

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

***DINÂMICA CAÓTICA E SINCRONIZAÇÃO DE FASE EM MAPAS
ACOPLADOS***

Aline Pereira da Silva

Orientador Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Claro (SP)
2011

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho (orientador)
UNESP – Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau
INPE – São José dos Campos (SP)

Prof. Dr. José Manoel Balthazar
UNESP – Rio Claro (SP)

Aline Pereira da Silva
CANDIDATA

Rio Claro, 22 de fevereiro de 2011.

Resultado: APROVADA

À minha família

Agradecimentos

Ao Professor Ricardo Egydio de Carvalho pela orientação, ensinamentos, sugestões, atenção e paciência.

À Professora Ana Paula Mijolaro pela contribuição, auxílio, incentivo, conselhos e sensibilidade.

Ao Professor Edson Denis Leonel pelo auxílio e ensinamentos.

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas de laboratório pelo auxílio e amizade.

Aos meus sogros João e Salete pelo acolhimento, atenção e carinho.

Aos meus pais e irmãos Luiz, Yeda, Samuel e Nádia pelo apoio das mais diversas formas, incentivo, carinho, compreensão e tudo o que fizeram por mim.

Ao meu namorado Vinícius pela paciência, amor, dedicação e por me suportar em momentos difíceis.

Resumo

Silva, A. P., Dissertação de Mestrado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2011.

Este trabalho tem como objetivo entender e desenvolver estudos relacionados à sincronização de fase em sistemas dinâmicos discretos. Foi utilizado um modelo simples de osciladores não-lineares denominado mapa circular. Inicialmente é apresentado um estudo extensivo do mapa circular e suas propriedades dinâmicas. É apresentado também a transição de movimento quase-periódico para movimento caótico em uma *rota quase-periódica para o caos* do mapa circular. Em seguida, foram acoplados dois mapas circulares através de um acoplamento bidirecional não linear. O efeito de transição para o estado síncrono é induzido por uma crise interior, através do surgimento de um atrator caótico, o qual induz periodicidade oscilatória no sistema. É mostrado que a sincronização de dois mapas circulares acoplados é influenciada pela diferença do número de rotação e a intensidade do parâmetro de não linearidade. A transição para o estado não síncrono é induzida por uma crise interior, através da expansão do atrator caótico até perder sua periodicidade. Posteriormente, foi introduzido um ruído branco gaussiano no acoplamento e um ruído aditivo em dois sistemas diferentes de dois mapas circulares acoplados. Os resultados obtidos para o primeiro sistema mostraram que no espaço de fases, a ação de um ruído branco gaussiano no acoplamento e aditivo destroem o atrator caótico, e o sistema perde sincronização de fase perfeita e imperfeita. Os resultados obtidos para o segundo sistema mostraram que no espaço de fases, a ação de um ruído branco gaussiano no acoplamento destrói o atrator caótico, e o sistema perde sincronização de fase perfeita e imperfeita. No entanto, a ação de um ruído branco gaussiano aditivo induz um efeito de segunda ordem, no qual ocorre a dessincronização de fase imperfeita, e permanece a sincronização de fase perfeita no sistema, isto é, o sistema mantém apenas sincronização de fase perfeita na presença de ruído.

Palavras chave: travamento de frequência, caos, quase-periodicidade, sincronização de fase, mapa circular, crise interior, ruído branco gaussiano, deslizamentos de fase.

Abstract

Silva, A. P., Master Dissertation, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2011.

This reach has as objective to understand and to develop studies related to the phase synchronization in discrete dynamical systems. A simple model of oscillators non-linear denominated circle map was studied. Initially an extensive study of the chaotic dynamics of the circle map is presented. It is also presented the transition of quasi-periodic behavior for chaotic behavior in a *quasi-periodic route to chaos* in the circle map. Soon after, was introduced a non-linear bidirectional coupling in two circle maps, and studied the transition effects to phase synchronization, induced by interior crisis, through appearance of a chaotic attractor, which induce oscillatory periodicity in the system. It is shown that the phase synchronization of two coupled circle maps is influenced by the difference of the winding number and the intensity of the non-linear parameter. The transition for the nonsynchronization is induced by interior crisis, through of expansion of chaotic attractor. Later on, a gaussian white noise was introduced in the coupling and an additive noise in two different systems of two coupled circle maps. The results for the first system show that a additive and coupling gaussian white noise induce the expansion of the chaotic attractor, and consequently, induce a loss of perfect and imperfect phase synchronization. The results for the second system show that a coupling gaussian white noise induce the loss of perfect and imperfect phase synchronization. However, the additive gaussian white noise induce an effect of second order, in which occur the loss of imperfect phase synchronization, but the perfect phase synchronization stay in system.

Keywords: frequency locking, phase locking, chaos, quasi-periodicity, phase synchronization, circle map, interior crisis, gaussian white noise, phase slips, periodically driven chaotic oscillators.

Sumário

1 Introdução	1
2 Mapa Circular e Caos	6
2.1 Sistemas Dinâmicos	6
2.2 Mapas e Seção de Poincaré.....	7
2.3 Mapa Circular	7
2.3.1 Estabilidade	10
2.3.2 Caos	13
2.3.3 Expoentes de Lyapunov	15
2.3.4 Atratores.....	18
2.3.5 Atrator Caótico em Crise	20
3 Mapa Circular e Quase-Periodicidade	22
3.1 Quase-periodicidade e seções de Poincaré	22
3.2 Número de Rotação.....	24
3.3 Travamento de Frequência	25
3.3 Línguas de Arnold.....	28
3.4 Escada do Diabo.....	30
3.5 Árvore de Farey	31
3.6 Universalidade na rota quase-periódica para o caos	33
3.6.1 Universalidade local	33
3.6.2 Universalidade Global	37
4 Sincronização de fase em mapas circulares acoplados	44
4.1 Mapas circulares acoplados	44
4.2 Expoentes de Lyapunov.....	46
4.3 Sincronização de Fase	49
4.4 Transição para sincronização de fase	50
4.5 Interpretação do movimento oscilatório	59
4.6 Sincronização de fase em dois mapas circulares acoplados	60
4.7 Diagramas para regiões de sincronização.....	62
4.8 Transição para não sincronização	64
5 Efeitos de ruído sobre sincronização de fase em mapas circulares acoplados	69
5.1 Interpretação da dinâmica de fase	69

5.2 Efeitos de ruído branco gaussiano sobre o primeiro sistema de dois mapas circulares acoplados	72
5.2.1 Dessincronização de fase induzida por ruído gaussiano no acoplamento	73
5.2.2 Dessincronização de fase induzida por ruído gaussiano aditivo	79
5.3 Efeitos de ruído branco gaussiano sobre o segundo sistema de dois mapas circulares acoplados	83
5.3.1 Dessincronização de fase induzida por ruído gaussiano no acoplamento	84
5.3.2 Efeito de segunda ordem induzido por ruído gaussiano aditivo	88
6 Conclusões e perspectivas	93
A Comentários Introdutórios sobre Processos Randômicos	96
A.1 Densidade de probabilidade unidimensional, média e variância	96
A.2 Densidade de probabilidade bidimensional, correlação e covariância	98
A.3 Processo estacionário	99
A.4 O processo ruído branco	100
B Algoritmo para gerar números aleatórios distribuídos de acordo com a distribuição gaussiana	103
Referências Bibliográficas	106

Capítulo 1

Introdução

A palavra sincronização é de origem grega, *σὺν χρόνος*, a qual significa “compartilhar o tempo comum”. Pode-se entender então que, dois elementos sincronizados apresentam comportamento idêntico ou ocorrem ao mesmo tempo.

No século XVII, o astrônomo, físico e matemático holandês C. Huyghens, patenteou o primeiro relógio de pêndulo, buscando aumentar a precisão dos instrumentos de medida utilizados em estudos de astronomia. O cientista notou que dois relógios de pêndulo colocados contíguos em uma mesma parede tendem a sincronizar seus pêndulos em fase ou em oposição de fase. Mesmo quando alguma perturbação era aplicada aos relógios, depois de alguns minutos a sincronização se restabelecia. A partir de então, iniciou-se a análise dos estudos de sincronização.

Este fenômeno é conhecido como travamento de frequência (*mode locking* ou equivalentemente, *phase locking* ou *frequency locking*) e geralmente está presente em sistemas dissipativos com frequências competindo entre si [1]. As frequências podem surgir dinamicamente dentro do sistema não linear ou através do acoplamento de um movimento oscilante com uma força periódica externa. O travamento de frequência ocorre quando a razão entre as duas frequências fica travada em uma razão de dois números inteiros para um intervalo finito de valores dos parâmetros.

Na natureza, o exemplo mais conhecido de travamento de frequência é o movimento da Terra e da Lua. A frequência de rotação da Lua em torno de seu eixo é travada (ou sincronizada) com seu período de revolução em torno da Terra, de tal maneira que a Lua mostra sempre a mesma face para a Terra. Matematicamente, essa é a razão mais simples de travamento de frequência 1/1, uma vez que os dois osciladores têm a mesma frequência [2].

Um sistema pode possuir duas frequências que caracterizam sua dinâmica e competem entre si. Quando a razão entre tais frequências é racional, o comportamento do sistema é denominado periódico, por outro lado, quando a razão entre as frequências é irracional, o comportamento do sistema é denominado quase-periódico [3]. No regime de quase-periodicidade, o comportamento do sistema nunca se repete exatamente igual, parecendo bastante irregular. Existe uma rota para o comportamento tornar-se caótico, denominada por *rota quase-periódica para o caos* [4], que ocorre quando bifurcações de período ocorrem no

sistema levando o comportamento regular (periódico) para um comportamento caótico.

Em 1965, o matemático russo V. I. Arnold propôs um modelo não linear que esboça um círculo sobre ele mesmo, denominado mapa circular (*circle map*) [5]. Tal sistema, apesar de simples, possibilita a compreensão teórica e a análise de diversos comportamentos dinâmicos complexos envolvendo interação não linear entre osciladores periódicos, e osciladores sob ação de uma força periódica. O mapa circular é considerado uma ferramenta padrão de estudo na rota quase-periódica para o caos. Alguns exemplos de sistemas físicos, cujo comportamento dinâmico pode ser modelado por mapas circulares são: a convecção forçada de Rayleigh-Bénard [6,7], células cardíacas perturbadas periodicamente [8,9], osciladores guiados periodicamente [10,11] e condutividade elétrica em Niobato de Sódio e Bário [12].

Quando as frequências do mapa circular se tornam periódicas, para determinados intervalos dos valores dos parâmetros, o sistema está em um regime de travamento de frequência. As regiões para esses intervalos de travamento, constituem estruturas complexas no espaço dos parâmetros, chamadas *línguas de Arnold*. Cada língua corresponde a uma região de travamento de frequência, associada a cada número racional da razão entre as frequências [13].

As regiões de travamento de frequência se apresentam em patamares bem definidos e organizados, e são regidos pela chamada série de Farey. Esses patamares formam uma estrutura fractal denominada *Escada do Diabo*, onde cada degrau está associado a uma cada *língua de Arnold*.

Recentemente, pesquisas sobre sincronização vêm sendo voltadas para sistemas caóticos [14]. Um sistema dinâmico é chamado caótico sempre que sua evolução depende sensitivamente de suas condições iniciais, isto é, duas trajetórias emergindo de condições iniciais próximas, se separam exponencialmente no curso do tempo [15]. Como resultado, sistemas caóticos desafiam intrinsecamente a sincronização.

Quando um sistema dinâmico dissipativo evolui para um comportamento caótico, tal estado pode estar associado a um atrator estranho. Diversas informações podem ser extraídas do estudo de atratores. A caracterização das propriedades de atratores, com a utilização de teorias recentes de dinâmica não-linear permite a análise de sinais experimentais com comportamento caótico [2].

Contudo, verificou-se que existe uma certa ordem subjacente ao caos. Sistemas dinâmicos caóticos são determinísticos, isto é, sua evolução é descrita por uma regra bem definida. É possível mostrar que, acoplando de forma adequada dois ou mais sistemas

caóticos, existe a possibilidade de sincronizá-los de forma que seus comportamentos sejam semelhantes. Isto causou um forte crescimento em pesquisas sobre a teoria de oscilações caóticas e suas aplicações em biologia, física, química, comunicação e muitas outras áreas da ciência e engenharia [16], devido ao grande interesse em sincronização de osciladores caóticos acoplados [17,18]. Alguns exemplos de aplicações são: piscar de luzes de um conjunto de uma espécie de vaga-lumes [19,20], células de marca-passo no coração [21,22], atividade rítmica no cérebro devido a disparos sincronizados de um enorme número de neurônios [23-25], células secretoras de insulina do pâncreas [26], construção de manipuladores de robô [27], em rádio-física, rádio-engenharia e rádio-comunicação sincronização é aplicada para estabilização de geradores, para sintetizar frequências e modulação de sinais em sistemas Doppler [28]. Além disso, esquemas de comunicação eficiente são baseados em comunicação caótica [29-31] e questões de sincronização são também cruciais para design de computadores com arquitetura paralela [32].

Em sistemas caóticos, podem haver vários tipos diferentes de sincronização, a saber [33]:

- (1) Sincronização completa (ou idêntica)
- (2) Sincronização generalizada
- (3) Sincronização de fase
- (4) Sincronização de fase imperfeita
- (5) Sincronização em atraso
- (6) Sincronização em atraso intermitente
- (7) Quase sincronização

Sincronização completa de osciladores idênticos consiste na perfeita igualdade entre as trajetórias dos dois osciladores, obtida devido ao acoplamento entre eles, de tal maneira que eles se mantêm sincronizados um com o outro no curso do tempo.

Sincronização generalizada ocorre quando os osciladores acoplados são completamente diferentes, e o comportamento dinâmico de um dos osciladores é determinado pelo outro.

Sincronização de fase pode ser considerada como um regime intermediário de sincronização, onde as fases dos osciladores evoluem de forma sincronizadas, enquanto suas amplitudes permanecem diferentes.

Sincronização de fase imperfeita é uma situação onde ocorrem deslizamentos de fase, isto é, saltos no valor da diferença de fase, dentro de um regime de sincronização de fase.

Sincronização em atraso é um nível entre sincronização de fase e sincronização completa. Neste caso, os osciladores sincronizam suas fases e amplitudes com um atraso no tempo, isto é, um oscilador se atrasa no tempo em relação ao outro.

Sincronização em atraso intermitente implica que os dois osciladores estão na maior parte do tempo em regime de sincronização em atraso, mas podem ocorrer intervalos de comportamento não sincronizado quando as trajetórias do sistema possuem expoentes de Lyapunov positivos.

Finalmente, quase sincronização resulta em um limite assintótico da diferença entre um subconjunto das variáveis de um oscilador e o correspondente subconjunto das variáveis do outro oscilador.

Esta dissertação é focada no estudo de sincronização de fase em mapas circulares discretos. Em particular, a transição para a sincronização de fase em dois mapas circulares acoplados, corresponde a uma mudança na estrutura topológica do atrator caótico. No mapa circular, a variável dinâmica é uma variável angular [34]. Se essa variável é caótica, a dinâmica do sistema pode ser geralmente representada como um caminho parcialmente randômico. A sincronização de fase em sistemas de mapas circulares acoplados ocorre para valores de expoentes de Lyapunov positivos, contrariamente à sincronização de fase de osciladores caóticos em geral.

Atualmente, efeitos não intuitivos de ruídos em sistemas não lineares tem sido assunto de grande interesse, pois é inevitável a presença de ruído em sistemas naturais e experimentais [35,36]. No processo de sincronização, ruídos podem influenciar de diferentes maneiras. Geralmente ele faz a diferença de fase oscilar ao redor do mínimo do poço, considerando o comportamento da diferença de fase como uma partícula em um potencial inclinado [37]. Assim, o ruído faz a diferença de fase escalar sobre a barreira de energia ocasionalmente se deslocando para o mínimo vizinho, resultando em um efeito degradante, por exemplo, induzindo deslizamentos de sincronização de fase em mapas circulares acoplados.

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o capítulo 2 apresenta a descrição do mapa circular e suas propriedades dinâmicas. O capítulo 3 trata do cenário de quase-periodicidade, onde é mostrado que o mapa circular exhibe o fenômeno de travamento de frequência em uma *rota quase-periódica para o caos*. No capítulo 4 é apresentada a sincronização de fase de dois mapas circulares acoplados não linearmente, os efeitos de transição para o comportamento síncrono, sob quais condições esse comportamento é possível, e os efeitos de transição para o comportamento não síncrono. O capítulo 5 apresenta a contribuição científica deste trabalho, no aspecto de estudo dos efeitos de ruído sobre a

sincronização de fase em dois sistemas diferentes de dois mapas circulares acoplados. O estudo é feito introduzindo um ruído no acoplamento e posteriormente um ruído aditivo, isto é, adicionado ao sistema. Finalmente, no capítulo 6, são apresentadas as conclusões e perspectivas de trabalho futuro.

Capítulo 2

Mapa Circular e Caos

Neste capítulo será apresentado o modelo fenomenológico denominado mapa circular, o qual possibilita a compreensão teórica e a análise do comportamento de osciladores periódicos interagindo não linearmente e comportamento de um oscilador sob ação de uma força periódica. O mapa circular possui uma estrutura dinâmica caótica, isto é, possui sensibilidade às condições iniciais. A presença de atratores no espaço de fases caracteriza a dinâmica do sistema como dissipativa.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema dinâmico é chamado determinístico quando a sua evolução é descrita por uma regra bem definida. Ele será então, caracterizado pelo estado do sistema, que contém toda informação essencial acerca dele e pela sua dinâmica, que fornece a regra segundo a qual um estado evolui com o passar do tempo.

Uma classe de regras importante para a descrição de fenômenos naturais são as equações diferenciais. Mais especificamente, utiliza-se como regra um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, da seguinte forma

$$\frac{dx}{dt} = F(x(t), \mu) \quad x \in \mathbb{R}^n ; \mu \in \mathbb{R} , \quad (2.1)$$

onde μ é um parâmetro de controle do sistema. Se $F(x, \mu)$ é não linear, o sistema é caótico [38].

O sistema (2.1) é chamado autônomo, devido ao fato de o tempo não aparecer explicitamente no sistema. A solução desse sistema com a condição inicial $x(t=0) = x_0$, é chamada trajetória ou órbita do sistema. O conjunto de todas as trajetórias do sistema é chamado de fluxo. Quando o parâmetro μ é variado, podem ocorrer mudanças qualitativas na estrutura do sistema. Para cada condição inicial, x_0 , existe uma órbita no espaço que é originado pelo conjunto de variáveis $x(t)$ e é chamado de espaço de fases.

2.2 Mapas e Seção de Poincaré

Denomina-se *mapa* um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma *discreta*. Existem várias razões para se estudar mapas do ponto de vista do seu comportamento dinâmico. Com efeito, há inúmeros modelos cujas soluções aparecem sob a forma de *relações de recorrência* e portanto por uma dinâmica descrita por mapas [2].

Mapas são em geral mais simples para se analisar do que os sistemas de equações diferenciais que lhe deram origem. Um fluxo contínuo pode dar origem a um mapa discreto construindo uma superfície com dimensão $(N - 1)$, que intercepta transversalmente o fluxo, denominada seção de Poincaré. Uma vez escolhida a seção, observam-se os pontos de consecutivas intersecções da trajetória com esta, sendo que a seqüência discreta de pontos resultantes origina um mapa, chamado mapa de Poincaré. Portanto, a seção de Poincaré associa ao fluxo de um sistema dinâmico contínuo no tempo um mapa discreto. Dado um ponto sobre a seção de Poincaré, pode-se perguntar qual será o próximo ponto sobre a mesma que a trajetória irá originar a cada vez que ela intercepta a seção no mesmo sentido. Dessa forma, a análise da estabilidade de uma órbita periódica se reduz à análise da estabilidade de um ponto fixo do mapa gerado por essa órbita. Uma seção de Poincaré para o sistema (2.1) gera o seguinte mapa:

$$x_{i+1} = P(x_i), \quad (2.2)$$

onde i representa os passos temporais fixos e discretos, x_i representa a i -ésima intersecção da trajetória com a seção de Poincaré. A *órbita* do mapa será então a seqüência de pontos $(x_i)_{-\infty}^{+\infty}$ definida pela equação (2.2), que é genericamente denominada uma *equação de diferenças*. Uma órbita periódica corresponde a um ponto fixo no mapa de Poincaré. Uma órbita quase-periódica é representada na seção de Poincaré por pontos randomicamente distribuídos, semelhante a uma órbita caótica.

2.3 Mapa Circular

Uma classe importante de sistemas dinâmicos são os sistemas de fase, também chamados de osciladores, os quais possuem uma variável de fase ou uma variável angular como variável. A fase é a variável que corresponde ao movimento de rotação ao longo de uma

projeção circular. Um ponto em um círculo é chamado freqüentemente de um ângulo ou fase de um oscilador. O oscilador mais simples de todos é aquele no qual a fase muda uniformemente, isto é, um movimento uniforme ao redor do círculo a uma certa freqüência angular. Sistemas com oscilações auto-sustentadas oscilam sem a necessidade de uma força periódica externa. O tempo decorrido para uma oscilação recebe o nome de período. A freqüência é o inverso do período.

Um exemplo de um oscilador é o mapa circular (ou mapa de círculo), o qual trata-se de um mapa unidimensional discreto, cuja iteração da variável é interpretada como a medida de um ângulo que especifica onde a trajetória está sobre um círculo [3,5,12].

Esta idéia é motivada pela consideração do estado de um sistema que pode ser sempre representado por um ponto na superfície de um toróide tridimensional, conforme a figura 2.1 (a). A representação do movimento pode ser simplificada tomando-se a seção de Poincaré do toróide. Se as variáveis do espaço de fases são propriamente escaladas, então os pontos de intersecção estarão sobre um círculo no plano de Poincaré, sendo possível usar um ângulo para especificar onde a trajetória ficará sobre a seção de cruzamento, conforme a figura 2.1 (b).

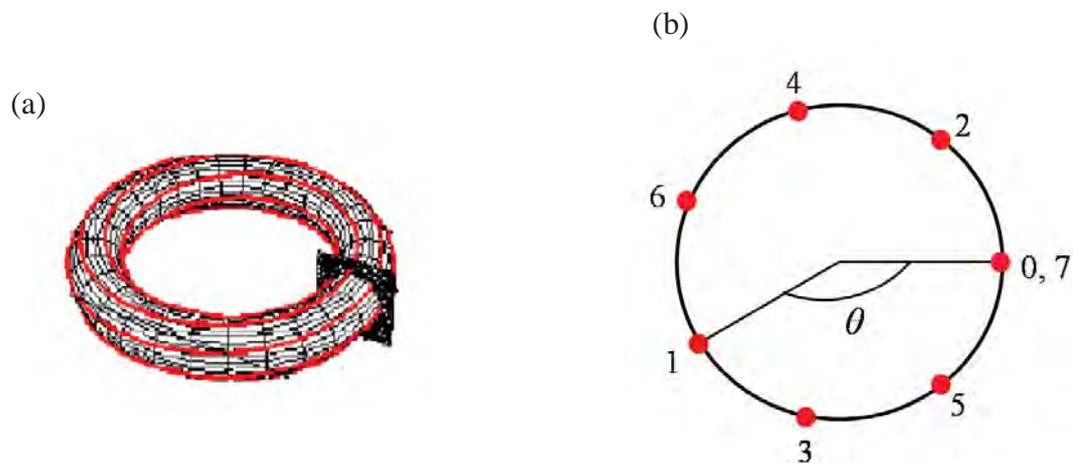


Figura 2.1: Representação gráfica da idéia do mapa circular. Em (a) movimento de uma trajetória sobre a superfície de um toróide tridimensional. Em (a) seção de Poincaré para toro, onde a variável θ especifica onde o ponto da trajetória está sobre a seção de cruzamento.

Em geral, um mapa desse tipo pode ser escrito como

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) \quad (2.3)$$

onde a função $f(\theta)$ é periódica no ângulo θ . A trajetória (ou órbita) é definida como a

seqüência de ângulos $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots$

Por conveniência, será considerada a medida do ângulo θ em unidades tal que $\theta = 1$ corresponda a uma revolução completa ao redor do círculo. A variável θ na equação (2.3) é definida em módulo 1. Com esta convenção, os ângulos $\theta = 0,7$ e $\theta = 1,7$ referem-se ao mesmo ponto no círculo.

Antes de introduzir o mapa circular propriamente dito, é feita uma análise de um caso simples, no qual a função $f(\theta)$ é linear [3]:

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \omega \quad \text{mod } [1] \quad (2.4)$$

Neste caso, a iteração de $f(\theta)$ consiste simplesmente em adicionar o número ω ao valor anterior do ângulo. Assim, a iteração desloca a trajetória ao redor do círculo em passos de tamanho ω .

A figura 2.2 mostra dois exemplos do mapa linear (2.4), com valores diferentes de ω .

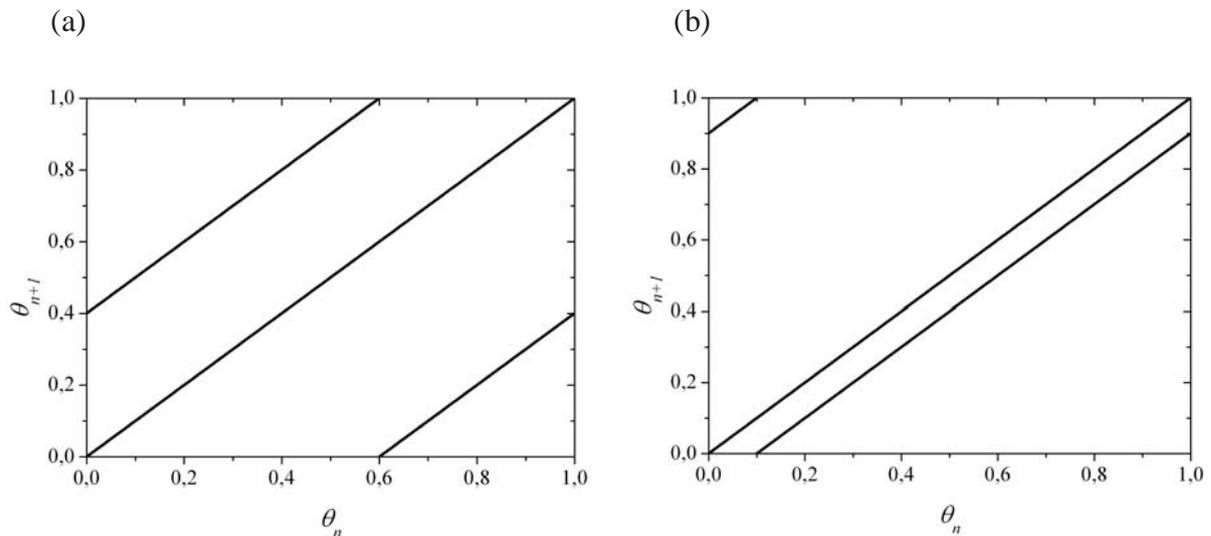


Figura 2.2: Dois gráficos da função de mapa linear da equação (2.4). θ_{n+1} foi plotado como uma função de θ_n . Em (a) $\omega = 0,4$; em (b) a $\omega = 0,9$. O salto súbito de $f(\theta) = 1$ até 0 é resultado de $\theta \pmod{1}$. Não há nenhum salto físico na localização de pontos da trajetória.

O mapa circular seno, muitas vezes mencionado simplesmente como mapa circular, é um sistema não linear com a não linearidade tomando a forma específica de uma função seno:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \omega - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n) \quad \text{mod } [1] \quad (2.5)$$

O parâmetro κ é a intensidade de não linearidade. Quando $\kappa = 0$, o mapa circular se reduz ao simples mapa linear da equação (2.4). ω é o parâmetro de relação de frequência e o termo 2π no denominador é somente uma convenção ligada com uso $[0,1]$ como a extensão dos valores dos ângulos.

Na figura 2.3 é possível notar uma mudança interessante no comportamento do mapa circular em $\kappa = 1$. Para $\kappa > 1$, alguns valores de θ_{n+1} tem mais do que um possível precursor θ_n . Dessa forma, diz-se que para $\kappa > 1$, o mapa circular é não inversível. Por isso, as iteradas do mapa irão introduzir um “dobramento” das trajetórias, o que pode levar a um comportamento caótico. A descontinuidade do mapa nas figuras 2.3 (a) e (b) é somente aparente. Quando o valor do ângulo excede 1, subtrai-se 1 do valor e retorna-se ao ponto mais baixo da função, como mostrado na figura.

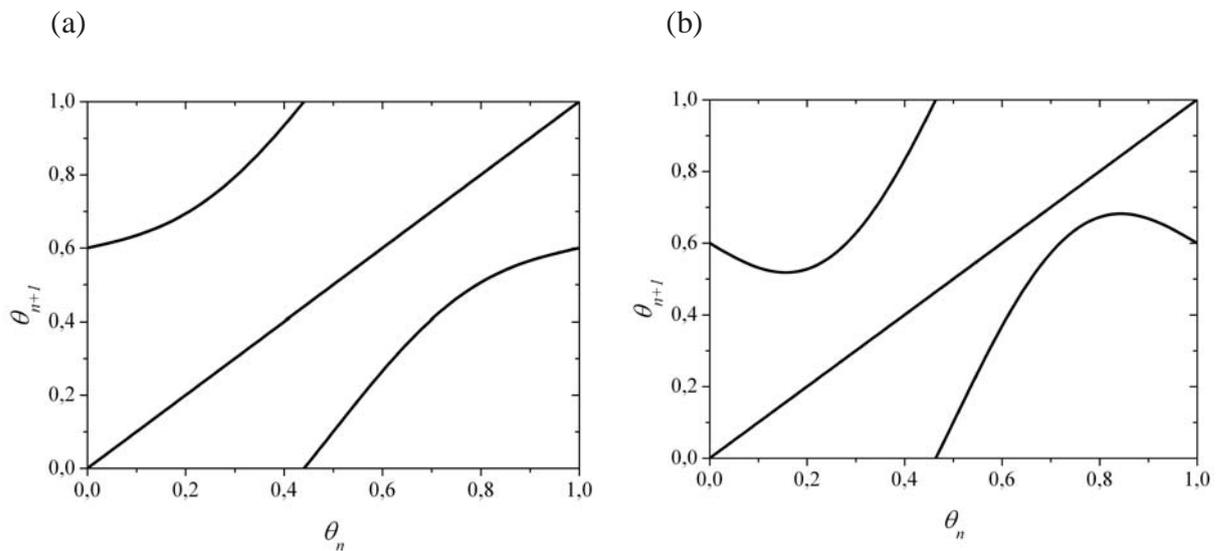


Figura 2.3: Dois gráficos da função de mapa circular da equação (2.5). Em (a) mapa circular seno para $\kappa = 0,7$. Em (b) mapa circular seno para $\kappa = 1,8$. θ_{n+1} foi plotado como uma função de θ_n com $\omega = 0,6$. Note que para $\kappa > 1$, há alguns valores $f(\theta)$ que tem dois possíveis θ s como precursores. Então, diz-se que para $\kappa > 1$, o mapa circular seno é não inversível.

2.3.1 Estabilidade

Seja θ pertencente ao domínio de $f(\theta)$. A seqüência de números $\theta, f(\theta), f(f(\theta)), f(f(f(\theta))), \dots$, conhecida como as iteradas de θ , constituem o que se chama de órbita do ponto θ . Desta forma, se todos os pontos $\theta, f(\theta), f^2(\theta), f^3(\theta), \dots, f^{(k-1)}(\theta)$, são distintos, eles formam a órbita periódica de período k de θ . Sendo assim, os pontos que se repetem a cada iterada são ditos serem de período 1 e, geralmente são denominados de pontos fixos ou pontos de equilíbrio, os pontos que se repetem a cada duas iteradas são de

período 2 e assim sucessivamente [2].

Os pontos fixos do mapa circular correspondem aos valores que satisfazem a equação

$$\theta = \theta + \omega - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta) \quad (2.6)$$

ou equivalentemente

$$\text{sen}(2\pi\theta) = \frac{2\pi\omega}{\kappa}. \quad (2.7)$$

Dessa forma, se

$$|\kappa| \geq |2\pi\omega| \quad (2.8)$$

então haverá pelo menos um ponto fixo para o mapa circular que possa ser calculado analiticamente. Vale a pena ressaltar que quando a equação (2.8) não é satisfeita, os pontos fixos existentes não podem ser calculados analiticamente.

Se a trajetória se aproxima de θ conforme se itera o mapa, diz-se que θ é um ponto fixo atrator ou (equivalentemente) um ponto fixo estável. Se a trajetória se move para longe de θ , então diz-se que θ é um ponto fixo repulsor ou (equivalentemente) um ponto fixo instável. O estudo da estabilidade reduz-se à investigação do valor de $|df/d\theta|$ calculado no ponto de equilíbrio:

$$\frac{df}{d\theta} = 1 - \kappa \cos(2\pi\theta). \quad (2.9)$$

Se $|df/d\theta| < 1$, θ é um ponto fixo estável. Se $|df/d\theta| > 1$, então θ é um ponto fixo instável. Dessa forma, um ponto fixo do mapa circular seno será estável se $0 < \kappa \cos(2\pi\theta) < 2$. Caso contrário, o ponto fixo será instável.

Foram calculados analiticamente os pontos fixos do mapa circular seno (2.5) para os valores dos parâmetros $\kappa = 0,92$ e $\omega = 0,1$. Foram encontrados dois pontos fixos, cujas estabilidades foram analisadas através da equação (2.9). A tabela 2.1 apresentada esses pontos fixos encontrados, suas localizações, seus valores das derivadas, suas classificações e

estabilidade. A figura 2.4 (a) mostra a evolução das iterações para o sistema conhecido como *diagrama da teia*, onde a reta inclinada de 45° é a função identidade e a linha curva é $f(\theta)$. Os pontos onde ocorrem cruzamentos entre $f(\theta)$ e a função identidade são os pontos fixos. Nessa figura a condição inicial foi $\theta_0 = 0,4$, é possível notar que as trajetórias se afastam do ponto fixo instável $\theta = 0,11965$ e se aproximam do ponto fixo estável $\theta = 0,38035$.

Ponto Fixo	Localização	Valor da equação (2.9) no ponto	Classificação	Estabilidade
A	$\theta = 0,38035$	$ df/d\theta = 1,67203$	repulsor	instável
B	$\theta = 0,11965$	$ df/d\theta = 0,32796$	atrator	estável

Tabela 2.1: Pontos fixos e suas classificações do mapa (2.5) com valores dos parâmetros $\kappa = 0,92$ e $\omega = 0,1$.

Uma segunda situação para valores dos parâmetros $\kappa = 0,92$ e $\omega = 0,9$ foi analisada. Nesta situação, a equação (2.8) não é satisfeita, então, os pontos fixos para este valor não podem ser calculados analiticamente. A figura 2.4 (b) mostra a evolução das iterações para o sistema com esses valores dos parâmetros e condição inicial de $\theta_0 = 0,55$. É possível notar que há dois cruzamentos entre a função identidade e $f(\theta)$, havendo então dois pontos fixos, cujas localizações são aproximadamente $\theta = 0,61$ e $\theta = 0,89$. É possível notar que as trajetórias se afastam do ponto $\theta = 0,62$, o qual é instável, e se aproximam do ponto $\theta = 0,88$, o qual é estável. Ressalte-se que, embora não seja possível calcular analiticamente os pontos fixos para determinados valores dos parâmetros, não significa que esses pontos não existam. Eles apenas devem ser calculados numericamente.

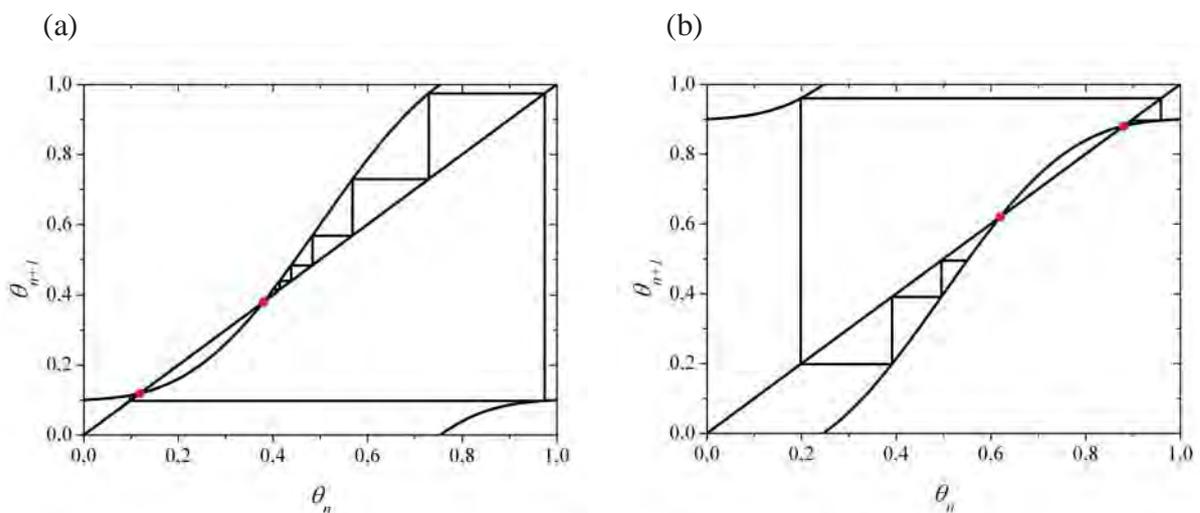


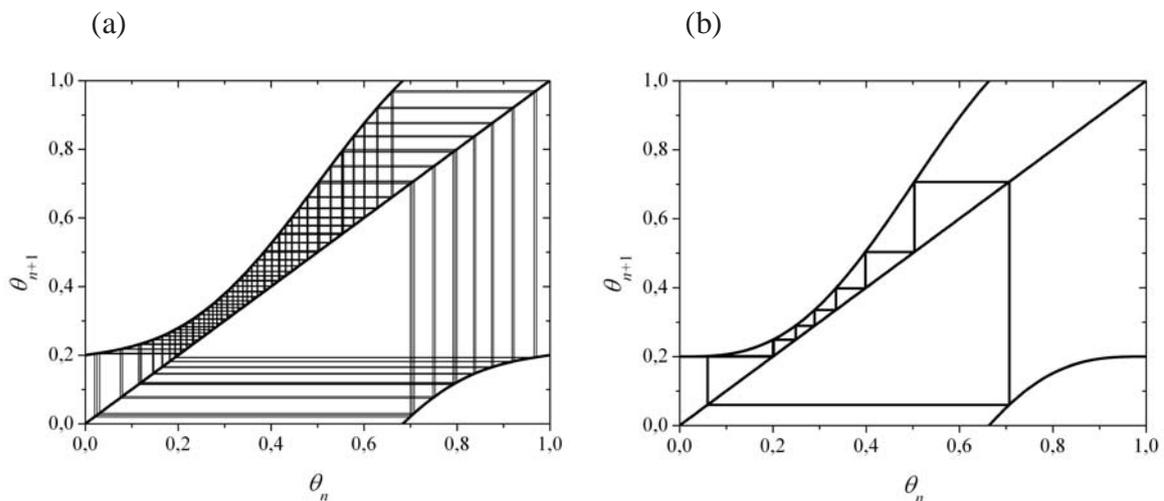
Figura 2.4: Evolução das iterações do mapa circular seno, os pontos fixos estão ilustrados em vermelho. Em (a) $\kappa = 0,92$ e $\omega = 0,1$. O gráfico mostra que as trajetórias se afastam do ponto fixo $\theta = 0,38035$ e se aproximam do ponto fixo $\theta = 0,11965$. A condição inicial foi $\theta_0 = 0,4$. Em (b), $\kappa = 0,92$ e $\omega = 0,9$. O mapa agora tem um ponto fixo estável próximo de $\theta = 0,88$ e um ponto fixo instável próximo de $\theta = 0,62$. A condição inicial foi $\theta_0 = 0,55$.

2.3.2 Caos

O termo caos é usado para referir-se à não previsibilidade. A instabilidade dinâmica que conduz a não previsibilidade deve ser mais exponencial do que linear no tempo, porque no caso linear a previsibilidade é possível, enquanto no caso caótico não há previsibilidade alguma. Esta instabilidade é puramente determinística e intrínseca à dinâmica [2,15,38]. Isto é, sistemas caóticos são sensíveis às condições iniciais.

