

Marcelo Augusto Javarez

**Equações de Einstein e Elementos Finitos:
Um Exemplo no Espaço - Tempo
de Schwarzschild**



1910000841



**Equações de Einstein e Elementos Finitos:
um exemplo no Espaço-Tempo
de Schwarzschild**

**EQUAÇÕES DE EINSTEIN E ELEMENTOS
FINITOS: UM EXEMPLO NO
ESPAÇO-TEMPO
DE SCHWARZSCHILD**

Marcelo Augusto Javarez

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-037

Ciência: Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, para
a obtenção do título de mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Pereira Borges Neto



741/95

[1995]

38.4121
514L

Equações de Einstein e Elementos Finitos: um exemplo no Espaço-Tempo de Schwarzschild

Marcelo Augusto Javarez

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e
Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de
Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, para
a obtenção do título de mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto



841/99

[1998]

Deferido em 29/10/1998

“(…)

É preciso amar as pessoas como
se não houvesse amanhã.

(…)”

Renato Russo.



Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto
pela orientação e paciência na elaboração
deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Márcio Machado
pela co-orientação deste trabalho.

Aos meus pais, Laercio e Marize.

A todos os professores e funcionários,
que de alguma forma me auxiliaram
durante este período.

Ao meu irmão Junior.

A todos os colegas graduandos e pós-graduandos

Ao Digbi e à Mariana.

Aos amigos do Curso Alternativo.

A Deus.



RESUMO

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto
pela orientação e paciência na elaboração
deste trabalho.

Ao Prof. Dr. José Márcio Machado
pela co-orientação deste trabalho.

A todos os professores e funcionários,
que de alguma forma contribuíram
durante este período.

A todos os colegas graduandos e pós-graduandos
pelo companheirismo.

Aos amigos do Cursinho Alternativo.

A Deus.



RESUMO

Nas últimas décadas, a técnica das diferenças finitas tem desempenhado um papel preponderante na solução de equações diferenciais parciais. Ainda que um grande número de métodos usados para o tratamento numérico das Equações diferenciais parciais de Einstein sejam do tipo diferenças finitas, tem ocorrido um crescente interesse na utilização de outras técnicas aproximativas, sobretudo no estudo das equações diferenciais parciais de Einstein para o campo gravitacional [1]. De modo a exemplificar as virtudes e potencialidades do método dos elementos finitos no contexto da teoria da gravitação, é apresentado nesse trabalho um tratamento de um bem conhecido problema através desta técnica, qual seja, a solução da equação $R_{11} = 0$ no espaço-tempo de Schwarzschild. O método dos resíduos ponderados é aplicado para o cálculo das matrizes de contribuição local e as coordenadas homogêneas são introduzidas.



ABSTRACT

Finite Difference techniques are numerical methods which have played in the last decades a preponderant role for solving partial differential equations. Although a significant number of methods for treating Einstein equations are of finite difference type there have been a considerable number of numerical studies on gravitation in finite difference codes are not used [1]. In order to exemplify the features and the possibilities of the Finite Element Methods in the framework of gravitational theory, I present in this work a treatment of a well know problem by this technique, namely the solution of the equation $R_{II} = 0$ related to the Schwarzschild space-time. The weighted residual method is applied to calculate the local contribution matrices of the Finite Element method and the homogeneous coordinate formalism is introduced.

1.2 - Identidades de Bianchi e Equações de Einstein.....	21
1.3 - Equações de Einstein no espaço-tempo de Schwarzschild (Método Analítico).....	24
1.3.1 - O Espaço-Tempo de Schwarzschild.....	25
1.3.2 - Cálculo dos Símbolos de Christoffel.....	28
1.3.3 - Cálculo de $R_{\mu\nu}$ em função dos Símbolos de Christoffel.....	31
1.3.4 - Cálculo dos Valores de $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$	34
1.3.5 - A Solução de Schwarzschild no Vácuo.....	36



