

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 09/06/2023

Anderson dos Santos Gonzaga

**Simetria e quebra de simetria para problemas do tipo Hénon
envolvendo o operador 1-Laplaciano**

São José do Rio Preto
2021

Anderson dos Santos Gonzaga

**Simetria e quebra de simetria para problemas do tipo Hénon
envolvendo o operador 1-Laplaciano**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira
Pimenta

São José do Rio Preto
2021

G642s Gonzaga, Anderson dos Santos
Simetria e quebra de simetria para problemas do tipo Hénon
envolvendo o operador 1-Laplaciano / Anderson dos Santos Gonzaga.
-- São José do Rio Preto, 2021
72 f.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio
Preto
Orientador: Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta

1. Matemática. 2. Análise matemática. 3. Equação do tipo Hénon. 4.
Quebra de simetria. 5. Operador 1-Laplaciano. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Anderson dos Santos Gonzaga

**Simetria e quebra de simetria para problemas
do tipo Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta
UNESP - Presidente Prudente
Orientador

Prof. Dr. Giovany de Jesus Malcher Figueiredo
UnB - Universidade de Brasília

Prof. Dr. German Jesus Lozada Cruz
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Sérgio Leandro Nascimento Neves
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
UFScar - Universidade Federal de São Carlos

Presidente Prudente

09 de Junho de 2021

Aos meus pais Francisco e Helena e aos meus irmãos
Adriano e Andréia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, Francisco e Helena e Adriano e Andréia, por todo o amor e suporte emocional que me deram nessa extensa caminhada.

Aos meus amigos do Posmac: Élide, Juan, Marcos, Paulo e Rafael, muito obrigado pelo acolhimento em minha retornada a Presidente Prudente.

À PPG-Mat que me proporcionou ter o privilégio de conhecer: Ana Livia, Camila, Carol, Eduardo, Harison, Heloísa, Junior, Laura, Kumon, Otávio, Rodrigo, Samuel, Willian.

Aos meus amigos de república André, Eli e Pedro pelos momentos de descontração em que tive incontáveis horas de conversa.

Ao meu orientador Prof. Dr. Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta pelos ensinamentos, paciência e dedicação.

A todos os professores e funcionários do IBILCE que tive o prazer de conhecer.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior- Brasil (CAPES)- Código de Financiamento 001.

“A persistência é o caminho do êxito.”
Charles Chaplin (1997. p. 118)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos uma classe de equações do tipo Hénon que envolvem o operador 1-Laplaciano na bola unitária. Com algumas condições sobre a não-linearidade, prova-se a existência de soluções radiais e, para um parâmetro em uma determinada faixa, prova-se a existência de quebra de simetria pela presença de soluções não radiais. Nossa abordagem é baseada em um esquema de aproximação onde uma análise completa das soluções dos problemas envolvendo o operador p -Laplaciano associados é necessária.

Palavras-chave: Equação do tipo Hénon. Quebra de simetria. Operador 1-Laplaciano. Espaço de funções de variação limitada.

ABSTRACT

In this work, we study a class of Hénon-type equations which involve the 1-Laplacian operator in the unit ball. With some conditions on the non-linearity, it is proved the existence of radial solutions and, for a parameter in a certain range, it is proved the existence of symmetry breaking through the presence of non-radial solutions. The approach is based on an approximation scheme, where a thorough analysis of the solutions of problems involving the associated p -Laplacian operator is necessary.

Keywords: Hénon-type equation. Symmetry breaking. 1-Laplacian operator. Space of functions of bounded variation.

