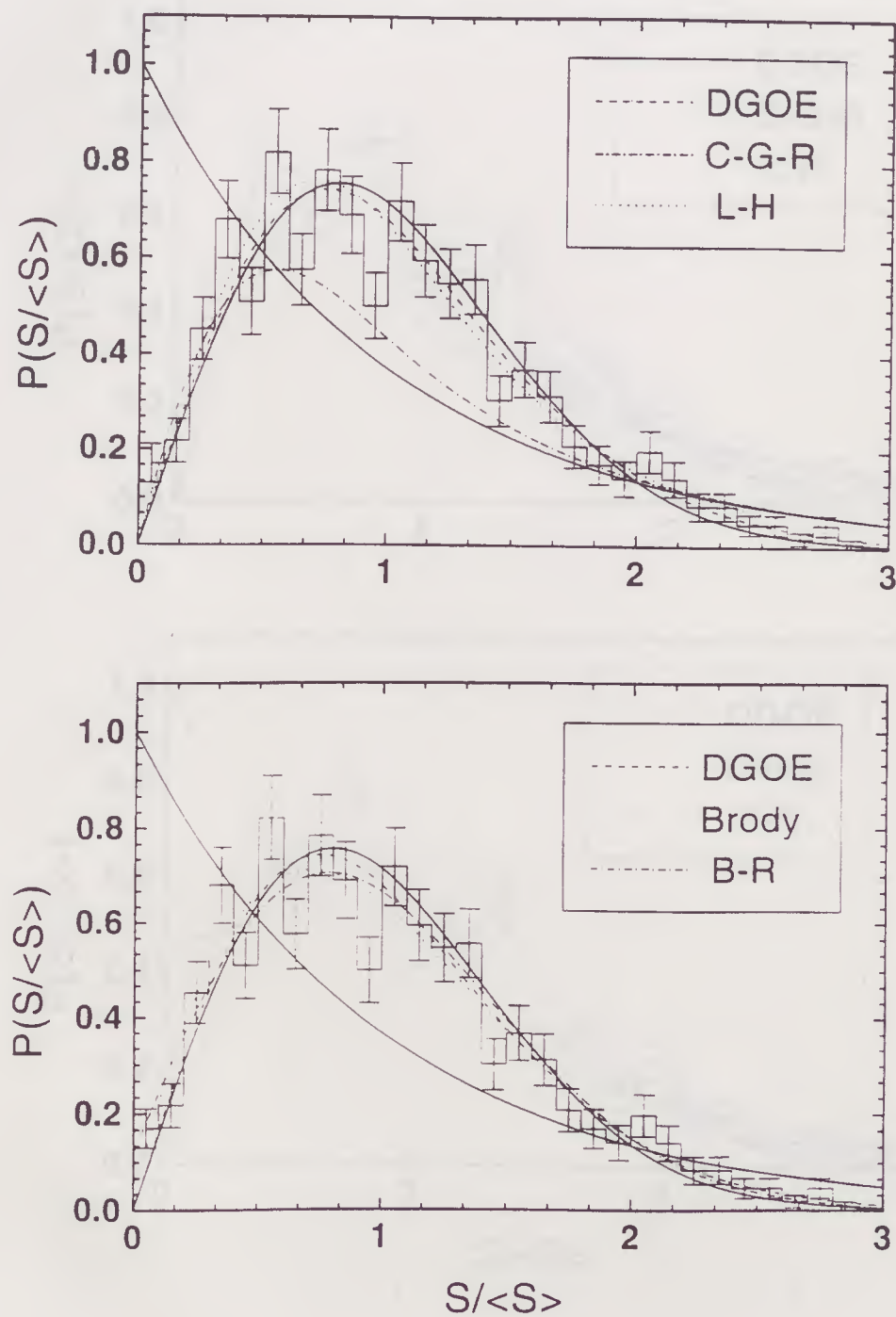


Figura F.4: Idem ao caso anterior para $\gamma = 1.8$ com as bbos.