Iterações do mapa circular são apresentadas na figura 2.5. A transição para o caos ocorre quando $f(\theta)$ perde sua inversilidade. Em 2.5 (a) $\kappa = 0,8$, os pontos na órbita quase não passam pelo mesmo ponto, isto mostra que não há caos e neste caso o movimento é quase-periódico. Em 2.5 (b) as iterações mostram uma oscilação auto-sustentada isolada, onde os pontos na órbita retornam ao ponto de partida depois de um certo número de iterações, este movimento é conhecido como ciclo limite, e neste caso o movimento é periódico. Sistemas com oscilações auto-sustentadas oscilam sem a necessidade de uma força periódica externa. Em 2.5 (c) as iterações mostram que os pontos na órbita nunca passam exatamente pelo mesmo ponto, e neste caso o movimento é caótico.

Ao variar-se os parâmetros do mapa (2.5), ocorrem mudanças tanto na posição como nas características qualitativas dos pontos de equilíbrio. Uma mudança qualitativa na dinâmica do sistema é denominada *bifurcação*. Em uma bifurcação novos pontos de equilíbrio podem aparecer e outros anteriormente estáveis se tornar instáveis e vice-versa.



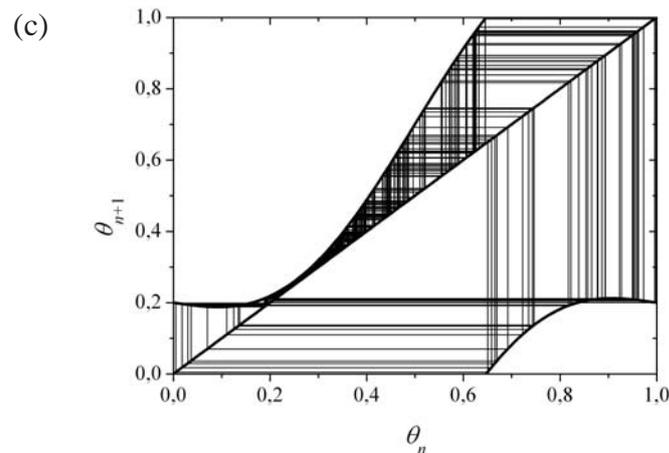


Figura 2.5: Evolução de iterações do mapa circular seno para $\omega = 0.2$ e (a) $\kappa = 0,8$ a órbita é quase periódica, (b) $\kappa = 1,0$ a órbita é um ciclo limite, (c) $\kappa = 1,2$ a órbita é caótica.

Uma das principais formas de caracterizar a dinâmica de um sistema caótico é o diagrama de bifurcações, uma representação gráfica do comportamento qualitativo das órbitas para cada valor do parâmetro de controle [2]. Quando ocorre uma bifurcação o diagrama de fases muda qualitativamente, novos pontos fixos podem aparecer e outros anteriormente estáveis podem ser tornar instáveis e vice-versa. A maneira de construir o diagrama de bifurcações é simples. Constrói-se um gráfico em que o eixo horizontal corresponde aos valores do parâmetro de controle e o eixo vertical aos valores de θ_n . Para cada valor do parâmetro de controle, itera-se a variável de fase para uma condição inicial e gera-se a órbita correspondente. Um certo número dos primeiros pontos da órbita é descartado, para dar tempo a que a órbita evolua para o seu comportamento final, quer este seja uma órbita periódica ou caótica - chama-se a isto eliminar o transiente. Em seguida marca-se no gráfico, para esse valor do parâmetro de controle, os valores de θ_n assumidos pela órbita ao longo de um número bastante grande de iterações. Acima de $\kappa = 1$, o diagrama de bifurcações para o mapa circular seno torna-se bastante complicado. A cada bifurcação ocorre uma duplicação de período até o sistema entrar em regime caótico. Por isso a rota para o caos ficou conhecida como rota de duplicação de período.

As figuras 2.6 (a) e (b) mostram os diagramas de bifurcação para uma extensão de valores de κ e dois valores de ω , 0,500001 e 0,275. Deve-se tomar muito cuidado ao distinguir quase-periodicidade de caos, para isto, basta notar a “estrutura atada” do comportamento quase-periódico e comparar com a “difusão randômica” das áreas caóticas. Observa-se também que estes diagramas dependem significativamente do valor de ω .

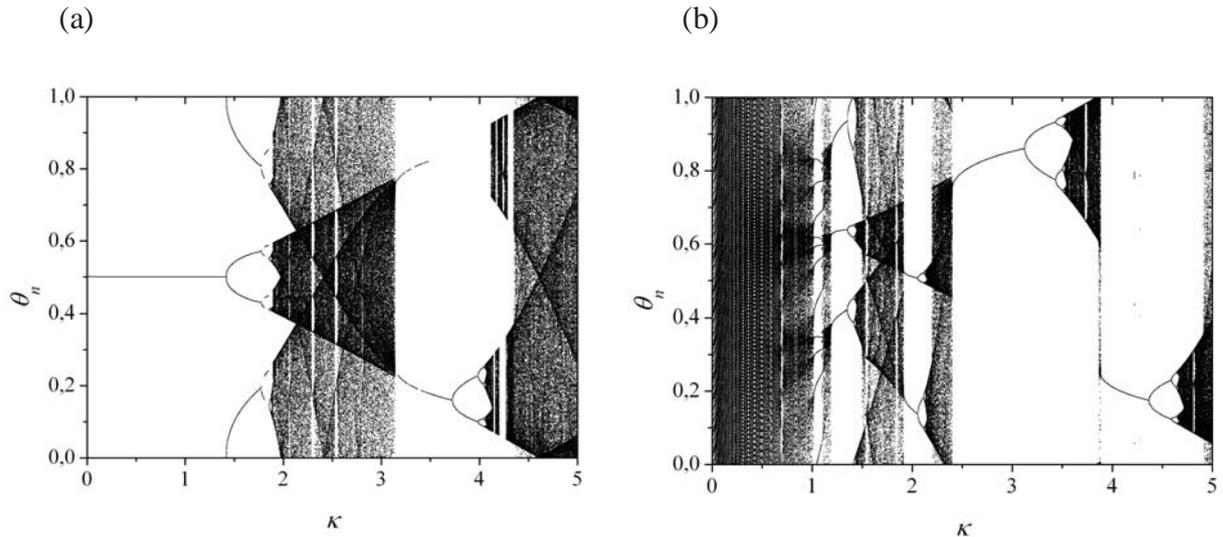


Figura 2.6: Diagramas de bifurcação para o mapa circular seno. Os valores de κ são dados ao longo do eixo horizontal. O valor das condições iniciais é zero. Em (a) $\omega = 0,500001$. Note que o comportamento caótico ocorre bem acima de $\kappa = 1$. Em (b) $\omega = 0,6180339$. Note que para $\kappa < 1$ o comportamento é quase-periódico e periódico. Imediatamente acima de $\kappa = 1$ há comportamento caótico, e logo em seguida surgem janelas de periodicidade. Para $\kappa > 1$ há duplicação de período e mais caos.

2.3.3 Expoentes de Lyapunov

Para medir a taxa de divergência exponencial de trajetórias vizinhas e portanto quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais, isto é, a instabilidade exponencial, utilizam-se os *expoentes de Lyapunov* [2].

Uma das características do caos é a divergência de trajetórias vizinhas. Para um sistema caótico esta divergência é exponencial no tempo (ou para um mapa iterado, exponencial no número de iterações da função). Dessa forma, a propriedade do estado caótico é uma característica de um grupo de trajetórias. Contudo, uma trajetória sobre um atrator caótico para um sistema limitado, freqüentemente retorna para qualquer ponto anterior infinitamente próximo da trajetória. Então, pode-se examinar a divergência desses pontos vizinhos (correspondente a tempos bastante diferentes) sobre uma trajetória.

Para isto, considera-se um ponto θ_0 e outro ponto vizinho $\theta_0 + \varepsilon$, ambos no atrator. Então itera-se o mapa n vezes para cada valor e considera-se o valor absoluto da diferença entre os resultados [3]:

$$d_n \equiv \left| f^{(n)}(\theta_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(\theta_0) \right|. \quad (2.10)$$

Se o comportamento é caótico, espera-se que esta distância cresça exponencialmente

com n , então escreve-se

$$\frac{d_n}{\varepsilon} \equiv \frac{|f^{(n)}(\theta_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(\theta_0)|}{\varepsilon} \equiv e^{\lambda n} \quad (2.11)$$

ou

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{|f^{(n)}(\theta_0 + \varepsilon) - f^{(n)}(\theta_0)|}{\varepsilon}, \quad (2.12)$$

esta última equação define o expoente de Lyapunov λ para a trajetória.

Considerando agora $\varepsilon \rightarrow 0$, é possível reconhecer dos cálculos que a razão sobre o lado direito da equação (2.12) é a definição do valor absoluto da derivada de $f^{(n)}$ com respeito a θ_0 . Pela aplicação da regra da cadeia por diferenciação, a derivada de $f^{(n)}$ pode ser escrita como um produto de n derivadas de $f(\theta)$ evoluída nos pontos sucessivos da trajetória $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$. Então, pode-se escrever a definição do expoente de Lyapunov também como

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln(|f'(\theta_0)| |f'(\theta_1)| \dots |f'(\theta_n)|) \quad (2.13)$$

onde $f'(\theta_i) = df/d\theta$. Pode-se escrever a equação (2.13) como

$$\lambda = \frac{1}{n} (\ln|f'(\theta_0)| + \ln|f'(\theta_1)| + \dots + \ln|f'(\theta_n)|) \quad (2.14)$$

A equação (2.14) mostra que o expoente de Lyapunov é somente a **média do logaritmo natural do valor absoluto dos pontos na trajetória** e constitui uma medida da divergência exponencial ($\lambda > 0$) ou da contração ($\lambda < 0$). Este é o cálculo do expoente de Lyapunov para uma única condição inicial [3].

No limite $n \rightarrow \infty$ o expoente de Lyapunov não deve mais depender da condição inicial θ_i . Com efeito, quando se itera um mapa infinitas vezes acaba-se por visitar todo o atrator, não importando qual o ponto de partida. No entanto, na prática trabalha-se sempre com n finito. É portanto necessário calcular-se o expoente de Lyapunov médio, o qual é calculado para algumas condições iniciais e em seguida a média entre eles. Em mapas p -dimensionais tem-se

p expoentes de Lyapunov que correspondem às p direções linearmente independentes do espaço de fases nas quais o elemento de volume inicial pode se expandir ou contrair.

Para verificar que no mapa circular as regiões acima de $\kappa = 1$ sobre a difusão dos pontos da trajetória são realmente caóticas, deve-se calcular o expoente de Lyapunov para a trajetória. Conforme a equação (2.14), o cálculo do expoente de Lyapunov para o mapa circular (unidimensional) é imediato

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(\theta_i)|. \quad (2.15)$$

A figura 2.7 (a) mostra o expoente de Lyapunov para o mapa circular, calculado em função de κ correspondente ao diagrama da figura 2.6 (a) e valor de $\omega = 0,500001$. Note que o valor do expoente é positivo em algumas regiões acima de $\kappa = 1$, as quais são caóticas. A figura 2.7 (b) mostra o expoente de Lyapunov para o diagrama da figura 2.6 (b), onde as regiões quase-periódicas geram um expoente igual a zero. Assim, **pode-se usar o expoente de Lyapunov para distinguir comportamento quase-periódico de comportamento caótico, mostrado que ambos comportamentos parecem muito similares no diagrama de bifurcação.**

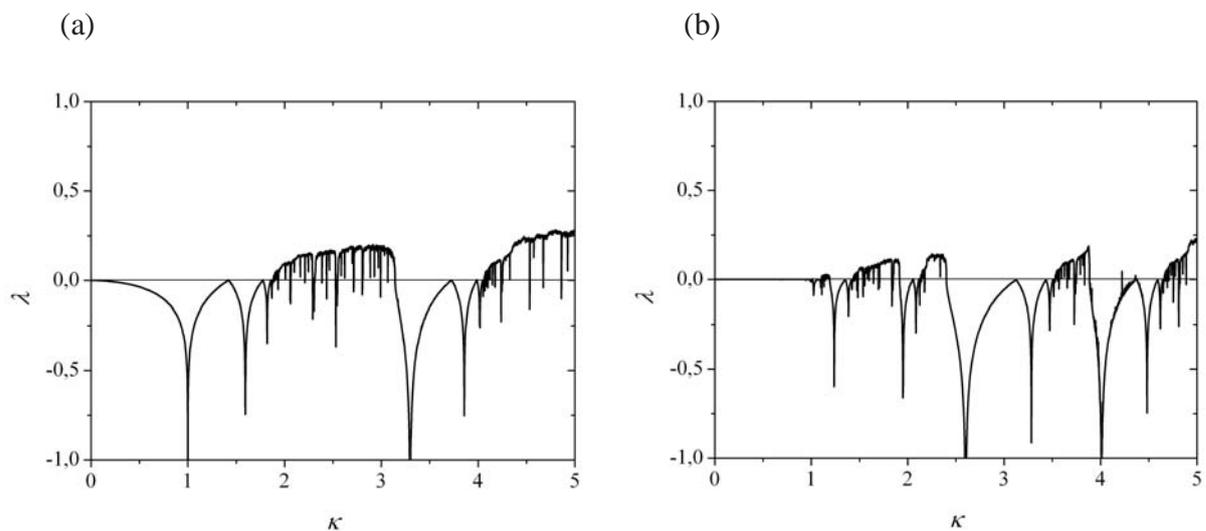


Figura 2.7: O expoente de Lyapunov é representado graficamente como função de κ . Em (a) $\omega = 0,5$. Pela comparação desta figura com a Figura 2.5-(a), percebe-se que o expoente de Lyapunov é negativo para comportamento periódico e positivo para o comportamento caótico. Em (b) $\omega = 0,6180339$. Pela comparação desta figura com a Figura 2.5-(b) percebe-se que o expoente de Lyapunov é zero para o comportamento quase-periódico.

Nas regiões em que $\lambda_i > 0$, o mapa circular possui uma instabilidade orbital nas

direções associadas, e a solução é caótica associada a um atrator estranho, em razão da dependência sensível às condições iniciais. Neste caso, após algum tempo, a distância entre dois estados iniciais diferentes aumenta. Para uma solução periódica ou quase-periódica os deslocamentos ao longo da trajetória não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial. Nestes casos, após algum tempo, a distância entre dois estados iniciais diferentes permanece constante. Segue portanto que no caso de solução periódica ou quase-periódica $\lambda_i < 0$ nas direções perpendiculares ao movimento e $\lambda_i = 0$ ao longo da trajetória.

2.3.4 Atratores

Na mecânica clássica os sistemas dinâmicos são separados em duas grandes classes: sistemas conservativos e sistemas dissipativos. Os sistemas conservativos são aqueles para o qual o teorema de Liouville é aplicável [39],

$$\nabla f(\theta) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \theta_i} = 0 \quad (2.16)$$

A equação (2.16) informa que o volume do espaço de fases não se contrai e nem se expande, ou ainda, a energia do sistema se conserva. Por outro lado, sistemas dissipativos são aqueles que apresentam atritos internos que dissipam a energia de forma a não conservá-la. Portanto a esses sistemas o teorema de Liouville não é aplicável.

Em sistemas dinâmicos dissipativos, um conjunto de condições iniciais de órbitas no espaço de fases irá convergir um conjunto invariante através da evolução no tempo. Tal conjunto transiente pode ser um ponto, curva, área e assim por diante, e é denominado atrator [2,15,38]. O conjunto de condições iniciais que são atraídas para o atrator é denominado bacia de atração. Genericamente, cada atrator é inteiramente rodeado no espaço de fases por sua própria bacia de atração. Conseqüentemente todos os movimentos transientes iniciados em uma pequena vizinhança ao redor do atrator move-se assintoticamente de volta para ele, tornando-se *assintoticamente estável* no sentido de Lyapunov. Um atrator estranho pode ser visto como resultado da combinação de dobras com um número infinito de expansões em pelo menos uma direção e contrações em outras direções. Como conseqüência, é extremamente difícil, senão impossível na prática, seguir a evolução de um fluxo caótico quando a

divergência das trajetórias sobre o atrator torna-se rápida.

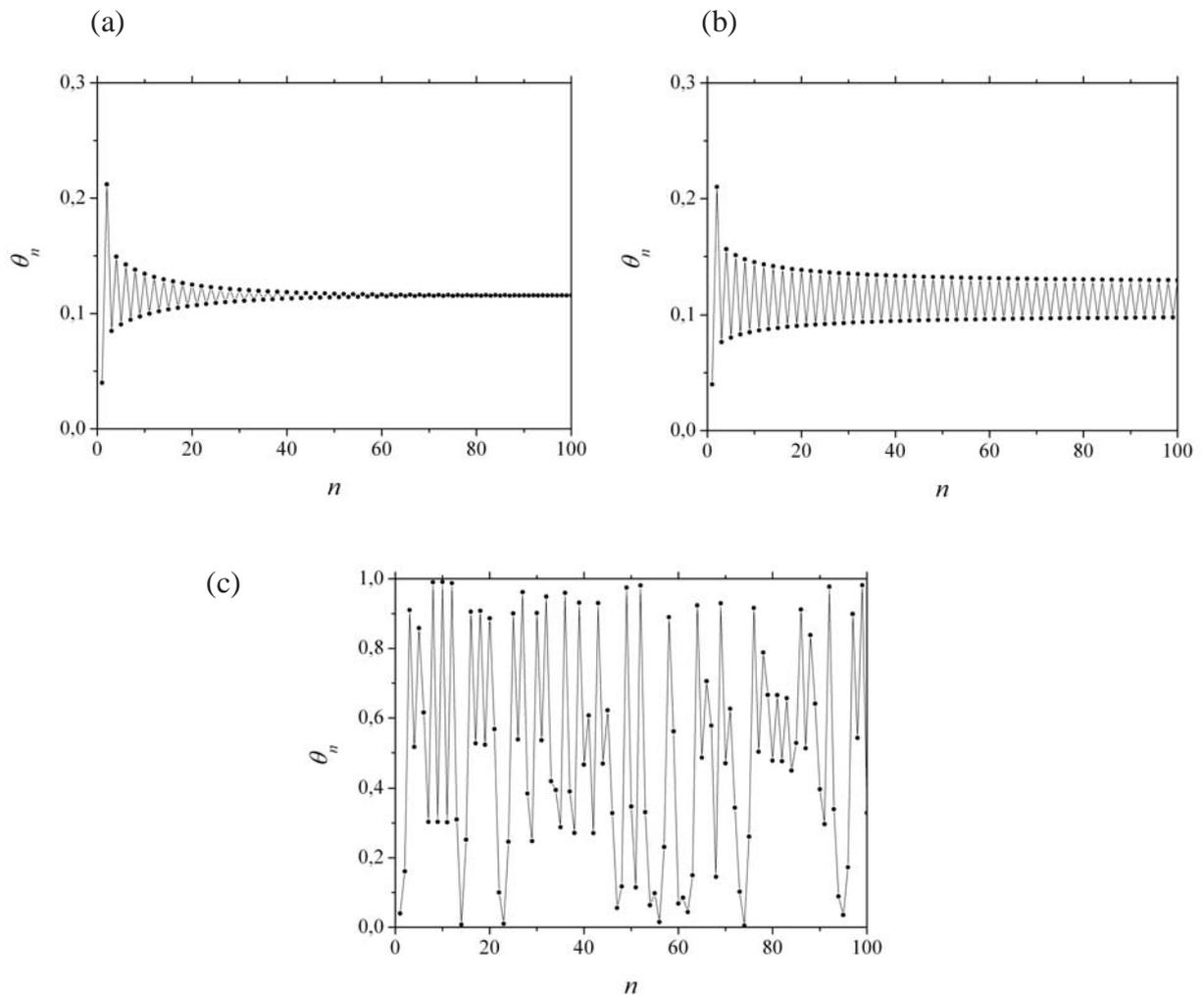


Figura 2.8: Atratores do mapa circular para $\omega = 0,275$ e diferentes valores de κ (a) $\kappa = 2,63$ atrator tipo ponto fixo, (b) $\kappa = 2,65$ atrator tipo duplo ciclo e (c) $\kappa = 3,9$, atrator tipo estranho.

Atratores só são possíveis em sistemas dissipativos. Foram calculados numericamente atratores do mapa circular para $\omega = 0,275$ e diferentes valores de κ , mostrados na figura 2.8. Na figura 2.8 (a) $\kappa = 2,63$, é possível notar que os valores de θ_n convergem para um único ponto, caracterizando o atrator como ponto fixo. Na figura 2.8 (b) $\kappa = 2,67$, os valores de θ_n convergem para dois pontos, caracterizando o atrator como duplo ciclo. Na figura 2.8 (c) $\kappa = 3,94$, os valores de θ_n não possuem padrões de repetição, caracterizando o atrator como estranho. Um atrator é chamado caótico quando as trajetórias dependem sensitivamente das condições iniciais. Essa dependência sensitiva às condições iniciais tem consequências práticas. Com efeito, num atrator estranho pontos inicialmente próximos estarão exponencialmente separados depois de um intervalo de tempo suficientemente longo.

Por outro lado, num sistema dinâmico dissipativo as soluções geram elementos de volume que se contraem de maneira que a dinâmica tende a uma região limitada do espaço de fases. Sistemas que exibem atratores estranhos podem apresentar oscilações irregulares ou caóticas.

2.3.5 Atrator Caótico em Crise

Crise é um evento de bifurcação no qual o atrator caótico e sua bacia de atração desaparecem ou repentinamente expandem seu tamanho [40,41,42]. Quando o atrator caótico é destruído, o tipo de crise é chamada **crise de fronteira**. A repentina expansão do atrator caótico é chamada **crise interior**. Em ambos os casos a crise ocorre porque um ponto fixo instável colide com o atrator caótico quando algum parâmetro de controle é mudado.

Na crise de fronteira, o ponto fixo instável está na fronteira da bacia de atração do atrator caótico, e a colisão marca a destruição do atrator e sua bacia para valores do parâmetro imediatamente acima do valor crítico da colisão. As órbitas que pertenciam ao atrator habitam caoticamente ao redor da velha região do atrator durante um certo tempo transiente, e em seguida divergem para o infinito.

Na crise interior, a colisão do ponto fixo instável com o atrator caótico ocorre no interior da bacia de atração do atrator, e uma expansão do atrator caótico ocorre devido às órbitas sobre ele serem repelidas pelo ponto fixo instável, e passam a habitar regiões do espaço de fases que ainda não eram habitadas.

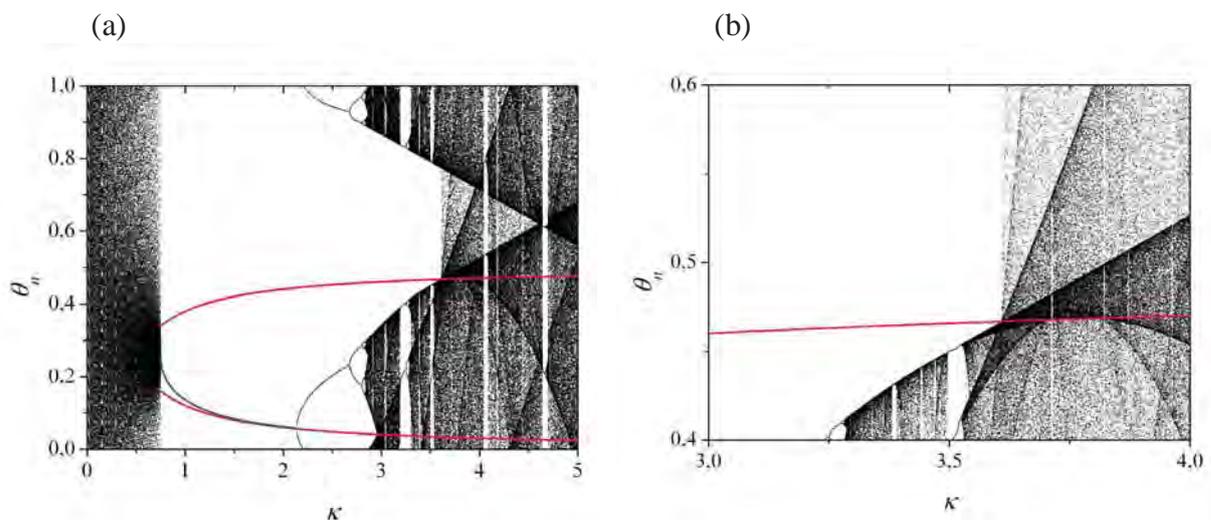


Figura 2.9: Em (a) diagrama de bifurcação para o mapa circular seno. Os valores de κ são dados ao longo do eixo horizontal e $\omega = 1,2$. O valor das condições iniciais é zero. Note que uma bifurcação pouco antes de $\kappa = 1$ dá origem a dois ramos instáveis (vermelho) e um ramo estável (azul). Em (b) colisão do atrator caótico com um dos ramos instáveis, ele repentinamente expande seu tamanho, em um evento de crise interior.

No diagrama de bifurcações 2.9 para o mapa circular, é possível notar que para os valores iniciais de κ o movimento é quase-periódico. O movimento se torna periódico devido a uma bifurcação pouco antes de $\kappa = 1$, que dá origem a dois ramos instáveis ilustrados em vermelho, e um ramo estável ilustrado em azul. Conforme o valor de κ aumenta, ocorrem mais bifurcações, originando um atrator caótico. Quando um dos ramos instáveis se choca com o atrator caótico, este repentinamente expande seu tamanho. Note que, devido ao mapa circular ser considerado mod [1], o atrator caótico possui duas bandas. O ramo instável que se choca com o atrator caótico, se localiza entre as duas bandas do atrator. Dessa forma, a colisão do ponto fixo instável com o atrator caótico ocorre dentro da bacia de atração do atrator, e o evento ocorrido foi uma crise interior.

Capítulo 3

Mapa Circular e Quase-Periodicidade

O cenário de quase-periodicidade apresenta uma “competição” entre duas ou mais frequências independentes que caracterizam as dinâmicas do sistema. Se a razão entre as frequências é um número racional tem-se travamento de frequência no sistema, por outro lado, se a razão é um número irracional, o comportamento do sistema é quase-periódico. Neste capítulo será visto o fenômeno de travamento de frequência para o mapa circular, o qual é considerado uma “ferramenta padrão” para a investigação de rota quase-periódica para o caos.

3.1 Quase-periodicidade e seções de Poincaré

A competição entre duas ou mais frequências pode ocorrer em dois tipos de sistemas, a saber. Primeiro, em um sistema não linear com uma frequência de oscilação “natural”, guiado por uma força periódica externa. Devido à não linearidade, a frequência de oscilação natural geralmente depende da amplitude das oscilações. Neste caso, a competição é entre a frequência externamente aplicada e a frequência de oscilação natural. Segundo, em sistemas não lineares que espontaneamente desenvolvem oscilações em duas (ou mais) frequências quando algum parâmetro do sistema é variado. Neste caso, há uma competição entre as diferentes frequências do próprio sistema [43].

O comportamento de um sistema com duas frequências pode ser descrito por trajetórias confinadas na superfície de um toro [3]. Uma frequência, chamada F_1 , é associada com o movimento de trajetórias ao redor da grande circunferência do toro, a outra frequência, F_2 , é associada com o movimento ao redor de pequenas seções de cruzamentos do toro. Se uma seção de Poincaré é escolhida, tal que corte através do toro, então chega-se à seguinte descrição dos pontos de intersecção de Poincaré para diferentes valores da razão de frequência p/q : Deixe $T_1 = 1/F_1$ ser o período de tempo para uma volta ao redor da circunferência exterior do toro, e $T_2 = 1/F_2$ ser o período para uma volta ao redor da pequena seção de cruzamento. Desde que a razão da frequência é p/q , a razão dos períodos é

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q} \quad (3.1).$$

Por exemplo, se $p/q = 2/3$, então o tempo para girar ao redor da pequena seção de cruzamento é 3, e o tempo para girar ao redor da grande circunferência é 2.

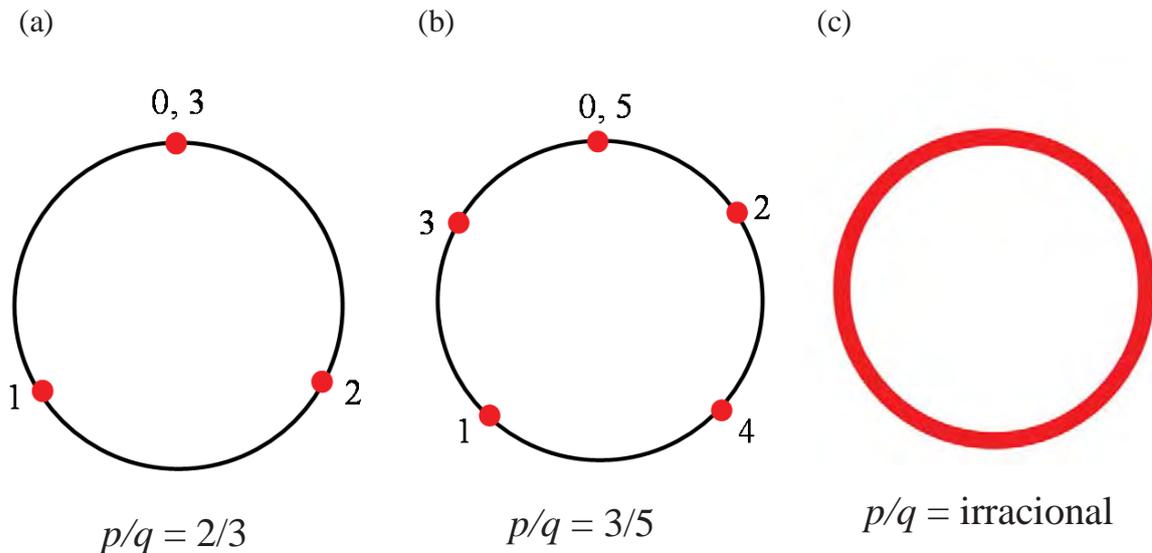


Figura 3.1: Em (a) seção de Poincaré para uma trajetória com razão de frequência igual a 2:3. A trajetória periódica começa em ponto 0, então bate no ponto 1, 2 e finalmente chega no ponto 3 onde começou. Em (b) seção de Poincaré para uma trajetória periódica com razão de frequência igual a 3:5. Em (c) seção de Poincaré para uma trajetória quase-periódica com razão de frequência irracional.

A Figura 3.1 mostra os pontos de intersecção de Poincaré para três razões de frequências diferentes. Na figura 3.1 (a) As trajetórias começam no ponto do marco 0. Depois de um tempo ao redor da grande circunferência do toro, o ponto da trajetória regressa ao plano de Poincaré, seguindo no sentido horário da figura, a trajetória tem viajado $2/3$ do caminho ao redor da pequena seção de cruzamento durante este tempo. Por isso, ela chega ao ponto marcado 1 no diagrama. Depois de mais uma viagem ao redor do lado de fora do toro, o ponto da trajetória é $4/3$ do caminho ao redor e chega no ponto 2. Finalmente, depois de três vezes ao redor de outra circunferência, o ponto da trajetória é $6/3$ do caminho e chega no seu ponto de início. Dessa forma, a trajetória completou 2 voltas ao redor da grande circunferência do toro, e intersectou a pequena seção de cruzamento em três pontos diferentes, daí a razão 2:3. A seqüência dos pontos de intersecção de Poincaré para uma razão de frequência de 3:5 é mostrada na figura 3.1 (b), e para uma razão irracional é mostrada na figura 3.1 (c).

Se a razão de frequência for $F_2/F_1 = p/q$, a trajetória sobre o toro fecha-se depois de q ciclos, e a seção de Poincaré consistirá de q pontos. Se a razão p/q for um número

irracional, os pontos na seção de Poincaré nunca irão repetir, e os pontos eventualmente se acumulam ao redor da curva, cobrindo o plano de Poincaré.

3.2 Número de Rotação

Em um oscilador não linear com duas frequências de oscilação F_1 e F_2 , a razão entre essas frequências é chamada número de rotação [3]:

$$\rho = \frac{F_2}{F_1} \quad (3.2).$$

O termo número de rotação vem da geometria do espaço de estados das trajetórias girando ao redor de um toro. O número de rotação ρ diz quanto tempo a trajetória gira ao redor da pequena seção de cruzamento do toro cada vez ao redor da grande circunferência do toro. Se o número de rotação é racional o comportamento do sistema é periódico. Se o número de rotação é irracional o comportamento do sistema é quase-periódico.

O número de rotação para o mapa circular da equação (2.5) é definido por [3]:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(\theta_0) - \theta_0}{n} \quad (3.3)$$

onde $f^{(n)}(\theta)$ é a n -ésima iterada da variável θ do mapa circular. O cálculo de (3.3) é independente do valor da condição inicial θ_0 e é efetuado sem admitir $\theta \bmod [1]$. Este cálculo representa o limite da razão entre a distância angular percorrida e o número de iterações n , ou seja, o número de rotação corresponde ao aumento médio da fase por unidade de tempo. O limite é incluído para eliminar qualquer comportamento transiente.

O número de rotação para o mapa linear da equação (2.4) é definido por:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\omega + \theta_0 - \theta_0}{n} = \omega. \quad (3.4)$$

Dessa forma, para o mapa linear da equação (2.4) $\rho = \omega$. No entanto, para funções não lineares, ρ e ω serão geralmente diferentes.

3.3 Travamento de Freqüência

Travamento de freqüência (ou sincronização de freqüência) é um fenômeno comum sempre que dois ou mais osciladores interagem não linearmente. Se o número de rotação é racional sobre algum intervalo de valores do parâmetro de controle, então os dois osciladores estão num estado de travamento de freqüência. Uma freqüência é travada como sendo um número racional vezes a outra freqüência [3].

Analisando o mapa circular em $\kappa < 1$, há pontos fixos com travamento de freqüência 0:1, 1:1, 2:1, e assim por diante, os quais ocorrem para algum intervalo de valores do parâmetro ω . Quando ρ é igual à razão 0:1, significa que a trajetória sobre o toro possui período 1 e completa 0 ciclos por período, isto é, a trajetória não gira ao redor de toda a seção de cruzamento do toro, e corresponde ao único ponto na seção de Poincaré. Dessa forma, de acordo com a equação (2.8), para um valor específico de κ haverá um ponto fixo para um intervalo de valores de ω em $0 \leq \omega \leq \kappa/2\pi$, onde o número de rotação definido pela equação (3.3) é igual a 0:1 [3].

Quando ρ é igual à razão 1:1, significa que a trajetória sobre o toro possui período 1 e completa 1 ciclo por período, isto é, a cada volta completa no toro a trajetória passa pelo mesmo ponto único na seção de Poincaré. Deste modo, para determinar o intervalo de valores do parâmetro ω onde ocorre travamento de freqüência na razão de 1:1, é necessário levar-se em conta que está sendo medindo ângulos de modulo 1. Assim, um ponto fixo pode ocorrer se [3]:

$$\theta + 1 = \theta + \omega - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta). \quad (3.5)$$

isto é,

$$\text{sen}(2\pi\theta) = \frac{2\pi}{\kappa}(1 - \omega). \quad (3.6)$$

Isto leva à condição

$$\omega \geq 1 - \frac{\kappa}{2\pi}. \quad (3.7)$$

Portanto, de acordo com a equação (3.7), para um valor específico de κ haverá um ponto fixo para um intervalo de valores de ω em $1 - \kappa/2\pi \leq \omega \leq 1$, onde o número de rotação definido pela equação (3.3) é igual a 1:1. Em ambos os intervalos de travamento de frequência 0:1 e 1:1, conforme κ se aproxima de 1, o intervalo de valores de ω sobre o qual ocorre travamento de frequência aumenta.

A figura 3.2 (a) mostra a evolução das iterações do mapa circular com $\kappa = 0,79$ e $\omega = 0,52$. Note que a órbita habita em um ciclo de dois valores correspondente a sincronização de frequência 1:2, isto é, a órbita é periódica com período 2. A figura 3.2 (b) mostra que esses dois valores do ciclo correspondem aos pontos fixos estáveis da segunda iterada do mapa circular ilustrados em vermelho, os quais ocorrem quando θ_{n+2} cruza com a função identidade (reta inclinada de 45°). Conforme κ aumenta, a extensão dos valores de ω para o qual ocorre a sincronização de frequência 1:2 também aumenta. Embora não seja possível encontrar a extensão de sincronização de frequência 1:2 analiticamente, é fácil de se encontrar numericamente para um dado valor de κ . Para isso, é necessário apenas encontrar a extensão dos valores de ω que dão os pontos fixos para $f^{(2)}$.

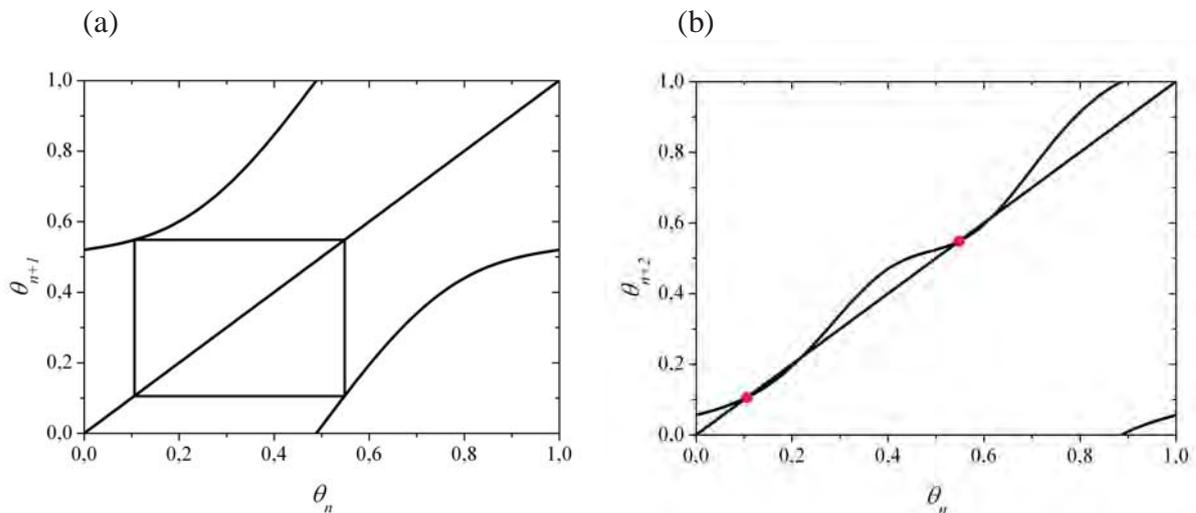


Figura 3.2: Em (a) o mapa circular seno é mostrado com $\kappa = 0,79$ e $\omega = 0,52$. O gráfico uma órbita correspondente à sincronização de frequência 1:2. Em (b), a segunda iterada do mapa circular é mostrada e os pontos em vermelho indicam que os dois valores do ciclo correspondem aos dois pontos fixos estáveis da segunda iterada da função localizados próximos de 0,106 e 0,55.

A figura 3.3 mostra a evolução das iterações do mapa circular com $\kappa = 0,95$ e $\omega = 0,34$. Note que a órbita habita em um ciclo de três valores correspondente a sincronização de frequência 1:3, isto é, a órbita é periódica com período 3. A figura 3.3 (b) mostra que esses três valores do ciclo correspondem aos pontos fixos estáveis da terceira iterada do mapa circular ilustrados em vermelho, os quais ocorrem quando θ_{n+3} cruza com a função

identidade (reta inclinada de 45°). Conforme κ aumenta, a extensão dos valores de ω para o qual ocorre a sincronização de frequência 1:3 também aumenta.

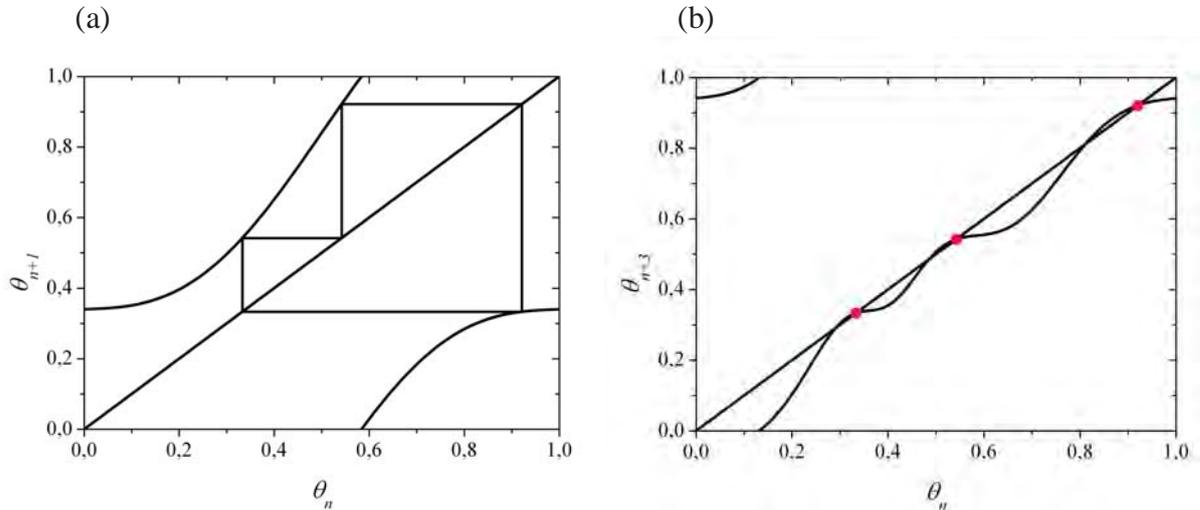


Figura 3.3: Em (a) o mapa circular seno é mostrado com $\kappa = 0,95$ e $\omega = 0,34$. O gráfico uma órbita correspondente à sincronização de frequência 1:3. Em (b), a terceira iterada do mapa circular é mostrada e os pontos em vermelho indicam que os três valores do ciclo correspondem aos três pontos fixos estáveis da terceira iterada da função localizados próximos de 0,33, 0,54, 0,92.