Lista de Símbolos

$\mathcal{L}^N$	Denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$.
$ \Omega $	Denota a medida de Lebesgue do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\mathcal{H}^{N-1}$	Denota a medida de Hausdorff de dimensão $N - 1$.
$\partial\Omega$	Denota a fronteira do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.
$\Omega' \subset\subset \Omega$	Denota o conjunto $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, com $\overline{\Omega'}$ compacto.
BV	Denota o espaço das funções com variação limitada.
Du	Denota a derivada distribucional de primeira ordem de u em BV .
$ Du $	Denota a variação total da medida de u em BV .
$\Delta_p u$	$\Delta_p u = \operatorname{div}(\nabla u ^{p-2} \nabla u)$.
$\Delta_1 u$	$\Delta_1 u = \operatorname{div}\left(\frac{Du}{ Du }\right)$.
p^*	$p^* = \begin{cases} \frac{pN}{N-p}, & \text{se } p < N \\ +\infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$
p_α^*	$p_\alpha^* = \begin{cases} \frac{p(N+\alpha)}{N-p}, & \text{se } p < N \text{ e } \alpha > 0 \\ +\infty, & \text{se } p \geq N. \end{cases}$
$\operatorname{sign}(v)$	$\operatorname{sign}(v) = \begin{cases} \frac{v}{ v }, & \text{se } v \neq 0 \\ 0, & \text{se } v = 0. \end{cases}$
$[a]$	Parte inteira de $a \in \mathbb{R}^N$.
$p^*(N)$	$p^*(N) = \begin{cases} \frac{(N+2)p}{N-2p+2}, & \text{se } N \text{ é par} \\ \frac{\left(\left[\frac{N}{2}\right]+2\right)p}{\left[\frac{N}{2}\right]-p+2}, & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases}$
p_l	$p_l = \frac{(l+1)p}{l+1-p}, \text{ se } p < l+1.$
q_l	$q_l = \frac{pN + (l-1)(l+1-p)}{l+1}.$
c_α^p	$c_\alpha^p := \inf_{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B \nabla u ^p dx}{\left(\int_B x ^\alpha u ^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$

$$m_{\alpha,l}^p \qquad m_{\alpha,l}^p := \inf_{u \in W_{0,l}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

$$c_\alpha^1 \qquad c_\alpha^1 := \liminf_{p \rightarrow 1^+} c_\alpha^p.$$

$$m_{\alpha,l}^1 \qquad m_{\alpha,l}^p := \limsup_{p \rightarrow 1^+} m_{\alpha,l}^p.$$

Sumário

1	Introdução	11
2	Simetria e imersões do espaço $BV(\Omega)$	17
2.1	Espaço das funções de variação limitada	17
2.2	Teoria de Anzellotti	22
2.3	Simetria e imersões de Sobolev	23
2.4	Resultados de densidade em BV_l	30
3	Problemas do tipo Hénon com o operador 1-Laplaciano	37
3.1	Existência de solução radial para uma equação tipo Hénon envolvendo o operador p -Laplaciano	38
3.2	Solução do problema envolvendo o operador 1-Laplaciano	44
4	Quebra de simetria para a equação de Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano	57
4.1	Resultados de existência	57
4.2	Demonstração do Teorema 4.1	63
	Referências	70

1 Introdução

Diversos autores, no decorrer do últimos anos, têm estudado problemas que envolvem o operador 1-Laplaciano, ou seja:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde o operador Δ_1 é formalmente definido por $\Delta_1 u := \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right)$ com a função f satisfazendo condições adequadas. Entre os primeiros artigos envolvendo o operador que foi citado anteriormente temos os de autoria dos pesquisadores F. Andreu, C. Ballesteler, V. Caselles e JM Mazón, sendo os principais artigos [2, 3, 4]. Esses deram origem à monografia [5]. Esses autores perceberam que o espaço adequado para o estudo envolvendo o problema (1.1) deveria ser o espaço formado pelas funções de variação limitada, espaço esse, denotado por $BV(\Omega)$. Diante do que foi falado, percebemos que ao lidarmos com o operador 1-Laplaciano temos algumas dificuldades, sendo a primeira delas quando tentamos definir o quociente $\frac{Du}{|Du|}$, onde Du é apenas uma medida de Radon. Esta dificuldade é superada através da *Pairing Theory de G. Anzellotti* em [6]. Foi possível, usando essa teoria, determinar precisamente a expressão da equação de Euler-Lagrange associada a problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano. Por exemplo, temos que segundo essa teoria podemos dizer que $u \in BV(\Omega)$ é solução de (1.1), se existe um campo vetorial $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que, $\|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1$ e

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{z}) &= f(x, u) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega), \\ (\mathbf{z}, Du) &= |Du| \text{ como medida,} \\ [\mathbf{z}, \nu] &\in \operatorname{sign}(u) \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

com $(\mathbf{z}, Du)$ e $[\mathbf{z}, \nu]$ sendo definidos na Seção 2.2.