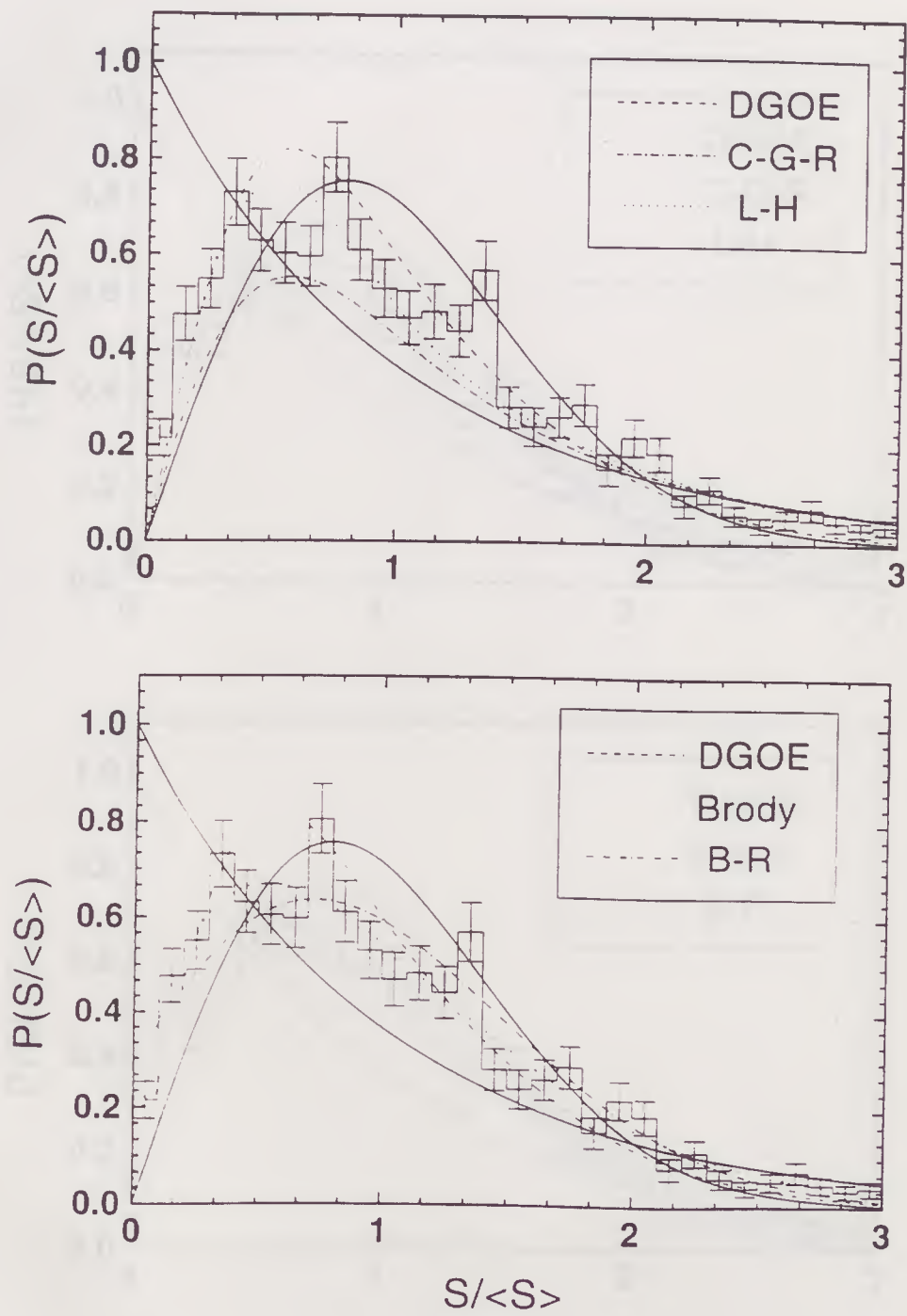


Figura F.5: Idem ao caso anterior para o acoplamento dos dois bilhares. sem as bbos.

