

Sonia Faustino Menegasso

**Polinômios de Szegö e Fórmulas de
Quadratura Positivas**



1910001065



POLINÔMIOS DE SZEGŐ E FÓRMULAS DE QUADRATURA POSITIVAS

Sonia Faustino Menegasso

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José
do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática
Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga



T1.065/02

São José do Rio Preto

22 de fevereiro de 2002



517.587
M541p

10100008

Sonia, Faustino Menegasso.

Polinômios de Szegö e fórmulas de quadratura positivas / Sonia Faustino Menegasso. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2001 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alagacone Sri Ranga.

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas.

1. Polinômios ortogonais. 2. Polinômios de Szegö. 3. Relação de recorrência. 4. Fórmulas de quadratura. I. Sri Ranga, Alagacone. II. Universidade Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 517



Dedico este trabalho aos meus
pais João e Marlene e
à José Eduardo,
meu namorado.

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, pela orientação
deste trabalho, compreendendo as dificuldades
e auxiliando as dúvidas... Seu apoio
foi de fundamental importância
para a realização deste sonho.

À Prof.^a Dr.^a Eliana Xavier L. de Andrade, pela
orientação dos trabalhos de Iniciação Científica
que foram de grande importância para
a realização desta dissertação.

À Prof.^a Dr.^a Cleonice Fátima Bracciali,
pelo apoio e atenção durante os
dois anos de pós-graduação.

À FAPESP, pelo auxílio
financeiro.

A todos que amo.

A Deus.



Resumo

Neste trabalho estudamos os polinômios ortogonais no círculo unitário que são conhecidos como polinômios de Szegő e consideramos, também, relações entre os polinômios de Szegő reais e os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ e suas aplicações. O objetivo principal deste trabalho, considerado no capítulo 5, é a utilização da transformação de Delsarte e Genin para construir relações entre os polinômios de Szegő reais e os polinômios simétricos em $[-1, 1]$. Essas relações são utilizadas para analisar a positividade das fórmulas de quadratura interpolatórias sobre n pontos associados a medidas simétricas e com grau de precisão menor que $2n - 1$.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais, Polinômios de Szegő, Relação de Recorrência, Fórmulas de Quadratura.

Abstract

In this work we study orthogonal polynomials defined on the unit circle, which are called Szegő polynomials, and consider the relations between real Szegő polynomials and the orthogonal polynomials on the interval $[-1, 1]$ and their applications. The main aim of this work, consider on chapter 5, is the use of the Delsarte and Genin transformation to construct relations between the real Szegő polynomials and symmetric orthogonal polynomials on $[-1, 1]$. Finally, these relations are used to analyse the positiveness of interpolatory quadrature rules of n points associated with symmetric measure having degree of accuracy less than $2n - 1$.

Keywords: Orthogonal Polynomials, Szegő Polynomials, Recurrence Relations, Quadrature Formulas.

Sumário

Introdução	9
1 Polinômios Ortogonais na Reta Real	11
1.1 Introdução	11
1.2 Relação de Recorrência de Três Termos	13
1.3 Quadratura Gaussiana	15
2 Polinômios Ortogonais no Plano Complexo	20
2.1 Introdução	20
2.2 Propriedades Extremas	23
2.3 Propriedades dos Zeros	28
3 Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário	33
3.1 Matrizes de Toeplitz	33
3.2 Relação de Recorrência	37
3.3 Relação com Polinômios Ortogonais em $[-1, 1]$	39
4 Combinações Lineares de Polinômios Ortogonais que Geram Fórmulas de Quadratura Positivas	44
4.1 Resultados Preliminares	45
4.2 Fórmulas de Quadratura Positivas	50
5 Fórmulas de Quadratura Positivas com Medidas Simétricas	57

5.1	Polinômios Para-Ortogonais	57
5.2	Alguns Resultados usando Polinômios de Szegő Associados	61
5.3	Os Polinômios $H_{k,n}$	63
5.4	Algumas Considerações sobre Fórmulas de Quadratura	65
5.5	Fórmulas de Quadratura Positivas	70

Referências Bibliográficas

74

Introdução

Dada uma medida positiva $d\nu(z) = d\nu(e^{i\theta})$ no círculo unitário, os polinômios de Szegő, $\{S_n\}$, podem ser definidos por

$$\int_C S_n(z) \overline{S_m(z)} d\nu(z) = \int_C S_n(e^{i\theta}) \overline{S_m(e^{i\theta})} d\nu(e^{i\theta}) = 0, \text{ para } m \neq n.$$

Os polinômios de Szegő normalmente não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos como acontece com os polinômios ortogonais na reta real. Entretanto, eles satisfazem ao seguinte sistema de relações de recorrência

$$S_{n+1}(z) = zS_n(z) + a_{n+1}S_{n+1}^*(z),$$

$$(1 - |a_{n+1}|^2)zS_n(z) = S_{n+1}(z) - a_{n+1}S_{n+1}^*(z),$$

para $n \geq 0$, onde $S_0(z) = 1$ e $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(z^{-1})}$ são chamados de polinômios recíprocos aos polinômios de Szegő. $\overline{S_n}$ indica que somente os coeficientes de S_n são conjugados. Os coeficientes $S_{n+1}(0) = a_{n+1}$ são chamados coeficientes de reflexão e são menores do que um em módulo. Uma propriedade importante desses polinômios é que todos os seus zeros estão localizados dentro do disco unitário aberto.

Os polinômios $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$ onde $|w_n| = 1$ são chamados polinômios para-ortogonais. Neste trabalho, consideramos dois casos especiais desses polinômios

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \text{ e } R_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z-1} \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_n(0)}, \quad n \geq 1.$$

Consideramos também a sequência de polinômios definida por

$$\tilde{S}_{n+1}(z) = z\tilde{S}_n(z) - a_{n+1}\tilde{S}_{n+1}^*(z),$$

para $n \geq 0$, onde $\tilde{S}_0(z) = 1$. Esses polinômios são chamados de polinômios de Szegő associados.

No capítulo 1, consideramos polinômios ortogonais definidos sobre um intervalo da reta real e, como aplicação desses polinômios, apresentamos a fórmula de quadratura gaussiana.

Nos capítulos 2 e 3 apresentamos alguns resultados do artigo de Van Assche [17], fazendo um estudo sobre polinômios ortogonais no plano complexo e no círculo unitário. Consideramos principalmente as relações entre os polinômios ortogonais de Szegő e os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ através da transformação de Szegő

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2}.$$

Os resultados estudados no capítulo 4 são encontrados no artigo de Franz Peherstorfer [10] onde ele relaciona os polinômios de Szegő aos polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ através da transformação de Szegő. Essas relações são usadas para estudar a positividade das fórmulas de quadratura baseadas em combinações lineares entre os polinômios ortogonais reais.

O objetivo principal deste trabalho é o estudo de fórmulas de quadratura associadas a medidas simétricas com pesos positivos usando relações entre os polinômios de Szegő e os polinômios ortogonais simétricos em $[-1, 1]$ através da transformação

$$x = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2},$$

conhecida como transformação de Delsarte e Genin (veja Zhedanov [18]). Este estudo foi motivado pelo artigo de Franz Peherstorfer [10] e é assunto do capítulo 5. As relações entre os polinômios de Szegő e os polinômios ortogonais simétricos em $[-1, 1]$ foram construídas com o auxílio dos polinômios para-ortogonais e os polinômios de Szegő associados.



Capítulo 1

Polinômios Ortogonais na Reta Real

Neste capítulo são estudadas definições e propriedades dos polinômios ortogonais em um conjunto da reta real. Tratamos especialmente da relação de recorrência de três termos, da identidade de Christoffel-Darboux e das fórmulas de quadratura gaussianas. Os resultados apresentados neste capítulo foram baseados no trabalho de Van Assche [17], bem como em Chihara [3] e Szegő [16].

1.1 Introdução

Seja μ uma função não decrescente e com infinitos pontos de aumento, tal que os momentos definidos por

$$m_n = \int_a^b x^n d\mu(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.1.1)$$

onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, existem e são finitos. Nessas condições, $d\mu$ é chamada de medida positiva na reta real. O conjunto

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R} : \mu(x + \epsilon) - \mu(x - \epsilon) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\}$$

define o suporte da medida $d\mu$.

Os polinômios ortogonais com relação à medida $d\mu$ podem ser definidos por



Definição 1.1.1. *Seja a seqüência de polinômios $\{p_n\}$, onde $p_n(x) = \gamma_n x^n + \lambda_n x^{n-1} + \dots$, $\gamma_n \neq 0$. Esta seqüência recebe o nome de seqüência de polinômios ortogonais em $[a, b]$ onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, com relação à medida $d\mu$, se*

$$\int_a^b p_n(x)p_m(x)d\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \rho_n > 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Quando o coeficiente do termo de maior grau, aqui denotado por γ_n , é positivo, a seqüência de polinômios ortogonais é unicamente determinada. Quando $\gamma_n = 1$, a seqüência de polinômios ortogonais é chamada mônica e denotada por $\{\hat{p}_n\}$. Quando $\rho_n = 1$, é chamada seqüência de polinômios ortonormais.

Definição 1.1.2. *O determinante*

$$H_n = \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-1} \\ m_n & m_{n+1} & \dots & m_{2n} \end{vmatrix},$$

para $n \geq 0$, é chamado determinante de Hankel.

Os polinômios ortogonais de grau n podem ser representados por

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{H_n H_{n-1}}} \begin{vmatrix} m_0 & m_1 & \dots & m_n \\ m_1 & m_2 & \dots & m_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n-1} & m_n & \dots & m_{2n-1} \\ 1 & x & \dots & x^n \end{vmatrix},$$

e o coeficiente do termo de maior grau é dado por

$$\gamma_n = \sqrt{\frac{H_{n-1}}{H_n}}.$$



1.2 Relação de Recorrência de Três Termos

Representar os polinômios ortogonais em termos do determinante da matriz de Hankel não é muito útil pois exige o desenvolvimento de determinantes de ordens muito elevadas. Aqui, veremos uma maneira mais eficiente para o cálculo desses polinômios através da relação de recorrência de três termos.

Teorema 1.2.1. *Os polinômios ortogonais*

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \lambda_n x^{n-1} + \dots$$

em um intervalo $[a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, da reta real, satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$xp_n(x) = \tau_{n+1}p_{n+1}(x) + \nu_n p_n(x) + \tau_n p_{n-1}(x), \quad (1.2.1)$$

com as condições iniciais $p_0(x) = 1$ e $p_{-1}(x) = 0$. Os coeficientes da relação de recorrência são dados por

$$\tau_n = \int_a^b xp_{n-1}(x)p_n(x)d\mu(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n} > 0 \quad (1.2.2)$$

e

$$\nu_n = \int_a^b xp_n^2(x)d\mu(x) = \frac{\lambda_n}{\gamma_n} - \frac{\lambda_{n+1}}{\gamma_{n+1}}. \quad (1.2.3)$$

Os polinômios ortogonais mônicos $\hat{p}_n = p_n/\gamma_n$ satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$\hat{p}_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})\hat{p}_n(x) - \alpha_{n+1}\hat{p}_{n-1}(x), \quad (1.2.4)$$

onde $\beta_{n+1} = \nu_n$ e $\alpha_{n+1} = \tau_n^2$, com as condições iniciais $\hat{p}_0(x) = 1$ e $\hat{p}_{-1}(x) = 0$.

Demonstração: O polinômio $xp_n(x)$ tem grau $n+1$ e pode ser escrito como uma expansão em série de Fourier usando os $n+2$ primeiros polinômios ortogonais. Assim,

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{k,n} p_k(x),$$



onde os coeficientes de Fourier são dados por

$$c_{k,n} = \int_a^b xp_n(x)p_k(x)d\mu(x).$$

Como $xp_k(x)$ é um polinômio de grau $k+1$, temos que $c_{k,n} = 0$ para $k+1 < n$. Portanto, a série de Fourier para $xp_n(x)$ tem somente três termos,

$$xp_n(x) = c_{n-1,n}p_{n-1}(x) + c_{n,n}p_n(x) + c_{n+1,n}p_{n+1}(x).$$

Fazendo $\tau_n = c_{n-1,n}$, $\nu_n = c_{n,n}$ e $\tau_{n+1} = c_{n+1,n} = c_{n,n+1}$ e comparando com os coeficientes da relação (1.2.1), obtemos os coeficientes τ_n e ν_n .

Para a relação (1.2.4) basta substituímos $p_n = \gamma_n \hat{p}_n$ na relação (1.2.1). ■

Da relação de recorrência (1.2.1) podemos obter algumas fórmulas de grande utilidade. Por exemplo, multiplicando ambos os lados da relação de recorrência (1.2.1) em x por $p_n(y)$ e em y por $p_n(x)$ e subtraindo uma da outra, temos

$$\begin{aligned} (x-y)p_n(x)p_n(y) &= \tau_{n+1}[p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)] \\ &\quad - \tau_n[p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)]. \end{aligned}$$

Somando em ambos os lados o termo $(x-y)p_k(x)p_k(y)$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$, temos

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(y) = \tau_n \frac{p_n(x)p_{n-1}(y) - p_{n-1}(x)p_n(y)}{x-y}, \quad (1.2.5)$$

que é conhecida como *Identidade de Christoffel-Darboux*. Fazendo agora y tender a x em (1.2.5), obtemos

$$\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x) = \tau_n [p'_n(x)p_{n-1}(x) - p'_{n-1}(x)p_n(x)]. \quad (1.2.6)$$

que recebe o nome de *Fórmula Confluente para a Identidade de Christoffel-Darboux* (veja Krylov [8]).



1.3 Quadratura Gaussiana

Fórmulas de quadratura são aquelas que aproximam o valor de uma integral definida através de uma combinação linear de valores da função, isto é, são fórmulas do tipo

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \beta_{j,n} f(x_{j,n}) + \mathbb{E}_n(f) \quad (1.3.1)$$

onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $\mathbb{E}_n(f)$ é o erro cometido na aproximação. Quando os pesos $\beta_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, são dados por

$$\beta_{j,n} = \frac{1}{\pi'_n(x_{j,n})} \int_a^b \frac{\pi_n(x)}{x - x_{j,n}} d\mu(x), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

com $\pi_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{j,n})$ e $x_{j,n} \neq x_{k,n}$, para $j \neq k$, a fórmula de quadratura (1.3.1) é interpolatória. Portanto, o erro na interpolação, $\mathbb{E}_n(f)$, é nulo pelo menos para todo polinômio de grau menor ou igual a $n - 1$.

Definição 1.3.1. Dizemos que o grau de precisão de uma fórmula de quadratura é k se $\mathbb{E}_n(q) = 0$ para todo polinômio $q \in \mathbb{P}_k$ e existe um polinômio $q \in \mathbb{P}_{k+1}$ tal que $\mathbb{E}_n(q) \neq 0$.

Se fixarmos n pontos $x_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, então as n equações

$$\sum_{j=1}^n \beta_{j,n} x_{j,n}^k = m_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

obtidas tomando-se $f(x) = x^k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, onde m_k são os momentos dados em (1.1.1), formam um sistema de n equações com n incógnitas $\beta_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$.

Essas n equações formam o sistema linear

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{n,n} \\ x_{1,n}^2 & x_{2,n}^2 & \dots & x_{n,n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n}^{n-1} & x_{2,n}^{n-1} & \dots & x_{n,n}^{n-1} \end{pmatrix}}_V \begin{pmatrix} \beta_{1,n} \\ \beta_{2,n} \\ \beta_{3,n} \\ \vdots \\ \beta_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix},$$

onde a matriz V é a *matriz de Vandermonde* que é não-singular quando todos os nós $x_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, são distintos. Portanto, toda escolha de n nós distintos tem um único conjunto de coeficientes de quadratura $\beta_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, tal que a correspondente fórmula de quadratura tem grau de precisão no mínimo $n - 1$.

Se aproximarmos a função f por um polinômio de interpolação sobre os pontos $x_{j,n}$, $j = 1, \dots, n$, então o polinômio interpolador de Lagrange será

$$L_n(x) = \sum_{j=1}^n f(x_{j,n}) l_{j,n}(x),$$

onde os polinômios fundamentais da interpolação de Lagrange são dados por

$$l_{j,n}(x) = \frac{\pi_n(x)}{\pi'_n(x_{j,n})(x - x_{j,n})},$$

com $\pi_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_{j,n})$, com $x_{j,n} \neq x_{k,n}$ para $j \neq k$ (veja Krylov [8]).

A propriedade $l_{j,n}(x_{k,n}) = \delta_{k,n}$, onde $\delta_{k,n}$ é o Delta de Kronecker, nos garante que o polinômio L_n é interpolador, pois

$$L_n(x_{j,n}) = f(x_{j,n}), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Integrando o polinômio $L_n(x)$, que tem grau $n - 1$, temos

$$\int_a^b L_n(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n f(x_{j,n}) \int_a^b l_{j,n}(x) d\mu(x).$$

Quando f é um polinômio de grau $n - 1$ temos que $L_n(x) = f(x)$. Assim, os coeficientes de quadratura são dados por

$$\beta_{j,n} = \int_a^b l_{j,n}(x) d\mu(x).$$

Se escolhermos os nós da fórmula de quadratura como sendo os zeros dos polinômios ortogonais de grau n relativamente à medida $d\mu$ encontra-se precisão maior.