Além do mais, entre os primeiros trabalhos sobre este assunto, citamos o de Kawohl em [27] que apresenta o problema de torção com $f(x, u) = 1$ em (1.1). Em [17], Demengel usou a simetria do domínio para obter soluções nodais para problemas envolvendo o operador 1-Laplaciano e uma não-linearidade com crescimento crítico, o que foi feito tomando o limite de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano.

Em [32], Anna Mercaldo, Sergio Segura de León e Cristina Trombetti estudaram o problema

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto, limitado com fronteira Lipschitz e $N \geq 2$. Os autores procuraram soluções de (1.3), tomando o limite da família de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano. Para isso, eles consideraram a função f em diversos casos, sendo o caso mais geral o que considera $f \in W^{-1,\infty}(\Omega)$, onde $W^{-1,\infty}(\Omega)$ é o dual de $W_0^{1,1}(\Omega)$. Esses mesmos autores estudaram em [31] a existência de soluções para o problema (1.3), novamente tomando o limite de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano, considerando, porém, $f \in L^1(\Omega)$. Chegaram ainda à conclusão de que (1.3) admite solução, desde que $\|f\|_{W^{-1,\infty}(\Omega)} \leq 1$.

Em [30], os autores estudaram o seguinte problema de Neumann para o operador 1-Laplaciano,

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = 0 & \text{em } \Omega \\ \left[\frac{Du}{|Du|}, \nu \right] = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde ν é o vetor normal exterior a fronteira de Ω , com $g \in L^\infty(\partial\Omega)$ tal que $\int_{\partial\Omega} g d\mathcal{H}^{N-1} = 0$. Os autores consideraram uma família de problemas envolvendo o operador p -Laplaciano, mostrando que quando $p \rightarrow 1^+$ as soluções destes convergem para uma função mensurável u . Provaram ainda que as propriedades de u dependem da limitação da função g através de uma norma adequada, ou seja, que se g for pequeno o suficiente então, u é uma função de variação limitada, entretanto se g for grande o suficiente então, u assume o valor infinito em um conjunto de medida positiva.

Em [28], M. Latorre, F. Oliva, F. Petitta, e S. Segura estudaram o problema de Dirichlet para uma equação elíptica envolvendo o operador 1-Laplaciano, a saber:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = h(u)f(x) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.5)$$

onde Ω é um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^N$ com fronteira lipschitziana, $f \in L^1(\Omega)$, $f(x) \geq 0$ para $x \in \Omega$ e h sendo uma função real contínua que pode ser singular em zero. Com o intuito de garantir a existência, a não-existência e a singularidade de soluções não-negativas, os autores procuraram investigar os intervalos ideais para tais hipóteses.

Conforme [35], Molino e Segura estudaram o seguinte problema de Dirichlet para o operador 1-Laplaciano

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um aberto limitado com fronteira lipschitziana e $0 < q < \frac{1}{N-1}$. Visto que existem algumas dificuldades em lidar com o operador 1-Laplaciano, eles encontraram, então, soluções não triviais u_p para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

com $0 < q < p^* - 1$ onde $p^* = \frac{pN}{N-p}$. Essas soluções foram obtidas através do *Teorema do Passo da Montanha* de Ambrosetti e Rabinowitz. Depois, foi possível mostrar que o limite $u = \lim_{p \rightarrow 1} u_p$ é uma solução não-trivial para (1.6).

