

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

RAPHAEL SCHIMIDT BITTENCOURT

Título do Trabalho : Tensor energia-momento para modelos de spin-2 massivos

Guaratinguetá

2018

Raphael Schmidt Bittencourt

Título do Trabalho : Tensor energia-momento para modelos de spin-2 massivos

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física .

Orientador: Profº Dr. Elias Leite Mendonça
Coorientador:

Guaratinguetá
2018

B624t	Bittencourt, Raphael Schmidt
	Tensor energia-momento para modelos de spin-2 massivos / Raphael Schmidt Bittencourt – Guaratinguetá, 2018.
	59 f.: il.
	Bibliografia: f. 53
	Trabalho de Graduação – Bacharelado em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.
	Orientadora: Prof. Dr. Elias Leite Mendonça
	1. Teoria de campos (Física). 2. Eletromagnetismo. 3. Partículas (Física nuclear). 4. Gravitação. I. Título.
	CDU 530.145

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

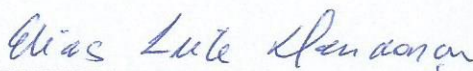
RAPHAEL SCHIMIDT BITTENCOURT

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA "

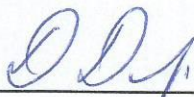
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Profº Dr. MARCO AURÉLIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

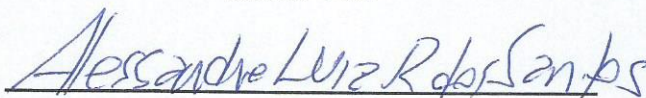
BANCA EXAMINADORA:



Profº Dr. Elias Leite Mendonça
Orientador/UNESP-FEG



Profº Dr. Denis Dalmazi
UNESP-FEG



Profº Dr. Alessandro Luiz Ribeiro dos Santos
UNESP-FEG

Dezembro , 2018

DADOS CURRICULARES

RAPHAEL SCHIMIDT BITTENCOURT

NASCIMENTO 11/04/1987 - Tremembé / Sp

FILIAÇÃO Roberto Bittencourt
Iraci Briene Schmidt

2015 / 2018 Bacharelado em Física
Unesp

2005 / 2009 Eng. Produção Mecânica
Unitau

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a agência Fapesp por ter disponibilizado uma bolsa de iniciação científica para confecção desse trabalho, ao orientador Elias Leite Mendonça pela sua paciência e sabedoria e aos queridos professores dessa instituição que fizeram parte de minha trajetória nesse decorrer dos anos.

Este trabalho contou com o apoio da(s) seguinte(s) entidade(s):
FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
Processo: 2016/17089-2

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo final calcular o tensor energia-momento para o modelo $\mathcal{L}(a_1)$ (DALMAZI, 2013) e para isso foi necessário aprender os conhecimentos fundamentais da teoria clássica de campos relativísticos, com o auxílio do eletromagnetismo, e relatividade geral para, posteriormente, deduzir a equação de Einstein para o vácuo e para a matéria no qual encontramos uma fórmula geral para o cálculo do tensor energia-momento. A partir daí foi demonstrado a validade da fórmula para o tensor de energia-momento eletromagnético e finalmente alcançado o objetivo. Nos comentários foram abordados outros modelos de gravitação e também o método de redução de Kaluza-Klein. Por fim apresentamos uma possível continuação para este trabalho.

PALAVRAS-CHAVE: Modelo $\mathcal{L}(a_1)$. Tensor energia momento. Equação de Einstein.

ABSTRACT

The objective of this work is to calculate the energy-momentum tensor for the $\mathcal{L}(a_1)$ (DALMAZI, 2013) model and for this it was necessary to learn the fundamental knowledge of the classical theory of relativistic fields, with the aid of electromagnetism, and general relativity to later deduce the Einstein equation for the vacuum and the matter in which we find a general formula for calculating the energy-momentum tensor. From there was demonstrated the validity of the formula for the electromagnetic-energy-momentum tensor and finally achieved the goal. In the comments were presented other models of gravitation and also instigate the reader to study the method of reduction of Kaluza-Klein. Finally we present a possible continuation for this work

KEYWORDS: $\mathcal{L}(a_1)$ model. Energy-momentum tensor. Einstein equation

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	TEORIA CLÁSSICA CAMPOS	13
2.1	EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	13
2.1.1	Dedução das equações de Euler-Lagrange	14
2.1.2	Campo de Klein Gordon	15
2.1.3	Campo eletromagnético	16
2.1.3.1	Equação da continuidade	16
2.1.3.2	Tensor $F^{\mu\nu}$	16
2.2	INVARIÂNCIA DO LAGRANGIANO	20
2.2.1	Translações espaço-temporais	21
2.2.1.1	Tensor energia-momento canônico	21
2.2.2	Transformações SO(1,3)	22
2.2.2.1	Grupo SO(1,3)	22
2.2.2.2	Invariância do lagrangiano sob SO(1,3)	27
2.3	SIMETRIZAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO	30
2.3.1	Belinfanti Rosenfeld	30
2.3.2	Quadri-Momento	31
2.3.3	Tensor Momento Angular	31
3	RELATIVIDADE GERAL - INTRODUÇÃO	32
3.1	PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA	32
3.2	PRINCÍPIO DA COVARIÂNCIA GERAL	32
3.3	EQUAÇÃO DA GEODÉSICA	32
3.4	SÍMBOLO DE CHRISTOFELL	34
3.5	DERIVADA COVARIANTE	37
3.5.1	Propriedades:	38
3.6	TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN	38
3.6.1	Propriedades	41
3.7	TENSOR E ESCALAR DE RICCI	41
3.7.1	Tensor de Ricci	41
3.7.2	Escalar de Ricci	41
4	EQUAÇÃO DE EINSTEIN VIA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS	42
4.1	VARIAÇÃO FUNCIONAL DO ESCALAR DE RICCI	42
4.2	EQUAÇÃO DE EINSTEIN	42
4.2.1	Vácuo	42
4.2.1.1	Solução de Schwazschild	43

4.2.2	Matéria	43
4.2.2.1	Solução de Friedmann-Robertson-Walker	44
4.3	LINEARIZAÇÃO DA AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT	45
4.3.1	Quadri-momento	47
4.3.2	Momento angular total	48
5	TENSOR ENERGIA-MOMENTO	49
5.1	TENSOR ENERGIA-MOMENTO ELETROMAGNÉTICO	49
5.2	TENSOR ENERGIA-MOMENTO - MODELO $\mathcal{L}(a_1)$	49
6	COMENTÁRIOS	51
7	CONCLUSÃO	52
	REFERÊNCIAS	53
	APÊNDICE A – VARIAÇÃO FUNCIONAL DO SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL	54
	APÊNDICE B – VARIAÇÃO FUNCIONAL DO TENSOR DE RICCI	56
	APÊNDICE C – VARIAÇÃO FUNCIONAL DO DETERMINANTE DA MÉTRICA	57
	APÊNDICE D – DIVERGENTE DE UM VETOR	59

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho tem como objetivo obter o tensor energia-momento para o modelo $\mathcal{L}(a_1)$ (DALMAZI, 2013). Foi estruturado com o propósito de desenvolver os conhecimentos necessários para alcançar tal objetivo, por intermédio de uma sequência lógica entre os capítulos. Não foram abordados os tópicos de Mecânica Clássica para um número finito de graus de liberdades, Relatividade Restrita e Eletromagnetismo, pois são assuntos abordados na graduação.

O Capítulo 2 foi baseado nas referências (LEMOS, 2007) e (LANDAU; LIFSHITZ, 1980). O texto apresentado foi retirado de (LEMOS, 2007), sendo realizado poucas modificações, pois preservei a forma de abordagem dos conceitos de forma clara e didática. Esse capítulo fez-se necessário pois desenvolve conceitos fundamentais da teoria clássica de campos relativística, com o auxílio do conhecimento do eletromagnetismo, como equações de movimento, tensor de energia momento canônico, simetrização do tensor energia-momento, densidade de momento angular orbital e de spin, quadri-momento e o tensor de momento angular, além de ser um dos pilares para o desenvolvimento do Capítulo 4. O tópico Grupo $SO(1,3)$, presente na Invariância do Lagrangiano (Secção 2.2) sob transformações de $SO(1,3)$, foi desenvolvido de maneira a ser claro e objetivo.

O Capítulo 3 foi baseado na referência (WEINBERG, 1972). O desenvolvimento desse tópico fez-se necessário para conseguirmos obter a Equação de Einstein através do princípio de mínima ação, ou seja, na ação de Einstein-Hilbert o lagrangiano será o escalar de Ricci sendo importante conceitos fundamentais da relatividade geral como princípio de equivalência, princípio da covariância geral, equação da geodésica, conexão afim, símbolo de Christoffel, derivada covariante, tensor de curvatura, tensor de Ricci e finalmente escalar de Ricci.

O Capítulo 4 foi baseado na referência (DAS, 2011). Foi dedicado a obter a equação de Einstein pelo princípio da mínima ação por intermédio da ação de Einstein-Hilbert. Abordamos a equação de Einstein para o vácuo com solução de Schwarzschild no qual podemos caracterizar um buraco negro e para a matéria com a solução de Friedmann-Robertson-Walker. Também foi apresentado a fórmula de Rosenfeld para o cálculo do tensor energia-momento, realizado a linearização da equação de Einstein para o vácuo e definido o quadri-momento e momento angular total.

O Capítulo 5 demonstra a validade da fórmula de Rosenfeld para o cálculo do tensor energia-momento para o espaço "flat" por intermédio da obtenção do tensor energia-momento eletromagnético e do modelo $\mathcal{L}(a_1)$ presente na referência (DALMAZI, 2013).

A partir desse estágio é possível compreender o trabalho desenvolvido em (DALMAZI, 2013) sendo necessário também o conhecimento de projetores de spin.

O Capítulo 6 comenta outros modelos de gravitação, sendo necessário o conhecimento do Capítulo 3 para tal compreensão, e instiga o leitor a ler sobre o método de redução dimensional de Kaluza-Klein no qual a partir equação de Einstein Linearizada em D dimensões é possível obter a equação de Fierz-Pauli em $(D-1)$ dimensões.

O Capítulo 7 finaliza o trabalho dando uma perspectiva de continuação para o mesmo.

2 TEORIA CLÁSSICA CAMPOS

Sistemas contínuos possuem um número infinito de graus de liberdade e são descritos por campos. As interações das partículas elementares, constituintes básicos da matéria, são expressas por meio de teorias quânticas de campos. Por sua vez, a construção das teorias quânticas das interações fundamentais da natureza depende crucialmente da possibilidade de primeiro formulá-las como teorias clássicas de campos nas linguagens lagrangiana e hamiltoniana.

