

Mateus de Andrade Zanitti

Modelagem por Elementos Finitos de Vigas Flexíveis Girantes

Ilha Solteira

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JULIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA

Mateus de Andrade Zanitti

Modelagem por Elementos Finitos de Vigas Flexíveis Girantes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu

Ilha Solteira

2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Z31m Zanitti, Mateus de Andrade.
Modelagem por elementos finitos de vigas flexíveis girantes / Mateus de
Andrade Zanitti. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2018
91 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2018

Orientador: Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu
Inclui bibliografia

1. Vigas flexíveis girantes. 2. Método de elementos finitos. 3. Modos de
vibrar.

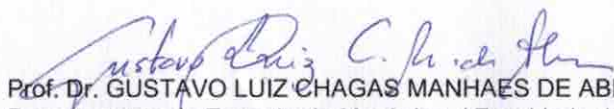
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

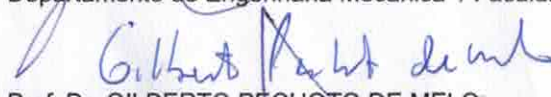
TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Modelagem por Elementos Finitos de Vigas Flexíveis Girantes

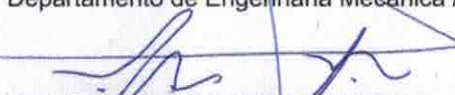
AUTOR: MATEUS DE ANDRADE ZANITTI

ORIENTADOR: GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em ENGENHARIA MECÂNICA, área: MECANICA DOS SÓLIDOS pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHAES DE ABREU
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. GILBERTO PECHOTO DE MELO
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. THIAGO GALBIATI LAGOIM
Departamento de Engenharia de produção / Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Ilha Solteira, 28 de junho de 2018

Dedico este trabalho à minha namorada Gabriela por todo apoio e carinho dado durante todo esse tempo. À minha família que sempre me deu o suporte necessário para que eu completasse essa jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por caminhar sempre ao meu lado, dando-me sabedoria e conhecimento para que eu pudesse vencer mais esta etapa de minha vida.

Ao professor Gustavo Luiz Chagas Manhães de Abreu, um agradecimento especial. Pela sua disposição, presença e paciência em todos os momentos para que esse trabalho se tornasse possível.

À minha querida namorada Gabriela, que suportou esses dois anos de trabalho árduo e sacrifícios pessoais. Por toda paciência e palavras de ânimo dadas nos momentos certos.

À minha mãe Roseli e meu pai João, por todo suporte que ambos me deram durante todo o período em que me dediquei a materializar esse trabalho. Aos meus irmãos pelas muitas conversas de apoio.

Ao meu amigo Renan que compartilhou comigo muitos momentos que apenas um aluno de mestrado pode passar. Aos amigos Rafael e José Ignácio por toda ajuda dada. Aos queridos amigos das repúblicas "Kaiaki", "PKF" e "REP-REP", além dos amigos de longa data do alojamento, pelos ótimos momentos que passamos juntos.

Ao pessoal de minha igreja que me deu todo apoio espiritual e carinho durante não apenas o período de mestrado, como também todo o período de graduação. Certamente criei uma linda família na cidade de Ilha Solteira.

À Universidade Estadual Paulista (UNESP) que, juntamente com a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) possibilitaram a execução deste trabalho com dedicação exclusiva.

*"Você nunca é velho demais para determinar um novo objetivo na vida
ou para sonhar um sonho novo."*

— C. S. LEWIS

RESUMO

Este trabalho trata do desenvolvimento, análise e validação das equações do movimento de vigas flexíveis girantes formulada pelo método dos Elementos Finitos. A modelagem da viga é feita através do modelo proposto de viga de Euler-Bernoulli e a deformação é representada pelo tensor de deformação de Green-Lagrange. As equações globais para os modos longitudinal, *lag* e *flap* são obtidas pelo método de energia de Lagrange e a discretização é feita pelo método dos Elementos Finitos. São propostos modelos de viga elementar com dois e três graus de liberdade por nó e sua validação é feita, num primeiro momento, pela comparação das frequências naturais e posteriormente pela resposta, em regime transiente, dos deslocamentos da viga, através da comparação dos resultados obtidos com os dados disponíveis na literatura, sendo que a influência do acoplamento entre os modos longitudinal e *lag* é investigada para a dinâmica em regime transiente. O trabalho termina comentando as potencialidades da proposta apresentada, discutindo as facilidades e dificuldades encontradas na sua implementação e apontamentos para o desenvolvimento de trabalhos futuros.

Palavras-chave: Vigas flexíveis girantes. Método de elementos finitos. Modos de vibrar.

ABSTRACT

This work deals with the development, analysis and validation of the motion equations of the flexible rotating beams formulated by the Finite Element method. The beam modeling is done through the proposed Euler-Bernoulli beam model and the deformation is represented by the Green-Lagrange deformation tensor. The global equations for the longitudinal, lag and flap modes are obtained by the Lagrange energy method and the discretization is done by the Finite Element method. A discrete beam model with two and three degrees of freedom per node is proposed and its validation is done, firstly, by comparing the natural frequencies and later by the transient response of the beam displacements, by comparing the results obtained with the data available in the literature, and the influence of the coupling between the longitudinal and lag modes is investigated for the transient dynamics. This work is concluded presenting the potentialities of the design methodology proposed and future developments to be implemented.

Keywords: Flexible rotating beams. Finite element method. Modes of vibration.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Acidente ocorrido na cidade de Maricá-RJ.	18
Figura 2 -	Acidente ocorrido na cidade de Belém-PA.	19
Figura 3 -	Viga flexível girante sob o efeito do <i>lag</i> e <i>flap</i>	25
Figura 4 -	Sistemas móveis descrevendo o <i>lag</i>	26
Figura 5 -	Sistemas móveis descrevendo o <i>flap</i>	27
Figura 6 -	Desenho esquemático de um elemento finito de viga 4 GDL.	42
Figura 7 -	Desenho esquemático de uma viga 4 GDL discretizada em três elementos.	48
Figura 8 -	Desenho esquemático de uma viga 4 GDL discretizada em três elementos na condição engastada-livre.	49
Figura 9 -	Desenho esquemático de um elemento finito de viga 6 GDL.	50
Figura 10 -	Desenho esquemático de uma viga 6 GDL discretizada em três elementos.	54
Figura 11 -	Desenho esquemático de uma viga 6 GDL discretizada em três elementos na condição engastada-livre.	56
Figura 12 -	Perfil da velocidade e da aceleração angular ao longo do tempo, para $T_s=15s$ e $\omega_s=4$ rad/s.	64
Figura 13 -	Teste de convergência para os modelos com 4 GDL e 6 GDL, utilizando $\omega_s=4$ rad/s.	65
Figura 14 -	Teste de convergência para os modelos com 4 GDL e 6 GDL, utilizando $\omega_s=12$ rad/s.	66
Figura 15 -	Validação dos modelos propostos para o caso 3.	68
Figura 16 -	Validação dos modelos propostos para o caso 4.	70
Figura 17 -	Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=12$ rad/s.	71
Figura 18 -	Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=20$ rad/s.	72

Figura 19 - Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=30$ rad/s.	72
Figura 20 - Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=50$ rad/s.	73

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga utilizados para o teste de convergência.	59
Tabela 2 -	Convergência do método dos <i>Elementos Finitos</i> com 4 GDL. . .	59
Tabela 3 -	Convergência do método dos <i>Elementos Finitos</i> com 6 GDL. . .	59
Tabela 4 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 1. . .	60
Tabela 5 -	Comparação entre as três primeiras frequências naturais [rad/s] para os modos de <i>lag</i> e <i>flap</i> com 4 GDL.	60
Tabela 6 -	Comparação entre as três primeiras frequências naturais [rad/s], para os modos de <i>lag</i> , <i>flap</i> e <i>axial</i> com 6 GDL.	60
Tabela 7 -	Parâmetros físicos e geométricos para o caso 2.	61
Tabela 8 -	Comparação entre as frequências naturais normalizadas para o modo <i>flap</i>	62
Tabela 9 -	Comparação entre as frequências naturais normalizadas para o modo <i>lag</i>	63
Tabela 10 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o teste de convergência.	65
Tabela 11 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 3. . .	67
Tabela 12 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 4, sendo $\omega_s=4$ rad/s.	69
Tabela 13 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 4, sendo $\omega_s=1$ rad/s, $\omega_s=2$ rad/s e $\omega_s=5$ rad/s.	69
Tabela 14 -	Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o teste de convergência.	71

LISTA DE SÍMBOLOS

A	- Área.
A'	- Ponto de origem da viga.
A_i	- Termo de discretização da força centrífuga.
b	- Largura da viga.
B	- Ponto qualquer da viga.
B'	- Deformação da viga a partir do ponto B na base B_2 .
B''	- Deformação da viga a partir do ponto B na base B_3 .
B_1	- Base móvel do sistema dinâmico.
B_2	- Base móvel do sistema dinâmico.
B_3	- Base móvel do sistema dinâmico.
e	- Raio do rotor.
E	- Modulo de elasticidade longitudinal.
F_u	- Vetor de força rotacional.
F_v	- Vetor de força tangencial.
G_{uv}	- Matriz giroscópica axial- <i>lag</i> .
G_{vu}	- Matriz giroscópica <i>lag</i> -axial.
h	- Altura da viga.
$H(x, t)$	- Deslocamentos nodais.
I	- Momento de inércia de área.
K	- Matriz de rigidez estrutural para o modo longitudinal.
K_g	- Matriz de rigidez geométrica para o modo <i>lag</i> .
l	- Comprimento do elemento.
L	- Comprimento da viga.
M	- Matriz de massa do modo longitudinal.
O	- Ponto de origem do sistema inercial.
q	- Coordenada generalizada de deslocamento.
\dot{q}	- Coordenada generalizada de velocidade.
\ddot{q}	- Coordenada generalizada de aceleração.
Q	- Forças generalizadas.
Q_m	- Momento estático de área em relação a linha neutra.
R_{OB}	- Vetor deslocamento do ponto B.

S	-	Sistemas que descrevem o movimento.
t	-	Tempo total da simulação.
T	-	Energia cinética.
T_β	-	Matriz Transposta entre as bases B_1 e B_3 .
T_ξ	-	Matriz Transposta entre as bases B_1 e B_2 .
T_{axial}	-	Força axial.
T_s	-	Tempo de partida.
$u(x)$	-	Deslocamento na direção X.
u_B	-	Deslocamento do ponto B na direção X.
\ddot{u}	-	Aceleração da coordenada u .
U	-	Energia potencial.
$v(x)$	-	Deslocamento na direção Y.
V	-	Energia potencial.
V_{OB}	-	Vetor velocidade do ponto B.
$w(x)$	-	Deslocamento na direção Z.
w_B	-	Deslocamento do ponto B na direção Z.
W	-	Trabalho.
x	-	Coordenada na direção X.
x_i	-	Distância do eixo de rotação ao elemento discretizado.
X	-	Coordenada cartesiana.
y	-	Coordenada na direção Y.
y_B	-	Deslocamento do ponto B na direção Y.
Y	-	Coordenada cartesiana.
z	-	Coordenada na direção Z.
Z	-	Coordenada cartesiana.

LETRAS GREGAS

β	-	Ângulo formado entre as bases B_1 e B_3 .
∂	-	Derivada parcial.
ε	-	Tensor de deformação.
ξ	-	Ângulo formado entre as bases B_1 e B_2 .
ρ	-	Densidade da viga.
σ	-	Tensor de tensão.
ϕ	-	Deslocamento angular da coordenada Z.
$\dot{\phi}$	-	Velocidade angular da coordenada Z.
$\ddot{\phi}$	-	Aceleração angular da coordenada Z.
Ψ	-	Funções de forma.
ω	-	Frequência natural relativo ao modos de vibrar.
ω_n	-	Frequência natural não amortecida.
ω_s	-	Velocidade angular do final do regime transiente.
Ω	-	Velocidade angular da coordenada Z.
Ω_N	-	Velocidade angular normalizada.

LISTA DE SIGLAS

GDL	-	Graus de liberdade.
-------	---	---------------------

LISTA DE SUBSCRITOS

i	-	Relativo a linha de uma matriz.
j	-	Relativo a coluna de uma matriz.
u	-	Relativo ao modo longitudinal.
v	-	Relativo ao modo <i>lag</i> .
w	-	Relativo ao modo <i>flap</i> .

SUMÁRIO

		Página
1	MOTIVAÇÃO	18
2	INTRODUÇÃO	20
2.1	OBJETIVOS	23
3	ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA	24
3.1	CONSIDERAÇÕES E HIPÓTESES INICIAIS	24
3.2	SISTEMAS DE REFERÊNCIA	24
3.3	MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO	25
3.4	VETOR POSIÇÃO	27
3.4.1	Lag	27
3.4.2	Flap	27
3.4.3	Vetor posição total	28
3.5	VETOR VELOCIDADE	28
3.6	EQUAÇÕES DE LAGRANGE	29
3.7	ENERGIA CINÉTICA	30
3.8	ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO	30
3.8.1	Relação deslocamento-deformação para vigas de Euler-Bernoulli .	32
3.8.2	Modelo constitutivo do material	32
3.9	APROXIMAÇÃO PELA RIGIDEZ CENTRÍFUGA	34
3.10	METODOLOGIA DE DISCRETIZAÇÃO	35
3.11	EQUAÇÕES DO MOVIMENTO	36

3.12	FREQUÊNCIAS NATURAIS	41
4	IMPLEMENTAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	42
4.1	QUATRO GRAUS DE LIBERDADE POR ELEMENTO	42
4.1.1	Propriedades do Elemento	42
4.1.2	Matriz de massa	44
4.1.3	Matriz de rigidez	45
4.1.4	Construção das matrizes globais	47
4.2	SEIS GRAUS DE LIBERDADE POR ELEMENTO	49
4.2.1	Propriedades do Elemento	49
4.2.2	Matriz de massa	51
4.2.3	Matriz de rigidez	52
4.2.4	Matriz giroscópica	53
4.2.5	Forças rotacional e tangencial	53
4.2.6	Construção das matrizes globais	54
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	58
5.1	VALIDAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS	58
5.1.1	Teste de convergência	58
5.1.2	Caso 1	60
5.1.3	Caso 2	61
5.2	VALIDAÇÃO EM REGIME TRANSIENTE	63
5.2.1	Teste de convergência	65
5.2.2	Caso 3	66
5.2.3	Caso 4	68
5.2.4	Influência da matriz Giroscópica	70

6	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	74
	REFERÊNCIAS	76
	Apêndice A – CÓDIGO COMPUTACIONAL MATLAB	80
A.1	FREQUÊNCIAS NATURAIS-4 GDL	80
A.1.1	Programa Principal	80
A.1.2	Matrizes Elementares	81
A.2	FREQUÊNCIAS NATURAIS-6 GDL	82
A.2.1	Programa Principal	82
A.2.2	Matrizes Elementares	84
A.3	TRANSIENTE-4 GDL	85
A.3.1	Programa Principal	85
A.3.2	Integrador	86
A.3.3	Matrizes Elementares	88
A.4	TRANSIENTE-6 GDL	88
A.4.1	Programa Principal	88
A.4.2	Integrador	89
A.4.3	Matrizes Elementares	91

1 MOTIVAÇÃO

No dia 11 de janeiro de 2011, em Maricá-RJ, ocorreu um acidente de helicóptero que deixou duas pessoas feridas em estado grave. Segundo dados da reportagem (REDE GLOBO, 2011), a aeronave estava em processo de decolagem quando entrou em ressonância e começou a se “desmontar sozinha”.

Figura 1- Acidente ocorrido na cidade de Maricá-RJ.



Fonte: REDE GLOBO (2011).

Outro acidente envolvendo o fenômeno de ressonância aconteceu com um helicóptero do corpo de bombeiros do Pará, no dia 22 de fevereiro de 2012. Segundo o piloto, após alguns minutos da decolagem, houve a necessidade de fazer um pouso forçado em um terreno irregular, o que ocasionou a ressonância do helicóptero, causando a quebra da cabine e da cauda, deixando quatro pessoas com feridas leves (REDE GLOBO, 2012).

Em ambos os acidentes, o que aconteceu foi um fenômeno conhecido como ressonância de solo (*Ground Resonance*). Segundo Gunston (2009), tal ressonância pode ser explicada como uma perigosa vibração natural de um helicóptero em solo causada pela rigidez e frequência do trem de pouso, amplificando a frequência primária do rotor principal, sendo potencialmente catastrófica. Nem mesmo helicópteros certificados estão livres do fenômeno, pois este pode acontecer como resultado de um choque severo durante o pouso.

Figura 2- Acidente ocorrido na cidade de Belém-PA.



Fonte: REDE GLOBO (2012).

Sabe-se que a comunidade científica vem gerando muito conhecimento sobre o assunto, porém em âmbito nacional há poucos trabalhos relacionados. *Ground Resonance* é um fenômeno com um alto grau de complexidade, sendo necessário o aprofundamento em determinados pontos vistos como fundamentais para o estudo do caso. Este trabalho pretende modelar a hélice de um helicóptero como uma viga flexível, obtendo as equações principais que regem seu movimento. A análise dos resultados será feita comparando-se as frequências naturais obtidas para os principais modos de vibrar, e a resposta em regime transiente dos deslocamentos da viga, com dados disponíveis na literatura.

2 INTRODUÇÃO

Dentre os sistemas rotativos essenciais para a indústria, destacam-se as hélices de helicóptero, as turbinas eólicas, as turbomáquinas, as turbinas a vapor e os compressores axiais e radiais. Todas estas máquinas têm em comum as pás, hélices ou palhetas que giram em torno de um eixo e são sistemas que operam geralmente em altas rotações, por isso, permitem margens muito baixas para erros de projeto. Assim se faz necessária a otimização e o aperfeiçoamento constante dos projetos, uma vez que problemas relacionados a vibrações podem resultar em uma diminuição da vida útil do equipamento, ou até mesmo em catástrofes.

Nas décadas de 30 e 40, Leishman (2000) e Johnson (2011) apresentaram aeronaves que tiveram seus projetos cancelados devido às altas vibrações durante seu funcionamento. Os primeiros trabalhos foram ampliados por Coleman (1943) e Coleman e Feingold (1947), quando foram desenvolvidas modelagens matemáticas para observar o comportamento das hélices na auto excitação da fuselagem. Todavia, a hélice era considerada um elemento rígido. Essa consideração possui confiabilidade quando as pás são de pequenas dimensões como, por exemplo, em turbomáquinas de pequeno porte. Contudo, as hélices de helicóptero ou as pás de uma turbina eólica, devido aos grandes comprimentos deslocamentos, devem ser tratadas como elementos flexíveis, sendo necessário utilizar modelagens que considerem as parcelas não lineares. Tais trabalhos foram realizados considerando as hélices como vigas.

Segundo Anderson (1975), a rotação de uma viga causa uma alteração em seu comportamento dinâmico, conhecido como Enrijecimento Centrífugo. Esse efeito causa um aumento das frequências naturais com o aumento da rotação. O autor incluiu termos não lineares ao apresentar as equações do movimento de uma viga delgada girante. Segundo este mesmo autor, levar em consideração a linearidade entre deformação e deslocamento não fornece uma modelagem correta, uma vez que as frequências naturais diminuirão com o aumento da velocidade de rotação.

Simo e Vu-Quoc (1987) estudaram o comportamento dinâmico transiente de estruturas flexíveis rotativas com grandes deslocamentos. Sua análise foi feita apenas no plano de rotação e se concentra na comparação entre os modelos de deformação linear e não linear, utilizando tensores do tipo Von Kármán. O autor utiliza uma aproximação centrífuga

para a rigidez. Tal aproximação é uma forma de linearizar um comportamento não linear do sistema, visto que o aumento da rotação da estrutura contribui para o enrijecimento da mesma.

Yokoyama (1988) comparou a modelagem de vigas de Euler-Bernoulli com a de Timoshenko, levando em consideração os efeitos de cisalhamento e de inércia rotacional, e suas influências nas frequências naturais transversais fora do plano de vibração e no plano de vibração. As equações foram obtidas pelo princípio de Hamilton e a implementação é feita pelo método dos Elementos Finitos, com um elemento de viga com 2 graus de liberdade por nó. O autor notou a diferença nas frequências naturais quando se levava em consideração a utilização ou não de um rotor. O mesmo também concluiu que a influência da força cisalhante e da inércia de rotação é maior conforme os modos de vibrar aumentam. Cabe ressaltar que o modo de vibrar no plano de rotação recebe o nome de modo *lag* e o modo fora do plano de rotação recebe o nome de modo *flap*.

Em seu trabalho, Hsieh e Abel (1995) estudaram os efeitos de massas pontuais e distribuídas nas frequências naturais do sistema em regime transiente. A modelagem foi realizada através da mecânica Lagrangiana e a implementação pelo método dos Elementos Finitos com um elemento sólido com 20 graus de liberdade. O autor verificou que o caso de massas pontuais, apesar de mais simples, obteve um desempenho satisfatório quando comparado com o segundo modelo. Quanto a demanda de processamento, para os modos de vibrar, o desempenho de ambos modelos foram semelhantes. Já na análise transiente, o modelo de massa distribuída necessitou de nove vezes mais de processamento.

Em âmbito nacional, destaca-se o trabalho de Saracho (1998) que estudou o comportamento dinâmico de palhetas flexíveis acopladas em máquinas rotativas. A autora utilizou o método dos Elementos Finitos para discretizar as equações obtidas através de uma abordagem tridimensional. A utilização de poucos elementos para discretizar a viga se torna viável em virtude da convergência rápida, sendo que a utilização de oito elementos gerou erros em torno de 1%.

Saracho (2002) avaliou tensores de deformação, onde foi feita uma comparação entre três tipos: linear, não-linear de segunda ordem e não linear de quarta ordem. Para simulação em modos transientes, os modos não-lineares mostraram melhores resultados. Neste contexto, (CAI et al., 2004) também realizou uma comparação entre modelos baseados em deformação e discretizados pelo método dos Elementos Finitos. A comparação foi feita usando a dinâmica do regime transiente para o modo *lag*. De acordo com o autor, o modelo de ordem zero (linear), que segundo o autor foi extensamente utilizado em décadas

anteriores, é eficiente apenas em velocidades muito baixas. Já o modelo proposto por ele (não-linear de segunda ordem), foram obtidos bons resultados em velocidades maiores.

Gunda et al. (2007) utilizaram um modelo não convencional de implementação para resolver as equações diferenciais não lineares de uma viga flexível girante com área de seção transversal variável. Através da utilização superelementos do tipo Fourier-p, o autor empregou funções de forma complexas para interpolar os elementos finitos, compostas de Série de Fourier e funções polinomiais de quinta ordem. O fato de usar uma função de forma robusta faz com que não seja necessário usar muitos graus de liberdade para que o resultado atinja a convergência esperada. Com um modelo de apenas catorze graus de liberdade totais, o autor obteve o mesmo resultado empregando-se uma modelagem com cento e quatro graus de liberdade totais.