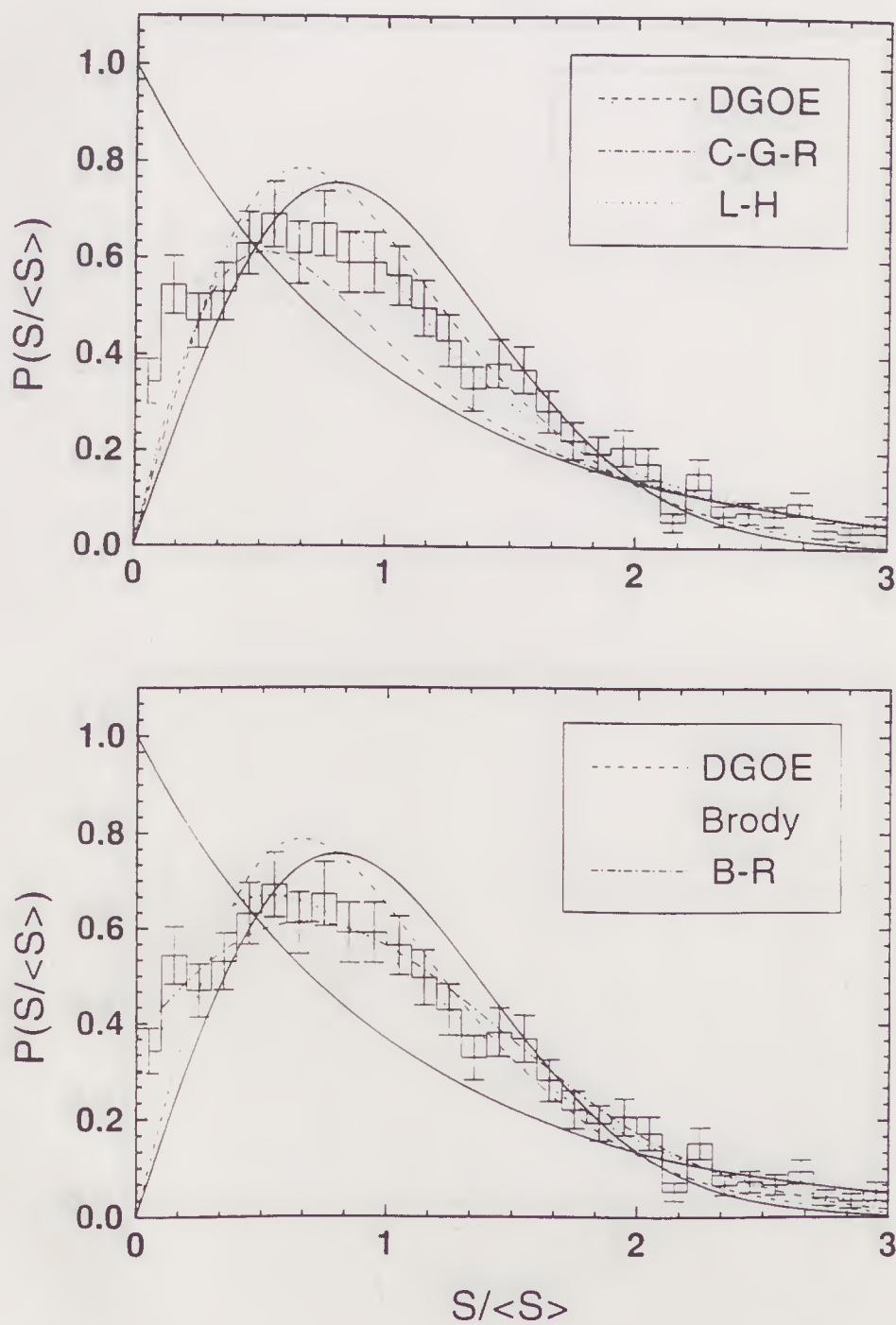


Figura F.6: Idem ao caso anterior para o acoplamento dos dois bilhares, com as bbos.