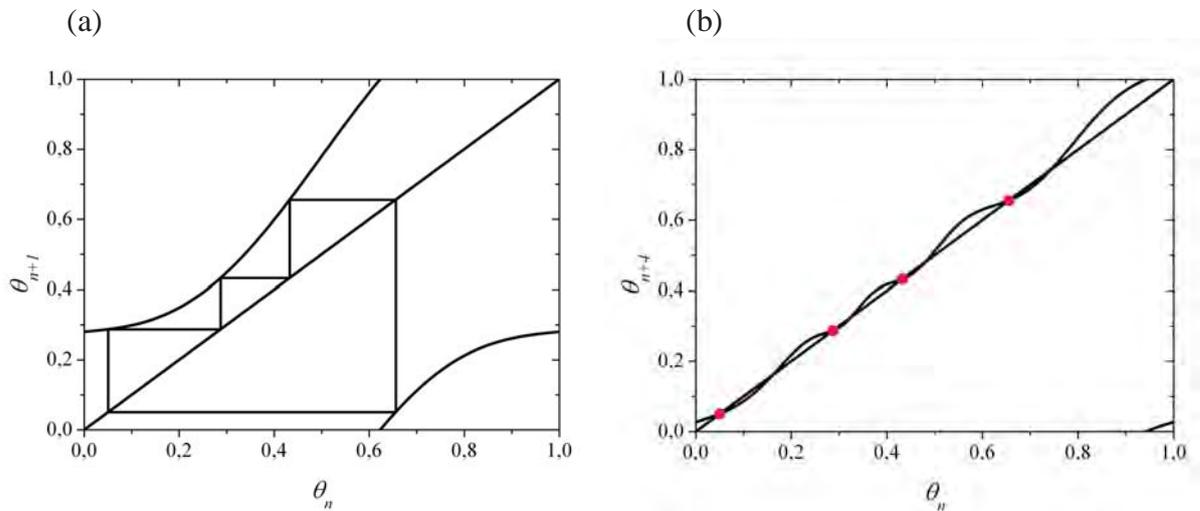


Figura 3.4: Em (a) o mapa circular seno é mostrado com $\kappa = 0,87$ e $\omega = 0,28$. O gráfico uma órbita correspondente à sincronização de frequência 1:4. Em (b), a quarta iterada do mapa circular é mostrada e os pontos em vermelho indicam que os quatro valores do ciclo correspondem aos quatro pontos fixos estáveis da quarta iterada da função localizados próximos de 0,05, 0,29, 0,43, 0,66.

A figura 3.4 mostra a evolução das iterações do mapa circular com $\kappa = 0,87$ e $\omega = 0,28$. Note que a órbita habita em um ciclo de quatro valores correspondente a sincronização de frequência 1:4, isto é, a órbita é periódica com período 4. A figura 3.3 (b) mostra que esses quatro valores do ciclo correspondem aos pontos fixos estáveis da quarta iterada do mapa circular ilustrados em vermelho, os quais ocorrem quando θ_{n+4} cruza com a função

identidade (reta inclinada de 45°). Conforme κ aumenta, a extensão dos valores de ω para o qual ocorre a sincronização de frequência 1:4 também aumenta.

A sincronização de frequência $p:q$ ocorre quando a q -ésima iterada do mapa cruza a linha de 45° . Para maiores valores de q , a amplitude da parte oscilatória da função diminui; por isso, a extensão dos valores de ω para o qual a sincronização de frequência $p:q$ ocorre fica menor conforme q aumenta.

3.3 Línguas de Arnold

A largura dos intervalos em que ocorre travamento de frequência pode ser estudada como função do parâmetro de não linearidade κ . O diagrama esboçado no plano κ - ω desses intervalos formam algumas séries de triângulos estreitos levemente distorcidos, conhecidos como **línguas de Arnold** [1]. Cada língua representa a região no espaço dos parâmetros associado a um particular número de rotação; a língua associada ao número de rotação p/q denomina-se língua- p/q . Dentro das línguas o comportamento é periódico. Nas regiões fora das línguas o comportamento é quase-periódico.

As línguas de Arnold foram calculadas para o mapa circular da seguinte maneira. Primeiro, foram determinados os valores dos números de rotação p/q a serem esboçados no plano κ - ω . Em seguida, foram iterados $3,14 \times 10^8$ conjuntos diferentes de valores dos parâmetros κ e ω , e calculado o número de rotação dado pela equação (3.3) para cada conjunto. Foram plotados os valores dos conjuntos que geram números de rotação, cujos valores possuem uma diferença menor ou igual a 10^{-5} com relação aos valores dos números de rotação p/q escolhidos. Esses conjuntos formam as línguas de Arnold mostradas na figura 3.5.

Para um oscilador não linear, em geral, a frequência de oscilação depende da amplitude do oscilador de movimento. Então, sob condições normais, esperara-se que a frequência de um oscilador não linear mude se algum parâmetro do sistema mudar, porque esta mudança no parâmetro irá mudar a amplitude de oscilação. Sobre esta consideração, é necessário um conjunto muito preciso de valores dos parâmetros para conseguir uma razão de frequência particular, dita p/q . Porém, no mapa circular o travamento de frequência em uma mesma razão p/q acontece sobre alguma extensão de valores dos parâmetros.

Para o mapa circular cada ρ irracional corresponde a um único ω . Entretanto, existem intervalos finitos do parâmetro ω nos quais o mapa iterado se mantém com o mesmo número de rotação $\rho = p/q$ racional e $\{\theta_i(\kappa, \omega)\}$ é periódico com período p . Diz-se que a equação se

trava ou se sincroniza com o número de rotação ao longo do intervalo [3].

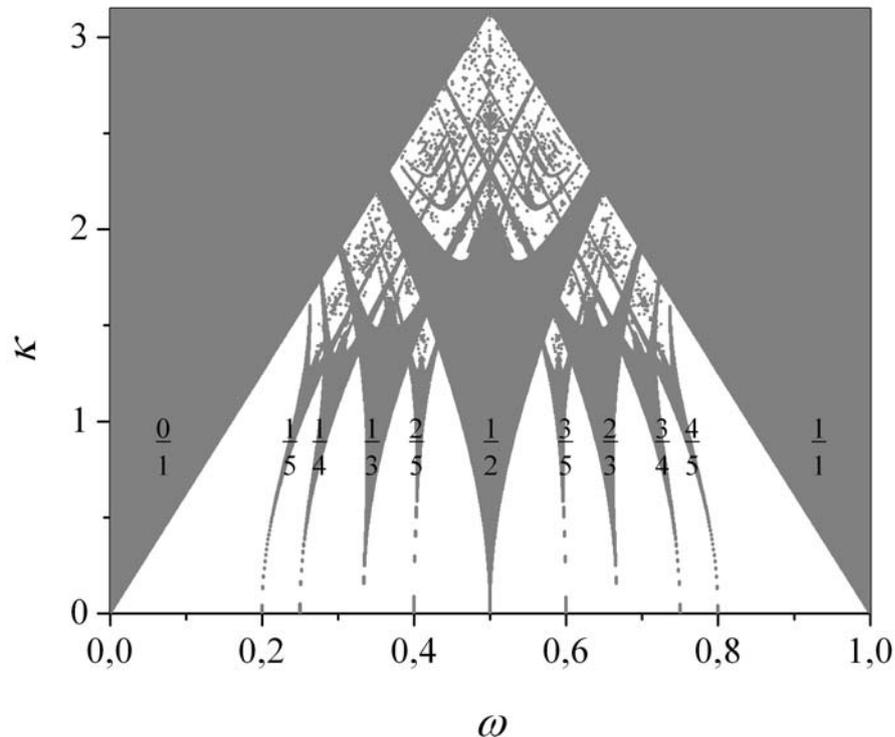


Figura 3.5: Algumas regiões de travamento de frequência para o mapa circular, chamadas Línguas de Arnold. Em $\kappa = 0$, a maior parte o eixo ω consiste de comportamento quase-periódico. Conforme κ aumenta, as regiões de sincronização de frequência se alargam. Acima da linha $\kappa = 1$, as regiões de sincronização de frequência se sobrepõem gerando caos.

Conforme κ se aproxima de 1, o mapa circular possui maiores intervalos dos valores de ω sobre o qual os pontos fixos existem, conforme a equação (2.8), ou seja, há intervalos maiores de valores de ω para o qual as órbitas cruzam a linha inclinada de 45° no gráfico do mapa. Isto significa que há um maior número de oscilações, e conseqüentemente, maiores intervalos dos valores do parâmetro ω sobre o qual o travamento de frequência ocorre, e as regiões de travamento de frequência se expandem para encher intervalos finitos ao longo do eixo ω .

Em $\kappa = 1$ constitui uma *linha crítica*, onde as línguas de Arnold se tornam largas o suficiente para se sobreporem. Para $\kappa > 1$ a sobreposição das línguas gera mais do que uma frequência possível de oscilação, gerando um comportamento caótico. Fora das línguas as órbitas quase-periódicas remanescentes desaparecem abruptamente, dando origem a órbitas caóticas, e os valores de ω para os quais o sistema apresenta comportamento quase-periódico tornam-se um conjunto de medida nula.

3.4 Escada do Diabo

A função $\rho(\omega)$ forma um diagrama denominado *escada do Diabo*: uma função monotonamente crescente com patamares de largura finita para cada racional ω [1]. A *escada do Diabo* foi calculada para o mapa circular da seguinte maneira. Primeiro, foram determinados os valores dos números de rotação p/q a serem esboçados no diagrama. Em seguida, foi fixado o valor de $\kappa = 1$ e iterados 1×10^5 valores diferentes de ω e calculado o número de rotação dado pela equação (3.3) para cada ω . Foram plotados os valores de p/q como uma função de ω , para os valores de ω que geram números de rotação, cujos valores possuem uma diferença menor ou igual a 10^{-5} com relação aos valores dos números de rotação p/q escolhidos. A figura 3.6 mostra a escada do Diabo, onde as frações p/q , indicam o número de rotação dentro de cada língua na altura de $\kappa = 1$.

Como se pode observar, a estrutura da escada do diabo é *auto-similar*, isto é, ao ampliar-se cada patamar vê-se uma estrutura similar à anterior. Pode-se, portanto, compreender a designação “*escada do diabo*”: existe um número infinito de degraus entre cada dois degraus. Mas, naturalmente, a maioria dos degraus tem largura infinitesimal, uma vez que existe uma infinidade (contável) deles num intervalo finito [3].

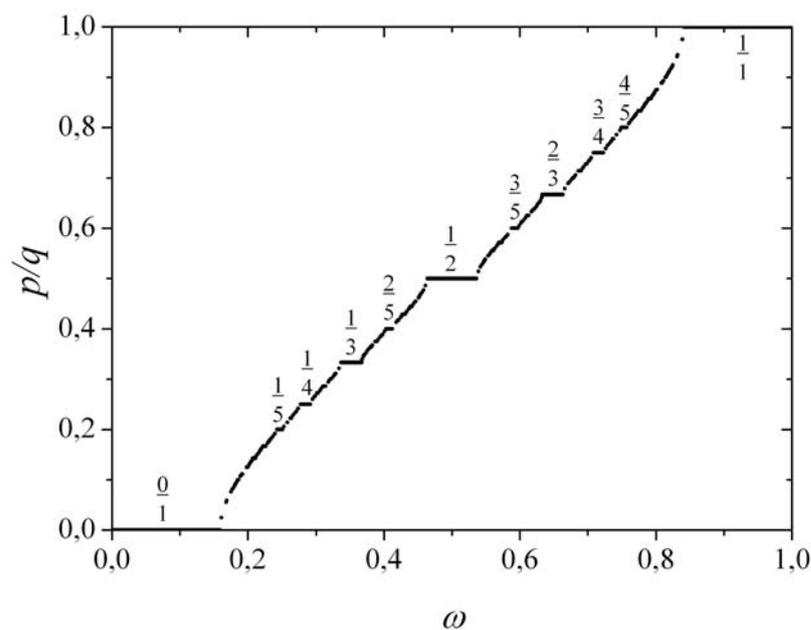


Figura 3.6: O número de rotação $\rho = p/q$ esboçado como função do parâmetro de frequência ω para o mapa circular seno com $\kappa = 1$. Note que os platôs de travamento de frequência p/q não mudam para uma substancial extensão de ω . Esses platôs formam a chama *Escada do Diabo*. Essa estrutura é *auto-similar*.

Do ponto de vista da estabilidade estrutural os regimes de quase-periodicidade (p/q

irracional) são estruturalmente instáveis; com efeito, uma modificação infinitesimal no parâmetro de controle transforma-o num regime periódico, ou seja, o sistema entra num dos intervalos com estado travado. Por outro lado, os regimes de travamento (p/q racional) são estruturalmente estáveis.

Para valores de ω que não correspondem a um platô de travamento, os valores da trajetória devem eventualmente cobrir uma curva completa sobre o diagrama $\theta_{n+1} - \theta_n$. A fig. 3.7 mostra os resultados da iteração gráfica do mapa circular para parâmetros que geram comportamento quase-periódico.

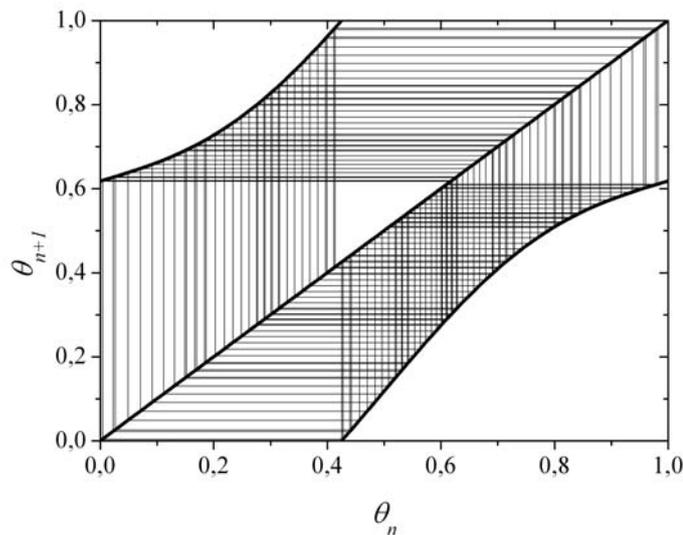


Figura 3.7: Evolução das iterações do mapa circular seno com $\kappa = 0,6$ e $\omega = 0,6180339$. A condição inicial é $0,5$. O comportamento é quase-periódico (sem travamento de frequência). A trajetória eventualmente cobre uma completa extensão dos valores de θ .

3.5 Árvore de Farey

Uma observação na figura 3.6 é que os platôs de sincronização de frequência diminuem em largura (ao longo do eixo ω) quando o denominador na fração p/q aumenta. Por exemplo, o platô $\rho = 1/4$ é menor do que o platô para $\rho = 1/3$. No mapa circular seno, diferentes p 's, tem a mesma largura para um dado q .

Dessa forma, para duas frações racionais p/q e p'/q' , a fração racional que está entre elas e tem o menor denominador é a fração [3,44]:

$$\frac{p + p'}{q + q'}$$

É possível ordenar as frações racionais que estão entre 0 e 1 de acordo com o aumento dos denominadores pela construção da árvore de Farey, mostrada na figura 3.8. Para construir a árvore de Farey, cada nova fração é formada adicionando numeradores e denominadores de frações racionais, gerando as correspondentes ramificações. Em cada linha horizontal todas as frações tem o mesmo denominador e correspondem a degraus de sincronização com mesmo tamanho para o mapa circular. A largura dos platôs diminuem conforme se move para baixo na árvore.

A árvore de Farey mostra a ordem e os tamanhos relativos dos platôs de sincronização mas não mostra a duração dos degraus, os quais dependem do valor de κ , a intensidade de não linearidade. Contudo, a árvore de Farey sugere uma universalidade no comportamento de sincronização de frequência.

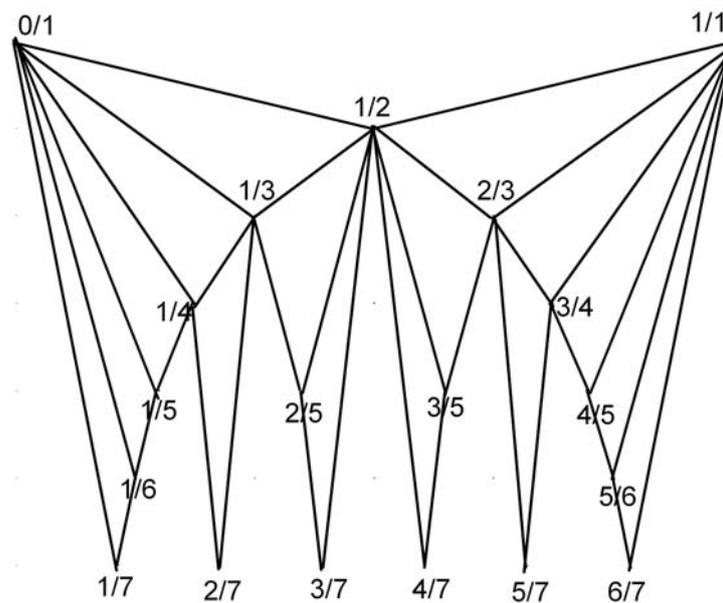


Figura 3.8: A construção da árvore de Farey a qual ordena números racionais entre 0 e 1.

Para um determinado valor de ω $\rho = p/q$, pode-se expressar o travamento de frequência observando que depois de q iterações do mapa circular f_{ω_1} , o valor do ângulo é o valor atual mais p , isto é [3,44]

$$f_{\omega_1}^{(q)}(\theta) = p + \theta. \quad (3.8)$$

Dessa forma, para um valor de ω um pouco maior, o sistema pode possuir travamento de frequência com $\rho = p'/q'$, isto é

$$f_{\omega_2}^{(q')}(\theta) = p' + \theta. \quad (3.9)$$

Assim, combinando as duas iterações dadas pelas equações (3.8) e (3.9), pode-se escrever

$$f_{\omega_1}^{(q)}(f_{\omega_2}^{(q')}(\theta)) = p + p' + \theta. \quad (3.10)$$

Conforme ω_1 aumenta, as iterações do mapa atingem um valor maior do que $p + p' + \theta$, devido ao aumento de $f(\theta)$ com ω . O “excesso” do resultado pode ser compensado diminuindo o valor de ω_2 . Portanto, aumentando ω_1 enquanto ω_2 diminui simultaneamente, a equação (3.10) que é escrita em termos de ω_1 e ω_2 , pode ser escrita para um único valor de $\omega = \omega_3$, como

$$f_{\omega_3}^{(q+q')}(\theta) = p + p' + \theta. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) diz que existe em um intervalo de valores de ω_3 localizado entre dois intervalos ω_1 e ω_2 (com números de rotação racionais p/q e p'/q' respectivamente), o qual possui um novo número de rotação $(p + p')/(q + q')$, conforme ilustrado no diagrama da árvore de Farey.

3.6 Universalidade na rota quase-periódica para o caos

O mapa circular apresenta comportamento quase-periódico para valores de $\kappa < 1$, quando as razões das frequências são irracionais. O aumento da intensidade de κ conduz do comportamento quase-periódico ao comportamento caótico [45]. Este tipo de transição para o caos é caracterizado por dois tipos de universalidade a seguir.

3.6.1 Universalidade local

Este tipo de universalidade está associada com a transição de quase-periodicidade para o caos para um número de rotação irracional específico, isto é, local.

Uma maneira de aproximar um determinado número irracional como uma seqüência

de números racionais é pelo método de frações contínuas. O número irracional conhecido como “*média dourada*” $G = (\sqrt{5} - 1)/2 = 0,6180339\dots$ pode ser escrito como [3]:

$$G = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} \quad (3.12)$$

Acrescentando n frações no denominador, tem-se a n -ésima ordem de aproximação para G , gerando uma seqüência de aproximações racionais, chamada seqüência truncada, a qual converge para um número irracional quando $n \rightarrow \infty$. G_n é chamada a n -ésima convergente para G .

Uma outra relação de construção usa a chamada seqüência de Fibonacci. A seqüência de Fibonacci é definida usando dois números base $F_0 = 0$ e $F_1 = 1$ e a relação de recursão [3,44]

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad (3.13)$$

isto é, o n -ésimo número na seqüência é igual à soma de dois números anteriores na seqüência. Então, o número irracional “*média dourada*” é aproximado pela seqüência de Fibonacci por

$$G = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}. \quad (3.14)$$

A transição de quase-periodicidade para o caos foi observada para o número de rotação “*média dourada*”, o qual é a base de investigação de universalidade local para o mapa circular.

Na figura 3.5, é possível notar que as larguras das línguas diminuem para denominadores grandes. A característica universal local a ser estudada, envolve valores de ω que dão lugar à seqüência de números de rotação (para $\kappa \leq 1$) que se aproximam da “*média dourada*” seguindo a seqüência de razões de números de Fibonacci dada pela equação (3.14). Para definir esta universalidade, basta introduzir um valor particular de $\omega_n(\kappa)$, o qual através

da equação (3.9) converge para um número de rotação igual à n -ésima aproximação da “*média dourada*”:

$$\rho_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}}. \quad (3.15)$$

Os valores dos parâmetros $\omega_n(\kappa)$ os quais geram os números de rotação ρ_n em (3.15) e possuem $\theta = 0$ como um ponto na trajetória, tendem para uma constante δ [3,44]

$$\delta(\kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_n(\kappa) - \omega_{n-1}(\kappa)}{\omega_{n+1}(\kappa) - \omega_n(\kappa)}. \quad (3.16)$$

onde,

$$\delta(\kappa) = -2,6180339\dots \text{ para } |\kappa| < 1 \quad (3.17\text{-a})$$

$$\delta(\kappa) = -2,83362\dots \text{ para } |\kappa| = 1 \quad (3.17\text{-b})$$

A constante δ fornece a razão de diferenças sucessivas nos valores de ω quando é permitido o número de rotação se aproximar do valor “*média dourada*”. A figura 3.9 foi calculada para o mapa circular da seguinte maneira. Primeiro, foi determinado o valor do número de rotação média dourada a ser esboçado no plano κ - ω . Em seguida, foram iterados $1,8 \times 10^7$ conjuntos diferentes de valores dos parâmetros κ e ω , e calculado o número de rotação dado pela equação (3.3) para cada conjunto. Foram plotados os valores dos conjuntos que geram números de rotação, cujos valores possuem uma diferença menor ou igual a 10^{-6} com relação ao valor do número de rotação média dourada. Esses conjuntos formam um diagrama mostrado na figura 3.9.

Dessa forma, a figura 3.9 mostra os conjuntos de valores dos parâmetros κ e ω , os quais geram número de rotação irracional “*média dourada*”, onde no limite quando $n \rightarrow \infty$, $\omega_n = 0,60702\dots$. Conforme o parâmetro de não linearidade aumenta, o parâmetro ω_n deve ser balanceado para manter o número de rotação ρ_n fixo para o valor irracional “*média dourada*”, para garantir a quase-periodicidade.

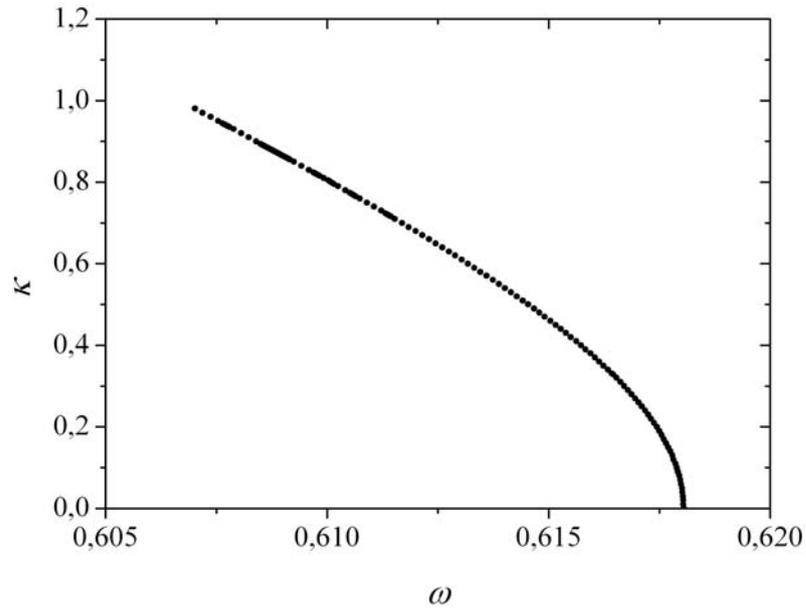


Figura 3.9: Espaço dos parâmetros para números de rotação irracional “*média dourada*”.

As distâncias d_n de $\theta = 0$ até o próximo elemento de um ciclo pertencente a $\omega_n(\kappa)$ são dadas por:

$$d_n = f_{\omega_n}^{F_n}(0) - F_{n-1}. \quad (3.18)$$

Essas distâncias são escaladas como

$$\alpha(\kappa) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n(\kappa)}{d_{n+1}(\kappa)}. \quad (3.19)$$

onde,

$$\alpha(\kappa) = -1,618... \quad \text{para } |\kappa| < 1 \quad (3.20\text{-a})$$

$$\alpha(\kappa) = -1,28857... \quad \text{para } |\kappa| = 1 \quad (3.20\text{-b})$$

Os valores de $\delta(\kappa)$ e $\alpha(\kappa)$ para $|\kappa| < 1$ foram calculados através da equação (3.9), e para $|\kappa| = 1$ foram tirados da literatura [3,44]. Os fatores de escala $\delta(\kappa)$ e $\alpha(\kappa)$ são constantes universais para sistemas que apresentam transição para o caos via quase-periodicidade, e representam para o mapa circular o mesmo papel que as constantes de Feigenbaum representam para o mapa logístico [46].

3.6.2 Universalidade Global

Este tipo de universalidade está associada com propriedades universais globais para um conjunto de valores de ω que são complementares às línguas de Arnold e correspondem a números de rotação irracionais, descrevendo o comportamento de escala desse conjunto [44].

Dimensão Fractal

Fractais são formas geométricas com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma região finita (independência da escala), e possuem estrutura geométrica auto-similar [2].

O conceito de dimensão fractal pode ser visto da seguinte maneira: seja um conjunto de pontos A num espaço de dimensão r . Recobre-se esses pontos com hiper-cubos de lado ε . Define-se dimensão de Hausdorff-Besecovitch ou dimensão fractal como [2]

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (3.21)$$

onde $N(\varepsilon)$ é o número mínimo de hiper-cubos de lado ε necessário para cobrir todo o conjunto de pontos A , ou seja, $N(\varepsilon)$ varia segundo ε^{-D} para $\varepsilon \rightarrow 0$.

A dimensão fractal (ou dimensão de Hausdorff), recupera o conceito euclidiano de dimensão inteira e permite a sua generalização para conjuntos mais complexos. No caso de objetos fractais, a dimensão apresenta-se fracionária [2].

Um dos algoritmos numéricos disponíveis para o cálculo da dimensão fractal é o algoritmo da contagem de caixas, o qual faz o uso direto da definição de dimensão fractal. Neste algoritmo divide-se a região do espaço de fases ocupada pelo atrator em caixas de dimensão ε ; itera-se o mapa n vezes (n grande) e contam-se quantas destas caixas, $N(\varepsilon)$, têm pelo menos um ponto do atrator, repetindo o cálculo para diversos valores de ε . D é dada pela inclinação do gráfico $\log N(\varepsilon) \times \log 1/\varepsilon$.

Voltando o assunto para o mapa circular, em $\kappa = 1$ devido à sobreposição das línguas de Arnold, o conjunto dos valores de ω correspondentes a números de rotação irracionais é um fractal de medida igual a zero. A seguir será descrito o cálculo da dimensão do conjunto dos números de rotação irracionais em $\kappa = 1$.

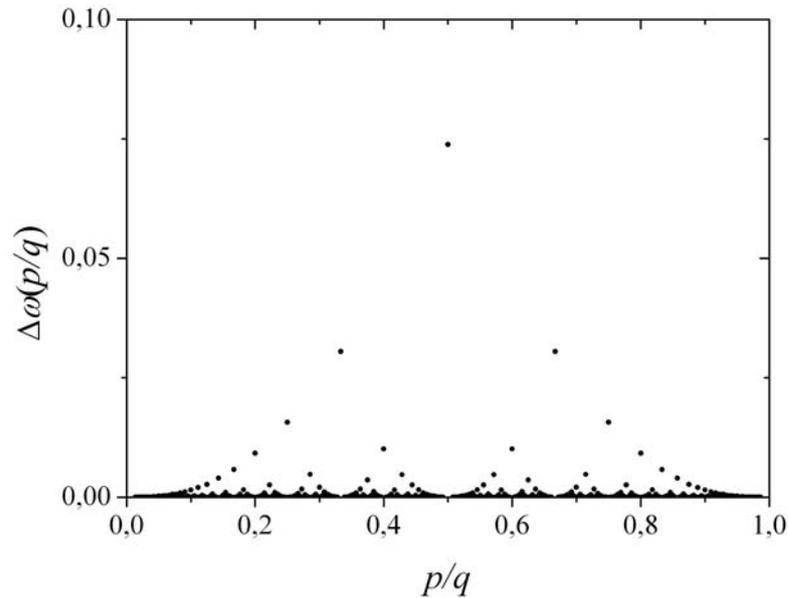


Figura 3.10: Largura dos intervalos $\Delta\omega(p/q)$ em $\kappa = 1$. Este diagrama é auto-similar.

Primeiro foi calculado a largura $\Delta\omega(p/q)$ dos intervalos dos valores de ω com travamento de frequência p/q , dos degraus da escada da figura 3.6 no ponto crítico $\kappa = 1$, mostrado na figura 3.10. Note que este diagrama é auto-similar.

Presume-se que eventualmente $\Delta\omega(p/q) > 0$ para todo p e todo q . Ao incluir mais e mais degraus na escada o eixo ω torna-se mais e mais cheio [1,47]. Para investigar se os intervalos de sincronização irão ou não eventualmente cobrir todo o eixo ω , é calculada a largura total $S(\varepsilon)$ de todos os degraus que são maiores do que uma escala ε escolhida arbitrariamente. O interesse é no espaço entre os degraus, $1 - S(\varepsilon)$ e sua medida sobre a escala ε para encontrar o número de buracos entre os degraus $N(\varepsilon) = [1 - S(\varepsilon)]/\varepsilon$. $N(\varepsilon)$ foi calculado para 15 valores de ε escolhidos aleatoriamente e decrescendo sucessivamente no intervalo $[0,001; 0,0004]$. A figura 3.11 mostra o gráfico de $\log N(\varepsilon) \times \log (1/\varepsilon)$. Os pontos formam uma linha reta indicando comportamento de uma lei de potência:

$$N(\varepsilon) \approx \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D. \quad (3.22)$$

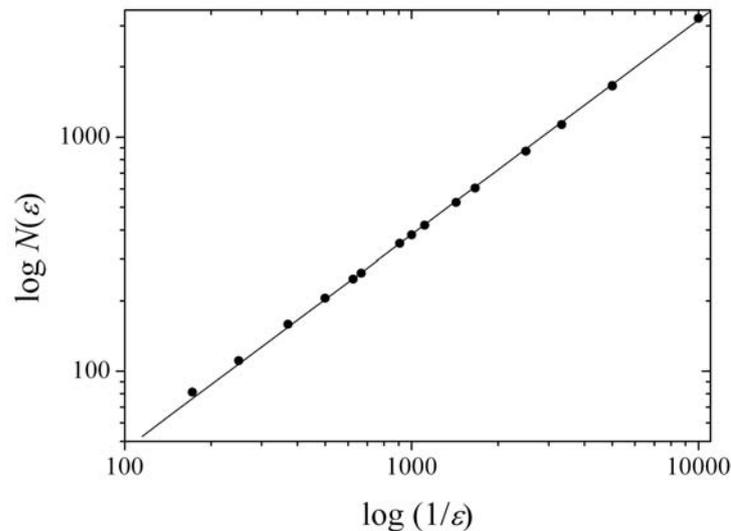


Figura 3.11: Gráfico de $\log N(\varepsilon) \times \log(1/\varepsilon)$ em $\kappa = 1$. A inclinação da linha reta fornece o valor de $D \approx 0,92$.

Através da inclinação da linha reta na Figura 3.11 foi encontrado o valor de $D_0 = 0,92 \pm 0,00248$, com um erro percentual de 5,7% do resultado numérico de $D = 0,87$ encontrado em [43]. Sabendo que $N(\varepsilon) = [1 - S(\varepsilon)]/\varepsilon$, a equação (3.22) mostra que quando em $\varepsilon \rightarrow 0$, o espaço entre dois degraus desaparece da seguinte forma:

$$1 - S(\varepsilon) \approx \varepsilon^{1-D}. \quad (3.23)$$

Neste caso, não haverá números de rotação irracionais, e conseqüentemente, não haverá movimento quase-periódico em $\kappa = 1$, e a escada será chamada completa, ou seja, o espaço entre dois degraus possuirá medida zero.

Dessa forma, em $\kappa = 1$ o conjunto complementar dos intervalos dos valores de ω com platô de travamento de freqüência (espaço entre os degraus), é então um conjunto de Cantor [1,47]. O expoente D representa a dimensão fractal para esse conjunto de Cantor. A dimensão pode ser considerada uma maneira útil de caracterizar as propriedades de escada no ponto crítico, pois D é o expoente característico para o sistema na transição de quase-periodicidade para o caos, é universal para uma grande classe de funções.

Espectro de estrutura multifractal

Muitos fractais não são homogêneos em sua invariança de escala, sendo mais complexos e com medida associada bastante irregular, são os chamados multifractais. O

conceito de dimensão fractal é insuficiente para caracterizar toda a riqueza da estrutura de um conjunto multifractal. A caracterização completa dos multifractais exige um conjunto infinito de dimensões: as *dimensões generalizadas de Renyi* definidas como [2]

$$D_q = \frac{1}{q-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} p_i^q}{\log_2 \varepsilon}. \quad (3.24)$$

onde q pertence ao conjunto de números reais e varia de $-\infty$ a $+\infty$, p_i é a fração de pontos que estão na i -ésima caixa após n iterações do mapa, enquanto $N(\varepsilon)$ é o número de caixas necessárias para cobrir todo o atrator.

A diferença entre as infinitas dimensões D_q mede o *grau de não-homogeneidade* do atrator. Quando $D_q \neq D_{q'}$, $q \neq q'$, diz-se que o atrator é um *multifractal*. O índice q faz o papel de uma lente com a qual observa-se o conjunto. Quando $q \rightarrow \infty$ as regiões mais densas do atrator são realçadas. Inversamente, quando $q \rightarrow -\infty$ são as regiões mais rarefeitas que se destacam. Dessa forma, o número real q serve para caracterizar o subconjunto de singularidades que determina D_q .

Os multifractais são estatisticamente auto-similares e obedecem a uma *lei de escala múltipla*, onde os expoentes são funções que variam continuamente [2]. Uma dessas funções é o chamado espectro de singularidades $f(\alpha)$, definido a seguir. A descrição dos multifractais em termos do espectro de singularidades, permite-se falar em termos de uma universalidade global nos sistemas dinâmicos caóticos, significando que uma órbita no espaço de fases tem uma universalidade métrica como um todo. Ou seja, atratores estranhos multifractais devem ser caracterizados por um conjunto de *medidas fractais*, singulares em cada ponto, que por sua vez são caracterizadas pelas suas singularidades.

A função $f(\alpha)$ caracteriza a distribuição estática de pontos no atrator e é universal para atratores gerados por sistemas dinâmicos caóticos semelhantes. Multifractais podem ser entendidos como a interligação de diferentes conjuntos cada um caracterizado por uma singularidade α diferente, e portanto, por uma dimensão de Hausdorff $f(\alpha)$ diferente [2].

Na literatura é mostrado que a função $f(\alpha)$ se relaciona com as *dimensões generalizadas de Renyi* por meio de uma transformação de Legendre [2]:

$$f(\alpha) = q\alpha - (q-1)D_q \quad (3.25)$$

e portanto

$$\alpha(q) = \frac{\partial}{\partial q} [(q-1)D_q]. \quad (3.26)$$

A função $f(\alpha)$ foi calculada para o mapa circular segundo as seguintes etapas: foi ajustada uma curva aos pontos previamente calculados de $D_q(q)$. Em seguida foi determinado o grau do polinômio da curva $D_q(q)$. Foi calculada a derivada da equação (3.26) resultando na expressão para $\alpha(q)$, e os valores de $\alpha(q)$ encontrados para cada q foram substituídos na equação (3.25), para finalmente obter a curva $f(\alpha)$.

No mapa circular, em $\kappa = 1$ e número de rotação irracional “*média dourada*” o parâmetro ω converge para $\omega = 0,60666206347\dots$ A função $D_q(q)$ associada ao mapa circular para estes valores dos parâmetros, foi calculada através do método da contagem de caixas, onde recobriu-se o espaço de fases com caixas de tamanho ε , cada uma com índice i . Foram então calculadas as probabilidades

$$p_i(\varepsilon) = \frac{N_i}{N}, \quad (3.27)$$

onde N_i é o número de pontos dentro da caixa i , para $n = 10^5$ iterações. O cálculo foi repetido para 20 valores de ε variando no intervalo $[0,1; 0,002]$, e construído o gráfico $\left| \log \sum_i [p_i(\varepsilon)]^q \right| \times \log \varepsilon$ para cada q . Os pontos desse gráfico formaram uma reta cuja inclinação é igual a $(q-1) D_q$. O cálculo foi repetido para 60 valores de q , resultando na curva $D_q(q)$ mostrada na figura 3.12.

Na figura 3.12 é possível notar que a curva $D_q(q)$ é uma função sigmoïdal, se encaixando no *modelo de Boltzmann*. Os cálculos numéricos realizados forneceram

$$D_q(q) = A2 + \frac{A1 - A2}{1 + e^{\left(\frac{q - q_0}{dq}\right)}}. \quad (3.28)$$

onde $A1 = 1,87993$, $A2 = 0,63837$, $q_0 = -1,9018$ e $dq = 2,88141$.

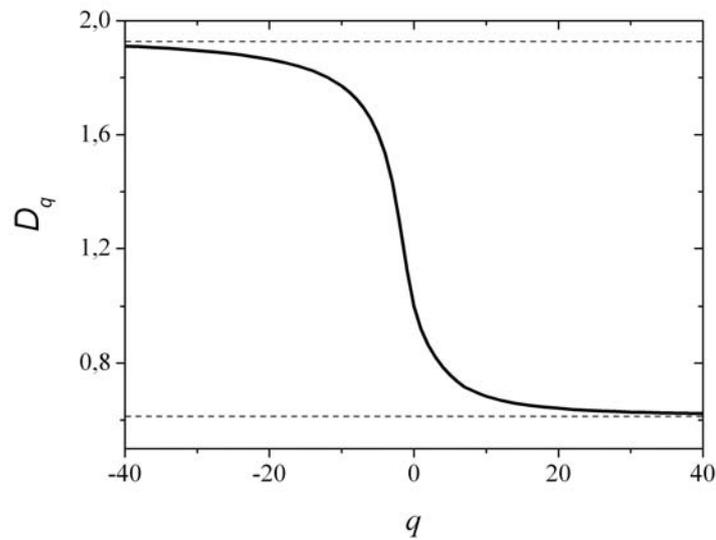


Figura 3.12: Gráfico das dimensões generalizadas D_q como uma função de q para o mapa circular, com $\kappa = 1$ e número de rotação igual à “média dourada”.