A modelagem proposta por Liu et al. (2009) foi baseada em uma deformação não-linear juntamente com o método dos Elementos Finitos para a discretização. A análise em questão baseou-se na validação de seu código em comparação com os modelos apresentados por Cai et al. (2004) de ordem zero e de segunda ordem. Os autores também mostram que o uso de poucos elementos finitos para discretizar a viga é o suficiente para obter resultados satisfatórios.

Huang et al. (2010) investigaram os efeitos causados pela força de Coriolis e velocidade angular nas frequências naturais de vigas flexíveis girantes esbeltas através da solução por séries de potência. O autor concluiu que a convergência dos resultados depende do número de segmentos que dividem a viga, onde a solução para cada segmento é expressa como uma série de potência com seis coeficientes independentes. Outro ponto discutido é que o Enrijecimento Centrífugo também pode ser verificado neste modelo.

Lacarbonara et al. (2012) utilizaram o método expandido da Série de Taylor para resolução analítica das equações do movimento. Sua formulação baseou-se na teoria de Cosserat para vigas, que inclui todos os termos geométricos da cinemática. Seu objeto de estudos foi a análise das frequências naturais longitudinal (axial), transversais e torcional, onde o autor concluiu que as forças de Coriolis não afetam o modo de vibrar *flap* e torcional, enquanto a mesma desempenha um papel significativo nos modos *lag* e axial. Também foi verificado que a magnitude da força de Coriolis aumenta com a velocidade angular.

Stoykov e Ribeiro (2013) propuseram em sua pesquisa um modelo de vigas baseado na teoria de Timoshenko para abordar o fenômeno de flexão, utilizando o método dos Elementos Finitos para resolver as equações. Os autores demonstraram que os termos

não lineares que aparecem nas relações de tensão-deformação são de extrema importância para vigas engastadas devido aos efeitos centrífugos que tendem a enrijecê-la conforme a rotação se eleva, aumentando assim suas frequências naturais.

Mazanoglu e Guler (2017) estudaram casos de *flap* e *lag* para vigas com seção transversal variável. Os autores modelaram o problema com a teoria de Euler-Bernoulli para vigas, discretizando o sistema pelo método de Rayleigh-Ritz. Segundo os autores, o método de discretização fornece uma técnica computacional simples e rápida, com a vantagem de se admitir funções polinomiais simples. Também são investigadas as relações de conicidade, dimensão do rotor (distância do centro de rotação ao início da viga), e velocidade de rotação.

2.1 OBJETIVOS

O presente trabalho tem como objetivo principal a modelagem matemática de vigas flexíveis girantes utilizando o método de Elementos Finitos. Para atingir tal objetivo, neste trabalho pretende-se validar o código computacional desenvolvido através da comparação das frequências naturais principais e dos deslocamentos da viga em regime transiente, com dados disponíveis na literatura, e, por fim, investigar a influência da matriz giroscópica no comportamento dinâmico transiente da viga girante.

3 ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA

Neste capítulo é feita a modelagem matemática para descrever o comportamento cinemático e dinâmico de vigas flexíveis girantes. Para isto, propõe-se a utilização da formulação cinemática de partículas para determinar os vetores de posição e velocidade de cada ponto da viga e, com isso obter, através das energias cinética e potencial, as equações do movimento que regem o fenômeno estudado.

3.1 CONSIDERAÇÕES E HIPÓTESES INICIAIS

As considerações e hipóteses simplificadores adotadas neste trabalho seguirá o modelo de viga proposto por Euler-Bernoulli, sendo as principais descritas abaixo:

- O comprimento de viga é maior que a largura e a espessura.
- A linha elástica é indeformável e se desloca junto com a viga.
- A energia de deformação por cisalhamento será desconsiderada por se tratar de vigas delgadas.
- A inércia de rotação da viga é desconsiderada.

Além disso, o material da viga será considerado como isotrópico (mesmas propriedades físicas independentemente da direção) e contínuo. E por fim, os efeitos aeroelásticos serão negligenciados.^I

3.2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

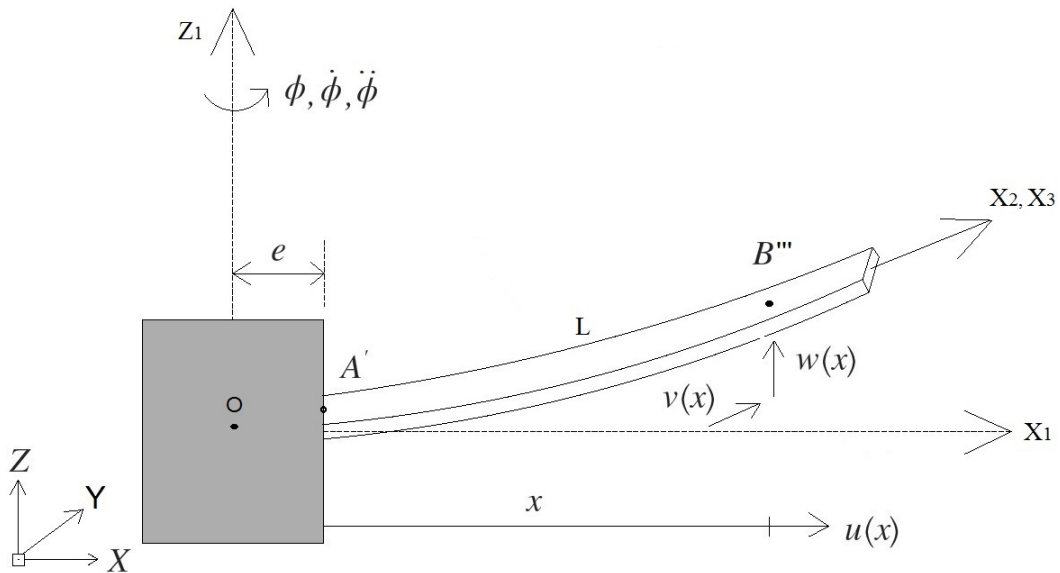
Para facilitar a representação do movimento de um ponto qualquer pertencente a viga, faz-se necessária a adoção de sistemas de referências auxiliares. Neste caso, nota-se que tanto o movimento de rotação como a deformação da viga não estão restritas a um plano, há a necessidade de utilizar três referenciais, conforme mostra a figura 3, sendo definidos como:

^IUm bom exemplo de efeitos aerodinâmicos seria a influência do ar atmosférico escoando pela superfície da viga.

- Referencial I - representa o sistema de coordenadas inercial. Sua origem está no ponto O. É descrito pelas coordenadas (X, Y, Z) .
- Referencial B_1 - É um referencial móvel e solidário à viga não deformada. Realiza uma rotação ϕ em torno do eixo Z (plano de rotação). Sua origem também está no ponto O. É descrito pelas coordenadas (X_1, Y_1, Z_1) .
- Referencial B_2 - É um referencial móvel, solidário à deformação da viga no plano de rotação e com origem no ponto A. A rotação entre os referenciais B_1 e B_2 é o ângulo ξ em torno do eixo Z_1 . Definido pelas coordenadas (X_2, Y_2, Z_2) .
- Referencial B_3 - É um referencial móvel, solidário à deformação da viga fora do plano de rotação e com origem no ponto A. A rotação entre os referenciais B_1 e B_3 é o ângulo β em torno do eixo Y_1 . Definido pelas coordenadas (X_3, Y_3, Z_3) .

A figura 3 ilustra uma viga flexível girante submetida aos efeitos das deformações no plano de giro, conhecida como *lag*, e também ao efeito fora do plano de giro, conhecida como *flap*.

Figura 3- Viga flexível girante sob o efeito do *lag* e *flap*.



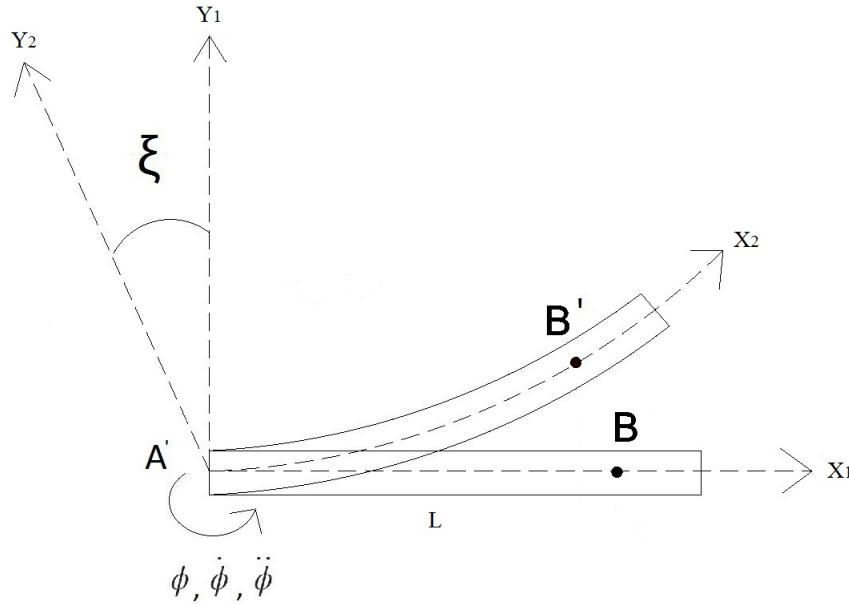
Fonte: Próprio autor.

3.3 MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO

Os sistemas de referência discutidos anteriormente estão relacionados entre si através de matrizes de transformação. Estas matrizes são ortogonais entre si e representam as

transformações lineares entre os sistemas de referências. Para descrever a deformação do *lag* faz-se necessário usar o plano XY e as bases móveis B_1 e B_2 , de acordo com a figura 4.

Figura 4- Sistemas móveis descrevendo o *lag*.



Fonte: Próprio autor.

Com isso, pode-se relacionar os sistemas de referências móveis B_1 e B_2 através de uma matriz de transformação T_ξ , de acordo com as equações 1 e 2.

$${}_{B2}S = T_\xi \cdot {}_{B1}S \quad (1)$$

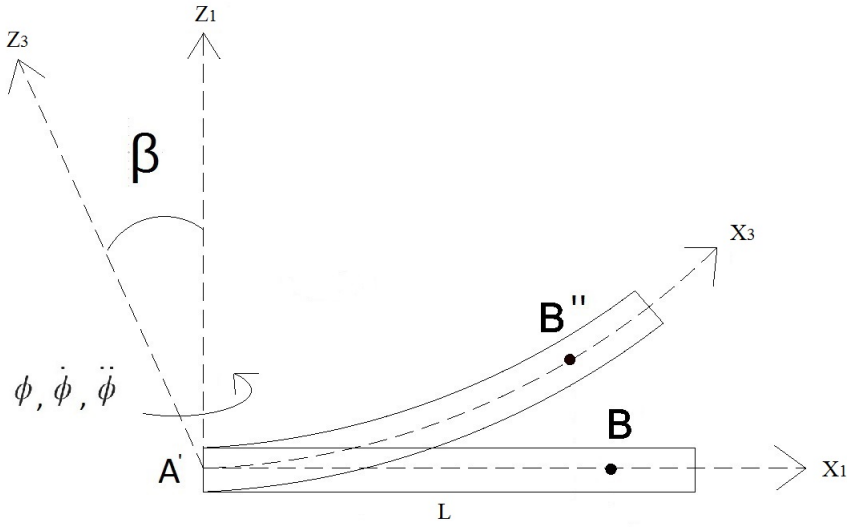
$$T_\xi = \begin{bmatrix} \cos\xi & \sin\xi & 0 \\ -\sin\xi & \cos\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

De maneira análoga, pode-se descrever o *flap* no plano XZ , correlacionando as bases móveis B_1 e B_3 e utilizando a matriz de transformação T_β , conforme figura 5 e equações 3 e 4.

$${}_{B3}S = T_\beta \cdot {}_{B1}S \quad (3)$$

$$\mathbf{T}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \quad (4)$$

Figura 5- Sistemas móveis descrevendo o *flap*.



Fonte: Próprio autor.

3.4 VETOR POSIÇÃO

3.4.1 Lag

Seja um ponto B' pertencente a linha neutra e localizado em um ponto qualquer da viga deformada, de acordo com a figura 4. O vetor posição para o *lag* pode ser facilmente escrito na base B_1 como:

$${}_{B_1}\mathbf{r}_{OB'} = \begin{Bmatrix} e + x + u(x, t) \\ v(x, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

3.4.2 Flap

De forma análoga, seja um ponto B'' pertencente a linha neutra e localizado em um ponto qualquer da viga deformada, de acordo com a figura 5. O vetor posição para o *flap*

pode ser escrito na base B_1 como:^{III}

$$\mathbf{B1r_{OB''}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ w(x, t) \end{Bmatrix} \quad (6)$$

3.4.3 Vetor posição total

Somando os vetores posição presentes nas equações 5 e 6, chega-se ao vetor posição que descreve o sistema e escrito na base móvel B_1 .

$$\mathbf{B1r_{OB'''}} = \begin{Bmatrix} e + x + u(x, t) \\ v(x, t) \\ w(x, t) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

3.5 VETOR VELOCIDADE

O vetor velocidade é determinado a partir da derivada absoluta do vetor posição, calculados na base inercial. Para derivar um vetor posição escrito numa base móvel, é necessário usar a seguinte relação:

$$\mathbf{B1V_{B'''}} = \frac{d}{dt} (\mathbf{B1r_{OB'''}}) + \mathbf{B1\dot{\phi}} \times \mathbf{B1r_{OB'''}} + \mathbf{B1V_{relB'''}} \quad (8)$$

O primeiro termo da equação 8 é a taxa de variação da amplitude do vetor posição $\mathbf{B1r_{OB'''}}$, e pode ser expresso na forma:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{B1r_{OB'''}}) = \begin{Bmatrix} \dot{u}(x, t) \\ \dot{v}(x, t) \\ \dot{w}(x, t) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

O segundo termo é a taxa de variação de direção do vetor posição $\mathbf{B1r_{OB'''}}$, sendo escrita como:

$$\mathbf{B1\dot{\phi}} \times \mathbf{B1r_{OB'''}} = \begin{Bmatrix} -v(x, t)\dot{\phi}(t) \\ (e + x)\dot{\phi}(t) + u(x, t)\dot{\phi}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

onde:

^{III}Não é necessário escrever as distâncias e , x e u , já escritas no vetor posição *lag*.

- ${}_{\mathbf{B1}}\dot{\phi}$: Velocidade angular absoluta da base B_1 em relação a base Inercial. Para a viga girante, o vetor pode ser expresso como:

$${}_{\mathbf{B1}}\dot{\phi} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

O terceiro termo é a velocidade relativa do ponto B''' em relação ao ponto O , que para este caso é zero. Com isso, a velocidade do ponto B pode ser escrita na forma:

$${}_{\mathbf{B1}}\mathbf{V}_{\mathbf{B}'''} = \begin{Bmatrix} \dot{u}(x, t) - v(x, t)\dot{\phi}(t) \\ \dot{v}(x, t) + (e + x)\dot{\phi}(t) + u(x, t)\dot{\phi}(t) \\ \dot{w}(x, t) \end{Bmatrix} \quad (12)$$

3.6 EQUAÇÕES DE LAGRANGE

A modelagem empregada para obter a forma final das equações do movimento para uma viga flexível girante é a Lagrangiana, baseada no princípio dos trabalhos virtuais. Segundo Saracho (1998) as grandezas escalares como as energias cinética e potencial e o trabalho realizado pelas forças externas que atuam sobre o corpo, precisam ser avaliadas em função das coordenadas generalizadas do sistema. Estas representam um conjunto de coordenadas mínimas para descrever a configuração do sistema em qualquer instante de tempo. Segundo a autora, uma vantagem da modelagem Lagrangiana é que as forças internas, que não realizam trabalho, não precisam ser incluídas no equacionamento e, portanto, apenas as equações do movimento são obtidas. Sendo assim, se acordo com Lemos (2007), a equação de Lagrange pode ser escrita na forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (13)$$

sendo:

- T : Energia cinética.
- V : Energia Potencial.
- $\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}$: Coordenadas generalizadas temporais.
- \mathbf{Q} : Forças generalizadas.

3.7 ENERGIA CINÉTICA

Para determinar as equações do movimento da viga, utilizando o método de energia de Lagrange, faz-se necessário obter a energia cinética através do vetor velocidade (equação 12). Assim a energia cinética total para viga flexível girante pode ser expressa como:

$$T = \frac{1}{2} \int_A \int_e^{e+L} \rho [\mathbf{B_1 V_{OB}}]^T [\mathbf{B_1 V_{OB}}] dA dx = \frac{1}{2} \int_A \int_e^{e+L} \rho \|\mathbf{B_1 V_{OB}}\|^2 dA dx \quad (14)$$

Considerando uma seção transversal constante em toda a viga, pode-se reescrever a equação 14 na forma:

$$T = \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \|\mathbf{B_1 V_{OB}}\|^2 dx \quad (15)$$

Através da velocidade obtida na equação 12, tem-se:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B_1 V_{OB}}\|^2 = & \dot{u}^2(x, t) + v^2(x, t) \dot{\phi}^2(t) - 2\dot{u}(x, t)v(x, t)\dot{\phi}(t) + \dot{v}^2(x, t) + (e+x)^2 \dot{\phi}^2(t) \\ & + u^2(x, t) \dot{\phi}^2(t) + 2(e+x)\dot{v}(x, t)\dot{\phi}(t) + 2u(x, t)\dot{v}(x, t)\dot{\phi}(t) + 2(e+x)u(x, t)\dot{\phi}^2(t) + \dot{w}^2(x, t) \end{aligned} \quad (16)$$

Aplicando a equação 16 na equação 15 e utilizando a propriedade de somas de integrais, obtém-se a energia cinética total de uma viga flexível girante, conforme equação 17:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \dot{u}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A v^2(x, t) \dot{\phi}^2(t) dx - \int_e^{e+L} \rho A \dot{u}(x, t)v(x, t)\dot{\phi}(t) dx \\ & + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \dot{v}^2(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A (e+x)^2 \dot{\phi}^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A u^2(x, t) \dot{\phi}^2(t) dx \\ & + \int_e^{e+L} \rho A (e+x) \dot{v}(x, t)\dot{\phi}(t) dx + \int_e^{e+L} \rho A u(x, t)\dot{v}(x, t)\dot{\phi}(t) dx \\ & + \int_e^{e+L} \rho A (e+x) u(x, t) \dot{\phi}^2(t) dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \dot{w}^2(x, t) dx \end{aligned} \quad (17)$$

3.8 ENERGIA POTENCIAL DE DEFORMAÇÃO

Um problema comum presente na modelagem de vigas flexíveis girantes envolve grandes deslocamentos longitudinais e transversais quando submetidas a rotações elevadas, tornando a teoria linear de deformação ineficiente para descrever o sistema. Faz-se necessário, portanto, construir modelos capazes de representar a não linearidade existente devido aos elevados deslocamentos que induzem elevadas deformações.

Uma aproximação razoável para o problema em questão é utilizar o tensor de deformação de Lagrange, também conhecido por tensor de deformação de Green-Lagrange ou Green-St.Venant (Sinha (2005), Lima (2012) e Slaughter (2012)). Este é um tensor conforme equação 18:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (18)$$

Sendo o sistema do presente trabalho descrito no espaço vetorial Euclidiano R^3 com $k = 1, 2, 3$. Neste caso, pode-se reescrever a equação 18 como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial u_2}{\partial x_i} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \frac{\partial u_3}{\partial x_j} \right) \quad (19)$$

onde os deslocamentos genéricos podem ser substituídos pelos deslocamentos no ponto B, conforme equação 20:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_B(x, t) \\ u_2 &= v_B(x, t) \\ u_3 &= w_B(x, t) \end{aligned} \quad (20)$$

Substituindo a equação 20 na equação 19, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_B}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (21)$$

Segundo a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, as componentes de deformação por cisalhamento $\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\varepsilon_{12}=\varepsilon_{21}, \varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\varepsilon_{13}=\varepsilon_{31}$ e $\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\varepsilon_{23}=\varepsilon_{32}$ não contribuem energeticamente, apesar de atuarem no sistema. Portanto somente as componentes normais $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{11}$ contribuirão com o sistema. Neste caso, a componente normal de deformação pode ser reescrita conforme a equação 22:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x = \frac{\partial u_B(x, t)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_B(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_B(x, t)}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_B(x, t)}{\partial x} \right)^2 \quad (22)$$

3.8.1 Relação deslocamento-deformação para vigas de Euler-Bernoulli

Os deslocamentos (u, v, w) do ponto B podem ser reescritos conforme as relações presentes na equação 23:

$$\begin{aligned} u_B(x, t) &= u(x, t) - y \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - z \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \\ v_B(x, t) &= v(x, t) \\ w_B(x, t) &= w(x, t) \end{aligned} \tag{23}$$

3.8.2 Modelo constitutivo do material

Normalmente os trabalhos e estudos presentes na comunidade científica sobre vigas flexíveis girantes utilizam o modelo constitutivo da lei generalizada de Hooke (Saracho (1998), Chung e Yoo (2002), Lima (2012) e Kim et al. (2013)). Apesar de ser um modelo linear de tensão-deformação, pode-se contornar o problema utilizando um tensor de deformação não linear, apresentado na seção 3.8, equação 22. Tal simplificação não traz prejuízos aos resultados e facilita a obtenção de modelos com menor complexidade, pois estes demandariam um maior poder de processamento para serem resolvidos. O modelo de Hooke para um estado uniaxial de tensões pode ser expresso por:

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) \tag{24}$$

sendo:

- $\sigma(x, t)$: Tensor de tensão.
- E : Módulo de elasticidade longitudinal.
- $\varepsilon(x, t)$: Tensor de deformação específica.