Figueiredo e Pimenta em [22], foram os primeiros a usarem argumentos de tipo Nehari a fim de obter soluções de variação limitada para o operador 1-Laplaciano, isto é, eles conseguiram provar resultados de existência de minimizantes para funcionais localmente lipschitzianos, sobre um conjunto cuja definição é inspirada na variedade de Nehari. Estes autores definiram o funcional energia do problema, $I : BV(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$I(u) := \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Omega} F(u) dx,$$

onde $I(u)$ é escrito como $I_1(u) - I_2(u)$, com o funcional $I_1(u) = \int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega} |u| d\mathcal{H}^{N-1}$ sendo convexo e localmente lipschitziano e $I_2(u) = \int_{\Omega} F(u) dx$, com $I_2 \in C^1(BV(\Omega))$. Assim, os autores mostraram que o ínfimo do funcional I sobre o conjunto

$$\mathcal{N} = \{u \in BV(\Omega) \setminus \{0\} ; I'_1(u)u = I'_2(u)u\}$$

é alcançado e é um ponto crítico. Consequentemente, obtiveram uma solução não-trivial do tipo ground-state para o problema envolvendo o operador 1-Laplaciano. Podemos, ainda, citar os trabalhos recentes [20, 21] que são dos próprios autores que obtiveram soluções positivas e nodais, respectivamente, para problemas semelhantes.

Em 1973, Hénon propôs em [25], o seguinte problema

$$-\Delta u = |x|^{\alpha} |u|^{q-2} u \text{ em } \mathbb{R}^N, \quad (1.8)$$

para estudar a estabilidade dos aglomerados globulares, que são agrupamentos de estrelas aproximadamente esféricos, em astrofísica. De fato, os anos de 1960 a 1975, os astrofísicos começaram a se dedicar de forma intensiva para conseguirem entender e detectar a existência de buracos negros em aglomerados globulares. É de se destacar que por mais que existam teorias e hipóteses quanto ao que ocorre nessas regiões do espaço, não há qualquer prova concreta que aponte o que de fato acontece dentro de um buraco negro. Na verdade, suspeita-se que as leis universais da física perdem seu valor tanto dentro quanto no horizonte de eventos desses buracos.

Além da aplicação supracitada para a equação de Hénon, podemos citar os artigos [11, 9, 10], onde é estudada a existência de modelos de dinâmica estelar estacionários equivalentes à equação (1.8) para $N = 3$.

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet relativo à equação de Hénon

$$\begin{cases} -\Delta u = |x|^{\alpha} |u|^{q-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.9)$$

Em 1982, Ni em [34] foi capaz de mostrar a existência de uma solução radial do problema (1.9), quando $q \in (2, 2_{\alpha}^*)$, utilizando o Teorema do Passo da Montanha. Foi usado ainda o fato de que o espaço $H_{0,rad}^1(\Omega) := \{u \in H_0^1(\Omega) : u(x) = u(|x|)\}$ está imerso compactamente em $L_{\alpha}^q(\Omega)$, para q no intervalo acima. Ainda nesta linha, conforme [16], Clément, de Figueiredo e Mitidieri estudaram o problema

$$\begin{cases} -Lu = |x|^{\alpha} |u|^{q-2} u & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

onde $Lu = \operatorname{div}(|x|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Por meio de uma redução a um problema unidimensional e usando o Teorema do Passo da Montanha, eles provaram a existência de soluções radiais de (1.10) para $p < q < \frac{p(N+\alpha)}{N-p(a+1)}$, estendendo o resultado de Ni em [34] para este operador mais geral. Observe que p -Laplaciano Δ_p é um caso particular deste operador L .

Motivados por [34], no Capítulo 3, estudaremos a existência de solução radial para o seguinte problema do tipo Hénon envolvendo o operador 1-Laplaciano:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (1.11)$$

em que $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, $\alpha > 0$ e f é uma função localmente Hölder contínua onde $f(s) \geq 0$ se $s > 0$ e que satisfaz:

(f_1) existe $a > 0$ tal que

$$\limsup_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{|s|^a} = 0, \text{ uniformemente em } x \in B,$$

(f_2) existem $C > 0$ e $q \in (0, 1_\alpha^* - 1)$ tal que

$$|f(s)| \leq C(1 + |s|^q), \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$\text{onde } 1_\alpha^* = \frac{N+\alpha}{N-1},$$

(f_3) existe $\kappa > 1$ tal que

$$0 < \kappa F(s) \leq f(s)s,$$

para todo $s > 0$, onde $F(t) = \int_0^t f(s)ds$.

O resultado principal desse capítulo é o seguinte.