Conhecendo-se a função $D_q(q)$, foi calculada numericamente a derivada da equação (3.26), resultando na função $\alpha(q)$:

$$\alpha(q) = -\frac{(A1 - A2)e^{\left(\frac{q-q_0}{dq}\right)}(q-1)}{\left(1 + e^{\left(\frac{q-q_0}{dq}\right)}\right)^2 dq} + A2 + \frac{A1 - A2}{1 + e^{\left(\frac{q-q_0}{dq}\right)}}. \quad (3.29)$$

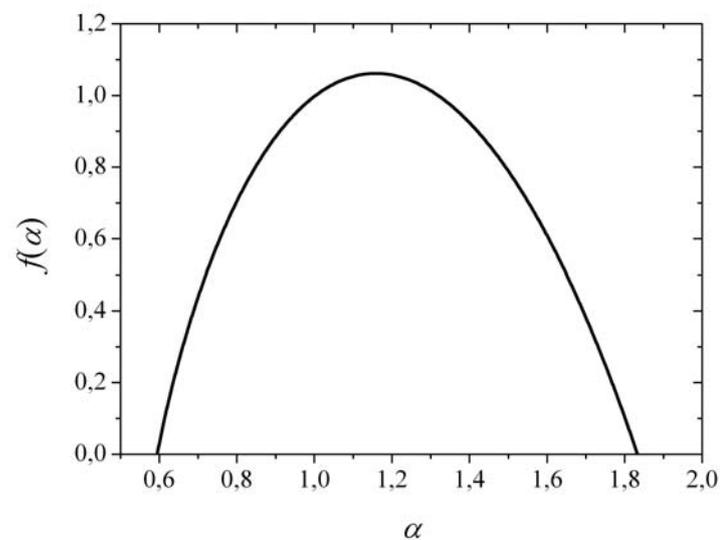


Figura 3.13: Gráfico da distribuição $f(\alpha)$ para o mapa circular, com $\kappa = 1$ e número de rotação igual à “média dourada”.

Através da equação (3.29), foram calculados os valores de $\alpha(q)$, os quais foram substituídos na equação (3.25). O cálculo foi repetido para cada valor de q mostrado na figura 3.12, gerando a curva $f(\alpha)$ mostrada na figura 3.13.

No espectro $f(\alpha)$, o maior valor de α correspondente à região menos densa de forma que o lado de pequenos valores de α na curva $f(\alpha)$ correspondem a valores de q positivo e altos valores de α correspondem a valores de q negativo. Conforme já mencionado, as distancias ao redor de $\theta = 0$ escalam por um fator universal dado pela equação (3.20-b). Dessa forma, a região mais rarefeita pode ser expressada analiticamente como:

$$\alpha_{\max} = \frac{\ln G}{\ln \beta^{-1}} = 1,8980... \quad (3.30)$$

onde $\beta = 1,2885$, o fator de escala na vizinhança de $\theta = 0$ para o mapa circular seno [3].

Na outra extremidade, o menor valor de α corresponde à região mais densa é expressada como:

$$\alpha_{\min} = \frac{\ln G}{\ln \beta^{-3}} = 0,6326... \quad (3.31)$$

O pico da distribuição ocorre em $f(\alpha) = 1$, e corresponde ao valor de $q = 0$.

Sistemas dinâmicos que obedecem uma rota para o caos através de quase-periodicidade podem ser representados por uma mesma função universal $f(\alpha)$.

Capítulo 4

Sincronização de fase em mapas circulares acoplados

Investigações teóricas na dinâmica de sistemas não-lineares revelaram a existência do fenômeno de sincronização de fase em osciladores caóticos acoplados. Neste fenômeno os osciladores oscilam em fase quando o acoplamento supera a diferença das frequências naturais, ajustando os ritmos das oscilações e os osciladores mutuamente entram em uma frequência travada (ou sincronizada). Neste capítulo serão apresentados a sincronização de fase de dois mapas circulares acoplados não linearmente, os efeitos de transição para o comportamento síncrono, sob quais condições esse comportamento é possível e os efeitos de transição para o comportamento não síncrono.

4.1 Mapas circulares acoplados

Conforme já mencionado, a variável θ no mapa circular pode ser definida por um ângulo que especifica onde a trajetória está na seção de Poincaré de um movimento no espaço de fases sobre um toro. Quando há sobre um toro duas trajetórias não idênticas, elas se tornam não independentes quando interagem fracamente entre si. Para isso, basta acoplar as duas trajetórias.

Pode haver diferentes formas de interação, ou **acoplamento** entre dois osciladores. Basicamente pode-se dividir as formas de acoplamento em duas classes: acoplamento unidirecional e acoplamento bidirecional [33,36]. No acoplamento unidirecional somente um dos sistemas recebe a influência do outro, um sistema com este tipo de acoplamento é chamado mestre-escravo. Isto implica que o sistema escravo segue a dinâmica do sistema mestre, e a dinâmica do sistema escravo é alterada pela influência do sistema mestre, porém, o inverso não ocorre, isto é, o sistema mestre evolui de forma isolada. Já no acoplamento bidirecional ambos os sistemas são acoplados um com o outro, de forma a ocorrer um intercâmbio de informações entre eles, e a constante de acoplamento induz um ajustamento dos ritmos, gerando um mútuo comportamento síncrono.

Um sistema de dois mapas circulares acoplados bidirecionalmente pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}^1 &= \theta_n^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) \\ \theta_{n+1}^2 &= \theta_n^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2)\end{aligned}\quad (4.1)$$

onde há duas variáveis de fase θ_1 e θ_2 , ω_1 e ω_2 são as frequências não perturbadas, κ é o parâmetro de controle não linear do sistema possuindo o mesmo valor em ambas as equações e ε é o parâmetro de acoplamento. Quando o acoplamento é zero, o sistema se torna dois mapas circulares independentes.

Um sistema de dois mapas circulares acoplados é geralmente imaginado como um simples paradigma para dois pêndulos caóticos acoplados ou dois osciladores acoplados.

Os pontos fixos para o sistema (4.1) correspondem aos valores que satisfazem a equação

$$\begin{aligned}\theta^1 &= \theta^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^1) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^2) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^1) \\ \theta^2 &= \theta^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^2) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^1) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta^2)\end{aligned}\quad (4.2)$$

equivalente a

$$\begin{aligned}\text{sen}(2\pi\theta^1) &= -\frac{2\pi(\omega_2\varepsilon - \omega_1\kappa + \omega_1\varepsilon)}{\kappa(\kappa - 2\varepsilon)} \\ \text{sen}(2\pi\theta^2) &= -\frac{2\pi(\omega_2\kappa - \omega_2\varepsilon - \omega_1\varepsilon)}{\kappa(\kappa - 2\varepsilon)}\end{aligned}\quad (4.3)$$

Dessa forma, se

$$|\kappa(\kappa - 2\varepsilon)| \geq |2\pi(\omega_2\varepsilon - \omega_1\kappa + \omega_1\varepsilon)| \quad (4.4-a)$$

$$\text{e} \quad |\kappa(\kappa - 2\varepsilon)| \geq |2\pi(\omega_2\kappa - \omega_2\varepsilon - \omega_1\varepsilon)| \quad (4.4-b)$$

então haverá pelo menos um ponto fixo para o sistema, que pode ser calculado analiticamente. De modo análogo ao mapa individual, os pontos fixos que podem ser calculados analiticamente ocorrem somente para certas combinações de κ , ω_1 , ω_2 e ε . Se houver pontos fixos, então pode-se examinar sua estabilidade através dos autovalores λ_1 e λ_2 da matriz jacobiana utilizando a equação de autovalores [2]

$$|J - \lambda I| = 0, \quad (4.5)$$

onde I é a matriz identidade e J é a matriz jacobiana do sistema dada por [2]:

$$J = \begin{bmatrix} 1 - \kappa \cos(2\pi\theta_1) + \varepsilon \cos(2\pi\theta_1) & -\varepsilon \cos(2\pi\theta_2) \\ -\varepsilon \cos(2\pi\theta_1) & 1 - \kappa \cos(2\pi\theta_2) + \varepsilon \cos(2\pi\theta_2) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

4.2 Expoentes de Lyapunov

Conforme foi visto no capítulo 2 deste trabalho, os expoentes de Lyapunov fornecem uma medida de dependência sensível às condições iniciais, ou seja, a taxa média de divergência das trajetórias. Em um mapa bidimensional tem-se dois expoentes de Lyapunov que correspondem às duas direções linearmente independentes do espaço de fases nas quais o elemento de volume inicial pode se expandir ou contrair. Os expoentes de Lyapunov para o sistema (4.1) são definidos por [2]

$$\lambda_{1,2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_{1,2}^n|, \quad (4.7)$$

onde os $|\Lambda_{1,2}|$ são os módulos dos autovalores da matriz M definida por

$$M = \prod_{i=1}^n J(\vec{\theta}_i), \quad (4.8)$$

e os $J(\vec{\theta}_i)$ são as matrizes Jacobianas definidas pela equação (4.6), calculadas no ponto $\vec{\theta}_i$ da trajetória.

O cálculo dos expoentes de Lyapunov $\lambda_{1,2}$ a partir de (4.7) e (4.8) apresenta alguns problemas. Em geral, mesmo para um número n pequeno de iterações, os elementos da matriz

M tornam-se muito grandes, causando problemas de “overflow” que inviabilizam o cálculo numérico. O algoritmo descrito a seguir contorna tais problemas e, de modo análogo ao caso unidimensional, o cálculo dos expoentes $\lambda_{1,2}$ é reduzido a uma média simples.

O maior problema é calcular o produto

$$M = \prod_{i=1}^n J(\vec{\theta}_i) = J(\vec{\theta}_n)J(\vec{\theta}_{n-1})\dots J(\vec{\theta}_1) \equiv J_n J_{n-1} \dots J_1, \quad (4.9)$$

e os autovalores associados. Conforme demonstrado na literatura [2], é possível transformar M num produto de matrizes triangulares. Como o produto de matrizes triangulares é também uma matriz triangular e os autovalores de uma matriz triangular são seus elementos diagonais, pode-se, dessa maneira, contornar as dificuldades que o cálculo direto do produto que (4.9) apresenta. Conforme também demonstrado na literatura [2], uma matriz J qualquer pode ser escrita como o produto de uma matriz ortogonal O e uma matriz triangular T :

$$\begin{aligned} J_1 &= O_1 T_1, \\ J_i O_{i-1} &= O_i T_i, \end{aligned} \quad (4.10)$$

o que é equivalente a

$$\begin{aligned} J_1 &= O_1 T_1, \\ J_i &= O_i T_i O_{i-1}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

O produto (4.9) pode então ser escrito como

$$\prod_{i=1}^n J(\vec{\theta}_i) = O_n T_n O_{n-1}^{-1} O_{n-1} T_{n-1} O_{n-2}^{-1} \dots O_1 T_1 = O_n T_n T_{n-1} \dots T_1. \quad (4.12)$$

Na literatura [2] é demonstrado que a matriz ortogonal O_n não participa do cálculo. Como o produto de matrizes triangulares é uma matriz triangular e seus autovalores são os próprios elementos de sua diagonal, tem-se para n grande

$$\prod_{i=1}^n J(\vec{\theta}_i) = \prod_{i=1}^n T_i = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1} & & \dots \\ & e^{\lambda_2} & \\ & & \dots \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{vmatrix} \quad (4.13)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_1^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{11}^n| \\ \lambda_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_2^n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |T_{22}^n|\end{aligned}\tag{4.14}$$

onde T_{11}^n e T_{22}^n são os elementos diagonais 11 e 22 da matriz triangular T_i .

Uma matriz genérica ortogonal em duas dimensões é

$$O = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Sabe-se que $J = OT$. Como O é ortogonal, $O^{-1} = O^T$, então

$$T = O^T J\tag{4.15}$$

Dessa forma, T pode ser obtido a partir de (4.15). Escreve-se a matriz triangular T que se quer determinar como

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}.\tag{4.16}$$

Substituindo as equações (4.6) e (4.16) na (4.15), o elemento nulo da matriz T fornece

$$0 = -[1 - \kappa \cos(2\pi\theta_1) + \varepsilon \cos(2\pi\theta_1)]\operatorname{sen} \theta + [-\varepsilon \cos(2\pi\theta_1)]\cos \theta,\tag{4.17}$$

ou seja,

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{\varepsilon \cos(2\pi\theta_1)}{1 + \kappa \cos(2\pi\theta_1) - \varepsilon \cos(2\pi\theta_1)}.\tag{4.18}$$

Uma vez obtido θ , e portanto a matriz O , a matriz $T = O^T J$ fica completamente determinada, e calcula-se a_1 , b_1 e c_1 . O produto $T_n T_{n-1} \dots T_1$ pode ser escrito como

$$= \begin{pmatrix} a_1(n)a_1(n-1)\dots a_1(1) & \text{etc.} \\ 0 & b_1(n)b_1(n-1)\dots b_1(1) \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \Lambda_1^n &= a_1(n)a_1(n-1)\dots a_1(1), \\ \Lambda_2^n &= b_1(n)b_1(n-1)\dots b_1(1), \end{aligned} \quad (4.20)$$

são os autovalores de $\prod_{i=1}^n J(\vec{\theta}_i)$ e os expoentes de Lyapunov conforme a equação (4.7).

4.3 Sincronização de Fase

A sincronização de sinais periódicos é um fenômeno bem conhecido na física, engenharia e outras áreas. Sistemas caóticos também podem ser conectados de uma forma que suas oscilações sejam sincronizadas [17,18,33].

A **sincronização completa** é a forma mais simples de sincronização em sistemas caóticos. Ela consiste de uma superposição perfeita de trajetórias caóticas de dois ou mais sistemas acoplados, de tal maneira que as trajetórias se mantêm iguais uma com a outra no trajeto ao longo do tempo, ou seja, há uma completa coincidência dos estados individuais dos sistemas. Neste caso, as fases e as amplitudes são as mesmas. Este mecanismo foi primeiramente mostrado para ocorrer quando dois sistemas caóticos idênticos acoplados possuem expoentes de Lyapunov todos negativos.

Sistemas oscilatórios caóticos não idênticos podem atingir um regime intermediário de sincronização, no qual as fases são sincronizadas enquanto as amplitudes permanecem diferentes. Esse fenômeno é chamado **sincronização de fase**, a qual pode ser considerada como sendo uma forma “mais fraca” de sincronização do que a sincronização completa. Na sincronização de fase os sistemas acoplados oscilam em fase.

No movimento de sincronização de fase a diferença das fases é limitada em um intervalo finito, enquanto o movimento não síncrono corresponde a um crescimento ilimitado da diferença de fase. Dessa forma, sincronização de fase de dois osciladores caóticos fracamente acoplados pode ser descrita como a dinâmica da diferença de fase [33]

$$\varphi = m_1\theta_1 - m_2\theta_2, \quad (4.21)$$

onde m_1 e m_2 são inteiros, θ_1 e θ_2 são as fases dos sistemas interagindo e $m_1 : m_2$ é a razão do travamento das fases, ou a ordem de sincronização. Isto significa que m_2 períodos de θ_2 correspondem a m_1 períodos de θ_1 , isto é, enquanto θ_2 realiza m_2 oscilações, θ_1 realiza m_1 oscilações. **A condição de sincronização de fase é a existência de um platô de φ suficientemente longo.**

Como um resultado de sincronização de fase, oscilações caóticas não idênticas possuem as fases travadas uma com a outra através de um fraco acoplamento. Quando m_1 e m_2 são diferentes de 1, diz-se que tem uma **sincronização de fase imperfeita**. Para investigar este tipo de sincronização, uma variável de fase, bem definida, deve ser identificada em ambos os sistemas acoplados.

A sincronização $m_1 : m_2$ pode ser também caracterizada pela razão das fases de cada oscilador, isto é, pela razão dos números de rotação individuais:

$$w = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (4.22)$$

onde $\rho_{1,2}$ correspondem aos números de rotação calculados através da equação (3.2).

4.4 Transição para sincronização de fase

Na transição para o regime de sincronização de fase, os osciladores acoplados que oscilavam com fases diferentes mutuamente passarão a oscilar com as fases travadas, devido à superação da divergência das trajetórias pelo acoplamento [48].

A figura 4.1 (a) mostra os expoentes de Lyapunov em função do parâmetro de acoplamento ε , para o sistema (4.1) com os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$ e $\kappa = 1,5$. A figura 4.1 (b) mostra a razão dos números de rotação w dada pela equação (4.22) pela intensidade do acoplamento ε para o sistema (4.1) com os mesmos valores de (b). Enquanto os expoentes de Lyapunov são negativos, o número de rotação cresce indefinidamente. Quando um dos expoentes se torna positivo, o número de rotação decai bruscamente. Quando o segundo expoente também se torna positivo, são observadas pequenas regiões de sincronização de fase imperfeita. Conforme ε aumenta, uma considerável região de sincronização de fase perfeita 1:1 é observada. **Note que os platôs de sincronização de fase existem apenas quando os dois expoentes de Lyapunov são positivos, isto é, quando o sistema é hipercaótico.**

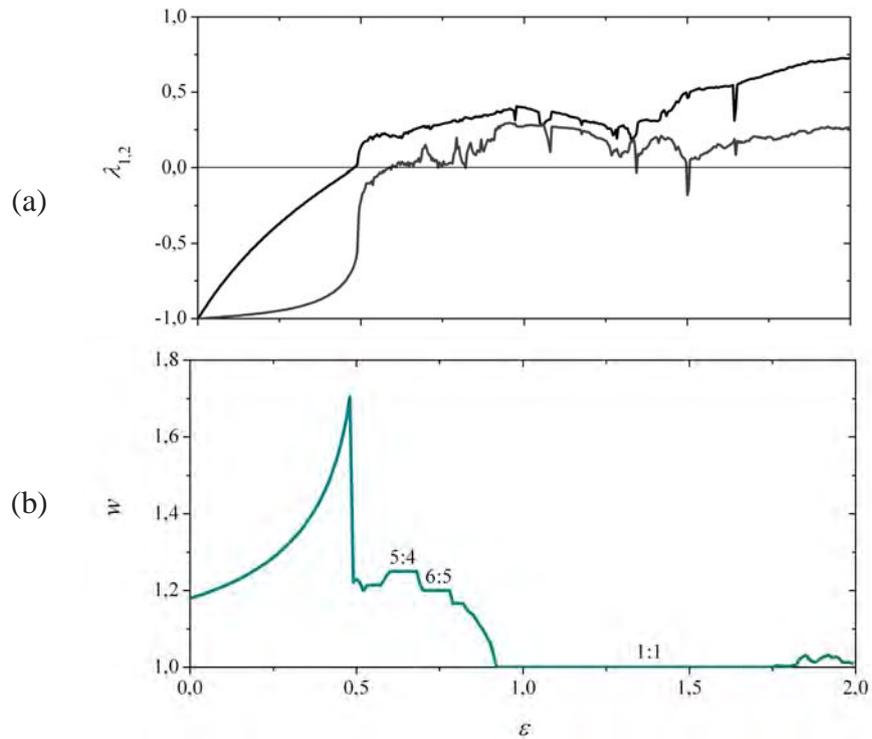


Figura 4.1: (a) Expoentes de Lyapunov e (b) número de rotação w em função do coeficiente de acoplamento ε para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$ e $\kappa = 1,5$. Pequenas regiões de sincronização de fase imperfeita e uma considerável região de sincronização 1:1 são observadas.

A figura 4.2 (a) mostra o diagrama de bifurcações e a figura 4.2 (b) mostra o expoente de Lyapunov, ambos em função do coeficiente de não linearidade κ para o mapa circular individual dado pela equação (2.5) com $\omega = 0,2$. Em (a) é possível notar que para $\kappa = 1,5$ o sistema está em regime regular. Em (b) é possível notar que para $\kappa = 1,5$ o expoente de Lyapunov é negativo, assim como na figura 4.1 (a) para $\varepsilon = 0$.

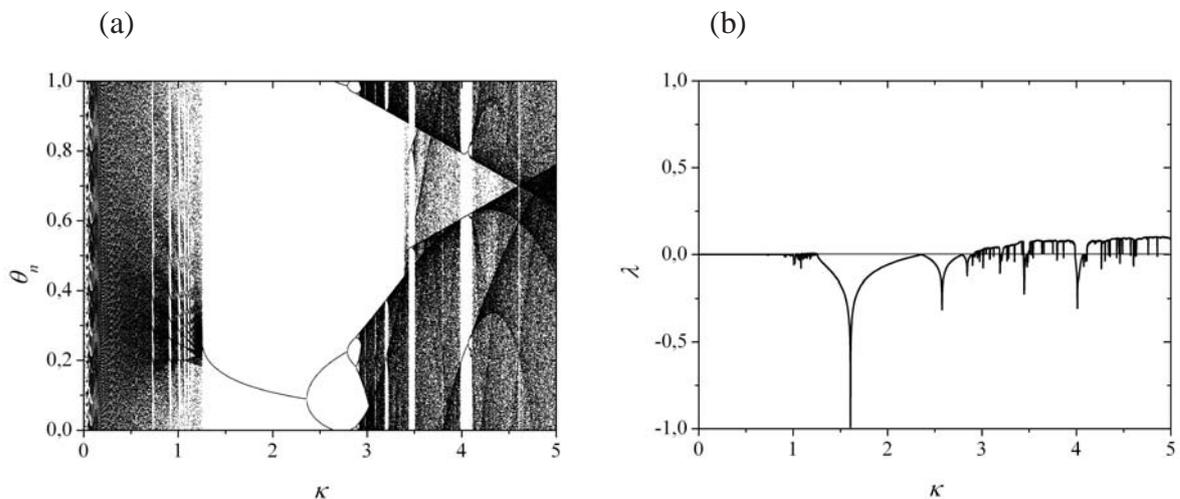


Figura 4.2: (a) Diagrama de bifurcação e (b) expoente de Lyapunov em função do coeficiente da não linearidade κ para o mapa (2.5) com $\omega = 0,2$. É possível notar que para $\kappa = 1,5$ o expoente de Lyapunov é negativo, assim como na figura 4.1 (a) para $\varepsilon = 0$.

A figura 4.3 (a) mostra o diagrama de bifurcações e a figura 4.3 (b) mostra o expoente de Lyapunov, ambos em função do coeficiente de não linearidade κ para o mapa circular individual dado pela equação (2.5) com $\omega = 0,22$. Em (a) é possível notar que para $\kappa = 1,5$ o sistema está em regime regular. Em (b) é possível notar que para $\kappa = 1,5$ o expoente de Lyapunov é negativo, assim como na figura 4.1 (a) para $\varepsilon = 0$.

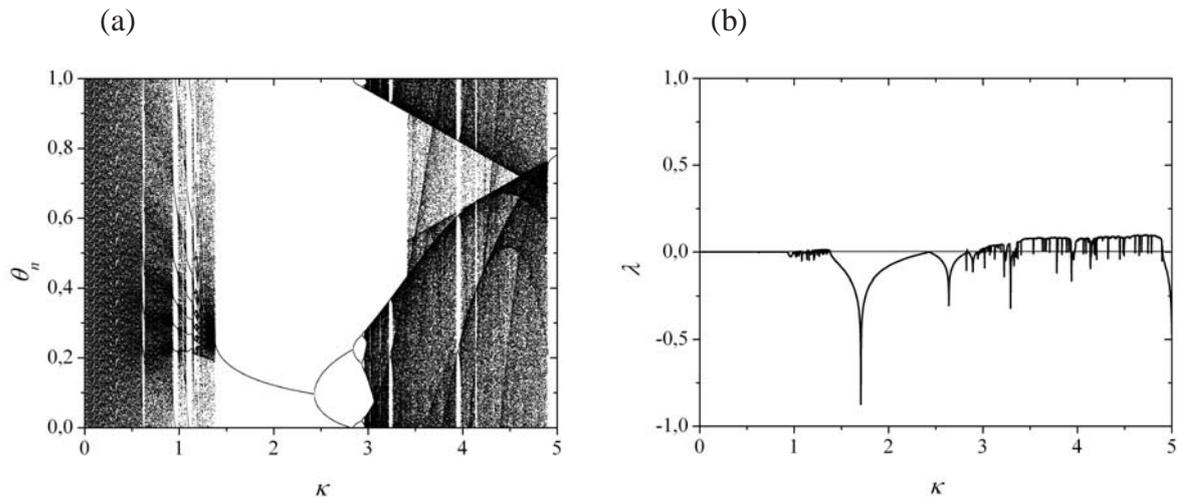


Figura 4.3: (a) Diagrama de bifurcação e (b) expoente de Lyapunov em função do coeficiente da não linearidade κ para o mapa (2.5) com $\omega = 0,22$. É possível notar que para $\kappa = 1,5$ o expoente de Lyapunov é negativo, assim como na figura 4.1 (a).

Para analisar o mecanismo de transição para a sincronização mais precisamente, através da equação (4.3) foram calculados os pontos fixos para o sistema (4.1) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 0,4$, valor do acoplamento um pouco antes de surgir os platôs de sincronização de fase. Foram encontrados quatro pontos fixos, cujas estabilidades foram analisadas através dos autovalores encontrados pela equação (4.5). A tabela 4.1 mostra os pontos fixos encontrados, suas localizações no espaço de fases, seus autovalores, suas classificações e estabilidade de acordo com os autovalores.

Uma variedade sobre um espaço de fases pode ser visualizada como uma curva suave formando um conjunto do espaço de fases. Uma variedade invariante é uma variedade com a condição adicional de que órbitas iniciando sobre ela permanecem na variedade através do curso de sua evolução dinâmica. Em sistemas dissipativos, para um ponto fixo tipo sela hiperbólica existem pelo menos duas variedades, sendo dois ramos estáveis e dois ramos instáveis. As variedades estáveis são formadas pelo conjunto de órbitas que se aproximam do ponto de sela ao longo da evolução dinâmica do sistema [15]. As variedades instáveis são formadas pelo conjunto de órbitas que se afastam do ponto de sela, evoluindo para o atrator. Um nó hiperbólico instável, por sua vez, possui apenas variedades instáveis.

Ponto Fixo	Localização no espaço de fases	Autovalores	Classificação	Estabilidade
A	$\theta_1 = 0,14493;$ $\theta_2 = 0,28947$	$\lambda_1 = 1,2438;$ $\lambda_2 = 0,35165$	ponto de sela hiperbólico	Instável
B	$\theta_1 = 0,35507;$ $\theta_2 = 0,21053$	$\lambda_1 = 1,6484;$ $\lambda_2 = 0,75622$	ponto de sela hiperbólico	Instável
C	$\theta_1 = 0,14493;$ $\theta_2 = 0,21053$	$\lambda_1 = 0,7826;$ $\lambda_2 = 0,27275$	atrator tipo nodo hiperbólico	Assintoticamente Estável
D	$\theta_1 = 0,35507;$ $\theta_2 = 0,28947$	$\lambda_1 = 1,7273;$ $\lambda_2 = 1,2173$	repulsor tipo nodo hiperbólico	Instável

Tabela 4.1: Pontos fixos e suas classificações para o sistema (4.1) e os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 0,4$.

O conjunto de coordenadas cartesianas que define a configuração do sistema, ou seja, as posições das órbitas num dado instante, é chamado de espaço de fases ou espaço de fase. As variedades podem ser obtidas através do mapeamento do sistema no espaço de fases. Primeiro foi calculado analiticamente a localização do ponto fixo no espaço de fases, conforme a tabela 4.1. Depois foram calculados os auto-valores e auto-vetores para cada ponto hiperbólico. As variedades instáveis foram obtidas a partir da iteração do mapa com pequenos incrementos nas componentes dos auto-vetores, seguindo o procedimento: foi distribuída uma grade com um número N de condições iniciais em torno do ponto hiperbólico. As dimensões da grade foram da ordem de 10^{-5} . Após $n \approx 20$ iterações os pontos já se distribuía aproximadamente ao longo de duas curvas, as quais são a aproximação para as variedades instáveis do ponto hiperbólico.

A variedade estável foi obtida seguindo o procedimento: as componentes do espaço de fases foram divididas em 10^5 partes, resultando em 10^{10} condições iniciais diferentes ao longo de todo o espaço de fases, que foram iteradas. Após $n \approx 20$ iterações, foram plotadas as condições iniciais que caminham para o ponto hiperbólico, as quais são a aproximação para as variedades estáveis do ponto hiperbólico. Esse método se chama método do chuveiro.

Quando as variedades se encontram, há classificações dos pontos onde há o encontro. Um ponto pertencente à variedade estável de um ponto hiperbólico e à variedade instável do mesmo ponto hiperbólico, é denominado ponto homoclínico. Um ponto pertencente à variedade estável de um ponto hiperbólico e à variedade instável de um ponto hiperbólico distinto, é denominado ponto heteroclínico [15].

A figura 4.4 mostra o espaço de fases para o sistema de dois mapas circulares acoplados, dado por (4.1), para $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 0,4$, com os pontos fixos da tabela 4.1 e suas variedades. O quadrado preto é um repulsor, o círculo é um atrator e as duas cruzes são pontos de sela. As linhas verdes são as variedades instáveis do repulsor nó hiperbólico, as linhas em vinho são as variedades estáveis do ponto de sela A, as linhas vermelhas são as variedades instáveis do ponto de sela A, as linhas violetas são as variedades estáveis do ponto de sela B e as linhas azuis são as variedades instáveis do ponto de sela B. Todas as órbitas que não se iniciam em alguma das variedades, caminham em direção ao nó hiperbólico estável. As variedades instáveis do nó hiperbólico instável caminham em direção ao atrator, à sela A e à sela B. As trajetórias iniciadas ao longo das variedades instáveis das selas A e B caminham em direção ao nó estável.

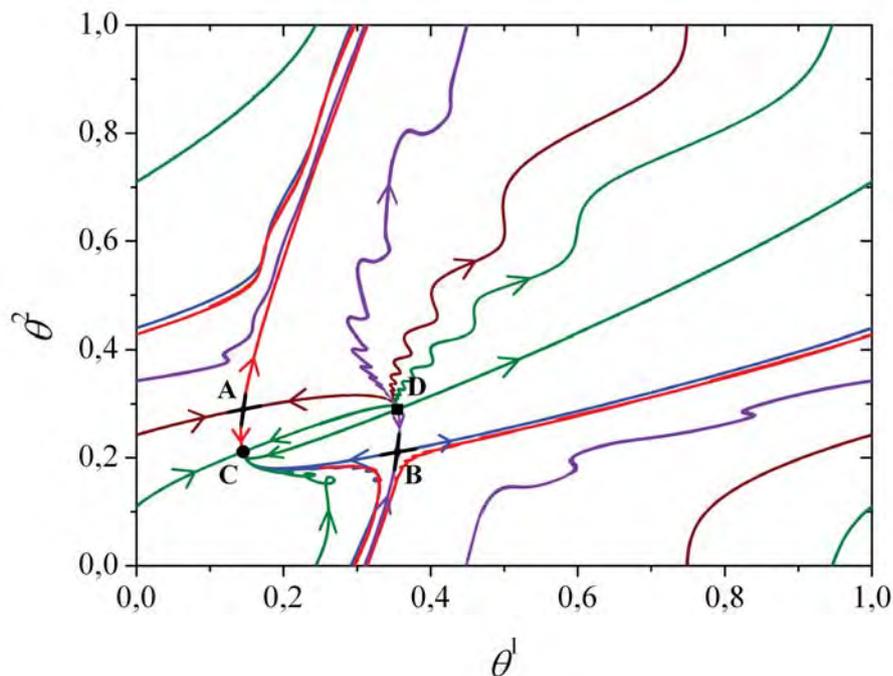


Figura 4.4: Espaço de fases para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $d = 0,4$. O quadrado preto é um repulsor, o círculo é um atrator e as duas cruzes são pontos de sela. As linhas verdes são as variedades instáveis do repulsor, as linhas em vinho são as variedades estáveis do ponto de sela A, as linhas vermelhas são as variedades instáveis do ponto de sela A, as linhas violetas são as variedades estáveis do ponto de sela B e as linhas azuis são as variedades instáveis do ponto de sela B.

Conforme o parâmetro de acoplamento ε aumenta, as selas A e B se aproximam do nó estável e do nó instável respectivamente, e em $\varepsilon = 0,49$ eles se encontram. Apesar de sobrepostos no espaço de fases, as coordenadas dos pontos que eram pontos fixos, são agora complexas tal como descrito na tabela 4.2. A figura 4.5 (a) mostra o espaço de fases próximo

aos pontos fixos em $\varepsilon = 0,4$. A figura 4.5 (b) mostra a sobreposição dos pontos que eram fixos em $\varepsilon = 0,49$.

No entanto, a figura 4.5 merece um estudo mais detalhado.

Ponto Fixo	Localização no espaço de fases
1	$\theta_1 = 0,13711; \theta_2 = 0,25 - 4,8877 \times 10^{-3}i$
2	$\theta_1 = 0,13711; \theta_2 = 0,25 - 4,8877 \times 10^{-3}i$
3	$\theta_1 = 0,36289; \theta_2 = 0,25 - 4,8877 \times 10^{-3}i$
4	$\theta_1 = 0,36289; \theta_2 = 0,25 - 4,8877 \times 10^{-3}i$

Tabela 4.2: Pontos fixos para o sistema (4.1) e os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 0,49$.

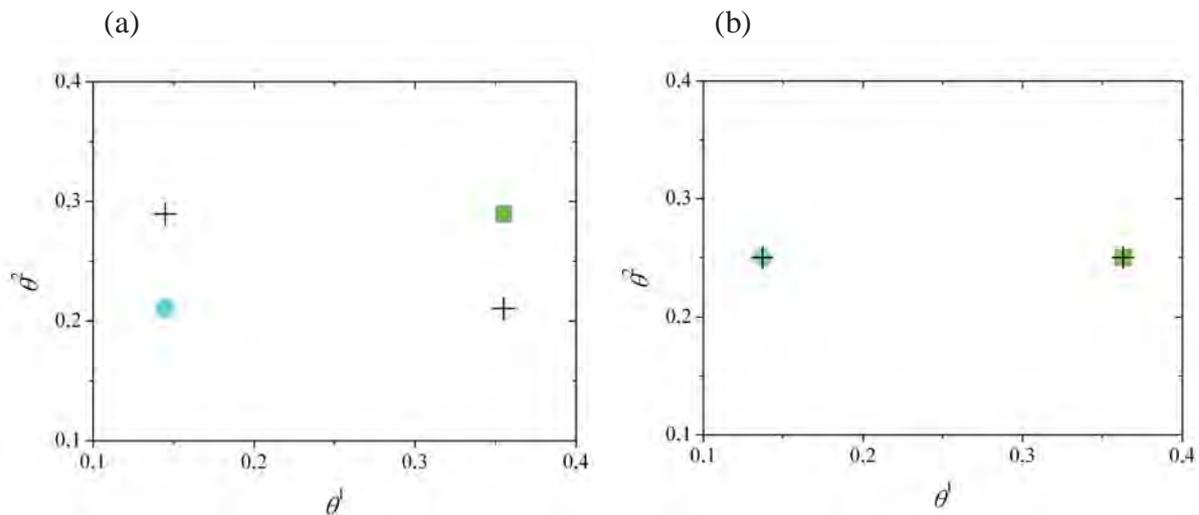


Figura 4.5: Espaço de fases próximo aos pontos fixos para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e (a) $\varepsilon = 0,4$; (b) $\varepsilon = 0,49$. O círculo azul é o atrator, o quadrado verde é o repulsor e as cruces pretas são as selas A e B. Em (a) os pontos fixos mantêm uma distância entre si. Em (b) é possível notar que as selas A e B se sobrepõem com o atrator e o repulsor respectivamente.

Após a sobreposição dos pontos fixos, imediatamente o sistema passa de regular para caótico, como mostrado na figura 4.6. Em 4.6 (a) o sistema com $\varepsilon = 0,485$ é regular, existindo um atrator tipo ponto fixo. Após um fenômeno de bifurcação sela-nó, o evento passa a comportar-se caoticamente e perde a estabilidade estrutural, conforme mostrado em 4.6 (b) o sistema com $\varepsilon = 0,49$ é caótico. O sistema permanece caótico para valores de $\varepsilon > 0,49$.

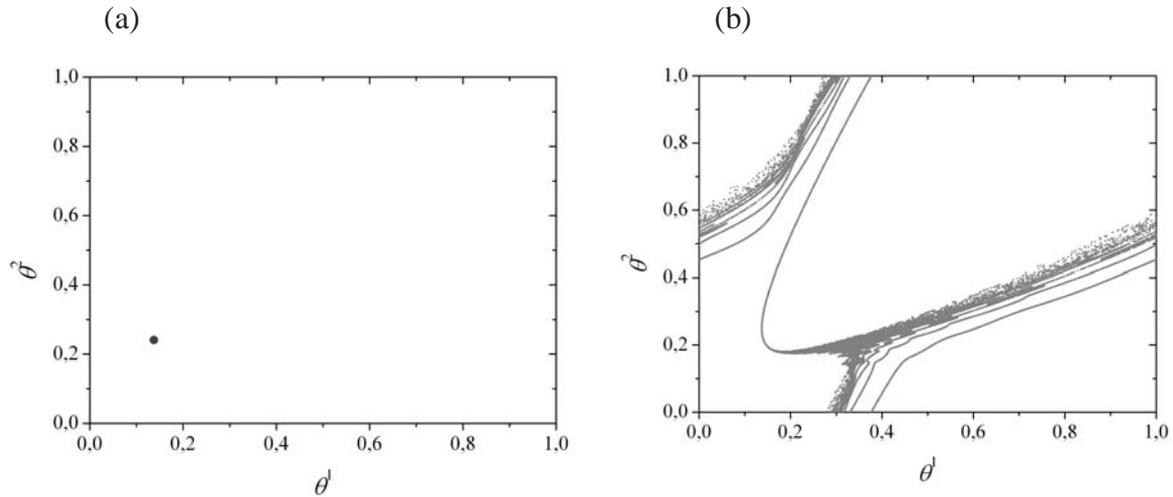


Figura 4.6: Espaço de fases para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e (a) $\varepsilon = 0,485$; (b) $\varepsilon = 0,49$. Em (a) o sistema é regular com um atrator tipo ponto fixo. Em (b) o sistema é caótico.

A sincronização de fase para um sistema de dois mapas circulares acoplados ocorre quando ambas as trajetórias do sistema possuem números de rotação racionais. Neste caso, as trajetórias são periódicas. A sincronização de fase representa a relação entre os períodos das trajetórias. Isto pode ocorrer mesmo quando o sistema é caótico ou hipercaótico.

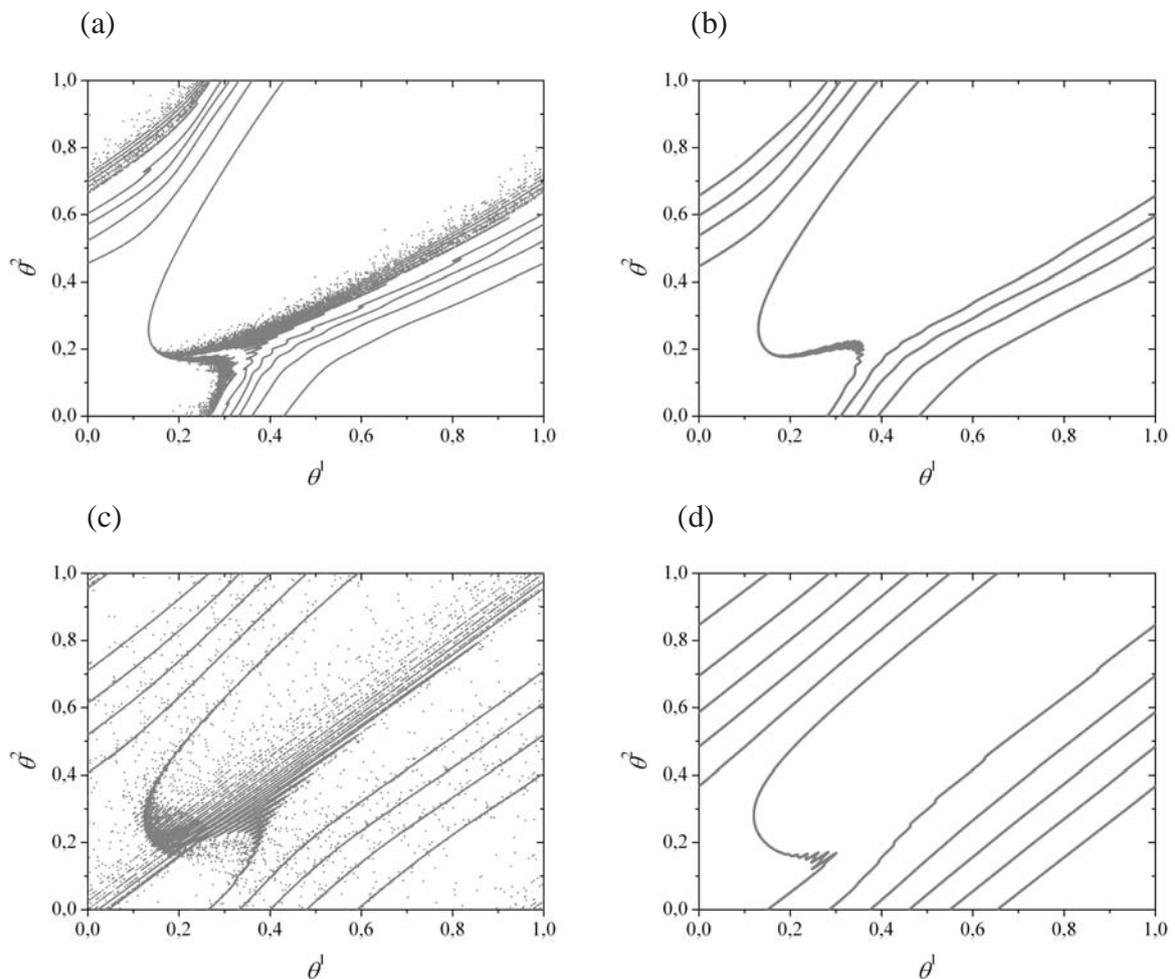
Conforme mostrado na figura 4.1 (b), quando $\varepsilon = 0,6$ o sistema apresenta um platô de sincronização de fase imperfeita 5:4. A figura 4.7 (a) mostra o espaço de fases para $\varepsilon = 0,55$, quando ainda não há sincronização. Neste caso, o sistema não possui periodicidade oscilatória. A figura 4.7 (b) mostra o espaço de fases para $\varepsilon = 0,6$, quando há um atrator caótico de nove bandas, e conseqüentemente, sincronização de fase imperfeita 5:4. Neste caso, o atrator caótico induz uma estabilidade para as trajetórias dos dois sistemas acoplados de forma que os sistemas seguem as mesmas trajetórias ao longo das bandas do atrator caótico, oscilando sincronizados com uma relação de fase 5:4. Dessa forma, apesar de caótico, o sistema possui periodicidade oscilatória na presença de um atrator caótico e conseqüentemente, possui sincronização de fase.