Teorema 1.3.1. (Quadratura de Gauss-Jacobi-Christoffel) *Se escolhermos os n nós da fórmula de quadratura como sendo os n zeros $x_{j,n}$ dos polinômios ortogonais com relação à medida $d\mu$ e se denotarmos os correspondentes coeficientes de*



quadratura por $\lambda_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, então para todo polinômio π_{2n-1} de grau menor ou igual a $2n - 1$ temos

$$\int_a^b \pi_{2n-1}(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \pi_{2n-1}(x_{j,n}),$$

onde $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Os coeficientes $\lambda_{j,n}$ da fórmula de quadratura são positivos e são dados por

$$\lambda_{j,n} = \frac{1}{\tau_n p_{n-1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n})} = \frac{-1}{\tau_{n+1} p_{n+1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n})},$$

ou

$$\lambda_{j,n} = \left(\sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x_{j,n}) \right)^{-1}. \quad (1.3.2)$$

Demonstração: Seja L_n o polinômio interpolador de π_{2n-1} sobre os nós $x_{j,n}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Então,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} \pi_{2n-1}(x_{j,n}) - \int_a^b \pi_{2n-1}(x) d\mu(x) = \int_a^b [L_n(x) - \pi_{2n-1}(x)] d\mu(x).$$

O integrando $L_n(x) - \pi_{2n-1}(x)$ é um polinômio de grau no máximo $2n - 1$ que se anula em $x_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$. Então, podemos escrever

$$L_n(x) - \pi_{2n-1}(x) = p_n(x) r_{n-1}(x),$$

onde r_{n-1} é um polinômio de grau no máximo $n - 1$.

Como p_n é o polinômio ortogonal de grau n com relação à medida $d\mu$, temos

$$\int_a^b [L_n(x) - \pi_{2n-1}(x)] d\mu(x) = 0.$$

Isso mostra que o grau de precisão é no mínimo $2n - 1$. Seja π_{2n} um polinômio de grau $2n$ e L_n seu polinômio interpolador, podemos escrever

$$L_n(x) - \pi_{2n}(x) = p_n(x) r_n(x),$$

onde r_n é um polinômio de grau n . Daí,

$$\int_a^b [L_n(x) - \pi_{2n}(x)] d\mu(x) \neq 0,$$

pela ortogonalidade de p_n . Portanto, concluímos que o grau de precisão da fórmula de quadratura é $2n - 1$.

Os coeficientes de quadratura são

$$\lambda_{j,n} = \int_a^b l_{j,n}(x) d\mu(x).$$

Se tomarmos $\pi_n(x) = cp_n(x)$, onde c é uma constante diferente de zero, temos

$$l_{j,n}(x) = \frac{p_n(x)}{p'_n(x_{j,n})(x - x_{j,n})}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_a^b l_{j,n}^2(x) d\mu(x) - \int_a^b l_{j,n}(x) d\mu(x) &= \int_a^b l_{j,n}(x) [l_{j,n}(x) - 1] d\mu(x) \\ &= \frac{1}{p'_n(x_{j,n})} \int_a^b p_n(x) \frac{l_{j,n}(x) - 1}{x - x_{j,n}} d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda_{j,n} = \int_a^b l_{j,n}^2(x) d\mu(x),$$

ou seja, os coeficientes de quadratura são positivos.

Para desenvolvermos a representação dos pesos, consideramos $y = x_{j,n}$ na fórmula de Christoffel-Darboux (1.2.5) e então,

$$\frac{p_n(x)p_{n-1}(x_{j,n})}{x - x_{j,n}} = \frac{1}{\tau_n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)p_k(x_{j,n}).$$

Daí,

$$\lambda_{j,n} = \frac{1}{\tau_n p_{n-1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n})}.$$

Considerando agora a fórmula de Christoffel-Darboux (1.2.5) com $n = n + 1$ e $y = x_{j,n}$, temos

$$\frac{p_n(x)p_{n+1}(x_{j,n})}{x - x_{j,n}} = -\frac{1}{\tau_{n+1}} \sum_{k=0}^n p_k(x)p_k(x_{j,n}).$$

Logo,

$$\lambda_{j,n} = \frac{-1}{\tau_{n+1} p_{n+1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n})}.$$



Finalmente, usando a Fórmula Confluente para a Identidade de Christoffel-Darboux (1.2.6) com $x = x_{j,n}$, obtemos

$$\tau_n p_{n-1}(x_{j,n}) p'_n(x_{j,n}) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k^2(x_{j,n}).$$

Então,

$$\lambda_{j,n} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} p_k^2(x_{j,n}) \right)^{-1}.$$

■

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais no Plano Complexo

Neste capítulo são estudados os polinômios ortogonais no plano complexo, suas propriedades extremas, relação de recorrência e importantes resultados sobre a localização dos seus zeros. Estes resultados, que também foram estudados na dissertação de Mestrado [2], podem ser encontrados em Van Assche [17].

2.1 Introdução

Seja $d\mu$ uma medida positiva no plano complexo. Consideremos o espaço de Hilbert $L_2(\mu)$ de funções ϕ onde

$$\|\phi(z)\|^2 = \int_{\Gamma} |\phi(z)|^2 d\mu(z) < \infty$$

e, Γ é um conjunto do plano complexo. Em $L_2(\mu)$ o produto interno é definido por

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Gamma} \phi(z) \overline{\psi(z)} d\mu(z), \quad \phi, \psi \in L_2(\mu).$$

Seja $\phi_0(z), \phi_1(z), \phi_2(z), \dots$ um sistema de funções linearmente independentes (l.i.) em $L_2(\mu)$. É conveniente transformarmos este sistema de funções l.i. em



outro sistema de funções, também l.i., $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots$ tal que φ_n é uma combinação linear das $n + 1$ funções $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$, e

$$\langle \varphi_n, \varphi_m \rangle = \int_{\Gamma} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = 0, \quad m \neq n.$$

Este novo sistema de funções gera um sistema ortogonal de funções com relação à medida $d\mu$. Além disso, se

$$\|\varphi_n\|^2 = \langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = \int_{\Gamma} |\varphi_n(z)|^2 d\mu(z) = 1, \quad n \geq 0,$$

as funções φ_n são chamadas de ortonormais.

A matriz de Gram

$$G_n = \begin{pmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{pmatrix} \quad (2.1.1)$$

é Hermitiana e definida positiva, pois:

1. como $\langle \phi_k, \phi_l \rangle = \overline{\langle \phi_l, \phi_k \rangle}$, temos $G_n^H = \overline{G_n}^T = G_n$;
2. para um vetor não nulo $z^T = (z_0, z_1, \dots, z_n)$, temos

$$z^H G_n z = \overline{z}^T G_n z = \left\langle \sum_{k=0}^n z_k \phi_k, \sum_{k=0}^n z_k \phi_k \right\rangle.$$

Então, fazendo $\psi_n = \sum_{k=0}^n z_k \phi_k$, temos $z^H G_n z = \|\psi_n\|^2$ que é sempre não negativo e se anula somente quando $\psi_n \equiv 0$. Como as funções ϕ_n formam um conjunto l.i., ψ_n não pode ser a função nula. Conseqüentemente, temos que o determinante

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}$$

é real e positivo. Assim, podemos obter uma expressão para as funções ortonormais φ_n em termos das funções originais ϕ_n , dada pelo seguinte resultado.



Teorema 2.1.1. *As funções ortonormais φ_n são dadas por*

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \phi_0(z) & \phi_1(z) & \dots & \phi_n(z) \end{vmatrix}.$$

Demonstração: A linearidade implica que é suficiente mostrarmos que

$$\langle \varphi_n, \phi_k \rangle = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle = 1.$$

Temos que

$$\langle \varphi_n, \phi_k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_k \rangle & \langle \phi_1, \phi_k \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_k \rangle \end{vmatrix}.$$

Quando $0 \leq k \leq n-1$ a última linha deste determinante se torna igual a $(k+1)$ -ésima linha então o determinante é nulo. Para $k = n$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_n, \phi_n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} \begin{vmatrix} \langle \phi_0, \phi_0 \rangle & \langle \phi_1, \phi_0 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_0 \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \phi_0, \phi_{n-1} \rangle & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle \\ \langle \phi_0, \phi_n \rangle & \langle \phi_1, \phi_n \rangle & \dots & \langle \phi_n, \phi_n \rangle \end{vmatrix}, \\ &= \frac{\Delta_n}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}} = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Podemos também representar φ_n por

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \phi_n(z) + \psi_{n-1}(z), \quad (2.1.2)$$



onde ψ_{n-1} é uma combinação linear das n primeiras funções $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}$. Fazendo o produto interno concluímos que

$$\begin{aligned}\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle &= \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \langle \varphi_n, \phi_n \rangle + \langle \varphi_n, \psi_{n-1} \rangle, \\ &= \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}, \\ &= 1.\end{aligned}$$

■

De (2.1.2), concluímos também que o coeficiente do termo de maior grau de φ_n é dado por

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}.$$

Nosso interesse está em sistemas l.i. $\{\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots\} = \{1, z, z^2, \dots\}$ de monômios e, através desta base, queremos obter um sistema de polinômios ortogonais com relação a uma dada medida $d\mu$ positiva. Esse sistema será único se impusermos que o coeficiente do termos de maior grau é positivo. Dessa forma, construímos um sistema de polinômios $\{\varphi_n\}$ tal que

$$\int_{\Gamma} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\mu(z) = \delta_{m,n},$$

com $m, n > 0$ e $\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \dots$, $\kappa_n > 0$.

2.2 Propriedades Extremas

Uma das principais vantagens do trabalho com funções ortonormais é que elas podem ser usadas nas expansões de Fourier de funções em $L_2(\mu)$.

Seja $f \in L_2(\mu)$. Então podemos escrever a expansão de Fourier

$$f(z) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(z),$$

onde os coeficientes c_k são chamados coeficientes de Fourier. Multiplicando ambos os lados da expansão por $\overline{\varphi_n}$ e integrando com relação a $d\mu$ encontramos uma



expressão simples para os coeficientes de Fourier

$$c_n = \int_{\Gamma} f(z) \overline{\varphi_n(z)} d\mu(z) = \langle f, \varphi_n \rangle. \quad (2.2.3)$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned} |c_n| &\leq \int_{\Gamma} |f(z)| |\overline{\varphi_n(z)}| d\mu(z), \\ &\leq \left[\int_{\Gamma} |f(z)|^2 d\mu(z) \right]^{1/2} \left[\int_{\Gamma} |\overline{\varphi_n(z)}|^2 d\mu(z) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Como $\|\varphi_n\| = 1$, temos

$$|c_n| \leq \|f\|.$$

Concluimos daí que todos os coeficientes de Fourier são finitos.

Teorema 2.2.1. *Seja $f \in L_2(\mu)$. Considerando todos os polinômios q_n de grau no máximo n , a integral*

$$\int_{\Gamma} |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z)$$

atinge seu mínimo, quando q_n é a n -ésima soma parcial f_n da série de Fourier.

O mínimo é dado por

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2. \quad (2.2.4)$$

Demonstração: Como $z_0 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_0 = 2\operatorname{Re}\{z_0 \bar{z}_1\}$, para todo $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z) &= \int_{\Gamma} |f(z)|^2 d\mu(z) + \int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) \\ &\quad - 2\operatorname{Re} \int_{\Gamma} f(z) \overline{q_n(z)} d\mu(z). \end{aligned}$$

Escrevendo $q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z)$, temos

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \quad \text{e} \quad \int_{\Gamma} f(z) \overline{q_n(z)} d\mu(z) = \sum_{k=0}^n c_k \bar{a}_k.$$

Daí,

$$\int_{\Gamma} |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z) = \|f\|^2 + \sum_{k=0}^n [|a_k|^2 - 2\operatorname{Re}(c_k \bar{a}_k)]$$

e, como

$$\sum_{k=0}^n [|a_k|^2 - 2\operatorname{Re}(c_k \overline{a_k})] = \sum_{k=0}^n |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=0}^n |f_k|^2,$$

temos que

$$\int_{\Gamma} |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z) = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |f_k|^2 + \sum_{k=0}^n |a_k - c_k|^2.$$

Esta expressão é mínima quando $a_k = c_k$. Neste caso, o polinômio q_n torna-se a n -ésima soma parcial da série de Fourier para f e, o mínimo de

$$\int_{\Gamma} |f(z) - q_n(z)|^2 d\mu(z)$$

é dado por

$$\|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |c_k|^2.$$

■

Como consequência desse resultado, temos

$$\sum_{k=0}^n |c_k|^2 \leq \|f\|^2$$

e, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos a Desigualdade de Bessel

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2. \quad (2.2.5)$$

Usando a fórmula (2.2.3) para os coeficientes de Fourier, temos

$$\begin{aligned} f_n(z) &= \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(z) \\ &= \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)} f(\xi) d\mu(\xi) \end{aligned}$$

e, daí,

$$f_n(z) = \int_{\Gamma} K_n(z, \xi) f(\xi) d\mu(\xi),$$

onde $K_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}$ é chamado de núcleo. Se f é um polinômio de grau no máximo n , a soma parcial f_n coincide com f . Então, temos a propriedade

$$q_n(z) = \int_{\Gamma} K_n(z, \xi) q_n(\xi) d\mu(\xi),$$



para todo polinômio q_n de grau no máximo n . Por esta razão, frequentemente chamamos $K_n(z, \xi)$ de *núcleo reprodutivo*.

Teorema 2.2.2. *Suponhamos que o suporte da medida $d\mu$ contém no mínimo n pontos. Considerando todos os polinômios mônicos q_n de grau n , o mínimo, na norma $L_2(\mu)$, de*

$$\|q_n\| = \left[\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) \right]^{1/2},$$

é atingido quando $q_n(z) = \varphi_n(z)/\kappa_n$. O mínimo é igual a $1/\kappa_n$.

Demonstração: Todo polinômio mônico q_n de grau n pode ser escrito da seguinte forma

$$q_n(z) = \hat{\varphi}_n(z) + r_{n-1}(z),$$

onde $\hat{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x)/\kappa_n$ é o polinômio ortonormal mônico de grau n e r_{n-1} é um polinômio de grau no máximo $n - 1$. Então, pela ortogonalidade, temos

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\Gamma} |\hat{\varphi}_n(z)|^2 d\mu(z) + \int_{\Gamma} |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z).$$

Esta expressão é mínima quando

$$\int_{\Gamma} |r_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_{n-1}(z) = 0,$$

pois r_{n-1} tem no máximo $n - 1$ zeros e temos, no mínimo, n pontos no suporte.

Portanto, o mínimo é atingido quando

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) &= \int_{\Gamma} |\hat{\varphi}_n(z)|^2 d\mu(z), \\ \|q_n\|^2 &= \|\hat{\varphi}_n\|^2. \end{aligned}$$

Logo, o mínimo é $1/\kappa_n$. ■

Os próximos resultados apresentam propriedades extremas envolvendo o núcleo reprodutivo $K_n(z, \xi)$.

Teorema 2.2.3. *Considerando todos os polinômios q_n de grau no máximo n tal que $q_n(\xi) = 1$, a integral*

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z),$$



atinge o valor mínimo $[K_n(\xi, \xi)]^{-1}$ para o polinômio

$$\frac{\sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}}{\sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2} = \frac{K_n(z, \xi)}{K_n(\xi, \xi)}.$$

Demonstração: Podemos expressar o polinômio q_n como uma série de Fourier nos primeiros $n + 1$ polinômios ortonormais φ_k , $k = 0, 1, \dots, n$, isto é,

$$q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z).$$

Então,

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \sum_{k=0}^n |a_k|^2.$$

Como $q_n(\xi) = 1$, temos $\sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(\xi) = 1$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos

$$\sum_{k=0}^n |a_k|^2 \sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2 \geq 1.$$

Daí,

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \sum_{k=0}^n |a_k|^2 \geq \frac{1}{\sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2} = \frac{1}{K_n(\xi, \xi)}.$$

Quando ocorre a igualdade na expressão acima, a integral atinge o menor valor possível e isto ocorre quando em Cauchy-Schwartz há igualdade, ou seja, quando $a_k = c \overline{\varphi_k(\xi)}$, onde c é uma constante complexa. Daí, segue a restrição

$$c = \frac{1}{\sum_{k=0}^n |\varphi_k(\xi)|^2} = \frac{1}{K_n(\xi, \xi)}.$$

O polinômio q_n que minimiza a integral é

$$\begin{aligned} q_n(z) &= \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^n c \overline{\varphi_k(\xi)} \varphi_k(z) \\ &= \frac{K_n(z, \xi)}{K_n(\xi, \xi)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) &= \int_{\Gamma} \frac{|K_n(z, \xi)|^2}{|K_n(\xi, \xi)|^2} d\mu(z), \\ &= \frac{1}{|K_n(\xi, \xi)|^2} \int_{\Gamma} K_n(z, \xi) \overline{K_n(z, \xi)} d\mu(z).\end{aligned}$$

Substituindo o núcleo reprodutivo, obtemos

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\mu(z) = \frac{1}{K_n(\xi, \xi)}.$$

Portanto, o polinômio $K_n(z, \xi)/K_n(\xi, \xi)$ gera o valor mínimo $1/K_n(\xi, \xi)$. ■

2.3 Propriedades dos Zeros

No plano complexo, o suporte da medida $d\mu$ é dado por

$$\text{supp}(\mu) = \{z \in \mathbb{C} : \mu(B_{z, \epsilon}) > 0, \text{ para todo } \epsilon > 0\},$$

onde $B_{z, \epsilon}$ representa a bola aberta com centro em z e raio ϵ . Esse conjunto é fechado.