É importante notar que o modelo constitutivo usado no presente trabalho abrange apenas as deformações no regime elástico, ou seja, o material não se encontra no regime plástico. Esta consideração é válida apenas para rotações não muito elevadas, visto que grandes rotações provocam elevados campos de deslocamentos que contribuem para elevados estados de deformação do material, o que pode contribuir para que o material opere no regime plástico. Considerando apenas o comportamento elástico do material, a energia potencial de deformação pode ser escrita como:

$$V = \frac{1}{2} \int_{V_B} [\sigma]^T [\varepsilon] dV_B \tag{25}$$

Para o estado uniaxial em x , a equação 25 pode ser reescrita como:

$$V = \frac{1}{2} \int_{V_B} \sigma_x \varepsilon_x dV_B \quad (26)$$

Substituindo a equação 24 na equação 26, tem-se:

$$V = \frac{1}{2} \int_{V_B} E \varepsilon_x^2(x, t) dV_B \quad (27)$$

A parcela ε_x^2 pode ser obtida através da equação 28:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 = & \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} \right)^4 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w_B}{\partial x} \right)^4 + \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^3 + \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_B}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_B}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w_B}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (28)$$

Os termos de ordem elevada da equação 28 serão desconsiderados neste presente trabalho, visto que são termos com uma contribuição pequena, além de facilitar a modelagem e diminuir o tempo de processamento. Desprezando os termos de terceira ordem e superiores, tem-se:

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_B}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_B}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_B}{\partial x} \right)^2 \quad (29)$$

Aplicando as relações de descolamentos presentes na subseção 3.8.1, obtém-se:

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (30)$$

Expandindo a equação 30 em parcelas independentes, tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 = & \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - y \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - z \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ & + yz \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (31)$$

Alguns termos da equação 31 não contribuirão energeticamente pois eles fazem parte do momento estático de área em relação a linha neutra (Beer e Johnston (2008)):

$$Q_m = \int_A y dA \quad (32)$$

Desconsiderando o efeito de cisalhamento conforme o modelo de viga de Euler-Bernoulli, e sabendo que o ponto B está localizado na linha neutra, as relações presentes na equação 33 são válidas:

$$\int y dA = 0 \quad ; \quad \int z dA = 0 \quad ; \quad \int yz dA = 0 \quad (33)$$

Com isso, obtém-se todas as parcelas do tensor de deformação que contribuirão energeticamente com o sistema, conforme a equação 34:

$$\varepsilon_x^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (34)$$

Desta forma, pode-se obter a energia potencial da viga através da substituição da equação 34 na equação 27 e aplicando a propriedade de somas de integrais:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_{V_B} E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dV_B + \frac{1}{2} \int_{V_B} E y^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dV_B + \frac{1}{2} \int_{V_B} E z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dV_B \\ & + \frac{1}{2} \int_{V_B} E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dV_B + \frac{1}{2} \int_{V_B} E \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dV_B \end{aligned} \quad (35)$$

Outra observação importante a ser feita é sobre o momento de inércia de área (Beer e Johnston (2008)). Ele pode ser obtido através das relações presentes na equação 36:

$$\int y^2 dA = I_z \quad ; \quad \int z^2 dA = I_y \quad (36)$$

Substituindo as relações presentes na equação 36 na equação 35, obtém-se:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2} \int_e^{e+L} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} EI_{lag} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} EI_{flap} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \\ & + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \frac{1}{2} \int_e^{e+L} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx \end{aligned} \quad (37)$$

3.9 APROXIMAÇÃO PELA RIGIDEZ CENTRÍFUGA

Em seu estudo sobre análise transiente de estruturas flexíveis, Simo e Vu-Quoc (1987) concluíram que o efeito do aumento da rotação causa um enrijecimento na estrutura. Ao se utilizar apenas parcelas de linearidade geométrica, há uma diminuição da rigidez com o aumento da velocidade de rotação. Com isso, há a necessidade de incluir parcelas de

não linearidades geométricas, visto com detalhes na seção 3.8. Uma técnica utilizada para que o sistema mantenha características lineares ao mesmo tempo que aumenta a rigidez conforme o incremento de rotação é a aproximação pela rigidez centrífuga. Tal técnica é utilizada em diversas pesquisas, como: Simo e Vu-Quoc (1987), Yokoyama (1988), Saracho (2002) e Lacarbonara et al. (2012). Esta aproximação também desacopla os efeitos dos deslocamentos *lag* e *flap* com o deslocamento longitudinal, conforme equação 38:

$$EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = T_{axial}(x) \quad (38)$$

Considerando a aceleração centrífuga ao longo da viga na direção longitudinal e aplicando o princípio fundamental da dinâmica no elemento infinitesimal da viga somente nesta direção, obtém-se:

$$\frac{\partial T_{axial}}{\partial x} dx = \rho Ax \dot{\phi}^2(t) dx \quad (39)$$

Integrando a equação 39 ao longo do comprimento da viga:

$$T_{axial}(x, t) \approx \int_{e+x}^{e+L} \rho Ax \dot{\phi}^2(t) dx \quad (40)$$

Sendo $\dot{\phi}(t) = cte = \Omega$ e considerando as propriedades físicas e geométricas constantes ao longo da viga, tem-se:

$$T_{axial}(x, t) \approx \frac{\rho A \Omega^2}{2} [(e+L)^2 - (e+x)^2] \quad (41)$$

3.10 METODOLOGIA DE DISCRETIZAÇÃO

Devido a complexidade do problema em questão, é necessário utilizar algumas técnicas para obter as equações de movimento do sistema. O presente trabalho estuda os deslocamentos em função de duas variáveis $u(x, t)$, $v(x, t)$ e $w(x, t)$. Para facilitar a resolução do problema, torna-se necessário lançar mão da técnica de separação de variáveis, resultando em duas funções com apenas uma variável cada: $\Psi(x)$ e $\mathbf{q}(t)$, sendo elas as chamadas funções de forma e coordenadas generalizadas, respectivamente. Além disso, outra maneira de resolver problemas complexos é discretizando o sistema. No meio científico existem diversas formas de discretização. O método dos Elementos Finitos é o mais utilizado, por sua robustez e facilidade de implementação computacional. Porém em casos mais complexos, é demandado um alto processamento de dados para conseguir resultados satisfatórios. Outros métodos também conhecidos são: Método dos Modos Assumidos,

método de Galerkin, método de Rayleigh-Ritz. Para o presente trabalho serão utilizadas as relações presentes na equação 42.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sum_{i=1}^N \psi_{u,i}(x) q_{u,i}(t) = [\Psi_u]_{1 \times n} [\mathbf{q}_u]_{n \times 1} \\
v(x, t) &= \sum_{i=1}^N \psi_{v,i}(x) q_{v,i}(t) = [\Psi_v]_{1 \times n} [\mathbf{q}_v]_{n \times 1} \\
w(x, t) &= \sum_{i=1}^N \psi_{w,i}(x) q_{w,i}(t) = [\Psi_w]_{1 \times n} [\mathbf{q}_w]_{n \times 1}
\end{aligned} \tag{42}$$

3.11 EQUAÇÕES DO MOVIMENTO

O modelo a ser formulado no presente trabalho considera que os efeitos dinâmicos dos modos longitudinal, *lag* e *flap* contribuem no comportamento dinâmico da viga flexível girante. Utilizando as relações presentes na equação 42 e aplicando na energia cinética (equação 17) obtém-se:

$$\begin{aligned}
T = & \dot{\mathbf{q}}_u^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \Psi_u^T \Psi_u dx \right] \dot{\mathbf{q}}_u + \mathbf{q}_v^T \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_e^{e+L} \rho A \Psi_v^T \Psi_v dx \right] \mathbf{q}_v \\
& - \dot{\mathbf{q}}_u^T \left[\dot{\phi}(t) \int_e^{e+L} \rho A \Psi_u^T \Psi_v dx \right] \mathbf{q}_v + \dot{\mathbf{q}}_v^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \Psi_v^T \Psi_v dx \right] \dot{\mathbf{q}}_v \\
& + \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_e^{e+L} \rho A (e+x)^2 dx \right] + \mathbf{q}_u^T \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2(t) \int_e^{e+L} \rho A \Psi_u^T \Psi_u dx \right] \mathbf{q}_u \\
& + \left[\dot{\phi}(t) \int_e^{e+L} \rho A (e+x) \Psi_v dx \right] \dot{\mathbf{q}}_v + \mathbf{q}_u^T \left[\dot{\phi}(t) \int_e^{e+L} \rho A \Psi_u^T \Psi_v dx \right] \dot{\mathbf{q}}_v \\
& + \left[\dot{\phi}^2(t) \int_e^{e+L} \rho A (e+x) \Psi_u dx \right] \mathbf{q}_u + \dot{\mathbf{q}}_w^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} \rho A \Psi_w^T \Psi_w dx \right] \dot{\mathbf{q}}_w
\end{aligned} \tag{43}$$

Analogamente, pode-se fazer o mesmo para a energia potencial (equação 37)^{II}:

$$\begin{aligned}
V = & \mathbf{q}_u^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} EA [\Psi'_u]^T [\Psi'_u] dx \right] \mathbf{q}_u + \mathbf{q}_v^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} EI_{lag} [\Psi''_v]^T [\Psi''_v] dx \right] \mathbf{q}_v \\
& + \mathbf{q}_w^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} EI_{flap} [\Psi''_w]^T [\Psi''_w] dx \right] \mathbf{q}_w + \mathbf{q}_v^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi'_v]^T [\Psi'_v] dx \right] \mathbf{q}_v \\
& + \mathbf{q}_w^T \left[\frac{1}{2} \int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi'_w]^T [\Psi'_w] dx \right] \mathbf{q}_w
\end{aligned} \tag{44}$$

Tendo as energias cinéticas e potenciais discretizadas, pode-se aplicar as equações de Lagrange diretamente para os deslocamentos longitudinal, *lag* e *flap*, representados pelas

^{II}Cabe lembrar que o sobrescrito $\dot{\mathbf{q}}$ se refere às derivadas temporais e o sobrescrito Ψ' se refere às derivadas espaciais.

coordenadas q_s, q_v e q_w , conforme as equações 45, 46 e 47:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{u}}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{u}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} \quad (45)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{v}}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} \quad (46)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{w}}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{w}}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_{\mathbf{w}}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{w}} \quad (47)$$

Cabe ressaltar que os termos dissipativos que compõem as equações de Lagrange serão desconsiderados nessa modelagem, em virtude da desconsideração de alguns efeitos que contribuiriam com tais termos, dentre eles os efeitos aeroelásticos e aerodinâmicos.

Com isso, pode-se obter as equações que regem o movimento do sistema para os deslocamentos longitudinal e transversais (*lag* e *flap*). Para o deslocamento longitudinal, tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} - \ddot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} \\ & - \dot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} - \dot{\phi}^2(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{u}} \\ & - \dot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} - \dot{\phi}^2(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A (e+x) \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \\ & + \left[\int_e^{e+L} EA [\Psi'_{\mathbf{u}}]^T [\Psi'_{\mathbf{u}}] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (48)$$

Agrupando as parcelas iguais:

$$\begin{aligned} & \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} - \ddot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} \\ & - 2\dot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} - \dot{\phi}^2(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{u}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{u}} \\ & + \left[\int_e^{e+L} EA [\Psi'_{\mathbf{u}}]^T [\Psi'_{\mathbf{u}}] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} + \dot{\phi}^2(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A (e+x) \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \end{aligned} \quad (49)$$

Para o deslocamento transversal *lag*:

$$\begin{aligned} & \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} + \dot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} \\ & + \ddot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{u}} + \ddot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A (e+x) \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \\ & + \dot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} - \dot{\phi}^2(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} \\ & + \left[\int_e^{e+L} EI_{lag} [\Psi''_{\mathbf{v}}]^T [\Psi''_{\mathbf{v}}] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} + \left[\int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi'_{\mathbf{v}}]^T [\Psi'_{\mathbf{v}}] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad (50)$$

Novamente, agrupando os termos iguais, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} + 2\dot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} + \ddot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{u}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{u}} \\
& - \dot{\phi}^2(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{v}}^T \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} + \left[\int_e^{e+L} EI_{lag} [\Psi_{\mathbf{v}}'']^T [\Psi_{\mathbf{v}}''] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} \\
& + \left[\int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi_{\mathbf{v}}']^T [\Psi_{\mathbf{v}}'] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} - \ddot{\phi}(t) \left[\int_e^{e+L} \rho A (e+x) \Psi_{\mathbf{v}} dx \right] \quad (51)
\end{aligned}$$

Para o deslocamento transversal *flap*:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_e^{e+L} \rho A \Psi_{\mathbf{w}}^T \Psi_{\mathbf{w}} dx \right] \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{w}} + \left[\int_e^{e+L} EI_{flap} [\Psi_{\mathbf{w}}'']^T [\Psi_{\mathbf{w}}''] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{w}} \\
& + \left[\int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi_{\mathbf{w}}']^T [\Psi_{\mathbf{w}}'] dx \right] \mathbf{q}_{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{w}} \quad (52)
\end{aligned}$$

Escrevendo matricialmente as equações 49, 51 e 52, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}_{\mathbf{u}} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} - 2\dot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{uv}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} + (\mathbf{K}_{\mathbf{u}} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_{\mathbf{u}}) \mathbf{q}_{\mathbf{u}} - \ddot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{uv}} \mathbf{q}_{\mathbf{v}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{\mathbf{u}} \\
& \mathbf{M}_{\mathbf{v}} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} + 2\dot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{vu}} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} + (\mathbf{K}_{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_{\mathbf{gv}} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_{\mathbf{v}}) \mathbf{q}_{\mathbf{v}} + \ddot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{vu}} \mathbf{q}_{\mathbf{u}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} - \mathbf{F}_{\mathbf{v}} \\
& \mathbf{M}_{\mathbf{w}} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{w}} + (\mathbf{K}_{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_{\mathbf{gw}}) \mathbf{q}_{\mathbf{w}} = \mathbf{Q}_{\mathbf{w}} \quad (53)
\end{aligned}$$

Acoplando as equações do movimento aos respectivos graus de liberdade:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{u}} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{v}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{\mathbf{w}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2\dot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{uv}} & 0 \\ 2\dot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{vu}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_{\mathbf{u}} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_{\mathbf{u}}) & -\ddot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{uv}} & 0 \\ \ddot{\phi} \mathbf{G}_{\mathbf{vu}} & (\mathbf{K}_{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_{\mathbf{gv}} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_{\mathbf{v}}) & 0 \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_{\mathbf{w}} + \mathbf{K}_{\mathbf{gw}}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{q}_{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_{\mathbf{u}} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{v}} - \mathbf{F}_{\mathbf{v}} \\ \mathbf{Q}_{\mathbf{w}} \end{Bmatrix} \quad (54)
\end{aligned}$$

onde cada parcela pode ser obtida através das seguintes integrais:

$$\mathbf{M}_u = \int_e^{e+L} \rho A [\Psi_u]^T [\Psi_u] dx \quad (55)$$

$$\mathbf{M}_v = \int_e^{e+L} \rho A [\Psi_v]^T [\Psi_v] dx \quad (56)$$

$$\mathbf{M}_w = \int_e^{e+L} \rho A [\Psi_w]^T [\Psi_w] dx \quad (57)$$

$$\mathbf{G}_{uv} = \int_e^{e+L} \rho A [\Psi_u]^T [\Psi_v] dx \quad (58)$$

$$\mathbf{G}_{vu} = \int_e^{e+L} \rho A [\Psi_v]^T [\Psi_u] dx \quad (59)$$

$$\mathbf{K}_u = \int_e^{e+L} EA [\Psi'_u]^T [\Psi'_u] dx \quad (60)$$

$$\mathbf{K}_v = \int_e^{e+L} EI_{lag} [\Psi''_v]^T [\Psi''_v] dx \quad (61)$$

$$\mathbf{K}_w = \int_e^{e+L} EI_{flap} [\Psi''_w]^T [\Psi''_w] dx \quad (62)$$

$$\mathbf{K}_{gv} = \int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi'_v]^T [\Psi'_v] dx \quad (63)$$

$$\mathbf{K}_{gw} = \int_e^{e+L} T_{axial} [\Psi'_w]^T [\Psi'_w] dx \quad (64)$$

$$\mathbf{F}_u = \dot{\phi}^2(t) \int_e^{e+L} \rho A (e+x) [\Psi_u] dx \quad (65)$$

$$\mathbf{F}_v = \ddot{\phi}(t) \int_e^{e+L} \rho A (e+x) [\Psi_v] dx \quad (66)$$

sendo

- \mathbf{M}_u , \mathbf{M}_v e \mathbf{M}_w são as matrizes de massa para os modos longitudinal, *lag* e *flap* respectivamente.
- \mathbf{G}_{uv} e \mathbf{G}_{vu} são as matrizes giroscópicas responsáveis pelo acoplamento longitudinal e *lag*.
- \mathbf{K}_u , \mathbf{K}_v e \mathbf{K}_w são as matrizes de rigidez estrutural para os modos longitudinal, *lag* e *flap* respectivamente.
- \mathbf{K}_{gv} , \mathbf{K}_{gw} são as matrizes de rigidez geométrica.
- \mathbf{F}_u é o vetor de força rotacional e \mathbf{F}_v é o vetor associado a componente tangencial da aceleração angular.

Cabe ressaltar que, em uma análise detalhada sobre as equações 49, 51 e 52, pode-se verificar que:

- O modo longitudinal está acoplado somente com o modo *lag*, introduzindo efeitos giroscópicos presentes na equação de movimento deste modo e relacionados com a parcela de amortecimento do sistema, chamada também de matriz de amortecimento de Coriolis (Hsieh e Abel (1995)).
- Os efeitos giroscópicos também estão presentes na rigidez dos modos longitudinal e *lag* devido ao efeito da aceleração de Coriolis.
- O modo *flap* está desacoplado dos demais modos. Isto ocorre por causa da aproximação pela rigidez centrífuga presente na seção 3.9. Se tal aproximação não fosse aplicada, o modo estaria acoplado com o modo longitudinal. Contudo usá-la não compromete a modelagem, visto que Saracho (2002) compara em seu trabalho a utilização ou não da rigidez centrífuga, obtendo resultados satisfatórios.

Visto que a equação que descreve o movimento *lag* possui duas parcelas pertencentes ao movimento longitudinal e que a equação longitudinal possui duas parcelas que pertencem ao movimento *lag* (devido ao acoplamento entre os modos), faz-se necessário acoplar tais equações e reduzi-las a apenas uma equação que descreverá o movimento total. Sendo assim, pode-se reescrever as equações na forma:

$$\mathbf{M}_{uv}\ddot{\mathbf{q}}_{uv} + 2\dot{\phi}\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_{uv} + (\mathbf{K}_{uv} + \mathbf{K}_{gv} - \dot{\phi}^2\mathbf{M}_{uv})\mathbf{q}_{uv} + \ddot{\phi}\mathbf{G}\mathbf{q}_{uv} = \mathbf{Q}_{uv} + \mathbf{F}_{uv} \quad (67)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{uv} &= \mathbf{M}_u + \mathbf{M}_v \\ \mathbf{G} &= \mathbf{G}_{vu} - \mathbf{G}_{uv} \\ \mathbf{K}_{uv} &= \mathbf{K}_u + \mathbf{K}_v \\ \mathbf{Q}_{uv} &= \mathbf{Q}_u + \mathbf{Q}_v \\ \mathbf{F}_{uv} &= \mathbf{F}_u - \mathbf{F}_v \end{aligned}$$

Com isso, pode-se obter a equação 67, acoplando os movimentos longitudinal e *lag*.

3.12 FREQUÊNCIAS NATURAIS

Para se obter as frequências naturais não amortecidas, faz-se necessário utilizar as equações no movimento (53)^{III}.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{q}}_u - 2\dot{\phi} \mathbf{G}_{uv} \dot{\mathbf{q}}_v + (\mathbf{K}_u - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_u) \mathbf{q}_u - \ddot{\phi} \mathbf{G}_{uv} \mathbf{q}_v &= \mathbf{Q}_u + \mathbf{F}_u \\ \mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{q}}_v + 2\dot{\phi} \mathbf{G}_{uv} \dot{\mathbf{q}}_u + (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{gv} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_v) \mathbf{q}_v + \ddot{\phi} \mathbf{G}_{uv} \mathbf{q}_u &= \mathbf{Q}_v - \mathbf{F}_v \\ \mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w + (\mathbf{K}_w + \mathbf{K}_{gw}) \mathbf{q}_w &= \mathbf{Q}_w \end{aligned} \quad (68)$$

Considerando vibrações livres e não amortecidas da viga, velocidade angular constante ($\dot{\phi} = \Omega$ e $\ddot{\phi} = 0$) e sem forças generalizadas externas, tem-se:

$$\mathbf{M}_u \ddot{\mathbf{q}}_u + (\mathbf{K}_u - \Omega^2 \mathbf{M}_u) \mathbf{q}_u = \mathbf{0} \quad (69)$$

$$\mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{q}}_v + (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{gv} - \Omega^2 \mathbf{M}_v) \mathbf{q}_v = \mathbf{0} \quad (70)$$

$$\mathbf{M}_w \ddot{\mathbf{q}}_w + (\mathbf{K}_w + \mathbf{K}_{gw}) \mathbf{q}_w = \mathbf{0} \quad (71)$$

Assumindo que o deslocamento seja harmônico, tem-se:

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} e^{i\omega_n t} \quad (72)$$

Com isso, substituindo a equação 72 nas equações 69, 70 e 71 chega-se:

$$((\mathbf{K}_u - \Omega^2 \mathbf{M}_u) - \omega_n^2 \mathbf{M}_u) \bar{\mathbf{q}}_u = \mathbf{0} \quad (73)$$

$$((\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{gv} - \Omega^2 \mathbf{M}_v) - \omega_n^2 \mathbf{M}_v) \bar{\mathbf{q}}_v = \mathbf{0} \quad (74)$$

$$((\mathbf{K}_w + \mathbf{K}_{gw}) - \omega_n^2 \mathbf{M}_w) \bar{\mathbf{q}}_w = \mathbf{0} \quad (75)$$

A solução das equações 73, 74 e 75 fornecem as frequências naturais de uma viga flexível girando à uma velocidade angular fixa Ω .

^{III}Para o cálculo das frequências naturais não há a necessidade de utilizar a equação 67 pois as parcelas que acoplam o movimento longitudinal e *lag* são desconsideradas.

4 IMPLEMENTAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

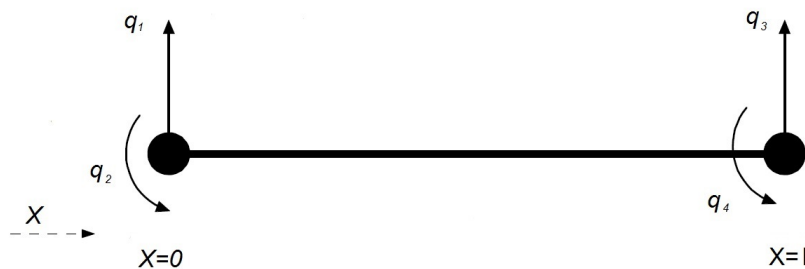
Neste capítulo é apresentado o método dos Elementos Finitos utilizado para discretizar o conjunto de equações que descrevem o movimento de vigas flexíveis girantes. A modelagem será feita usando elementos de viga. Tal escolha será feita levando em conta o acoplamento entre os modos longitudinal e *lag*, bem como o desacoplamento do modo *flap*. Para isso, os modos acoplados (axial e *lag*) serão discretizados com um elemento de viga com 3 GDL por nó, enquanto o modo *flap* será discretizado com um elemento de viga com 2 GDL por nó ¹.

4.1 QUATRO GRAUS DE LIBERDADE POR ELEMENTO

4.1.1 Propriedades do Elemento

Nesta seção a discretização da estrutura será feita com um elemento de viga com 2 GDL por nó, conforme mostra a figura 6.

Figura 6- Desenho esquemático de um elemento finito de viga 4 GDL.



Fonte: Próprio autor.