Teorema 1.1. *Supondo $N \geq 2$ e que f satisfaz as condições (f_1) – (f_3), então existe uma solução não-negativa $u \in BV_{rad}(B)$ de (1.11).*

O primeiro passo é aplicar as ideias introduzidas em [34] para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |x|^\alpha f(u) & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B, \end{cases} \quad (1.12)$$

encontrando assim uma solução radial $u_p \in W_{0,rad}^{1,p}(B)$ para (1.11), no nível do Passo da Montanha. Depois, usamos alguns argumentos de [35] para mostrarmos que (u_p) converge para u , quando $p \rightarrow 1^+$ onde $u \in BV_{rad}(B)$ satisfaz (1.11). Assim, uma grande dificuldade, é assegurar que as constantes que aparecerão na prova não dependam de p . Outra grande dificuldade que precisamos superar é a verificação de que a função limite u não é trivial. Vale a pena ressaltar que a condição de contorno de Dirichlet não é satisfeita no sentido usual, sendo que uma formulação mais fraca deve ser introduzida.

Na argumentação para a demonstração do Teorema 1.1, foi necessário estabelecermos as imersões de BV_{rad} em $L_\alpha^q(B)$, em analogia ao que se faz em [18] com o $W_{0,rad}^{1,p}(B)$. Tal resultado mostrou-se desafiador e acreditamos que seja interessante por si só. Temos, então, o seguinte resultado para imersão radial que se encontra no Capítulo 2, em que apresentamos definições e resultados fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

Teorema 1.2. *Seja $\alpha > 0$, então a imersão*

$$BV_{rad}(B) \hookrightarrow L^r_\alpha(B)$$

*é contínua para $1 \leq r \leq 1^*_\alpha = \frac{N+\alpha}{N-1}$ e compacta para $1 \leq r < 1^*_\alpha = \frac{N+\alpha}{N-1}$.*

Ao mostramos que o problema (1.11) possui solução radial, surge a questão acerca da existência de uma solução não-radial para tal problema.

Por meio de algoritmos computacionais, Chen, Ni e Zhou, em [15], obtiveram soluções numéricas não-radiais de (1.7) em $\mathbb{R}^2$. Com isso, foi possível sugerir que as soluções de ground-state deste problema, não são radialmente simétricas. Este fato foi confirmado posteriormente quando, em [36], Smets, Su e Willem provaram que para q subcrítico e α suficientemente grande, existem soluções não-radiais com menores níveis de energia quando comparadas com aquela encontrada por Ni.

Em [13], Carrião, de Figueiredo e Miyagaki provaram resultados sobre a existência e multiplicidade de soluções não-radiais para a classe de problemas elípticos quasilineares com termos singulares como no problema (1.10). Em sua argumentação foi essencial a imersão compacta dos espaços de funções com uma certa simetria (esférica ou cilíndrica) em espaços de Lebesgue com peso. Foi muito importante ainda a comparação entre

$$c_\alpha^p := \inf_{u \in W_{0,rad}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^q dx\right)^{\frac{p}{q}}}$$

e

$$m_{\alpha,l}^p := \inf_{u \in W_{0,l}^{1,p}(B) - \{0\}} \frac{\int_B |\nabla u|^p dx}{\left(\int_B |x|^\alpha |u|^p dx\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

Com efeito, eles mostraram que, para α suficientemente grande, $m_{\alpha,l}^p < c_\alpha^p$, o que implica na existência de soluções não-radiais.

No Capítulo 4, abordamos a questão de estender os resultados de [13] ao operador 1-Laplaciano. Estudamos, mais especificamente, o problema:

$$\begin{cases} -\Delta_1 u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (1.13)$$

Antes de mencionar o resultado principal deste capítulo, devemos definir

$$p^*(N) := \begin{cases} \frac{(N+2)p}{N-2p+2} & \text{se } N \text{ é par;} \\ \left(\left[\frac{N}{2}\right] + 2\right)p & \text{se } N \text{ é ímpar,} \\ \left[\frac{N}{2}\right] - p + 2 & \end{cases}$$

onde $[a]$ denota a parte inteira $a \in \mathbb{R}$ e $p \geq 1$.

O resultado principal é o seguinte.