Conforme o parâmetro de acoplamento ε aumenta, o sistema perde a sincronização de fase 5:4. A figura 4.7 (c) mostra o espaço de fases para $\varepsilon = 0,69$, quando não há sincronização. A figura 4.7 (d) mostra o espaço de fases para $\varepsilon = 0,74$, quando surge um atrator caótico de onze bandas, e conseqüentemente, sincronização de fase imperfeita 6:5. Neste caso, os sistemas seguem as mesmas trajetórias ao longo das bandas do atrator caótico, oscilando agora com uma relação de fase 6:5.

Aumentando ainda mais o parâmetro de acoplamento ε , o sistema perde a sincronização de fase 6:5. A figura 4.7 (e) mostra o espaço de fases para $\varepsilon = 0,9$, quando não

há sincronização. A figura 4.7 (f) mostra o espaço de fases para $\varepsilon = 0,95$, quando surge um atrator caótico de duas bandas, e conseqüentemente, sincronização de fase perfeita 1:1. Neste caso, os sistemas seguem as mesmas trajetórias ao longo das bandas do atrator caótico, oscilando agora com uma relação de fase 1:1.

Do ponto de vista de sincronização, as lacunas entre as bandas do atrator caótico correspondem a deslizamentos de diferença de fase $\theta_2 - \theta_1$, conforme a figura 4.7 [33,49]. A linha (a) da figura 4.8 corresponde à sincronização de fase 5:4, mostrado na figura 4.7 (b). A linha (b) da figura 4.8 corresponde à sincronização de fase 6:5, mostrado na figura 4.7 (d). A linha (c) da figura 4.8 corresponde à sincronização de fase 1:1, mostrado na figura 4.7 (f). Conforme se pode notar, a diminuição do número de deslizamentos exibe uma tendência do sistema para sincronização de fase perfeita onde não há deslizamentos. Contrariamente, o aumento do número de deslizamentos exibe uma tendência do sistema para perder sincronização. No movimento síncrono, a órbita caótica está em poucas bandas no espaço de fases.



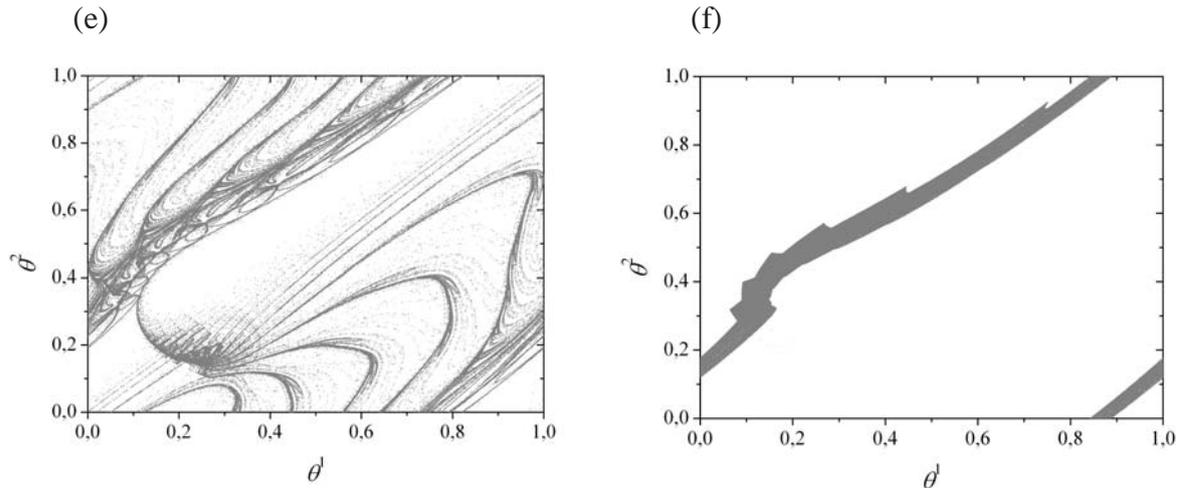


Figura 4.7: Espaços de fase para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e diferentes valores do acoplamento: (a) $\varepsilon = 0,55$, onde ainda não há sincronização; (b) $\varepsilon = 0,6$, onde surge um atrator caótico de 9 bandas, resultando em sincronização 5:4. (c) $\varepsilon = 0,69$, onde não há mais sincronização 5:4; (d) $\varepsilon = 0,74$, onde surge um atrator caótico de 11 bandas, resultando em sincronização 6:5; (e) $\varepsilon = 0,90$, onde não há mais sincronização de fase 6:5 e (f) $\varepsilon = 0,95$, onde surge um atrator caótico de duas bandas, resultando em sincronização 1:1.

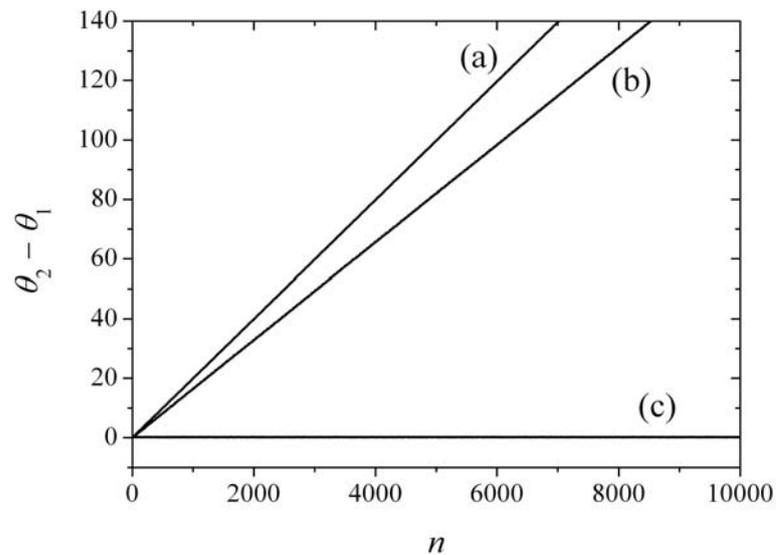


Figura 4.8: Evolução da diferença de fase $\theta_2 - \theta_1$ para o sistema (4.1). Em (a) e (b) o sistema possui sincronização de fase imperfeita. Em (c) o sistema possui sincronização de fase perfeita.

Em 1982 C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke [40] introduziram o termo *crise* para descrever certas mudanças qualitativas na dinâmica caótica que ocorrem conforme se varia o parâmetro de controle. Tais mudanças, correspondem ao aparecimento ou desaparecimento de atrator caótico, ou uma variação descontínua no seu tamanho, conforme já mencionado. Dessa forma, a crise ocorre quando um atrator caótico é destruído, ou criado ou altera seu tamanho.

Conforme se pode notar na figura 4.7, a sincronização de fase ocorre quando surge um atrator caótico. Pode-se afirmar portanto, **que a transição do comportamento não síncrono para o comportamento síncrono em dois mapas circulares acoplados ocorre através de**

crise interior [48], gerando um atrator caótico o qual induz periodicidade oscilatória no sistema.

4.5 Interpretação do movimento oscilatório

Conforme já mencionado, um sistema de dois mapas circulares acoplados pode ser interpretado como a seção de Poincaré do movimento de duas trajetórias não idênticas sobre um toro. Se o sistema possui sincronização de fase com número de rotação $w = m_1 : m_2$, significa que m_1 períodos de θ_1 corresponde a m_2 períodos de θ_2 , isto é, enquanto θ_1 marca m_1 pontos na seção de Poincaré, θ_2 marca m_2 pontos.

A figura 4.9 mostra a representação da seção de Poincaré para um sistema de dois mapas circulares acoplados. Na figura 4.9 (a), o sistema possui sincronização de fase 5:4. Neste caso, enquanto a trajetória θ_1 possui período 5 (5 pontos na seção de Poincaré), a trajetória θ_2 possui período 4 (4 pontos na seção de Poincaré), resultando em um total de 9 pontos na seção de Poincaré e o atrator caótico corresponde possui um total de 9 bandas, conforme mostra a figura 4.7 (b). Na figura 4.9 (b), o sistema possui sincronização de fase 6:5. Neste caso, enquanto a trajetória θ_1 possui período 6 (6 pontos na seção de Poincaré), a trajetória θ_2 possui período 4 (4 pontos na seção de Poincaré), resultando em um total de 11 pontos na seção de Poincaré e o atrator caótico corresponde possui um total de 11 bandas, conforme mostra a figura 4.7 (d). Na figura 4.9 (c), o sistema possui sincronização de fase 1:1. Neste caso, enquanto a trajetória θ_1 possui período 1 (1 ponto na seção de Poincaré), a trajetória θ_2 possui período 1 (1 ponto na seção de Poincaré), resultando em 2 pontos na seção de Poincaré e o atrator caótico correspondente possui um total de 2 bandas, conforme a figura 4.7 (f).

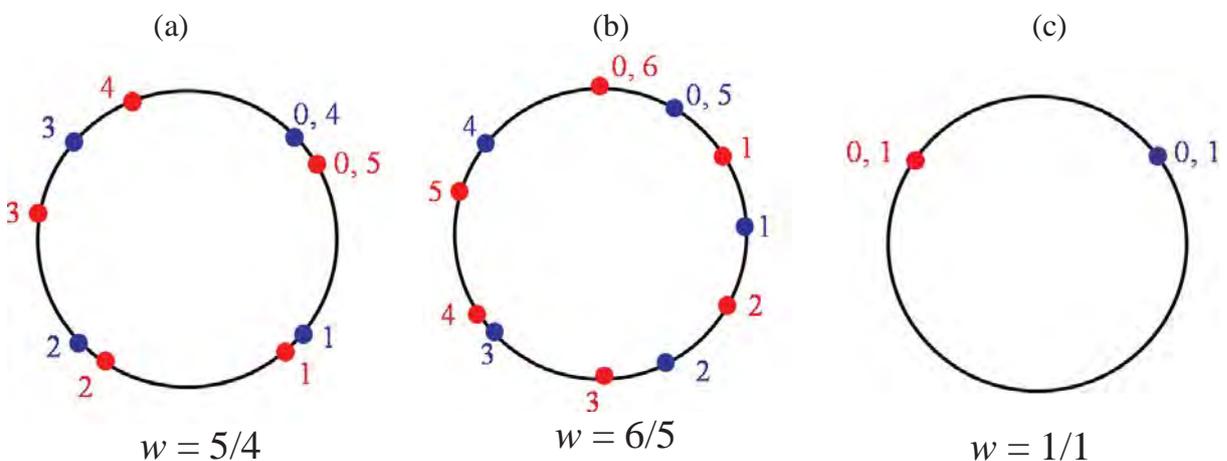


Figura 4.9: Seções de Poincaré para duas trajetórias com razão de frequência igual a (a) $w = 5/4$; (b) $w = 6/5$ e (c) $w = 1/1$.

4.6 Sincronização de fase em dois mapas circulares acoplados

Conforme já mencionado, a sincronização de fase ocorre quando os sistemas acoplados oscilam em fase, porém com amplitudes diferentes. A figura 4.10 foi construída iterando o sistema (4.1) para uma condição inicial, e plotadas as iterações. A figura 4.10 (a) mostra a evolução das fases em $\varepsilon = 1,47$, quando o sistema possui sincronização de fase 1:1. Neste caso, embora o movimento seja hipercaótico, o acoplamento ajusta os ritmos de oscilação e os sistemas oscilam em fase, porém as amplitudes são diferentes. A figura 4.10 (b) mostra a evolução das fases em $\varepsilon = 1,8$, onde não há sincronização e os sistemas não oscilam em fase.

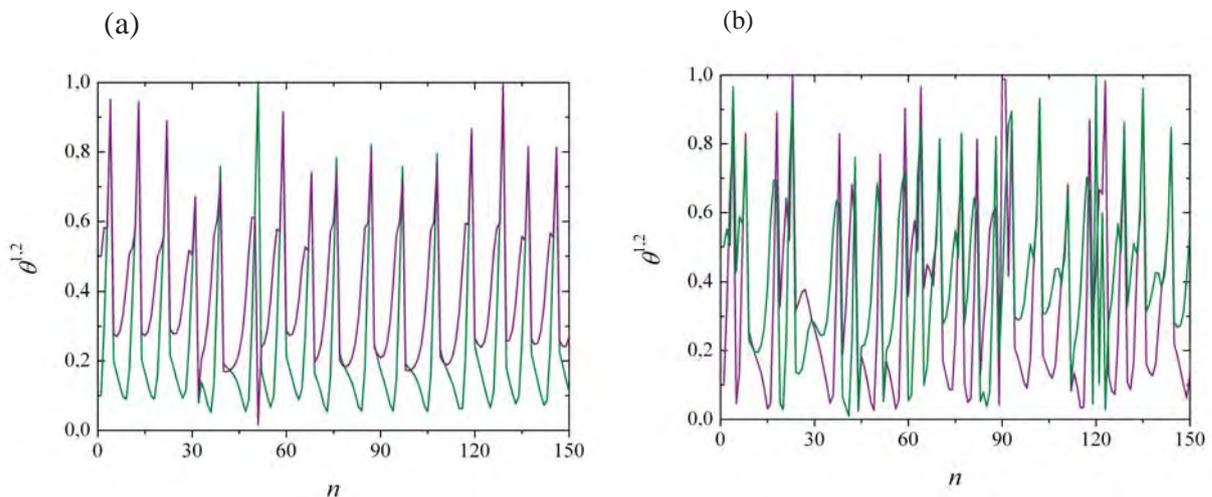


Figura 4.10: Evolução das fases para sistema (4.1). (a) Estado sincronizado com $\varepsilon = 1,47$, onde o movimento possui periodicidade oscilatória. (b) Estado não sincronizado com $\varepsilon = 1,8$, onde não há periodicidade oscilatória no movimento.

Foram analisadas as propriedades de sincronização em diferentes valores do parâmetro de controle κ . Como pode ser visto nas línguas de Arnold dadas pela figura 3.5, para um valor fixo de ω , com o aumento do parâmetro κ , os números de rotação individuais ρ podem ser variados. Dessa forma, será apresentado o estudo de dois casos diferentes de distribuição de frequência. No primeiro caso, foram escolhidos números de rotação individuais ρ_1 e ρ_2 de tal maneira que, para todos os valores de κ simulados, os números de rotação para o mapa circular independente, ou seja, sem acoplamento, são idênticos e, conseqüentemente, pertencem à mesma língua de Arnold na figura 3.5. No segundo caso, foram escolhidos números de rotação individuais ρ_1 e ρ_2 de tal maneira que, para todos os valores de κ

simulados, os números de rotação para o mapa circular independente, são diferentes e, conseqüentemente, pertencem à línguas de Arnold diferentes.

Para construir a figura 4.10, foram calculados os números de rotação da equação (4.22) em função do acoplamento ε , para diferentes valores de κ .

O primeiro caso de distribuição de freqüência é mostrado na figura 4.10 (a), para $\omega_1 = 0,95$, $\omega_2 = 0,99$. A dependência de w no parâmetro de acoplamento ε , demonstra claramente a existência de regiões de sincronização de fase 1:1 para $\kappa \neq 0$, para pequenos valores do acoplamento. Isto era de se esperar, pois se os sistemas acoplados possuem freqüências pertencentes à mesma língua de Arnold (no mapa individual), então para $\varepsilon = 0$, o sistema composto se torna dois sistemas independentes, os quais possuem o mesmo número de rotação, ou seja, suas freqüências são travadas, e portanto, possuem sincronização de fase 1:1. Porém, com o aumento do acoplamento não linear, o sistema perde a sincronização. Dessa forma, **o fato das freqüências dos mapas acoplados pertencerem à mesma língua de travamento de freqüência no mapa individual, não garante a ocorrência de sincronização para todos os valores de acoplamento.** As larguras dessas regiões de sincronização aumentam com o aumento de κ .

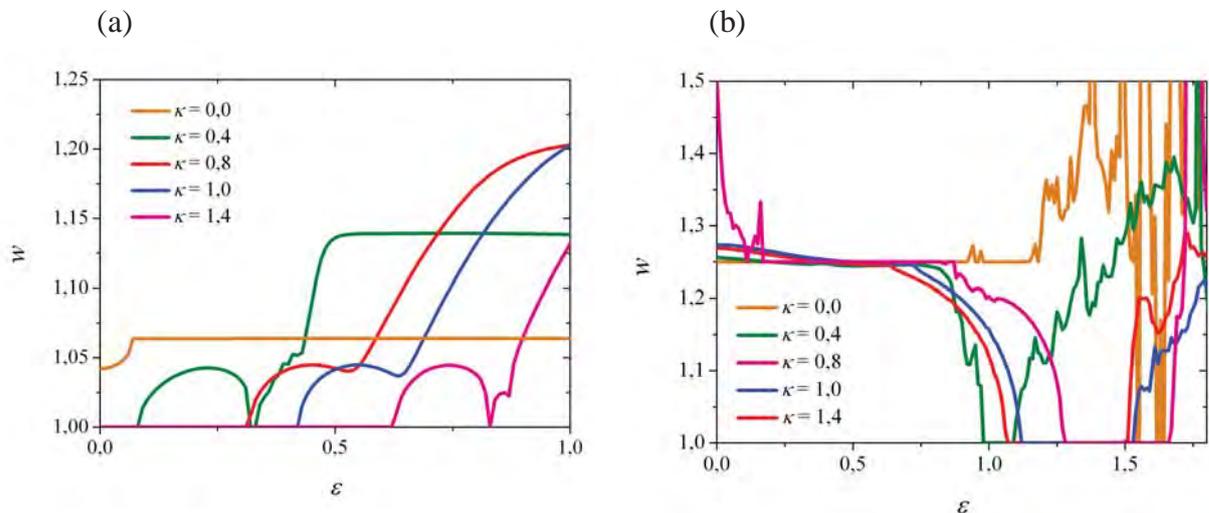


Figura 4.11: O número de rotação w em função do coeficiente de acoplamento ε para o sistema (4.1) em diferentes de κ e (a) $\omega_1 = 0,95$, $\omega_2 = 0,99$ e (b) $\omega_1 = 0,4$, $\omega_2 = 0,5$.

O segundo caso é mostrado na figura 4.10 (b), para $\omega_1 = 0,4$, $\omega_2 = 0,5$. A dependência de w no parâmetro de acoplamento ε demonstra claramente a existência de regiões de sincronização de fase 1:1 para $\kappa \neq 0$. Porém, neste caso, o sistema não sincroniza para baixos valores de acoplamento. Quando $\varepsilon = 0$ não há sincronização, aumentando sua intensidade surgem as regiões de sincronização $m_1 : m_2$ e sincronização 1:1. Aumentando mais ainda o

acoplamento, o sistema perde sincronização. Quanto maior o valor de κ , maior será o valor do intervalo de ε para o sistema entrar em sincronização de fase e maior o valor de ε a perder a sincronização.

4.7 Diagramas para regiões de sincronização

Em sistemas de dois mapas circulares acoplados são observadas diferentes propriedades de sincronização. Foram executadas simulações numéricas, iterando 8×10^6 conjuntos diferentes de valores dos parâmetros ε e κ , e calculado o número de rotação dado pela equação (4.22) para cada conjunto. Foram plotados os valores dos conjuntos que correspondiam ao valor do número de rotação $\rho \approx 1/1$. O cálculo foi repetido para diferentes valores de ω_2 . A figura 4.12 indica que a estrutura geométrica e os tamanhos das regiões de sincronização dependem fortemente do parâmetro κ , o qual define a intensidade de não linearidade do comportamento do sistema. Certamente que os processos de travamento de frequência para mapas circulares individuais (não acoplados) não pode ser exatamente prognosticado para o movimento de mapas circulares acoplados. Porém, algumas regras comuns do aparecimento e desaparecimento de sincronização podem ser obtidas e explicadas pelo conhecimento das propriedades do comportamento de mapas individuais [48].

O valor do acoplamento no qual ocorre a transição para a sincronização depende da diferença entre os números de rotação de ambos sistemas acoplados. Conforme mostra a figura 4.12, para maiores diferenças entre as frequências dos sistemas acoplados, e conseqüentemente maiores diferenças entre os números de rotação, são necessários maiores valores do acoplamento para haver sincronização. Com o aumento de κ , os tamanhos das regiões de sincronização tornam-se maiores até um certo valor de κ , conforme já mencionado sobre a figura 4.11. A partir de um certo valor de κ , o tamanho das regiões tornam-se menores. Isto acontece devido à sobreposição das línguas de Arnold nos mapas individuais para valores de $\kappa > 1$, e conseqüentemente movimento caótico sem estabilidade estrutural.

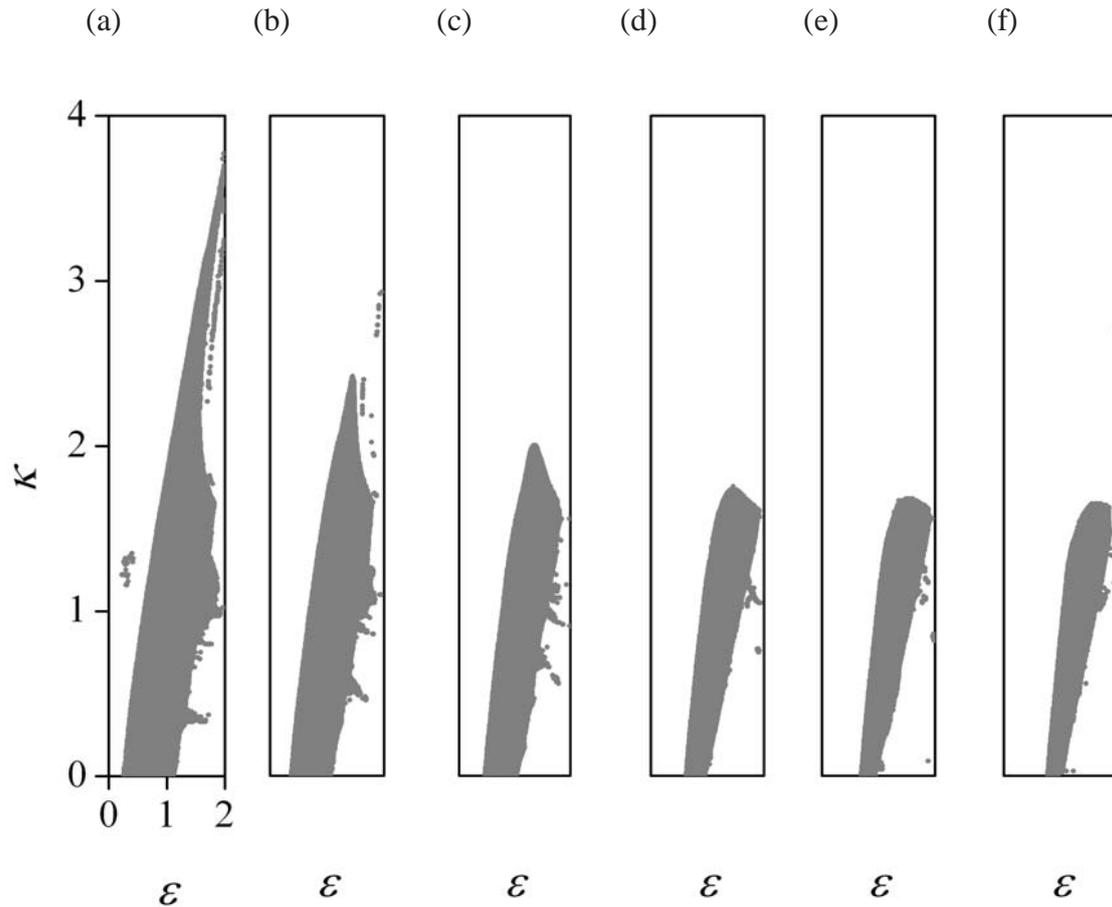


Figura 4.12: Diagrama para sincronização de fase 1:1 de κ em função do acoplamento ϵ para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$ e diferentes valores de ω_2 : (a) 0,21; (b) 0,22; (c) 0,23; (d) 0,25; (e) 0,26 e f) 0,27.

A figura 4.13 mostra a região de sincronização para o sistema de dois mapas circulares acoplados no diagrama de ϵ em função a diferença das frequências $\omega_2 - \omega_1$. Conforme as diferenças entre as frequências aumentam, são necessários maiores valores de acoplamento para haver sincronização, conforme já mencionado sobre a figura 4.12. Aumentando o acoplamento, a região de sincronização desaparece, restando apenas pequenas “ilhas” de sincronização. Isto ocorre porque o acoplamento é não linear, e quando chega a um certo valor crítico, ele passa a não superar mais a divergência entre as trajetórias, e o sistema perde a sincronização. Dessa forma, mesmo para frequências idênticas nos dois sistemas acoplados ($\Delta\omega = 0$), há um valor limite (crítico) de acoplamento para haver sincronização. Note que essa estrutura é muito similar às línguas de Arnold.

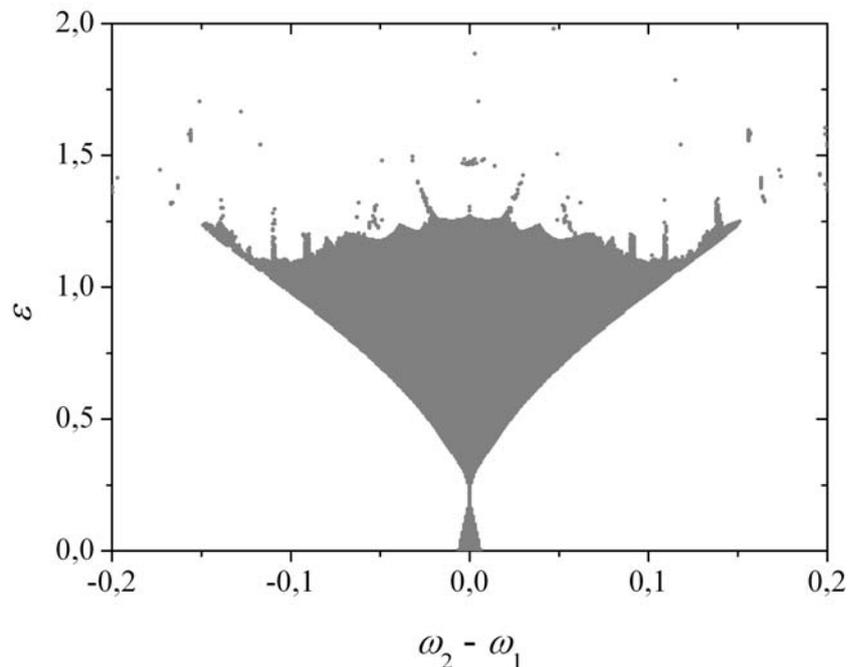


Figura 4.13: Diagrama para sincronização de fase 1:1 de ε em função da diferença das frequências $\omega_2 - \omega_1$ para o sistema (4.1) com $\kappa = 0,4$ e $\omega_1 = 0,5$. A estrutura dessa região é similar às línguas de Arnold.

4.8 Transição para não sincronização

Na figura 4.1 (b) pode-se observar que o sistema perde sincronização de fase 1:1 perto de $\varepsilon = 1,75$, o valor crítico de acoplamento para a perda de sincronização, enquanto os expoentes de Lyapunov não mudam seus sinais durante a transição. Para analisar o mecanismo de perda de sincronização mais precisamente, através da equação (4.3) foram calculados os pontos fixos do sistema (4.1) para valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 1,47$, valor do acoplamento pouco antes da perda de sincronização. Foram encontrados quatro pontos fixos, cujas estabilidades foram analisadas através do cálculo da equação (4.5). A tabela 4.3 apresenta os pontos fixos encontrados, suas localizações no espaço de fases, seus autovalores, suas classificações e estabilidade de acordo com os autovalores.

A figura 4.14 apresenta o espaço de fases para o sistema (4.1) para os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 1,47$. Os dois quadrados em preto são focos instáveis e as duas cruzes são pontos de sela. As linhas em vinho são as variedades estáveis do ponto de sela A, as linhas vermelhas são as variedades instáveis do ponto de sela A, as linhas violetas são as variedades estáveis do ponto de sela B, as linhas azuis são as variedades instáveis do ponto de sela B e a parte em cinza é o atrator caótico. As trajetórias iniciadas ao

longo da variedade do foco C caminham em direção às selas A e B, e as iniciadas ao longo da variedade do foco D caminham em direção à sela B. As trajetórias iniciadas ao longo das variedades estáveis das selas A e B caminham em direção do atrator caótico. Note que a estrutura das variedades estáveis de ambos os pontos de sela são formadas por “*regiões simétricas*” no espaço de fases.

Ponto Fixo	Localização no espaço de fases	Autovalores	Classificação	Estabilidade
A	$\theta_1 = 0,18725;$ $\theta_2 = 0,15756$	$\lambda_1 = 1,6609;$ $\lambda_2 = 0,31112$	ponto de sela hiperbólico	instável
B	$\theta_1 = 0,31275;$ $\theta_2 = 0,34244$	$\lambda_1 = 1,6889;$ $\lambda_2 = 0,33911$	ponto de sela hiperbólico	instável
C	$\theta_1 = 0,31275;$ $\theta_2 = 0,15756$	$\lambda_1 = 0,99752 + 0,67474i;$ $\lambda_2 = 0,99752 - 0,67474i$	repulsor tipo foco hiperbólico	instável
D	$\theta_1 = 0,18725;$ $\theta_2 = 0,34244$	$\lambda_1 = 1,0025 + 0,67474i;$ $\lambda_2 = 1,0025 - 0,67474i$	repulsor tipo foco hiperbólico	instável

Tabela 4.3: Pontos fixos e suas classificações para o sistema (4.1) e os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 1,47$.

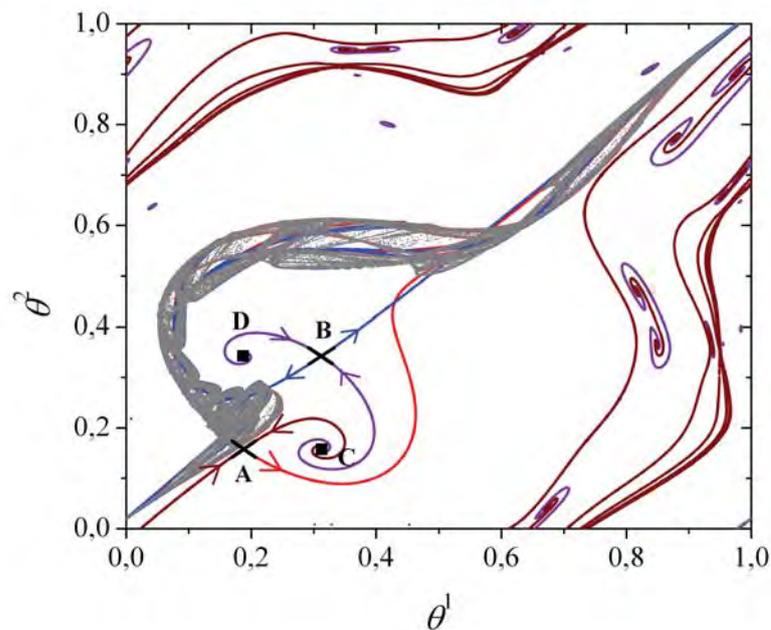


Figura 4.14: Espaço de fases para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 1,47$. Os dois quadrados em preto são focos instáveis e as duas cruzes são pontos de sela. As linhas em vinho são as variedades estáveis do ponto de sela A, as linhas vermelhas são as variedades instáveis do ponto de sela A, as linhas violetas são as variedades estáveis do ponto de sela B, as linhas azuis são as variedades instáveis do ponto de sela B e a parte em cinza é o atrator caótico.

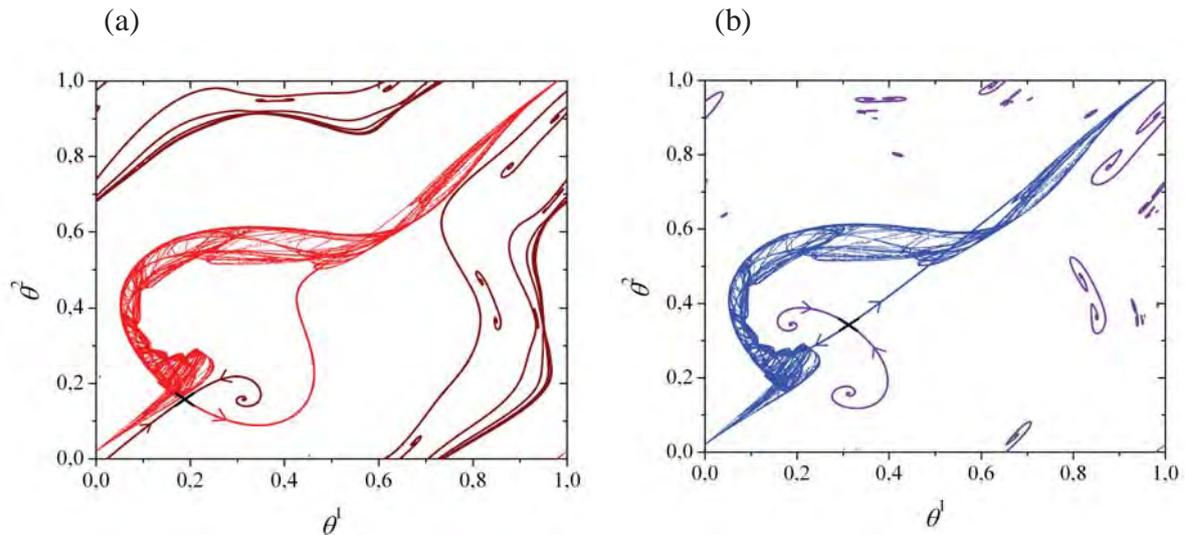


Figura 4.15: Espaço de fases para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e $\varepsilon = 1,47$. Em (a) estão as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela A. Em (b) estão as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela B.

Para melhor visualizar as variedades de cada ponto de sela, a figura 4.15 (a) apresenta as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela A, e 4.15 (b) as variedades estáveis e instáveis do ponto de sela B. O sistema está no regime de sincronização de fase 1:1 devido ao atrator caótico induzir periodicidade ao sistema, fazendo as trajetórias seguirem o mesmo caminho ao longo das bandas do atrator [50]. A variedade estável da sela A representa o papel de bacia limite o qual previne que as órbitas no interior do atrator caótico sejam repelidas para todo o espaço de fases. A bacia de atração corresponde ao conjunto de todas as condições iniciais que levam ao atrator. No sistema (4.1), todas as condições iniciais sobre o espaço de fases caminham em direção ao atrator. Dessa forma, todo o espaço de fases corresponde à bacia de atração do atrator, e ambos os pontos de sela e ambos os focos estão no interior da bacia de atração do atrator caótico.

A figura 4.16 (a) mostra o espaço de fases, com o atrator caótico e os pontos fixos em $\varepsilon = 1,47$. Note na figura 4.16 (c) que o ponto de sela A está bastante próximo do atrator caótico. Para que o atrator caótico permaneça sincronizado, as trajetórias dentro dele não podem cruzar com a variedade estável da sela A. Ao aumentar o acoplamento até $\varepsilon = 1,495$, as órbitas periódicas no interior do atrator caótico colidem com a sela A, conforme mostrado nas figuras 4.16 (b) e (d). Após essa colisão, as órbitas periódicas passam a seguir ao longo da variedade instável da sela. Esse fenômeno é conhecido como **crise interior**.

Na crise interior, um ponto fixo instável existente dentro da bacia de atração do atrator caótico, colide com o atrator caótico quando algum parâmetro de controle é variado. Quando a colisão ocorre, o atrator caótico expande seu tamanho. Esta expansão ocorre porque as

trajetórias sobre o atrator caótico eventualmente se aproximam do ponto fixo instável e são repelidas pela variedade instável do ponto fixo para regiões do espaço de fases que ainda não haviam sido visitadas antes da colisão ocorrer. O efeito é a expansão das órbitas do atrator caótico sobre o espaço de fases.

Como consequência da expansão do atrator caótico devido à crise interior, as órbitas que seguiam as trajetórias ao longo das bandas do atrator caótico, agora habitam todo o espaço de fases, isto é, não há mais periodicidade oscilatória e o sistema perde sincronização. Dessa forma, a transição para o estado não sincronizado é realizada com alguma mudança na estrutura dinâmica do sistema caótico.

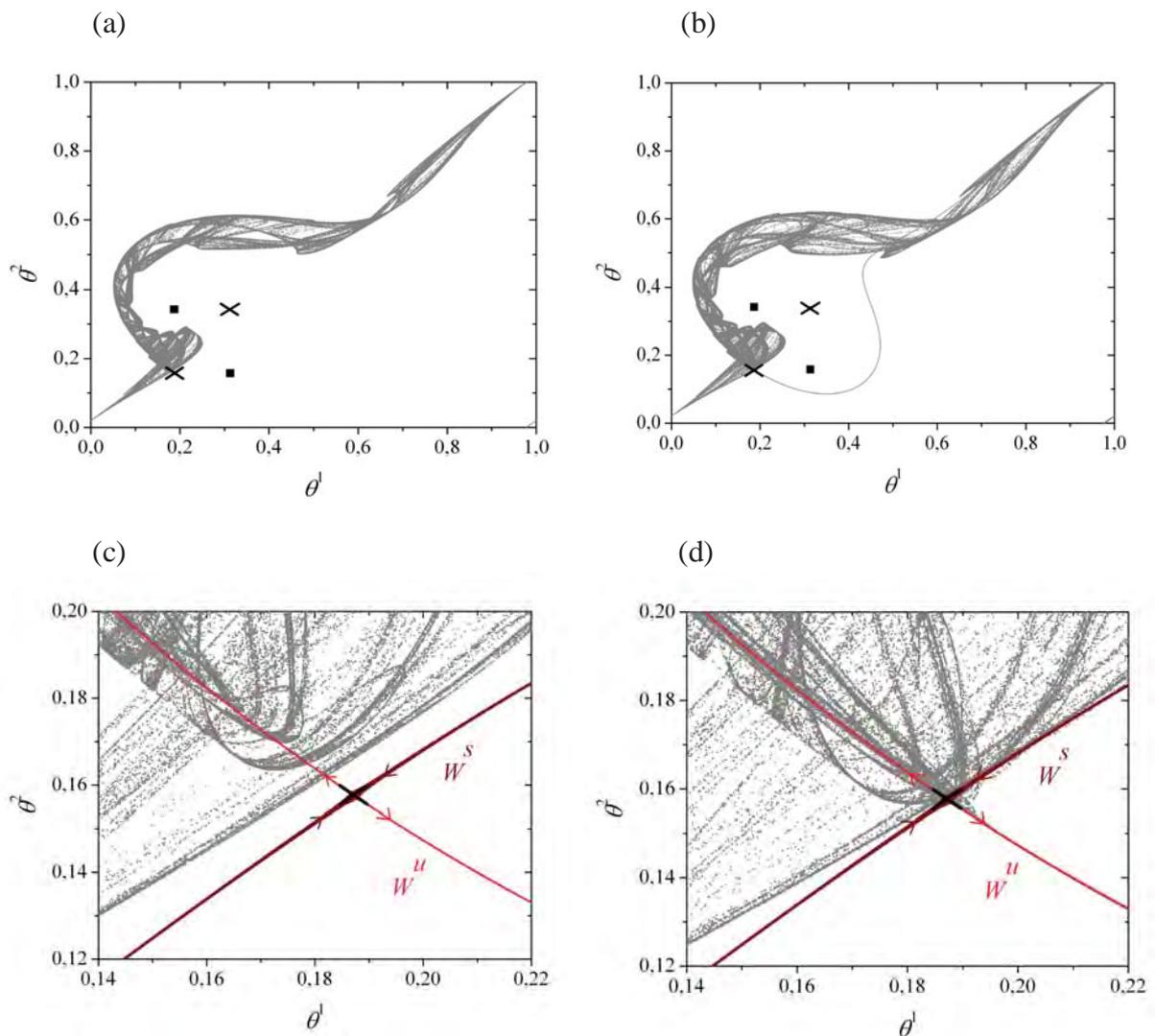


Figura 4.16: Espaço de fases para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e (a) $\varepsilon = 1,47$, onde o atrator caótico induz periodicidade oscilatória no sistema; (b) $\varepsilon = 1,495$, onde diferentes direções de rotação das órbitas se tornam possíveis destruindo a sincronização. (c) Zoom de (a) próximo do ponto de sela 1. A sela e sua variedade estável não cruzam com o atrator. (d) Cruzamento da sela com o atrator, onde as órbitas do atrator caótico passam a seguir a variedade estável da sela.