Um conjunto $G \subset \mathbb{C}$ é convexo se, para cada par de pontos $x, y \in G$, o segmento de reta que liga x e y é um subconjunto de G . Usando este conceito, definimos *envoltório convexo* (convex hull) de um conjunto $A \subset \mathbb{C}$, denotado por $Co(A)$, como sendo o menor conjunto convexo contendo A .

Se A é fechado, então $Co(A)$ é a intersecção de todo semi-plano fechado que contém A .

Os resultados que se seguem apresentam importantes propriedades sobre a localização dos zeros dos polinômios ortogonais.

Teorema 2.3.1. (Fejér) *Se φ_n é o polinômio ortonormal de grau n com relação à medida $d\mu$, então todos os zeros de φ_n pertencem a $Co(\text{supp}(\mu))$.*

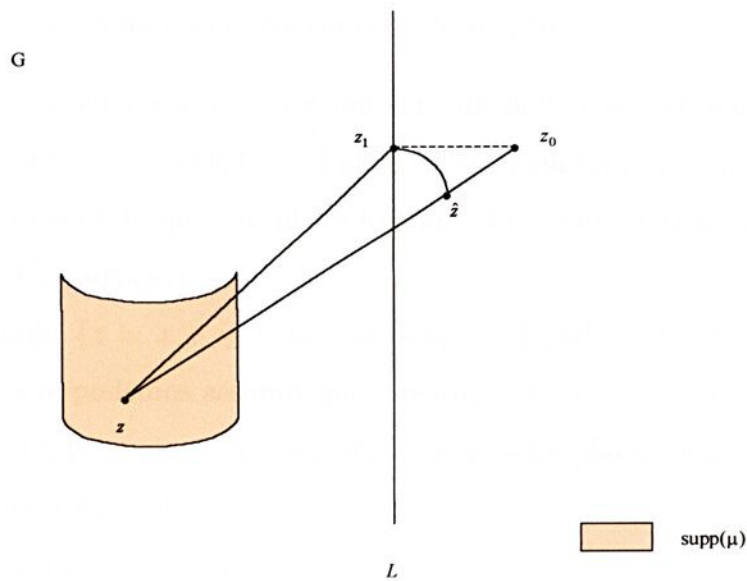
Demonstração: Suponhamos que z_0 é um zero de φ_n que não pertence a $Co(\text{supp}(\mu))$. Então, podemos escrever

$$\hat{\varphi}_n(z) = (z - z_0)p_{n-1}(z),$$



onde p_{n-1} é um polinômio mônico de grau $n - 1$. Como $z_0 \notin Co(supp(\mu))$ e $supp(\mu)$ é fechado, existe um semi-plano fechado G tal que G contém $supp(\mu)$ e $z_0 \notin G$.

A fronteira desse plano é uma linha L que separa $supp(\mu)$ e z_0 . Seja z_1 o ponto em L mais próximo de z_0 e $\hat{z}$ a intersecção da linha contendo z e z_0 e o círculo de centro z e raio $|z - z_1|$.



Então para todo $z \in supp(\mu)$ vale

$$|z - z_0| = |z - z_1| + |\hat{z} - z_0|.$$

Assim,

$$|z - z_0| > |z - z_1| \text{ para todo } z \in supp(\mu).$$

Portanto,

$$\int_{\Gamma} |(z - z_1)p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) < \int_{\Gamma} |(z - z_0)p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) = \int_{\Gamma} |\hat{\varphi}_n(z)|^2 d\mu(z),$$

o que contradiz a propriedade extrema dado no Teorema 2.2.2. Portanto, $z_0 \in Co(supp(\mu))$. Como z_0 é um zero arbitrário de φ_n , concluímos que todos os zeros de φ_n estão em $Co(supp(\mu))$. ■

Teorema 2.3.2. *Se $Co(supp(\mu))$ não é um segmento de reta e $supp(\mu)$ é um conjunto infinito, então os zeros dos polinômios ortogonais com relação à medida $d\mu$ não estão na fronteira do envoltório convexo de $supp(\mu)$.*

Demonstração: Suponhamos que z_0 é um zero do polinômio ortonormal φ_n localizado na fronteira do $Co(supp(\mu))$. Então, existe uma linha L contendo z_0 tal que $supp(\mu)$ está contido no semi-plano fechado G limitado pela linha L , ou seja, $z_0 \in L$ e $z_0 \in Co(supp(\mu))$.

Seja L o conjunto $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : ax + by = c\}$ onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $supp(\mu) \subset G = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : ax + by \geq c\}$, assim o ponto $z_0 - (a + ib)$ pertence ao semi-plano complementar $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : ax + by < c\}$.

Como z_0 é um zero de φ_n , temos

$$\hat{\varphi}_n(z) = (z - z_0)p_{n-1}(z),$$

onde p_{n-1} é um polinômio mônico de grau $n - 1$. Consideremos o polinômio

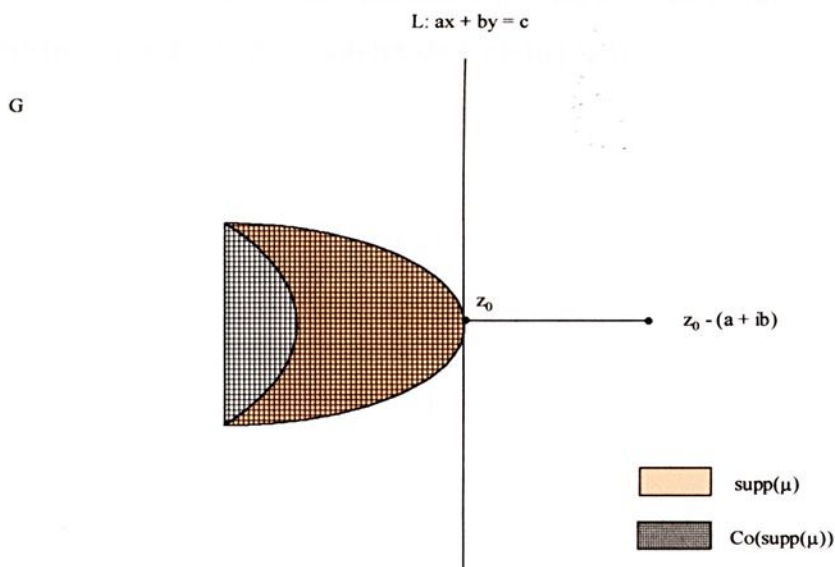
$$q_n(z) = [z - z_0 + t(a + ib)]p_{n-1}(z),$$

com $t \in \mathbb{R}$. Então, pela propriedade extrema do Teorema 2.2.2, a integral

$$I(t) = \int_{\Gamma} [(x - x_0 + at)^2 + (y - y_0 + bt)^2] |p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z)$$

atinge o mínimo quando $t = 0$, isto é, $I'(0) = 0$. Mas,

$$I'(t) = 2 \int_{\Gamma} [(x - x_0 + at)a + (y - y_0 + bt)b] |p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z).$$



Como $ax_0 + by_0 = c$ e, para todo $z = (x + yi) \in \text{supp}(\mu)$, temos $ax + by \geq c$, segue

$$I'(0) = 2 \int_{\Gamma} [ax + by - c] |p_{n-1}(z)|^2 d\mu(z) \geq 0,$$

Então $I'(0)$ se anula se, e somente se,

$$[ax + by - c] |p_{n-1}(z)|^2 = 0,$$

em quase todo ponto de $d\mu$. Isso significa que essa função se anula nas raízes de p_{n-1} ou nos pontos onde $ax + by - c = 0$, isto é, em todos os pontos de L . Assim, $\text{supp}(\mu)$ deve ser formado por um subconjunto de $L \cup Z_n$, onde Z_n é o conjunto formado pelos zeros de p_{n-1} . Dessa forma, existem duas possibilidades: ou todos os pontos de $\text{supp}(\mu)$ estão na reta L ou pelo menos um ponto de $\text{supp}(\mu)$ está em Z_n . A primeira possibilidade não satisfaz a hipótese. Para a

segunda possibilidade, o conjunto $Co(supp(\mu))$ será um polígono com um lado em L e vértices nos pontos de $supp(\mu)$ que estão em Z_n . Traçando agora uma reta L_1 pelo ponto $z_1 \in Z_n$ e procedendo de modo análogo, concluimos que existem infinitos pontos na reta L_1 , contradizendo o que foi demonstrado. Portanto, não podem existir zeros de φ_n na fronteira de $Co(supp(\mu))$. ■

Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário

1.1 Matrizes de Toeplitz



Capítulo 3

Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário

Neste capítulo, são estudados os polinômios ortogonais no círculo unitário, que também são conhecidos como polinômios de Szegő, e um sistema de relações de recorrência para estes polinômios. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados em Van Assche [17] e na dissertação de Mestrado [2].

3.1 Matrizes de Toeplitz

Suponhamos que $d\tilde{\nu}$ seja uma medida positiva em $[0, 2\pi)$. Então, esta medida induz uma medida denotada por $d\nu$ no círculo unitário $C = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$ através de

$$\int_C f(z) d\nu(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\nu(e^{i\theta}) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\tilde{\nu}(\theta).$$

Sem perda de generalidade, vamos supor que $d\nu$ é uma medida de probabilidade, isto é, $\int_C d\nu(z) = 1$.

Os elementos da matriz de Gram são

$$\langle z^k, z^l \rangle = \int_C z^k \overline{z^l} d\nu(z) = \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)\theta} d\tilde{\nu}(\theta) = c_{k-l},$$



onde c_k , $k \in \mathbb{Z}$, são os momentos trigonométricos da medida $d\nu$.

Os momentos trigonométricos formam a matriz

$$T_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ c_{-2} & c_{-1} & \dots & c_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n} & c_{-n+1} & \dots & c_0 \end{pmatrix},$$

que é Hermitiana pois $c_{k-l} = \overline{c_{l-k}}$ e é chamada de Matriz de Toeplitz. Os polinômios ortogonais no círculo unitário são dados, em função desta matriz, por

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_n \\ c_{-1} & c_0 & \dots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{-n+1} & c_{-n+2} & \dots & c_{-1} \\ 1 & z & \dots & z^n \end{vmatrix} = \kappa_n z^n + \dots,$$

onde $\Delta_n = \det T_n$. O coeficiente do termo de maior grau é dado por

$$\kappa_n = \sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}},$$

e os polinômios ortogonais mônicos no círculo unitário serão representados por

$$S_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n}.$$

Os coeficientes $S_n(0) = a_n$, para $n \in \mathbb{N}$ são muito informativos e freqüentemente chamados de *coeficientes de reflexão*.

Quando a medida $d\tilde{\nu}$ é simétrica no sentido

$$\int_0^\pi z^k d\tilde{\nu}(\theta) = \int_\pi^{2\pi} \overline{z^k} d\tilde{\nu}(\theta), \quad k \in \mathbb{N},$$

os momentos trigonométricos são representados por

$$c_k = 2 \int_0^\pi \cos(k\theta) d\tilde{\nu}(\theta)$$

e, portanto, são todos reais. Dessa forma, os polinômios φ_n terão coeficientes reais se a medida $d\tilde{\nu}$ for simétrica.

Para o estudo dos polinômios ortogonais no círculo unitário, é conveniente trabalharmos com polinômios ortogonais recíprocos. Se $q_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ é um polinômio de grau no máximo n , então seu polinômio recíproco é dado por

$$q_n^*(z) = \sum_{k=0}^n \overline{b_k} z^{n-k} = z^n \overline{q_n}(1/z),$$

onde a notação $\overline{q_n}$ indica que somente os coeficientes de q_n são conjugados.

A operação $*$ depende do grau do polinômio q_n de forma que devemos especificar para qual n estamos usando esta operação. Note que

$$[q_n^*(z)]^* = q_n(z).$$

No círculo unitário, temos ainda a seguinte representação para os polinômios recíprocos

$$q_n^*(z) = z^n \overline{q_n(z)}, \text{ para } z = e^{i\theta}.$$

O próximo resultado relaciona o núcleo reprodutivo aos polinômios ortogonais no círculo unitário e seu coeficiente do termo de maior grau.

Teorema 3.1.1. *Se $K_n(z, \xi) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(\xi)}$ é o núcleo reprodutivo para polinômios ortogonais no círculo unitário, então*

$$K_n(z, 0) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(0)} = \kappa_n \varphi_n^*(z), \quad (3.1.1)$$

$$K_n(0, 0) = \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \kappa_n^2. \quad (3.1.2)$$

Demonstração: Seja q_n um polinômio mônico de grau n , então q_n^* é um polinômio de grau no máximo n tal que $q_n^*(0) = 1$. Como estamos trabalhando no círculo unitário, temos que

$$|q_n^*(z)|^2 = |q_n(z)|^2.$$

Daí, o mínimo de

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\nu(z),$$

quando consideramos todos os polinômios mônicos de grau no máximo n , é igual ao mínimo de

$$\int_{\Gamma} |q_n^*(z)|^2 d\nu(z),$$

quando consideramos todos os polinômios q_n^* de grau no máximo n tal que $q_n^*(0) = 1$. Do Teorema 2.2.2, concluimos que

$$\int_{\Gamma} |q_n(z)|^2 d\nu(z) = \frac{1}{\kappa_n^2},$$

mas, como os mínimos da norma em $L_2(\mu)$ para os polinômios q_n e q_n^* são iguais, pelo Teorema 2.2.3 obtemos

$$K_n(0, 0) = \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 = \kappa_n^2.$$

Os polinômios que minimizam essas normas também são iguais. Logo,

$$K_n(z, 0) = \sum_{k=0}^n \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(0)} = \kappa_n \varphi_n^*(z).$$

■

Recordando que S_n é o polinômio mônico ortogonal no círculo unitário e que os zeros $z_{j,n}$ desse polinômio pertencem ao envoltório convexo do círculo unitário, ou seja, ao disco unitário aberto, temos que

$$a_n = S_n(0) = \prod_{k=1}^n z_{k,n} \Rightarrow |a_n| < 1,$$

pois, no círculo unitário, $|z_{k,n}| \leq 1$, para $k = 1, \dots, n$. Temos também que

$$\kappa_n^2 - \kappa_{n-1}^2 = \sum_{k=0}^n |\varphi_k(0)|^2 - \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_k(0)|^2 = |\varphi_n(0)|^2 = \kappa_n^2 |S_n(0)|^2.$$

Então,

$$\left(\frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} \right)^2 = 1 - |S_n(0)|^2 = 1 - |a_n|^2. \quad (3.1.3)$$

3.2 Relação de Recorrência

Os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos. Na verdade, esses polinômios satisfazem a um sistema de duas relações de recorrência.

Teorema 3.2.1. *Se φ_n são polinômios ortogonais no círculo unitário, então*

$$\kappa_{n-1}z\varphi_{n-1}(z) = \kappa_n\varphi_n(z) - \varphi_n(0)\varphi_n^*(z), \quad (3.2.1)$$

$$\kappa_{n-1}\varphi_n(z) = \kappa_nz\varphi_{n-1}(z) + \varphi_n(0)\varphi_{n-1}^*(z). \quad (3.2.2)$$

Para os polinômios ortogonais mônicos S_n , temos

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) + a_nS_{n-1}^*(z), \quad (3.2.3)$$

$$(1 - |a_n|^2)zS_{n-1}(z) = S_n(z) - a_nS_n^*(z). \quad (3.2.4)$$

Demonstração: De (3.1.1), temos

$$\varphi_n(z)\overline{\varphi_n(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(0)} = \kappa_n\varphi_n^*(z)$$

e

$$\kappa_n\varphi_n^*(z) - \kappa_{n-1}\varphi_{n-1}^*(z) = \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(0)}. \quad (3.2.5)$$

Fazendo $z = 1/z$, conjugando os coeficientes e tomando a operação-* para polinômios de grau n em (3.2.5), obtemos (3.2.1).