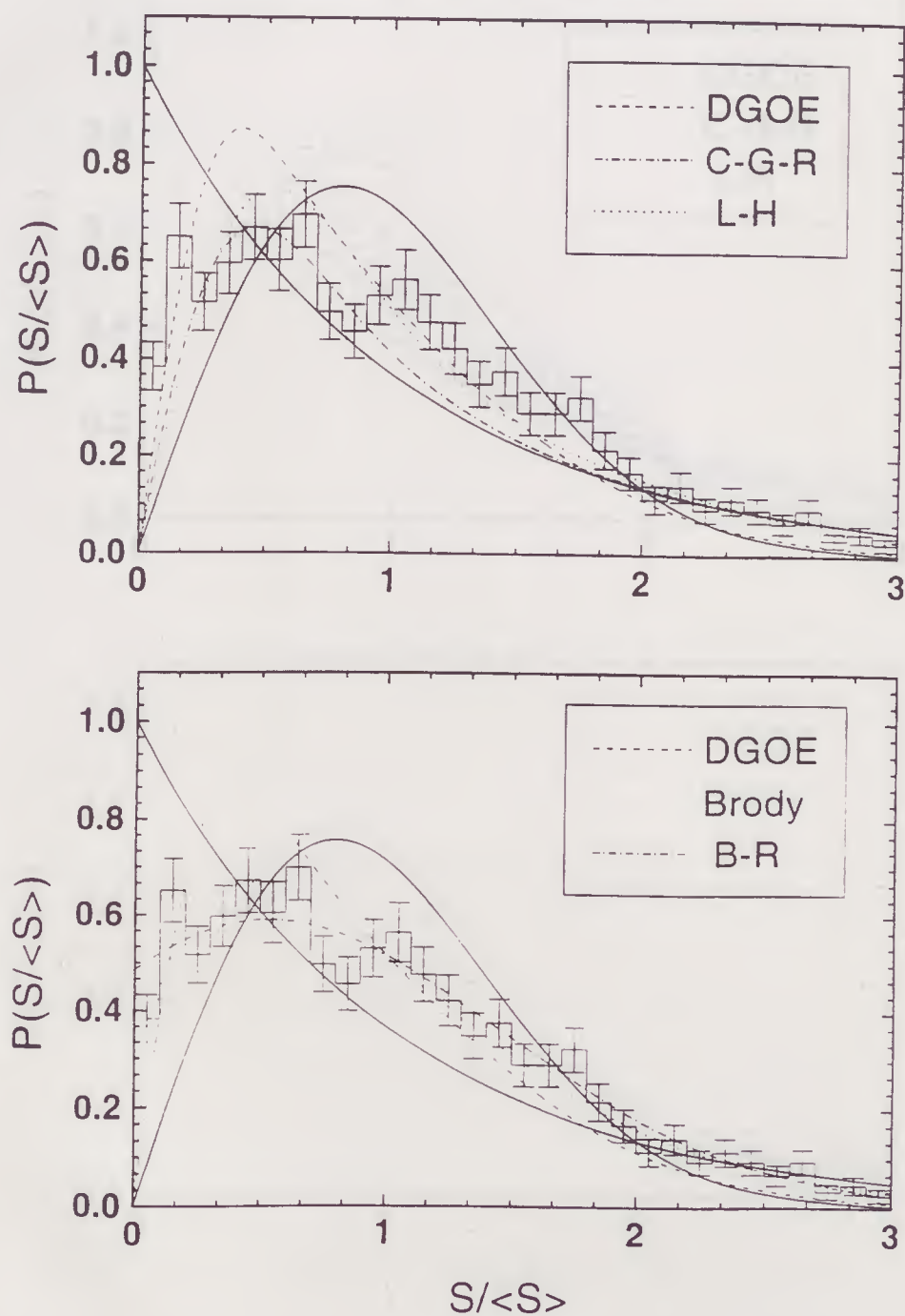


Figura F.7: Idem ao caso anterior para a superposição dos dados dos dois bilhares medidos independentemente, sem as bbos.