O desenvolvimento do texto a seguir necessita do conhecimento de mecânica analítica, ou seja, principalmente dinâmica lagrangiana e princípio variacional para um sistema discreto (número finito de graus de liberdade).

O sistema contínuo mais simples é descrito pela função escalar $\phi(x, t)$ que a cada ponto do espaço podemos analisar sua dinâmica ou determinando um tempo específico podemos ver como cada ponto está se comportando. Por exemplo, $\phi(x, t)$ poderia representar o deslocamento transversal no instante t do ponto x de uma corda vibrante.

Sabemos que, para um sistema discreto, temos a ação:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}, t). \quad (2.1)$$

Para um sistema contínuo temos

$$S = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x^{\mu}) \quad (2.2)$$

onde $\mathcal{L}$ significa densidade de lagrangiano, $\int_{\Omega} = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2}$, $d^4x = dt dx dy dz$, $\partial_{\mu}\phi$ representa as derivadas parciais do campo, x^{μ} representa as coordenadas do campo e ϕ representa um campo que pode ser escalar, vetorial, tensorial ou espinorial. Lembre-se que o campo depende das coordenadas.

2.1 EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

Antes de começar será necessário estabelecer a notação:

$$\begin{aligned} x^{\mu} &= (ct, x, y, z) \\ \partial_{\mu} &= (1/c \partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \\ \partial^{\mu} &= \eta^{\mu\nu} \partial_{\nu} = (1/c \partial_t, -\partial_x, -\partial_y, -\partial_z) \\ \partial_{\mu} \partial^{\mu} &= \square \end{aligned}$$

onde $\eta^{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski que possui a assinatura $(+, -, -, -)$.

2.1.1 Dedução das equações de Euler-Lagrange

O objetivo desse tópico é obter as equações de Euler-Lagrange relativísticas por intermédio do princípio de mínima ação. Buscamos desenvolver as passagens matemáticas de forma clara.

Utilizando o princípio variacional $\phi \longrightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$, no qual ϕ minimiza a ação, ou seja, $S[\phi'] \geq S[\phi] \iff S[\phi'] - S[\phi] \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi', \partial_{\mu}\phi', x^{\mu}) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x^{\mu}) \geq 0 \\ &= \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi + \delta\phi, \partial_{\mu}\phi + \partial_{\mu}\delta\phi, x^{\mu}) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x^{\mu}) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x^{\mu}) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\mu}\delta\phi \right] - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_{\mu}\phi, x^{\mu})\end{aligned}$$

Note que

$$\partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta\phi \right] = \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right] \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial_{\mu}\delta\phi$$

Portanto

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \right) \right] \delta\phi + \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta\phi \right]$$

Observe que

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \delta\phi \right] = \int_{\Omega} d^4x \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \delta\phi \right] + \int_{\Omega} d^4x \partial_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j\phi)} \delta\phi \right]$$

Por sua vez

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} d^4x \partial_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j\phi)} \delta\phi \right] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V dV \partial_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j\phi)} \delta\phi \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S d\vec{s} \cdot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\vec{\nabla}\phi)} \delta\phi = 0 \\ \int_{\Omega} d^4x \partial_0 \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \delta\phi \right] &= \int_V d^3x \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} \delta\phi \right] \\ &= \int_V d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\phi)} \delta\phi \right]_{t_1}^{t_2} = 0\end{aligned}$$

pois as variações $\delta\phi$ se anulam na superfície "S" que limita a região espacial "V" e nos extremos temporais.

Logo

$$\delta S = \int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \right] \delta \phi$$

Fazendo $\delta S = 0$ temos:

$$\int_{\Omega} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) \right] \delta \phi = 0$$

Portanto, $\forall \delta \phi$,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi)} \right) = 0 \quad (2.3)$$

Estas são conhecidas como equações de Euler-Lagrange ou equações de movimento.

2.1.2 Campo de Klein Gordon

Consideremos como exemplo mais simples a teoria de um campo escalar não carregado cuja lagrangiana é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (2.4)$$

onde m é a massa da partícula em que ϕ representa o campo (em unidades tais que $\hbar = c = 1$). Então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} &= \frac{\partial}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \left[\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\partial_{\mu} \phi)}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \partial^{\mu} \phi + \partial_{\mu} \phi \frac{\partial (\partial^{\mu} \phi)}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta_{\mu}^{\nu} \partial^{\mu} \phi + \eta^{\nu\mu} \partial_{\mu} \phi \right] \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} &= \partial^{\nu} \phi \quad \text{e} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -m^2 \phi \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \phi)} \right) &= -m^2 \phi - \partial_{\nu} \partial^{\nu} \phi \\ (\square + m^2) \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

que é chamada de equação de Klein-Gordon.

Veremos a seguir que no caso de um campo vetorial também podemos obter uma equação de Klein-Gordon.

2.1.3 Campo eletromagnético

2.1.3.1 Equação da continuidade

Carga e corrente devem obedecer à uma lei de conservação que chamamos de equação de continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

onde ρ é a densidade de cargas e $\vec{j}$ é a densidade de corrente.

Vamos introduzir o candidato a quadrivetor

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad (2.6)$$

onde j^μ é chamado de quadricorrente e obedece a transformação de lorentz.

Portanto, podemos reescrever a equação da continuidade numa forma covariante

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (2.7)$$

2.1.3.2 Tensor $F^{\mu\nu}$

Dos cursos introdutórios de eletromagnetismo sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \implies \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) && \text{(lei de Gauss magnética)} \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{aligned} \quad (2.8)$$

que se refere a ausência de monopolo magnético e introduz o potencial vetor $\vec{A}$.

Ao mesmo tempo sabemos que:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 && \text{(lei de Faraday)} \\ \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] &= 0 \implies \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.9)$$

que por sua vez introduz o potencial escalar ϕ .

Ambos os potenciais podem ser resumidos à um quadri-potencial que chamamos de $A^\mu = (\phi, \vec{A})$.

Vamos introduzir um candidato a tensor de rank-2 $F^{\mu\nu}$ definido como o rotacional de A^μ

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (2.10)$$

Logo, podemos fazer as identificações:

$$F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$$

$$F^{0i} = \partial^0 A^i - \partial^i A^0$$

$$F^{0i} = \frac{1}{c} \frac{\partial A^i}{\partial t} + \partial_i \phi = -\vec{E}$$

$$F^{i0} = -F^{0i} = \vec{E}$$

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$$

ou seja, na forma matricial temos:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

que evidencia a característica anti-simétrica do tensor $F^{\mu\nu}$.

As equações fundamentais do eletromagnetismo podem ser derivadas de um princípio de mínima ação. Sendo assim consideremos a lagrangiana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \quad (2.12)$$

Então:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\gamma} = -\frac{1}{c} j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\gamma} = -\frac{1}{c} j^\mu \delta_\mu^\gamma = -\frac{1}{c} j^\gamma$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = -\frac{1}{16\pi} \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} \right)$$

onde

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\gamma - \delta_\nu^\alpha \delta_\mu^\gamma$$

Note que

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} &= F_{\mu\nu} \frac{\partial(\eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\beta} F_{\lambda\beta})}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\beta} F_{\mu\nu} \frac{\partial F_{\lambda\beta}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} \\
 &= F^{\lambda\beta} (\delta_\lambda^\alpha \delta_\beta^\gamma - \delta_\beta^\alpha \delta_\lambda^\gamma) = F^{\alpha\gamma} - F^{\gamma\alpha}
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Como $F^{\alpha\gamma} = -F^{\gamma\alpha}$ temos:

$$F_{\mu\nu} \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = 2F^{\alpha\gamma}$$

Logo

$$\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\gamma} \tag{2.14}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial A_\gamma} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\alpha A_\gamma)} &= -\frac{1}{c} j^\gamma + \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} = 0 \\
 \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Agora, verificamos que com

$\gamma = 0$ temos

$$\partial_\alpha F^{\alpha 0} = \frac{4\pi}{c} j^0 \implies \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{lei de Gauss}) \tag{2.16}$$

$\gamma = i$ temos

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha i} &= \frac{4\pi}{c} j^i \\
\partial_0 F^{0i} + \partial_j F^{ji} &= \frac{4\pi}{c} j^i \\
-\frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} + \partial_j F^{ji} &= \frac{4\pi}{c} j^i \\
\partial_j \epsilon^{jik} B_k &= \frac{4\pi}{c} j^i + \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} \\
-\epsilon^{ijk} \partial_j B_k &= \frac{4\pi}{c} j^i + \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} \\
\epsilon_{ijk} \partial_j B_k &= \frac{4\pi}{c} j^i + \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{lei de Ampère-Maxwell})
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado, as equações homogêneas de Maxwell podem ser obtidas por:

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0 \quad \text{ou} \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{2.18}$$

onde definimos o dual

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda\kappa} F_{\lambda\kappa} \tag{2.19}$$

Para finalizar, observamos que:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha F^{\alpha\gamma} &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma \\
\partial_\alpha (\partial^\alpha A^\gamma - \partial^\gamma A^\alpha) &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma \\
\partial_\alpha \partial^\alpha A^\gamma - \partial_\alpha \partial^\gamma A^\alpha &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma \\
\Box A^\gamma - \partial^\gamma \partial_\alpha A^\alpha &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma
\end{aligned}$$

utilizando o calibre de lorentz, ou seja, $\partial_\alpha A^\alpha = 0$, temos:

$$\Box A^\gamma = \frac{4\pi}{c} j^\gamma \tag{2.20}$$

Na ausência de fonte ($j^\mu = 0$) a equação (2.20) é uma eq. de Klein-Gordon com massa nula.

Mas se quisermos adicionar massa como podemos fazer isso? O próximo modelo permite uma massa para A_μ sendo chamado de modelo de Proca dado por:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{MP} &= -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu + \frac{\mu^2}{8\pi} A_\mu A^\mu \\
 \frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial A_\gamma} &= -\frac{1}{c} j^\mu \frac{\partial A_\mu}{\partial A_\gamma} + \frac{\mu^2}{8\pi} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\gamma} A^\mu + A_\mu \frac{\partial A^\mu}{\partial A_\gamma} \right) \\
 &= -\frac{1}{c} j^\mu \delta_\mu^\gamma + \frac{\mu^2}{8\pi} (\delta_\mu^\gamma A^\mu + \eta^{\mu\gamma} A_\mu) \\
 \frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial A_\gamma} &= -\frac{1}{c} j^\gamma + \frac{\mu^2}{4\pi} A^\gamma
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Utilizando o resultado (2.14) temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} = -\frac{1}{4\pi} F^{\alpha\gamma}$$

Assim, a equação de movimento será:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial A_\gamma} - \partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}_{MP}}{\partial (\partial_\alpha A_\gamma)} &= -\frac{1}{c} j^\gamma + \frac{\mu^2}{4\pi} A^\gamma + \frac{1}{4\pi} \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} = 0 \\
 \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} + \mu^2 A^\gamma &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma \\
 (\square + \mu^2) A^\gamma &= \frac{4\pi}{c} j^\gamma
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

e verificamos enfim que, com $j^\gamma = 0$, temos uma equação de Klein-Gordon.