Para obtermos (3.2.2), vamos eliminar φ_n^* de (3.2.1) e (3.2.5). Assim,

$$\varphi_n(z)|\varphi_n(0)|^2 - \kappa_n^2\varphi_n(z) + \kappa_n\kappa_{n-1}z\varphi_{n-1}(z) = -\kappa_{n-1}\varphi_n(0)\varphi_{n-1}^*(z).$$

Usando $\kappa_n^2 = \kappa_{n-1}^2 + |\varphi_n(0)|^2$ chegamos a (3.2.2).

Para obtermos as relações (3.2.4) e (3.2.3), basta fazermos $\varphi_n(z) = \kappa_n S_n(z)$ em (3.2.1) e (3.2.2) e usarmos (3.1.3). ■

Teorema 3.2.2. *Se $\varphi_n(z)$ são polinômios ortogonais no círculo unitário, então*

$$K_{n-1}(z, \xi) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)} = \frac{\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)}}{1 - z\bar{\xi}}. \quad (3.2.6)$$



Demonstração: Eliminando φ_n de (3.2.1) e (3.2.2), temos

$$\kappa_{n-1}\varphi_n^*(z) = \overline{\varphi_n(0)}z\varphi_{n-1}(z) + \kappa_n\varphi_{n-1}^*(z). \quad (3.2.7)$$

Avaliando (3.2.2) nos pontos z e ξ e multiplicando-se os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)} &= \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n-1}^2}z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} + \frac{|\varphi_n(0)|^2}{\kappa_{n-1}^2}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} \\ &\quad + \frac{\kappa_n\overline{\varphi_n(0)}}{\kappa_{n-1}^2}z\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} + \frac{\kappa_n\varphi_n(0)}{\kappa_{n-1}^2}\bar{\xi}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}. \end{aligned}$$

Avaliando (3.2.7) nos pontos z e ξ e multiplicando-se as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned} \varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} &= \frac{|\varphi_n(0)|^2}{\kappa_{n-1}^2}z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} + \frac{\kappa_n\overline{\varphi_n(0)}}{\kappa_{n-1}^2}z\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} \\ &\quad + \frac{\kappa_n\varphi_n(0)}{\kappa_{n-1}^2}\bar{\xi}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} + \frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n-1}^2}\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)}. \end{aligned}$$

Subtraindo-se as duas equações acima e usando $\kappa_n^2 = \kappa_{n-1}^2 + |\varphi_n(0)|^2$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)} &= \left[\frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n-1}^2} - \frac{|\varphi_n(0)|^2}{\kappa_{n-1}^2} \right] \varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} \\ &\quad - \left[\frac{\kappa_n^2}{\kappa_{n-1}^2} - \frac{|\varphi_n(0)|^2}{\kappa_{n-1}^2} \right] z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} \\ &= \varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} - z\bar{\xi}\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}. \end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se $\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)}$, segue que

$$\begin{aligned} (1 - z\bar{\xi})\varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} &= \left[\varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)} \right] \\ &\quad - \left[\varphi_{n-1}^*(z)\overline{\varphi_{n-1}^*(\xi)} - \varphi_{n-1}(z)\overline{\varphi_{n-1}(\xi)} \right]. \end{aligned}$$

Somando-se os termos $[1 - z\bar{\xi}]\varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)}$ para $k = 0, 1, \dots, n-2$ em ambos os lados da equação acima, temos

$$(1 - z\bar{\xi}) \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k(z)\overline{\varphi_k(\xi)} = \varphi_n^*(z)\overline{\varphi_n^*(\xi)} - \varphi_n(z)\overline{\varphi_n(\xi)},$$

o que nos dá o resultado esperado. ■



3.3 Relação com Polinômios Ortogonais em $[-1, 1]$

Como vimos no capítulo 1, uma sequência de polinômios reais

$$p_n(x) = \gamma_n x^n + \lambda_n x^{n-1} + \cdots, \quad \gamma_n > 0,$$

ortogonais com relação à medida $d\mu$ satisfaz

$$\int_{-1}^1 p_n(x) p_m(x) d\mu(x) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geq 0.$$

À partir da medida $d\mu$, podemos definir outra medida $d\nu$ em $[0, 2\pi)$ por

$$d\nu(e^{i\theta}) = d\tilde{\nu}(\theta) = \frac{1}{2} |d\mu(\cos \theta)|.$$

Se $d\mu(x) = w(x)dx$ então $d\tilde{\nu}(\theta) = (1/2)w(\cos \theta) |\sin \theta| d\theta$ e, se $d\mu$ é uma medida de probabilidade, então $d\nu$ também é uma medida de probabilidade. Logo, a medida em $[0, 2\pi)$ induz uma medida $d\nu$ no círculo unitário, como vimos na seção 3.1, e existe uma sequência de polinômios ortonormais

$$\varphi_n(z) = \kappa_n z^n + \cdots, \quad \kappa_n > 0,$$

tal que

$$\int_0^{2\pi} \varphi_n(z) \overline{\varphi_m(z)} d\tilde{\nu}(\theta) = \delta_{m,n}, \quad m, n \geq 0.$$

Os correspondentes polinômios mônicos são

$$\hat{p}_n(x) = \frac{p_n(x)}{\gamma_n} \quad \text{e} \quad S_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{\kappa_n}.$$

Os polinômios em $[-1, 1]$ e no círculo unitário são relacionados por

Teorema 3.3.1. (Szegő) *Os polinômios ortogonais no círculo unitário S_n com relação à medida $d\nu$ têm coeficientes reais. Se*

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

de forma que $x = \cos \theta$ e $z = e^{i\theta}$, então

$$p_n(x) = \frac{\kappa_{2n}}{\sqrt{2[1 + a_{2n}]}} [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})]. \quad (3.3.1)$$



Demonstração: Como a medida $d\tilde{\nu}$ é simétrica, os momentos trigonométricos são reais. Então, os coeficientes dos polinômios ortogonais são reais.

Tomemos os polinômios de Chebyshev de primeira espécie com $x = \cos \theta$ dados por

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \quad n = 0, 1, \dots$$

Como

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2},$$

obtemos

$$T_n(x) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Primeiramente, mostraremos que $z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1})$ é um polinômio de grau n em x . Se tomarmos

$$S_{2n}(z) = \sum_{k=0}^{2n} d_k z^k,$$

temos

$$z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n} d_k [z^{n-k} + z^{-(n-k)}] = 2 \sum_{k=0}^{2n} d_k T_{|n-k|}(x),$$

pois

$$z^{n-k} + z^{-(n-k)} = 2T_{n-k}(x)$$

e

$$z^{k-n} + z^{-(k-n)} = 2T_{k-n}(x),$$

$k = 0, 1, \dots, n$. Logo, esse polinômio é de grau n em x . Considerando $k = 0$ e $k = 2n$, obtemos que o coeficiente do termo de maior grau é $2^n[1 + a_{2n}]$, já que $d_0 = a_{2n}$ e $d_{2n} = 1$.

Provaremos agora que este polinômio é ortogonal, em $L_2(\mu)$, a todo polinômio $T_k(x)$, com $k < n$. Sabemos que



$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] T_k(x) d\mu(x) &= \int_{\pi}^0 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] \frac{z^k + z^{-k}}{2} d\mu(\cos \theta) \\ &= \int_{\pi}^0 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] z^k \frac{1}{2} d\mu(\cos \theta) \\ &\quad + \int_{\pi}^0 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] z^{-k} \frac{1}{2} d\mu(\cos \theta),\end{aligned}$$

Temos que

$$z = 1/w \iff \alpha = 2\pi - \theta.$$

Usando este resultado na segunda integral, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] T_k(x) d\mu(x) &= \int_0^{\pi} [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] z^k \frac{1}{2} d\mu(\cos \theta) \\ &\quad + \int_{\pi}^{2\pi} [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] z^k \frac{1}{2} d\mu(\cos \theta) \\ &= \int_0^{2\pi} [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] z^k d\tilde{\nu}(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} z^{-n+k} S_{2n}(z) d\tilde{\nu}(\theta) + \int_0^{2\pi} z^{n+k} \overline{S_{2n}(z)} d\tilde{\nu}(\theta) \\ &= 0, \text{ para } 0 \leq k < n.\end{aligned}$$

Para $k = n$ usaremos o mesmo raciocínio. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] T_n(x) d\mu(x) &= \int_0^{2\pi} [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] z^n d\tilde{\nu}(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} S_{2n}(z) d\tilde{\nu}(\theta) + \int_0^{2\pi} z^{2n} S_{2n}(z^{-1}) d\tilde{\nu}(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} z^{2n} \overline{S_{2n}(z)} d\tilde{\nu}(\theta).\end{aligned}$$

Escrevendo $z^{2n} = S_{2n}(z) + b_0 S_{2n-1}(z) + \dots + b_{2n-1} S_0(z)$, pela ortonormalidade temos que

$$\int_{-1}^1 [z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1})] T_n(x) d\mu(x) = \frac{1}{\kappa_{2n}^2}.$$

Agora, tomando

$$z^{-n} S_{2n}(z) + z^n S_{2n}(z^{-1}) = 2[1 + S_{2n}(0)] T_n(x) + q_{n-1}(x),$$



temos que a norma de $z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1})$ é $\kappa_{2n}^{-1}\sqrt{2[1+a_{2n}]}$ e, considerando que $p_0(x) = 1$, temos

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1})}{||z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1})||} \\ &= \frac{\kappa_{2n}}{\sqrt{2(1+a_{2n})}}[z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1})]. \end{aligned}$$

■

O próximo resultado relaciona os coeficientes de recorrência dos polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ com os coeficientes de reflexão dos polinômios ortogonais no círculo unitário.

Teorema 3.3.2. *Os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ estão relacionados com os coeficientes de reflexão da seguinte maneira*

$$2\tau_n = [(1 - a_{2n})(1 - a_{2n-1}^2)(1 + a_{2n-2})]^{1/2}, \quad (3.3.2)$$

$$2\nu_n = a_{2n-1}(1 - a_{2n}) - a_{2n+1}(1 + a_{2n}). \quad (3.3.3)$$

Se tomarmos $R_n(x) = p_{n+1}(x)/p_n(x)$, os coeficientes de reflexão podem ser dados por

$$a_{2n} = R_n(1) - R_n(-1) - 1 \quad e \quad a_{2n+1} = \frac{R_n(1) + R_n(-1)}{R_n(1) - R_n(-1)}. \quad (3.3.4)$$

Demonstração: Sabemos que $p_n(x) = \gamma_n x^n + \lambda_n x^{n-1} + \dots$. Comparando os coeficientes do termo de maior grau dos polinômios p_n e dos polinômios (3.3.1), temos que

$$\gamma_n = 2^{n-1/2} \kappa_{2n} \sqrt{1 + a_{2n}}.$$

Da relação de recorrência de três termos para os polinômios ortogonais na reta real, temos $\tau_n = \gamma_{n-1}/\gamma_n$. Então,

$$\frac{1}{\tau_n} = 2 \frac{\kappa_{2n}}{\kappa_{2n-2}} \frac{\sqrt{1 + a_{2n}}}{\sqrt{1 + a_{2n-2}}}. \quad (3.3.5)$$

Daí, usando a relação (3.1.3), temos

$$(1 - |a_{2n}|^2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{1 - a_{2n}^2} \sqrt{1 - a_{2n}^2}},$$

de onde conseguimos (3.3.2). A relação (3.3.3) é obtida comparando-se os coeficientes de x^{n-1} .

Para $x = 1$ temos $z = 1$ e, para $x = -1$, temos $z = -1$. Então, se aplicarmos estes valores em (3.3.1), obtemos

$$p_n(1) = \frac{\sqrt{2}\kappa_{2n}S_{2n}(1)}{\sqrt{1+a_{2n}}} \quad \text{e} \quad p_n(-1) = (-1)^n \frac{\sqrt{2}\kappa_{2n}S_{2n}(-1)}{\sqrt{1+a_{2n}}}.$$

Da relação de recorrência (3.2.4), segue que

$$S_{n+1}(1) = (1 - |a_{n+1}|^2)S_n(1) + a_{n+1}S_{n+1}^*(1).$$

Daí,

$$S_{n+1}(1) = (1 + a_{n+1})S_n(1). \quad (3.3.6)$$

Analogamente, obtemos

$$S_{n+1}(-1) = -[1 - (-1)^n a_{n+1}]S_n(-1). \quad (3.3.7)$$

Fazendo $R_n(1) = p_{n+1}(1)/p_n(1)$ e usando (3.3.5) e (3.3.6), temos

$$2R_n(1) = (1 + a_{2n})(1 + a_{2n-1}). \quad (3.3.8)$$

Da mesma forma, fazendo $R_n(-1) = p_{n+1}(-1)/p_n(-1)$ e usando (3.3.5) e (3.3.7), obtemos

$$-2R_n(-1) = (1 + a_{2n})(1 - a_{2n+1}). \quad (3.3.9)$$

Somando-se (3.3.8) e (3.3.9), segue que

$$R_n(1) - R_n(-1) = 1 + a_{2n}.$$

Daí,

$$a_{2n} = R_n(1) - R_n(-1) - 1.$$

Subtraindo-se (3.3.8) de (3.3.9), segue que

$$R_n(1) + R_n(-1) = a_{2n+1}(1 + a_{2n}).$$

Daí,

$$a_{2n+1} = \frac{R_n(1) + R_n(-1)}{R_n(1) - R_n(-1)}.$$

■

Capítulo 4

Combinações Lineares de Polinômios Ortogonais que Geram Fórmulas de Quadratura Positivas

No capítulo 1, vimos que, quando escolhemos os nós da fórmula de quadratura interpolatória como sendo os zeros dos polinômios ortogonais de grau n , conseguimos precisão $2n - 1$. Franz Peherstorfer [10] considerou os polinômios $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \in \mathbb{P}_n$, ortogonais a todo polinômio de grau menor ou igual a $n - r - 1$, para $0 \leq r < n$, dado como a combinação linear

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \hat{p}_{n-j}(x)$$

dos polinômios ortogonais mônicos $\hat{p}_n$ em $[-1, 1]$, e considerou a fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} f(x_{j,n}) + \mathbb{E}_n(f),$$

sobre os zeros $-1 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < 1$ dos polinômios $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$. Assim, a precisão da fórmula de quadratura acima é $2n - r - 1$ e será chamada de $(2n - r - 1, n, d\mu)$ positiva quando os pesos, $\lambda_{j,n}$, para $j = 0, 1, \dots, n$, forem positivos.



4.1 Resultados Preliminares

Daremos aqui algumas informações adicionais sobre polinômios ortogonais em $[-1, 1]$ e ortogonais no círculo unitário $|z| < 1$. Alguns desses resultados estão relacionados aos polinômios associados aos ortogonais em $[-1, 1]$, dados por

$$\hat{p}_n^{(1)}(x) = \frac{1}{m_0} \int_{-1}^1 \frac{\hat{p}_{n+1}(x) - \hat{p}_{n+1}(t)}{x - t} d\mu(t), \quad (4.1.1)$$

onde $m_0 = \int_{-1}^1 d\mu(x)$. Foi mostrado em Krylov [8] que os polinômios $\hat{p}_n^{(1)}$ são mônicos, de grau n e satisfazem a mesma relação de recorrência que os polinômios ortogonais, isto é,

$$\hat{p}_n^{(1)}(x) = (x - \beta_{n+1})\hat{p}_{n-1}^{(1)}(x) - \alpha_{n+1}\hat{p}_{n-2}^{(1)}(x), \quad n \geq 2,$$

com $\hat{p}_0^{(1)}(x) = 1$ e $\hat{p}_1^{(1)}(x) = x - \beta_1$. Com estes dados, pode-se obter resultados que caracterizam as fórmulas de quadratura positivas.

Lema 4.1.1. *Sejam $r, n \in \mathbb{N}$, com $n \geq r$, e seja $\delta_j \in \mathbb{R}$ para $j = 0, 1, \dots, r$, $\delta_0 \neq 0$. Então, $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ gera uma fórmula de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$ positiva se, e somente se, $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ tem n zeros simples em $(-1, 1)$ e os zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ e*

$$O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \frac{1}{m_0} \int_{-1}^1 \frac{P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] - P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; t]}{x - t} d\mu(t) \quad (4.1.2)$$

se entrelaçam.

Demonstração: Temos que

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \hat{p}_{n-j}(x) \quad \text{e} \quad O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \hat{p}_{n-1-j}^{(1)}(x).$$

Sabemos que os pesos, $\lambda_{j,n}$, da fórmula de quadratura interpolatória sobre os n zeros do polinômio $P[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ são dados por

$$\lambda_{j,n} = \frac{1}{P'_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x_{j,n}]} \int_{-1}^1 \frac{P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]}{x - x_{j,n}} d\mu(x).$$



Usando (4.1.2) e o fato de $x_{j,n}$ ser um zero de $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$, temos que

$$\lambda_{j,n} = m_0 \frac{O_{n-1}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x_{j,n}]}{P'_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x_{j,n}]}.$$

Como os n zeros de $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ são distintos e pertencem à $(-1, 1)$, a condição $\lambda_{j,n} > 0$ é equivalente ao entrelaçamento dos zeros de $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ e $O_{n-1}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$, ou seja, se $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ gera uma fórmula de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$ positiva então, os zeros dos polinômios $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ e $O_{n-1}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ se entrelaçam.