Entende-se por tempo transiente o tempo necessário para que o sistema evolua para um comportamento assintótico. Para verificar a evolução das órbitas até o seu comportamento final, uma certa quantidade das primeiras iterações foi descartada, para eliminar o transiente. A figura 4.17 mostra as mudanças da estrutura do atrator caótico. Em 4.17 (a) a crise interior ainda não ocorreu, e as órbitas no atrator são periódicas. Em 4.17 (b) a crise já ocorreu no sistema, e as órbitas periódicas no interior do atrator caótico começaram a ser repelidas pelo ponto de sela hiperbólico. Em 4.17 (c) o atrator caótico expandiu seu tamanho, habitando uma região maior no espaço de fases. Em 4.17 (d) o atrator caótico expandiu até habitar todo o espaço de fases, e conseqüentemente, o sistema perdeu a periodicidade oscilatória e perdeu a sincronização de fase.

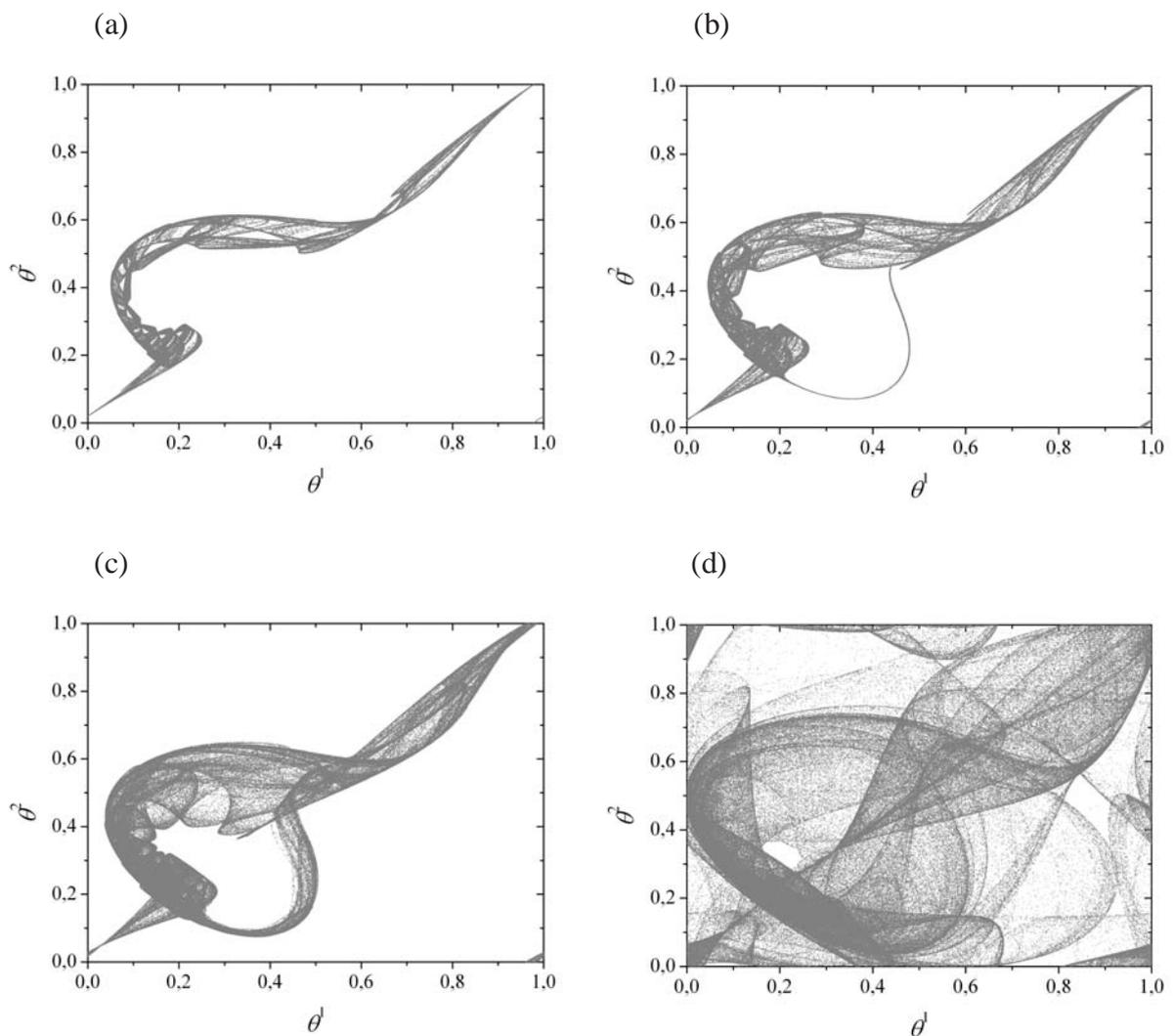


Figura 4.17: Retratos de fase para o sistema (4.1) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 1,5$ e diferentes valores do acoplamento (a) $\varepsilon = 1,47$; (b) $\varepsilon = 1,52$, (c) $\varepsilon = 1,58$ e (d) $\varepsilon = 1,9$. Em (a) ainda existe sincronização de fase 1:1. Em (b) e (c) o atrator caótico está aumentando seu tamanho. Em (d) o atrator foi expandido até habitar todo o espaço de fases e o sistema perdeu a periodicidade oscilatória e dessincronizou o sistema.

Capítulo 5

Efeitos de ruído sobre sincronização de fase em mapas circulares acoplados

Em geral sincronização de fase perfeita e imperfeita são destruídas quando osciladores estão na presença de ruído, o que é inevitável em sistemas reais. Este capítulo traz uma contribuição científica para o conhecimento dos efeitos de ruído sobre a sincronização de fase em sistemas de dois mapas circulares acoplados. O estudo foi realizado introduzindo um ruído no acoplamento e posteriormente um ruído aditivo. Foram estudados dois sistemas de mapas circulares acoplados. No primeiro sistema, o ruído no acoplamento e o ruído aditivo induzem dessincronização de fase perfeita e imperfeita. No segundo sistema, o ruído no acoplamento induz dessincronização de fase perfeita e imperfeita, e o ruído aditivo induz um efeito de segunda ordem, dessincronizando apenas a sincronização de fase imperfeita.

5.1 Interpretação da dinâmica de fase

Antes de apresentar os resultados numéricos, será apresentado um entendimento intuitivo do efeito de um ruído na sincronização de dois osciladores acoplados, através da interpretação da dinâmica da diferença de fase. Seja um sistema composto por dois mapas circulares dado por

$$\begin{aligned}x_{n+1}^1 &= x_n^1 + b_1 - F(x_n^1) + d\text{sen}(x_n^2 - x_n^1) \\x_{n+1}^2 &= x_n^2 + b_2 - F(x_n^2) + d\text{sen}(x_n^1 - x_n^2)\end{aligned}\tag{5.1}$$

onde $F(x)$ é uma função seccionalmente linear 2π -periódica da forma $F(x) = cx/\pi$ definida no intervalo $[-\pi, \pi]$, e c é o parâmetro de controle.

Introduzindo um ruído aditivo no sistema (5.2), ele fica modificado para

$$\begin{aligned}x_{n+1}^1 &= x_n^1 + b_1 - F(x_n^1) + d\text{sen}(x_n^2 - x_n^1) + \xi \\x_{n+1}^2 &= x_n^2 + b_2 - F(x_n^2) + d\text{sen}(x_n^1 - x_n^2) + \xi\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde ξ é um ruído branco gaussiano (veja apêndice A).

Seja a diferença de fase do sistema (5.2) dada por

$$\varphi_{n+1} = x_{n+1}^2 - x_{n+1}^1. \quad (5.3)$$

É feito o uso do fato de que a variação da diferença de fase a cada iterada n , pode ser descrita por

$$\Delta\varphi_n = \varphi_{n+1} - \varphi_n = \Delta b - \varphi_n \frac{c}{\pi} - 2d \operatorname{sen} \varphi_n, \quad (5.4)$$

onde $\Delta b = b_2 - b_1$. É feito também o uso do fato de que a evolução de φ_{n+1} pode ser descrita em termos de um potencial $V(\varphi_n)$

$$\Delta\varphi_n = -\frac{d}{\varphi} V(\varphi_n) \quad (5.5)$$

com

$$V(\varphi_n) = -\Delta b \varphi_n - \int d\varphi_n \left(-\varphi_n \frac{c}{\pi} - 2d \operatorname{sen} \varphi_n \right) \quad (5.6)$$

o qual pode facilmente ser calculado

$$V(\varphi_n) = -\Delta b \varphi_n + \frac{\varphi_n^2 c}{2\pi} - 2d \cos \varphi_n. \quad (5.7)$$

A dinâmica da diferença de fase pode ser representada como a de uma partícula superamortecida em um potencial inclinado. Neste quadro, o efeito do ruído é a indução de saltos de fase entre mínimos vizinhos no potencial. Um valor não nulo de φ_n corresponde a um transporte dirigido no potencial [37].

O potencial (5.7) é ilustrado na figura 5.1. Em (a), (b) e (c) na ausência de ruído o sistema está dentro da região de sincronização, significando que a intensidade do acoplamento é grande o suficiente para induzir sincronização. Três valores de Δb são ilustrados: (a) $\Delta b > 0$, (b) $\Delta b = 0$ e (c) $\Delta b < 0$. Quando $\Delta b > 0$ (figura 5.1 (a)), se a partícula estiver sob a influência

de ruído ela oscilará ao redor do mínimo local do poço de potencial. Se o ruído aplicado tem uma distribuição gaussiana, então para qualquer altura da barreira, cedo ou tarde a perturbação irá alcançar um valor que seja suficiente para arremessar a partícula sobre a barreira. A partícula salta para o poço vizinho de vez em quando, e esses saltos, ou deslizamentos de fase, representam um processo randômico. Com cada salto para a direita, φ_n aumenta em 2π , e com cada salto para a esquerda diminui em 2π . É muito mais fácil para a partícula superar as mais baixas barreiras à direita que à esquerda, assim, a direção preferida da partícula flutuar é para direita, embora os saltos na direção oposta não sejam impossíveis. A diferença de fase φ_n irá em média aumentar ilimitadamente com o tempo. A 5.1 (b) ilustra o comportamento de φ_n no meio da região de sincronização ($\Delta b = 0$). Para qualquer intensidade do acoplamento a partícula tem a mesma probabilidade de salto para a esquerda que para a direita, e em média φ_n não muda. A figura 5.1 (c) ilustra o caso em que φ_n flutua preferivelmente para a esquerda. Geralmente, dentro da região de sincronização a diferença de fase exibe platôs de certa duração que corresponde ao estado de sincronização de fase, interrompido por saltos de 2π . A duração de permanência dentro de cada poço potencial é proporcional à intensidade de sincronização.

Nas figuras 5.1 (d) e (e) a situação é ilustrada esquematicamente para o caso quando o acoplamento não é grande o suficiente para induzir sincronização, e o sistema está fora da região de sincronização. Nesse caso não há nenhum poço potencial para φ_n , e ela desliza para baixo, nesta ou naquela direção dependendo do sinal da diferença Δb .

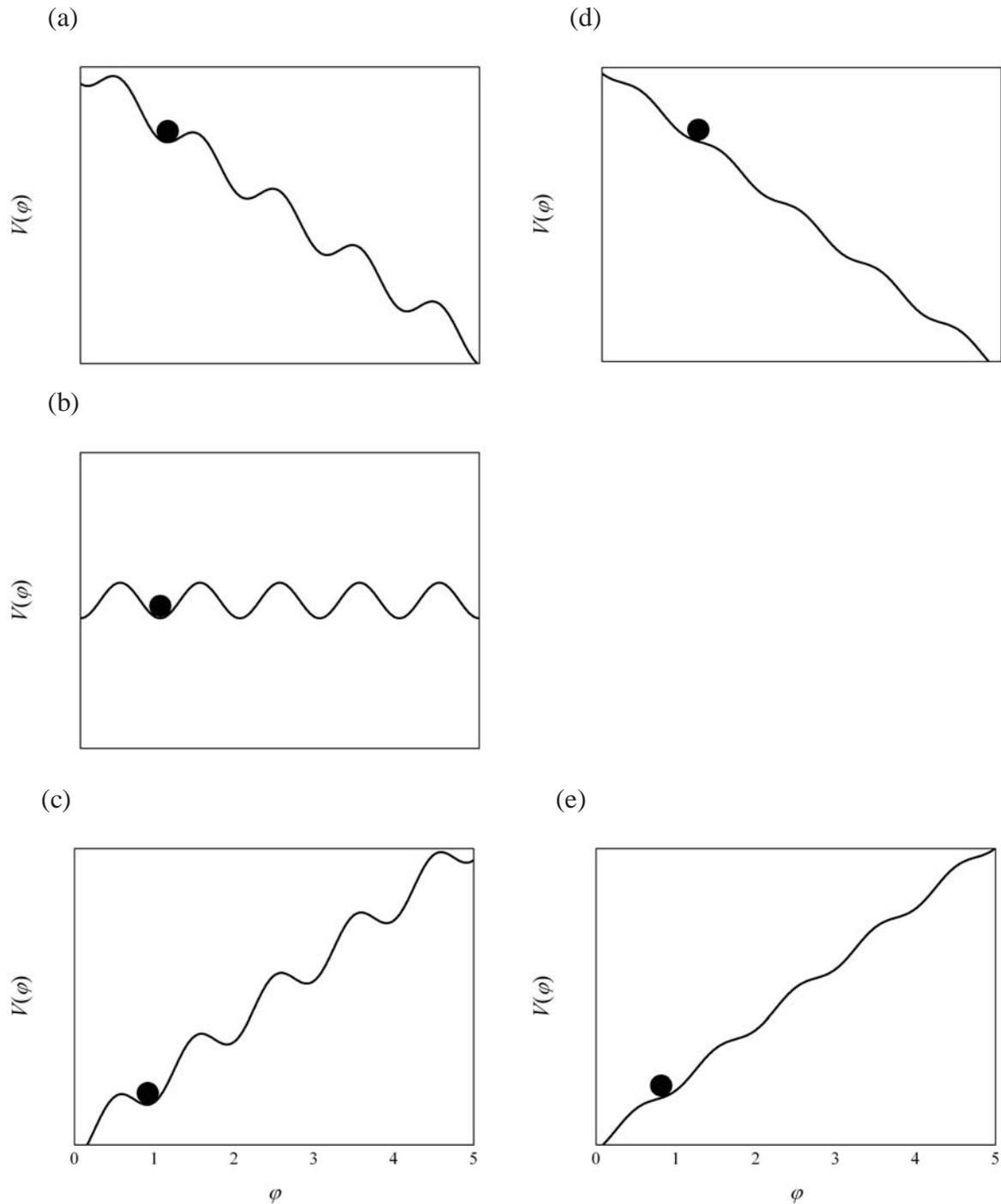


Figura 5.1: Ilustração esquemática do comportamento da diferença de fase φ_n como uma partícula em um potencial inclinado $V(\varphi_n)$. (a), (b) e (c) mostra a partícula dentro da região de sincronização; (d) e (e) mostra a partícula fora da região de sincronização.

5.2 Efeitos de ruído branco gaussiano sobre o primeiro sistema de dois mapas circulares acoplados

No capítulo anterior, foi demonstrado o fenômeno de sincronização de fase em um sistema de dois mapas circulares acoplados. Porém, é inevitável a presença de ruído em

sistemas naturais e experimentais. Portanto, é relevante explorar os efeitos de ruído sobre a robustez do processo de sincronização [51].

Ruídos podem influenciar a sincronização de fase de diferentes maneiras. Conforme já mencionado, geralmente ele faz a diferença de fase flutuar ao redor do mínimo do poço de potencial, e escala sobre a barreira de energia ocasionalmente se deslocando para o mínimo vizinho, resultando em um efeito degradante, por exemplo, induzindo deslizamentos de sincronização de fase em osciladores.

5.2.1 Dessincronização de fase induzida por ruído gaussiano no acoplamento

Para investigar os efeitos de ruído sobre um sistema de dois mapas circulares acoplados, foi introduzido um ruído gaussiano no acoplamento do sistema (4.1), o qual passa a ser descrito como:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}^1 &= \theta_n^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) - \frac{\varepsilon(1+\xi)}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \frac{\varepsilon(1+\xi)}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) \\ \theta_{n+1}^2 &= \theta_n^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) - \frac{\varepsilon(1+\xi)}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \frac{\varepsilon(1+\xi)}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2)\end{aligned}\quad (5.8)$$

onde ζ é um ruído branco gaussiano (veja apêndices A e B).

O sistema (5.8) pode ser interpretado como a seção de Poincaré de duas trajetórias sobre a superfície de um toro não idênticas e acopladas. Essas trajetórias estão sob a influência de uma perturbação no acoplamento do sistema.

A figura 5.2 mostra o número de rotação calculado através da equação (4.22) em função do acoplamento para o sistema (5.8), com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$. É possível notar que, conforme a variância do ruído aumenta, uma dessincronização é induzida ao sistema. Em 5.2 (a) o sistema está livre de ruído. Note que há pequenos platôs de sincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$ e um considerável platô de sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.2 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$. **O ruído induz uma dessincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$** , porém o sistema ainda mantém a sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.2 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$. **O ruído, agora com variância maior, induziu uma dessincronização de fase 1:1**, e o sistema não possui sincronização de fase perfeita ou imperfeita.

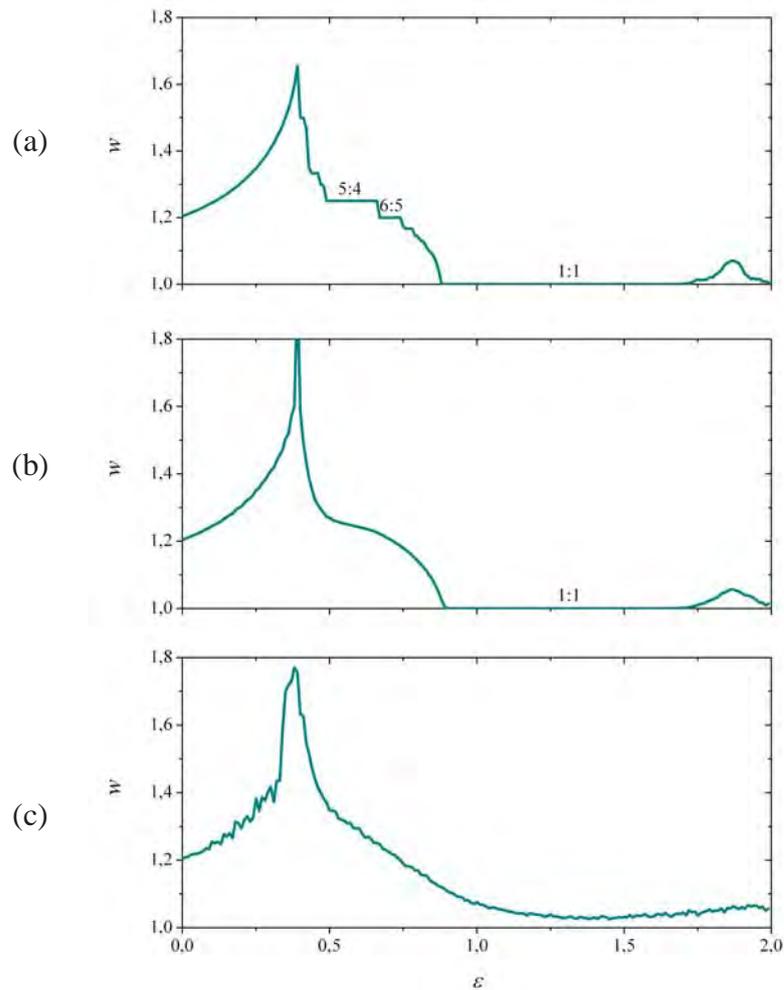


Figura 5.2: Número de rotação w pelo coeficiente de acoplamento ε para o sistema (5.8) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$. O número de rotação é plotado como uma função do acoplamento. Em (a) o sistema está livre de ruído. O sistema está sob a influência de um ruído com variância (b) $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$ e (c) $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$.

Para uma melhor interpretação do comportamento dinâmico de um sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído gaussiano no parâmetro de acoplamento, a figura 5.3 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.8) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 0,6$ e diferentes variâncias de ruído. Em 5.3 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico de 9 bandas faz com que o sistema possua sincronização de fase imperfeita 5:4. Em 5.3 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-5}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase imperfeita. Em 5.3 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$, neste caso o atrator caótico expandiu ainda mais. Em 5.3 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até que ele ocupe todo o espaço de fases, e o sistema perdeu a periodicidade, resultando na

perda de sincronização de fase imperfeita.

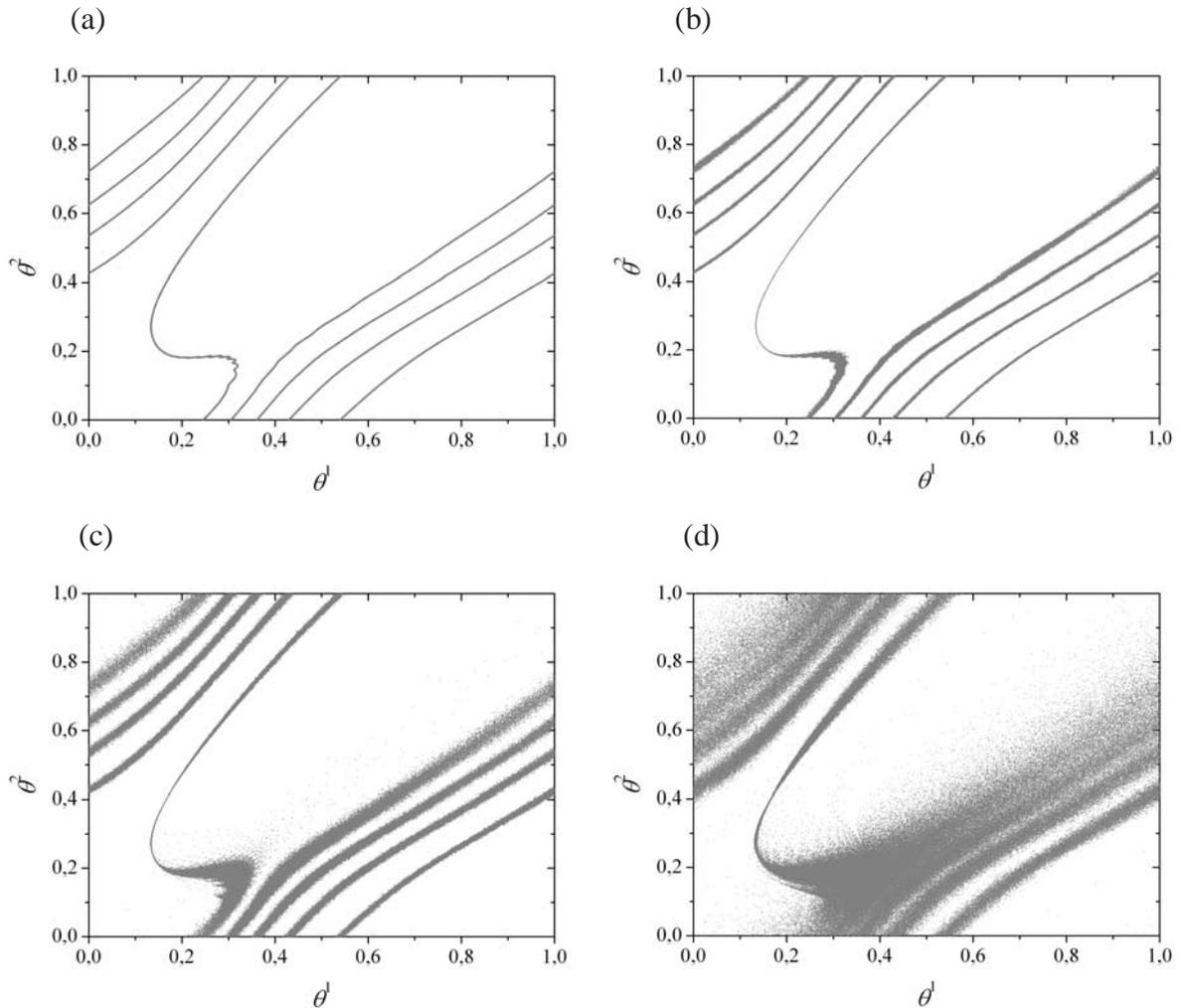


Figura 5.3: Espaço de fases para o sistema (5.8) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 0,6$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase imperfeita 5:4 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator periódico de nove bandas. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-5}$. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$, o qual destruiu o atrator, dessincronizando o sistema.

Para analisar o mecanismo de perda de sincronização mais precisamente, foram calculados os pontos fixos do sistema (5.8) para valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$ e $\varepsilon = 1,35$, valor do acoplamento pouco antes da perda de sincronização. Foram encontrados quatro pontos fixos, cujas estabilidades foram analisadas através dos autovalores da matriz jacobiana. A tabela 5.1 apresentada os pontos fixos encontrados, suas localizações no espaço de fases, seus autovalores, suas classificações e estabilidade de acordo com os autovalores.

Ponto Fixo	Localização no espaço de fases	Autovalores	Classificação	Estabilidade
A	$\theta_1 = 0,30257;$ $\theta_2 = 0,33852$	$\lambda_1 = 1,58;$ $\lambda_2 = 0,46264$	ponto de sela hiperbólico	instável
B	$\theta_1 = 0,19743;$ $\theta_2 = 0,16148$	$\lambda_1 = 1,5373;$ $\lambda_2 = 0,42003$	ponto de sela hiperbólico	instável
C	$\theta_1 = 0,30257;$ $\theta_2 = 0,16148$	$\lambda_1 = 0,9949 - 0,55823i;$ $\lambda_2 = 0,9949 + 0,55823i$	repulsor tipo foco hiperbólico	instável
D	$\theta_1 = 0,19743;$ $\theta_2 = 0,33852$	$\lambda_1 = 1,0051 - 0,55823i;$ $\lambda_2 = 1,0051 + 0,55823i$	repulsor tipo foco hiperbólico	instável

Tabela 5.1: Pontos fixos e suas classificações para o sistema (5.8) com $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$ e $\varepsilon = 1,35$.

A figura 5.4 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.8) para os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$ e $\varepsilon = 1,35$. Os dois quadrados em preto são focos instáveis e as duas cruzes são pontos de sela. As linhas em vinho são as variedades estáveis do ponto de sela A, as linhas vermelhas são as variedades instáveis do ponto de sela A, as linhas violetas são as variedades estáveis do ponto de sela B, as linhas azuis são as variedades instáveis do ponto de sela B e a parte em cinza escuro é o atrator caótico. As trajetórias iniciadas ao longo da variedade do foco C caminham em direção às selas A e B, e as iniciadas ao longo da variedade do foco instável D caminham em direção à sela B. As trajetórias iniciadas ao longo das variedades instáveis das selas A e B caminham em direção do atrator caótico. Note que a estrutura das variedades estáveis de ambos os pontos de sela são formadas por “*regiões simétricas*” no espaço de fases.

Para uma melhor interpretação do comportamento dinâmico de um sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído gaussiano no parâmetro de acoplamento, a figura 5.5 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.8) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 1,35$ e diferentes variâncias de ruído. Em 5.5 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico faz com que o sistema possua sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.5 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase perfeita. Em 5.5 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, neste caso o atrator caótico expandiu ainda mais, e é possível notar que as órbitas do atrator estão seguindo as variedades instáveis dos pontos de sela A e B. Em 5.5 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até que ele ocupe todo o

espaço de fases, e portanto perder a periodicidade, resultando na perda de sincronização de fase.

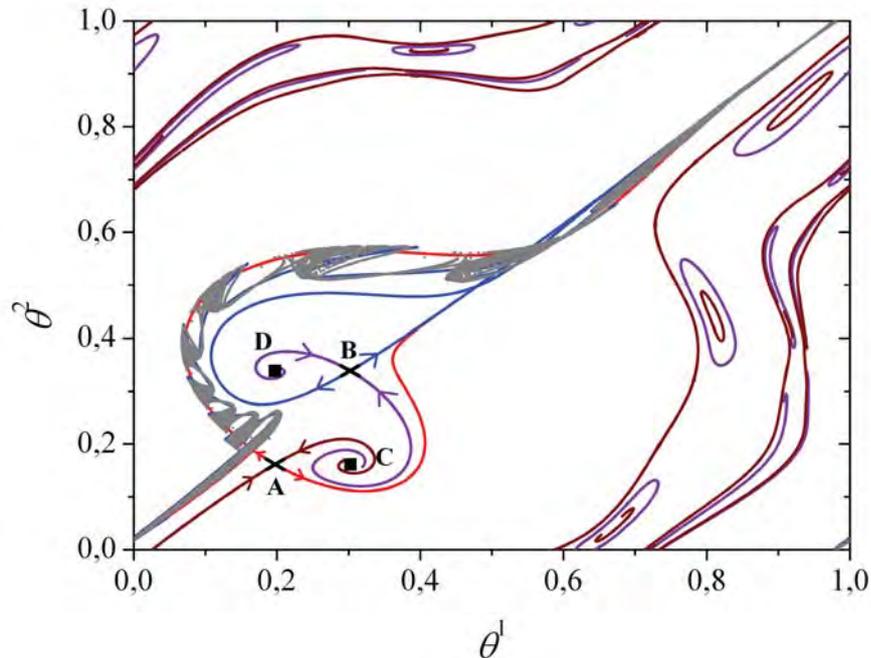


Figura 5.4: Espaço de fases de dois mapas circulares acoplados do sistema (5.8) para $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$ e $\varepsilon = 1,35$. Os dois quadrados em preto são focos instáveis e as duas cruzes são pontos de sela. As linhas em vinho são as variedades estáveis do ponto de sela A, as linhas vermelhas são as variedades instáveis do ponto de sela A, as linhas violetas são as variedades estáveis do ponto de sela B, as linhas azuis são as variedades instáveis do ponto de sela B e a parte em cinza é o atrator caótico.

Conforme já mencionado, na crise interior um ponto fixo instável existente dentro da bacia de atração do atrator caótico, colide com o atrator caótico quando algum parâmetro de controle é variado. Quando a colisão ocorre, o atrator caótico expande seu tamanho. Esta expansão ocorre porque as trajetórias sobre o atrator caótico eventualmente se aproximam do ponto fixo instável e são repelidas pelo ponto fixo para regiões do espaço de fases que ainda não haviam sido visitadas antes da colisão ocorrer. O efeito é a expansão das órbitas do atrator caótico sobre o espaço de fases. Dessa forma, conforme mostra as figuras 5.4 e 5.5, **conjectura-se que o ruído gaussiano no acoplamento induziu uma crise interior e dessincronizou o sistema** [52].

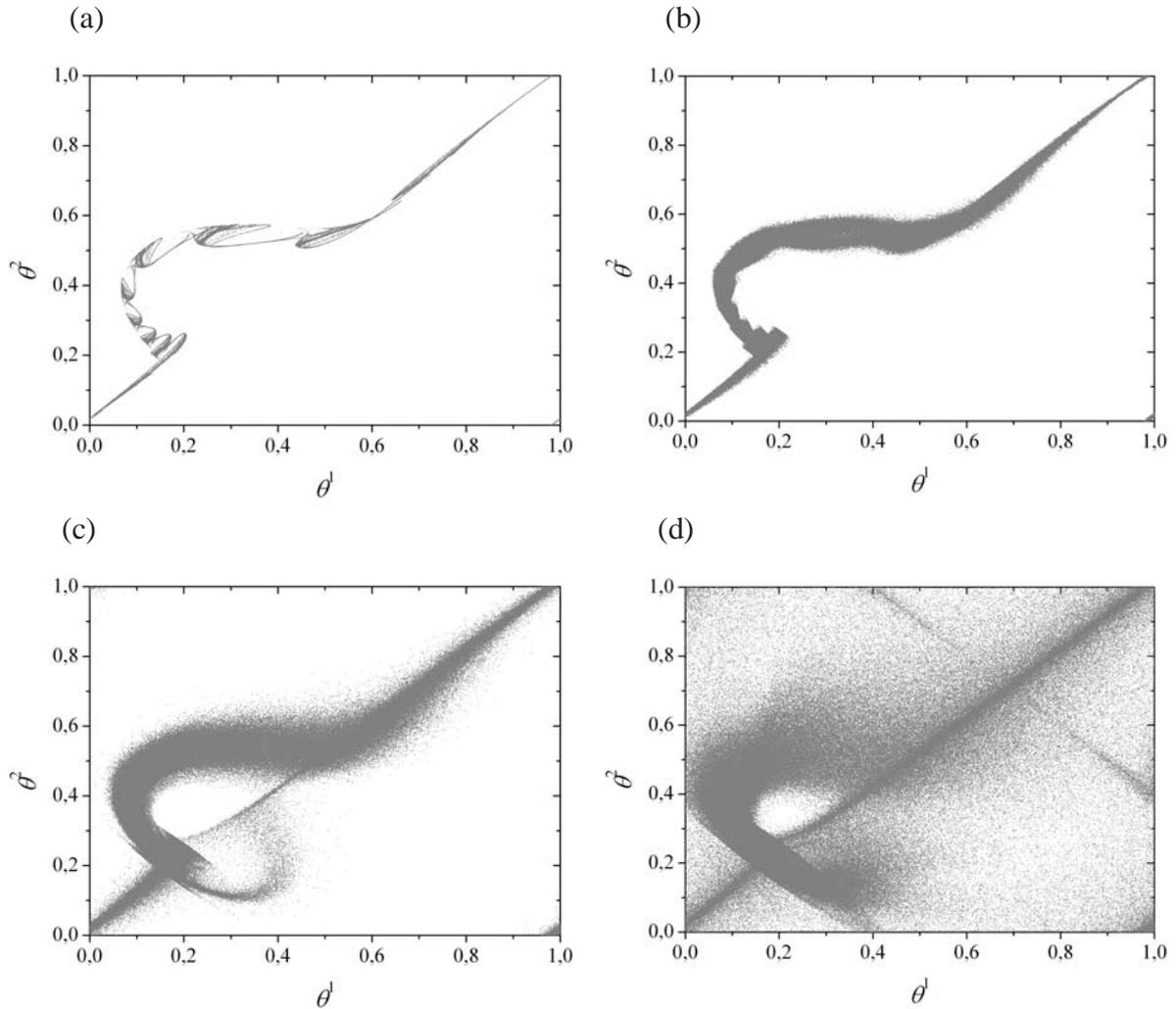


Figura 5.5: Espaço de fases para o sistema (5.8) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 1,35$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase perfeita 1:1 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator caótico. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, e o atrator caótico passou a seguir as variedades instáveis dos pontos de sela A e B. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, o qual destruiu o atrator, dessincronizando o sistema.

A figura 5.6 mostra a evolução da diferença de fase do sistema (5.8) para $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$ e $\varepsilon = 1,35$. A linha (a) da figura 5.6 representa o sistema com sincronização de fase 1:1 livre de ruído, cuja dinâmica é mostrada na figura 5.5 (a). Neste caso a evolução da diferença de fase permanece constante. A linha (b) da figura 5.6 representa o sistema sob a influência de ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, cuja dinâmica é mostrada na figura 5.5 (d). Neste caso a evolução da diferença de fase é composta por uma sucessão de saltos discretos. Isto é uma indicação de que **ruído no parâmetro de acoplamento induz deslizamentos de fase** no sistema. Devido a estes deslizamentos em média a diferença de fase $\theta_2 - \theta_1$ é uma função crescente no tempo.

Esses deslizamentos de fase correspondem aos de saltos de fase entre mínimos

vizinhos no potencial representados na ilustração esquemática do comportamento da diferença de fase φ_n como uma partícula em um potencial inclinado, mostrados na figura 5.1.

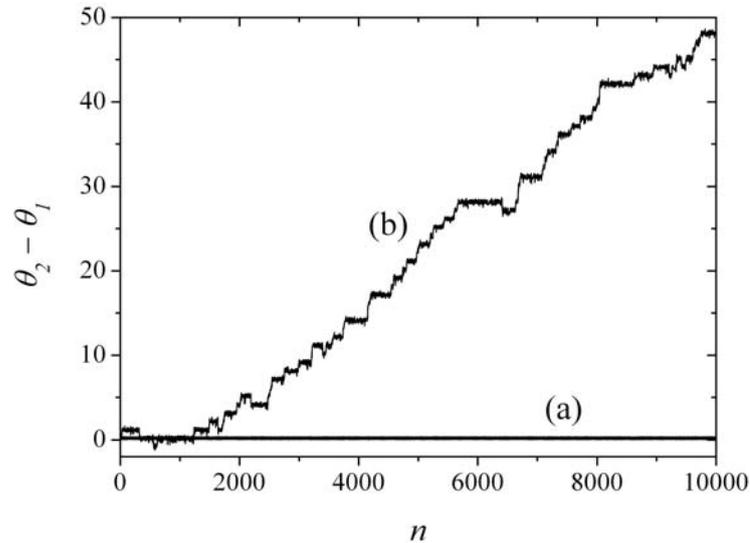


Figura 5.6: Evolução da diferença de fase do sistema (5.8) para $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$ e $\varepsilon = 1,35$. A linha (a) representa o sistema livre de ruído com sincronização de fase 1:1, resultando em uma diferença de fase constante. A linha (b) representa o sistema sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, o qual induziu deslizamentos de fase.

5.2.2 Dessincronização de fase induzida por ruído gaussiano aditivo

Para investigar os efeitos de ruído sobre um sistema de dois mapas circulares acoplados, foi introduzido um ruído gaussiano aditivo ao sistema (4.1), o qual passa a ser descrito como:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}^1 &= \theta_n^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \xi \\ \theta_{n+1}^2 &= \theta_n^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) - \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \xi\end{aligned}\quad (5.9)$$

onde ξ é um ruído branco gaussiano.

A figura 5.7 mostra o número de rotação calculado através da equação (4.22) em função do acoplamento para o sistema (5.9), para os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$. É possível notar que, conforme a variância do ruído aumenta, uma dessincronização é induzida ao sistema. Em 5.7 (a) o sistema está livre de ruído. Note que há pequenos platôs de sincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$ e um considerável platô de

sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.7 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$. O ruído induz uma dessincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$, porém o sistema ainda mantém a sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.7 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$. O ruído, agora com variância maior, induziu uma dessincronização de fase 1:1, e o sistema agora não possui sincronização de fase perfeita ou imperfeita.