Teorema 1.3. *Suponha $N \geq 4$ e $q \in (1, 1^*(N))$, então existe $\alpha_0 > 0$ tal que, o problema (1.13) tem uma solução de variação limitada não-trivial e não-radial, para $\alpha > \alpha_0$.*

Para a prova desse resultado, tal como na do Teorema 1.2, é necessário estudar resultados de imersão no espaço $BV_l(B)$ em $L_\alpha^r(B)$, onde

$$BV_l(B) = \{u \in BV(B) : u(y, z) = u(|y|, |z|), \forall x = (y, z) \in B\},$$

onde $2 \leq N - l \leq l$ e $p \geq 1$. Mais especificamente, provamos o resultado.

Teorema 1.4. *Sejam l, N, p_l, q_l e α como no Teorema 2.31, então a imersão $BV_l(B) \hookrightarrow L_\alpha^q(B)$ é contínua se $1 \leq q \leq 1_l$ e compacta se $1 \leq q < 1_l$.*

Acreditamos que tal resultado, o que também é inédito, também tenha interesse por si só e que possa ainda ser visto como uma extensão de [18][Corolário 1.5].

A argumentação para a demonstração do Teorema 1.3 se baseia em um análise cuidadosa dos minimizantes de c_α^p e $m_{\alpha,l}^p$, os quais são atingidos por funções que, depois de reescalados, são soluções de

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |x|^\alpha |u|^{q-2} u & \text{em } B \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B. \end{cases} \quad (1.14)$$

Além disso é necessário garantir que, quando $p \rightarrow 1^+$, os limites de c_α^p e $m_{\alpha,l}^p$, não se colapsem. Por fim, vale mencionar que foi necessário desenvolver novos argumentos que nos permitissem demonstrar que as soluções do problema (1.14), de fato constituíam uma família limitada em $BV_l(B)$. Tal dificuldade surgiu da natureza de tais soluções, as quais não têm caracterização minimax como em [35] e tampouco eram minimizantes sobre um conjunto do tipo Nehari, como em [20].

Referências

- [1] AMBROSIO L.; FUSCO N.; PALLARA D. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*, Oxford University Press., Oxford (2000).
- [2] ANDREU F.; BALLESTER C.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *The Dirichlet problem for the total variation flow*, J. Functional Anal., 180, No. 2, 347 - 403 (2001).
- [3] ANDREU F.; BALLESTER C.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *Minimizing total variation flow*, C. R. Acad. Sci., Paria, Sr. I, Math., 331, No. 11, 867 - 872 (2000).
- [4] ANDREU F.; BALLESTER C.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *Minimizing total variation flow*, Differential Integral Equations, 14, No. 3, 321 - 360 (2001).
- [5] ANDREU F.; CASELLES V.; MAZÓN J.M. *Parabolic quasilinear equations minimizing linear growth functionals*, Progress in mathematics, 233. Birkhäuser Verlag, Basel (2004).
- [6] ANZELLOTTI G. *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness*, Ann. Mat. Pura Appl., No. 135, 293 - 318 (1983).
- [7] ATTOUCH H.; BUTTAZZO G.; MICHAÏLE G. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces: applications to PDEs and optimization*, MPS-SIAM, Philadelphia (2006).
- [8] BADIALE M.; SERRA E. *Multiplicity results for the supercritical Hénon equation*, Adv. Nonlinear Stud, No. 4, 453 - 467 (2004).
- [9] BATT J. *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics*, J. Differential Equations, 25, No. 3, 342 - 364 (1977).
- [10] BATT J.; LI Y. *The positive solutions of the Matukuma equation and the problem of finite radius and finite mass*, Arch. Ration. Mech. Anal., 198, No. 2, 613 - 675 (2010).
- [11] BATT J.; FALTENBACHER W.; HORST E. *Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., 93, No. 2, 159 - 183 (1986).
- [12] BREZIS H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, (2010).
- [13] CARRIÃO P.; DE FIGUEIREDO D.; MIYAGAKI O. *Quasilinear elliptic equations of the henon-type: Existence of non-radial solutions*, Comm. Contemp. Math. 11, No. 5, 783-798 (2009).