Por outro lado, considerando que $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ tem n zeros simples em $(-1, 1)$ e que os zeros de $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ e $O_{n-1}[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ se entrelaçam, temos $\lambda_{j,n} > 0$, ou seja, $P_n[\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r; x]$ gera uma fórmula de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$ positiva. ■

Como foi visto no capítulo anterior, os polinômios mônicos S_n , ortogonais no círculo unitário com relação a medida positiva $d\nu$, dada por

$$d\nu(e^{i\theta}) = d\tilde{\nu}(\theta) = \begin{cases} -d\mu(\cos \theta), & \text{para } \theta \in [0, \pi] \\ d\mu(\cos \theta), & \text{para } \theta \in (\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad (4.1.3)$$

satisfazem (3.2.3).

Considerando $\tilde{S}_n(0) = -a_n$ em (3.2.3), obtemos uma nova seqüência de polinômios $\{\tilde{S}_n\}$ que satisfazem

$$\tilde{S}_n(z) = z\tilde{S}_{n-1}(z) - a_n\tilde{S}_{n-1}^*(z), \quad n \geq 1, \quad (4.1.4)$$

com $\tilde{S}_0(z) = 1$. Esta seqüência recebe o nome de seqüência de polinômios de Szegő associados e mantém a propriedade $|a_n| < 1$. Conseqüentemente, os seus zeros também estão localizados dentro do disco unitário aberto.

Como os polinômios de Szegő S_n são reais e ortogonais no círculo unitário, temos

$$2\operatorname{Re}[z^{-n+1}S_{2n-1}(z)] = z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1}).$$

Tomando $S_{2n-1}(z) = \sum_{k=0}^{2n-1} d_k z^k$, temos

$$z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n-1} d_k [z^{-(n-1-k)} + z^{n-1-k}].$$



Partindo do polinômio de Chebyshev de primeira espécie com $x = \cos \theta$ e usando a transformação $x = (z + z^{-1})/2$, temos

$$T_n(x) = \cos n\theta = \frac{z^n + z^{-n}}{2}.$$

Como estamos trabalhando com polinômios mônicos, então

$$\hat{T}_n(x) = \frac{z^n + z^{-n}}{2^n}.$$

Daí, usando os mesmos argumentos do Teorema de Szegő 3.3.1, podemos escrever

$$z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{2n-1} 2^{n-1-k} d_k \hat{T}_{|n-1-k|}(x),$$

que é um polinômio de grau n .

De (3.3.1) temos que os polinômios mônicos $\{\hat{p}_n\}$, ortogonais com relação à medida $d\mu$, satisfazem

$$\hat{p}_n(x) = c_1[z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1})],$$

onde c_1 é uma constante. Mas, da relação de recorrência de S_n , que é real, temos

$$z^{-n}S_{2n}(z) + z^nS_{2n}(z^{-1}) = (1 + a_{2n})[z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1})].$$

Daí,

$$\hat{p}_n(x) = c_2[z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1})].$$

Como podemos escrever

$$z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1}) = 2^n \hat{T}_n(x) + q_{n-1}(x),$$

temos

$$\hat{p}_n(x) = 2^{-n}[z^{-(n-1)}S_{2n-1}(z) + z^{n-1}S_{2n-1}(z^{-1})],$$

que pode ser dado por

$$\hat{p}_n(x) = 2^{-n+1} \operatorname{Re}[z^{-n+1}S_{2n-1}(z)] \quad (4.1.5)$$

com $x = (z + z^{-1})/2$ e $z = e^{i\theta}$. De modo análogo, pode-se mostrar que

$$\hat{p}_{n-1}^{(1)}(x) = 2^{-n+1} \frac{\operatorname{Im}[z^{-n+1} \tilde{S}_{2n-1}(z)]}{\sin \theta}, \quad (4.1.6)$$

onde $x = (z + z^{-1})/2$ e $z = e^{i\theta}$.

Lema 4.1.2. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{Z}$, com $2|l| \leq n$. Seja $G_n(z) = z^n + \dots$ um polinômio real mônico com todos os seus zeros no disco unitário aberto $|z| < 1$. Então, o polinômio cosseno $\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\}$ e o polinômio seno $\operatorname{Im}\{z^{-l}G_n(z)\}$ com $z = e^{i\theta}$ e $x = \cos \theta$ para $\theta \in [0, \pi]$ têm, respectivamente, $n - l$ zeros ϕ_j em $(0, \pi)$ e $n - l - 1$ zeros ψ_j em $(0, \pi)$, que se entrelaçam, isto é,*

$$0 < \phi_1 < \psi_1 < \phi_2 < \psi_2 < \dots < \psi_{n-l-1} < \phi_{n-l} < \pi.$$

Demonstração: Seja $G_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$, $b_k \in \mathbb{R}$ e $b_n = 1$. Então, para $z = e^{i\theta}$ temos

$$z^{-l}G_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k [\cos(k-l)\theta + i \sin(k-l)\theta].$$

Daí,

$$\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\} = 0 \iff \sum_{k=0}^n b_k \cos(k-l)\theta = 0.$$

Logo,

$$\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\} = 0 \iff \sum_{k=0}^n b_k \cos(k-l)\theta = -\sum_{k=0}^n b_k \cos(l-k)\theta = 0. \quad (4.1.7)$$

Por outro lado,

$$\sum_{k=0}^n b_k \sin(k-l)\theta = -\sum_{k=0}^n b_k \sin(l-k)\theta. \quad (4.1.8)$$

Multiplicando (4.1.8) por i e somando a (4.1.7), obtemos

$$z^{-l}G_n(z) = -\sum_{k=0}^n b_k [\cos(l-k)\theta + i \sin(l-k)\theta] = -\overline{z^{-l}G_n(z)}.$$

Daí,

$$z^{-2l} \frac{G_n(z)}{\overline{G_n(z)}} = -1$$

que implica em

$$z^{n-2l} \frac{G_n(z)}{G_n^*(z)} = -1.$$

Logo,

$$\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\} = 0 \iff z^{n-2l} \frac{G_n(z)}{G_n^*(z)} = -1.$$

Usando a relação

$$\arg[a] + \arg[b] = \arg[ab], \quad \text{para } a, b \in \mathbb{C},$$

temos que

$$\arg[z^{n-2l}] + \arg\left[\frac{G_n(z)}{G_n^*(z)}\right] = \arg\left[z^{n-2l} \frac{G_n(z)}{G_n^*(z)}\right].$$

Portanto,

$$\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\} = 0 \iff \arg[z^{n-2l}] + \arg\left[\frac{G_n(z)}{G_n^*(z)}\right] = (2k-1)\pi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, como

$$\operatorname{Im}\{z^{-l}t_n(z)\} = 0 \iff \sum_{k=0}^n b_k \sin(k-l)\theta = 0,$$

temos

$$\operatorname{Im}\{z^{-l}G_n(z)\} = 0 \iff z^{n-2l} \frac{G_n(z)}{G_n^*(z)} = 1.$$

Então,

$$\operatorname{Im}\{z^{-l}G_n(z)\} = 0 \iff \arg[z^{n-2l}] + \arg\left[\frac{G_n(z)}{G_n^*(z)}\right] = 2k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Estas relações permitem concluir que $\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\}$ e $\operatorname{Im}\{z^{-l}G_n(z)\}$ têm $2(n-l)$ zeros em $[0, 2\pi)$ e que estes zeros se entrelaçam. Daí, o polinômio cosseno $\operatorname{Re}\{z^{-l}G_n(z)\}$ tem $n-l$ zeros em $(0, \pi)$ e, lembrando que o polinômio seno $\operatorname{Im}\{z^{-l}G_n(z)\}$ tem um zero em $\theta = 0$ e outro em $\theta = \pi$, temos que este polinômio tem $n-l-1$ zeros em $(0, \pi)$ pela simetria dos polinômios trigonométricos ■

4.2 Fórmulas de Quadratura Positivas

Nesta seção, trabalhamos com os polinômios $Q_{k,n}$, $k = 1, 2, \dots, n$, definidos através dos coeficientes de reflexão para os polinômios de Szegő. Usando a transformação de Szegő

$$x = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

veremos relações entre os polinômios ortogonais reais e os polinômios ortogonais no círculo unitário, bem como seus respectivos associados, que foram estabelecidas por Franz Peherstorfer [10]. A partir dessas relações, o autor apresenta resultados que garantem a positividade das fórmulas de quadratura.

Definição 4.2.1. *Seja o polinômio $Q_{k,2n-1}(z) = z^k + \dots$, para $k = 1, 2, \dots, 2n-1$, $n \in \mathbb{N}$ definido pela relação de recorrência*

$$Q_{k,2n-1}(z) = zQ_{k-1,2n-1}(z) - a_{2n-1-k}Q_{k-1,2n-1}^*(z), \quad (4.2.1)$$

onde $Q_{0,2n-1}(z) = 1$ e os coeficientes a_{2n-1-k} são os parâmetros que aparecem na relação de recorrência (3.2.3).

O próximo resultado relaciona os polinômios $\hat{p}_n$ e $\hat{p}_n^{(1)}$ e os polinômios S_n e $\tilde{S}_n$, respectivamente, usando a sequência de polinômios $\{Q_{k,n}\}$.

Lema 4.2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}$. Então,*

(a)

$$\prod_{j=0}^{k-1} (1 - |a_{2n-2-j}|) \leq |Q_{k,2n-1}^*(z)| \leq \prod_{j=0}^{k-1} (1 + |a_{2n-2-j}|)$$

para $|z| \leq 1$, onde $0 \leq k \leq 2n-1$. Além disso, $Q_{k,2n-1}(z)$ tem todos os seus zeros em $|z| < 1$.

(b) *seja $0 \leq k \leq 2n-1$. Então, para $z = e^{i\theta}$, $x = \cos \theta$ e $\theta \in [0, \pi]$, temos*

$$\hat{p}_n(x) = 2^{-n+1} \operatorname{Re}\{z^{-n+1} Q_{2k,2n-1}(z) S_{2(n-k)-1}(z)\}$$

e

$$\hat{p}_{n-1}^{(1)}(x) = \frac{2^{-n+1} \operatorname{Im}\{z^{-n+1} Q_{2k,2n-1}(z) \tilde{S}_{2(n-k)-1}(z)\}}{\sin(\theta)}.$$



Demonstração:

(a) De (4.2.1) temos que

$$Q_{k,2n-1}^*(z) = Q_{k-1,2n-1}^*(z) - a_{2n-1-k} z Q_{k-1,2n-1}(z). \quad (4.2.2)$$

Fazendo $k = 1$ em (4.2.2), obtemos

$$|Q_{1,2n-1}^*(z)| \leq 1 + |a_{2n-2}| \quad \text{para } |z| \leq 1$$

e, lembrando que $Q_{0,2n-1}(z) = 1$, segue que

$$0 < 1 - |a_{2n-2}| \leq |Q_{1,2n-1}^*(z)| \leq 1 + |a_{2n-2}| \quad \text{para } |z| \leq 1. \quad (4.2.3)$$

Como $|Q_{1,2n-1}^*(z)| > 0$ para $|z| \leq 1$, concluímos que o zero de $Q_{1,2n-1}^*(z)$ não pertence a $|z| \leq 1$. Daí, o zero de $Q_{1,2n-1}(z)$ pertence a $|z| < 1$.

Novamente, fazendo $k = 2$ em (4.2.2), obtemos

$$\left| \frac{Q_{2,2n-1}^*(z)}{Q_{1,2n-1}^*(z)} \right| = \left| 1 + a_{2n-3} \frac{Q_{1,2n-1}(z)}{Q_{1,2n-1}^*(z)} \right|.$$

Como o zero de $Q_{1,2n-1}^*$ está dentro do disco unitário aberto, segue que

$$\left| \frac{Q_{1,2n-1}(z)}{Q_{1,2n-1}^*(z)} \right| < 1, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Daí,

$$0 < 1 - |a_{2n-3}| \leq \left| \frac{Q_{2,2n-1}^*(z)}{Q_{1,2n-1}^*(z)} \right| \leq 1 + |a_{2n-3}|, \quad \text{para } |z| < 1.$$

Então, usando (4.2.3), concluímos que

$$0 < [1 - |a_{2n-2}|][1 - |a_{2n-3}|] \leq |Q_{2,2n-1}^*(z)| \leq [1 + |a_{2n-2}|][1 + |a_{2n-3}|].$$

De modo análogo, concluímos que os zeros de $Q_{2,2n-1}(z)$ estão em $|z| < 1$. Continuando com o mesmo raciocínio, obtemos o resultado desejado.

(b) Usando (3.2.3) e (4.2.2) é possível relacionar S_n e $Q_{k,n}$ da seguinte forma:

$$z S_{2n-1}(z) + S_{2n-1}^*(z) = z Q_{k,2n-1}(z) S_{2n-1-k}(z) + Q_{k,2n-1}^*(z) S_{2n-1-k}^*(z), \quad (4.2.4)$$



e, usando (4.1.4) e (4.2.2), podemos relacionar $\tilde{S}_n$ e $Q_{k,n}$,

$$z\tilde{S}_{2n-1}(z) - \tilde{S}_{2n-1}^*(z) = zQ_{k,2n-1}(z)\tilde{S}_{2n-1-k}(z) - Q_{k,2n-1}^*(z)\tilde{S}_{2n-1-k}^*(z). \quad (4.2.5)$$

Dado qualquer polinômio real G_{2n-1} de grau $2n-1$, para $z = e^{i\theta}$ temos

$$2\operatorname{Re}[z^{-n+1}G_{2n-1}(z)] = z^{-n}[zG_{2n-1}(z) + G_{2n-1}^*(z)]$$

e

$$2i\operatorname{Im}[z^{-n+1}G_{2n-1}(z)] = z^{-n}[zG_{2n-1}(z) - G_{2n-1}^*(z)].$$

Então,

$$2\operatorname{Re}[z^{-n+1}S_{2n-1}(z)] = z^{-n}[zS_{2n-1}(z) + S_{2n-1}^*(z)] \quad (4.2.6)$$

e

$$2i\operatorname{Im}[z^{-n+1}\tilde{S}_{2n-1}(z)] = z^{-n}[z\tilde{S}_{2n-1}(z) - \tilde{S}_{2n-1}^*(z)]. \quad (4.2.7)$$

De (4.2.4) e (4.2.6), segue que

$$\operatorname{Re}[z^{-n+1}S_{2n-1}(z)] = \operatorname{Re}[z^{-n+1}Q_{k,2n-1}(z)S_{2n-1-k}(z)]$$

e, de (4.2.5) e (4.2.7),

$$\operatorname{Im}[z^{-n+1}\tilde{S}_{2n-1}(z)] = \operatorname{Im}[z^{-n+1}Q_{k,2n-1}(z)\tilde{S}_{2n-1-k}(z)].$$

Logo, das relações (4.1.5) e (4.1.6), concluímos a demonstração do Teorema. ■

O próximo resultado garante a positividade das fórmulas de quadratura $(2n-r-1, n, d\mu)$ a partir da análise da localização dos zeros dos polinômios q_{2r} .

Teorema 4.2.1. *Sejam $r, n \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r \in \mathbb{R}$ e $\delta_0 \neq 0$. Então, $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ gera uma fórmula de quadratura $(2n-r-1, n, d\mu)$ positiva se*

$$q_{2r}(z) = \sum_{j=0}^r 2^j \delta_j z^j Q_{2r-2j, 2(n-j)-1}(z)$$

tem todos os seus zeros no disco unitário aberto $|z| < 1$.



Demonstração: Temos que

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \hat{p}_{n-j}(x) \quad \text{e} \quad O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \hat{p}_{n-1-j}^{(1)}(x).$$

Lembrando que $z = e^{i\theta}$, $x = \cos\theta$, $\theta \in [0, \pi)$, e, usando o Lema 4.2.1 b), temos

$$\begin{aligned} P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] &= \sum_{j=0}^r \delta_j \hat{p}_{n-j}(x) \\ &= \sum_{j=0}^r 2^{-n+1+j} \delta_j \operatorname{Re} \left[z^{-n+1+j} Q_{2k_j, 2n-2j-1}(z) S_{2n-2j-2k_j-1}(z) \right] \\ &= 2^{-n+1} \operatorname{Re} \left[z^{-n+1} \left(\sum_{j=0}^r 2^j \delta_j z^j Q_{2k_j, 2n-2j-1}(z) S_{2n-2j-2k_j-1}(z) \right) \right], \end{aligned}$$

onde $0 \leq k_j \leq 2n - 2j - 1$. Fazendo $k_j = r - j$, temos

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = 2^{-n+1} \operatorname{Re} \left[z^{-r} q_{2r}(z) z^{-(n-r)+1} S_{2(n-j)-1}(z) \right],$$

onde

$$q_{2r}(z) = \sum_{j=0}^r 2^j \delta_j z^j Q_{2r-2j, 2(n-j)-1}(z). \quad (4.2.8)$$

Da mesma forma, temos

$$O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = 2^{-n+1} \frac{\operatorname{Im}[z^{-r} q_{2r}(z) z^{-(n-r)+1} \tilde{S}_{2(n-j)-1}(z)]}{\sin \theta},$$

onde q_{2r} é dado por (4.2.8).