ÍNDICE

Capítulo 2: O Método dos Elementos Finitos.....	40
2.1 - Breve Histórico.....	40
2.2 - Métodos Clássicos.....	42
2.2.1 - Método de Ritz.....	42
2.2.1.1 - Limitações para o Método de Ritz.....	43
2.2.2 - Fundamentos do Método dos Elementos Finitos.....	46
2.2.4 - Método de Galerkin.....	50
Introdução.....	10
Capítulo 1: Teoria da Relatividade Geral.....	12
1.1 - Tensores.....	12
1.1.1 - Tensor Afim.....	14
1.1.2 - Tensor de Curvatura (Método Geométrico).....	15
1.2 - Identidades de Bianchi e Equações de Einstein.....	21
1.3 - Equações de Einstein no espaço-tempo de Schwarzschild (Método Analítico).....	24
1.3.1 - O Espaço-Tempo de Schwarzschild.....	25
1.3.2 - Cálculo dos Símbolos de Christoffel.....	28
1.3.3 - Cálculo de $R_{\mu\nu}$ em função dos Símbolos de Christoffel.....	31
1.3.4 - Cálculo dos Valores de $R_{00}, R_{11}, R_{22}, R_{33}$	34
1.3.5 - A Solução de Schwarzschild no Vácuo.....	36

L. INTRODUÇÃO

Capítulo 5: As Matrizes de Contribuição Local no Espaço-Tempo de Schwarzschild.....	66
5.1 – Aplicação do Método dos Elementos Finitos.....	67
5.2 – O Cálculo das Matrizes de Contribuição Local.....	70
5.2.1 – A Equação de Einstein $R_{11} = 0$ em coordenadas cartesianas.....	70
5.2.2 – A Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados a $R_{11} = 0$	71
5.2.3 – Transformação em Coordenadas Homogêneas e Cálculo das Matrizes de Contribuição Local.....	72
Conclusão.....	79
Apêndice I.....	80
Referências.....	86



I. INTRODUÇÃO

I.a) Motivação

As equações de Einstein do campo gravitacional foram publicadas pela primeira vez em 1.916 [2]. Estas *formam* um conjunto de dez equações diferenciais parciais acopladas, não lineares e do tipo hiperbólico-elíptico, que em geral não podem ser estudadas analiticamente, exceto em alguns casos envolvendo simetrias, como no caso particular da solução devida a Schwarzschild em 1.916¹ [3], logo após o aparecimento daquele trabalho de Einstein que originou a Teoria da Relatividade Geral. Sem dúvida, estas equações estão entre as mais complicadas de toda a Física-Matemática, e a despeito de muitos anos de pesquisas, a solução completa do conjunto completo de equações é ainda não tem uma solução definida.

Durante as últimas décadas uma nova área de pesquisas tem emergido: a “Relatividade Numérica”[1]. Este novo campo de pesquisas faz uso de computação paralela de alta performance, ciência computacional e física teórica para investigar a Teoria da Gravitação de Einstein, através de tratamentos numéricos de suas equações, e sua, talvez, principal consequência, seja a aplicação em astrofísica e cosmologia. Uma importantíssima aplicação desta teoria em astrofísica, segundo métodos numéricos aproximativos, é o difícil problema da colisão de buracos negros. A colisão de buracos negros em órbita é considerada hoje uma das mais promissoras fontes de ondas gravitacionais² que poderão ser detectáveis por uma nova geração de detectores (*LIGO e VIRGO*) agora em construção[4],[5].

¹ Em 1.916, logo após o advento da Teoria Geral da Relatividade, o Físico alemão Karl Schwarzschild, diretor do observatório astrofísico de Potsdam, apresentou a primeira solução exata das Equações de Einstein, para o caso especial de um campo gravitacional estático, simetricamente esférico, produzido por um corpo em repouso, provido de simetria esférica.