De acordo com a figura 6, l é o comprimento do elemento, q_1 é o deslocamento transversal do nó 1, q_2 é o deslocamento angular do nó 1, q_3 é o deslocamento transversal do nó 2 e q_4 é o deslocamento angular do nó 2. Sendo assim, o vetor deslocamento nodal

¹A escolha de um elemento de viga com menos graus de liberdade por nó visa melhorar o desempenho numérico do modelo, visto que o modo *flap* não possui acoplamento com o modo longitudinal, previamente discutido na seção 3.9.

pode ser escrito como:

$$q_i = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T \quad (76)$$

Por ser um método discreto, os valores dos deslocamentos no interior do elemento podem ser obtidos através de interpolações, podendo ser lineares, quadráticas ou referentes a qualquer outro polinômio (Ganguli (2016)). Neste trabalho, para os deslocamentos vertical e angular será utilizado um polinômio de ordem três, conforme equação 77:

$$H(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \quad (77)$$

Para se obter as incógnitas α_1 , α_2 , α_3 e α_4 , basta utilizar as condições iniciais do elemento, obtendo-se quatro expressões relacionadas às quatro incógnitas:

$$\begin{aligned} x &= 0 \rightarrow H = q_1 = \alpha_1 \\ x &= 0 \rightarrow H' = q_2 = \alpha_2 \\ x &= l \rightarrow H = q_3 = \alpha_1 + \alpha_2 l + \alpha_3 l^2 + \alpha_4 l^3 \\ x &= l \rightarrow H' = q_4 = \alpha_2 + 2\alpha_3 l + 3\alpha_4 l^2 \end{aligned}$$

Assim, a relação linear entre α e deslocamentos nodais na forma matricial resulta em:

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & l & l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Invertendo as matrizes, cada α será escrito em função dos deslocamentos nodais, na forma:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{l^2} & \frac{-2}{l} & \frac{3}{l^2} & \frac{-1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & \frac{-2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}$$

Reescrevendo a equação 77 em função dos deslocamentos nodais, obtém-se:

$$H(x, t) = \Psi_1 q_1 + \Psi_2 q_2 + \Psi_3 q_3 + \Psi_4 q_4 = \sum_{i=1}^4 \Psi_i q_i \quad (78)$$

onde Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 e Ψ_4 são as funções de forma para os deslocamentos vertical e angular.

Tais funções são de extrema importância para a obtenção das matrizes de massa, rigidez e giroscópicas, bem como os vetores de forças obtidos no capítulo 3. Assim, as funções de forma para os deslocamentos vertical e angulares são descritas pelas expressões abaixo:

$$\Psi_1 = 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \quad (79)$$

$$\Psi_2 = \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)\right]l \quad (80)$$

$$\Psi_3 = -2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (81)$$

$$\Psi_4 = \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right]l \quad (82)$$

Com isso, pode-se escrever um vetor com as funções de forma, conforme a equação 83:

$$\mathbf{\Psi} = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 \end{bmatrix}^T \quad (83)$$

4.1.2 Matriz de massa

Para obter a matriz de massa do sistema, faz-se necessário integrar a equação 84 obtida na seção 3.11.

$$\mathbf{M} = \int_e^{e+l} \rho A [\mathbf{\Psi}]^T [\mathbf{\Psi}] dx \quad (84)$$

Segue um exemplo de como se obtém o elemento m_{13} da matriz de massa elementar^{II}:

$$M_{13} = \int_0^l \rho A \Psi_1 \Psi_3 dx = \int_0^l \rho A \left[2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \right] \left[-2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] dx$$

$$M_{13} = \rho A \left[\frac{9}{70} l \right]$$

^{II}Nota-se que para obter o valor da matriz de massa, os extremos de integração são de 0 a l, sendo que o *offset* (e) é inserido diretamente no programa implementado.

Fazendo o mesmo procedimento de cálculo para todos os outros elementos m_{ij} , a matriz de massa elementar resulta em:

$$M_{ij} = \rho A \begin{pmatrix} \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{9}{70}l & \frac{-13}{420}l^2 \\ \frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 & \frac{13}{420}l^2 & \frac{-1}{140}l^3 \\ \frac{9}{70}l & \frac{13}{420}l^2 & \frac{13}{35}l & \frac{-11}{210}l^2 \\ \frac{-13}{420}l^2 & \frac{-1}{140}l^3 & \frac{-11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{pmatrix} \quad (85)$$

4.1.3 Matriz de rigidez

De maneira análoga a matriz de massa, pode-se encontrar as matrizes de rigidez através da integração das equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_e^{e+l} EI_{lag} [\Psi'']^T [\Psi''] dx \\ \mathbf{K}_g &= \int_e^{e+l} T_{axial} [\Psi']^T [\Psi'] dx \end{aligned} \quad (86)$$

A matriz de rigidez elementar pode ser obtida através da soma das parcelas da equação 86 resultando na equação 87.

$$K_{ij} = \int_e^{e+l} EI \frac{d^2\Psi_i}{dx^2} \frac{d^2\Psi_j}{dx^2} dx + \int_e^{e+l} T_{axial}(x) \frac{d\Psi_i}{dx} \frac{d\Psi_j}{dx} dx \quad (87)$$

O primeiro termo se refere à energia de deformação devido a tensão de flexão (tangencial à seção transversal). Já o segundo termo se refere à energia de deformação devido a força centrífuga. Calculando todas as parcelas, a matriz de rigidez elementar resultante é dada por:

$$\begin{aligned}
K_{ij} = EI & \begin{pmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{pmatrix} + \frac{\Omega^2 A_i}{2} \begin{pmatrix} \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{pmatrix} \\
& - \rho A \Omega^2 \begin{pmatrix} \frac{42x_i+12l}{70} & \frac{l(14x_i+5l)}{140} & -\frac{42x_i+12l}{70} & -\frac{l^2}{70} \\ \frac{l(14x_i+5l)}{140} & \frac{l^2(7x_i+2l)}{210} & -\frac{l(14x_i+5l)}{140} & -\frac{l^2(7x_i+3l)}{420} \\ -\frac{42x_i+12l}{70} & -\frac{l(14x_i+5l)}{140} & \frac{42x_i+12l}{70} & \frac{l^2}{70} \\ -\frac{l^2}{70} & -\frac{l^2(7x_i+3l)}{420} & \frac{l^2}{70} & \frac{l^2(7x_i+3l)}{70} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{88}$$

Para compreender o termo A_i , deve-se primeiramente entender como a força centrífuga age em cada elemento, segundo explica Ganguli (2016). Para isso, considere a tensão axial, descrita pela equação 89.

$$T_{axial}(x) = \int_{x_i+x}^l \rho A \Omega^2 x dx \tag{89}$$

Nota-se que conforme a integração se aproxima do final do elemento, a contribuição da força centrífuga diminui. Neste caso, a equação 89 pode ser reescrita como a diferença entre a integral total da força centrífuga do elemento e a parcela já calculada, conforme equação 90:

$$T_{axial}(x) = \int_{x_i}^l \rho A \Omega^2 x dx - \int_{x_i}^{x_i+x} \rho A \Omega^2 x dx \tag{90}$$

Reescrevendo a tensão axial em função de N elementos finitos, obtém-se:

$$\begin{aligned}
T_{axial}(x) &= \sum_{j=i}^N \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\rho A)_j \Omega^2 x dx - \int_{x_i}^{x_i+x} (\rho A)_i \Omega^2 x dx \\
T_{axial}(x) &= \sum_{j=i}^N (\rho A)_j \Omega^2 \frac{(x_{j+1}^2 - x_j^2)}{2} - (\rho A)_i \Omega^2 \frac{(x_i + x)^2 - x_i^2}{2}
\end{aligned}$$

Assim, a tensão axial $T(x)$ pode ser reescrita na forma:

$$T_{axial}(x) = \frac{\Omega^2 A_i}{2} - (\rho A)_i \Omega^2 \frac{(x_i + x)^2 - x_i^2}{2} \tag{91}$$

sendo o termo A_i representado por:

$$A_i = \sum_{j=i}^N (\rho A)_j (x_{j+1}^2 - x_j^2) \quad (92)$$

Segue um exemplo de como se obtém o elemento k_{11} da matriz de rigidez elementar^{III}:

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_0^l EI \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} dx + \int_0^l T_{axial}(x) \frac{d\Psi_1}{dx} \frac{d\Psi_1}{dx} dx \\ &= \int_0^l EI \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} dx + \int_0^l \left(\frac{\Omega^2 A_i}{2} - (\rho A)_i \Omega^2 \frac{(x_i + x)^2 - x_i^2}{2} \right) \frac{d\Psi_1}{dx} \frac{d\Psi_1}{dx} dx \end{aligned}$$

Calculando-se a primeira e a segunda derivada da função de forma, tem-se:

$$\Psi_1 = 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1$$

$$\frac{d\Psi_1}{dx} = 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 \left(\frac{1}{l}\right) - 6\left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{1}{l}\right)$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} = 12\left(\frac{x}{l}\right) \left(\frac{1}{l^2}\right) - 6\left(\frac{1}{l^2}\right)$$

Substituindo-se os termos, chega-se ao elemento k_{11} :

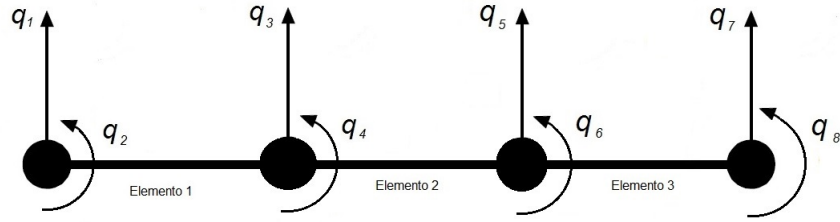
$$K_{11} = \frac{12EI}{l^3} + \frac{\Omega^2 A_i}{2} \left[\frac{6}{5l} \right] - (\rho A)_i \Omega^2 \left[\frac{3}{5} x_i + \frac{6l}{35} \right]$$

4.1.4 Construção das matrizes globais

Nas subseções anteriores foram discutidas as construções das matrizes elementares, ou seja, cada elemento com 2 GDL por nó (consequentemente 4 GDL por elemento) gera uma matriz quatro por quatro (4X4). A modelagem pelo método dos Elementos Finitos utiliza mais de um elemento para discretizar as equações, o que se faz necessário construir a matriz global, sendo esta a soma de todos os elementos. Sendo assim, considere uma viga discretizada em três elementos, conforme figura 7:

^{III}Nota-se que para obter o valor da matriz de rigidez, os extremos de integração são de 0 a l, sendo que o *offset* (e) é inserido diretamente no programa implementado.

Figura 7- Desenho esquemático de uma viga 4 GDL discretizada em três elementos.



Fonte: Próprio autor.

Assim, para calcular a matriz total, somam-se os elementos de seus respectivos graus de liberdade, o que resulta em:

$$M_{TOT} = M_{1234} + M_{3456} + M_{5678} \quad (93)$$

Ou escrevendo em matriz:

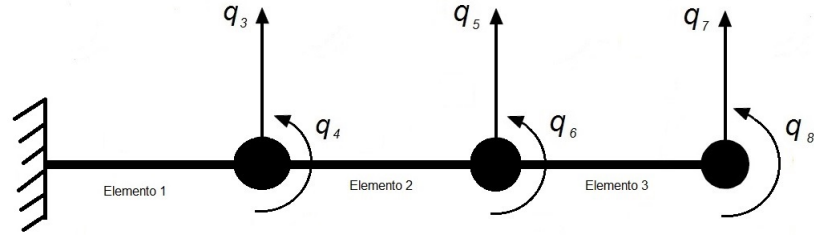
$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & & & & \\ \times & \times & \times & \times & & & & \\ \times & \times & \otimes & \otimes & O & O & & \\ \times & \times & \otimes & \otimes & O & O & & \\ & & O & O & \oplus & \oplus & + & + \\ & & O & O & \oplus & \oplus & + & + \\ & & & & + & + & + & + \\ & & & & + & + & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \times \rightarrow \text{Elemento } 1 \\ O \rightarrow \text{Elemento } 2 \\ + \rightarrow \text{Elemento } 3 \end{array} \right. \quad (94)$$

Com isso, a matriz global de massa tem sua forma demonstrada conforme a figura 95.

$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & . & . & . & . & . & m_{18} \\ m_{21} & m_{22} & . & . & . & . & . & m_{28} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ m_{81} & m_{82} & . & . & . & . & . & m_{88} \end{pmatrix} \quad (95)$$

É importante observar que normalmente as simulações feitas em vigas flexíveis girantes são realizadas utilizando uma das extremidades engastada, levando a condições de contorno particulares, de acordo com a figura. Tal condição será utilizada no presente trabalho.

Figura 8- Desenho esquemático de uma viga 4 GDL discretizada em três elementos na condição engastada-livre.



Fonte: Próprio autor.

Assim sendo, pela condição de contorno engastada-livre, as duas primeiras coordenadas são nulas, o que elimina as duas primeiras linhas e colunas da matriz 95. Neste caso, pode-se reescrever na forma:

$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} m_{33} & m_{34} & . & . & . & m_{38} \\ m_{43} & m_{44} & . & . & . & m_{48} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ m_{83} & m_{84} & . & . & . & m_{88} \end{pmatrix} \quad (96)$$

O exemplo usado nesta subseção foi apenas para a obtenção da matriz de massa. Cabe ressaltar que o mesmo princípio é válido também para a construção da matriz rigidez.

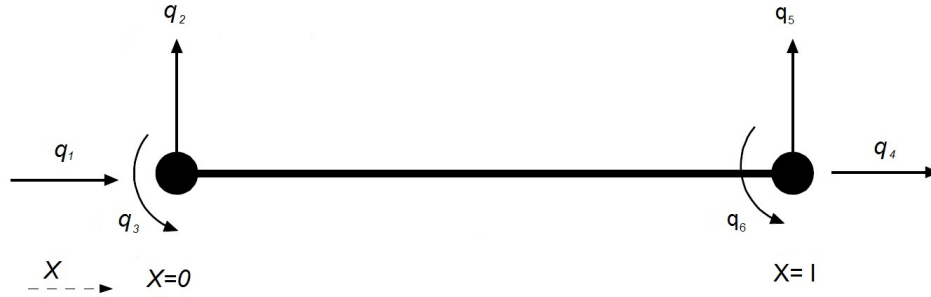
4.2 SEIS GRAUS DE LIBERDADE POR ELEMENTO

4.2.1 Propriedades do Elemento

Analogamente a seção 4.1, a discretização da estrutura será feita agora com um elemento de viga com 3 GDL por nó, conforme mostra a figura 9.

De acordo com a figura 9, l é o comprimento do elemento, q_1 é o deslocamento longitudinal do nó 1, q_2 é o deslocamento transversal do nó 1, q_3 é o deslocamento angular do nó 1, q_4 é o deslocamento longitudinal no nó 2, q_5 é o deslocamento transversal do nó 2 e

Figura 9- Desenho esquemático de um elemento finito de viga 6 GDL.



Fonte: Próprio autor.

q_6 é o deslocamento angular do nó 2. Sendo assim, o vetor deslocamento nodal pode ser escrito como:

$$q_i = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6]^T \quad (97)$$

As funções de forma para os deslocamentos vertical e angular podem ser aproveitadas da seção 4.1.1. Para os deslocamentos longitudinais, a interpolação usada será linear. Assim, as funções de forma são descritas pelas expressões abaixo:

$$\Psi_1 = 1 - \left(\frac{x}{l}\right) \quad (98)$$

$$\Psi_2 = 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 1 \quad (99)$$

$$\Psi_3 = \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right) \right] l \quad (100)$$

$$\Psi_4 = \left(\frac{x}{l}\right) \quad (101)$$

$$\Psi_5 = -2\left(\frac{x}{l}\right)^3 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (102)$$

$$\Psi_6 = \left[\left(\frac{x}{l}\right)^3 - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] l \quad (103)$$

Conforme dito anteriormente, as funções de forma para o deslocamento longitudinal são interpoladas linearmente, enquanto os deslocamentos transversal e angular são interpolados com uma função polinomial de ordem três. Sendo assim, pode-se reescrevê-las de acordo com suas interpolações, conforme relação 104:

$$\begin{aligned}\Psi_{\mathbf{u}} &= \begin{bmatrix} \Psi_1 & 0 & 0 & \Psi_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\ \Psi_{\mathbf{v}} &= \Psi_{\mathbf{w}} = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_2 & \Psi_3 & 0 & \Psi_5 & \Psi_6 \end{bmatrix}^T\end{aligned}\quad (104)$$

O vetor função de forma total pode ser escrito na forma:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \Psi_3 & \Psi_4 & \Psi_5 & \Psi_6 \end{bmatrix}^T \quad (105)$$

4.2.2 Matriz de massa

Para obter a matriz de massa do sistema com 6 GDL, faz-se necessário integrar a equação 106 obtida na seção 3.11.

$$\mathbf{M} = \int_e^{e+l} \rho A [\Psi]^T [\Psi] dx \quad (106)$$

Através do mesmo procedimento usado na subseção 4.1.2, a matriz de massa elementar resulta em:

$$M_{ij} = \rho A \begin{pmatrix} \frac{1}{3}l & \frac{7}{20}l & \frac{1}{20}l^2 & \frac{1}{6}l & \frac{3}{20}l & -\frac{1}{30}l^2 \\ \frac{7}{20}l & \frac{13}{35}l & \frac{11}{210}l^2 & \frac{3}{20}l & \frac{9}{70}l & -\frac{13}{420}l^2 \\ \frac{1}{20}l^2 & \frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 & \frac{1}{30}l^2 & \frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 \\ \frac{1}{6}l & \frac{3}{20}l & \frac{1}{30}l^2 & \frac{1}{3}l & \frac{7}{20}l & -\frac{1}{20}l^2 \\ \frac{3}{20}l & \frac{9}{70}l & \frac{13}{420}l^2 & \frac{7}{20}l & \frac{13}{35}l & -\frac{11}{210}l^2 \\ -\frac{1}{30}l^2 & -\frac{13}{420}l^2 & -\frac{1}{140}l^3 & -\frac{1}{20}l^2 & -\frac{11}{210}l^2 & \frac{1}{105}l^3 \end{pmatrix} \quad (107)$$

4.2.3 Matriz de rigidez

Novamente reaproveitando todo equacionamento da subseção 4.1.3 na qual tratou de obter a matriz de rigidez para o elemento de viga com 4 GDL, pode-se encontrar a matriz de rigidez para um elemento de viga com 6 GDL. A equação 108 mostra as parcelas que compõe a matriz:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_u &= \int_e^{e+l} EA [\Psi'_u]^T [\Psi'_u] dx \\ \mathbf{K}_v &= \int_e^{e+l} EI_{lag} [\Psi''_v]^T [\Psi''_v] dx \\ \mathbf{K}_{gv} &= \int_e^{e+l} T_{axial} [\Psi']^T [\Psi'] dx \end{aligned} \quad (108)$$

A matriz de rigidez elementar pode ser obtida através da soma das parcelas da equação 108 resultando na equação 109.

$$K_{ij} = \int_e^{e+l} EA \frac{d\Psi_i}{dx} \frac{d\Psi_j}{dx} dx + \int_e^{e+l} EI \frac{d^2\Psi_i}{dx^2} \frac{d^2\Psi_j}{dx^2} dx + \int_e^{e+l} T_{axial}(x) \frac{d\Psi_i}{dx} \frac{d\Psi_j}{dx} dx \quad (109)$$

O primeiro termo da energia potencial se refere à energia de deformação devido a tensão de tração (normal à seção transversal). A segunda parcela se refere à energia de deformação devido a tensão de flexão (tangencial à seção transversal). Já o terceiro termo se refere à energia de deformação devido a força centrífuga. Calculando todas as parcelas, a matriz de rigidez elementar resultante é dada por:

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} + \frac{\Omega^2 A_i}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 & -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 0 \\ \frac{1}{l} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{l} & -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{1}{l} & 0 & \frac{1}{l} & \frac{1}{l} & 0 \\ -\frac{1}{l} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{l} & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{pmatrix} \\ &\quad (110) \\ &\quad -\rho A \Omega^2 \begin{pmatrix} \frac{3l^2 X_i + l^3}{6l^2} & \frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & \frac{5lX_i + 2l^2}{60} & -\frac{3l^2 X_i + l^3}{6l^2} & -\frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & -\frac{5lX_i + 2l^2}{60} \\ \frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & \frac{42X_i + 12l}{70} & \frac{l(14X_i + 5l)}{140} & -\frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & -\frac{42X_i + 12l}{70} & -\frac{l^2}{70} \\ \frac{5lX_i + 2l^2}{60} & \frac{l(14X_i + 5l)}{140} & \frac{l^2(7X_i + 2l)}{210} & -\frac{5lX_i + 2l^2}{60} & -\frac{l(14X_i + 5l)}{140} & -\frac{l^2(7X_i + 3l)}{420} \\ -\frac{3l^2 X_i + l^3}{6l^2} & -\frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & -\frac{5lX_i + 2l^2}{60} & \frac{3l^2 X_i + l^3}{6l^2} & \frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & \frac{5lX_i + 2l^2}{60} \\ -\frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & -\frac{42X_i + 12l}{70} & -\frac{l(14X_i + 5l)}{140} & \frac{10lX_i + 3l^2}{20l} & \frac{42X_i + 12l}{70} & \frac{l^2}{70} \\ -\frac{5lX_i + 3l^2}{60} & -\frac{l^2}{70} & -\frac{l^2(7X_i + 3l)}{420} & \frac{5lX_i + 3l^2}{60} & \frac{l^2}{70} & \frac{l^2(7X_i + 3l)}{70} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2.4 Matriz giroscópica

A matriz giroscópica é a parcela das equações obtidas na seção 3.11 que acopla os modos longitudinal e *lag*. Esta parcela não é levada em consideração na discretização com 4 GDL pelo fato do mesmo não contemplar o modo axial. A construção desta matriz pode ser feita de acordo com a equação 111 obtida na seção 3.11.