Suponhamos agora que todos os zeros de q_{2r} estão em $|z| < 1$. Como, o mesmo acontece com os zeros de $S_{2(n-r)-1}$ segue, do Lema 4.1.2 que $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ tem n zeros simples em $(-1, 1)$.

Usando a relação

$$\operatorname{Re}[a] \operatorname{Re}[b] + \operatorname{Im}[a] \operatorname{Im}[b] = \operatorname{Re}[a\bar{b}], \quad a, b \in \mathbb{C},$$

temos

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) S_{2(n-r)-1}(z)] \operatorname{Re}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) \tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)] \\ &\quad + \operatorname{Im}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) S_{2(n-r)-1}(z)] \operatorname{Im}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) \tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= |q_{2r}(z)|^2 \operatorname{Re}[S_{2(n-r)-1}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)}] \\
 &= |q_{2r}(z)|^2 \prod_{k=1}^{2(n-r-1)} (1 - a_k^2) \\
 &= c |q_{2r}(z)|^2 > 0.
 \end{aligned}$$

pois, $\operatorname{Re}[S_{2(n-m)-1}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-m)-1}(z)}] = \prod_{k=1}^{2(n-m-1)} (1 - a_k^2)$ (veja apêndice A). Daí, temos que

$$\begin{aligned}
 &P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \operatorname{Re}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) \tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)] \\
 &\quad + \sin^2(\theta) \operatorname{Im}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) S_{2(n-r)-1}(z)] O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \\
 &= 2^{-(n+1)} c |q_{2r}(z)|^2.
 \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}
 &P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \operatorname{Re}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) \tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)] \\
 &\quad + \sin^2(\theta) r_{n-1}(x) O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \\
 &= 2^{-(n+1)} c |q_{2r}(z)|^2, \tag{4.2.9}
 \end{aligned}$$

onde

$$r_{n-1}(x) = \frac{\operatorname{Im}[z^{-(n-1)} q_{2r}(z) S_{2(n-r)-1}(z)]}{\sin \theta}.$$

Como $x = (z + z^{-1})/2$, $z = e^{i\theta}$ e $\theta \in [0, \pi]$, pelo Lema 4.1.2, temos que os zeros $-1 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < 1$ de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ e os zeros de r_{n-1} se entrelaçam.

Sejam $x_{j,n} = \cos \theta_{j,n}$ os zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$. Então, de (4.2.9), temos que

$$r_{n-1}(x_{j,n}) O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{j,n}] = 2^{-(n-1)} \frac{c |q_{2r}(z_{j,n})|^2}{\sin^2 \theta_{j,n}} > 0,$$

onde $z_{j,n} = \cos \theta_{j,n} + i \sin \theta_{j,n}$ e $\theta_{j,n} = \arccos(x_{j,n})$. Como

$$r_{n-1}(x_{j,n}) O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{j,n}] > 0,$$

temos que $r_{n-1}(x_{j,n})$ e $O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{j,n}]$ têm o mesmo sinal. Então, usando o fato de que os zeros de r_{n-1} e $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ se entrelaçam, concluimos que os zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ e $O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ também se entrelaçam. ■



O corolário apresentado a seguir trata da positividade das fórmulas de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$ a partir dos coeficientes de reflexão dos polinômios de Szegő.

Corolário 4.2.1. *Seja $n, r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r \in \mathbb{R}$ e $\delta_0 \neq 0$. Tome $A_0 = |\delta_0|$ e*

$$A_j = 2^j |\delta_j| \frac{\prod_{k=0}^{2r-1-2j} (1 + |a_{2(n-j-1)-k}|)}{\prod_{k=0}^{2r-1} (1 - |a_{2(n-1)-k}|)}, \quad (4.2.10)$$

para $j = 1, 2, \dots, r$ e seja $j_k \in \{0, 1, \dots, r\}$, $j_0 := 0 < j_1 < \dots < j_{r^*}$, os índices para os quais $A_{j_k} \neq 0$, para $k = 1, \dots, r^*$ e $A_j = 0$ para $j \in \{1, 2, \dots, r\} - \{j_0, j_1, \dots, j_{r^*}\}$. Então, cada uma das seguintes condições,

$$(a) \sum_{k=1}^r A_{j_k} < A_0$$

$$(b) A_{j_k} \geq 2A_{j_{k+1}} \text{ para } k = 0, 1, \dots, r^* - 2 \text{ e } A_{j_{r^*-1}} > A_{j_r},$$

é suficiente para que $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ gere uma fórmula de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$ positiva.

Demonstração: Primeiramente vamos mostrar que a condição (b) implica na condição (a). De fato, aplicando sucessivamente as desigualdades dadas em (b), temos

$$A_{j_0} \geq 2A_{j_1} = A_{j_1} + A_{j_1} \geq A_{j_1} + 2A_{j_2} = \dots > \sum_{k=1}^{r^*} A_{j_k},$$

que é exatamente a condição (a).

Agora, mostraremos que a condição (a) implica que

$$q_{2r}^*(z) := \sum_{j=0}^r 2^j \delta_j z^j Q_{2r-2j, 2(n-j)-1}^*(z),$$

tem todos os seus zeros em $|z| > 1$, que equivale ao fato de q_{2r} ter todos os seus zeros em $|z| < 1$.

Vamos supor o contrário, ou seja, que q_{2r}^* tem um zero ξ em $|z| \leq 1$. Então,

$$\sum_{j=0}^r 2^j \delta_j \xi^j Q_{2r-2j, 2(n-j)-1}^*(\xi) = 0.$$

Daí, usando o fato que $Q_{2r,2n-1}^*$ não tem zeros em $|z| \leq 1$, temos

$$\begin{aligned}\delta_0 Q_{2r,2n-1}^*(\xi) &= - \sum_{j=1}^r 2^j \delta_j \xi^j Q_{2r-2j,2(n-j)-1}^*(\xi), \\ \delta_0 &= - \frac{\sum_{j=1}^r 2^j \delta_j \xi^j Q_{2r-2j,2(n-j)-1}^*(\xi)}{Q_{2r,2n-1}^*(\xi)}, \\ |\delta_0| &\leq \sum_{j=1}^r |2^j \delta_j| |\xi^j| \frac{|Q_{2r-2j,2(n-j)-1}^*(\xi)|}{|Q_{2r,2n-1}^*(\xi)|}.\end{aligned}$$

Usando o Lema 4.2.1 obtemos

$$|\delta_0| \leq \sum_{j=1}^r |\xi^j| \left[2^j |\delta_j| \frac{|\prod_{k=0}^{2r-2j-1} (1 + |a_{(n-j-1)-k}|^2)|}{|\prod_{k=0}^{2r-1} (1 - |a_{(n-1)-k}|^2)|} \right].$$

Portanto,

$$A_0 \leq \sum_{j=1}^r A_j,$$

que contradiz a hipótese (a). Logo q_{2r}^* não possui zeros em $|z| \leq 1$. Então, q_{2r} tem todos os seus zeros em $|z| < 1$. Dessa forma, pelo Lema 4.1.1, $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ gera uma fórmula de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$ positiva. ■

Capítulo 5

Fórmulas de Quadratura Positivas com Medidas Simétricas

Neste capítulo aplicamos a transformação de Delsarte e Genin

$$x = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2}$$

(veja Zhedanov [18]) para obtermos polinômios ortogonais reais e simétricos através dos polinômios de Szegő. Para isso, usamos os polinômios para-ortogonais e os polinômios de Szegő associados.

Com base no trabalho de Peherstorfer [10], estudado no capítulo 4, construimos uma nova seqüência de polinômios $\{H_{k,n}\}$ e, através desta seqüência, obtemos os polinômios $\tilde{h}_{2r}$ que fornecem condições necessárias para a positividade das fórmulas de quadratura $(2n - r - 1, n, d\mu)$.

5.1 Polinômios Para-Ortogonais

Como já foi visto no capítulo 3, dada uma medida positiva $d\nu$ no círculo unitário $C = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi)\}$, os polinômios de Szegő podem ser definidos por

$$\int_C S_n(z) \overline{S_m(z)} d\nu(z) = 0, \quad n \neq m.$$



É importante relembrar que os coeficientes de reflexão $a_n = S_n(0)$, $n \geq 1$, são menores do que um em módulo e que os zeros dos polinômios S_n estão localizados dentro do disco unitário aberto.

De (3.2.3), podemos facilmente escrever

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) + a_n z S_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (5.1.1)$$

com $S_0(z) = S_0^*(z) = 1$

Os polinômios $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$ onde $|w_n| = 1$ são chamados polinômios para-ortogonais e foram introduzidos por Jones, Njåstad e Thron [5]. Os zeros destes polinômios estão localizados no círculo unitário.

Neste capítulo também trabalhamos com seqüências de polinômios de Szegő cujos coeficientes de reflexão (e, conseqüentemente, todos os coeficientes) são reais. A simetria da medida $d\nu(z^{-1}) = -d\nu(z)$ é condição necessária e suficiente para que os polinômios S_n sejam reais.

Vamos considerar dois casos especiais de polinômios para-ortogonais

$$S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + a_n}, \quad n \geq 1 \quad (5.1.2)$$

e

$$S_n^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - a_n}, \quad n \geq 1. \quad (5.1.3)$$

Os denominadores foram escolhidos de forma a obtermos polinômios mônicos. Usando (3.2.3) e (5.1.1), temos

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= \frac{S_{n+1}(z) + S_{n+1}^*(z)}{1 + a_{n+1}} \\ &= z S_n(z) + S_n^*(z). \end{aligned}$$

Somando-se e subtraindo-se $z S_n^*(z)$ e $S_n(z)$, obtemos

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z + 1)[S_n(z) + S_n^*(z)] - S_n(z) - z S_n^*(z).$$

Multiplicando-se e dividindo-se $1 + a_n$, chegamos em

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z + 1) \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + a_n} + a_n(z + 1) \frac{S_n(z)}{1 + a_n} + \frac{(z + 1)a_n S_n^*(z)}{1 + a_n} - S_n(z) - z S_n^*(z) \\ &= (z + 1) S_n^{(1)}(z) + \left[\frac{(z + 1)a_n}{1 + a_n} - 1 \right] S_n(z) + \left[\frac{(z + 1)a_n}{1 + a_n} - z \right] S_n^*(z) \end{aligned}$$



e, daí,

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)S_n^{(1)}(z) + \left[\frac{za_n - 1}{1 + a_n} \right] S_n(z) + \left[\frac{a_n - z}{1 + a_n} \right] S_n^*(z). \quad (5.1.4)$$

Assim, usando (3.2.3) e (5.1.1), temos que

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1 + a_{n-1})(1 - a_n)zS_{n-1}^{(1)}(z), \quad (5.1.5)$$

que é a relação de recorrência para os polinômios $S_n^{(1)}$, sendo $a_0 = 1$ e as condições iniciais $S_0^{(1)}(z) = 1$ e $S_1^{(1)}(z) = z + 1$. Analogamente, temos que a relação de recorrência para $S_n^{(2)}$ é

$$S_{n+1}^{(2)}(z) = (z+1)S_n^{(2)}(z) - (1 - a_{n+1})(1 + a_n)zS_{n-1}^{(2)}(z), \quad (5.1.6)$$

com as condições iniciais $S_0^{(2)}(z) = 1$ e $S_1^{(2)}(z) = z - 1$.

Considerando agora os polinômios

$$R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + a_n} \quad (5.1.7)$$

e

$$R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{1}{z-1}S_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z-1} \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - a_n}, \quad (5.1.8)$$

para $n \geq 0$, obtemos

$$2S_n(z) = (1 + a_n)R_n^{(1)}(z) + (1 - a_n)(z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \quad (5.1.9)$$

Tomando (5.1.1), somando-se e subtraindo-se $S_n^*(z) + a_n S_n(z)$, temos

$$\begin{aligned} 2zS_{n-1}(z) &= (1 - a_n) \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - a_n^2} + (1 + a_n) \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - a_n^2} \\ &= S_n^{(1)}(z) + S_n^{(2)}(z) \end{aligned}$$

e, daí,

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \quad (5.1.10)$$

Sabemos que todo polinômio g_n real de grau n no círculo unitário satisfaz

$$2\operatorname{Re}[z^{-n/2}g_n(z)] = \frac{g_n(z) + g_n^*(z)}{z^{n/2}} \quad (5.1.11)$$



e

$$2i\text{Im}[z^{-n/2}g_n(z)] = \frac{g_n(z) - g_n^*(z)}{z^{n/2}}. \quad (5.1.12)$$

Logo, usando (5.1.7) e (5.1.11), temos

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{2\text{Re}[z^{-n/2}S_n(z)]}{z^{-n/2}[1 + a_n]} \text{ para } z = e^{i\theta}.$$

De modo análogo, usando (5.1.8) e (5.1.12), temos

$$R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{1}{z-1} \frac{2i\text{Im}[z^{-n/2}S_n(z)]}{z^{-n/2}[1 - a_n]} \text{ para } z = e^{i\theta}.$$

Foi mostrado em Bracciali, Silva e Sri Ranga [1], que os polinômios $R_n^{(i)}$, para $i = 1, 2$, satisfazem

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4\alpha_{n+1}^{(i)}R_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1,$$

com $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z+1$ e,

$$\alpha_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1 + a_{n-1})(1 - a_n) > 0$$

e

$$\alpha_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1 - a_n)(1 + a_{n+1}) > 0,$$

para $n \geq 1$.

Usando a transformação de Delsarte e Genin

$$x = x(z) = \frac{z^{1/2} + z^{-1/2}}{2}, \quad (5.1.13)$$

temos, da relação de recorrência para $R_n^{(i)}$, que os polinômios

$$P_n^{(i)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(i)}(z), \quad n \geq 1.$$

satisfazem, para $i = 1, 2$, à relação de recorrência

$$P_{n+1}^{(i)}(x) = xP_n^{(i)}(x) - \alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 1, \quad (5.1.14)$$

com $P_0^{(i)}(x) = 1$ e $P_1^{(i)}(x) = x$.



Também foi mostrado em Bracciali, Silva e Sri Ranga [1] que a sequência $\{P_n^{(i)}\}$ é mônica e ortogonal com relação à medida $d\mu^{(i)}(x)$, onde $d\mu^{(1)}(x) = -d\nu(z)$ e $d\mu^{(2)}(x) = -(1-x^2)d\nu(z)$, para $x = (z^{1/2} + z^{-1/2})/2$.

O principal objetivo deste trabalho, considerado neste capítulo, é estudar as fórmulas de quadratura interpolatórias com relação à medida $d\mu^{(1)}$ baseadas nos zeros dos polinômios

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j P_{n-j}^{(1)}(x)$$

Lembramos que, de (4.1.1), os polinômios associados

$$O_n(x) = \frac{1}{m_0} \int_{-1}^1 \frac{P_{n+1}^{(1)}(x) - P_{n+1}^{(1)}(t)}{x-t} d\mu^{(1)}(t),$$

onde $m_0 = \int_{-1}^1 d\mu^{(1)}(x)$, satisfazem à relação de recorrência

$$O_n(x) = xO_{n-1}(x) - \alpha_{n+1}^{(1)}O_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

com $O_0(x) = 1$ e $O_1(x) = x$.

5.2 Alguns Resultados usando Polinômios de Szegő Associados

Vimos no capítulo anterior que os polinômios de Szegő associados são dados pela relação de recorrência

$$\tilde{S}_n(z) = z\tilde{S}_{n-1}(z) - a_n\tilde{S}_{n-1}^*(z), \quad (5.2.1)$$

com $\tilde{S}_0(z) = \tilde{S}_0^*(z) = 1$.