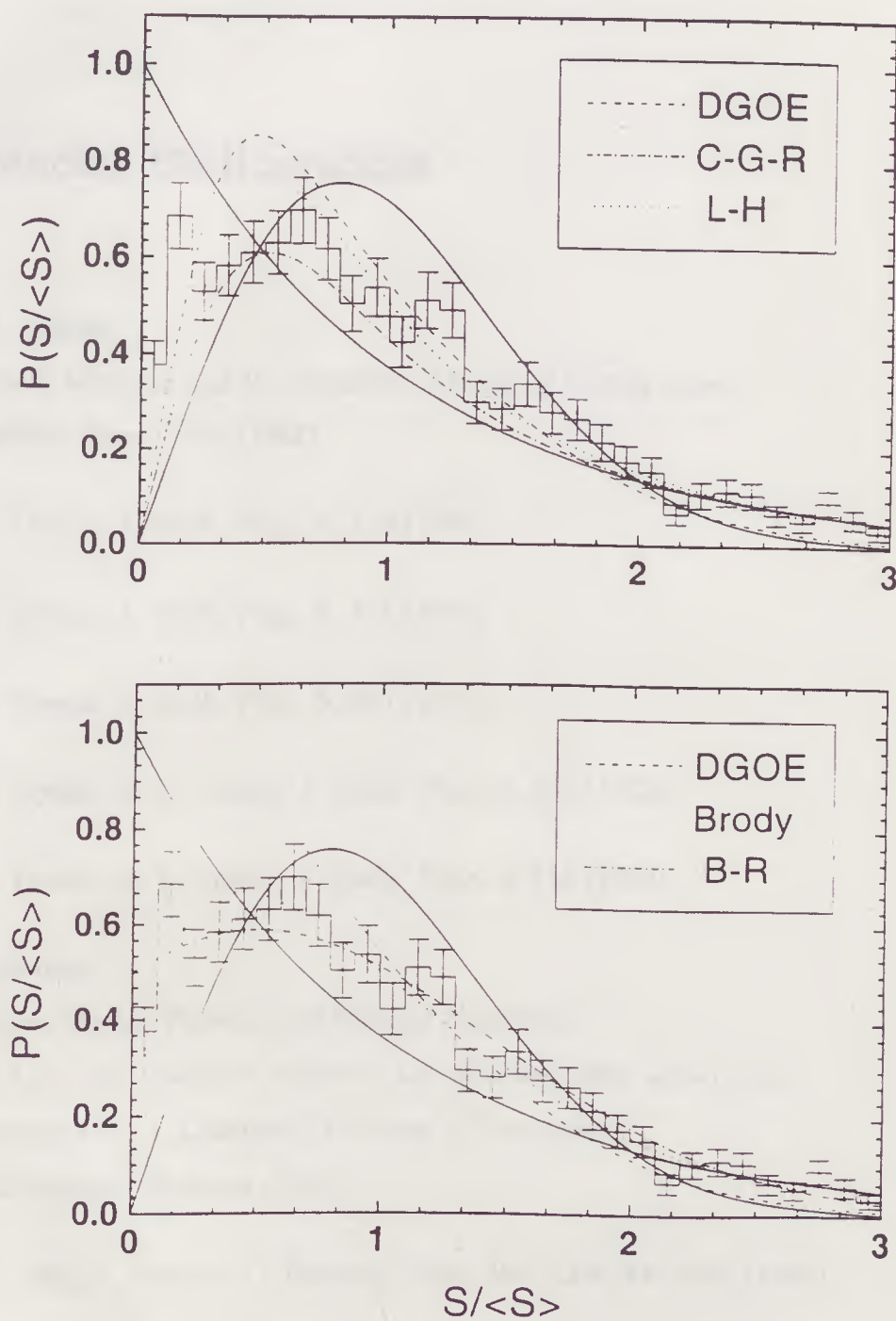


Figura F.8: Idem ao caso anterior para a superposição dos dados dos dois bilhares medidos independentemente, com as bbos.

Referências Bibliográficas

- [1] M. L. Mehta
Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels
Academic Press, USA (1967)
- [2] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962)
- [3] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 157 (1962)
- [4] F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 166 (1962)
- [5] F. J. Dyson, M. L. Mehta, *J. Math. Phys.* **4**, 701 (1963)
- [6] F. J. Dyson, M. L. Mehta, *J. Math. Phys.* **4**, 713 (1963)
- [7] O. Bohigas
Random Matrix Theories and Chaotic Dynamics
em *Chaos and Quantum Physics - Les Houches 1989* session LII
editado por M. J. Giannoni, A. Voros, J. Zinn-Justin
North-Holland, Holanda (1991)
- [8] R. U. Haq, A. Pandey, O. Bohigas, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1086 (1982)
- [9] O. Bohigas, M. -J. Giannoni
Chaotic Motion and Random Matrix Theories
Lecture Notes in Physics **209**
editado por J. S. Dehesa, J. M. G. Gomez, A. Polls
Springer-Verlag, Berlin (1984)