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \mathbf{G}_{\mathbf{uv}} + \mathbf{G}_{\mathbf{vu}} \\ \mathbf{G} &= \int_e^{e+l} \rho A [\Psi_{\mathbf{u}}]^T [\Psi_{\mathbf{v}}] dx + \int_e^{e+l} \rho A [\Psi_{\mathbf{v}}]^T [\Psi_{\mathbf{u}}] dx\end{aligned}\quad (111)$$

Neste caso, a matriz giroscópica responsável pelo acoplamento entre os modos longitudinal e *lag* pode ser escrita na forma:

$$G_{ij} = \rho A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{20}l & 0 & 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 \\ \frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & \frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{7}{20}l & 0 & 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 \\ \frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & \frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \rho A \begin{pmatrix} 0 & \frac{7}{20}l & \frac{1}{20}l^2 & 0 & \frac{3}{20}l & -\frac{1}{30}l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}l & \frac{1}{30}l^2 & 0 & \frac{7}{20}l & -\frac{1}{20}l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (112)$$

Reescrevendo em uma única matriz, tem-se:

$$G_{ij} = \rho A \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{20}l & -\frac{1}{20}l^2 & 0 & -\frac{3}{20}l & \frac{1}{30}l^2 \\ \frac{7}{20}l & 0 & 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 \\ \frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & \frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{20}l & -\frac{1}{30}l^2 & 0 & -\frac{7}{20}l & \frac{1}{20}l^2 \\ \frac{7}{20}l & 0 & 0 & \frac{3}{20}l & 0 & 0 \\ \frac{1}{20}l^2 & 0 & 0 & \frac{1}{30}l^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad (113)$$

4.2.5 Forças rotacional e tangencial

As forças internas que atuam na dinâmica de vigas flexíveis girantes foram obtidas na seção 3.11, sendo elas: uma componente rotacional relacionada à velocidade angular e uma componente tangencial relacionada a aceleração angular, conforme equações 114 e 115:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{u}} = \dot{\phi}^2(t) \int_e^{e+l} \rho A (e+x) [\Psi_{\mathbf{u}}] dx\quad (114)$$

$$\mathbf{F}_v = \ddot{\phi}(t) \int_e^{e+l} \rho A(e+x) [\Psi_v] dx \quad (115)$$

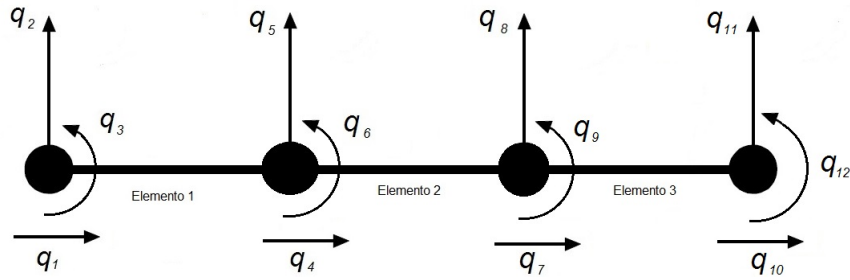
Portanto, a força total interna que atua na viga é uma somatória das duas parcelas. Ao resolver as integrais, obtém-se:

$$F_i = \dot{\phi}^2(t) \rho A \begin{pmatrix} \frac{3lX_i+l^2}{6} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{3lX_i+2l^2}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \ddot{\phi}(t) \rho A \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{10lX_i+3l^2}{20} \\ \frac{5l^2X_i+5l^3}{60} \\ 0 \\ \frac{10lX_i+7l^2}{20} \\ -\frac{5l^2X_i+3l^3}{60} \end{pmatrix} \quad (116)$$

4.2.6 Construção das matrizes globais

Para este caso a construção segue o mesmo princípio usado na subseção 4.1.4, porém com o elemento possuindo 3 GDL por nó (6 GDL por elemento), conforme figura 10. Neste caso a matriz elementar será seis por seis (6X6).

Figura 10- Desenho esquemático de uma viga 6 GDL discretizada em três elementos.



Fonte: Próprio autor.

Assim, para calcular a matriz global, basta somar os elementos, conforme figura 117:

$$M_{TOT} = M_{123456} + M_{456789} + M_{789101112} \quad (117)$$

Ou escrevendo matricialmente:

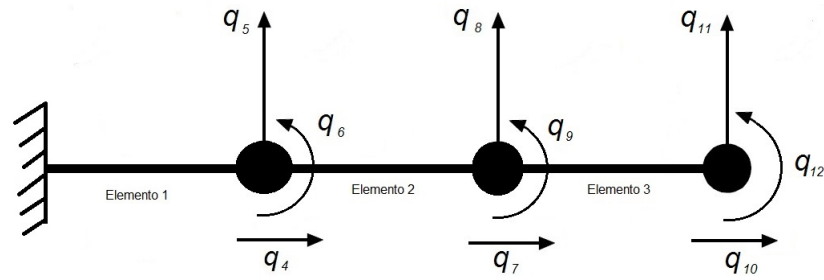
$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & . & . & . & . & . & . \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & . & . & . & . & . & . \\ \times & \times & \times & \times & \times & \times & . & . & . & . & . & . \\ \times & \times & \times & \otimes & \otimes & \otimes & O & O & O & . & . & . \\ \times & \times & \times & \otimes & \otimes & \otimes & O & O & O & . & . & . \\ \times & \times & \times & \otimes & \otimes & \otimes & O & O & O & . & . & . \\ . & . & . & O & O & O & \oplus & \oplus & \oplus & + & + & + \\ . & . & . & O & O & O & \oplus & \oplus & \oplus & + & + & + \\ . & . & . & O & O & O & \oplus & \oplus & \oplus & + & + & + \\ . & . & . & . & . & . & + & + & + & + & + & + \\ . & . & . & . & . & . & + & + & + & + & + & + \\ . & . & . & . & . & . & + & + & + & + & + & + \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \\ q_7 \\ q_8 \\ q_9 \\ q_{10} \\ q_{11} \\ q_{12} \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \times \longrightarrow \textit{Elemento} \quad 1 \\ O \longrightarrow \textit{Elemento} \quad 2 \\ + \longrightarrow \textit{Elemento} \quad 3 \end{array} \right. \quad (118)$$

Com isso, a matriz global de massa tem sua forma demonstrada conforme a figura 119.

$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & m_{112} \\ m_{21} & m_{22} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & m_{212} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ m_{121} & m_{122} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & m_{1212} \end{pmatrix} \quad (119)$$

Aplicando a condição de contorno engastada-livre, exclui-se as três primeiras linhas e as três primeiras colunas da matriz 119, conforme visto da figura 11:

Figura 11- Desenho esquemático de uma viga 6 GDL discretizada em três elementos na condição engastada-livre.



Fonte: Próprio autor.

Portanto, após aplicar a condição de contorno, tem-se a matriz 120:

$$M_{TOT} = \begin{pmatrix} m_{41} & m_{42} & . & . & . & . & . & . & m_{412} \\ m_{51} & m_{52} & . & . & . & . & . & . & m_{512} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ m_{121} & m_{122} & . & . & . & . & . & . & m_{1212} \end{pmatrix} \quad (120)$$

Assim como na subseção 4.1.4, esta apenas mostrou como exemplo a construção da matriz de massa. Porém, como se pode notar, o mesmo princípio pode ser considerado para a construção das matrizes de rigidez e giroscópicas, pois ambas possuem a mesma dimensão seis por seis (6X6). Para a construção dos vetores de forças internas, considere o vetor 121:

$$F_{TOT} = \begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \otimes \\ \otimes \\ \otimes \\ \oplus \\ \oplus \\ \oplus \\ + \\ + \\ + \end{pmatrix} \begin{cases} \times \longrightarrow Elemento & 1 \\ O \longrightarrow Elemento & 2 \\ + \longrightarrow Elemento & 3 \end{cases} \quad (121)$$

que pode ser escrito na forma:

$$F_{TOT} = \left\{ f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12} \right\}^T \quad (122)$$

Aplicando a condição de contorno engastada-livre:

$$F_{TOT} = \left\{ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12} \right\}^T \quad (123)$$

Portanto, após a discretização das equações presentes no capítulo 3, bem como a obtenção das matrizes de massa, rigidez e giroscópica e dos vetores das forças internas, pode-se realizar as simulações numéricas, com o intuito de validar toda modelagem proposta neste trabalho.

5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo é apresentada a validação de toda modelagem proposta no presente trabalho com dados já consolidados na literatura científica. Inicialmente são validadas as frequências naturais de uma viga flexível girante para dois casos distintos. Em seguida é feita a validação do comportamento dinâmico transitório da viga girante.

Para a primeira parte, a validação será feita utilizando o método dos Elementos Finitos com dois graus de liberdade por nó (chamado 4 GDL) e com três graus de liberdade por nó (chamado 6 GDL) para discretizar as equações dos modos *lag* e *flap*. O objetivo, além da validação, é comparar o desempenho do modelo com 4 GDL com o modelo com 6 GDL, pois o primeiro possui a vantagem de demandar um menor tempo de processamento durante as simulações. A utilização do modelo com menor número de graus de liberdade para o caso do *lag* pode ser feita em virtude de seu desacoplamento com o modo longitudinal, de acordo com a seção 3.12. Para calcular as frequências naturais para o modo longitudinal deve ser utilizado um modelo com 6 GDL, pois tal modelo deve contemplar o modo axial.

Para a segunda parte, a validação será feita para a dinâmica transiente do modo *lag*. Serão utilizados dois tipos de vigas com dados obtidos em referências da literatura. Os resultados computados serão então comparados com aqueles disponibilizados em referências bibliográficas. Após a validação, será investigada a influência da matriz giroscópica no regime transiente da viga girante.

Vale ressaltar que toda simulação numérica foi feita em MatLab®, sendo disponibilizada no apêndice A.

5.1 VALIDAÇÃO DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

5.1.1 Teste de convergência

Este teste serve para verificar a quantidade de elementos que será necessário para que haja convergência dos valores finais obtidos. Sabe-se que o método dos Elementos Finitos não necessita de grandes quantidades de elementos para a sua convergência. Os parâmetros utilizados neste trabalho estão apresentados na tabela 1:

Tabela 1- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga utilizados para o teste de convergência.

L [m]	b [m]	h [m]	ρ [kg/m ³]	e [m]	Ω [rpm]	E [GPa]
2	0.05	0.005	2700	0.2	1000	70

Fonte: Lacarbonara et al. (2012).

Os valores resultantes para o modelo com 4 GDL estão presentes na tabela 2 e os valores para 6 GDL estão presentes na tabela 3:

Tabela 2- Convergência do método dos *Elementos Finitos* com 4 GDL.

Elem	ω_{f1}	ω_{f2}	ω_{f3}	ω_{l1}	ω_{l2}	ω_{l3}
1	121.56	325.73	N/A	98.17	705.95	N/A
2	118.69	291.85	492.81	90.75	489.07	1461.58
3	116.82	285.55	474.83	89.21	485.10	1238.84
4	115.90	283.19	467.39	88.64	484.01	1231.64
5	115.37	281.99	464.39	88.35	483.62	1227.17
6	115.05	281.30	462.96	88.17	483.448	1225.26
7	114.84	280.85	462.16	88.05	483.35	1224.37
8	114.69	280.55	461.65	87.97	483.30	1223.91
9	114.59	280.34	461.30	87.91	483.26	1223.66
10	114.51	280.19	461.06	87.86	483.24	1223.51

Fonte: Autor.

Tabela 3- Convergência do método dos *Elementos Finitos* com 6 GDL.

Elem	ω_{f1}	ω_{f2}	ω_{f3}	ω_{l1}	ω_{l2}	ω_{l3}	ω_{a1}	ω_{a2}	ω_{a3}
1	121.56	325.73	44098.58	98.16	705.79	44113.60	3997.95	12312.55	26596.70
2	118.69	291.85	492.80	90.73	488.81	1461.14	3997.68	12005.05	20213.06
3	116.83	285.55	474.82	89.19	484.83	1237.11	3997.68	11997.52	20019.98
4	115.89	283.19	467.39	88.61	483.73	1229.88	3997.68	11996.85	19999.95
5	115.37	281.99	464.39	88.33	483.32	1225.30	3997.68	11996.74	19996.35
6	115.05	281.29	462.96	88.15	483.14	1223.32	3997.68	11996.71	19995.45
7	114.84	280.85	462.16	88.03	483.05	1222.38	3997.68	11996.70	19995.17
8	114.69	280.55	461.65	87.95	482.99	1221.89	3997.68	11996.70	19995.07
9	114.59	280.34	461.30	87.89	482.95	1221.62	3997.68	11996.70	19995.02
10	114.51	280.18	461.05	87.84	482.93	1221.45	3997.68	11996.70	19995.01

Fonte: Autor.

Nota-se que para diminuir a quantidade de elementos sem perder a precisão dos resultados, a utilização de 10 elementos finitos torna-se uma opção viável independentemente do tipo de vibração que se está analisando e independente dos modelos utilizados. Os resultados dos casos apresentados nas seções 5.1.2 e 5.1.3 são baseados na implementação numérica com 10 elementos.

5.1.2 Caso 1

Lacarbonara et al. (2012) utilizaram uma modelagem que considera os efeitos dinâmicos dos dois modos transversais (*flap* e *lag*), do modo longitudinal (axial) e do modo torcional. A solução é aproximada pelo método de Galerkin, com quatro coordenadas generalizadas para representar os quatro modos citados. A tabela 4 apresenta os parâmetros físicos e geométricos da viga considerada.

Tabela 4- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 1.

L [m]	b [m]	h [m]	ρ [kg/m ³]	e [m]	Ω [rpm]	E [GPa]
2	0.05	0.005	2700	0.2	1000	70

Fonte: Lacarbonara et al. (2012).

Na tabela 5 é feita a validação dos modelos propostos, onde são avaliadas as três primeiras frequências naturais referentes aos modos *lag* e *flap* para o modelo com quatro 4 GDL e na tabela 6 as três primeiras frequências naturais referente ao *lag*, *flap* e *axial* para o modelo com 6 GDL.

Tabela 5- Comparação entre as três primeiras frequências naturais [rad/s] para os modos de *lag* e *flap* com 4 GDL.

Fonte	ω_{f1}	ω_{f2}	ω_{f3}	ω_{l1}	ω_{l2}	ω_{l3}
Presente análise - 4 GDL	114.51	280.19	461.06	87.86	483.24	1223.51
Lacarbonara et al. (2012)	114.10	279.54	460.10	87.25	481.39	1213.14
Error [%]	0.36	0.23	0.21	0.70	0.38	0.85

Fonte: Autor.

Tabela 6- Comparação entre as três primeiras frequências naturais [rad/s], para os modos de *lag*, *flap* e *axial* com 6 GDL.

Fonte	ω_{f1}	ω_{f2}	ω_{f3}	ω_{l1}	ω_{l2}	ω_{l3}
Presente análise - 6 GDL	114.51	280.18	461.05	87.84	482.93	1221.45
Lacarbonara et al. (2012)	114.10	279.54	460.10	87.25	481.39	1213.14
Error [%]	0.36	0.23	0.21	0.68	0.32	0.68
Fonte	ω_{a1}	ω_{a2}	ω_{a3}			
Presente análise	3997.68	11996.70	19995.01			
Lacarbonara et al. (2012)	4003.18	11998.51	19996.08			
Error [%]	0.14	0.02	<0.01			

Fonte: Autor.

Pela análise da tabela 5, nota-se que o modelo proposto com 4 GDL apresenta erros inferiores a 1%, o que se torna interessante em virtude do número reduzido de graus de liberdade e consequentemente na diminuição do tempo de processamento. Analisando a tabela 6, percebe-se que para o modelo com 6 GDL também se obtém um resultado satisfatório com relação a todos os modos de vibrar, atingindo erros inferiores a 1%.

5.1.3 Caso 2

Yokoyama (1988) realizou uma modelagem considerando a tensão de cisalhamento, o que resulta em uma matriz de rigidez com uma parcela cisalhante. Outra diferença encontrada, com relação ao modelo utilizado neste trabalho, é a consideração da inércia rotacional, o que gera uma parcela extra na matriz de massa. O mesmo autor utiliza o modelo de viga de *Timoshenko* para obter as equações do movimento e emprega o método de elementos finitos, utilizando um elemento de viga com quatro nós para discretizar a estrutura. Hsieh e Abel (1995) e Saracho (1998) compararam a influência de utilizar massas pontuais e massas distribuídas. Estes autores empregam o método lagrangiano para obter as equações do movimento e, para discretizar, utilizam o método dos elementos finitos tendo como elemento um sólido de vinte nós. Nestes estudos, foi levado em conta o efeito da inércia rotacional, mas não foi considerado o efeito cisalhante.

A tabela 7 apresenta os parâmetros da viga utilizada na presente análise.

Tabela 7- Parâmetros físicos e geométricos para o caso 2.

L [m]	b [m]	h [m]	ρ [kg/m ³]	E [GPa]
0.328	0.028	0.003	7850	217

Fonte: Saracho (1998).

A análise foi feita primeiramente sem levar em consideração a presença de um rotor ($\frac{e}{L} = 0$, sendo L o comprimento da viga e e é a distância do eixo de rotação à viga), ou seja, o eixo de rotação está presente no início da viga. Numa análise posterior, foram obtidos os resultados considerando um rotor de mesmo comprimento da viga ($\frac{e}{L} = 1$). A velocidade angular foi normalizada de acordo com a equação 124.

$$\Omega_N = \Omega \sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}} \quad (124)$$

sendo que os valores escolhidos para as velocidades angulares foram iguais a: $\Omega_N=2, 4, 5, 6, 8, 10, 20$ e 50 .

A tabela 8 apresenta os resultados obtidos para o modo *flap*.

Tabela 8- Comparação entre as frequências naturais normalizadas para o modo *flap*.

Ω_N	Fonte	$\frac{e}{L} = 0$		$\frac{e}{L} = 1$	
		1º modo	2º modo	1º modo	2º modo
2	Presente Trabalho 4 GDL	4.14	22.62	4.84	23.37
	Presente Trabalho 6 GDL	4.14	22.61	4.84	23.36
	Saracho (1998)	4.18	22.98	4.88	23.72
	Hsieh e Abel (1995)	4.18	22.67	4.87	23.40
	Yokoyama (1988)	4.14	22.62	4.83	23.37
4	Presente Trabalho 4 GDL	5.59	24.28	7.48	26.96
	Presente Trabalho 6 GDL	5.59	24.27	7.48	26.96
	Saracho (1998)	5.63	24.62	7.52	27.28
	Hsieh e Abel (1995)	5.63	24.28	7.51	26.87
	Yokoyama (1988)	5.59	24.28	7.48	26.96
6	Presente Trabalho 4 GDL	7.37	26.82	10.45	32.03
	Presente Trabalho 6 GDL	7.37	26.81	10.45	32.03
	Saracho (1998)	7.40	27.12	10.49	32.32
	Hsieh e Abel (1995)	7.40	26.74	10.47	31.79
	Yokoyama (1988)	7.36	26.81	10.44	32.03
8	Presente Trabalho 4 GDL	9.28	30.01	13.52	37.96
	Presente Trabalho 6 GDL	9.28	30.00	13.52	37.96
	Saracho (1998)	9.30	30.25	13.57	38.20
	Hsieh e Abel (1995)	9.30	29.84	13.54	37.55
	Yokoyama (1988)	9.26	30.00	13.51	37.96
10	Presente Trabalho 4 GDL	11.28	33.66	16.63	44.38
	Presente Trabalho 6 GDL	11.23	33.65	16.62	44.38
	Saracho (1998)	11.25	33.78	16.67	44.52
	Hsieh e Abel (1995)	11.25	33.39	16.64	43.77
	Yokoyama (1988)	11.20	33.64	16.61	44.38

Fonte: Autor.

Ao se comparar os dados do presente trabalho com os resultados publicados, verifica-se que os modelos estão de acordo com o proposto pela comunidade científica. Os modelos propostos obtiveram valores muito semelhantes ao de Yokoyama (1988). Em comparação com os resultados de Saracho (1998) e Hsieh e Abel (1995), cujo trabalho foi a modelagem utilizando um elemento sólido com vinte nós, a discrepância foi ligeiramente maior. Esse resultado é interessante do ponto de vista matemático e numérico, pois modelos mais simplificados demandam um menor tempo de processamento numérico.

A tabela 9 apresenta os resultados obtidos para o modo *lag*.

Tabela 9- Comparação entre as frequências naturais normalizadas para o modo *lag*.

Ω_N	Fonte	$\frac{e}{L} = 0$		$\frac{e}{L} = 1$	
		1º modo	2º modo	1º modo	2º modo
2	Presente Trabalho 4 GDL	3.62	22.53	4.40	23.28
	Presente Trabalho 6 GDL	3.62	22.31	4.40	23.08
	Saracho (1998)	3.68	22.90	4.45	23.64
	Hsieh e Abel (1995)	3.68	22.59	4.45	23.31
	Yokoyama (1988)	3.62	22.53	4.40	23.28
5	Presente Trabalho 4 GDL	4.09	24.95	7.42	28.93
	Presente Trabalho 6 GDL	4.08	24.76	7.41	28.74
	Saracho (1998)	4.15	25.30	7.47	29.25
	Hsieh e Abel (1995)	4.16	24.94	7.46	28.78
	Yokoyama (1988)	4.07	24.95	7.41	28.93
10	Presente Trabalho 4 GDL	5.10	32.14	13.28	43.24
	Presente Trabalho 6 GDL	5.06	31.95	13.24	43.05
	Saracho (1998)	5.19	32.46	13.35	43.54
	Hsieh e Abel (1995)	5.22	31.92	13.32	42.67
	Yokoyama (1988)	5.05	32.12	13.26	43.24
20	Presente Trabalho 4 GDL	6.94	51.41	25.35	76.66
	Presente Trabalho 6 GDL	6.76	51.17	25.24	76.38
	Saracho (1998)	7.12	51.75	25.48	77.03
	Hsieh e Abel (1995)	7.17	50.66	25.39	72.68
	Yokoyama (1988)	6.79	51.37	25.32	76.66
50	Presente Trabalho 4 GDL	11.26	116.46	61.88	182.29
	Presente Trabalho 6 GDL	10.38	115.97	61.58	181.71
	Saracho (1998)	12.30	117.30	62.35	183.32
	Hsieh e Abel (1995)	12.44	113.83	62.50	176.39
	Yokoyama (1988)	10.90	116.42	61.88	182.39

Fonte: Autor.

Neste caso, mesmo Yokoyama (1988) levando em consideração o efeito cisalhante e a inércia rotacional, as discrepâncias são baixas, o que viabiliza a utilização deste modelo para futuras análises dinâmicas do sistema. Em relação a Hsieh e Abel (1995) e Saracho (1998), os valores também estão pouco divergentes, devido ao fato de serem utilizados elementos distintos para discretizar o sistema.

5.2 VALIDAÇÃO EM REGIME TRANSIENTE

Para validar a dinâmica dos modelos propostos serão utilizados dois modelos como referência, ambos disponíveis na literatura científica: Saracho (2002) para o caso 3 e Cai et al. (2004) e Liu et al. (2009) para o caso 4. Considerando que a viga é submetida às

seguintes velocidade e aceleração:

$$\dot{\phi}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\omega_s}{T_s}\right)t - \left(\frac{\omega_s}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right) & 0 \leq t \leq T_s \\ \omega_s & t > T_s \end{cases} \quad (125)$$

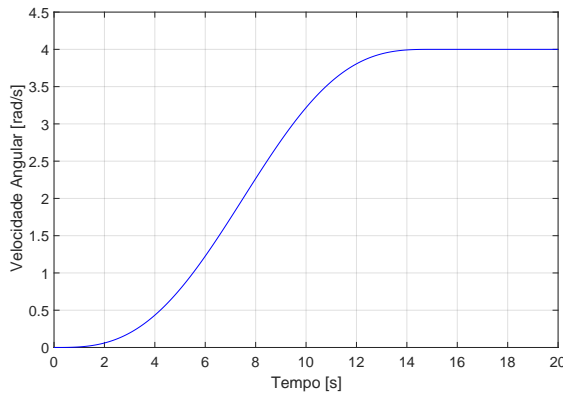
$$\ddot{\phi}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\omega_s}{T_s}\right)\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T_s}\right)\right) & 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & t > T_s \end{cases} \quad (126)$$

onde:

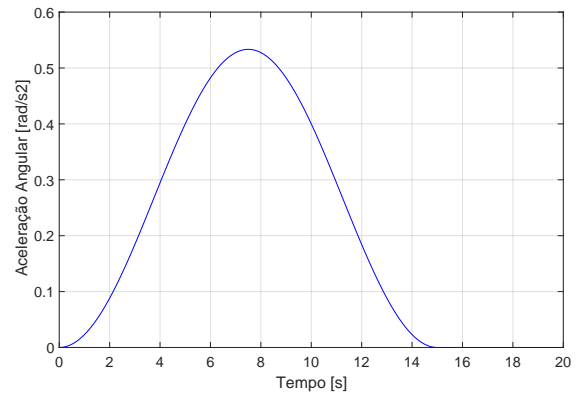
- ω_s é a velocidade angular atingida ao final do regime transiente.
- T_s é o tempo de partida, ou seja, tempo de duração do regime transiente.
- t é o tempo total da simulação que será de 20 segundos.