2.2 INVARIÂNCIA DO LAGRANGIANO

Estamos querendo construir uma física sobre um espaço que seja homogêneo e isotrópico, isto é, o espaço não possui um ponto ou região privilegiada (homogeneidade) nem uma direção privilegiada (isotropia). Para isso, iremos estudar a invariância do lagrangiano sob translações e sobre as transformações de Lorentz (relatividade restrita) por intermédio do grupo $SO(1,3)$ obtendo assim as leis de conservação. Translações + $SO(1,3)$ formam o grupo de Poincarè.

2.2.1 Translações espaço-temporais

Seja $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu$ (cte) temos

$$\begin{aligned}\phi'(x') &= \phi(x) \\ \partial'_\mu &= \partial_\mu \\ d^4x' &= d^4x\end{aligned}$$

pois a translação da origem não altera a forma como o campo, a taxa de variação e seu elemento de volume são observados. Como o lagrangiano é um escalar temos:

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x^\mu) = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x'), x'^\mu) \quad (2.23)$$

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x^\mu) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x^\mu + \varepsilon^\mu)$$

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x^\mu) = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x^\mu) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \varepsilon^\mu$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \Rightarrow \text{Lagrangiano não deve depende explicitamente de } x^\mu$$

Portanto o lagrangiano deve depender somente do campo e de suas derivadas primeiras $\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))$ para que o espaço em questão seja homogêneo.

2.2.1.1 Tensor energia-momento canônico

Nosso objetivo é obter uma expressão para o tensor energia momento. Sendo assim, considere:

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi \quad (2.24)$$

onde usamos o fato do lagrangiano não depender explicitamente das coordenadas, ou seja, consideramos um espaço homogêneo. Pela equação de movimento temos:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$$

Portanto

$$\partial^\nu \mathcal{L} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \partial_\mu \phi$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi \right) - \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \mathcal{L} = 0$$

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \right) = 0$$

$$\partial_\mu T_{can}^{\mu\nu} = 0$$

onde

$$T_{can}^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.25)$$

Em geral, $T_{can}^{\mu\nu} \neq T_{can}^{\nu\mu}$, sendo esse conhecido como tensor de energia momento canônico que como verificamos é uma quantidade conservada.

De acordo com (2.12) o tensor de energia momento canônico do campo eletromagnético livre ($j^\mu = 0$) será:

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \eta^{\mu\alpha} F_{\alpha\lambda} \partial^\nu A^\lambda - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}_M \quad (2.26)$$

Note que este tensor não é invariante sob transformações de calibre $A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda$

2.2.2 Transformações SO(1,3)

2.2.2.1 Grupo SO(1,3)

Seja um sinal luminoso emitido em (x_0, y_0, z_0, t_0) . Portanto a distância espacial percorrida por esse sinal será:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = c^2 (t - t_0)^2$$

Se $t_0 = 0$ e $x_0 = 0$ temos:

$$s^2 = c^2 t^2 - [x^2 + y^2 + z^2]$$

Então: $s^2 > 0 \longrightarrow$ o sinal emitido possui velocidade $< c$

$s^2 = 0 \longrightarrow$ o sinal emitido possui velocidade $= c$

$s^2 < 0 \longrightarrow$ o sinal emitido possui velocidade $> c$

onde s é conhecido como intervalo entre dois eventos.

Um dos postulados da relatividade restrita é que c é a velocidade limite, ou seja, nenhum objeto poderá ter velocidade superior a $c \longrightarrow s^2 \geq 0$.

Podemos escrever a equação anterior na forma matricial

$$s^2 = (ct \ x \ y \ z) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

$$s^2 = X^t \eta X \quad (2.28)$$

Queremos encontrar um conjunto de transformações que preserve s^2 , isto é:

$$X' = \Lambda X \quad (2.29)$$

tal que:

$$s^2 = X^t \eta X = X'^t \eta X' = s'^2 \quad (2.30)$$

Portanto

$$X^t \eta X = X^t \Lambda^t \eta \Lambda X \longrightarrow \eta = \Lambda^t \eta \Lambda \quad (2.31)$$

O conjunto de transformações que satisfazem a relação $\eta = \Lambda^t \eta \Lambda$ é chamado grupo $O(1,3)$.

O conjunto de transformações que satisfazem a relação $\eta = \Lambda^t \eta \Lambda$ e $\det \Lambda = 1$ é chamado grupo $SO(1,3)$ e representa as transformações de Lorentz próprias.

A notação $O(1,3)$ significa que o índice temporal representado por 1 tem sinal $+$ e os índices espaciais representado por 3 tem sinal $-$ (assinatura da métrica $(+, -, -, -)$).

Vamos obter agora os geradores do grupo $SO(1,3)$. Seja $\Lambda = e^\Omega$ e $\eta = \Lambda^t \eta \Lambda \longrightarrow \Lambda^t = \eta \Lambda^{-1} \eta$. Sendo assim temos:

$$\begin{aligned} (e^\Omega)^t &= \eta (e^\Omega)^{-1} \eta \\ e^{\Omega^t} &= \eta e^{-\Omega} \eta \\ 1 + \Omega^t &= \eta (1 - \Omega) \eta \quad \text{expansão até primeira ordem} \\ \Omega^t &= -\eta \Omega \eta \end{aligned} \quad (2.32)$$

Seja

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta & \theta & \kappa \\ \lambda & \mu & \nu & \rho \end{pmatrix}$$

Logo, $\Omega^t = -\eta\Omega\eta$ será:

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \varepsilon & \lambda \\ b & \beta & \zeta & \mu \\ c & \gamma & \theta & \nu \\ d & \delta & \kappa & \rho \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \varepsilon & \zeta & \theta & \kappa \\ \lambda & \mu & \nu & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & \alpha & \varepsilon & \lambda \\ b & \beta & \zeta & \mu \\ c & \gamma & \theta & \nu \\ d & \delta & \kappa & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & b & c & d \\ \alpha & -\beta & -\gamma & -\delta \\ \varepsilon & -\zeta & -\theta & -\kappa \\ \lambda & -\mu & -\nu & -\rho \end{pmatrix}$$

Portanto

$$\begin{aligned} a &= -a \longrightarrow a=0 \\ \beta &= -\beta \longrightarrow \beta=0 \\ \theta &= -\theta \longrightarrow \theta=0 \\ \rho &= -\rho \longrightarrow \rho=0 \\ \alpha &= b & \zeta &= -\gamma \\ \varepsilon &= c & \mu &= -\delta \\ \lambda &= d & \nu &= -\kappa \end{aligned}$$

Então

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ b & 0 & \gamma & \mu \\ c & -\gamma & 0 & \kappa \\ d & \mu & -\kappa & 0 \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned}\Omega = & \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & + \theta_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \theta_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \theta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Definindo:

$$\Sigma_{01} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Boost ao longo do eixo x}$$

$$\Sigma_{02} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Boost ao longo do eixo y}$$

$$\Sigma_{03} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Boost ao longo do eixo z}$$

e

$$\Sigma_{23} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rotação ao longo do eixo x}$$

$$\Sigma_{31} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rotação ao longo do eixo y}$$

$$\Sigma_{12} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rotação ao longo do eixo z}$$

Sendo que $\Sigma_{\mu\nu} = -\Sigma_{\nu\mu}$ com μ, ν indo de 0 a 3. Observe que

$$(\Sigma_{\mu\nu})^\kappa{}_\lambda = -(\delta_\mu^\kappa \eta_{\nu\lambda} - \delta_\nu^\kappa \eta_{\mu\lambda}) \quad (2.33)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} \omega^{01} &\equiv \alpha_1 & \omega^{02} &\equiv \alpha_2 & \omega^{03} &\equiv \alpha_3 \\ \omega^{12} &\equiv \theta_3 & \omega^{23} &\equiv \theta_1 & \omega^{31} &\equiv \theta_2 \end{aligned}$$

Sendo que $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ com μ, ν indo de 0 a 3.

Assim

$$\begin{aligned} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} &= \omega^{00} \Sigma_{00} + \omega^{01} \Sigma_{01} + \omega^{02} \Sigma_{02} + \omega^{03} \Sigma_{03} \\ &\quad + \omega^{10} \Sigma_{10} + \omega^{11} \Sigma_{11} + \omega^{12} \Sigma_{12} + \omega^{13} \Sigma_{13} \\ &\quad + \omega^{20} \Sigma_{20} + \omega^{21} \Sigma_{21} + \omega^{22} \Sigma_{22} + \omega^{23} \Sigma_{23} \\ &\quad + \omega^{30} \Sigma_{30} + \omega^{31} \Sigma_{31} + \omega^{32} \Sigma_{32} + \omega^{33} \Sigma_{33} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} &= 2(\omega^{01} \Sigma_{01} + \omega^{02} \Sigma_{02} + \omega^{03} \Sigma_{03} + \omega^{12} \Sigma_{12} + \omega^{23} \Sigma_{23} + \omega^{31} \Sigma_{31}) \\ \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} &= 2\Omega \quad \longrightarrow \quad \Omega = \frac{1}{2} \omega^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Como $\Lambda = e^{\Omega} \longrightarrow \Lambda = e^{\frac{1}{2}\omega^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}}$

2.2.2.2 Invariância do lagrangiano sob SO(1,3)

Agora, queremos que o lagrangiano seja invariante sob transformações do grupo SO(1,3), ou seja,

$$\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) = \mathcal{L}(\phi'(x'), \partial'_\mu \phi'(x')) \quad (2.35)$$

Então:

$$\begin{aligned} \phi'(x') &= e^{\frac{1}{2}\omega^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}} \phi(x) \\ \phi'(x') &= \left(1 + \frac{1}{2}\omega^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}\right) \phi(x) \quad (\text{Transf. Infinitesimal}) \\ \phi'(x') &= \phi(x) + \frac{1}{2}\omega^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda} \phi(x) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Ao mesmo tempo sabemos que:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ (\Lambda^{-1})^\rho_\mu x'^\mu &= (\Lambda^{-1})^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu x^\nu \\ (\Lambda^{-1})^\rho_\mu x'^\mu &= \delta^\rho_\nu x^\nu \\ x^\rho &= (\Lambda^{-1})^\rho_\mu x'^\mu \\ x^\rho &= \left(e^{-\frac{1}{2}\omega^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}}\right)^\rho_\mu x'^\mu \\ x^\rho &= \left(1 - \frac{1}{2}\omega^{\kappa\lambda}\Sigma_{\kappa\lambda}\right)^\rho_\mu x'^\mu \\ x^\rho &= \left(\delta^\rho_\mu - \frac{1}{2}\omega^{\kappa\lambda}(\Sigma_{\kappa\lambda})^\rho_\mu\right) x'^\mu \\ x^\rho &= (\delta^\rho_\mu + \omega^\rho_\mu) x'^\mu \\ x^\rho &= x'^\rho + \omega^\rho_\mu x'^\mu \end{aligned} \quad (2.37)$$