² Segundo a Teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein, a presença de matéria deforma a geometria do espaço. Como matéria e geometria estão interligadas – uma influencia a outra –, o movimento da matéria pode implicar em perturbações na geometria do espaço-tempo. Essas perturbações se propagam, espera-se, por meio de ondas gravitacionais. Essas ondas, infelizmente, ainda não foram detectadas aqui na Terra, o que espera-se seja alcançado com uma nova geração de detectores, pois a frequência destas ondas é muito pequena – os distúrbios causados pela matéria em movimento são quase desprezíveis, exceto os causados, por exemplo, por eventos como colisão de buracos negros, que podem gerar ondas detectáveis aqui no nosso planeta.



Devido a grande e importância da Teoria de Einstein para o estudo de problemas, tais como a colisão de buracos negros, é essencial que se procure resolver as equações de Einstein em uma maior generalidade, e não apenas em casos especiais em que simetrias estão envolvidas. Métodos numéricos, como por exemplo o método das diferenças finitas, estão sendo aplicados e baseados em cálculos não simétricos [1].

Nesta dissertação é proposto um método alternativo para o estudo das equações de Einstein, conhecido como o “Método dos Elementos Finitos”. Sua utilização em Relatividade Geral, embora pouco difundida foi enfatizada recentemente por Laguna, P. [6]. A maior e mais importante virtude deste método é que com elementos finitos é possível usar domínios computacionais com contornos irregulares, o que não ocorre por exemplo com o Método das Diferenças Finitas. Estas são exatamente as dificuldades numéricas que defrontamos ao tentarmos construir valores iniciais para colisão de buracos negros, ou seja, um domínio computacional irregular próximo e um espaço-tempo assintoticamente plano distante dos buracos negros.

De modo a exemplificar as potencialidades do Método dos Elementos Finitos em Gravitação, é apresentado por esta técnica, neste trabalho, um tratamento de um bem conhecido problema, chamado de solução da equação $R_{11} = 0$ relacionada ao Espaço-tempo de Schwarzschild. A técnica dos resíduos ponderados é aplicada para calcular as matrizes de contribuição local para um elemento finito tetraédrico qualquer na aproximação linear (4x4), e um formalismo de coordenadas homogêneas é introduzido. É de se esperar que, num futuro trabalho, resultados conhecidos sejam reproduzidos através do uso de um “malhador” para a discretização automática do domínio.

setembro de 1.998



CAPÍTULO 1

Teoria da Relatividade Geral

1.1 - Tensores

Considere três espaços vetoriais E_n , F_p , G_q de n , p e q dimensões respectivamente.

Definição 1:

Tensor: É todo elemento do espaço vetorial com r espaços vetoriais $E_n \otimes F_p \otimes G_q$ que tenha estrutura de um produto tensorial.

Produto Tensorial:

Consideremos os espaços vetoriais E_n e F_p de n e p dimensões respectivamente e associamos a eles um espaço vetorial de np dimensões que designaremos por $E_n \otimes F_p$.

Se $\vec{x}$ e $\vec{y}$ são dois vetores pertencentes a E_n e F_p , respectivamente, corresponderemos ao par $(\vec{x}, \vec{y})$ um elemento, representado pelo símbolo $\vec{x} \otimes \vec{y}$ do espaço vetorial $E_n \otimes F_p$ e esta correspondência deverá satisfazer três propriedades:

a) Se $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ pertencem a E_n e $\vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2$ a F_p então:

$$\begin{aligned}\vec{x} \otimes (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) &= \vec{x} \otimes \vec{y}_1 + \vec{x} \otimes \vec{y}_2 \\ (\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \otimes \vec{y} &= \vec{x}_1 \otimes \vec{y} + \vec{x}_2 \otimes \vec{y}\end{aligned}\tag{1.1}$$

b) Se α é um escalar arbitrário, então:

$$\alpha \vec{x} \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes \alpha \vec{y} = \alpha (\vec{x} \otimes \vec{y})\tag{1.2}$$

c) Se $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ e $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_p)$ são vetores base de E_n e F_p , então os np elementos de $E_n \otimes F_p$

$$\bar{x}_i \otimes \bar{y}_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ e } (\alpha = 1, 2, \dots, p) \quad (1.3)$$

formam uma base deste último espaço.