Fisicamente, a utilização deste tipo de equação para aproximar a variação da rotação de entrada é razoável, pois esta leva em conta o transiente do rotor até seu tempo de estabelecimento, ou seja, tempo onde a velocidade angular se torna constante e a aceleração angular se torna nula. A análise da figura 12 ajuda na interpretação física deste efeito.

Figura 12- Perfil da velocidade e da aceleração angular ao longo do tempo, para $T_s=15s$ e $\omega_s=4$ rad/s.



(a) Velocidade.



(b) Aceleração.

Fonte: Próprio autor.

5.2.1 Teste de convergência

O teste de convergência, assim como na subseção 5.1.1, serve para truncar o número de elementos finitos a serem utilizados de forma a garantir uma precisão adequada nos resultados obtidos e diminuir o tempo de processamento numérico. Sendo assim, para estes testes são utilizados os parâmetros físicos e geométricos mostrados na tabela 10.

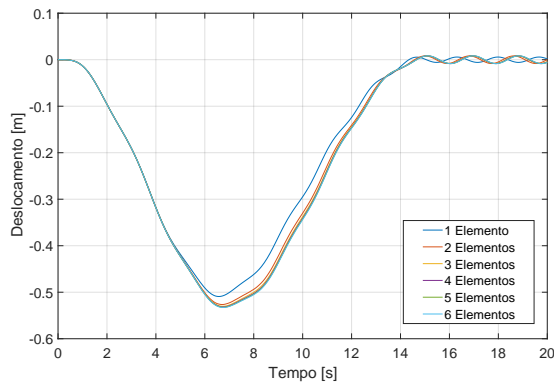
Tabela 10- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o teste de convergência.

L [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	ρ [kg/m ³]	e [m]	E [GPa]
8	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$8.218 \cdot 10^{-9}$	2766.67	0.0	68.95

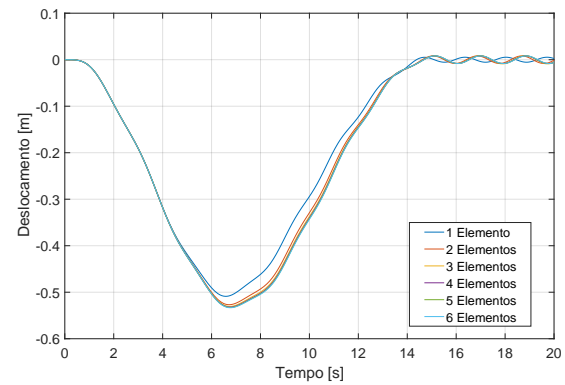
Fonte: Saracho (2002).

A figura 13 mostra os resultados dos testes de convergência para o modelo com 4 GDL e 6 GDL, utilizando $\omega_s=4$ rad/s. Já a figura 14 mostra o mesmo teste para $\omega_s=12$ rad/s.

Figura 13- Teste de convergência para os modelos com 4 GDL e 6 GDL, utilizando $\omega_s=4$ rad/s.



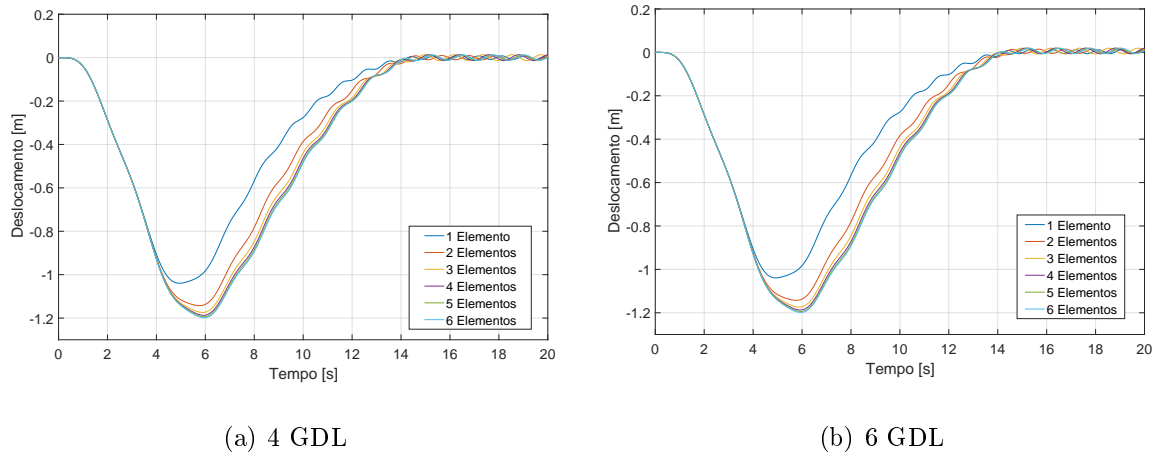
(a) 4 GDL



(b) 6 GDL

Fonte: Próprio autor.

Figura 14- Teste de convergência para os modelos com 4 GDL e 6 GDL, utilizando $\omega_s=12$ rad/s.



Fonte: Próprio autor.

Percebe-se que, como verificado na subseção 5.1.1, o método dos Elementos Finitos é um método robusto, não necessitando de muitos elementos para atingir um resultado satisfatório. Tanto o modelo com 4 GDL como o de 6 GDL apresentaram convergência com cinco elementos para o regime transiente, de acordo com as figuras 13 e 14 para velocidades diferentes. Como pode ser mostrado, a convergência não é afetada pelas velocidades de rotação da viga. Com isso, para as próximas simulações presentes neste trabalho serão utilizados cinco elementos finitos, mesmo número de elementos usados por Cai et al. (2004) e Cai et al. (2005).

5.2.2 Caso 3

Neste caso, a validação será feita comparando-se os resultados obtidos com o trabalho desenvolvido por Saracho (2002). Em sua modelagem, a dinâmica do modo axial não foi levada em consideração, ou seja, não há o acoplamento entre os modos longitudinal e *lag*. Portanto, as matrizes giroscópicas não são levadas em consideração. A autora utiliza o método dos Modos Assumidos para obter a dinâmica em regime transiente. Diferentemente do método dos Elementos Finitos, este utiliza apenas um grau de liberdade, e sua interpolação é feita através de apenas uma função de forma específica para o caso de viga engastada-livre.

Cabe ressaltar que os dados usados como referência para validação dos modelos propostos são utilizados amplamente pela literatura. Os primeiros a obter tais valores foram Wu e Haug (1988). Os trabalhos de Ryu et al. (1994), Liu e Hong (2004), Cai et al. (2005),

García-Vallejo et al. (2005), Liu et al. (2009) e Du et al. (2018) também usaram os mesmos parâmetros físicos e geométricos para obter a dinâmica transiente da viga em questão. A escolha feita pelo presente trabalho se dá pelo fato de que Saracho (2002) utiliza quatro velocidades distintas, enquanto os demais autores utilizam apenas uma velocidade ($\omega_s=4$ rad/s).

Para a validação, seja a equação 127 obtida na seção 3.11:

$$\mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{q}}_v + 2\dot{\phi} \mathbf{G}_{vu} \dot{\mathbf{q}}_u + (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{gv} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_v) \mathbf{q}_v + \ddot{\phi} \mathbf{G}_{vu} \mathbf{q}_u = \mathbf{Q}_v - \mathbf{F}_v \quad (127)$$

Desconsiderando a dinâmica do modo longitudinal e também as forças generalizadas externas, a dinâmica pode ser descrita pela equação 128:

$$\mathbf{M}_v \ddot{\mathbf{q}}_v + (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{gv} - \dot{\phi}^2 \mathbf{M}_v) \mathbf{q}_v = -\mathbf{F}_v \quad (128)$$

Os parâmetros físicos e geométricos da viga flexível está presente na tabela 11:

Tabela 11- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 3.

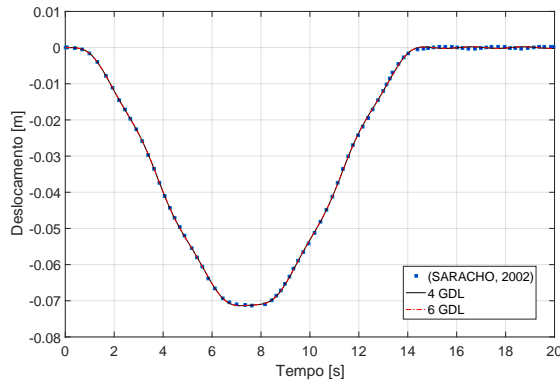
L [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	ρ [kg/m ³]	e [m]	E [GPa]
8	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$8.218 \cdot 10^{-9}$	2766.67	0.0	68.95

Fonte: Saracho (2002).

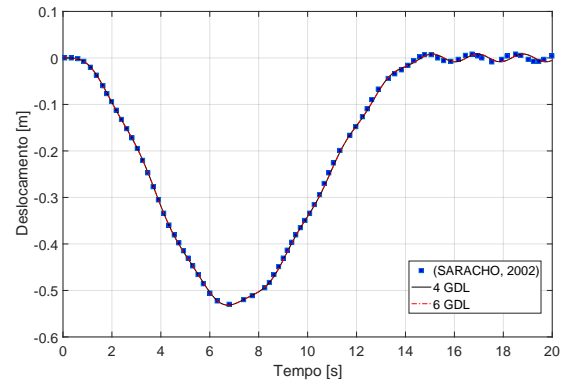
Para a validação serão utilizados quatro valores para ω_s , sendo: $\omega_s=0.5$ rad/s, $\omega_s=4$ rad/s, $\omega_s=6$ rad/s e $\omega_s=12$ rad/s. Ambos modelos serão utilizados, pois como não há acoplamento entre os modos axial e *lag*, o modelo com 4 GDL pode ser empregado. A figura 15 mostra a comparação entre os modelos propostos e o modelo de Saracho (2002):

Ao analisar a figura 15, percebe-se que ambos modelos propostos pelo presente trabalho obtiveram bons resultados para as velocidades $\omega_s=0.5$ rad/s, $\omega_s=4$ rad/s e $\omega_s=6$ rad/s em relação ao modelo feito por Saracho (2002). Para a velocidade $\omega_s=12$ rad/s, houve uma diferença na parte final do regime transiente. Esta diferença pode ser explicada pelo fato da referência utilizar um modo mais simples de discretização, usando apenas um grau de liberdade. Com isso, para maiores velocidades, onde a contribuição das parcelas que variam a rigidez aumenta, a convergência pode ser comprometida. Observa-se também

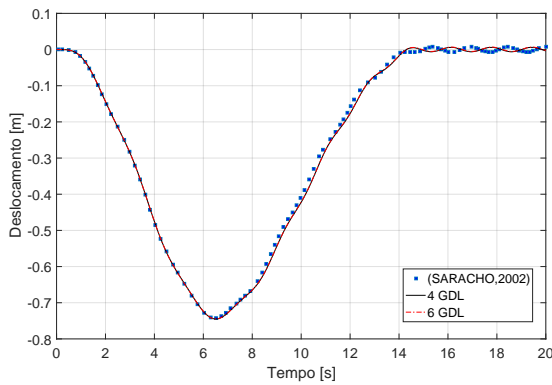
Figura 15- Validação dos modelos propostos para o caso 3.



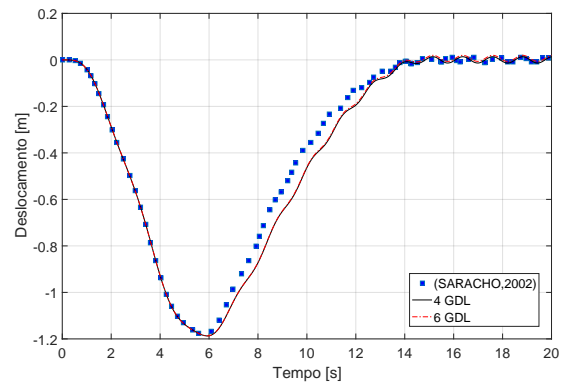
(a) $\omega_s = 0.5 \text{ rad/s}$



(b) $\omega_s = 4 \text{ rad/s}$



(c) $\omega_s = 6 \text{ rad/s}$



(d) $\omega_s = 12 \text{ rad/s}$

Fonte: Próprio autor.

para este caso que as modelagens propostas no presente trabalho apresentaram resultados satisfatórios e condizentes com a literatura científica. Vale ressaltar que com o modelo 4 GDL obtém-se os mesmos resultados com relação ao modelo 6 GDL. Assim, o modelo 4 GDL é mais interessante de ser utilizado do ponto de vista computacional, já que demanda menos tempo de processamento.

5.2.3 Caso 4

Assim como foi feita na validação das frequências naturais, um novo caso será apresentado para consolidar a validação dos modelos. A base para comparação serão os trabalhos desenvolvidos por Cai et al. (2004) e Liu et al. (2009). Enquanto o primeiro autor usa $\omega_s = 4 \text{ rad/s}$, o segundo autor utiliza $\omega_s = 1 \text{ rad/s}$, $\omega_s = 2 \text{ rad/s}$ e $\omega_s = 5 \text{ rad/s}$. Ambos os autores utilizam em sua modelagem o acoplamento entre os modos longitudinal e *lag*. Novamente, ambos os modelos propostos pelo presente trabalho serão avaliados, mesmo

que o modelo com 4 GDL não contemple tal acoplamento. Neste caso, a equação usada para o modelo com 6 GDL, de acordo com a seção 3.11, é escrita como^I:

$$\mathbf{M}_{uv}\ddot{\mathbf{q}}_{uv} + 2\dot{\phi}\mathbf{G}\dot{\mathbf{q}}_{uv} + (\mathbf{K}_{uv} + \mathbf{K}_{gv} - \dot{\phi}^2\mathbf{M}_{uv})\mathbf{q}_{uv} + \ddot{\phi}\mathbf{G}\mathbf{q}_{uv} = \mathbf{F}_{uv} \quad (129)$$

Para o modelo 4 GDL equação será a utilizada na subseção 5.2.2, sendo ela:

$$\mathbf{M}_v\ddot{\mathbf{q}}_v + (\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_{gv} - \dot{\phi}^2\mathbf{M}_v)\mathbf{q}_v = -\mathbf{F}_v \quad (130)$$

Os parâmetros físicos e geométricos da viga girante são mostrados nas tabelas 12 e 13:

Tabela 12- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 4, sendo $\omega_s=4$ rad/s.

L [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	ρ [kg/m ³]	e [m]	E [GPa]
1.8	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$1.3021 \cdot 10^{-10}$	2766	0.0	69

Fonte: Cai et al. (2004).

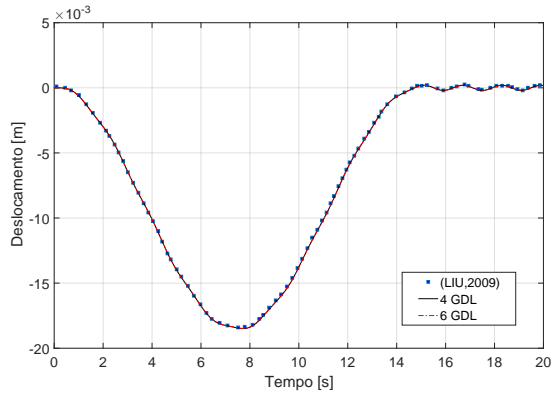
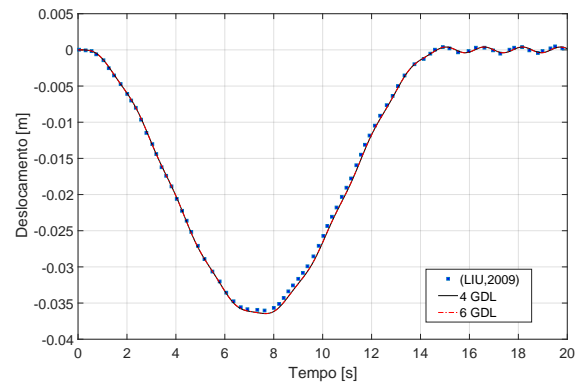
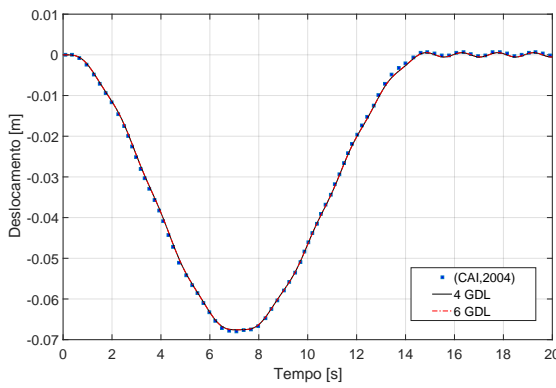
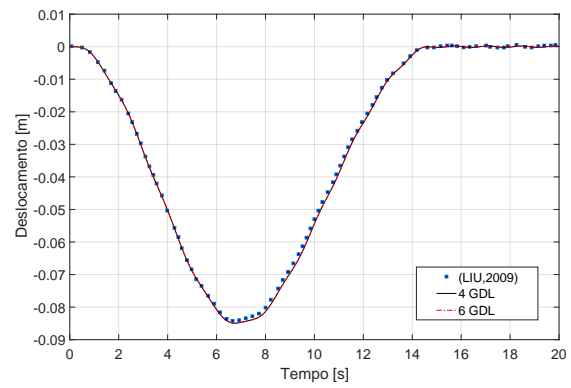
Tabela 13- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o caso 4, sendo $\omega_s=1$ rad/s, $\omega_s=2$ rad/s e $\omega_s=5$ rad/s.

L [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	ρ [kg/m ³]	e [m]	E [GPa]
1.8	$2.5 \cdot 10^{-4}$	$1.302 \cdot 10^{-10}$	2767	0.05	68.95

Fonte: Liu et al. (2009).

A figura 16 apresenta a comparação entre os resultados obtidos no presente trabalho com Cai et al. (2004) e Liu et al. (2009):

^IA parcela da força generalizada Q_{UV} já foi desconsiderada.

Figura 16- Validação dos modelos propostos para o caso 4.(a) $\omega_s = 1$ rad/s(b) $\omega_s = 2$ rad/s(c) $\omega_s = 4$ rad/s(d) $\omega_s = 5$ rad/s

Fonte: Próprio autor.

Através das figuras 16 (a), (b), (c) e (d), percebe-se que novamente ambos modelos forneceram resultados satisfatórios para todas as velocidades. Cabe ressaltar que, para o caso 4, os modelos utilizados neste trabalho apresentaram valores razoáveis também para o final do regime transiente e todo regime permanente, o que não aconteceu no caso 3. Tal diferença pode ocorrer pela escolha dos modos de discretização usados e pela quantidade de graus de liberdade escolhidos. Outro ponto de importante discussão é a escolha do modelo com 4 GDL em relação ao de 6 GDL. Pode-se deduzir que as parcelas da matriz giroscópica não influenciam no resultado para baixas velocidades, visto que os resultados do modelo com 4 GDL foram iguais aos resultados do modelo com 6 GDL.

5.2.4 Influência da matriz Giroscópica

De acordo com os casos 3 e 4, pôde-se verificar que alguns autores utilizam a matriz giroscópica. Sendo assim, faz-se necessário verificar a influência desta parcela em

determinadas velocidades. O teste será feito apenas para o modelo com 6 GDL, pois contempla, em sua modelagem, o acoplamento dos modos longitudinal e *lag*, através das matrizes giroscópicas. Neste caso, os parâmetros da viga girante utilizados nesta seção será semelhante ao utilizado no caso 3 e no teste de convergência, que pode ser observado novamente na tabela 14:

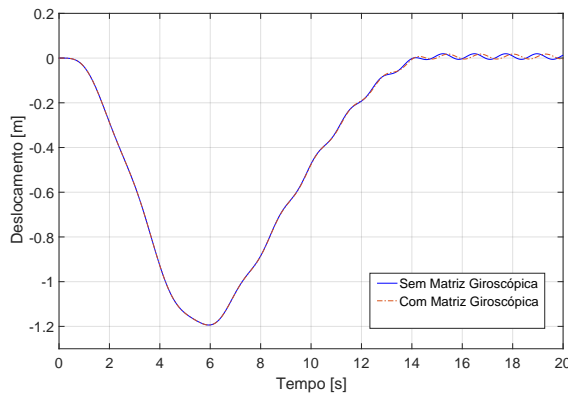
Tabela 14- Parâmetros físicos e geométricos de uma viga para o teste de convergência.

L [m]	A [m ²]	I [m ⁴]	ρ [kg/m ³]	e [m]	E [GPa]
8	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$8.218 \cdot 10^{-9}$	2766.67	0.0	68.95

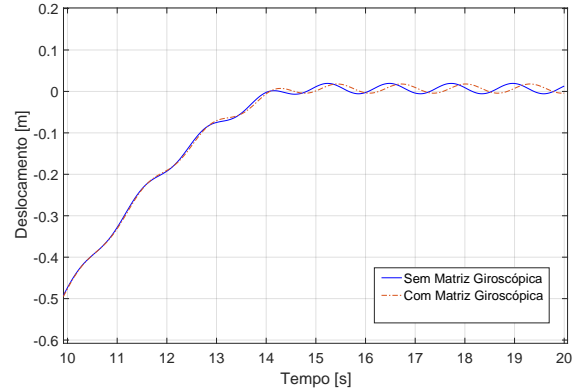
Fonte: Saracho (2002).

As velocidades empregadas neste caso serão de $\omega_s=12$ rad/s, $\omega_s=20$ rad/s, $\omega_s=30$ rad/s e $\omega_s=50$ rad/s, mostradas pelas figuras 17, 18, 19 e 20, respectivamente.

Figura 17- Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=12$ rad/s.



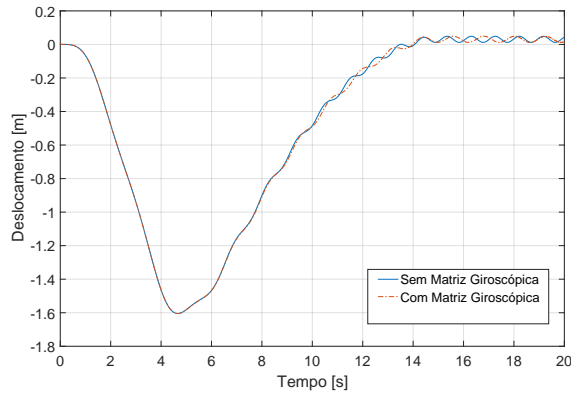
(a) Tempo: 0 a 20s.