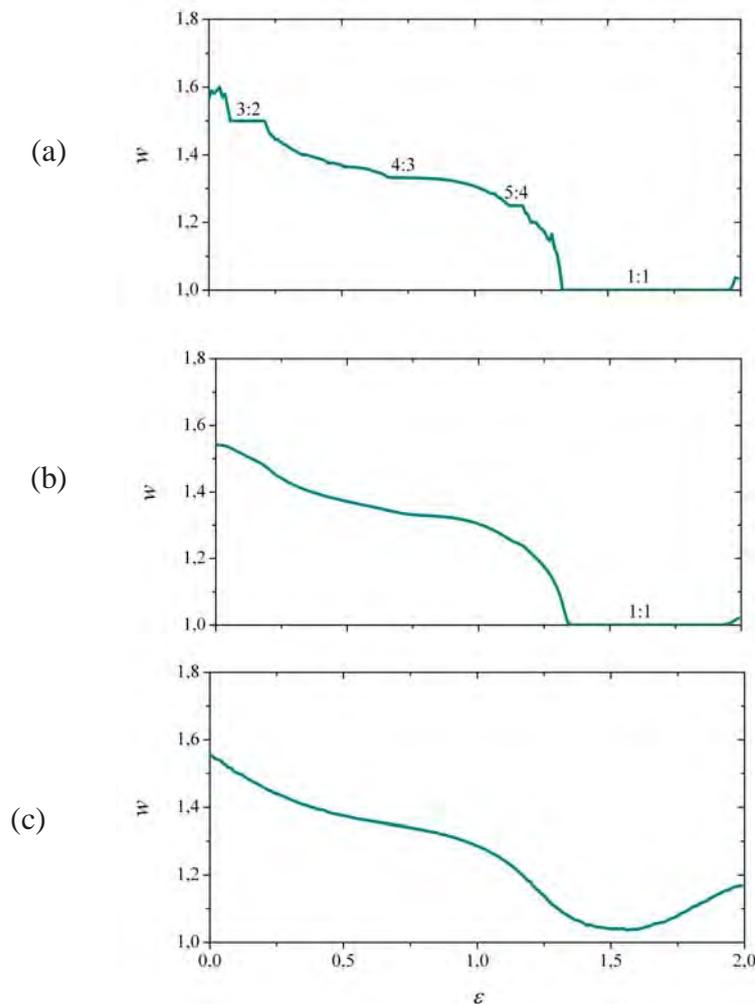


Figura 5.7: Número de rotação w pelo coeficiente de acoplamento ε para o sistema (5.9) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$. O número de rotação é plotado como uma função do acoplamento. Em (a) o sistema está livre de ruído. O sistema está sob a influência de um ruído com variância (b) $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$ e (c) $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$.

Para uma melhor interpretação do comportamento dinâmico de um sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído gaussiano no parâmetro de acoplamento, a figura 5.8 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.9) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 0,6$ e diferentes variâncias de ruído. Em 5.8 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico faz com que o sistema possua sincronização de fase imperfeita 3:2. Em 5.8 (b) o sistema está sob a influência de um ruído

com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-6}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase imperfeita. Em 5.8 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-5}$, neste caso o atrator caótico expandiu ainda mais. Em 5.8 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até que ele ocupe todo o espaço de fases e o sistema perdeu a periodicidade, resultando na perda de sincronização de fase imperfeita.

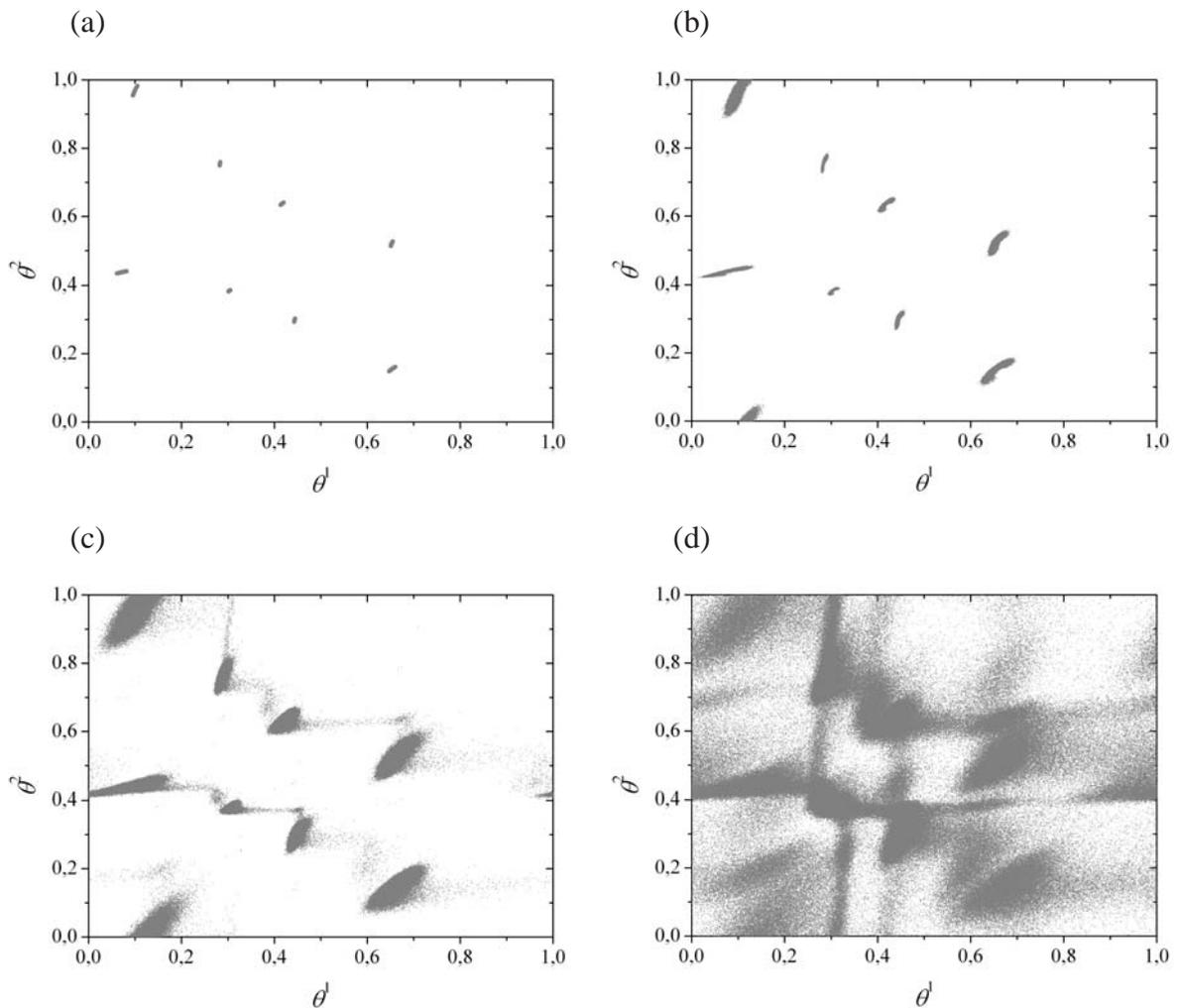


Figura 5.8: Espaço de fases para o sistema (5.9) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$, $\varepsilon = 0,2$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase imperfeita 3:2 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator periódico. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-6}$. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-5}$. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$, o qual destruiu o atrator, dessincronizando o sistema.

Para uma melhor interpretação da dinâmica de um sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído gaussiano aditivo, a figura 5.9 mostra o espaço de fases para o sistema (5.9) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$, $\varepsilon = 1,88$ e diferentes

variâncias de ruído. Em 5.9 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico de várias bandas faz com que o sistema possua sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.9 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão de cada uma das bandas do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase perfeita. Em 5.9 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$ e o atrator ainda mais expandido habita quase todo o espaço de fases. Em 5.9 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até ocupar todo o espaço de fases e o sistema perdeu a periodicidade, resultando na dessincronização de fase.

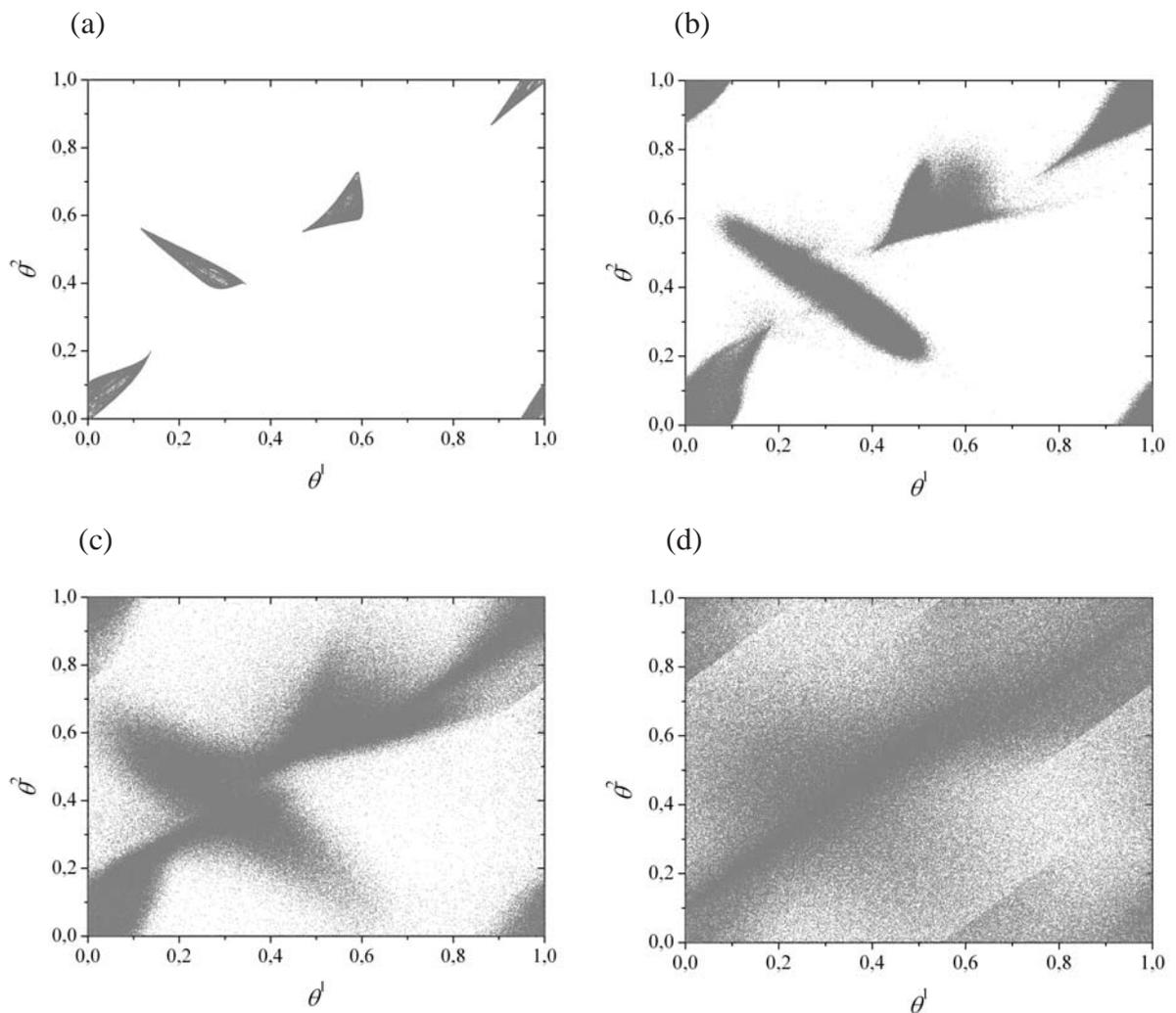


Figura 5.9: Espaço de fases para o sistema (5.9) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$, $\varepsilon = 1,88$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase 1:1 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator caótico de várias bandas. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$, o qual expandiu as bandas do atrator, mas o sistema ainda está sincronizado. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$, e o atrator caótico expandiu ainda mais. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, o qual destruiu o atrator, dessincronizando o sistema.

A figura 5.10 mostra a evolução da diferença de fase do sistema (5.9) para $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$ e $\varepsilon = 1,88$. A linha (a) da figura 5.10 representa o sistema com sincronização de fase 1:1 livre de ruído, neste caso a evolução da diferença de fase permanece constante. A linha (b) da figura 5.10 representa o sistema sob a influência de ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, neste caso a evolução da diferença de fase é composta por uma sucessão de saltos discretos. Isto é uma indicação de que **ruído aditivo induz deslizamentos de fase** no sistema [35]. Devido a estes deslizamentos em média a diferença de fase $\theta_2 - \theta_1$ é uma função crescente no tempo.

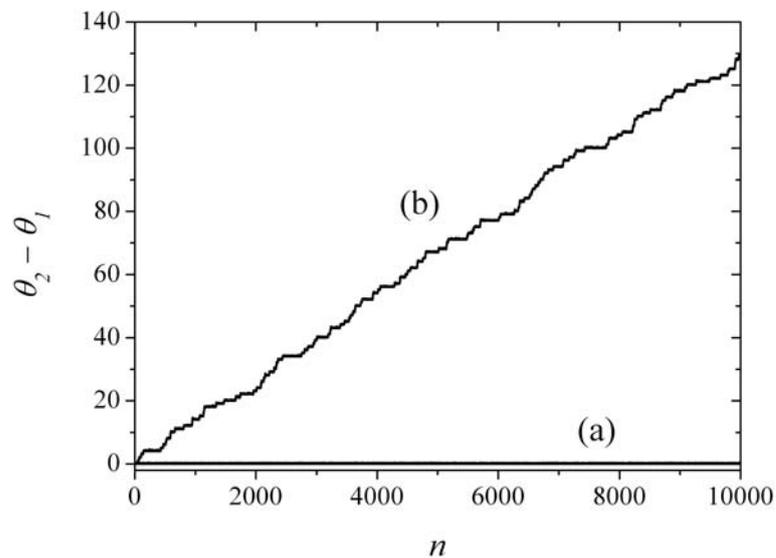


Figura 5.10: Evolução da diferença de fase do sistema (5.9) com $\omega_1 = 0,3$, $\omega_2 = 0,4$, $\kappa = 1,3$ e $\varepsilon = 1,88$. A linha (a) representa o sistema livre de ruído com sincronização de fase 1:1, resultando em uma diferença de fase constante. A linha (b) representa o sistema sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, o qual induziu deslizamentos de fase.

Comparando os resultados, o sistema (5.8) com ruído no acoplamento, dessincroniza com uma variância menor de ruído do que o sistema (5.9) com ruído aditivo, ou seja, **para que um ruído possa induzir dessincronização ao sistema, é necessário uma variância maior para ruído no acoplamento do que para ruído aditivo.**

5.3 Efeitos de ruído branco gaussiano sobre o segundo sistema de dois mapas circulares acoplados

Um sistema composto por dois mapas circulares acoplados pode ser descrito como:

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1}^1 &= \theta_n^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2 - 2\pi\theta_n^1) \\
\theta_{n+1}^2 &= \theta_n^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1 - 2\pi\theta_n^2)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

onde ε é o parâmetro de acoplamento.

O sistema (5.10) possui apenas um termo de acoplamento bidirecional não linear em cada equação, enquanto o sistema (4.1) possui dois termos de acoplamento bidirecional não linear em cada equação.

5.3.1 Dessincronização de fase induzida por ruído gaussiano no acoplamento

Para investigar os efeitos de ruído sobre um sistema de dois mapas circulares acoplados, foi introduzido um ruído gaussiano no acoplamento do sistema (5.10), o qual passa a ser descrito como:

$$\begin{aligned}
\theta_{n+1}^1 &= \theta_n^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \frac{\varepsilon(1+\xi)}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2 - 2\pi\theta_n^1) \\
\theta_{n+1}^2 &= \theta_n^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \frac{\varepsilon(1+\xi)}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1 - 2\pi\theta_n^2)
\end{aligned} \tag{5.11}$$

onde ξ é um ruído branco gaussiano.

A figura 5.11 mostra o número de rotação calculado através da equação (4.22) em função do acoplamento para o sistema (5.11), para os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$. É possível notar que, conforme a variância do ruído aumenta, uma dessincronização é induzida ao sistema. Em 5.11 (a) o sistema está livre de ruído. Note que há pequenos platôs de sincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$ e um considerável platô de sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.11 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$. O ruído induz uma dessincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$, porém o sistema ainda mantém a sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.11 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1$. O ruído, agora com variância maior, induziu uma dessincronização de fase 1:1, e o sistema não possui sincronização de fase perfeita ou imperfeita.

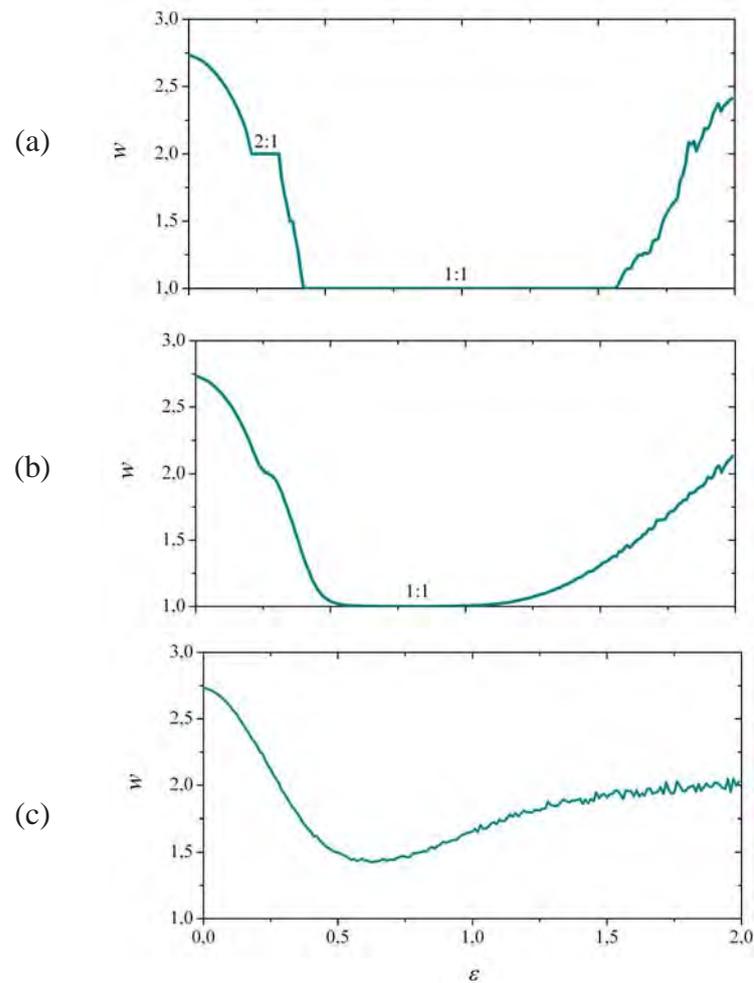


Figura 5.11: Número de rotação w pelo coeficiente de acoplamento ε para o sistema (5.11) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$. O número de rotação é plotado como uma função do acoplamento. Em (a) o sistema está livre de ruído. O sistema está sob a influência de um ruído com variância (b) $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$ e (c) $\sigma^2 = 1$.

Um sistema é estruturalmente estável se trajetórias suficientemente próximas têm retratos de fases equivalentes. Assim, a estabilidade estrutural significa a robustez de um ponto ou uma região no espaço das trajetórias, entendendo-se robustez como a propriedade que o sistema apresenta de reter as características qualitativas da sua dinâmica, relativamente a pequenas perturbações ou mudanças nas funções envolvidas na sua definição. **Assim, a alta intensidade da variância do ruído na figura 5.11 (c) é um artifício para mostrar a robustez da sincronização de fase do sistema.**

Para uma melhor interpretação do comportamento dinâmico de um sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído gaussiano no parâmetro de acoplamento, a figura 5.12 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.11) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 0,6$ e diferentes variâncias de ruído. Em 5.12 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico de 3 bandas faz com que o

sistema possui sincronização de fase imperfeita 2:1. Em 5.12 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase imperfeita. Em 5.12 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, neste caso o atrator caótico expandiu ainda mais. Em 5.12 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até que ele ocupe todo o espaço de fases e o sistema perdeu a periodicidade, resultando na perda de sincronização de fase imperfeita.

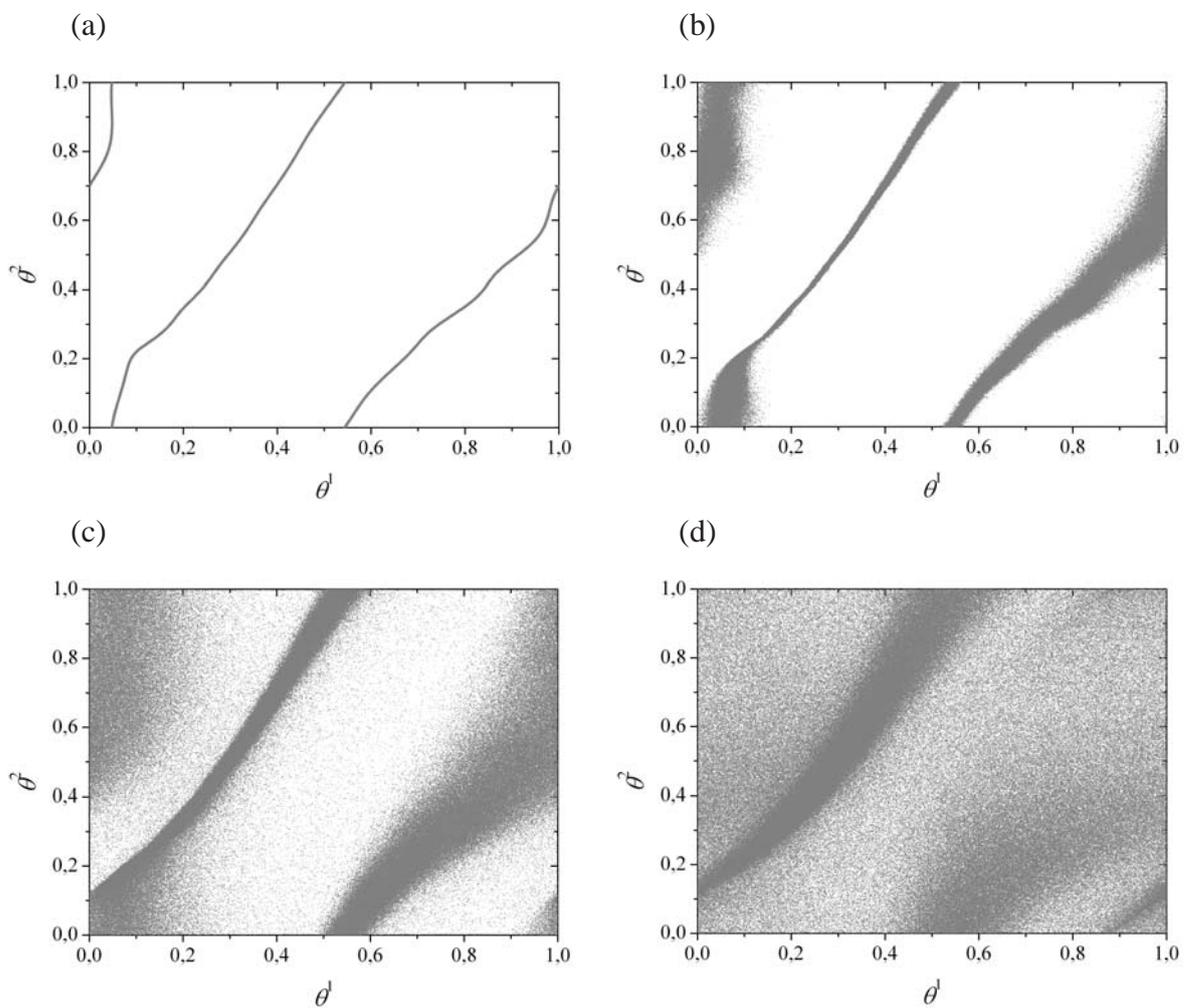


Figura 5.12: Espaço de fases para o sistema (5.8) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$, $\varepsilon = 0,32$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase imperfeita 2:1 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator periódico de três bandas. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, o qual destruiu o atrator, dessincronizando o sistema.

Para visualizar melhor a dinâmica desse segundo sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído branco gaussiano aditivo, a figura 5.13 apresenta o

espaço de fases para o sistema (5.11) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$ e $\varepsilon = 0,75$. Em 5.13 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico de 2 bandas faz com que o sistema possua sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.13 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase perfeita. Em 5.13(c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 2 \times 10^{-1}$, e o atrator caótico expandiu ainda mais. Em 5.13 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até ele ocupar todo o espaço de fases e perder a periodicidade, resultando na perda de sincronização de fase.

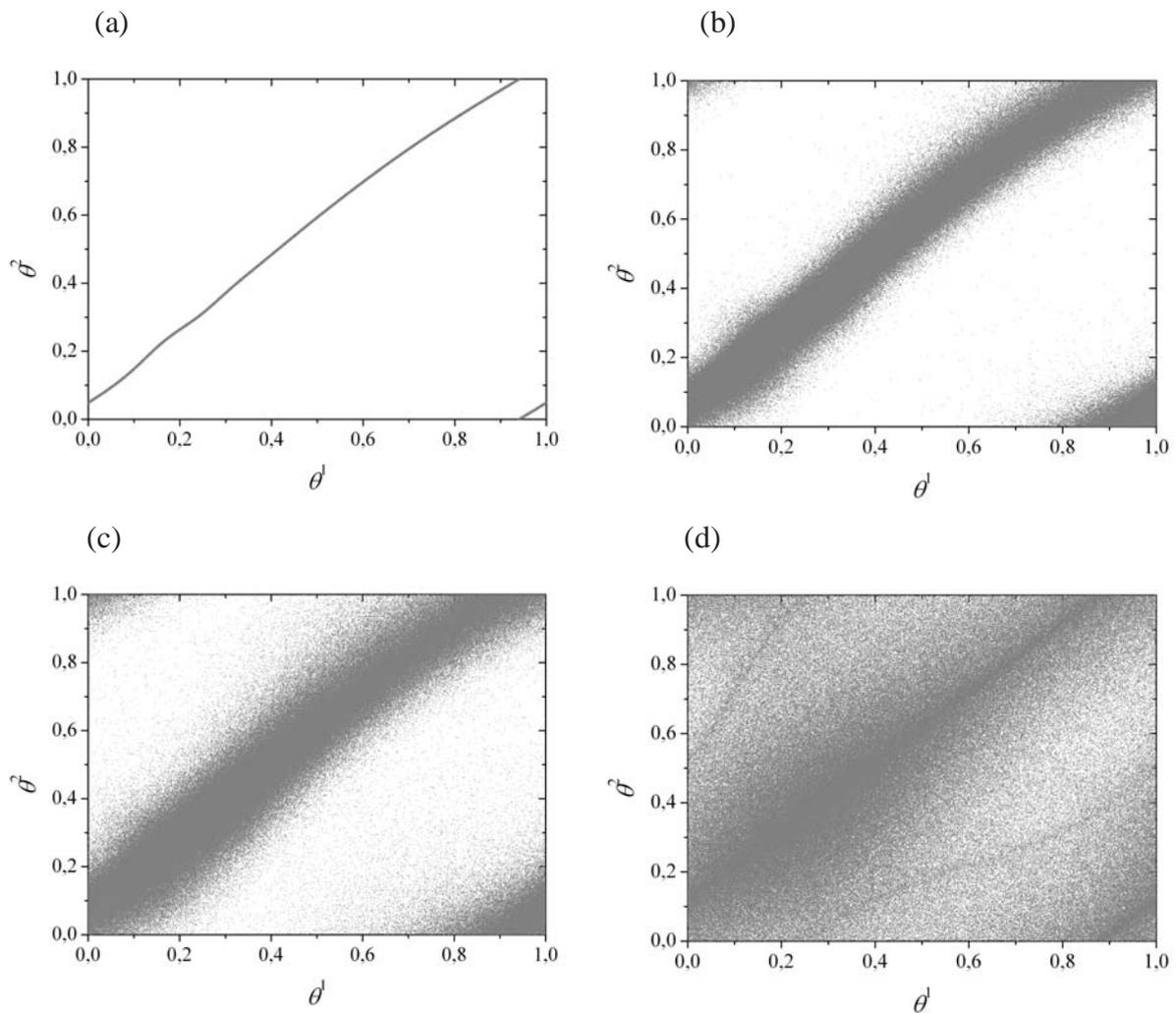


Figura 5.13: Espaço de fases para o sistema (5.11) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$, $\varepsilon = 0,75$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase 1:1 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator caótico. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$, o qual expandiu o atrator, mas ainda há sincronização de fase 1:1. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 2 \times 10^{-1}$. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1$, o qual expandiu o atrator caótico até ocupar todo o espaço de fases e perder a periodicidade, dessincronizando o sistema.

A figura 5.14 mostra a evolução da diferença de fase do sistema (5.11) para $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$ e $\varepsilon = 0,75$. A linha (a) da figura 5.14 representa o sistema com sincronização de fase 1:1 livre de ruído, cuja dinâmica é mostrada na figura 5.13 (a). Neste caso a evolução da diferença de fase permanece constante. A linha (b) da figura 5.13 representa o sistema sob a influência de ruído com variância $\sigma^2 = 1$, cuja dinâmica é representada na figura 5.13 (d). Neste caso a evolução da diferença de fase é composta por uma sucessão de saltos discretos. Isto é uma indicação de que **ruído no parâmetro de acoplamento induz deslizamentos de fase no tempo**.

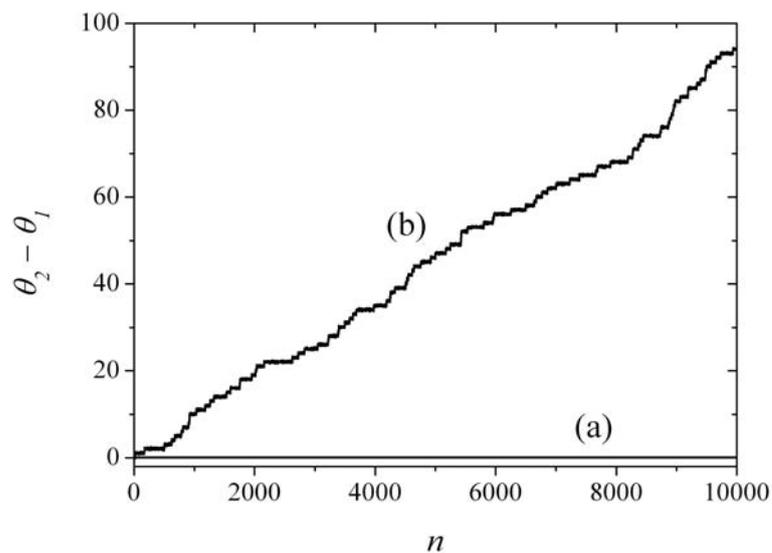


Figura 5.14: Evolução da diferença de fase do sistema (5.11) para $\omega_1 = 0,1$, $\omega_2 = 0,22$, $\kappa = 0,4$, $\varepsilon = 0,75$. A linha (a) representa o sistema livre de ruído com sincronização de fase 1:1, resultando em uma diferença de fase constante. A linha (b) representa o sistema sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1$, o qual induziu deslizamentos de fase.

5.3.2 Efeito de segunda ordem induzido por ruído gaussiano aditivo

Para investigar os efeitos de ruído sobre um sistema de dois mapas circulares acoplados, foi introduzido um ruído gaussiano aditivo ao sistema (5.10), o qual passa a ser descrito como:

$$\begin{aligned}\theta_{n+1}^1 &= \theta_n^1 + \omega_1 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2 - 2\pi\theta_n^1) + \xi \\ \theta_{n+1}^2 &= \theta_n^2 + \omega_2 - \frac{\kappa}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^2) + \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n^1 - 2\pi\theta_n^2) + \xi\end{aligned}\quad (5.12)$$

onde ζ é um ruído branco gaussiano.

A figura 5.15 mostra o número de rotação calculado através da equação (4.22) em função do acoplamento para o sistema (5.12), para os valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,38$, $\kappa = 0,5$. Em 5.15 (a) o sistema está livre de ruído. Note que há pequenos platôs de sincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$ e um considerável platô de sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.15 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$. O ruído induz uma dessincronização de fase imperfeita $m_1 : m_2$, porém o sistema ainda mantém a sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.15 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^3$. Neste caso, o sistema manteve a sincronização de fase perfeita, mesmo sob influência de ruído com alta variância. Assim, nesse segundo sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de um ruído branco gaussiano aditivo, perde sincronização de fase imperfeita mas mantém a sincronização de fase perfeita.

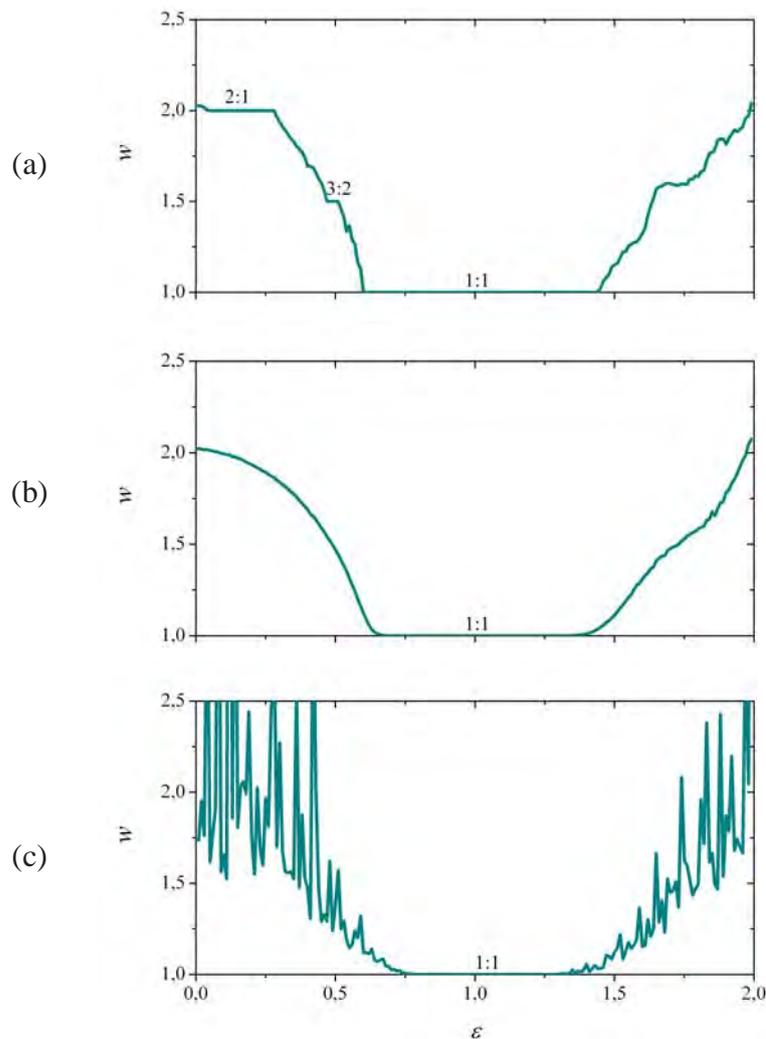


Figura 5.15: Número de rotação w pelo coeficiente de acoplamento ε para o sistema (5.12) com $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,38$, $\kappa = 0,5$. O número de rotação é plotado como uma função do acoplamento. Em (a) o sistema está livre de ruído. O sistema está sob a influência de um ruído com variância (b) $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$ e (c) $\sigma^2 = 1 \times 10^3$.

Para uma melhor interpretação do comportamento dinâmico de um sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído gaussiano no parâmetro de acoplamento, a figura 5.16 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.12) com valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,19$, $\omega_2 = 0,21$, $\kappa = 1,4$, $\varepsilon = 0,6$ e diferentes valores da variância σ^2 do ruído. Em 5.16 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico de 3 bandas faz com que o sistema possua sincronização de fase imperfeita 2:1. Em 5.16 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase imperfeita. Em 5.16 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$, neste caso o atrator caótico expandiu ainda mais. Em 5.16 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema expandiu o atrator caótico até que ele ocupe todo o espaço de fases e o sistema perdeu a periodicidade, resultando na perda de sincronização de fase imperfeita.

Para visualizar melhor a dinâmica desse segundo sistema de dois mapas circulares acoplados sob a influência de ruído branco gaussiano aditivo, a figura 5.17 apresenta o espaço de fases para o sistema (5.12) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,38$, $\kappa = 0,5$ e $\varepsilon = 1,1$ e diferentes valores da variância σ^2 do ruído. Em 5.17 (a) o sistema está livre de ruído. A presença de um atrator caótico faz com que o sistema possua sincronização de fase perfeita 1:1. Em 5.17 (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, neste caso, o ruído induziu uma expansão do atrator caótico, porém o sistema ainda possui sincronização de fase perfeita. Em 5.17 (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1$, e o atrator expandiu um pouco mais. Em 5.17 (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^3$, neste caso a ação do ruído sobre o sistema não expandiu o atrator até ele habitar todo o espaço de fases, e o atrator continua periódico, isto é, há um certo limite de expansão que o atrator caótico pode atingir, e **esse segundo sistema de dois mapas circulares acoplados possui sincronização de fase perfeita na presença de ruído gaussiano aditivo.**

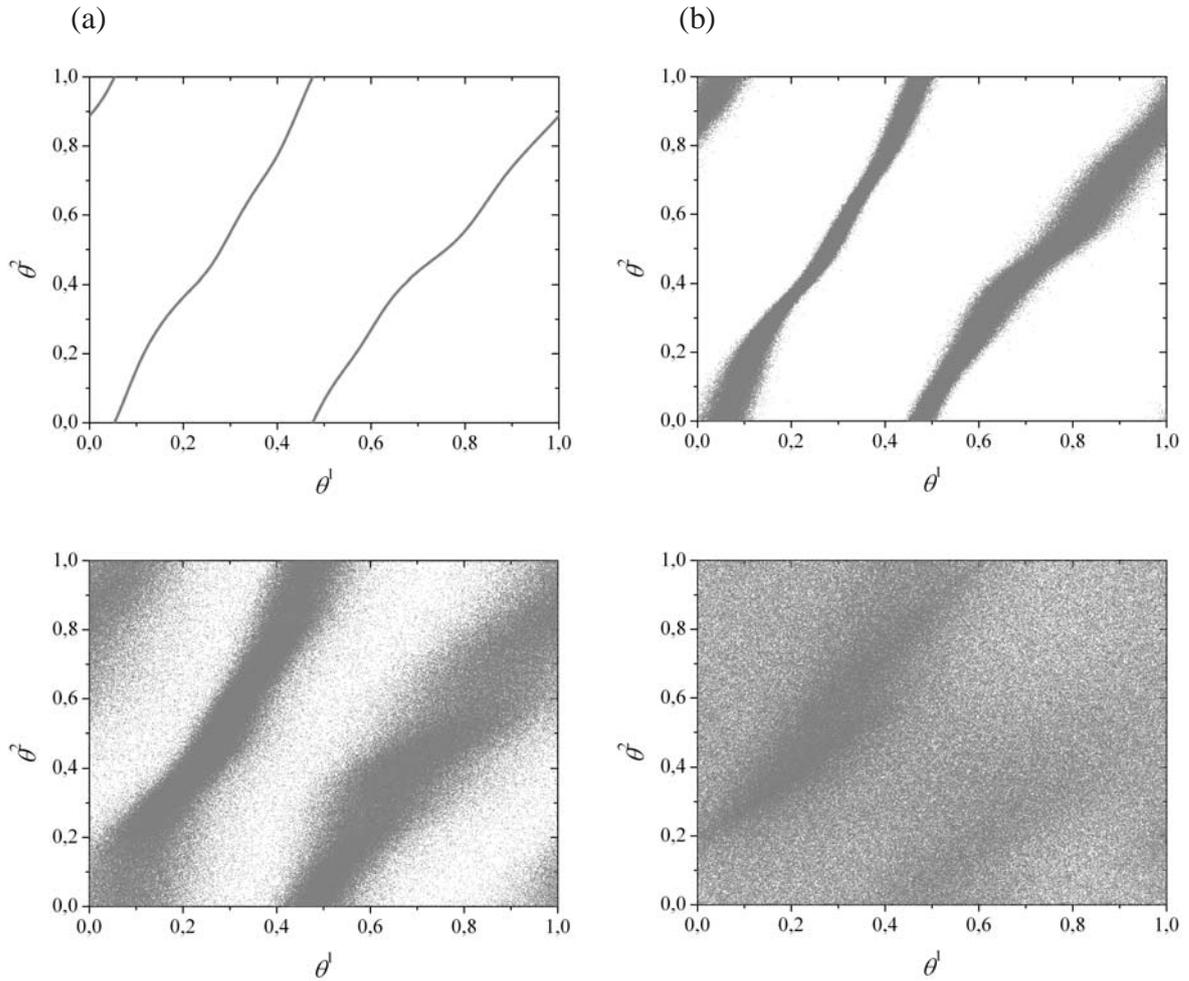


Figura 5.16: Espaço de fases para o sistema (5.8) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,38$, $\kappa = 0,5$, $\varepsilon = 0,17$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase imperfeita 2:1 e está livre de ruído. Note a presença de um atrator periódico de três bandas. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, o qual destruiu o atrator, dessincronizando o sistema.