Satisfeitas as três propriedades, diremos que o espaço vetorial $E_n \otimes F_p$ é um *produto tensorial* dos espaços vetoriais E_n e F_p e o elemento $\bar{x} \otimes \bar{y}$ é o produto tensorial dos vetores $\bar{x}$ e $\bar{y}$.

Definição 2:

Define-se um tensor do tipo M/N como uma função linear que mapeia M um-forma e N vetores:

$$T = T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} e_\alpha \otimes \dots \tilde{w}^\beta \otimes \dots \quad (1.4)$$

As componentes da transformação T são:

$$T_{\beta \dots}^{\alpha \dots} = \Lambda_{\mu \dots}^\alpha \Lambda_{\nu \dots}^\beta T_{\nu \dots}^{\mu \dots} \quad (1.5)$$

Propriedades:

(1) Se $A_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ e $B_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ são tensores do tipo M/N , deste modo também são $\lambda A_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$, $\mu B_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ e $\lambda A_{\beta \dots}^{\alpha \dots} + \mu B_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ para quaisquer λ e μ .

(2) Se $A_{\beta \dots}^{\alpha \dots}$ é um tensor M/N e $B_{\delta \dots}^{\gamma \dots}$ um do tipo M'/N' , então o produto $A_{\beta \dots}^{\alpha \dots} B_{\delta \dots}^{\gamma \dots}$ é um tensor do tipo $M + M'/N + N'$



(3) Para qualquer tensor do tipo M/N pode-se construir um tensor do tipo $M-1/N-1$ pela contração de um índice superior com um índice inferior.

(4) Tensores podem ser simétricos ou anti-simétricos sobre pares de índices superiores ou inferiores.

1.1.1 Tensor Afim

Dado um espaço vetorial de n dimensões, é possível efetuar o produto tensorial de q espaços idênticos a E_n e, o espaço vetorial de n^q dimensões assim obtido se designará por $(E_n)^q$, denominando-se potência tensorial q de E_n . Já que os espaços E_n e $(E_n)^q$ estão referidos às bases $(\vec{e}_i)$ e $(E_{i_1, i_2, \dots, i_q})$, respectivamente, adotaremos a convenção:

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q} = E_{i_1 i_2 \dots i_q} \quad (1.6)$$

Com maior generalidade, se $\vec{x}(1), \vec{x}(2), \dots, \vec{x}(q)$ designam q vetores quaisquer de E_n , de componentes

$$x^{i_1}(1), x^{i_2}(2), \dots, x^{i_q}(q) \quad (1.7)$$

teremos que:

$$\vec{x}(1) \otimes \vec{x}(2) \otimes \dots \otimes \vec{x}(q) = x^{i_1}(1) x^{i_2}(2) \dots x^{i_q}(q) E_{i_1 i_2 \dots i_q} \quad (1.8)$$

Considerando o espaço vetorial E_n^* (dual de E_n) referido a base (x^i) , dual de $\vec{e}_i$. A partir destes dois espaços, podemos efetuar as operações seguintes:



Tomar potenciais tensoriais arbitrários de E_n ou E_n^* e multiplicá-las tensorialmente entre si, obtendo assim os produtos tensoriais do tipo:

$$E_n^{(r1)} \otimes E_n^{(s1)} \otimes E_n^{(r2)} \otimes \dots \otimes E_n^{*(sp)} \otimes E_n^{(rm)} \quad (1.9)$$

Definição 3:

Se chama tensor afim “ligado” a um espaço vetorial E_n , a todo elemento dos espaços vetoriais obtidos efetuando-se o produto tensorial dos espaços idênticos a E_n ou ao seu dual.