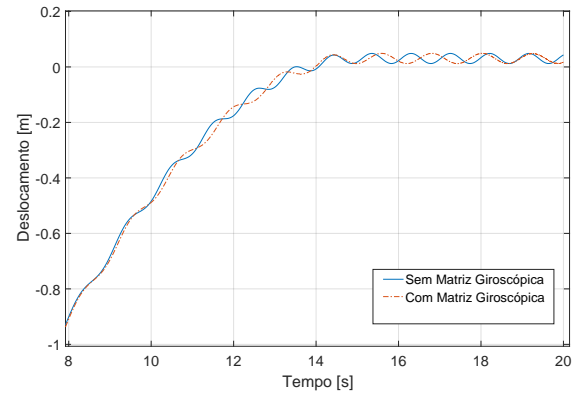
(b) Tempo: 10 a 20s.

Fonte: Próprio autor.

Figura 18- Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=20$ rad/s.



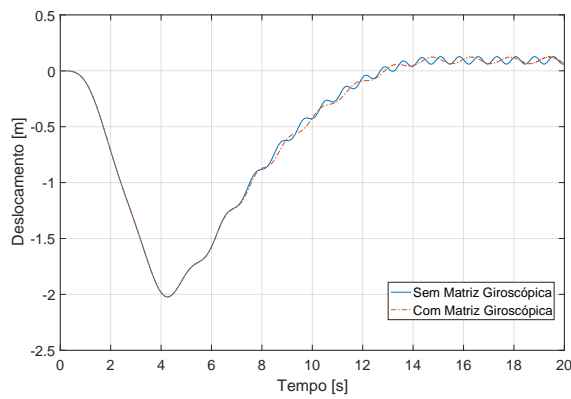
(a) Tempo: 0 a 20s.



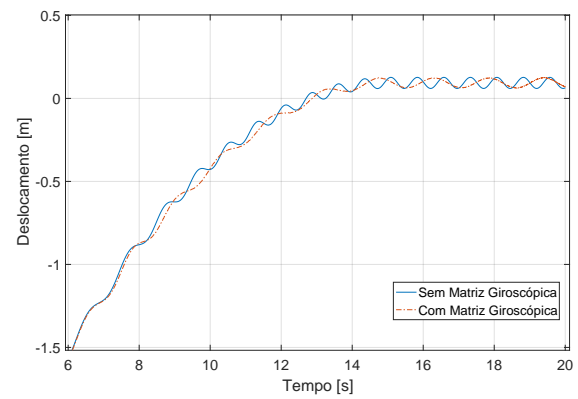
(b) Tempo: 08 a 20s.

Fonte: Próprio autor.

Figura 19- Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=30$ rad/s.



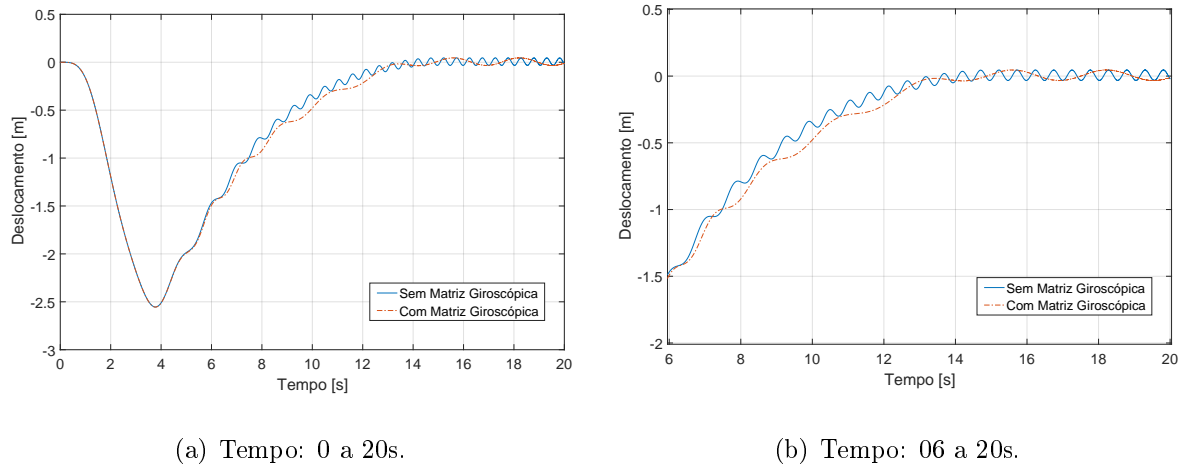
(a) Tempo: 0 a 20s.



(b) Tempo: 06 a 20s.

Fonte: Próprio autor.

Figura 20- Influência da matriz giroscópica para $\omega_s=50$ rad/s.



Fonte: Próprio autor.

Vale ressaltar que a intenção desta subseção é investigar a influência das parcelas giroscópicas que contribuem de duas maneiras: enquanto a primeira é influenciada pela velocidade angular e corresponde ao amortecimento do sistema, a segunda é influenciada pela aceleração e corresponde a um segundo enrijecimento da rigidez, de acordo com a equação 129. O que se observa é que a contribuição das parcelas da matriz giroscópica não afeta o deslocamento máximo, mas apenas modifica razoavelmente a parte final do regime transiente, atenuando a oscilação presente em altas velocidades, conforme visto especialmente nas figuras 19 (b) e 20 (b). Cabe ressaltar que para baixas velocidades não ocorre uma atenuação de oscilação perceptível, como mostrado nas figuras 17 (b) e 18 (b). Para tais valores verifica-se que a diferença se acentua. Porém é interessante comentar o fato de que, pelas características físicas da viga simulada, dificilmente a mesma atingiria tais velocidades angulares.

A investigação desta subseção mostra que, para velocidades baixas e médias, um modelo mais simplificado se torna atraente para descrever o movimento. Outra contribuição desta análise é que o modo longitudinal tem pouca influência na dinâmica do sistema para baixas velocidades, o que pode ser comprovado através da tabela 6 do caso 1, onde as primeiras frequências naturais são muito superiores em relação àquelas obtidas para os modos *lag* e *flap*.

6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Este trabalho apresentou a modelagem da dinâmica de uma hélice sendo representada por uma viga flexível de Euler-Bernoulli. Em seguida, seguiu-se para a obtenção das energias cinética e potencial da viga, e uma aproximação para o enrijecimento centrífugo foi proposta para contornar o problema estudado por Simo e Vu-Quoc (1987). Através da técnica de separação de variáveis, pôde-se utilizar a mecânica Lagrangiana para obter as equações que regem a dinâmica do sistema de vigas flexíveis girantes. O trabalho prosseguiu em discretizar a viga através do método dos Elementos Finitos, sendo utilizados dois modelos de viga, um com dois graus de liberdade por nó, chamado de 4 GDL e um com três graus de liberdade por nó, chamado 6 GDL.

Num primeiro momento, foram realizadas simulações numéricas através da implementação numérica em plataforma MatLab® para verificar a robustez do método dos Elementos Finitos através de um teste de convergência, onde foi verificado que dez elementos finitos seriam suficientes para que o método pudesse retornar valores com precisão satisfatória em relação as frequências naturais e cinco para o regime transiente. Num segundo momento, foi feita uma série de testes numéricos para validar os resultados obtidos com aqueles disponíveis na literatura científica. Para isso, foram propostos dois casos para validar as frequências naturais não amortecidas e dois casos para validar a dinâmica transiente para o modo *lag*. Em seguida, uma investigação sobre a influência da matriz giroscópica em altas velocidades foi realizada.

Quando comparadas com referências da literatura, os modelos 4 GDL e 6 GDL apresentaram resultados bastante satisfatórios tanto em relação as frequências naturais como para a resposta transiente do modo *lag*. As divergências de valores para as frequências não passaram de 1% para todos os casos estudados, exceto para altas rotações onde alguns dos valores divergiram em até 3%. Outro ponto importante está no fato das primeiras frequências naturais para o modo longitudinal serem muito superiores aos demais modos, mostrando assim que o modo longitudinal pode até mesmo ser desconsiderado em casos de baixas velocidades. A validação da resposta transiente do modo *lag* mostrou que o modelo com 4 GDL demanda uma capacidade de processamento numérico muito menor que o modelo com 6 GDL, ao passo que fornece resultados bastante satisfatórios em relação às referências encontradas na literatura.

A investigação da influência da matriz giroscópica na dinâmica do sistema comprova que tal parcela apenas contribui de maneira expressiva em altas velocidades, podendo ser negligenciada para baixas velocidades em alguns casos como mostra Saracho (2002).

Em relação a demanda de processamento numérico para computar a resposta da viga girante em regime transiente, o modelo 4 GDL necessita de menor processamento para gerar resultados satisfatórios, ao passo que o modelo 6 GDL, considerando o acoplamento dos modos longitudinal e *lag*, foi o que necessitou de maior tempo de processamento. O modelo 6 GDL sem o acoplamento teve um desempenho intermediário. Isto mostra que o modelo 4 GDL pode ser usado para futuros trabalhos, onde a complexidade irá aumentar consideravelmente, desde que os modelos utilizados não contemplem o modo longitudinal.

Como proposta natural de continuidade deste trabalho, propõe-se uma modelagem que considere o acoplamento entre um conjunto de hélices e a fuselagem de um helicóptero, para então efetuar uma análise detalhada das vibrações e instabilidades deste sistema e tentar entender o fenômeno destrutivo de *Ground Resonance*.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, G. On the extensional and flexural vibrations of rotating bars. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elmsford, v. 10, n. 5, p. 223–236, 1975. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020746275900141>>. Acesso em: 02 jun. 2017.
- BEER, F.; JOHNSTON, E. **Resistência dos materiais**. Rio de Janeiro: Makron Books, 2008. ISBN 9788534603447. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=-4bXPAAACAAJ>>. Acesso em: 02 jun. 2017.
- CAI, G.-P.; HONG, J.-Z.; YANG, S. X. Model study and active control of a rotating flexible cantilever beam. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elmsford, v. 46, n. 6, p. 871–889, 2004. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740304001444>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- _____. Dynamic analysis of a flexible hub-beam system with tip mass. **Mechanics Research Communications**, Elmsford, v. 32, n. 2, p. 173–190, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2004.02.007>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- CHUNG, J.; YOO, H. H. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. **Journal of Sound and vibration**, London, v. 249, n. 1, p. 147–164, 2002. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X01938568>>. Acesso em: 03 jun. 2017.
- COLEMAN, R. P. Theory of self-excited mechanical oscillations of hinged rotor blades. **Journal of Applied Physics**, New York, v. 19, n. 1, p. 332–338, 1943. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X01938568>>. Acesso em: 03 jun. 2017.
- COLEMAN, R. P.; FEINGOLD, A. M. Theory of ground vibrations of a two-blade helicopter rotor on anisotropic flexible supports. **National Advisory Committee for Aeronautics**, National Aeronautics and Space Administration, v. 1, n. 1, p. 1–60, 1947. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19930081991.pdf>>. Acesso em: 01 jun. 2017.
- DU, C.; ZHANG, D.; LI, L.; LIU, G. A node-based smoothed point interpolation method for dynamic analysis of rotating flexible beams. **Acta Mechanica Sinica**, Berlin, v. 34, n. 2, p. 409–420, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10409-017-0713-4>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- GANGULI, R. **Finite Element Analysis of Rotating Beams: Physics Based Interpolation**. Singapore: Springer, 2016. ISBN 9789811019029. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=yNHPDAAAQBAJ>>. Acesso em: 23 jun. 2017.
- GARCÍA-VALLEJO, D.; SUGIYAMA, H.; SHABANA, A. Finite element analysis of the geometric stiffening effect. part 2: non-linear elasticity. **Proceedings of**

the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics, London, v. 219, n. 2, p. 203–211, 2005. Disponível em: <[https://doi.org/10-1243/146441905X10050](https://doi.org/10.1243/146441905X10050)>. Acesso em: 14 mar. 2018.

GUNDA, J. B.; SINGH, A. P.; CHHABRA, P. S.; GANGULI, R. Free vibration analysis of rotating tapered blades using fourier-*p* superelement. **Structural Engineering and Mechanics**, Taejon, v. 27, n. 2, p. 243–257, 2007. Disponível em: <<http://eprints.iisc.ernet.in/15396/>>. Acesso em: 23 jun. 2017.

GUNSTON, B. **The Cambridge aerospace dictionary**. Cambridge: University Press, 2009. ISBN 9780521191654. Disponível em: <<http://eprints.iisc.ernet.in/15396/>>. Acesso em: 23 jun. 2017.

HSIEH, S.-H.; ABEL, J. Comparison of two finite element approaches for analysis of rotating bladed-disk assemblies. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 182, n. 1, p. 91–107, 1995. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X85701848>>. Acesso em: 02 jun. 2017.

HUANG, C. L.; LIN, W. Y.; HSIAO, K. M. Free vibration analysis of rotating euler beams at high angular velocity. **Computers & structures**, Elmsford, v. 88, n. 17, p. 991–1001, 2010. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794910001306>>. Acesso em: 23 jun. 2017.

JOHNSON, W. Milestones in rotorcraft aeromechanics. **Ames Research Center**, Washington, v. 1, p. 1–71, 2011. Disponível em: <<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20110014589.pdf>>. Acesso em: 23 jun. 2017.

KIM, H.; YOO, H. H.; CHUNG, J. Dynamic model for free vibration and response analysis of rotating beams. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 332, n. 22, p. 5917–5928, 2013. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X1300518X>>. Acesso em: 01 jun. 2017.

LACARBONARA, W.; ARVIN, H.; BAKHTIARI-NEJAD, F. A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades, Ápart 1: linear modal properties. **Nonlinear Dynamics**, Dordrecht, v. 70, n. 1, p. 659–675, 2012. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-012-0486-z>>. Acesso em: 09 ago. 2017.

LEISHMAN, J. G. A history of helicopter flight. **University of Maryland**, Cambridge Univeresity Press 2000, v. 1, p. 2–40, 2000. Disponível em: <<http://terpconnect.umd.edu/leishman/Aero/history.html>>. Acesso em: 02 jun. 2017.

LE MOS, N. **Mecânica Analítica**. Livraria da Física, 2007. 386 p. ISBN 9788588325241. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=XpOS2eOdDR4C>>. Acesso em: 14 mar. 2018.

LIMA, M. A. C. F. **Rotating cantilever beams: finite element modeling and vibration analysis**. 2012. 109 f. Dissertação (Mestrado) — Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 2012. Disponível em: <<https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/68449/1/000154284.pdf>>. Acesso em: 02 jun. 2017.

- LIU, J.; HONG, J. Geometric stiffening effect on rigid-flexible coupling dynamics of an elastic beam. **Journal of sound and Vibration**, v. 278, n. 4-5, p. 1147–1162, 2004. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.10.014>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- LIU, Z.-Y.; HONG, J.-Z.; LIU, J.-Y. Finite element formulation for dynamics of planar flexible multi-beam system. **Multibody System Dynamics**, v. 22, n. 1, p. 1–26, 2009. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11044-009-9154-6>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- MAZANOGLU, K.; GULER, S. Flap-wise and chord-wise vibrations of axially functionally graded tapered beams rotating around a hub. **Mechanical Systems and Signal Processing**, London, v. 89, p. 97–107, 2017. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327016302424>>. Acesso em: 09 ago. 2017.
- REDE GLOBO. **Acidente com helicóptero deixa dois feridos no RJ**. Rede Globo, 2011. Disponível em: <<http://glo.bo/gM8RYm>>. Acesso em: 02 jun. 2017.
- _____. **Aeronáutica investiga se ressonância fez helicóptero se despedaçar no Pará**. Rede Globo, 2012. Disponível em: <<http://glo.bo/AtDCnv>>. Acesso em: 02 jun. 2017.
- RYU, J.; KIM, S.-S.; KIM, S.-S. A general approach to stress stiffening effects on flexible multibody dynamic systems,ão. **Journal of Structural Mechanics**, New York, v. 22, n. 2, p. 157–180, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/08905459408905209>>. Acesso em: 14 mar. 2018.
- SARACHO, C. M. **Análise numérica e experimental do comportamento dinâmico de palhetas flexíveis**. 1998. 166 f. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 1998. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/265167>>. Acesso em: 20 mar. 2017.
- SARACHO, C. M. **Modelos matematicos lineares e não-lineares para representar o acoplamento entre rotor e palhetas flexiveis: exemplos numericos e verificação experimental**. 2002. 264 f. Tese (Doutorado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, 2002. Disponível em: <<http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/264763>>. Acesso em: 20 mar. 2017.
- SIMO, J.; VU-QUOC, L. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 119, n. 3, p. 487–508, 1987. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022460X8790410X>>. Acesso em: 23 jun. 2017.
- SINHA, S. K. Non-linear dynamic response of a rotating radial timoshenko beam with periodic pulse loading at the free-end. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elmsford, v. 40, n. 1, p. 113–149, 2005. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020746204000897>>. Acesso em: 23 jun. 2017.
- SLAUGHTER, W. **The Linearized Theory of Elasticity**. Birkhäuser Boston, 2012. 126 p. ISBN 9781461200932. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=TxvnBwAAQBAJ>>. Acesso em: 23 jun. 2017.

STOYKOV, S.; RIBEIRO, P. Vibration analysis of rotating 3d beams by the p-version finite element method. **Finite Elements in Analysis and Design**, Amsterdam, v. 65, p. 76–88, 2013. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X12001990>>. Acesso em: 09 ago. 2017.

WU, S.-C.; HAUG, E. J. Geometric non-linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. **International journal for numerical methods in engineering**, Chichester, v. 26, n. 10, p. 2211–2226, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1620261006>>. Acesso em: 14 mar. 2018.

YOKOYAMA, T. Free vibration characteristics of rotating timoshenko beams. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elmsford, v. 30, n. 10, p. 743–755, 1988. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740388900392>>. Acesso em: 09 ago. 2017.

APÊNDICE A – CÓDIGO COMPUTACIONAL MATLAB

A.1 FREQUÊNCIAS NATURAIS-4 GDL

A.1.1 Programa Principal

```

clc
clear
%-----
% Parametros da viga
%-----
Lb =2;
bb =0.05;
hb =0.005;
rob =2700;
Eb =70E9;
xi =0.2;
%-----
% Definição do número de graus de liberdade global
%-----
nelem =10;
dL =Lb/nelem;
ngdl =2;
nnos =nelem+1;
dim =ngdl*nnos;
%-----
% Características físicas da estrutura
%-----
Ab =bb*hb;
roA =rob*Ab;
Ib_flap =(bb*hb^3)/12;
Ib_lag =(hb*bb^3)/12;
EI_flap =Eb*Ib_flap;
EI_lag =Eb*Ib_lag;
%-----
% Parâmetros de simulação
%-----
for i=1:nelem
for j=i:nelem+1
x(j)=xi + (j-1)*dL;
end
end
A(i)=0;
for i=1:nelem

```

```

for j=i:nelem
A(i)= A(i) + ( x(j+1)^2 - x(j)^2 );
end
end
%-----
% Simulação do sistema
%-----
w=1000*(2*pi/60);
%-----
% Inicialização das matrizes globais
%-----
M = zeros(dim);
Kf = zeros(dim);
Kl = zeros(dim);
%-----
% Montagem das matrizes globais de massa e rigidez
%-----
dij = 0;
for ne=1:nelem,
%-----
% Montagem das matrizes elementares
%-----
[m,kf,kl]=matrizes(EI_flap,EI_lag,roA,dL,w,A,x,ne,Eb,Ab,xi);
%-----
% Montagem dos vetores e matrizes globais
%-----
if (ne > 1) dij = dij + ngdl; end;
for i=1:2*ngdl
for j=1:2*ngdl
M(i+dij,j+dij) = M(i+dij,j+dij) + m(i,j);
Kf(i+dij,j+dij) = Kf(i+dij,j+dij) + kf(i,j);
Kl(i+dij,j+dij) = Kl(i+dij,j+dij) + kl(i,j);
end;
end;
end
%-----
% Condição de contorno de engastamento para L=0.0: uy=0.0 e teta=0.0
%-----
M = M(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Kf = Kf(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Kl = Kl(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
%-----
% Resgata os valores das freq. naturais e os índices correspondentes
%-----
fn_flap =sort(sqrt(abs(eig(Kf,M)))));
fn_flap(1:3)
format long

fn_lag =sort(sqrt(abs(eig(Kl,M)))));
fn_lag(1:3)
format long

```

A.1.2 Matrizes Elementares

```
function [m,kf,kl]=matrizes(EI_flap,EI_lag,roA,dL,w,A,x,i,Eb,Ab,xi)
```

```

%-----
% Matriz de massa do elemento de viga
%-----
m = roA*[(13/35)*dL      (11/210)*dL^2      (9/70)*dL      (-13/420)*dL^2
          (11/210)*dL^2  (1/105)*dL^3      (13/420)*dL^2  (-1/140)*dL^3
          (9/70)*dL      (13/420)*dL^2      (13/35)*dL      (-11/210)*dL^2
          (-13/420)*dL^2 (-1/140)*dL^3      (-11/210)*dL^2  (1/105)*dL^3];

%-----
% Matrizes de rigidez do elemento de viga
%-----
k1_flap = EI_flap*[12/(dL^3)   6/(dL^2)   -12/(dL^3)   6/(dL^2)
                  6/(dL^2)   4/dL        -6/(dL^2)   2/dL
                  -12/(dL^3) -6/(dL^2)   12/(dL^3)   -6/(dL^2)
                  6/(dL^2)   2/dL        -6/(dL^2)   4/dL];

k1_lag = EI_lag*[12/(dL^3)   6/(dL^2)   -12/(dL^3)   6/(dL^2)
                 6/(dL^2)   4/dL        -6/(dL^2)   2/dL
                 -12/(dL^3) -6/(dL^2)   12/(dL^3)   -6/(dL^2)
                 6/(dL^2)   2/dL        -6/(dL^2)   4/dL];

k2 = w^2*roA*A(i)/2*[6/(5*dL)   1/10   -6/(5*dL)   1/10
                     1/10      2*dL/15 -1/10      -dL/30
                     -6/(5*dL) -1/10    6/(5*dL)   -1/10
                     1/10      -dL/30  -1/10      2*dL/15];

k3 = -roA*w^2*[(42*x(i)+12*dL)/(70)      (14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140)
               -(42*x(i)+12*dL)/(70)      -dL^2/70                      ## fim da linha 1.
               (14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140) (7*dL^2*x(i)+2*dL^3)/(210)
               -(14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140) -(7*dL^2*x(i)+3*dL^3)/(420) ##fim da linha 2.
               -(42*x(i)+12*dL)/(70)      -(14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140)
               (42*x(i)+12*dL)/(70)        dL^2/70                      ## fim da linha 3.
               -dL^2/70                    -(7*dL^2*x(i)+3*dL^3)/(420)
               -dL^2/70                    (7*dL^2*x(i)+3*dL^3)/(70)]; ## fim da linha 4.

kf = k1_flap + k2 + k3;
kl = k1_lag + k2+k3 - m*w^2;