De modo análogo ao que foi feito para os polinômios de Szegő, a sequência de polinômios de Szegő associados gera

$$\tilde{R}_n^{(1)}(z) = \frac{\tilde{S}_n(z) + \tilde{S}_n^*(z)}{1 + \tilde{S}_n(0)} = \frac{\tilde{S}_n(z) + \tilde{S}_n^*(z)}{1 - a_n}$$



e

$$\tilde{R}_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{1}{z-1} \frac{\tilde{S}_n(z) - \tilde{S}_n^*(z)}{1 - \tilde{S}_n(0)} = \frac{1}{z-1} \frac{\tilde{S}_n(z) - \tilde{S}_n^*(z)}{1 + a_n},$$

que satisfazem, para $i = 1, 2$, à relação de recorrência

$$\tilde{R}_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)\tilde{R}_n^{(i)}(z) - 4\tilde{\alpha}_{n+1}^{(i)}\tilde{R}_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \quad (5.2.2)$$

onde

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1 - a_{n-1})(1 + a_n) > 0$$

e

$$\tilde{\alpha}_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1 - a_{n+1})(1 + a_n) > 0.$$

Usando (5.1.11), temos, para $z = e^{i\theta}$,

$$\tilde{R}_n^{(1)}(z) = \frac{2\operatorname{Re}[z^{-n/2}\tilde{S}_n(z)]}{z^{-n/2}[1 - a_n]}, \quad n \geq 1.$$

Como $z-1 = z^{1/2}(z^{1/2} - z^{-1/2}) = 2iz^{1/2}\sin(\theta/2)$, para $z = e^{i\theta}$ e de (5.1.12) temos

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{n-1}^{(2)}(z) &= \frac{1}{z-1} \frac{2i\operatorname{Im}[z^{-n/2}\tilde{S}_n(z)]}{z^{-n/2}(1 + a_n)} \\ &= \frac{1}{z^{-(n-1)/2}} \frac{\operatorname{Im}[z^{-n/2}\tilde{S}_n(z)]}{[1 + a_n]\sin(\theta/2)}. \end{aligned}$$

De (5.2.2), temos que os polinômios $\tilde{P}_n^{(i)}(x) = (4z)^{-n/2}\tilde{R}_n^{(i)}(z)$, para $i = 1, 2$, satisfazem

$$\tilde{P}_{n+1}^{(i)}(x) = x\tilde{P}_n^{(i)}(x) - \tilde{\alpha}_{n+1}^{(i)}\tilde{P}_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 1,$$

com $\tilde{P}_0^{(i)}(x) = 1$ e $\tilde{P}_1^{(i)}(x) = x$.

Comparando as relações de recorrência de O_n e $\tilde{P}_n^{(2)}$, como $\alpha_{n+2}^{(1)} = \tilde{\alpha}_{n+1}^{(2)}$, temos que $O_n = \tilde{P}_n^{(2)}$ para $n \geq 0$. Daí,

$$\begin{aligned} O_{n-1}(x) &= \tilde{P}_{n-1}^{(2)}(x) \\ &= (4z)^{-(n-1)/2}\tilde{R}_{n-1}^{(2)}(z) \\ &= \frac{2^{-(n-1)}\operatorname{Im}[z^{-n/2}\tilde{S}_n(z)]}{1 + a_n \sin(\theta/2)}, \quad \text{para } n \geq 1. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$



5.3 Os Polinômios $H_{k,n}$

Definição 5.3.1. *Sejam os polinômios $H_{k,n}(z) = z^k + \dots$, $n \in \mathbb{N}$, definidos pela relação de recorrência*

$$H_{k,n}(z) = zH_{k-1,n}(z) + za_{n+1-k}H_{k-1,n}^*(z) \quad (5.3.1)$$

para $k = 1, 2, \dots, n$, onde $H_{0,n}(z) = 1$ e $a_{n+1-k} = S_{n+1-k}(0)$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Teorema 5.3.1.

$$H_{k,n}(z)S_{n-k}(z) + H_{k,n}^*(z)S_{n-k}^*(z) = S_n(z) + S_n^*(z), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Demonstração: De (5.3.1), temos

$$H_{k,n}^*(z) = H_{k-1,n}^*(z) + a_{n+1-k}H_{k-1,n}(z), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (5.3.2)$$

Daí, usando as relações (3.2.3) e (5.3.2),

$$\begin{aligned} H_{k,n}(z)S_{n-k}(z) + H_{k,n}^*(z)S_{n-k}^*(z) &= H_{k-1,n}(z)[zS_{n-k}(z) + a_{n+1-k}S_{n-k}^*(z)] \\ &\quad + H_{k-1,n}^*(z)[S_{n-k}^*(z) + za_{n+1-k}S_{n-k}(z)] \\ &= H_{k-1,n}(z)S_{n+1-k}(z) + H_{k-1,n}^*(z)S_{n+1-k}^*(z). \end{aligned}$$

Continuando com o mesmo raciocínio, obtemos

$$H_{k,n}(z)S_{n-k}(z) + H_{k,n}^*(z)S_{n-k}^*(z) = H_{0,n}(z)S_n(z) + H_{0,n}^*(z)S_n^*(z).$$

Como $H_{0,n}(z) = H_{0,n}^*(z) = 1$, chegamos ao resultado esperado. ■

Do Teorema 5.3.1 e usando (5.1.11), segue que

$$\operatorname{Re}[z^{-n/2}S_n(z)] = \operatorname{Re}[z^{-n/2}H_{k,n}(z)S_{n-k}(z)]$$

e, como $P_n^{(1)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(1)}(z)$, temos

$$P_n^{(1)}(x) = \frac{2^{-(n-1)}}{1 + a_n} \operatorname{Re}[z^{-n/2}H_{k,n}(z)S_{n-k}(z)], \quad n \geq 1 \quad (5.3.3)$$

para qualquer k tal que $0 \leq k \leq n$.



Teorema 5.3.2.

$$0 < 1 - |a_{n+1-k}| \leq \left| \frac{H_{k,n}^*(z)}{H_{k-1,n}^*(z)} \right| \leq 1 + |a_{n+1-k}|$$

para $|z| \leq 1$ e os zeros de $H_{k,n}$ estão em $|z| < 1$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Demonstração: Fazendo $k = 1$ em (5.3.2), temos

$$0 < 1 - |a_n| \leq \left| \frac{H_{1,n}^*(z)}{H_{0,n}^*(z)} \right| \leq 1 + |a_n|, \quad |z| < 1.$$

Daí, $|H_{1,n}^*(z)| > 0$ para $|z| < 1$. Segue que o zero do polinômio $H_{1,n}^*(z)$ está fora do disco unitário e, então, o zero do polinômio $H_{1,n}(z)$ está no interior do disco unitário aberto.

Fazendo $k = 2$ em (5.3.2), obtemos

$$\left| \frac{H_{2,n}^*(z)}{H_{1,n}^*(z)} \right| = \left| 1 + a_{n-1} \frac{H_{1,n}(z)}{H_{1,n}^*(z)} \right|.$$

Como o zero do polinômio $H_{1,n}$ está dentro do disco unitário aberto, então

$$\left| \frac{H_{1,n}(z)}{H_{1,n}^*(z)} \right| < 1, \quad |z| < 1.$$

Portanto,

$$0 < 1 - |a_{n-1}| \leq \left| \frac{H_{2,n}^*(z)}{H_{1,n}^*(z)} \right| \leq 1 + |a_{n-1}|.$$

Como $|H_{2,n}^*(z)| > 0$ para $|z| < 1$, temos que os zeros de $H_{2,n}(z)$ estão dentro do disco unitário aberto. Continuando com o mesmo raciocínio, chegamos ao resultado desejado. ■

Teorema 5.3.3.

$$H_{k,n}(z)\tilde{S}_{n-k}(z) - H_{k,n}^*(z)\tilde{S}_{n-k}^*(z) = \tilde{S}_n(z) - \tilde{S}_n^*(z).$$

A demonstração é análoga à do Teorema 5.3.1.

Do Teorema 5.3.3, temos que

$$\operatorname{Im}[z^{-n/2}\tilde{S}_n(z)] = \operatorname{Im}[z^{-n/2}H_{k,n}(z)\tilde{S}_{n-k}(z)].$$

Então, de (5.2.3), obtemos

$$O_{n-1}(x) = 2^{-(n-1)} \frac{\operatorname{Im}[z^{-n/2}H_{k,n}(z)\tilde{S}_{n-k}(z)]}{[1 + a_n] \sin(\theta/2)}, \quad n \geq 1, \quad (5.3.4)$$

para $0 \leq k \leq n$.



5.4 Algumas Considerações sobre Fórmulas de Quadratura

Dada a medida $d\mu^{(1)}(x) = -d\nu(z)$, para $2x = (z^{1/2} + z^{-1/2})$, definida no intervalo $[-1, 1]$, consideremos a fórmula de quadratura baseada nos zeros do polinômio

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j P_{n-j}^{(1)}(x) \quad (5.4.1)$$

onde $\delta_0 = 1$, $\delta_j \in \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, r$ e $r \leq n$. Suponhamos que os parâmetros δ_j são escolhidos de forma que os zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ sejam reais, distintos e pertencentes a $(-1, 1)$.

Sejam $x_{j,n}$, $j = 1, 2, \dots, n$ os zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ em ordem decrescente. Então, a fórmula de quadratura interpolatória sobre estes zeros, dada por

$$\int_{-1}^1 f(x) d\mu^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^n \omega_{j,n} f(x_{j,n}), \quad (5.4.2)$$

é $(2n - r - 1, n, d\mu)$. Para $r = 0$, a fórmula de quadratura (5.4.2) coincide com a fórmula de quadratura gaussiana.

Os pesos $\omega_{j,n}$ da fórmula de quadratura baseada nos zeros do polinômio $P[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r, x]$ são dados por

$$\omega_{j,n} = \frac{O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{j,n}]}{P'_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{j,n}]},$$

onde $O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j O_{n-j-1}(x)$.

A fórmula de quadratura

$$\int_{-1}^1 f(x) d\mu^{(1)}(x) = \sum_{j=1}^n \tilde{\omega}_{j,n} f(\tilde{x}_{j,n}) \quad (5.4.3)$$

é $(2n - 2l - 1, n, d\mu^{(1)})$ e simétrica se $\tilde{x}_{j,n}$ são os zeros de $P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x]$.

Aqui $2l \leq n$. Portanto,

$$\tilde{x}_{j,n} = -\tilde{x}_{n+1-j,n} \quad \text{e} \quad \tilde{\omega}_{j,n} = \tilde{\omega}_{n+1-j,n}.$$



Teorema 5.4.1. *Seja $d\nu(z) = -d\mu^{(1)}(x(z))$ e seja $z_{j,n} = [\tilde{x}_{j,n} + i\sqrt{1 - \tilde{x}_{j,n}^2}]^2$. Então, toda função $f \in \mathbb{P}_{2n-2l-1}$ satisfaz à fórmula de quadratura (5.4.3) se, e somente se, a fórmula de quadratura*

$$\int_C F(z) d\nu(z) = \sum_{j=1}^n \tilde{\lambda}_{j,n} F(z_{j,n})$$

é satisfeita para $F(z)$ pertencente ao espaço gerado por

$$\{z^{-n+l+1}, z^{-n+l+2}, \dots, z^{n-l-2}, z^{n-l-1}\}.$$

Demonstração: Como $\tilde{x}_{j,n}$, para $j = 0, 1, \dots, n$, são os zeros do polinômio $P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x]$, podemos escrever

$$P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] = (x - \tilde{x}_{1,n})(x - \tilde{x}_{2,n}) \cdots (x - \tilde{x}_{n,n}).$$

Vamos analisar os casos para n par e n ímpar:

1. Para $n = 2m$.

Sejam $\tilde{x}_{1,n}, \tilde{x}_{2,n}, \dots, \tilde{x}_{m,n}$ os zeros positivos de $P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x]$. Então,

$$\begin{aligned} P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] &= G_{2m}(x) \\ &= (x^2 - \tilde{x}_{1,n}^2)(x^2 - \tilde{x}_{2,n}^2) \cdots (x^2 - \tilde{x}_{m,n}^2). \end{aligned}$$

Usando a transformação $x = (z^{1/2} + z^{-1/2})/2$ para cada raiz $\tilde{x}_{j,n}$, $j = 1, \dots, m$, de $G_{2m}(x)$, temos

$$\begin{aligned} x^2 - \tilde{x}_{j,n}^2 &= x^2(z) - \tilde{x}_{j,n}^2 \\ &= \frac{z^{-1}}{4} [z^2 + 2(1 - \tilde{x}_{j,n}^2)z + 1]. \end{aligned}$$

As raízes da equação do segundo grau $z^2 + 2(1 - \tilde{x}_{j,n}^2)z + 1$, para cada $j = 1, \dots, m$, são

$$z_{j,n} = (\tilde{x}_{j,n} + i\sqrt{1 - \tilde{x}_{j,n}^2})^2 \quad \text{e} \quad \hat{z}_{j,n} = (\tilde{x}_{j,n} - i\sqrt{1 - \tilde{x}_{j,n}^2})^2 = \frac{1}{z_{j,n}},$$

Daí,

$$P[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] = \left(\frac{z^{-1}}{4}\right)^m \prod_{j=1}^m [(z - z_{j,n})(z - z_{j,n}^{-1})]. \quad (5.4.4)$$

Logo,

$$(4z)^{n/2} P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] = \prod_{j=1}^m [(z - z_{j,n})(z - z_{j,n}^{-1})].$$

2. Para $n = 2m + 1$, temos

$$P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] = x(x^2 - \tilde{x}_{1,n}^2)(x^2 - \tilde{x}_{2,n}^2) \cdots (x^2 - \tilde{x}_{m,n}^2).$$

Daí,

$$P_n[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] = (4z)^{-(2m+1)/2} (z+1) \prod_{j=1}^m [(z - z_{j,n})(z - z_{j,n}^{-1})].$$

Logo,

$$(4z)^{n/2} P[\delta_0, 0, \delta_2, \dots, 0, \delta_{2l}; x] = (z+1) \prod_{j=1}^m [(z - z_{j,n})(z - z_{j,n}^{-1})].$$

Agora, vamos mostrar que para (5.4.3) ser exata para $f \in \mathbb{P}_{2n-2l-1}$ é equivalente a

$$\int_{-1}^1 [x + i\sqrt{1-x^2}]^{2s+1} \frac{d\mu(x)}{2i\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=1}^n [x_{k,n} + i\sqrt{1-x_{k,n}^2}]^{2s+1} \frac{\omega_{k,n}}{2i\sqrt{1-x^2}} \quad (5.4.5)$$

para $-n + l \geq s \geq n - l - 1$.

A fórmula de quadratura (5.4.3), que é simétrica, é satisfeita para qualquer função $f = p + g$, onde p é um polinômio par de grau menor ou igual à $2n - 2l - 2$ e g é qualquer função ímpar.

Consideremos a função

$$f_s(x) = [x + i\sqrt{1-x^2}]^{2s+1} \frac{1}{i\sqrt{1-x^2}}.$$

Usando expansão binomial, temos então

$$\begin{aligned} f_s(x) &= \left[\binom{2s+1}{0} x^{2s+1} + \binom{2s+1}{2} x^{2s-1} [i\sqrt{1-x^2}]^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{2s+1}{2s} x [i\sqrt{1-x^2}]^{2s} \right] \frac{1}{i\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad + \left[\binom{2s+1}{1} x^{2s} [i\sqrt{1-x^2}] + \binom{2s+1}{3} x^{2s-2} [i\sqrt{1-x^2}]^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \binom{2s+1}{2s+1} [i\sqrt{1-x^2}]^{2s+1} \right] \frac{1}{i\sqrt{1-x^2}} \\ &= g_s(x) + p_{2s}(x), \text{ para } s \geq 0. \end{aligned}$$

Como $[x + i\sqrt{1-x^2}][x - i\sqrt{1-x^2}] = 1$, temos também que

$$f_{-s-1}(x) = [x - i\sqrt{1-x^2}]^{2s+1} \frac{1}{i\sqrt{1-x^2}}.$$

Novamente, usando expansão binomial, podemos escrever

$$f_{-s-1}(x) = g_s(x) - p_{2s}(x), \text{ para } s \geq 0,$$

onde

$$g_s(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \sum_{k=0}^s \binom{2s+1}{2k} (x^2-1)^k x^{2s-2k},$$

que é uma função ímpar, e

$$-p_{2s}(x) = \sum_{k=0}^s \binom{2s+1}{2k+1} (x^2-1)^k x^{2s-2k},$$

que é um polinômio par de grau $2s$. O coeficiente do termo de maior grau desse polinômio é

$$2^{2s} = \sum_{j=0}^s \binom{2s+1}{2j+1}.$$

Assim, (5.4.3) implica (5.4.5).

Por outro lado, temos que $p_{2s}(x) = [f_s(x) - f_{-s-1}(x)]/2$, para $s = 0, 1, \dots, n-l-1$, forma uma base para todo polinômio par de grau menor ou igual à $2n-l$



$2l - 2$. Então, qualquer polinômio par pode ser escrito como uma combinação dos elementos desta base. Nessas condições, (5.4.5) implica (5.4.3).