1.1.2. Tensor de Curvatura (Método Geométrico)

Definição 4:

Espaços Riemannianos: É uma variedade diferenciável de n-dimensões ($n = 4$) dotada de uma métrica.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1.10)$$

1- Condição Necessária de Integrabilidade:

Seja $\vec{A} = A^i \vec{e}_i$ um vetor em V^4 . Se $\vec{A}$ é integrável, então

$$\int_{c_1} d(A^i \vec{e}_i) = \vec{A} \quad \text{e} \quad \int_{c_2} \delta(A^i \vec{e}_i) = \vec{A} \quad (1.11)$$

nas quais c_1 e c_2 definem caminhos diferentes (*figural*),



$$\Rightarrow \int_{c2c1} \delta d(A^i \vec{e}_i) = \int \delta \vec{A} = \vec{A} \quad (1.12)$$

$$\int_{c1c2} d\delta(A^i \vec{e}_i) = \int d\vec{A} = \vec{A} \quad (1.13)$$

$$\int_{c2c1} \delta d(A^i \vec{e}_i) = \int_{c1c2} d\delta(A^i \vec{e}_i) \Rightarrow \int_{c1c2} [\delta d(A^i \vec{e}_i) - d\delta(A^i \vec{e}_i)] = 0$$

$$\Rightarrow (\delta dA^i) \vec{e}_i + A^i \delta d \vec{e}_i - (d\delta A^i) \vec{e}_i - A^i d\delta \vec{e}_i = 0$$

$$\Rightarrow [\delta dA^i - d\delta A^i] \vec{e}_i + A^i [\delta d\vec{e}_i - d\delta \vec{e}_i] = 0$$

$$\Rightarrow \delta dA^i = d\delta A^i \quad (1.14)$$

$$\delta d\vec{e}_i = d\delta \vec{e}_i \quad (1.15)$$

ou seja, os índices de derivação permutam em A^i e em $\vec{e}_i$ e isto é uma condição necessária para que $\vec{A}$ seja integrável.

2- Método de Cartan: Seja em V^4 dois símbolos de diferenciação δ e d permutáveis nas coordenadas associadas aos pontos. A partir de um ponto M de V^4 percorremos um caminho $c1$, (figura 1) e através de uma diferenciação d , obtem-se $\vec{M} + d\vec{M}(Y^i + dY^i)$; logo após, efetuaremos uma segunda diferenciação δ , obtendo-se $M1$. Por um caminho $c2$, a partir de $\vec{M}$ efetuaremos a diferenciação δ , que nos faz passar de M a $\vec{M} + \delta\vec{M}$, e posteriormente uma segunda diferenciação que nos leva a $M'2$ de coordenadas $(Y^i + dY^i + \delta Y^i + d\delta Y^i)$.

Pela propriedade já vista de permutação de d e δ , chegaremos ao mesmo ponto M' , $M'1 = M'2$. Mostraremos na sequência:

O contorno fechado será dado por:

$(M, M + dM, M', M + \delta M)$: Paralelogramo de Cartan

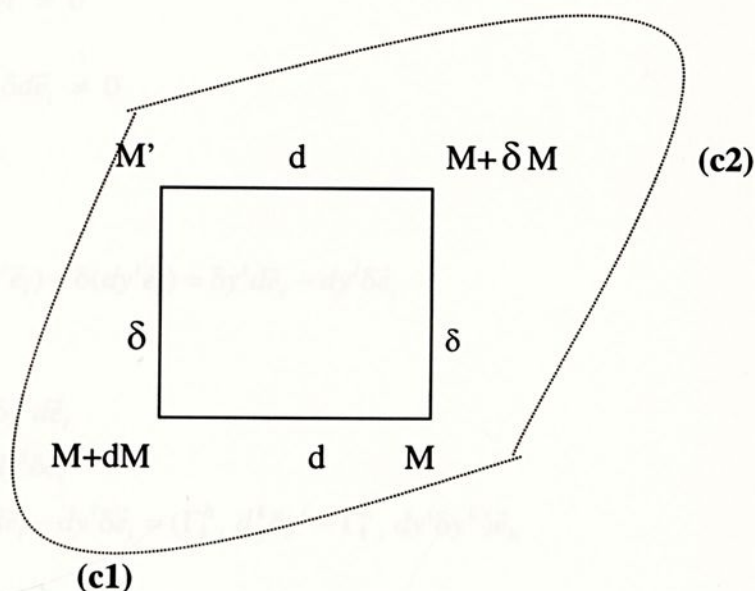


figura 1
(Paralelogramo de Cartan)