```

A.2 FREQUÊNCIAS NATURAIS-6 GDL

A.2.1 Programa Principal

```

clc
clear
%-----
% Parametros da viga
%-----
Lb =2;
bb =0.05;
hb =0.005;
rob =2700;
Eb =70E9;
xi =0.2;
%-----
% Definição do número de graus de liberdade global
%-----

```

```

nelem =9;
dL     =Lb/nelem;
ngdl   =3;
nnos   =nelem+1;
dim     =ngdl*nnos;
%-----
% Características físicas da estrutura
%-----
Ab      =bb*hb;
roA     =rob*Ab;
Ib_flap =(bb*hb^3)/12;
Ib_lag  =(hb*bb^3)/12;
EI_flap =Eb*Ib_flap;
EI_lag  =Eb*Ib_lag;
%-----
% Parâmetros de simulação
%-----
for i=1:nelem
for j=i:nelem+1
x(j)=xi + (j-1)*dL;
end
end
A(i)=0;
for i=1:nelem
for j=i:nelem
A(i)= A(i) + ( x(j+1)^2 - x(j)^2 );
end
end
%-----
% Simulação do sistema
%-----
w=1000*(2*pi/60);
%-----
% Inicialização das matrizes globais
%-----
M  = zeros(dim);
Kf = zeros(dim);
Kl = zeros(dim);
Ka = zeros(dim);
%-----
% Montagem das matrizes globais de massa e rigidez
%-----
dij = 0;
for ne=1:nelem,
%-----
% Montagem das matrizes elementares
%-----
[m,kf,kl,ka]=matrizes(EI_flap,EI_lag,roA,dL,w,A,x,ne,Eb,Ab,xi);
%-----
% Montagem dos vetores e matrizes globais
%-----
if (ne > 1) dij = dij + ngdl; end;
for i=1:2*ngdl
for j=1:2*ngdl

```

```

M(i+dij,j+dij) = M(i+dij,j+dij) + m(i,j);
Kf(i+dij,j+dij) = Kf(i+dij,j+dij) + kf(i,j);
Kl(i+dij,j+dij) = Kl(i+dij,j+dij) + kl(i,j);
Ka(i+dij,j+dij) = Ka(i+dij,j+dij) + ka(i,j);
end;
end;
end
%-----
% Condição de contorno de engastamento para L=0.0: uy=0.0 e teta=0.0
%-----
M = M(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Kf = Kf(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Kl = Kl(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Ka = Ka(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
%-----
% Resgata os valores das freq. naturais e os índices correspondentes
%-----
fn_flap = sort(sqrt(abs(eig(Kf,M))));
fn_flap(1:3)
format long

fn_lag = sort(sqrt(abs(eig(Kl,M))));
fn_lag(1:3)
format long

fn_axial = sort(sqrt(abs(eig(Ka,M))));
fn_axial(1:3)
format long

```

A.2.2 Matrizes Elementares

```

function [m,kf,kl,ka]=matrizes(EI_flap,EI_lag,roA,dL,w,A,x,i,Eb,Ab,xi)
%-----
% Matriz de massa do elemento de viga
%-----
m = roA*[(1/3)*dL      (7/20)*dL      (1/20)*dL^2   (1/6)*dL      (3/20)*dL      (-1/30)*dL^2
          (7/20)*dL      (13/35)*dL      (11/210)*dL^2 (3/20)*dL      (9/70)*dL      (-13/420)*dL^2
          (1/20)*dL^2   (11/210)*dL^2   (1/105)*dL^3   (1/30)*dL^2   (13/420)*dL^2   (-1/140)*dL^3
          (1/6)*dL      (3/20)*dL      (1/30)*dL^2   (1/3)*dL      (7/20)*dL      (-1/20)*dL^2
          (3/20)*dL      (9/70)*dL      (13/420)*dL^2 (7/20)*dL      (13/35)*dL      (-11/210)*dL^2
          (-1/30)*dL^2   (-13/420)*dL^2 (-1/140)*dL^3 (-1/20)*dL^2 (-11/210)*dL^2 (1/105)*dL^3];
%-----
% Matrizes de rigidez do elemento de viga
%-----
k1_flap = EI_flap*[
Eb*Ab/(EI_flap*dL)      0      0      -Eb*Ab/(EI_flap*dL)      0      0
0      12/(dL^3)      6/(dL^2)      0      -12/(dL^3)      6/(dL^2)
0      6/(dL^2)      4/dL      0      -6/(dL^2)      2/dL
-Eb*Ab/(EI_flap*dL)      0      0      Eb*Ab/(EI_flap*dL)      0      0
0      -12/(dL^3)      -6/(dL^2)      0      12/(dL^3)      -6/(dL^2)
0      6/(dL^2)      2/dL      0      -6/(dL^2)      4/dL];

k1_lag = EI_lag*[
Eb*Ab/(EI_lag*dL)      0      0      -Eb*Ab/(EI_lag*dL)      0      0
0      12/(dL^3)      6/(dL^2)      0      -12/(dL^3)      6/(dL^2)

```

```

0          6/(dL^2)  4/dL          0          -6/(dL^2)  2/dL
-Eb*Ab/(EI_lag*dL)  0          0          Eb*Ab/(EI_lag*dL)  0          0
0          -12/(dL^3)  -6/(dL^2)  0          12/(dL^3)  -6/(dL^2)
0          6/(dL^2)  2/dL          0          -6/(dL^2)  4/dL];

k1_axial=Eb*Ab*[1/dL      1/dL      0      -1/dL      -1/dL      0
                1/dL      6/(5*dL)  1/10     -1/dL      -6/(5*dL)  1/10
                0          1/10      2*dL/15    0          -1/10     -dL/30
                -1/dL     -1/dL      0          1/dL      1/dL      0
                -1/dL     -6/(5*dL) -1/10      1/dL      6/(5*dL) -1/10
                0          1/10      -dL/30     0          -1/10     2*dL/15];

k2 = w^2*roA*A(i)/2*[1/dL      1/dL      0      -1/dL      -1/dL      0
                    1/dL      6/(5*dL)  1/10     -1/dL      -6/(5*dL)  1/10
                    0          1/10      2*dL/15    0          -1/10     -dL/30
                    -1/dL     -1/dL      0          1/dL      1/dL      0
                    -1/dL     -6/(5*dL) -1/10      1/dL      6/(5*dL) -1/10
                    0          1/10      -dL/30     0          -1/10     2*dL/15];

k3 = -roA*w^2*[
(3*dL^2*x(i)+dL^3)/(6*dL^2)  (10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60)
-(3*dL^2*x(i)+dL^3)/(6*dL^2)  -(10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60) ## fim da linha 1
(10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (42*x(i)+12*dL)/(70)          (14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140)
-(10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(42*x(i)+12*dL)/(70)          -dL^2/70          ## fim da linha 2
(5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60)      (14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140)  (7*dL^2*x(i)+2*dL^3)/(210)
-(5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60)      -(14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140)  -(7*dL^2*x(i)+3*dL^3)/(420) ## fim da linha 3
-(3*dL^2*x(i)+dL^3)/(6*dL^2)  -(10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60)
(3*dL^2*x(i)+dL^3)/(6*dL^2)  (10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60) ## fim da linha 4
-(10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(42*x(i)+12*dL)/(70)          -(14*dL*x(i)+5*dL^2)/(140)
(10*dL*x(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (42*x(i)+12*dL)/(70)          dL^2/70          ## fim da linha 5
-(5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60)      -dL^2/70          -(7*dL^2*x(i)+3*dL^3)/(420)
(5*dL*x(i)+2*dL^2)/(60)      -dL^2/70          (7*dL^2*x(i)+3*dL^3)/(70)];

kf = k1_flap + k2 + k3;
kl = k1_lag + k2+k3 - m*w^2;
ka=k1_axial-m*w^2;

```

A.3 TRANSIENTE-4 GDL

A.3.1 Programa Principal

```

clc
clear
%-----
% Parâmetros de simulação do sistema
%-----
Lb=8;
%-----
% Definição do número de graus de liberdade global
%-----
nelem =5;
dL =Lb/nelem;
ngdl =2;
nnos =nelem+1;
dim =ngdl*nnos;

```

```

%-----
% Simulação do sistema
%-----
tspan=[0 20];
x0=zeros(2*(dim-ngdl),1);
options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-9);
[time,state]=ode45('model',tspan,x0,[]);
q=state(:,1:dim-ngdl);
qy=q(:,ngdl*(nnos-1)-1);

figure(1)
hold on
box on
plot(time,qy);
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento [m]');

```

A.3.2 Integrador

```

function dx = model(t,x,options)
%-----
% Parametros da viga
%-----
Lb =8;
rob =2766.67;
Eb =6.895E10;
xi =0.0;
%-----
% Definição do número de graus de liberdade global
%-----
nelem =5;
dL =Lb/nelem; % Comprimento de cada elemento finito
ngdl =2; % Número de graus de liberdade
nnos =nelem+1; % Número total de nós
dim =ngdl*nnos; % Dimensão das matrizes globais M e K
%-----
% Características físicas da estrutura
%-----
Ab=7.3*10^-5;
roA=rob*Ab;
Ib_lag=8.218*10^-9;
EI_lag=Eb*Ib_lag;
%-----
% Parâmetros de simulação
%-----
for i=1:nelem
for j=i:nelem+1
X(j)=xi +(j-1)*dL;
end
end
AA(i)=0;
for i=1:nelem
for j=i:nelem
AA(i)= AA(i) + ( X(j+1)^2 - X(j)^2 );
end

```

```

end
%-----
% Velocidade e aceleração angular
%-----
T=15;
w0=5;
if ( t <= T )
w=w0*( t/T - 1/(2*pi)*sin(2*pi*t/T));
dw=w0/T*( 1 - cos(2*pi*t/T));
else
w=w0;
dw=0;
end
t
%-----
% Inicialização das matrizes globais
%-----
M = zeros(dim);
Kl = zeros(dim);
Fv = zeros(dim,1);
%-----
% Montagem das matrizes globais de massa e rigidez
%-----
dij = 0;
for ne=1:nelem,
%-----
% Montagem das matrizes elementares
%-----
[m,kl,fv]=matrizes(EI_lag,roA,dL,w,dw,AA,X,ne);
%-----
% Montagem dos vetores e matrizes globais
%-----
if (ne > 1) dij = dij + ngdl; end;
for i=1:2*ngdl
Fv(i+dij,1) = Fv(i+dij,1) + fv(i,1);
for j=1:2*ngdl
M(i+dij,j+dij) = M(i+dij,j+dij) + m(i,j);
Kl(i+dij,j+dij) = Kl(i+dij,j+dij) + kl(i,j);
end;
end;
end
%-----
% Condição de contorno de engastamento para L=0.0: uy=0.0 e teta=0.0
%-----
M = M(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Kl = Kl(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Fv = Fv(ngdl+1:dim,1);
%-----
% Montagem das matrizes A e B
%-----
A =[zeros(size(M)), eye(size(M)); -inv(M)*Kl, zeros(size(M))];
B =[zeros(size(M)); inv(M)];
dx = A*x + B*Fv;

```


A.3.3 Matrizes Elementares

```
function [m,kl,fv]=matrizes(EI_lag,roA,dL,w,dw,AA,X,i)
%-----
% Matriz de massa do elemento de viga
%-----
m = roA*[(13/35)*dL      (11/210)*dL^2  (9/70)*dL      (-13/420)*dL^2
          (11/210)*dL^2  (1/105)*dL^3   (13/420)*dL^2  (-1/140)*dL^3
          (9/70)*dL      (13/420)*dL^2  (13/35)*dL      (-11/210)*dL^2
          (-13/420)*dL^2 (-1/140)*dL^3  (-11/210)*dL^2 (1/105)*dL^3];
%-----
% Matrizes de rigidez do elemento de viga
%-----
k1_lag = EI_lag*[12/(dL^3)  6/(dL^2)  -12/(dL^3)  6/(dL^2)
                 6/(dL^2)  4/dL      -6/(dL^2)  2/dL
                 -12/(dL^3) -6/(dL^2)  12/(dL^3)  -6/(dL^2)
                 6/(dL^2)  2/dL      -6/(dL^2)  4/dL];

k2 = w^2*roA*AA(i)/2*[6/(5*dL)  1/10  -6/(5*dL)  1/10
                      1/10  2*dL/15  -1/10  -dL/30
                      -6/(5*dL) -1/10  6/(5*dL)  -1/10
                      1/10  -dL/30  -1/10  2*dL/15];

k3 = -roA*w^2*[(42*X(i)+12*dL)/(70)      (14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140)
                -(42*X(i)+12*dL)/(70)      -dL^2/70                      ## fim da linha 1
                (14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140) (7*dL^2*X(i)+2*dL^3)/(210)
                -(14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140) -(7*dL^2*X(i)+3*dL^3)/(420) ## fim da linha 2
                -(42*X(i)+12*dL)/(70)      -(14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140)
                (42*X(i)+12*dL)/(70)      dL^2/70                      ## fim da linha 3
                -dL^2/70                  -(7*dL^2*X(i)+3*dL^3)/(420)
                -dL^2/70                  (7*dL^2*X(i)+3*dL^3)/(70)]; ## fim da linha 4

kl = k1_lag + k2 + k3 - m*w^2;
%-----
% Vetores relativos à força rotacional e acel. angular e matriz giroscópica
%-----
fv = -roA*dw*[(10*dL*X(i)+3*dL^2)/20
               (5*dL^2*X(i)+2*dL^3)/60
               (10*dL*X(i)+7*dL^2)/20
               -(5*dL^2*X(i)+3*dL^3)/60];
```

A.4 TRANSIENTE-6 GDL

A.4.1 Programa Principal

```
clc
clear
%-----
% Parâmetros de simulação do sistema
%-----
Lb=8;
%-----
% Definição do número de graus de liberdade global
%-----
nelem =5;
```

```

dL      =Lb/nelem;           % Comprimento de cada elemento finito
ngdl     =3;                 % Número de graus de liberdade
nnos     =nelem+1;          % Número total de nós
dim       =ngdl*nnos;        % Dimensão das matrizes globais M e K
%-----
% Simulação do sistema
%-----
tspan=[0 20];
x0=zeros(2*(dim-ngdl),1);
options = odeset('RelTol',1e-6,'AbsTol',1e-9);
[time,state]=ode45('model',tspan,x0,[]);
q=state(:,1:dim-ngdl);
qy=q(:,ngdl*(nnos-1)-1);

figure(1)
hold on
box on
plot(time,qy);
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento [m]');

```

A.4.2 Integrador

```

function dx = model(t,x,options)
%-----
% Parametros da viga
%-----
Lb      =8;
rob      =2766.67;
Eb       =6.895E10;
xi       =0.0;
%-----
% Definição do número de graus de liberdade global
%-----
nelem     =5;
dL        =Lb/nelem;          % Comprimento de cada elemento finito
ngdl       =3;                 % Número de graus de liberdade
nnos       =nelem+1;          % Número total de nós
dim        =ngdl*nnos;        % Dimensão das matrizes globais M e K
%-----
% Características físicas da estrutura
%-----
Ab=7.3*10^-5;
roA=rob*Ab;
Ib_lag=8.218*10^-9;
EI_lag=Eb*Ib_lag;
%-----
% Parâmetros de simulação
%-----
for i=1:nelem
for j=i:nelem+1
X(j)=xi + (j-1)*dL;
end
end

```

```

AA(i)=0;
for i=1:nelem
for j=i:nelem
AA(i)= AA(i) + ( X(j+1)^2 - X(j)^2 );
end
end
%-----
% Velocidade e aceleração angular
%-----
T=15;
w0=2;
if ( t <= T )
w=w0*( t/T - 1/(2*pi)*sin(2*pi*t/T));
dw=w0/T*( 1 - cos(2*pi*t/T));
else
w=w0;
dw=0;
end
t
%-----
% Inicialização das matrizes globais
%-----
M = zeros(dim);
Kl = zeros(dim);
Fv = zeros(dim,1);
G = zeros(dim);
%-----
% Montagem das matrizes globais de massa e rigidez
%-----
dij = 0;
for ne=1:nelem,
%-----
% Montagem das matrizes elementares
%-----
[m,kl,fv,g]=matrizes(EI_lag,roA,dL,w,dw,AA,X,ne,Eb,Ab);

%-----
% Montagem dos vetores e matrizes globais
%-----
if (ne > 1) dij = dij + ngdl; end;
for i=1:2*ngdl
Fv(i+dij,1) = Fv(i+dij,1) + fv(i,1);
for j=1:2*ngdl
M(i+dij,j+dij) = M(i+dij,j+dij) + m(i,j);
Kl(i+dij,j+dij) = Kl(i+dij,j+dij) + kl(i,j);
G(i+dij,j+dij) = G(i+dij,j+dij) + g(i,j);
end;
end;
end
%-----
% Condição de contorno de engastamento para L=0.0: uy=0.0 e teta=0.0
%-----
M = M(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Kl = Kl(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);

```

```

G = G(ngdl+1:dim,ngdl+1:dim);
Fv = Fv(ngdl+1:dim,1);
%-----
% Montagem das matrizes A e B
%-----
A = [zeros(size(M)), eye(size(M)); -inv(M)*Kl, zeros(size(M))];
B = [zeros(size(M)); inv(M)];

dx = A*x + B*Fv;

```

A.4.3 Matrizes Elementares

```

function [m,kl,fv,g]=matrizes(EI_lag,roA,dL,w,dw,AA,X,i,Eb,Ab)
%-----
% Matriz de massa do elemento de viga
%-----
m = roA*[(1/3)*dL      (7/20)*dL      (1/20)*dL^2    (1/6)*dL      (3/20)*dL      (-1/30)*dL^2
          (7/20)*dL      (13/35)*dL      (11/210)*dL^2  (3/20)*dL      (9/70)*dL      (-13/420)*dL^2
          (1/20)*dL^2    (11/210)*dL^2    (1/105)*dL^3    (1/30)*dL^2    (13/420)*dL^2    (-1/140)*dL^3
          (1/6)*dL      (3/20)*dL      (1/30)*dL^2    (1/3)*dL      (7/20)*dL      (-1/20)*dL^2
          (3/20)*dL      (9/70)*dL      (13/420)*dL^2  (7/20)*dL      (13/35)*dL      (-11/210)*dL^2
          (-1/30)*dL^2   (-13/420)*dL^2  (-1/140)*dL^3   (-1/20)*dL^2   (-11/210)*dL^2  (1/105)*dL^3];

%-----
% Matrizes de rigidez e Giroscópica do elemento de viga
%-----
k1_lag = EI_lag*[
Eb*Ab/(EI_lag*dL)      0      0      -Eb*Ab/(EI_lag*dL)      0      0
0      12/(dL^3)      6/(dL^2)      0      -12/(dL^3)      6/(dL^2)
0      6/(dL^2)      4/dL      0      -6/(dL^2)      2/dL
-Eb*Ab/(EI_lag*dL)      0      0      Eb*Ab/(EI_lag*dL)      0      0
0      -12/(dL^3)      -6/(dL^2)      0      12/(dL^3)      -6/(dL^2)
0      6/(dL^2)      2/dL      0      -6/(dL^2)      4/dL];

k2 = w^2*roA*AA(i)/2*[1/dL      1/dL      0      -1/dL      -1/dL      0
                      1/dL      6/(5*dL)      1/10      -1/dL      -6/(5*dL)      1/10
                      0      1/10      2*dL/15      0      -1/10      -dL/30
                      -1/dL      -1/dL      0      1/dL      1/dL      0
                      -1/dL      -6/(5*dL)      -1/10      1/dL      6/(5*dL)      -1/10
                      0      1/10      -dL/30      0      -1/10      2*dL/15];

k3 = -roA*w^2*[
(3*dL^2*X(i)+dL^3)/(6*dL^2)  (10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60)
-(3*dL^2*X(i)+dL^3)/(6*dL^2)  -(10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60) ## fim da linha 1
(10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (42*X(i)+12*dL)/(70)  (14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140)
-(10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(42*X(i)+12*dL)/(70)  -dL^2/70 ## fim da linha 2
(5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60)  (14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140)  (7*dL^2*X(i)+2*dL^3)/(210)
-(5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60)  -(14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140)  -(7*dL^2*X(i)+3*dL^3)/(420) ## fim da linha 3
-(3*dL^2*X(i)+dL^3)/(6*dL^2)  -(10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60)
(3*dL^2*X(i)+dL^3)/(6*dL^2)  (10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60) ## fim da linha 4
-(10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  -(42*X(i)+12*dL)/(70)  -(14*dL*X(i)+5*dL^2)/(140)
(10*dL*X(i)+3*dL^2)/(20*dL)  (42*X(i)+12*dL)/(70)  dL^2/70 ## fim da linha 5
-(5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60)  -dL^2/70  -(7*dL^2*X(i)+3*dL^3)/(420)
(5*dL*X(i)+2*dL^2)/(60)  -dL^2/70  (7*dL^2*X(i)+3*dL^3)/(70)];

```

```

g1 = dw*roA*[ 0      (-7/20)*dL      (-1/20)*dL^2      0      (-3/20)*dL      (1/30)*dL^2
              (7/20)*dL      0      0      (3/20)*dL      0      0
              (1/20)*dL^2      0      0      (1/30)*dL^2      0      0
              0      (-3/20)*dL      (-1/30)*dL^2      0      (-7/20)*dL      (1/20)*dL^2
              (3/20)*dL      0      0      (7/20)*dL      0      0
              (-1/30)*dL^2      0      0      (-1/20)*dL^2      0      0];

k1 = k1_lag + k2 + k3 - m*w^2;

g = 2*w^2*roA*[ 0      (-7/20)*dL      (-1/20)*dL^2      0      (-3/20)*dL      (1/30)*dL^2
                (7/20)*dL      0      0      (3/20)*dL      0      0
                (1/20)*dL^2      0      0      (1/30)*dL^2      0      0
                0      (-3/20)*dL      (-1/30)*dL^2      0      (-7/20)*dL      (1/20)*dL^2
                (3/20)*dL      0      0      (7/20)*dL      0      0
                (-1/30)*dL^2      0      0      (-1/20)*dL^2      0      0];

%-----
% Vetores relativos à força rotacional e acel. angular
%-----
f = -roA*dw*[      0
                 (10*dL*X(i)+3*dL^2)/20
                 (5*dL^2*X(i)+2*dL^3)/60
                 0
                 (10*dL*X(i)+7*dL^2)/20
                 -(5*dL^2*X(i)+3*dL^3)/60];

f1 = roA*w^2*[(3*dL*X(i)+dL^2)/6
              0
              0
              (3*dL*X(i)+2*dL^2)/6
              0
              0];

fv=f1+f;

```