Logo,

$$\partial'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \partial_\nu$$

Utilizando (2.37):

$$\begin{aligned}\partial'_\mu &= (\delta_\mu^\nu + \omega_\mu^\nu) \partial_\nu \\ \partial'_\mu &= \partial_\mu + \omega_\mu^\nu \partial_\nu\end{aligned}\tag{2.38}$$

Portanto, utilizando (2.36) e (2.38) temos

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \partial_\mu \phi(x) + \omega_\mu^\nu \partial_\nu \phi(x) + \frac{1}{2} \omega_\mu^\nu \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \partial_\nu \phi(x)$$

Eliminando o termo de segunda ordem em ω temos:

$$\partial'_\mu \phi'(x') = \partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \partial_\mu \phi(x) + \omega_\mu^\nu \partial_\nu \phi(x)\tag{2.39}$$

Retornando a equação (2.35) teremos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) &= \mathcal{L}(\phi(x) + \delta\phi(x), \partial_\mu \phi(x) + \delta\partial_\mu \phi(x)) \\ \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) &= \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\partial_\mu \phi(x) \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \left(\frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \phi \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \left(\frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \partial_\mu \phi + \omega_\mu^\nu \partial_\nu \phi \right)\end{aligned}$$

Utilizando a equação de movimento, ou seja, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)}$ temos:

$$\frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \phi \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \Sigma_{\kappa\lambda} \partial_\mu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \omega_\mu^\nu \partial_\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = 0\tag{2.40}$$

Note que

$$\begin{aligned}\omega_\mu^\nu \partial_\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= \omega^{\nu\mu} \partial_\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \\ &= \omega^{\kappa\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\lambda \phi)} \partial_\kappa \phi \\ &= \frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\lambda \phi)} \partial_\kappa \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\kappa \phi)} \partial_\lambda \phi \right)\end{aligned}\tag{2.41}$$

Lembrando que:

$$T_{\lambda\kappa}^{can} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\lambda \phi)} \partial_\kappa \phi - \eta_{\lambda\kappa} \mathcal{L}\tag{2.42}$$

Substituindo (2.41) em (2.42) temos

$$\omega^\nu_\mu \partial_\nu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} (T_{\lambda\kappa} - T_{\kappa\lambda}) \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.40) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \omega^{\kappa\lambda} \left(\Sigma_{\kappa\lambda} \phi \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + \Sigma_{\kappa\lambda} \partial_\mu \phi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} + T_{\lambda\kappa} - T_{\kappa\lambda} \right) &= 0 \\ T_{\kappa\lambda} - T_{\lambda\kappa} &= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Sigma_{\kappa\lambda} \phi \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Observe que

$$\partial_\mu (x_\lambda T^\mu_\kappa - x_\kappa T^\mu_\lambda) = T_{\lambda\kappa} - T_{\kappa\lambda} \quad (2.45)$$

Usando que $\partial_\mu T^\mu_\lambda = 0$.

Portanto

$$\partial_\mu \left(x_\kappa T^\mu_\lambda - x_\lambda T^\mu_\kappa - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Sigma_{\kappa\lambda} \phi \right) = \partial_\mu M^\mu_{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.46)$$

onde definimos a densidade de momento angular total

$$M^\mu_{\kappa\lambda} = L^\mu_{\kappa\lambda} - S^\mu_{\kappa\lambda} \quad (2.47)$$

em que

$$L^\mu_{\kappa\lambda} = x_\kappa T^\mu_\lambda - x_\lambda T^\mu_\kappa \quad \text{Densidade de momento angular orbital} \quad (2.48)$$

$$S^\mu_{\kappa\lambda} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Sigma_{\kappa\lambda} \phi \quad \text{Densidade de momento Spin} \quad (2.49)$$

onde:

$$\Sigma_{\kappa\lambda} = 0 \quad \phi \text{ for escalar} \quad (2.50)$$

$$(\Sigma_{\kappa\lambda})^\mu_\nu = -(\delta^\mu_\kappa \eta_{\nu\lambda} - \delta^\mu_\lambda \eta_{\nu\kappa}) \quad \phi \text{ for vetor} \quad (2.51)$$

$$(\Sigma_{\kappa\lambda})_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} [\gamma_\kappa, \gamma_\lambda]_{\alpha\beta} \quad \phi \text{ for espinor} \quad (2.52)$$

A densidade de momento angular orbital $L^\mu_{\kappa\lambda}$ não é uma quantidade conservada, ou seja,
 $\partial_\mu L^\mu_{\kappa\lambda} = T_{\kappa\lambda} - T_{\lambda\kappa}$

2.3 SIMETRIZAÇÃO DO TENSOR ENERGIA-MOMENTO

2.3.1 Belinfanti Rosenfeld

A seguir, segue uma fórmula de simetrização do tensor de energia momento no qual preserva a lei de conservação ($\partial_\mu T_{can}^{\mu\nu} = 0$) e as quantidades física (quadri-vetor momento)

$$\theta_{\kappa\lambda} = T_{\kappa\lambda}^{can} + \frac{1}{2}\partial^\mu (S_{\kappa\mu\lambda} + S_{\lambda\mu\kappa} - S_{\mu\kappa\lambda}) \quad (2.53)$$

Note que

$$\theta_{\kappa\lambda} - \theta_{\lambda\kappa} = T_{\kappa\lambda} - T_{\lambda\kappa} - \frac{1}{2}\partial^\mu S_{\mu\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\partial^\mu S_{\mu\lambda\kappa}$$

Lembre-se que $S_{\mu\lambda\kappa} = -S_{\mu\kappa\lambda}$ e que $\partial^\mu S_{\mu\kappa\lambda} = T_{\kappa\lambda} - T_{\lambda\kappa}$.

Portanto

$$\theta_{\kappa\lambda} - \theta_{\lambda\kappa} = 0 \longrightarrow \theta_{\kappa\lambda} = \theta_{\lambda\kappa} \quad (2.54)$$

Observe também

$$\partial^\kappa \theta_{\kappa\lambda} = \partial^\kappa T_{\kappa\lambda} + \frac{1}{2}\partial^\kappa \partial^\mu (S_{\kappa\mu\lambda} + S_{\lambda\mu\kappa} - S_{\mu\kappa\lambda})$$

Lembre-se que $\partial^\kappa T_{\kappa\lambda} = 0$ e que $\partial^\kappa \partial^\mu S_{\lambda\mu\kappa} = 0$ pois temos a contração de um objeto simétrico com um objeto anti-simétrico.

Portanto

$$\begin{aligned} \partial^\kappa \theta_{\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\partial^\mu (\partial^\kappa S_{\kappa\mu\lambda}) - \frac{1}{2}\partial^\kappa (\partial^\mu S_{\mu\kappa\lambda}) \\ \partial^\kappa \theta_{\kappa\lambda} &= \frac{1}{2}\partial^\mu (T_{\mu\lambda} - T_{\lambda\mu}) - \frac{1}{2}\partial^\kappa (T_{\kappa\lambda} - T_{\lambda\kappa}) \\ \partial^\kappa \theta_{\kappa\lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (2.55)$$

A partir de (2.12), obtemos o tensor de energia momento canônico do campo eletromagnético livre. Realizando sua simetrização obtemos:

$$\theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F_\lambda{}^\nu + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right) \quad (2.56)$$

onde

$$\theta^{00} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad (\text{Densidade volumétrica de energia}) \quad (2.57)$$

$$\theta^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \quad (\text{Componentes do vetor de Poynting}) \quad (2.58)$$

$$\theta^{ij} = -\frac{1}{4\pi} \left(E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \right) \quad (\text{Tensor de tensão de Maxwell}) \quad (2.59)$$

2.3.2 Quadri-Momento

O vetor quadri-momento é definido a partir do tensor energia momento simetrizado, ou seja:

$$P^\mu = \int_V d^3x \theta^{0\mu} \quad (2.60)$$

onde no caso do eletromagnetismo para espaço livre P^0 está relacionado com a energia e P^i está associado ao momento linear

2.3.3 Tensor Momento Angular

O tensor momento angular orbital é definido como:

$$L_{[\mu\nu]}^{orb} = \int_V d^3x \left(x_\mu \theta_\nu^0 - x_\nu \theta_\mu^0 \right) \quad (2.61)$$

onde θ_ν^0 é o tensor energia momento simetrizado

3 RELATIVIDADE GERAL - INTRODUÇÃO

3.1 PRINCÍPIO DE EQUIVALÊNCIA

Localmente, são indistinguíveis os efeitos observados em um referencial uniformemente acelerado na ausência de um campo gravitacional e em um referencial inercial sob a influência de um campo gravitacional uniforme, ou seja, os dois sistemas assim são fisicamente equivalentes.

Imaginemos uma nave espacial em repouso num referencial inercial no qual existe um campo gravitacional digamos $-\vec{g}$. No interior da nave, os objetos, que são abandonados, caíram com aceleração g . O astronauta que está em pé sentirá uma força oposta ao seu peso. Agora imagine que a nave está no espaço na ausência de campo gravitacional e que seus foguetes são ligados produzindo uma aceleração de $\vec{g}$. Também, no interior da nave, os objetos, que são abandonados, caíram com aceleração g . O astronauta que está em pé sentirá a mesma força oposta ao seu peso. Portanto, das observações feitas no seu próprio sistema, o astronauta não poderia distinguir as situações.

O princípio da equivalência também pode ser postulado da seguinte forma: Localmente, são indistinguíveis os efeitos observados em um sistema de referência em queda livre dentro de um campo gravitacional e um referencial inercial na ausência de campo gravitacional.

Imaginemos uma pessoa em queda livre na superfície da Terra e a mesma pessoa no espaço (flutuando) na ausência de campo gravitacional. Nas duas situações a pessoa sentirá ausência de peso, ou seja, as situações são indistinguíveis.

3.2 PRINCÍPIO DA COVARIÂNCIA GERAL

O Princípio da covariância geral é um método que baseia-se no Princípio de equivalência. Ele afirma que uma equação física vale em um campo gravitacional geral, se duas condições são satisfeitas:

1-A equação é válida na ausência de gravidade: ou seja, concorda com as leis da relatividade restrita quando o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ é igual ao tensor de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$ e quando a conexão afim desaparece.