Dessa forma, **a introdução de um ruído branco gaussiano aditivo neste segundo sistema de dois mapas circulares acoplados, induz um efeito de segunda ordem, no qual ocorre a dessincronização de fase imperfeita e permanece a sincronização de fase perfeita no sistema**, isto é, o sistema mantém sincronização de fase perfeita na presença de ruído.

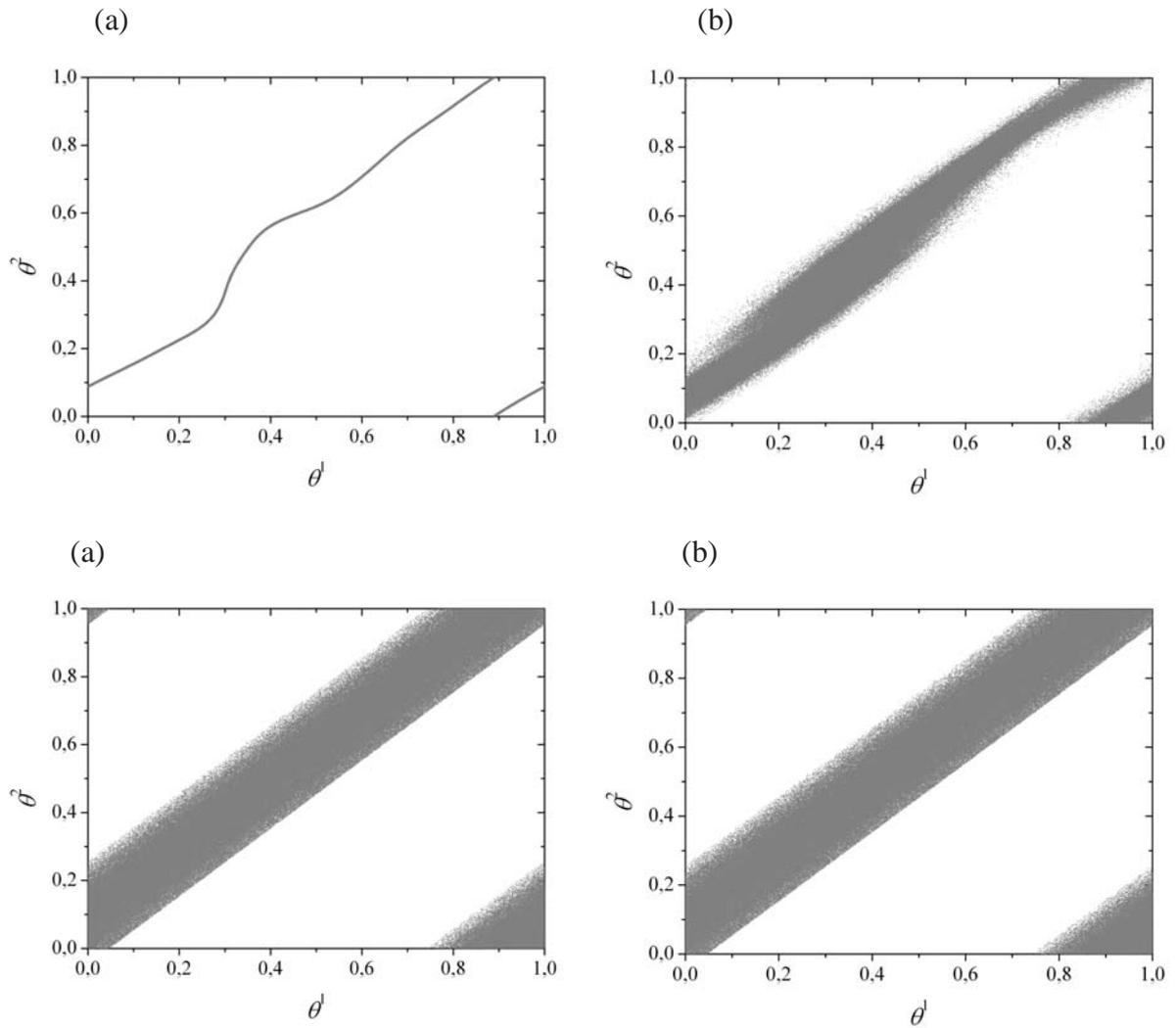


Figura 5.17: Espaço de fases para o sistema (5.12) e valores dos parâmetros $\omega_1 = 0,2$, $\omega_2 = 0,38$, $\kappa = 0,5$ $\varepsilon = 1,1$. Em (a) o sistema possui sincronização de fase 1:1 e está livre de ruído. Note a presença um atrator caótico. Em (b) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$, o qual expandiu o atrator, mas ainda há sincronização de fase 1:1. Em (c) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1$, e o atrator caótico expandiu ainda mais. Em (d) o sistema está sob a influência de um ruído com variância $\sigma^2 = 1 \times 10^3$, o qual não expandiu o atrator caótico até habitar todo o espaço de fases, mantendo a periodicidade e a sincronização de fase perfeita.

Capítulo 6

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, foram estudadas as propriedades da dinâmica caótica de um oscilador de fase discreto no tempo, chamado mapa circular. Foi investigada a transição para o caos através da sobreposição de regiões de órbitas periódicas que formam um regime no espaço de parâmetros do mapa circular, chamado línguas de Arnold. A partir do ponto crítico, onde $\kappa = 1$, as regiões começam a interagir e se sobrepõem originando caos. Abaixo do ponto crítico se encontram órbitas quase-periódicas, as quais desaparecem quando as línguas de Arnold começam a se sobreporem.

Através do mapa circular pode-se investigar a sincronização de frequência em osciladores caóticos. Essa sincronização pode ser vista na estrutura da Escada do Diabo, que apresenta os períodos de sincronização, na repetição dos padrões. Esses períodos de sincronização são números de rotação racionais, onde o movimento é periódico. Quando o número de rotação é irracional, o movimento é quase-periódico, e não há sincronização. Na linha crítica, as órbitas periódicas formam uma escada do Diabo completa, cuja complementaridade é um conjunto de Cantor de dimensão fractal $D = 0,92$.

Foi estudada também a sincronização de fase em osciladores caóticos, através de um sistema de dois mapas circulares acoplados não linearmente. A transição para o estado sincronizado ocorre com alguma mudança na estrutura do espaço de fases. Quando ambos os expoentes de Lyapunov são negativos o sistema não está sincronizado. A ocorrência de uma bifurcação gera a mudança do sinal de um dos expoentes de Lyapunov, e em seguida o outro sinal também se torna positivo. O sistema se torna então hipercaótico. A transição para o regime sincronizado é realizada através de uma crise interior, gerando um atrator caótico que induz periodicidade oscilatória no sistema, de forma que os dois mapas acoplados seguem a mesma trajetória ao longo das bandas do atrator caótico, oscilando em fase.

Conforme a diferença entre as frequências de cada mapa aumenta, são necessários maiores valores de acoplamento para haver sincronização. A estrutura da região de sincronização no espaço dos parâmetros do acoplamento pela diferença de frequências, é muito similar às línguas de Arnold. Aumentando a intensidade do acoplamento, a região de sincronização desaparece, devido ao fato de o acoplamento não superar mais a divergência

entre as trajetórias, e o sistema perde a sincronização. Dessa forma, há um certo valor crítico de acoplamento para haver sincronização, mesmo no caso em que a diferença entre as frequências é igual a zero.

Os cálculos numéricos mostraram que, o fato de as frequências dos mapas acoplados pertencerem à mesma língua de rotação no mapa individual, não é garantia de sincronização para o sistema, pois neste caso, somente há sincronização para pequenos valores do acoplamento.

A transição para o regime não sincronizado é realizada com alguma mudança na estrutura do conjunto caótico. Quando o sistema está sincronizado sob a presença de um atrator caótico, a mudança nos valores dos parâmetros pode gerar uma crise interior no sistema. Como consequência dessa crise, as órbitas no interior do atrator caótico são repelidas pela variedade instável de um ponto sela hiperbólico, o que faz o atrator expandir no espaço de fases, suscitando mais áreas a serem visitadas pelas órbitas periódicas do atrator. Dessa forma, as órbitas no atrator caótico deixam de ser periódicas e o sistema perde sincronização.

Outra questão abordada nesta dissertação foi o estudo dos efeitos de ruído branco gaussiano sobre a sincronização de fase em osciladores caóticos, através de sistemas de dois mapas circulares acoplados. O estudo foi feito introduzindo um ruído no acoplamento e posteriormente um ruído aditivo. Foram estudados dois sistemas de mapas circulares acoplados.

No primeiro sistema de dois mapas circulares acoplados estudado, a introdução de um ruído branco gaussiano no parâmetro de acoplamento induz deslizamentos, e conjectura-se que induz crise interior ao sistema. A introdução de um ruído branco gaussiano aditivo também induz deslizamentos de fase. Devido a estes deslizamentos, em média, a diferença de fase é uma função crescente no tempo. No espaço de fases, a ação do ruído sobre o sistema destrói o atrator caótico, e o sistema perde sincronização de fase perfeita e imperfeita. Os resultados mostram que, para um ruído induzir dessincronização ao sistema, é necessário uma variância maior para ruído no acoplamento do que para ruído aditivo.

No segundo sistema de dois mapas circulares acoplados estudado, a introdução de um ruído branco gaussiano no parâmetro de acoplamento também induz deslizamentos de fase, dessincronizando o sistema. Contudo, a introdução de um ruído branco gaussiano aditivo induz um efeito de segunda ordem, no qual ocorre a dessincronização de fase imperfeita, e permanece a sincronização de fase perfeita no sistema, isto é, o sistema mantém apenas sincronização de fase perfeita na presença de ruído.

O estudo da dinâmica de um *ensemble* de mapas circulares acoplados, em um sistema

complexo abre uma perspectiva a ser explorada no futuro. Este tema tem encontrado aplicações práticas importantes em eletrônica, radioengenharia e sincronização de fase digital em comunicações. Sistemas de mapas circulares acoplados, podem ser usados como um simples modelo paradigmático para investigar processos de sincronização mútua em sistemas de relaxamento acoplados. Neste caso, a variável de fase pode ser interpretada com um início de um novo impulso.

Uma outra perspectiva a ser explorada no futuro, é o desenvolvimento de um método de controle para mapas circulares acoplados, para levar ao regime de sincronização de fase perfeita.

Apêndice A

Comentários Introdutórios sobre Processos Randômicos

Os processos determinísticos possuem como principal característica serem completamente previsíveis: começando de exatamente as mesmas condições iniciais, o processo pode correr várias vezes, e as realizações serão idênticas [37].

Um processo randômico é muito diferente: pode-se executar o processo randômico várias vezes de exatamente as mesmas condições iniciais, e realizações de diferentes fluxos serão diferentes. Além disso, não se pode prever seguramente o resultado de uma simulação randômica, e qualquer predição pode ser somente no sentido probabilístico. Diz-se que um processo randômico é uma função randômica do tempo.

Em vista disso, é necessário uma aproximação matemática especial para caracterizar um processo randômico. A idéia mais geral é calcular a média sobre o conjunto de realizações. Suponha que se possa correr o mesmo processo randômico $X(t)$ com as mesmas condições iniciais tanto tempo quanto se queira: idealmente, infinitamente muitas vezes. Em cada corrida, registra-se esta realização $a_i(t) = 1, 2, \dots$. Um processo randômico $X(t)$ pode ser caracterizado por seus valores médios $\langle X(t) \rangle$ estimado pela média sobre o conjunto dessas realizações $a_i(t)$ como segue:

$$\langle X(t) \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i(t). \quad (\text{A.1})$$

$\langle X(t) \rangle$ pode mudar no tempo. Porém, embora essa aproximação seja conveniente para experimentos, ela não é conveniente para cálculos analíticos. Uma função muito útil que permite executar cálculos analíticos relacionados a processos randômicos é a distribuição de densidade de probabilidade.

A.1 Densidade de probabilidade unidimensional, média e variância

A distribuição de densidade de probabilidade unidimensional é dada por

$$p^X(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{X(t) \in [x, x + \Delta x]\}}{\Delta x}. \quad (\text{A.2})$$

e significa a probabilidade P com que o processo randômico $X(t)$ no momento t toma o valor que cai dentro do intervalo $[x, x + \Delta x]$, normalizados pelo tamanho do intervalo Δx . Se $p^X(x, t)$ é conhecido, não é necessário repetir um procedimento randômico muitas vezes para que se encontre a média, desde que $p^X(x, t)$ já contenha toda informação necessária.

Com a ajuda de $p^X(x, t)$, $\langle X(t) \rangle$ pode ser encontrado como

$$\langle X(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} xp^X(x, t)dx, . \quad (\text{A.3})$$

o qual é uma equivalência da média sobre o conjunto de realizações. No que segue, os brackets angulares $\langle \rangle$ irão denotar a média sobre o conjunto de realizações. Na integral acima, o valor x que o processo $X(t)$ pode tomar, entra com uma ordem, e a média $\langle X(t) \rangle$ é chamada o momento de primeira ordem. Certamente, se $p^X(x, t) = p^X(x)$, isto é, não depende do tempo, $\langle X(t) \rangle$ também não depende do tempo

Uma outra característica do processo randômico, a média quadrada $\langle X^2(t) \rangle$ é dada por

$$\langle X^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p^X(x, t)dx, . \quad (\text{A.4})$$

o qual significa o de valor médio do conjunto do quadrado do processo. Porém, algumas vezes é mais conveniente o uso da variância $\sigma_x^2(t)$

$$\sigma_x^2(t) = \langle X^2(t) \rangle - \langle X(t) \rangle^2. \quad (\text{A.5})$$

Para maiores $p^X(x, t)$, a variância é maior. Isto ocorre devido ao fato de que enquanto a média $\langle X(t) \rangle$ pode ser constante, $\sigma_x^2(t)$ não tem que ser constante.

A.2 Densidade de probabilidade bidimensional, correlação e covariância

A distribuição de densidade de probabilidade unidimensional possui uma quantidade limitada de informações sobre o processo randômico e não descreve se e como os valores dos processos em tempos diferentes são relacionados um com o outro. Para levar em conta este último, pode-se introduzir uma distribuição de densidade de probabilidade bidimensional $p_2^{XX}(x, t, x_\tau, t + \tau)$ do processo randômico $X(t)$ como segue:

$$p_2^{XX}(x, t, x_\tau, t + \tau) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0, \\ \Delta x_\tau \rightarrow 0}} \frac{P\{X(t) \in [x, x, \Delta x] \& X(t + \tau) \in [x_\tau, x_\tau, \Delta x_\tau]\}}{\Delta x \Delta x_\tau}. \quad (\text{A.6})$$

Isto significa a probabilidade com que dois eventos acontecem simultaneamente: no tempo t o processo $X(t)$ toma valores de $[x, x, \Delta x]$, e no momento $t + \tau$ os valores de $[x_\tau, x_\tau, \Delta x_\tau]$. O sobrescrito XX é usado em ordem para significar que dois eventos correspondem ao mesmo processo X .

p_2^{XX} é usado para a caracterização de relações estatísticas entre diferentes valores de processos randômicos em tempos diferentes por meio da função de correlação definida como

$$K[X, X_\tau] = \langle X(t)X(t + \tau) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xx_\tau p_2^{XX}(x, t, x_\tau, t + \tau) dx dx_\tau. \quad (\text{A.7})$$

Quando se calcula $K[X, X_\tau]$, uma média é feita sobre todos os valores que o processo pode tomar, e conseqüentemente o resultado da função $K[X, X_\tau]$ não depende deles, sendo uma função de somente dois argumentos: o tempo corrente t e a distância temporal τ de t . A função de correlação significa o produto da média dos valores dos processos em dois tempos diferentes. É evidente que o maior valor de $K[X, X_\tau]$ ocorre em $\tau = 0$, desde que a maior dependência estatística está entre os valores dos processos no mesmo tempo. O argumento τ define a separação temporal dos valores considerados x e x_τ dos processos randômicos.

Talvez, a função mais conveniente é a covariância $\Psi[X, X_\tau]$ definida como

$$\begin{aligned}
\Psi[X, X_\tau] &= \langle (X(t) - \langle X(t) \rangle) \times (X(t+\tau) - \langle X(t+\tau) \rangle) \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t) - \langle x(t) \rangle) (x(t+\tau) - \langle x(t+\tau) \rangle) \times p_2^{XX}(x, t, x_\tau, t+\tau) dx dx_\tau.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

O valor de $\Psi[X, X_\tau]$ em $\tau = 0$ é de fato a variância $\sigma_x^2(t)$ introduzida acima

$$\sigma_x^2(t) = \Psi[X, X_\tau] |_{\tau=0}. \tag{A.9}$$

O significado de $\Psi[X, X_\tau]$ para alguns processos $X(t)$ é exatamente o mesmo que o significado de $K[\tilde{X}, \tilde{X}(t)]$ para o processo centrado $\tilde{X}(t)$, que é construído através da remoção do valor médio $\langle X(t) \rangle$ do processo $X(t)$, isto é, $\tilde{X}(t) = X(t) - \langle X(t) \rangle$.

A.3 Processo estacionário

Em várias aplicações, há interesse nos processos que são estabilizados depois que todos os transientes desapareceram. Tais processos são chamados como estacionários. Há muitos graus de estacionariedade, mas em aplicações práticas somente um par deles é útil: estacionariedade de primeira ordem e estacionariedade de segunda ordem (este trabalho é focado em estacionariedade de primeira ordem). Se o processo estacionário é de primeira ordem, seu $p^X(x, t)$ não muda no tempo. Isto significa que a média $\langle X \rangle$ e a variância σ_x^2 são constantes, mas não diz nada sobre a relação entre os valores em tempos diferentes.

A densidade espectral de potência espectral ou, simplesmente, o espectro de um processo randômico estacionário, é introduzido através do teorema Winer-Khintchine como a transformada de Fourier da covariância. Conseqüentemente, covariância é uma transformada de Fourier inversa do espectro, a saber

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi[X, X_\tau](\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{A.10}$$

onde ω é a frequência radial. Se a covariância oscila com uma certa escala de tempo, este tempo será visível no espectro $S_X(\omega)$.

A potência total P_X de um processo estacionário $X(t)$ é a integral do espectro sobre todas as frequências, dividido por 2π :

$$P_X = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega. \quad (\text{A.11})$$

A divisão por 2π é feita pela seguinte razão. Em experimentos físicos reais, normalmente se mede o espectro em função da frequência f , em lugar da frequência radial ω . A potência é então calculada como $P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df$. A integração em (A.11) é feita sobre as frequências radiais ω as quais são relacionadas a f como $\omega = 2\pi f$, e o coeficiente 2π é introduzido para concordar com a definição física do poder mostrada acima. No caso de processos randômicos diz-se que o processo $X(t)$ é estacionário de primeira ordem se a distribuição de densidade de probabilidade é idêntica a qualquer instante de $-\infty$ a $+\infty$.

A.4 O processo ruído branco

Quando é necessário considerar um processo randômico, é conveniente a introdução da idéia de um “ruído branco”, que é por definição, aquele que tem a sua potência distribuída uniformemente no espectro de frequência. O nome ruído branco advém da analogia com o espectro eletromagnético na faixa de luz. A luz branca contém todas as frequências do espectro visível, daí o nome adotado.

Matematicamente, o ruído branco $\xi(t)$ é um processo estacionário de primeira ordem com média zero $\langle \xi(t) \rangle = 0$ e variância constante. O ruído branco apresenta espectro constante, e a transformada de Fourier de uma função constante é o delta de Dirac δ definido como

$$\delta(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq 0, \\ \infty, & \omega = 0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1. \quad (\text{A.12})$$

A propriedade desta função é

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a). \quad (\text{A.13})$$

Portanto, segundo o teorema Winer-Khintchine, a covariância de um ruído branco é uma função delta, isto é, $\Psi[\xi, \xi_\tau] = \langle \xi(t) \xi(t+\tau) \rangle = \delta(\tau)$, o qual é ilustrado pela figura A.1

(a). A transformada de Fourier inversa da função delta em conta da propriedade (A.13) é

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{i\omega\tau} \Big|_{\omega=0} = \frac{1}{2\pi}. \quad (\text{A.14})$$

Dessa forma, o espectro de um ruído branco é dado por

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{1}{2\pi}, \quad (\text{A.15})$$

o qual é ilustrado pela figura A.1 (b).

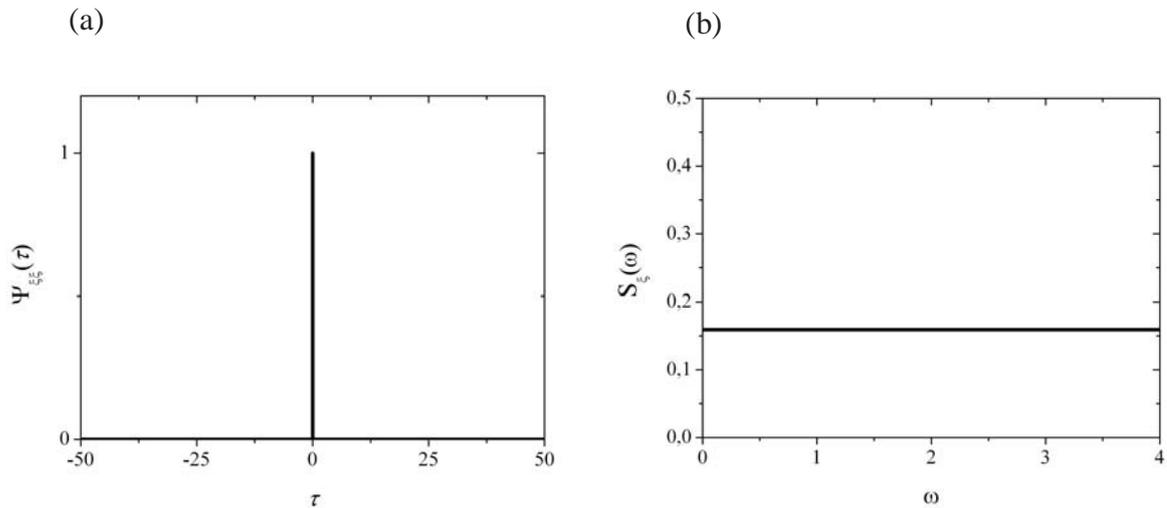


Figura A.1: Em (a) é mostrado esquematicamente a covariância de um ruído branco, dado que a função delta tem valor infinito em $\tau = 0$. Em (b) espectro do processo ruído branco.

O ruído branco é um dos mais importantes encontrados na natureza, e tem a propriedade de ser ruído com distribuição Gaussiana, isto é, a Função Densidade de Probabilidade segue a curva de Gauss, conforme a figura A.2 dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{A.16})$$

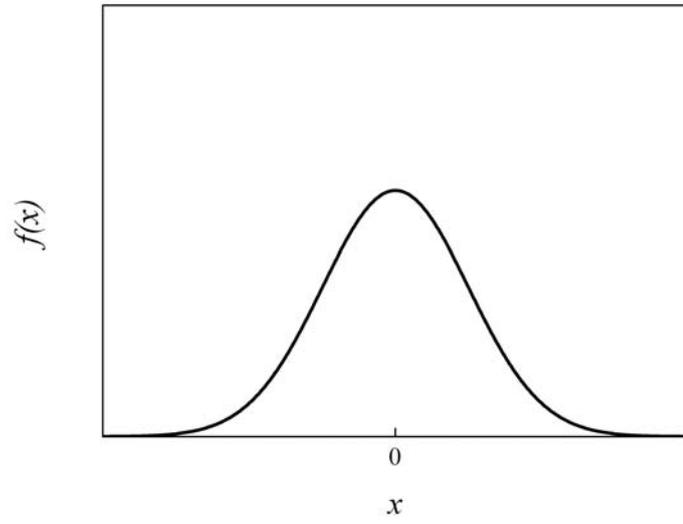


Figura A.2: Função Densidade de Probabilidade seguindo a curva de Gauss.

Apêndice B

Algoritmo para gerar números aleatórios distribuídos de acordo com a distribuição gaussiana

Neste apêndice será descrito um algoritmo [53] para gerar números aleatórios distribuídos de acordo com a distribuição gaussiana a partir de números aleatórios gerados com igual probabilidade no intervalo $[0,1]$. Sejam ς e ζ duas variáveis aleatórias independentes e uniformemente distribuídas no intervalo $[0,1]$ e considere duas variáveis aleatórias r e φ definidas por

$$r = \sqrt{\frac{2}{\alpha} |\ln(1-\varsigma)|} \quad \text{e} \quad \varphi = 2\pi\zeta, \quad (\text{B.1})$$

onde α é uma constante positiva. Elas possuem as seguintes densidades de probabilidades:

$$p_1(r) = \alpha r \exp\left(-\frac{\alpha}{2} r^2\right) \quad (\text{B.2})$$

$$p_2(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (\text{B.3})$$

Respectivamente. Define-se em seguida as variáveis x e y por

$$x = r \sin \varphi \quad \text{e} \quad y = r \cos \varphi, \quad (\text{B.4})$$

A distribuição conjunta de probabilidades $p_c(x,y)$ dessas variáveis é dada por

$$p_c(x, y) dx dy = p_1(r) p_2(\varphi) dr d\varphi. \quad (\text{B.5})$$

Como $dx dy = r dr d\varphi$, obtem-se:

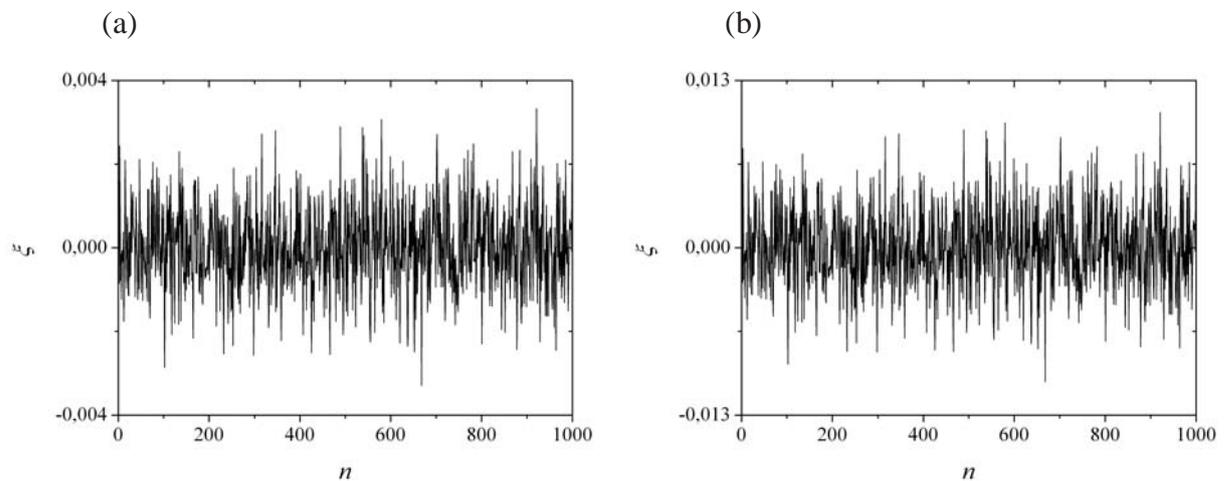
$$p_c(x, y) dx dy = \frac{\alpha}{2\pi} \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}(x^2 + y^2)\right\}. \quad (\text{B.6})$$

e, portanto, $p_c(x, y) = p(x)p(y)$ onde

$$p_c(x) = \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\alpha}{2}x^2\right) \quad (\text{B.7})$$

é a distribuição gaussiana. Note que x e y são variáveis aleatórias independentes. Assim, a partir de dois números aleatórios ς e ζ uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$, pode-se gerar, utilizando as equações (B.1) e (B.4), dois números aleatórios independentes x e y , cada um deles distribuídos de acordo com a distribuição gaussiana (B.7).

A figura B.1 mostra a evolução de um ruído branco gaussiano para diferentes valores de variância. Em B.1 (a) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-6}$. Em B.1 (b) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-5}$. Em B.1 (c) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$. Em B.1 (d) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$. Em B.1 (e) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$. Em B.1 (f) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$. Em B.1 (g) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^1$. Em B.1 (h) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^3$. Conforme a variância aumenta, aumentam os valores do ruído.



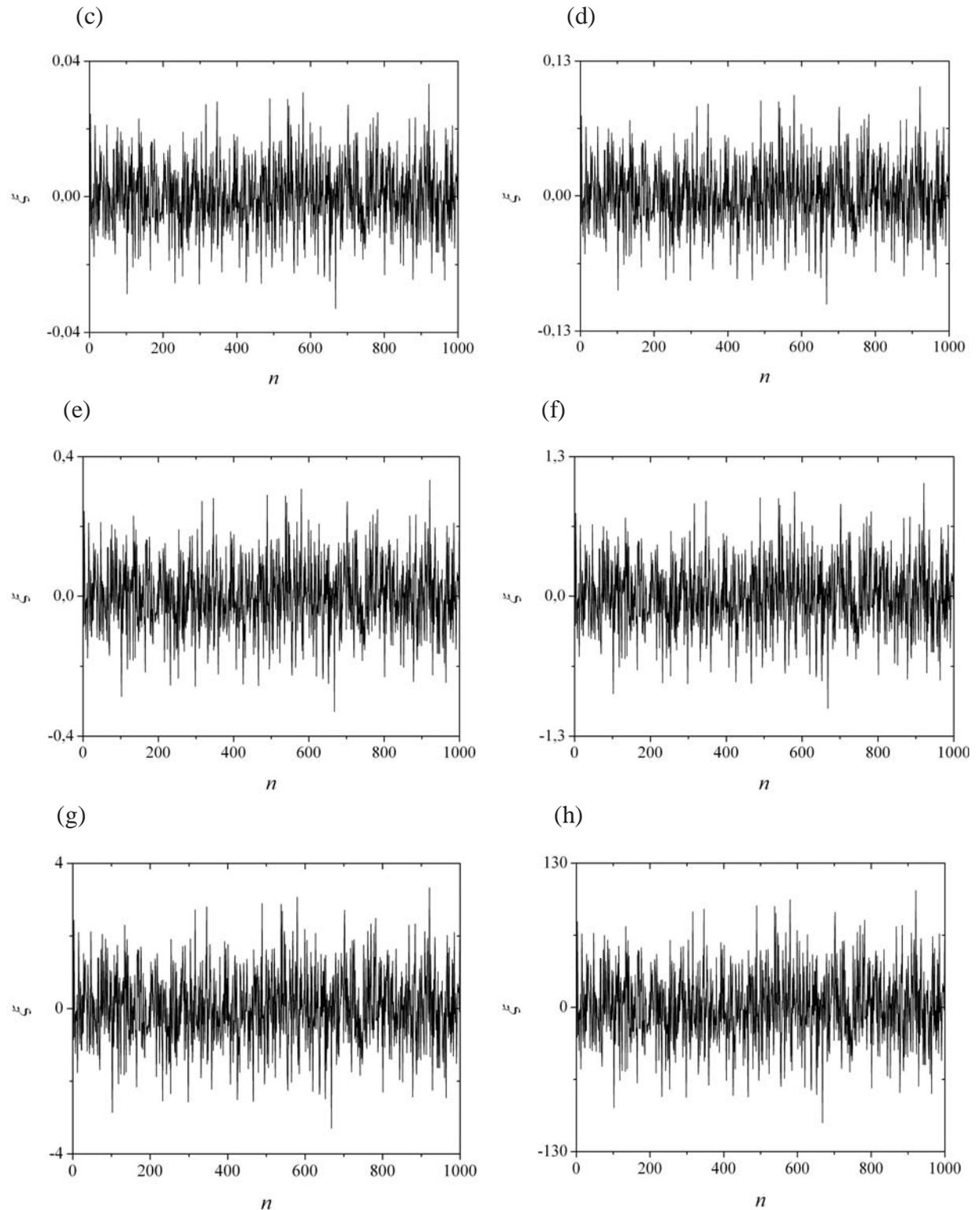


Figura B.1: Evolução de um ruído branco gaussiano para diferentes valores de variância. Em (a) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-6}$. Em (b) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-5}$. Em (c) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-4}$. Em (d) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-3}$. Em (e) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-2}$. Em (f) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^{-1}$. Em (g) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^1$. Em (h) o ruído possui variância $\sigma^2 = 1 \times 10^3$.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Bak; T. Bohr e M. H. Jensen, *Mode-Locking and the Transition to Chaos in Dissipative Systems*, Physica Scripta, T9, 50-58 (1985).
- [2] N. Fiedler-Ferra e C. P. C. do Prado, *Caos: uma Introdução*, Edgard Blücher Ltda, São Paulo (1995).
- [3] R. C. Hilborn, *Chaos and Nonlinear Dynamics: an introduction for scientists and engineers*, Oxford University Press, New York (1994).
- [4] D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna e E. Siggia, *Universal Transition from Quasei-Periodicity to Chaos in Dissipative Systems*, Physical Review Letters 49, 132-35 (1982).
- [5] V. I. Arnold, *Small denominators I: mapping the circumference into itself*, American Mathematical Society Translations, Series 2, 46, 213 (1965).
- [6] M. H. Jensen, L. Kadanoff, A. Libchaber, I. Proccacia e J. Satavans, *Global Universality at the Onset of Chaos: Results of a Forced Rayleigh-Bénard Experiment*, Physical Review Letters 55, 2798-801 (1985).
- [7] J. Stavans, F. Heslot e A. Libchaber, *Fixed Winding Number and the Quasiperiodic Route to Chaos in a Convective Fluid*, Physical Review Letters 55, 596-99 (1985).
- [8] L. Glass, A. Shrier and J. Belair, *Chaotic Cardiac Rhythms*, in *Chaos* (A. V. Holden, ed.) (Princeton, NJ, 1986).
- [9] M. Coutemancho, L. Glass, J. Belari, D. Scagliotti e D. Gordon, *A Circle Map in a Human Heart*, Physica D 40, 299-310 (1989).
- [10] L. Glass, M R. Guevar, J. Belair e A. Shrier, *Global Bifurcations and Chaos in a Periodically Forced Biological Oscillator*, Physical Review B 29, 1348-57 (1984).
- [11] P. Bryant and C. Jeffries, *The Dynamics of Phase Locking and Points or Resonance in a Forced Magnetic Oscillator*, Physica D 25, 196-232 (1987).

- [12] S. Martin and W. Martienssen, *Circle Map and Mode Locking in the Driven Electrical Conductivity of Barium Niobate Crystals*, Physical Review Letters 56, 1522-25 (1986).
- [13] V. I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*, Springer, New York (1983).
- [14] I. I. Blekhman, *Synchronization in Science and Technology*, ASME Press, New York (1988).
- [15] S. H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry and engineering*, Reading: Perseus Books Publishing (1994).
- [16] A.P. Mijolaro, L.F.C. Aberto and N.G. Bretas, *Synchronization of a Class of Second-Order Nonlinear Systems*, International Journal of Bifurcation and Chaos an Applied Sciences and Engineering, v. 18, p. 3461-3471 (2008).
- [17] M. G. Rosenbluem, A. S. Pikovsky e J. Kurths, *Phase Synchronization of Chaotic Oscilatos*, Physical Review Letters 76, 1804 (1996).
- [18] K. J. Lee, Y. Kwak e T. K. Lim, *Phase Jumps near a Phase Synchronization Transition in Systems of Two Coupled Chaotic Oscillators*, Physical Review Letters 81, 321 (1998).
- [19] J. Buck, *Synchronous rhythmic flashing of fireflies*, Quart. Rev. Biol. 63, 265 (1988).
- [20] J. Buck e E. Buck, *Synchronous fireflies*, Scientific Am. 234, 74 (1976).
- [21] C. S. Peskin, *Mathematical Aspects of Heart Physiology*, Courant Institute of Mathematical Science Publication, New York, pp. 268-278 (1975).
- [22] V. Torre, J. *A theory of synchronization of heart pace-maker cells*, Theor. Biol. 61, 55 (1976).
- [23] F. C. Hoppensteadt e E. M. Izhikevich, *Weakly Connected Neural Networks*, Springer-Verlag, New York (1997).
- [24] C. J. DeLuca, A. M. Roy e Z. Erim, *Synchronization of motor unit firings in human muscles*, J. Neurophysiol. 70, 2010 (1993).

- [25] W. Singer e C. M. Gray, *Visual feature integration and the temporal correlation hypothesis*, *Ann. Rev. Neurosci.* 18, 555 (1995).
- [26] A. Sherman, J. Rinzel e J. Keizer, *Emergence of organized bursting in clusters of pancreatic beta-cells by channel sharing*, *Biophys. J.* 54, 411 (1988).
- [27] Y.-H. Liu, Y. Xu e M. Bergerman, *Cooperation control of multiple manipulators with passive joints*, *IEEE Trans. Robot. Autom.* 15, 258 (1999).
- [28] *Phase-Locked Loops and Their Applications*, editado por W. C. Lindsey e M. K. Simon (IEEE Press, New York, 1978)
- [29] L. M. Pecora e T. L. Carroll, *Synchronization in Chaotic Systems*, *Phys. Rev. Lett.* 64, 821 (1990).
- [30] K. Cuomo e A. V. Oppenheim, *Circuit implementation of synchronization chaos with applications to communications*, *Phys. Rev. Lett.* 71, 65 (1993).
- [31] J. Y. Chen, K. W. Wong, L. M. Cheng e J. W. Shuai, *A Secure Communication Scheme Based on Phase Synchronization of Chaotic Systems*, *Chaos*, 13, 508 (2003).
- [32] S. Y. Kung *VLSI array processors*, New Jersey, Prentice-Hall (1988).
- [33] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares e C. S. Zhou, *The synchronization of chaotic systems*, *Physics Reports*, 366, 1-101 (2002).
- [34] G. Osipov, A. Pikovsky e J. Kurths, *Phase Synchronization of Chaotic Rotators*, *Physical Review Letters*, 88, 5 (2002).
- [35] G. V. Osipov, J. Kurths e C. Zhou, *Synchronization in Oscillatory Networks*, Springer-Verlag (2007).
- [36] A. Pikovsky, M. Rosenblum e J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [37] A. Balanov, N. Janson, D. Postnov e O. Sosnovtseva, *Synchronization: From Simple to Complex*, Springer-Verlag (2009).

- [38] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke, *Chaos: an introduction to dynamical systems*, New York, Springer-Verlag (1996).
- [39] G. M. Zaslavsky, *Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics*, Oxford University Press (2005).
- [40] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, *Chaotic Attractors in Crisis*, Physical Review Letters, 48, 22, 1507-1510 (1982).
- [41] E. Ott, *Chaos in dynamical system*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [42] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke, *Crises, Sudden Changes in Chaotic Attractors and Chaotic Transients*, Physica D 7, 181 (1983).
- [43] P. Bad, T. Bohr e M. H. Jensen; *Mode-Locking and the Transition to Chaos in Dissipative Systems*, Physica Scripta, vol. T9, 50-58 (1985).
- [44] H. G. Schuster, *Deterministic Chaos: an introduction*, Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft (1988).
- [45] M. H. Jensen, P. Bak, e T. Bohr, *Transition to Chaos by Interaction of Resonances in Dissipative Systems I, II*, Physical Review A 30, 1960-69 e 1970-81 (1984).
- [46] M. J. Feigenbaum, L. P. Kadanoff e S. J. Shenker, *Quasiperiodicity in Dissipative Systems: A Renormalization Group Analysis*, Physica D 5, 370-86 (1982).
- [47] M. Jensen, P. Bak, T. Bohr, *Complete Devil's Staricase, Fractal Dimension, and Universality of Mode-Locking Structure in the Circle Map*, Physical Review Letters, Vol. 50, No. 21, May (1983).
- [48] J. Kurths e G. Osipov, *Regular and chaotic phase synchronization of coupled circle maps*, Physical Review E, 65, 016216 (2001).
- [49] M. A. Zaks, E.-H. Park, M. G. Rosenblum e J. Kurths, *Alternating Locking Ratios in Imperfect Phase Synchronization*, Physical Review Letters, 82, 21 (1999).
- [50] W. Uhm, S. Kim, *Phase synchronization and crisis in coupled periodically driven chaotic oscillators*, Physics Letters A, 327, 167-173 (2004).

- [51] A. Neiman, A. Silchenko, V. Anishchenko e L. Schimansky-Geier, *Stochastic resonance: noise-enhanced phase coherence*, Physical Review E 58, 7118 (1998).
- [52] J. C. Sommer, E. Ott e C. Grebogi, *Scaling Law for Characteristic Times of Noise-induced Crises*, Phys. Rev. A 43, 1754-69 (1991).
- [53] T. Tomé, M. J. de Oliveira, *Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade*, Edusp, São Paulo (2001).