Utilizando o caminho c1 para chegar-se a M' , tem-se que, a partir do sistema $(M, \vec{e}_i)$ à $(M + dM, \vec{e}_i + d\vec{e}_i)$:

$$d\vec{M} = dy^i \vec{e}_i \quad (1.16)$$

$$d\vec{e}_i = w_i^h(d) \vec{e}_h \quad (1.17)$$

na qual,

$w_i^h(d)$ é a forma diferencial w_i^h para os d^i_y

O desenvolvimento de $(M + dM, M')$ nos leva a (M'_1, e'_{i1}) com:

$$\begin{aligned} \vec{MM}'_1 &= d\vec{M} + \delta\vec{M} + \delta d\vec{M} \\ (e'_{i1}) - \vec{e}_i &= d\vec{e}_i + \delta\vec{e}_i + \delta d\vec{e}_i \end{aligned} \quad (1.18)$$

Por conseguinte, pode-se imaginar que seria possível passar de $(M'_1, \vec{e}'_{i1})$ à $(M'_2, \vec{e}'_{i2})$, mediante as fórmulas:

$$M'_1 \vec{M}'_2 = d\delta\vec{M} - \delta d\vec{M} \neq 0 \quad (1.19)$$

$$(e'_{i2}) - (e'_{i1}) = d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i \neq 0 \quad (1.20)$$

Em primeiro lugar:

$$d(\delta\vec{M}) - \delta d\vec{M} = d(\delta y^i \vec{e}_i) - \delta(dy^i \vec{e}_i) = \delta y^i d\vec{e}_i - dy^i \delta\vec{e}_i \quad (1.21)$$

Pois:

$$\begin{aligned} d(\delta y^i \vec{e}_i) &= (d\delta y^i) \vec{e}_i + \delta y^i d\vec{e}_i \\ \delta(dy^i \vec{e}_i) &= (\delta dy^i) \vec{e}_i + dy^i \delta\vec{e}_i \\ \Rightarrow d\delta\vec{M} - \delta d\vec{M} &= \delta y^i d\vec{e}_i - dy^i \delta\vec{e}_i = (\Gamma_{ki}^h dy^k \delta y^i - \Gamma_{ki}^h dy^i \delta y^k) \vec{e}_h \end{aligned} \quad (1.22)$$

na qual,

$$w_i^j = \Gamma_{ki}^j dy^k; \quad \Gamma_{ki}^j \quad \text{são conexões afim}$$

Permutando os índices i e k tem-se:

$$d\delta\vec{M} - \delta d\vec{M} = (\Gamma_{ki}^h - \Gamma_{ik}^h) dy^k \delta y^i \vec{e}_h = 0, \quad (1.23)$$

pois

$$\Gamma_{ki}^h = \Gamma_{ik}^h \Leftrightarrow \text{Variedade Riemanniana} \quad (1.24)$$

Comparando os vetores dos dois sistemas em M' :

$$(1. *) \quad (\vec{e}'_{i2}) - (\vec{e}'_{i1}) = 0$$

De acordo com resultados precedentes:

$$\begin{aligned} (\vec{e}'_{i2}) - (\vec{e}'_{i1}) &= d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i = d(w_i^h(\delta) \vec{e}_h) - \delta(w_i^h(d) \vec{e}_h) = \\ &= [dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d)] \vec{e}_h + w_i^k(\delta) d\vec{e}_k - w_i^k(d) \delta\vec{e}_k \\ \Rightarrow d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i &= [dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) + w_i^k(\delta) w_k^h(d) - w_i^k(d) w_k^h(\delta)] \vec{e}_h \neq 0 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Adotaremos a convenção:

$$\begin{aligned} d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i &= \Omega_i^h \vec{e}_h \\ \Omega_i^h &= dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) + w_i^k(\delta) w_k^h(d) - w_i^k(d) w_k^h(\delta) \end{aligned} \quad (1.26)$$