2-A equação é covariante: significa que ela preserva sua forma sob uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'$

3.3 EQUAÇÃO DA GEODÉSICA

Considere uma partícula sob a influência somente de um campo gravitacional. De acordo com o princípio de equivalência, podemos tratar esse sistema como inercial ξ^α . Seja um outro sistema que

move-se com velocidade constante sobre ξ^α . Então, sua equação de movimento será:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (3.1)$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio.

Agora vamos supor outro sistema de coordenadas x^μ , que pode ser um sistema em repouso no laboratório, mas também pode ser acelerado, rotativo ou o que quisermos. O sistema de coordenadas em queda livre ξ^α pode ser relacionado com o sistema de coordenadas x^μ . Então, podemos escrever a equação anterior da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{d\tau} \right) \\ 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Multiplicando a eq. anterior por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \right) + \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \left(\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) &= 0 \\ \delta_\mu^\lambda \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Definindo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \equiv \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \quad (3.3)$$

no qual é simétrico em μ, ν , ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (3.4)$$

Temos:

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (3.5)$$

Esta é conhecida como equação da Geodésica ou equação de movimento vista pelo referencial x^μ . A eq. (3.5) seria então a segunda lei de Newton em termos das coordenadas x^μ

3.4 SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL

Sabemos que o sistema ξ^α na seção anterior, devido ao princípio de equivalência, é um sistema inercial na ausência de campo gravitacional, ou seja,

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta$$

Mas

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

Portanto

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu$$

ou

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (3.6)$$

Vamos calcular $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \right) \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \end{aligned}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}$$

$$\frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} = \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho}$$

Logo temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} &= g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho + g_{\rho\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^\rho\end{aligned}\quad (3.7)$$

Note que

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} = 2g_{\rho\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \quad (3.8)$$

Multiplicando a equação anterior por $\frac{1}{2}g^{\alpha\nu}$ temos:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) \quad (3.9)$$

Observe que $\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = \Gamma_{\lambda\mu}^\alpha$

ou

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\nu} (\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \quad (3.10)$$

Este é conhecido como símbolo de Christoffel ou conexão afim.

Gostaríamos que a conexão afim se transformasse como um tensor, ou seja,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\lambda} = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\gamma}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$$

Mas:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\prime\lambda} = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \quad (3.11)$$

e

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\beta}} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\beta}} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right) \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\ &= \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11) temos:

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial^2 \xi^{\beta}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\beta}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \\ \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}{}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Portanto $\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ não se transforma como um tensor. Podemos modificar o 2 membro da equação acima. Sabemos que $\delta_{\sigma}^{\rho} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}}$. Logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \delta_{\sigma}^{\rho} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\beta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x'^{\mu} \partial x^{\sigma}} &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a equação anterior por $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$ temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\beta} \frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} &= - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x'^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \\
\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\beta} \delta_\nu^\beta &= - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} \right) \\
\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial}{\partial x^\delta} \left(\frac{\partial x'^\beta}{\partial x^\sigma} \right) \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\mu} \\
\frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} &= - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\beta}{\partial x^\delta \partial x^\sigma}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Substituindo (3.15) em (3.14) teremos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\delta \partial x^\sigma} \tag{3.16}$$

que iremos utilizar a seguir.

3.5 DERIVADA COVARIANTE

Sabemos que o vetor V^μ se transforma segundo:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \tag{3.17}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \right) \\
\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} V^\nu \right) \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \\
\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto a derivada $\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda}$ não se transforma como um tensor.

Vamos calcular $\Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa}$. Lembre-se da equação (3.16)

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} &= \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \right) \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x^{\beta}} V^{\beta} \\ \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}\end{aligned}\quad (3.19)$$

Somando as equações (3.18) e (3.19) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} \\ \frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} \right)\end{aligned}\quad (3.20)$$

ou seja, $\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa}$ se transforma como um tensor. Portanto, a derivada covariante ∇_{λ} de um vetor contravariante será definida por:

$$\nabla_{\lambda} V^{\mu} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa} \quad (3.21)$$

Com o mesmo argumento anterior, verifica-se que a derivada covariante de um vetor covariante será:

$$\nabla_{\lambda} V_{\nu} \equiv \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\beta} V_{\beta} \quad (3.22)$$

3.5.1 Propriedades:

$$\nabla_{\lambda} (aA^{\mu}_{\nu} + bB^{\mu}_{\nu}) = a\nabla_{\lambda} A^{\mu}_{\nu} + b\nabla_{\lambda} B^{\mu}_{\nu}$$

$$\nabla_{\rho} T^{\mu\sigma}_{\lambda} = \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} T^{\mu\sigma}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\mu} T^{\nu\sigma}_{\lambda} + \Gamma_{\rho\nu}^{\sigma} T^{\mu\nu}_{\lambda} - \Gamma_{\lambda\rho}^{\kappa} T^{\mu\sigma}_{\kappa}$$

A propriedade anterior é de fácil demonstração, ou seja, lembre-se que um tensor é formado pelo produto tensorial de vetores e aplique a derivada do produto. Além disso, note o seguinte resultado:

$$\nabla_{\lambda} g_{\mu\nu} = \partial_{\lambda} g_{\mu\nu} - g_{\rho\nu} \Gamma_{\lambda\mu}^{\rho} - g_{\rho\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^{\rho} = 0$$

que será necessário na ocasião da dedução das equações de movimento.

3.6 TENSOR DE CURVATURA DE RIEMANN

O comutador de dois objetos A e B é definido por:

$$[A, B] = AB - BA$$

Dizemos que A comuta com B se $AB - BA = 0$. Vamos então tomar o comutador de duas derivadas covariantes sobre um vetor qualquer V_α

$$\begin{aligned} [\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\alpha &= (\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu)V_\alpha \\ &= \nabla_\mu(\nabla_\nu V_\alpha) - \nabla_\nu(\nabla_\mu V_\alpha) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \nabla_\mu(\nabla_\nu V_\alpha) &= \partial_\mu(\nabla_\nu V_\alpha) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \nabla_\lambda V_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \nabla_\nu V_\lambda \\ &= \partial_\mu(\partial_\nu V_\alpha - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda V_\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda (\partial_\lambda V_\alpha - \Gamma_{\lambda\alpha}^\sigma V_\sigma) - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda (\partial_\nu V_\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma V_\sigma) \\ \nabla_\mu(\nabla_\nu V_\alpha) &= \partial_\mu \partial_\nu V_\alpha - V_\beta \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\nu\alpha}^\lambda \partial_\mu V_\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda V_\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\alpha}^\sigma V_\sigma - \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \partial_\nu V_\lambda + \Gamma_{\mu\alpha}^\lambda \Gamma_{\nu\lambda}^\beta V_\beta \end{aligned}$$

Logo

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V_\alpha = -R_{\alpha\nu\mu}^\beta V_\beta$$

onde definimos:

$$R_{\alpha\nu\mu}^\beta = \Gamma_{\alpha\nu}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\beta + \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - \Gamma_{\alpha\mu}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\beta - \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \quad (3.23)$$

que é reconhecido como tensor de Riemann. Além disso, podemos fazer:

$$R_{\rho\alpha\nu\mu} = g_{\rho\beta} R_{\alpha\nu\mu}^\beta \quad (3.24)$$

Com a intenção de verificar as propriedades de simetria do tensor de Riemann consideremos as passagens a seguir:

Vamos calcular $\partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta &= \partial_\mu \left[\frac{1}{2} g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\alpha}) \right] \\ \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta &= \frac{1}{2} \partial_\mu g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\alpha}) + \frac{1}{2} g^{\beta\sigma} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\alpha}) \end{aligned}$$

Vamos calcular $g_{\rho\beta} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta$

$$\begin{aligned}
g_{\rho\beta} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta &= \frac{1}{2} g_{\rho\beta} \partial_\mu g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\alpha}) \\
&+ \frac{1}{2} g_{\rho\beta} g^{\beta\sigma} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\sigma} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\sigma} - \partial_\mu \partial_\sigma g_{\nu\alpha})
\end{aligned}$$

Lembremos que:

$$\begin{aligned}
g_{\rho\beta} g^{\beta\sigma} &= \delta_\rho^\sigma \\
\partial_\mu (g_{\rho\beta} g^{\beta\sigma}) &= 0 \iff g_{\rho\beta} \partial_\mu g^{\beta\sigma} = -g^{\beta\sigma} \partial_\mu g_{\rho\beta}
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
g_{\rho\beta} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta &= -\frac{1}{2} \partial_\mu g_{\rho\beta} g^{\beta\sigma} (\partial_\alpha g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\alpha}) \\
&+ \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\rho} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\alpha}) \\
g_{\rho\beta} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta &= -\partial_\mu g_{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\beta + \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\rho} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\alpha})
\end{aligned}$$

Lembremos que:

$$\partial_\mu g_{\rho\beta} = g_{\rho\eta} \Gamma_{\beta\mu}^\eta + g_{\beta\eta} \Gamma_{\rho\mu}^\eta$$

Portanto

$$\begin{aligned}
g_{\rho\beta} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta &= -g_{\rho\eta} \Gamma_{\beta\mu}^\eta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - g_{\beta\eta} \Gamma_{\rho\mu}^\eta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta \\
&+ \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\rho} + \partial_\mu \partial_\nu g_{\alpha\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\alpha})
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Assim temos:

$$R_{\rho\alpha\nu\mu} = g_{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\nu}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\beta + g_{\rho\beta} \partial_\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\beta - g_{\rho\beta} \Gamma_{\alpha\mu}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\beta - g_{\rho\beta} \partial_\nu \Gamma_{\alpha\mu}^\beta \tag{3.26}$$

Substituindo (3.25) em (3.26) temos:

$$\begin{aligned}
R_{\rho\alpha\nu\mu} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \partial_\alpha g_{\nu\rho} - \partial_\mu \partial_\rho g_{\nu\alpha} - \partial_\nu \partial_\alpha g_{\mu\rho} + \partial_\nu \partial_\rho g_{\mu\alpha}) \\
&+ g_{\beta\eta} (\Gamma_{\rho\nu}^\eta \Gamma_{\alpha\mu}^\beta - \Gamma_{\rho\mu}^\eta \Gamma_{\alpha\nu}^\beta)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

A partir de (3.27) é possível verificar as propriedades de simetria abaixo.

3.6.1 Propriedades

Da equação (3.27) é possível obter as seguintes propriedades:

a) Simetria

$$R_{\rho\alpha\nu\mu} = R_{\nu\mu\rho\alpha} \quad (3.28)$$

b) Anti-Simetria

$$R_{\rho\alpha\nu\mu} = -R_{\alpha\rho\nu\mu} = -R_{\rho\alpha\mu\nu} = R_{\alpha\rho\mu\nu} \quad (3.29)$$

c) Ciclicidade

$$R_{\rho\alpha\nu\mu} + R_{\rho\nu\mu\alpha} + R_{\rho\mu\alpha\nu} = 0 \quad (3.30)$$

Observe que o número de elementos independentes do tensor de Riemann, devido as propriedades anteriores, é dado pela seguinte fórmula $C_n = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1)$ onde n é a dimensão do espaço. Para o espaço 4-dimensional temos $C_4 = 20$. No apêndice apresentamos explicitamente as componentes independentes do tensor de Riemann.