-
- [14] CHEN G.; FRID H. *Divergence-measure fields and hyperbolic conservation laws*, Arch. Ration. Mech. Anal., 147, No. 2, 89 - 118 (1999).
 - [15] CHEN G.; NI W.M.; ZHOU J. *Algorithms and visualization for solutions of nonlinear elliptic equations*, Internat. J. Bifur. Chaos Appli. Sci. Engng., 10, 1565 - 1612 (2000).
 - [16] CLÉMENT P.; DE FIGUEIREDO.; MITIDIERI E. *Quasilinear elliptic equations with critical exponents*, Topol. Methods Nonlinear Anal., 187, 531 - 545. (1996).
 - [17] DEMENGEL F. *On some nonlinear partial differential equations involving the 1-Laplacian and critical Sobolev exponent*, ESAIM, Control Optim. Calc. Var., 4, 667 - 686 (1999).
 - [18] DE FIGUEIREDO D.; DOS SANTOS E.M.; MIYAGAKI O. *Sobolev spaces of symmetric functions and applications*, J. Funct. Anal., 261, 3735- 3770 (2011).
 - [19] FIGUEIREDO G. M. *Uma introdução à teoria dos pontos críticos*, Notas de aula na UNB, (2016).
 - [20] FIGUEIREDO G.M; PIMENTA M. T. O. *Nodal solutions to quasilinear elliptic problems involving the 1-laplacian operator via variational and approximation methods*, aceito em Indiana Univ. Math. J. (2021).
 - [21] FIGUEIREDO G.M; PIMENTA M. T. O. *Sub-supersolution method for a quasilinear elliptic problem involving the 1-laplacian operator and a gradient term*, J. Funct. Anal., 278, 108325 (2020).
 - [22] FIGUEIREDO G.M; PIMENTA M. T. O. *Nehari method for locally lipschitz functionals with examples in problems in the space of bounded variation functions*, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 25, No. 5, 1-18 (2018).
 - [23] FOLLAND G.B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, John Wiley and Sons, (1999).
 - [24] GIUSTI. E. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Mathematics, 80, Birkhäuser Verlag, Basel, (1984).
 - [25] HÉNON M. *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems*, Astronom. Astrophys., 24, 229 - 238 (1973).
 - [26] KAVIAN O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, 4 , (1991).
 - [27] KAWOHL B. *On a family of torsional creep problems*, J. Reine Angew. Math, 410, 1 - 22 (1990).
 - [28] LATORRE M.; OLIVA F.; PETITTA.; SEGURA S. *The Dirichlet problem for the 1-Laplacian with a general singular term and L^1 -data*, Nonlinearity, 34, No. 3, 1791-1816 (2021).
 - [29] LITTIG S.; SCHURICHT F. *Convergence of the eigenvalues of the p -Laplace operator as p goes to 1*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 49, 707 - 727 (2014).

-
- [30] MERCALDO A.; ROSSI J.D.; SEGURA S.; TROMBETTI C. *Behaviour of p -Laplacian problems with Neumann boundary conditions when p goes to 1*, Communications on Pure and Applied Analysis., 12, No. 1, 253–267 (2013).
 - [31] MERCALDO A.; SEGURA S.; TROMBETTI C. *On the solutions to 1-Laplacian equation with L^1 data*, Journal of Functional Analysis, 256, No 8, 2387- 2416, (2009).
 - [32] MERCALDO A.; SEGURA S.; TROMBETTI C. *On the behaviour of the solutions to p -Laplacian equations as p goes to 1*, Publ. Mat., 52, No 2, 377- 411, (2008).
 - [33] MIRANDA M. *Dirichlet problem with L^1 data for the non-homogeneous minimal surface equation*, Indiana Univ. Math., J., 24, 227 - 241 (1974/75).
 - [34] NI W.M. *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications*, Indiana Univ. Math. J., 31, No. 6, 801-807 (1982).
 - [35] SEGURA S.; MOLINO A. *Elliptic equations involving the 1-Laplacian and a subcritical source term*, Nonlinear Anal., 168, 50 - 66 (2018).
 - [36] SMETS D.; SU J.; WILLEN M. *Non-radial ground states for the Hénon equation*, Commun. Contemp. Math., 4, 703 - 725 (2005).