Lembrando que

$$z = (x + i\sqrt{1-x^2})^2 \text{ e } z_{j,n} = (x_{j,n} + i\sqrt{1-x_{j,n}^2})^2,$$

temos

$$\frac{x + i\sqrt{1-x^2}}{2i\sqrt{1-x^2}} = \frac{x + i\sqrt{1-x^2}}{2i\sqrt{1-x^2}} \frac{x + i\sqrt{1-x^2}}{x + i\sqrt{1-x^2}} = \frac{z}{z-1}.$$

Então, à partir de (5.4.5) e usando as relações acima, temos

$$\int_C z^s \frac{z}{z-1} d\nu(z) = \sum_{j=1}^n \omega_{j,n} \frac{z_{j,n}}{z_{j,n}-1} z_{j,n}^s,$$

para $s = -n+l, -n+l+1, \dots, -n-l-2, -n-l-1$. Portanto, se $F(z)$ pertence ao espaço gerado por $\{z^{-n+l+1}, z^{-n+l+2}, \dots, z^{n-l-2}, z^{n-l-1}\}$ temos que $(1-z^{-1})F(z)$ pertence ao espaço gerado por $\{z^{-n+l}, z^{-n+l+1}, \dots, z^{n-l-2}, z^{n-l-1}\}$. Daí,

$$\int_C (1-z^{-1})F(z) \frac{z}{z-1} d\nu(z) = \sum_{k=1}^n \omega_{k,n} (1-z_{k,n}^{-1}) F(z_{k,n}) \frac{z_{k,n}}{z_{k,n}-1}$$

nos fornece

$$\int_C F(z) d\nu(z) = \sum_{k=1}^n \omega_{k,n} F(z_{k,n}),$$

que conclui a demonstração do teorema. ■

Usando (5.4.1) e (5.3.3), temos

$$\begin{aligned} P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] &= \sum_{j=0}^r \delta_j P_{n-j}^{(1)}(x) \\ &= \sum_{j=0}^r \delta_j \frac{2^{-(n-j-1)}}{1+a_{n-j}} \operatorname{Re}[z^{-(n-j)/2} H_{k_j, n-j}(z) S_{n-j-k_j}(z)], \end{aligned}$$

para $0 \leq k_j \leq n-j$. Fazendo $k_j = r-j$, temos

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \frac{2^{-(n-j-1)}}{1+a_{n-j}} \operatorname{Re}[z^{-(n-j)/2} H_{r-j, n-j}(z) S_{n-r}(z)].$$

Dessa forma, podemos representar

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = 2^{-(n-1)} \operatorname{Re}[z^{-n/2} h_r(z) S_{n-r}(z)],$$



onde

$$h_r(z) = \sum_{j=0}^r \delta_j \frac{2^j}{1 + a_{n-j}} z^{j/2} H_{r-j, n-j}(z) \quad (5.4.6)$$

De modo análogo, obtemos

$$O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \sum_{j=0}^r \delta_j \frac{2^{-(n-j-1)}}{1 + a_{n-j}} \frac{\operatorname{Im}[z^{-(n-j)/2} H_{k_j, n-j}(z) \tilde{S}_{n-j-k_j}(z)]}{\sin(\theta/2)},$$

para $0 \leq k_j \leq n - j$. Fazendo $k_j = r - j$, temos

$$O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = \frac{2^{-(n-1)}}{\sin(\theta/2)} \operatorname{Im}[z^{-n/2} h_r(z) \tilde{S}_{n-r}(z)],$$

onde $h_r(z)$ é dado por (5.4.6).

5.5 Fórmulas de Quadratura Positivas

Daremos agora algumas condições que garantem as seguintes propriedades

$$1 > x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n} > -1 \quad \text{e} \quad \omega_{k,n} > 0, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.5.1)$$

para as fórmulas de quadratura (5.4.2). Temos, facilmente (ver Lema 4.1.1) que os pesos $\omega_{k,n}$ da fórmula de quadratura (5.4.2) são positivos se os n zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ e os $n - 1$ zeros de $O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ se entrelaçam.

Mostraremos que os zeros de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$ pertencem a $(-1, 1)$ e que as desigualdades (5.5.1) são satisfeitas se os zeros do polinômio de grau $2r$, $\tilde{h}_{2r}(w) = h_r(w^2)$, pertencem ao disco unitário aberto.

Vamos considerar a função

$$s_n(z) = h_r(z) S_{n-r}(z).$$

Quando tomamos $w = z^{1/2} = e^{i\theta/2}$, $s_n(z)$ pode ser considerado como um polinômio de grau $m = 2n$ em w . Então,

$$s_n(w^2) = \tilde{h}_{2r}(w) S_{n-r}(w^2),$$



onde

$$\tilde{h}_{2r}(w) = \sum_{j=0}^r \frac{\delta_j 2^j w^j}{1 + a_{n-j}} H_{r-j, n-j}(w^2).$$

Suponhamos que os zeros de $\tilde{h}_{2r}$, que é um polinômio de grau $2r$ em w , estão localizados no interior do disco unitário aberto. Isso significa que todos os zeros de $s_n(w^2)$, que é um polinômio de grau $m = 2n$ em w , também estão dentro do disco unitário aberto. Então, do Lema 4.1.2 com $l = m/2$, temos que

$$P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] = 2^{-(n-1)} \operatorname{Re}[z^{-n/2} h_r(z) S_{n-r}(z)]$$

tem n zeros $x_{j,n} = \cos(\theta_{j,n}^{(1)}/2)$ em $(-1, 1)$ e o polinômio

$$t_n(x) := \frac{\operatorname{Im}[z^{-n/2} h_r(z) S_{n-r}(z)]}{\sin(\theta/2)}$$

tem $n-1$ zeros $\cos(\theta_{j,n}^{(2)}/2)$ em $(-1, 1)$. Além disso, esses zeros se entrelaçam, ou seja,

$$0 < \frac{1}{2}\theta_{1,n}^{(1)} < \frac{1}{2}\theta_{1,n}^{(2)} < \dots < \frac{1}{2}\theta_{n-1,n}^{(2)} < \frac{1}{2}\theta_{n,n}^{(1)} < \pi.$$

Como foi feito no capítulo anterior temos

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}[z^{-n/2} h_r(z) S_{n-r}(z)] \operatorname{Re}[z^{-n/2} h_r(z) \tilde{S}_{n-r}(z)] \\ & \quad + \operatorname{Im}[z^{-n/2} h_r(z) S_{n-r}(z)] \operatorname{Im}[z^{-n/2} h_r(z) \tilde{S}_{n-r}(z)] \\ & = |h_r(z)|^2 \operatorname{Re}[S_{n-r}(z) \tilde{S}_{n-r}(z)] \\ & = 2|h_r(z)|^2 \prod_{j=1}^{n-r} (1 - a_j^2) > 0, \end{aligned}$$

desde que $h_r(z) \neq 0$ para $|z| = 1$. Daí,

$$\begin{aligned} & P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \operatorname{Re}[z^{-n/2} h_r(z) \tilde{S}_{n-r}(z)] \\ & \quad + O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x] \operatorname{Im}[z^{-n/2} h_r(z) S_{n-r}(z)] \sin(\theta/2) \\ & = 2^{-(n-2)} |h_r(z)|^2 \prod_{j=1}^{n-r} (1 - a_j^2) > 0. \end{aligned}$$



Considerando a relação acima nos zeros $1 > x_{1,n} > x_{2,n} > \dots > x_{n,n} > -1$ de $P_n[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x]$, temos

$$O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{k,n}]t_n(x_{k,n}) = 2^{-(n-2)}|h_r(z_{k,n})|^2 \prod_{j=1}^{n-r} (1 - a_j^2) > 0.$$

Daí,

$$O_{n-1}[\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_r; x_{n,k}]t_n(x_{k,n}) > 0.$$

Como os zeros de P_n e t_n se entrelaçam, pela relação acima, concluímos que os zeros de P_n e O_{n-1} também se entrelaçam. Portanto, os pesos da fórmula de quadratura (5.4.3) são positivos.

Os resultados acima demonstram o seguinte teorema:

Teorema 5.5.1. *Se*

$$\tilde{h}_{2r}(w) = \sum_{j=0}^r \frac{\delta_j 2^j w^j}{1 + a_{n-j}} H_{r-j, n-j}(w^2),$$

que é um polinômio de grau $2r$ em $w = z^{1/2}$ com coeficientes reais, tem todos os seus zeros no interior do disco unitário aberto, então a fórmula de quadratura (5.4.2) satisfaz (5.5.1).

Teorema 5.5.2. *Sejam $\delta_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, r$, e $j_0 = 0 < j_1 < j_2 < \dots < j_{\hat{r}}$ os índices para os quais $\delta_{j_v} \neq 0$ para $v = 0, 1, \dots, \hat{r}$. Definimos $\Delta_0 = |\delta_0|$ e*

$$\Delta_j = 2^j |\delta_j| \frac{\prod_{k=1}^{r-j-1} (1 + |a_{n-j-k}|)}{\prod_{k=1}^{r-1} (1 - |a_{n-k}|)}$$

para $j = 1, 2, \dots, r$. Então, se $\Delta_0 > \sum_{j=1}^r \Delta_j$, obtemos (5.5.1). Em particular, se $\Delta_{j_v} \geq \Delta_{j_{v+1}}$ para $v = 0, 1, \dots, \hat{r} - 2$ e $\Delta_{j_{\hat{r}-1}} > \Delta_{j_{\hat{r}}}$, (5.5.1) é satisfeita.

Demonstração: Consideremos o polinômio

$$\tilde{h}_{2r}(w) = \sum_{j=0}^r \frac{\delta_j 2^j w^j}{1 + a_{n-r}} Q_{r-j, n-j}(w^2),$$

que é um polinômio real de grau exatamente $2r$ em w . Portanto,

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{2r}^*(w) &= w^{2r} \tilde{h}_{2r}(w^{-1}) \\ &= \sum_{j=0}^r \frac{\delta_j 2^j w^j}{1 + a_{n-r}} H_{r-j, n-j}^*(w^2).\end{aligned}$$

Como os zeros de $\tilde{h}_{2r}(w)$ estão em $|w| < 1$, então os zeros de $\tilde{h}_{2r}^*(w)$ estão em $|w| > 1$. Suponhamos o contrário, ou seja, que exista um zero ξ de $\tilde{h}_{2r}^*(w)$ em $|w| < 1$, daí

$$\tilde{h}_{2r}^*(\xi) = \sum_{j=0}^r \frac{\delta_j 2^j \xi^j}{1 + S_{n-r}(\xi)} H_{r-j, n-j}^*(\xi^2) = 0.$$

Como $H_{r-j, n-j}^*$ não tem zeros em $|z| < 1$, podemos escrever

$$|\delta_0| \leq \sum_{j=1}^r 2^j |\delta_j| \frac{|H_{r-j, n-j}^*(\xi^2)|}{|H_{r, n}^*(\xi^2)|}.$$

Usando o Lema 5.3.2, temos

$$|\delta_0| \leq \sum_{j=1}^r 2^j |\delta_j| \frac{\prod_{k=1}^{r-j-1} (1 + |a_{n-j-k}|)}{\prod_{k=1}^{r-1} (1 + |a_{n-k}|)}$$

e, daí,

$$\Delta_0 \leq \sum_{j=1}^r \Delta_j.$$

Esta desigualdade nos dá a contradição esperada. Portanto, se $\Delta_0 > \sum_{j=1}^r \Delta_j$, concluimos que todos os zeros de $\tilde{h}_{2r}(w)$ estão dentro de $|w| < 1$ e, consequentemente, os nós e pesos da fórmula de quadratura (5.4.3) satisfazem (5.5.1).

Para completar a demonstração, observemos que

$$\Delta_{j_0} \geq 2\Delta_{j_0} \geq \Delta_{j_0} + \Delta_{j_1} \geq \cdots > \sum_{v=0}^{\hat{r}} \Delta_{j_v}.$$

■

Apêndice A

Usando as relações de recorrência para os polinômios de Szegő e para os polinômios de Szegő associados e lembrando que os coeficientes de reflexão são reais, temos

$$\begin{aligned}
 S_{2(n-r)-1}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)} &= S_{2(n-r)-2}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)} \\
 &\quad + z a_{2(n-r)-2} S_{2(n-r)-2}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}^*(z)} \\
 &\quad - \bar{z} a_{2(n-r)-2} S_{2(n-r)-2}^*(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)} \\
 &\quad - a_{2(n-r)-2}^2 S_{2(n-r)-2}^*(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}^*(z)} \\
 &= S_{2(n-r)-2}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)} \\
 &\quad - a_{2(n-r)-2}^2 \overline{S_{2(n-r)-2}(z)} \tilde{S}_{2(n-r)-2}(z) \\
 &\quad + a_{2(n-r)-2} z S_{2(n-r)-2}(z) \overline{z^{2(n-m)-2} \tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)} \\
 &\quad - a_{2(n-r)-2} \bar{z} \overline{S_{2(n-r)-2}(z)} z^{2(n-m)-2} \tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)
 \end{aligned}$$

Como $\text{Re}[x - \bar{x}] = 0$, para todo $x \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}
 \text{Re}[S_{2(n-r)-1}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)}] &= \text{Re} \left[S_{2(n-r)-2}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)} \right. \\
 &\quad \left. - a_{2(n-r)-2}^2 \overline{S_{2(n-r)-2}(z)} \tilde{S}_{2(n-r)-2}(z) \right].
 \end{aligned}$$

Usando $\text{Re}[x\bar{y}] = \text{Re}[\bar{x}y]$, para todo $x, y \in \mathbb{C}$ segue que

$$\text{Re}[S_{2(n-r)-1}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)}] = (1 - a_{2(n-r)-2}^2) \text{Re}[S_{2(n-r)-2}(z) \overline{\tilde{S}_{2(n-r)-2}(z)}].$$

Continuando com o mesmo raciocínio, temos

$$\operatorname{Re}[S_{2(n-r)-1}(z)\overline{\tilde{S}_{2(n-r)-1}(z)}] = \prod_{k=1}^{2(n-m)-2} (1 - a_k^2).$$

Referências Bibliográficas

- [1] C. F. Braccelli, A. F. de Silva, A. de Ranga, *Szegő Polynomials: Some Relations to L-orthogonal and Orthogonal Polynomials*, submisso.
- [2] R. Diniz, *Propriedades e Aplicações dos Polinômios Ortogonais de Szegő*, Dissertação de Mestrado, UNESP/IBILCE (1999).
- [3] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [4] J. L. Geronimus, *Polynomials Orthogonal on a Circle and their Applications*, English transl., Amer. Math. Soc. Transl. 3 (1963), 1-78.
- [5] W. B. Jones, O. Nikšić, W. J. Thron, *Moment Theory, Orthogonal Polynomials, Quadrature, and Continued Fractions Associated with the Unit Circle*, Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 123-152.
- [6] W. B. Jones, W. J. Thron, H. Wondolach, *A Strong Stieltjes Moment Problem*, Trans. Amer. Math. Soc. 261 (1980), 503-528.
- [7] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [8] V. I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Macmillan, New York, 1962.
- [9] C. A. Mitchell, T. J. Rivlin, *Runge's Integration Rules and Gaussian Quadrature*, Math. J. Math. 16 (1973), 297-300.



Referências Bibliográficas

- [1] C. F. Bracciali, A. P. da Silva, A. Sri Ranga, Szegö Polynomials: Some Relations to L-orthogonal and Orthogonal Polynomials, submetido.
- [2] R. Bressan, *Propriedades e Aplicações dos Polinômios Ortogonais de Szegö*, Dissertação de Mestrado, UNESP-IBILCE (1999).
- [3] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [4] Ja. L. Geronimus, Polynomials Orthogonal on a Circle and their Applications, English transl., *Amer. Math. Soc. Transl.* **3** (1962), 1-78.
- [5] W. B. Jones, O. Njåstad, W. J. Thorn, Moment Theory, Orthogonal Polynomials, Quadrature, and Continued Fractions Associated with the Unit Circle, *Bull. London Math. Soc.* **21** (1989), 113-152.
- [6] W. B. Jones, W. J. Thorn, H. Waadeland, A Strong Stieltjes Moment Problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **261** (1980), 503-528.
- [7] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.
- [8] V.I. Krylov, *Approximate Calculation of Integrals*, Macmillan, New York, 1962.
- [9] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, Numerical Integration Rules near Gaussian Quadrature, *Israel J. Math.* **16** (1973), 287-299.



- [10] F. Peherstorfer, Linear Combinations of Orthogonal Polynomials Generating Positive Quadrature Formulas, *Mathematics of Computation* **55** (1990) 231-241.
- [11] F. Peherstorfer, Characterization of Positive Quadrature Formulas, *SIAM J. Math. Anal.* **12** (1981), 935-942.
- [12] F. Peherstorfer, Characterizations of Quadrature Formulas II, *SIAM J. Math. Anal.* **15** (1984), 1021-1030.
- [13] H. S. Schmid, A Note on Positive Quadrature Rules, *Rocky Mountain J. Math.* **19** (1989), 395-404.
- [14] A. Sri Ranga, Companion Orthogonal Polynomials, *J. Comput. Appl. Math.* **75** (1996), 23-33.
- [15] G. Sottas, G. Wanner, The Number of Positive Weights of a Quadrature Formulas *BIT* **22** (1982), 339-352.
- [16] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, 1975.
- [17] W. Van Assche, Orthogonal Polynomials in the Complex Plane and on the Real Line, in Field Institute Communications 14: Special Functions, q-series and related topics (M.E.H. Ismael et al., eds.), Amer. Math. Soc. (1997) 211-245.
- [18] A. Zhedanov, On Some Classes of Polynomials Orthogonal on Arcs of the Unit Circle Connected with Symmetric Orthogonal Polynomials on an Interval, *J. Approx. Theory* **94** (1998), 73-106.