- [10] H. G. Schuster
Deterministic Chaos - an Introduction
VCH, Alemanha (1988)
- [11] M. V. Berry, M. Tabor, *Proc. R. Soc. Lond. A* **356**, 375 (1977)
- [12] M. C. Gutzwiller
Chaos in Classical and Quantum Mechanics
Springer-Verlag, Berlin (1990)
- [13] O. Bohigas, M. -J. Giannoni, C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1 (1984)
- [14] O. Bohigas - VI Jorge André Swieca Summer School - Campos do Jordão (SP), 1995
(não publicado)
- [15] B. Eckhardt, G. Hose, E. Pollack, *Phys. Rev. A* **39**, 3776 (1989)
- [16] A. Carnegie, I. C. Percival, *J. Phys. A* **17**, 801 (1984)
- [17] S. G. Mantinyan, G. K. Savvidy, N. G. TerArutyunyan-Savvidy, *Sov. Phys. - JETP*
53, 421 (1981)
- [18] G. K. Savvidy, *Nucl. Phys.* **B246**, 302 (1984)
- [19] O. Bohigas, S. Tomsovic, D. Ullmo, *Phys. Rep.* **223**, 43 (1993)
- [20] J. J. Sakurai
Modern Quantum Mechanics
The Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc., USA (1985)
- [21] M. Tinkham
Group Theory and Quantum Mechanics
McGraw-Hill Book Co., USA (1964)
- [22] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery
Numerical Recipes in FORTRAN - the Art of Scientific Computing
Cambridge University Press, USA (1992)

- [23] O. A. M. Helene, V. R. Vanin
Tratamento Estatístico de Dados em Física Experimental
Editora Edgard Blücher Ltda., São Paulo-Brasil (1981)
- [24] T. H. Seligman, J. J. M. Verbaarschot, M. R. Zirnbauer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **18**, 2751 (1985)
- [25] J. F. Shriner Jr., G.E. Mitchell, T. von Egidy, *Z. Phys. A - Hadrons and Nuclei* **338**, 309 (1991)
- [26] O. Bohigas, H. A. Weidenmüller, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **38**, 421 (1988)
- [27] T. von Egidy, H.H. Schmidt, A.N. Behkami, *Nucl. Phys.* **A481**, 189 (1988)
- [28] B. Efron. *SIAM Rev.* **21**, 460 (1979)
- [29] S. Raman et al., *At. Data Nucl. Data Tables* **36**, 1 (1987)
- [30] T. A. Brody, *Lett. al Nuovo Cim.* **7** 482 (1973)
- [31] M. V. Berry. M. Robnik. *J. Phys. A: Math. Gen.* **17** 2413 (1984)
- [32] E. Caurier. B. Grammaticos, A. Ramani, *J. Phys. A: Math. Gen.* **23** 4903 (1990)
- [33] G. Lenz. F. Haake. *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1 (1991)
- [34] I. S. Gradshtein. I. M. Ryzhik
Table of Integrals. Series and Products
Academic Press. Reino Unido (1965)
- [35] M. S. Hussein. M. P. Pato. *Phys. Rev. Lett.* **70** 1089 (1993)
M. P. Pato. C. A. Nunes. C. L. Lima. M. S. Hussein. Y. Alhassid. *Phys. Rev. C* **49** 2919 (1994)
- [36] T. A. Brody, J. Flores. J. B. French. P. A. Mello. A. Pandey. S. S. M. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 385 (1981)
- [37] R. Balian, *Il Nuovo Cimm.* **57 B**, 183 (1968)

- [38] M. S. Hussein, M. P. Pato - comunicação privada
- [39] W. J. Swiatecki, *Nuclear Physics A* **488**, 375c (1988)
- [40] V. Zelevinskii - VII Jorge André Swieca Summer School - Campos do Jordão (SP), 1997 (não publicado)
- [41] V. V. Kozlov, D. V. Treshchëv
Billiards - a Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts
Translations of Mathematical Monographs **89**
American Mathematical Society, USA (1991)
- [42] P. Schardt
Mikrowellensexperimente zum chaotischen Verhalten eines supraleitenden Stadion-Billiards und Entwicklung einer Einfangsektion am S-DALINAC
Tese de doutoramento - Institut für Kernphysik, TH-Darmstadt-Alemanha (1995)
- [43] H. -J. Stöckmann, J. Stein. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 2215 (1990)
- [44] H. -D. Gräf, H. L. Harney, H. Lengeler, C. H. Lewenkopf, C. Rangacharyulu, A. Richter, P. Schardt, H. A. Weidenmüller. *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1296 (1992)
H. Alt
Untersuchung des chaotischen Verhaltens supraleitender Kavitäten (Billiards) am Darmstädter Elektronenbeschleuniger S-DALINAC
Diplomarbeit - Institut für Kernphysik, TH-Darmstadt-Alemanha (1993)