3.7 TENSOR E ESCALAR DE RICCI

3.7.1 Tensor de Ricci

O tensor de Ricci é definido como:

$$R_{\alpha\mu} = g^{\rho\nu} R_{\rho\alpha\nu\mu} \quad (3.31)$$

Note que o tensor de Ricci é simétrico, ou seja,

$$R_{\alpha\mu} = R_{\mu\alpha} \quad (3.32)$$

3.7.2 Escalar de Ricci

O escalar de Ricci é definido como:

$$R = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\mu} \quad (3.33)$$

4 EQUAÇÃO DE EINSTEIN VIA TEORIA CLÁSSICA DE CAMPOS

Nosso objetivo nesse capítulo será a partir da ação de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x$$

obter a equação de Einstein para o vácuo

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R g_{\mu\nu} = 0$$

Válida para regiões fora da matéria.

E posteriormente obter a equação de Einstein na presença de matéria

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$$

Porém precisamos primeiramente calcular as variações funcionais de $\delta\sqrt{-g}$ e δR . Os apêndices foram desenvolvidos para tal objetivo e apresentam de forma detalhada os cálculos realizados.

4.1 VARIAÇÃO FUNCIONAL DO ESCALAR DE RICCI

Sabemos que:

$$\begin{aligned} R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \\ \delta R &= \delta(g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \\ &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} (\nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\ &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \nabla_\nu (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \\ \delta R &= \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda) - \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\lambda (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde foram usados os resultados dos Apêndices.

4.2 EQUAÇÃO DE EINSTEIN

4.2.1 Vácuo

Seja a ação de Einstein-Hilbert:

$$S_{EH} = \frac{c^3}{16\pi G} \int \sqrt{-g} R d^4x$$

defina $\kappa = \frac{c^3}{16\pi G}$ é uma constante, então:

$$\begin{aligned}\delta S_{EH} &= \kappa \int \delta(\sqrt{-g} R) d^4x \\ \delta S_{EH} &= \kappa \int [\delta\sqrt{-g} R + \sqrt{-g} \delta R] d^4x \\ \delta S_{EH} &= \kappa \int \left[-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} R + \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \right] d^4x \\ \delta S_{EH} &= \kappa \int \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} d^4x = 0\end{aligned}$$

onde consideramos que os termos de superfície irão a zero. Assim temos:

$$\delta S_{EH} = \int \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} = 0$$

Como $\delta g^{\mu\nu}$ é arbitrário, portanto temos:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0 \quad (4.2)$$

Válida para regiões fora da matéria.

4.2.1.1 Solução de Schwazschild

Quando afirmamos $G_{\mu\nu} = 0$ estamos numa região fora da matéria e sendo nossa condição de contorno que a matéria que irá gerar a curvatura do espaço tem distribuição esférica e estática, obteremos Schwazschild como única solução garantida pelo teorema de Birkhoff.

$$ds^2 = (1 - r_s/r) dt^2 - \left(\frac{1}{1 - r_s/r} \right) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.3)$$

onde $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ é conhecido como raio de Schwazschild.

O raio de Schwazschild é um parâmetro para determinar se um objeto é um buraco negro. Se $r_M < r_s$ temos um buraco negro. (r_M significa raio da matéria)

A expansão de campo fraco só é valida para regiões externas, ou seja, $r > r_s$.

4.2.2 Matéria

Seja:

$$S = S_{EH} + S_M \quad (4.4)$$

A equação de movimento será:

$$\frac{\delta(S_{EH} + S_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (4.5)$$

onde

$$\frac{\delta(S_{EH})}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{c^3}{16\pi G} \sqrt{-g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \quad (4.6)$$

Com isso, a equação de movimento será:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{16\pi G}{c^3 \sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.7)$$

Podemos agora reconhecer o tensor de energia momento

$$T_{\mu\nu}^M = -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} \quad (4.8)$$

É possível provar que $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^M = 0$. Para verificar essa afirmação recomendo (WEINBERG, 1972).

4.2.2.1 Solução de Friedmann-Robertson-Walker

Uma maneira de resolver a equação $G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ é por intermédio da métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (4.9)$$

que representa uma distribuição de matéria de forma homogênea e isotrópica em que $a(t)$ é conhecido como fator de escala e k curvatura ($k = 0$ espaço plano, $k > 0$ espaço fechado, $k < 0$ espaço aberto).

Desenvolvendo $G_{\mu\nu}$ obtemos:

$$G_{00} = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \quad (4.10)$$

$$G_{11} = \frac{\ddot{a}}{a} = G_{22} = G_{33} \quad (4.11)$$

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad \text{para } \mu \neq \nu \quad (4.12)$$

Note que $T_{\mu\nu}$ deverá então ser 0 (zero) para $\mu \neq \nu$ e $T_{11} = T_{22} = T_{33}$. Dado um $T_{\mu\nu}$ que respeite essas restrições obtemos 2 equações diferenciais ordinárias lineares para duas incógnitas $a(t)$ e k sendo um sistema solúvel, ou seja, obteremos o fator de escala do espaço, se o mesmo está sendo acelerado e sua curvatura.

4.3 LINEARIZAÇÃO DA AÇÃO DE EINSTEIN-HILBERT

Considere uma expansão a campo fraco

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4.13)$$

$$g = \det g_{\mu\nu} = -1 - h + O(h^2) \quad (4.14)$$

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2) \quad (4.15)$$

Seja a ação de Einstein Hilbert, sem a constante multiplicativa,

$$\begin{aligned} S_{EH} &= \int d^4x \sqrt{-g} R \\ S_{EHL} &= \int d^4x (1 + h + O(h^2))^{1/2} (R^{(1)} + R^{(2)} + O(h^3)) \end{aligned} \quad (4.16)$$

onde $R^{(1)}$ significa primeira ordem em h do escalar de Ricci

$$\begin{aligned} R^{(1)} &= (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})^{(1)} \\ R^{(1)} &= \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu})^{(1)} \\ R_{\mu\nu}^{(1)} &= \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial_\alpha \partial_\nu h_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} - (\beta \rightarrow \nu)) \quad (4.19)$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial^\beta h_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial^\beta h_{\beta\nu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h) \quad (4.20)$$

$$R^{(1)} = \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square h \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
R^{(2)} &= (g^{\mu\nu} R_{\mu\nu})^{(2)} \\
&= [(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2))(R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots)]^{(2)} \\
R^{(2)} &= \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(2)} - h^{\mu\nu} R_{\mu\nu}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^{(2)} &= (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu})^{(2)} \\
&= [(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + O(h^2))(R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)} + R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(2)} + \dots)]^{(2)} \\
R_{\mu\nu}^{(2)} &= \eta^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(2)} - h^{\alpha\beta} R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(2)} = \eta_{\gamma\lambda} \Gamma_{\alpha\nu}^{\gamma(1)} \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda(1)} - (\beta \rightarrow \nu) \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\mu\beta\nu}^{(2)} &= \frac{1}{4}(\partial_\alpha h_{\nu\lambda} + \partial_\nu h_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda h_{\alpha\nu})(\partial_\mu h_\beta^\lambda + \partial_\beta h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\beta}) \\
&\quad - \frac{1}{4}(\partial_\alpha h_{\beta\lambda} + \partial_\beta h_{\lambda\alpha} - \partial_\lambda h_{\alpha\beta})(\partial_\mu h_\nu^\lambda + \partial_\nu h_\mu^\lambda - \partial^\lambda h_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
R_{\mu\nu}^{(2)} &= \frac{1}{2}h^{\alpha\beta}[\partial_\mu \partial_\nu h_{\alpha\beta} - \partial_\nu \partial_\alpha h_{\mu\beta} - \partial_\mu \partial_\beta h_{\alpha\nu} + \partial_\alpha \partial_\beta h_{\mu\nu}] \\
&\quad - \frac{1}{4}[2\partial_\alpha h_\beta^\alpha - \partial_\beta h][\partial_\nu h_\mu^\beta + \partial_\mu h_\nu^\beta - \partial^\beta h_{\mu\nu}] \\
&\quad + \frac{1}{4}[\partial_\alpha h_{\beta\nu} + \partial_\nu h_{\beta\alpha} - \partial_\beta h_{\alpha\nu}][\partial^\alpha h_\mu^\beta + \partial_\mu h^{\beta\alpha} - \partial^\beta h_\mu^\alpha]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$R^{(2)} = -\frac{1}{4}\partial^\beta h^{\mu\nu} \partial_\beta h_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\partial_\beta h_{\alpha\mu} \partial^\alpha h^{\beta\mu} + \frac{1}{4}\partial_\beta h_{\alpha\mu} \partial^\mu h^{\beta\alpha} - \frac{1}{4}\partial_\beta h \partial^\beta h \tag{4.27}$$

Em expansão de campo fraco $(1 + h + O(h^2))^{1/2} = 1 + 1/2h$. Logo

$$S_{EHL} = \int d^4x \left[R^{(1)} + \frac{1}{2} h R^{(1)} + R^{(2)} \right] \tag{4.28}$$

mas $\int d^4x R^{(1)} = 0$ Portanto

$$S_{EHL} = \int d^4x \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2}\partial^\beta h^{\mu\nu} \partial_\beta h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\beta h_{\alpha\mu} \partial^\alpha h^{\beta\mu} + \frac{1}{2}\partial_\beta h_{\alpha\mu} \partial^\mu h^{\beta\alpha} - \partial^\mu h \partial_\nu h_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\beta h \partial^\beta h \right] \tag{4.29}$$

A equação de movimento $\frac{\delta S_{EHL}}{\delta h_{\mu\nu}} = 0$ será:

$$\square h_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu h - \partial_\mu \partial^\alpha h_{\alpha\nu} - \partial_\nu \partial^\alpha h_{\alpha\mu} = \eta_{\mu\nu} (\square h - \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta}) \tag{4.30}$$

A equação (4.30) pode ser obtida também pela equação de Einstein para o vácuo, ou seja, $G_{\mu\nu}^1 = 0$. Aplicando na equação anterior $\eta^{\mu\nu}$ temos:

$$(D-2)(\square h - \partial^\alpha \partial^\beta h_{\alpha\beta}) = 0 \tag{4.31}$$

Usando a condição de calibre $\partial^\mu h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_\nu h$ e (4.31) em (4.30) temos:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 \quad (4.32)$$

Note que a ação de Einstein-Hilbert linearizada é invariante sob $\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu$, ou seja, sendo $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \psi_\nu + \partial_\nu \psi_\mu$ não altera a forma da S_{EHL} . Impondo a condição de calibre sobre $h'_{\mu\nu}$ temos:

$$\square \psi_\mu = 0 \quad (4.33)$$

Com a eq (4.33) determinamos ψ_μ e com a condição de calibre determinados parte de $h_{\mu\nu}$. Assim, a condição de calibre retira 4 graus de liberdade e a equação (4.33) retira mais 4 graus de liberdade da teoria sobrando apenas 2 graus de liberdade para $h'_{\mu\nu}$.

4.3.1 Quadri-momento

Podemos escrever a equação de Einstein da seguinte maneira:

$$G^1_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^M_{\mu\nu} + G^1_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}$$

Definindo

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{8\pi G} (G^1_{\mu\nu} - G_{\mu\nu}) \quad (4.34)$$

Temos:

$$G^1_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} (T^M_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \implies G^1_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \tau_{\mu\nu} \quad (4.35)$$

Vamos provar que $\partial^\mu \tau_{\mu\nu} = 0$. Para isso iremos primeiro calcular $\partial^\mu G^1_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \partial^\mu G^1_{\mu\nu} &= \partial^\mu \left(R^1_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \left(\partial_\nu \partial^\beta h_{\mu\beta} + \partial_\mu \partial^\beta h_{\beta\nu} - \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \square h \right) \\ \partial^\mu G^1_{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}$$

Com o auxílio da eq. (4.35) podemos validar a afirmação $\partial^\mu \tau_{\mu\nu} = 0$.

Assim, podemos definir o quadri-momento

$$P^\mu \equiv \int_V d^3x \tau^{0\mu} \quad (4.36)$$

Note que como P^0 é a energia então podemos afirmar que a energia armazenada em um espaço fechado (confinado) advém apenas de $G^1_{\mu\nu}$

4.3.2 Momento angular total

Definindo

$$M_{\mu\nu\alpha} \equiv x_\nu \tau_{\mu\alpha} - x_\alpha \tau_{\mu\nu} \quad (4.37)$$

A verificação que $\partial^\mu M_{\mu\nu\alpha} = 0$ é direta pois $\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu}$ e $\partial^\mu \tau_{\mu\nu} = 0$.

Vamos definir o momento angular total

$$J_{[\nu\alpha]} \equiv \int_V d^3x M^0_{\nu\alpha} \quad (4.38)$$

5 TENSOR ENERGIA-MOMENTO

5.1 TENSOR ENERGIA-MOMENTO ELETROMAGNÉTICO

Com o auxílio de (4.8) iremos calcular o tensor energia momento eletromagnético. Seja:

$$S_M = \int d^4x \sqrt{-\eta} - \frac{1}{16\pi} F^{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda} \quad (5.1)$$

$$\delta_\eta S_M = \int d^4x \delta_\eta \left(\sqrt{-\eta} - \frac{1}{16\pi} \eta^{\kappa\alpha} \eta^{\lambda\beta} F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} \right) \quad (5.2)$$

Daqui por diante iremos utilizar δ em vez de δ_η subentendendo que a variação é sobre o campo métrico.

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int d^4x \left(\delta [\sqrt{-\eta}] - \frac{1}{16\pi} \eta^{\kappa\alpha} \eta^{\lambda\beta} F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda} + \sqrt{-\eta} \delta [\eta^{\kappa\alpha} \eta^{\lambda\beta} F_{\alpha\beta} F_{\kappa\lambda}] \right) \\ \delta S_M &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{32\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^\nu \right) \delta \eta_{\mu\nu} \end{aligned}$$

Onde utilizamos $\eta^{\kappa\alpha} = -\eta^{\kappa\mu} \eta^{\alpha\nu} \delta \eta_{\mu\nu}$.

A partir disso podemos concluir que:

$$\frac{\delta S_M}{\delta \eta_{\mu\nu}} = \sqrt{-\eta} \left(-\frac{1}{32\pi} \eta^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} - \frac{1}{8\pi} F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^\nu \right) \quad (5.3)$$

Logo

$$T^{\mu\nu} = \frac{-2c}{\sqrt{-\eta}} \frac{\delta S_M}{\delta \eta_{\mu\nu}} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F^{\kappa\lambda} \right) \quad (5.4)$$

5.2 TENSOR ENERGIA-MOMENTO - MODELO $\mathcal{L}(a_1)$

Esse modelo foi desenvolvido pelos pesquisador da Unesp de Guaratinguetá (DALMAZI, 2013) no qual para $a_1 = 1/4$ temos o modelo de Fierz-Pauli.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(a_1) &= -\frac{1}{2} \partial^\mu h^{(\alpha\beta)} \partial_\mu h_{(\alpha\beta)} + \left(a_1 + \frac{1}{4} \right) \partial^\mu h [\partial_\mu h - 2\partial^\alpha h_{(\alpha\mu)}] + [\partial^\alpha h_{(\alpha\beta)}]^2 \\ &\quad + \left(a_1 - \frac{1}{4} \right) [\partial^\alpha h_{\alpha\beta}]^2 - \frac{m^2}{2} (h_{\alpha\beta} h^{\beta\alpha} - h^2) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Vamos calcular a variação funcional de $\mathcal{L}(a_1)$ com relação a métrica, ou seja:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\partial^\mu h^{(\alpha\beta)} \partial_\mu h_{(\alpha\beta)} \right) &= - \left(\partial^\beta h_{(\lambda\sigma)} \partial^\alpha h^{(\lambda\sigma)} - 2h^{(\kappa\beta)} \square h^{(\alpha}_{\kappa)} \right) \delta \eta_{\alpha\beta} \\
\delta \left(\partial^\mu h \partial_\mu h \right) &= - \left(\partial^\alpha h \partial^\beta h + 2\partial^\mu h^{(\alpha\beta)} \partial_\mu h \right) \delta \eta_{\alpha\beta} \\
\delta \left(\partial^\mu h \partial^\alpha h_{(\alpha\mu)} \right) &= - \left(\partial^\beta h \partial_\kappa h^{(\kappa\alpha)} + \partial^\alpha h \partial_\kappa h^{(\kappa\beta)} + \partial^\mu h^{(\alpha\beta)} \partial^\kappa h_{(\kappa\mu)} \right) \delta \eta_{\alpha\beta} \\
\delta \left(\partial^\alpha h_{(\alpha\beta)} \partial_\kappa h^{(\kappa\beta)} \right) &= - \left(\partial^\kappa h_{(\kappa\lambda)} \partial^\beta h^{(\alpha\lambda)} + \partial^\kappa h_{(\kappa\lambda)} \partial^\alpha h^{(\beta\lambda)} \right) \delta \eta_{\alpha\beta} \\
&\quad - \left(\partial_\kappa h^{(\kappa\beta)} \partial_\rho h^{(\rho\alpha)} \right) \delta \eta_{\alpha\beta} \\
\delta \left(\partial^\alpha h_{\alpha\beta} \partial_\lambda h^{\lambda\beta} \right) &= - \left(\partial_\lambda h^{\lambda\kappa} \partial^\beta h^\alpha_{\kappa} + \partial_\lambda h^{\lambda\kappa} \partial^\alpha h^\beta_{\kappa} + \partial_\lambda h^{\lambda\beta} \partial_\rho h^{\rho\alpha} \right) \delta \eta_{\alpha\beta} \\
\delta \left(h_{\alpha\beta} h^{\beta\alpha} - h^2 \right) &= - \left(h^{\nu\alpha} h^\beta_{\nu} + h^{\nu\beta} h^\alpha_{\nu} - 2h h^{(\alpha\beta)} \right) \delta \eta_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Com isso temos:

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x \delta(\sqrt{-\eta} \mathcal{L}(a_1)) \\
\delta(\sqrt{-\eta} \mathcal{L}(a_1)) &= \delta\sqrt{-\eta} \mathcal{L}(a_1) + \sqrt{-\eta} \delta\mathcal{L}(a_1) \\
\delta\sqrt{-\eta} &= \frac{1}{2}\sqrt{-\eta}\eta^{\alpha\beta}\delta\eta_{\alpha\beta} \\
\delta S &= \int d^4x \sqrt{-\eta} \left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}(a_1) + \frac{\delta\mathcal{L}(a_1)}{\delta\eta_{\alpha\beta}} \right) \delta\eta_{\alpha\beta} \\
\frac{\delta S}{\delta\eta_{\alpha\beta}} &= \sqrt{-\eta} \left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}(a_1) + \frac{\delta\mathcal{L}(a_1)}{\delta\eta_{\alpha\beta}} \right) \tag{5.6}
\end{aligned}$$

Logo

$$T^{\alpha\beta} = -2c \left(\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \mathcal{L}(a_1) + \frac{\delta\mathcal{L}(a_1)}{\delta\eta_{\alpha\beta}} \right) \tag{5.7}$$

Utilizando as seguintes equações, derivadas da equação de movimento,

$$h = 0 \tag{5.8}$$

$$h_{[\mu\nu]} = 0 \tag{5.9}$$

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \tag{5.10}$$

$$(\square - m^2)h_{(\mu\nu)} = 0 \tag{5.11}$$

O tensor energia-momento do modelo $\mathcal{L}(a_1)$ será:

$$T^{\alpha\beta} = -2c \left[\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta} \left(-\frac{1}{2}\partial^\kappa h^{(\mu\nu)} \partial_\kappa h_{(\mu\nu)} - \frac{m^2}{2} h_{(\mu\nu)} h^{(\mu\nu)} \right) + \frac{1}{2}\partial^\beta h_{(\mu\nu)} \partial^\alpha h^{(\mu\nu)} \right] \tag{5.12}$$

Verifica-se que $\partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$

6 COMENTÁRIOS

Sabemos que a conexão afim não se transforma como um tensor, ou seja,

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

Entretanto, pode-se observar que

$$\left(\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma'_{\nu\mu}{}^{\lambda} \right) = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} (\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \Gamma_{\sigma\tau}^{\rho}) \quad (6.1)$$

se transforma como um tensor. A parte anti-simétrica da conexão afim é denominada tensor de torção.

$$T_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \quad (6.2)$$

Desenvolvemos o capítulo de Relatividade Geral - Introdução a partir da invariância do elemento ds^2 , porém existem outras teorias tais que:

$$R_{\mu\nu\alpha\rho} = 0 \quad \text{e} \quad T_{\mu\nu}^{\lambda} \neq 0 \quad (\text{Gravitação Teleparalela})$$

Tentativa de Einstein de unificar a gravitação e o eletromagnetismo.

$$R_{\mu\nu\alpha\rho} \neq 0 \quad \text{e} \quad T_{\mu\nu}^{\lambda} \neq 0 \quad (\text{Teoria de Einstein-Cartan})$$

Podemos também obter a densidade de Lagrangiana de Fiertz-Pauli $\mathcal{L}_{fp} = \mathcal{L}(a1)$ para $a1 = 1/4$ através do método de redução dimensional de Kaluza-Klein no qual partimos de $G_{\mu\nu}^1 = 0$ em D-dimensão e obtemos $\mathcal{L}_{fp}$ em $(D-1)$ dimensão. O método de redução dimensional foi uma tentativa de Kaluza e Klein de unificar a gravitação com eletromagnetismo.

7 CONCLUSÃO

Com a equação de Einstein na presença de matéria mostramos o tensor energia-momento e a solução de Friedmann-Robertson-Walker no qual consistia de a partir de um dado $T_{\mu\nu}$ obter o fator de escala $a(t)$ e a curvatura k desse espaço.

Agora, com a obtenção do tensor energia-momento $\mathcal{L}(a_1)$, uma continuação desse trabalho seria realizar o processo inverso, ou seja, sendo $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\mathcal{L}(a_1)}$ mas trocando ∂_μ por ∇_μ (denominado acoplamento mínimo), pois o tensor calculado foi para o espaço flat, e fixando o fator de escala $a(t) = c_1$ com c_1 constante ou $a(t) = c_1 \sin^2(wt) + c_2$ (oscilante em torno de c_2) e $k = 1$ (espaço fechado) devemos obter a forma funcional de $h_{\mu\nu}$. A escolha de $k=1$ representa um espaço esférico e, para $a(t)$ constante estático, para $a(t) = c_1 \sin^2(wt) + c_2$ pulsante.

Note que, como $G_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico temos 10 equações diferenciais parciais para resolver porém, com a métrica de Friedmann-Robertson-Walker esse número é reduzido para 8 equações pois $G_{11} = G_{22} = G_{33}$ sendo 6 equações homogêneas (iguais a zero) e 2 equações não-homogêneas. Sujeito as seguintes restrições:

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \quad (7.1)$$

$$g^{\mu\nu} h_{\mu\nu} = 0 \quad (7.2)$$

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0 \quad (7.3)$$

$$(\nabla^\mu \nabla_\mu - m^2) h_{\mu\nu} = 0 \quad (7.4)$$

Por que queremos deduzir a forma funcional de $h_{\mu\nu}$?

- Para verificar se τ^{00} é independente do tempo
- Se a energia é positiva através de:

$$P^0 = \int_V d^3x \tau^{00} \quad (7.5)$$

REFERÊNCIAS

- DALMAZI, D. Note on the nonuniqueness of the massive fierz-pauli theory and spectator fields. **Physical Review D**, College Park, v. 88, n. 4, p. 045003(1–5), 2013.
- DAS, A. **Lectures on gravitation**. Singapore: World Scientific, 2011.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **The classical theory of fields**. London: Butterworth Heinemann, 1980.
- LEMOES, N. **Mecânica analítica**. São Paulo: Livraria da Física, 2007.
- WEINBERG, S. **Gravitation and cosmology**: principles and applications of the general theory of relativity. New York: John Wiley and Sons Inc., 1972.

APÊNDICE A – VARIAÇÃO FUNCIONAL DO SÍMBOLO DE CHRISTOFFEL

A partir da variação do campo métrico $g_{\mu\nu}$ obteremos a variação funcional do símbolo de Christoffel.

Sabemos que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})$$

Logo

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\delta g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.1})$$

$$+ \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}\delta g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}\delta g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.2})$$

Porém,

$$\begin{aligned} g^{\sigma\beta}g_{\beta\alpha} &= \delta_{\alpha}^{\sigma} \\ \delta(g^{\sigma\beta}g_{\beta\alpha}) &= \delta(\delta_{\alpha}^{\sigma}) \\ g_{\beta\alpha}\delta g^{\sigma\beta} + g^{\sigma\beta}\delta g_{\beta\alpha} &= 0 \\ g^{\rho\alpha}g_{\beta\alpha}\delta g^{\sigma\beta} &= -g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\delta g_{\beta\alpha} \\ \delta g^{\rho\sigma} &= -g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}\delta g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Substituindo (A.3) em (A.1) temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\delta g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2}g^{\beta\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})g^{\rho\alpha}\delta g_{\alpha\beta} \\ \frac{1}{2}\delta g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) &= -\Gamma_{\mu\nu}^{\beta}g^{\rho\alpha}\delta g_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Vamos verificar que $\delta g_{\mu\nu}$ é um tensor.

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \\ \delta g'_{\mu\nu} &= \delta \left[\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\alpha\beta} \right] \end{aligned}$$

Note que $\delta\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\right) = 0$ pois estamos realizando a variação apenas sobre o campo $g_{\mu\nu}$ e não sobre as coordenadas.

Portanto

$$\delta g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \delta g_{\alpha\beta}$$

Demonstrando que $\delta g'_{\mu\nu}$ se transforma como um tensor de rank-2 covariante. A partir desse fato vamos calcular sua derivada covariante, ou seja,

$$\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} = \partial_\mu \delta g_{\nu\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^\beta \delta g_{\beta\sigma} - \Gamma_{\mu\sigma}^\beta \delta g_{\nu\beta} \quad (\text{A.5})$$

$$\nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} = \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu\sigma}^\beta \delta g_{\beta\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\beta \delta g_{\sigma\beta} \quad (\text{A.6})$$

$$\nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} = \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu}^\beta \delta g_{\beta\nu} - \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \delta g_{\mu\beta} \quad (\text{A.7})$$

Somando as duas primeiras expressões acima e subtraindo da terceira temos:

$$\partial_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu} + 2\Gamma_{\mu\nu}^\beta \delta g_{\beta\sigma} \quad (\text{A.8})$$

Substituindo (A.4) e (A.8) em $\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ temos:

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2}g^{\rho\sigma} (\nabla_\mu \delta g_{\nu\sigma} + \nabla_\nu \delta g_{\sigma\mu} - \nabla_\sigma \delta g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.9})$$

Isso mostra que a variação do símbolo de Christoffel é um tensor embora o mesmo não seja.

APÊNDICE B – VARIAÇÃO FUNCIONAL DO TENSOR DE RICCI

Sabemos que:

$$R_{\mu\nu} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma$$

Logo

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma + \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda &= \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \delta \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\sigma \\ \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda &= \partial_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \Gamma_{\lambda\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\sigma - \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma \end{aligned}$$

Portanto

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\nu \delta \Gamma_{\mu\lambda}^\lambda - \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \quad (\text{Identidade de Palatini}) \quad (\text{B.1})$$

APÊNDICE C – VARIAÇÃO FUNCIONAL DO DETERMINANTE DA MÉTRICA

Sabemos que:

$$g = \det g_{\mu\nu} = \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3}$$

Logo

$$\delta g = \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} \delta g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \quad (C.1)$$

$$+ \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} \delta g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \quad (C.2)$$

$$+ \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} \delta g_{\tau 2} g_{\beta 3} \quad (C.3)$$

$$+ \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} \delta g_{\beta 3} \quad (C.4)$$

Lembre-se que:

$$g_{k\lambda} g^{k\delta} = \delta_{\lambda}^{\delta}$$

$$\delta (g_{k\lambda} g^{k\delta}) = \delta (\delta_{\lambda}^{\delta})$$

$$g^{k\delta} \delta g_{k\lambda} = -g_{k\lambda} \delta g^{k\delta}$$

$$g_{\delta\rho} g^{k\delta} \delta g_{k\lambda} = -g_{\delta\rho} g_{k\lambda} \delta g^{k\delta} \quad (C.5)$$

$$\delta g_{\rho\lambda} = -g_{k\lambda} g_{\delta\rho} \delta g^{k\delta} \quad (C.6)$$

Substituindo (C.6) em (C.1) temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} \delta g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} &= -\varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{k0} g_{\delta\rho} \delta g^{k\delta} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \\ &= -g_{k0} \delta g^{k0} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \\ &\quad -g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \\ &\quad -g_{k0} \delta g^{k2} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 2} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \\ &\quad -g_{k0} \delta g^{k3} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 3} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \end{aligned}$$

Vamos provar que $-g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} = 0$

$$-g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} = g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\sigma\rho\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3}$$

$$-g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} = g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\sigma\rho\tau\beta} g_{\sigma 1} g_{\rho 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3}$$

$$-g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} = g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3}$$

Portanto

$$g_{k0} \delta g^{k1} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 1} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} = 0$$

Da mesma forma é possível provar que:

$$\begin{aligned} g_{k0} \delta g^{k2} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 2} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} &= 0 \\ g_{k0} \delta g^{k3} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 3} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} &= 0 \end{aligned}$$

Assim sendo temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} \delta g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} &= -g_{k0} \delta g^{k0} \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} \\ \varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} \delta g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} &= -g_{k0} \delta g^{k0} g \end{aligned} \quad (C.7)$$

Com os mesmos argumentos é possível mostrar que:

$$\varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} \delta g_{\sigma 1} g_{\tau 2} g_{\beta 3} = -g_{k1} \delta g^{k1} g \quad (C.8)$$

$$\varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} \partial_\alpha g_{\tau 2} g_{\beta 3} = -g_{k2} \delta g^{k2} g \quad (C.9)$$

$$\varepsilon^{\rho\sigma\tau\beta} g_{\rho 0} g_{\sigma 1} g_{\tau 2} \delta g_{\beta 3} = -g_{k3} \delta g^{k3} g \quad (C.10)$$

Com isso podemos concluir que:

$$\delta g = -g g_{\kappa\beta} \delta g^{\kappa\beta} = g g^{\kappa\beta} \delta g_{\kappa\beta} \quad (C.11)$$

Vamos calcular $\delta\sqrt{-g}$

$$\begin{aligned} \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}(-g)^{-1/2} \delta(-g) \\ &= \frac{1}{2}(-g)^{-1/2} -g g^{\kappa\beta} \delta g_{\kappa\beta} \\ \delta\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\kappa\beta} \delta g_{\kappa\beta} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\kappa\beta} \delta g^{\kappa\beta} \end{aligned} \quad (C.12)$$

APÊNDICE D – DIVERGENTE DE UM VETOR

Sabemos que:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \partial_{\alpha} g_{\mu\beta} \quad (\text{D.1})$$

Substituindo (C.12) em (D.1) temos:

$$\Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} \sqrt{-g} \quad (\text{D.2})$$

Vamos calcular $\nabla_{\mu} A^{\mu}$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} A^{\mu} &= \partial_{\mu} A^{\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\mu} A^{\alpha} \\ &= \partial_{\mu} A^{\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\alpha} (\sqrt{-g}) A^{\alpha} \\ \nabla_{\mu} A^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} A^{\mu}) \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$