3- Tensor de Curvatura (Riemann – Christoffel)

De resultados anteriores:

$$\begin{aligned} w_i^h(\delta) &= d(\Gamma_{s i}^h \delta y^s) = \delta_r \Gamma_{s i}^h dy^r \delta y^s + \Gamma_{s i}^h d\delta y^s \Rightarrow \\ \Rightarrow dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) &= \delta_r \Gamma_{s i}^h dy^r \delta y^s - \delta_r \Gamma_{s i}^h \delta y^r dy^s \Rightarrow \\ \Rightarrow dw_i^h(\delta) - \delta w_i^h(d) &= (\delta_r \Gamma_{s i}^h - \delta_s \Gamma_{r i}^h) dy^r \delta y^s \end{aligned} \quad (1.27)$$

Por outro lado:

$$w_i^k(\delta) w_i^h(d) - w_i^k(d) w_i^h(\delta) = (\Gamma_{s i}^k \Gamma_{r i}^h - \Gamma_{r i}^k \Gamma_{s i}^h) dy^r \delta y^s \quad (1.28)$$

Como:

$$\Omega_i^h = (1.27) + (1.28)$$

Então:

$$\Omega_i^h = R_{i,rs}^h dy^r \delta y^s$$

onde:

$$R_{i,rs}^h = \delta_r \Gamma_{s i}^h - \delta_s \Gamma_{r i}^h + \Gamma_{r k}^h \Gamma_{s i}^k - \Gamma_{s k}^h \Gamma_{r i}^k \quad (1.29)$$

$R_{i,rs}^h$ é denominado *Tensor de Curvatura* ou de *Riemann-Christoffel*

Deduz-se que as condições de integrabilidade dos vetores $\vec{e}_i$ se expressam por meio das equações:

$$R_{i,rs}^h = 0 \quad (1.30)$$

Definição 5: Componentes Contravariantes: Chamaremos componentes contravariantes de um vetor $\vec{x}$, com respeito a uma base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ qualquer, aos números (escalares) x^i tais que:

$$\vec{x} = x^i \cdot \vec{e}_i \quad (1.31)$$

Definição 6:

(2)- Componentes Covariantes: Chamaremos componentes covariantes de um vetor $\vec{x}$ com respeito à mesma base acima, aos números (escalares) x_i , tais que:

$$x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i \quad (1.32)$$

Definição 7:

Contração de índices: É uma operação que consiste, uma vez escolhidos dois índices, um covariante e outro contravariante, em igualá-los e somá-los com respeito a este índice repetido duas vezes. A contração de dois índices em um tensor de ordem q origina outro de ordem $q-2$.

Será possível deduzir por contração de índices novos tensores a partir de um tensor de Riemann- Christoffel?

Teremos que fazer, por exemplo, a contração de um índice do primeiro grupo por outro do segundo grupo, por exemplo os índices segundo e terceiro.

$$R_{ij} = R_{i,hj}^h$$

como:

$$R_{ij} = g^{hk} R_{ik,hj} = g^{hk} R_{hj,ik} = g^{hk} R_{jh,ki} = R_{ji}$$

$$\therefore R_{ij} = R_{ji} \quad (\text{simétrico})$$

Define-se, então, o Tensor de Ricci:

$$\text{Tensor de Ricci} = (R_{ij})$$

$$R = R_i^i = g^{ij} R_{ij}$$

Onde g^{ij} é o chamado *potencial gravitacional*

R é chamado de escalar de curvatura Riemaniana do espaço V^4

1.2- Identidades de Bianchi e Equações de Einstein

Entre as componentes do tensor $\nabla_t R_{ij,rs}$, que é o tensor derivado do tensor de curvatura, existem outras identidades importantes. Para estabelecermos as Identidades de Bianchi, adotaremos um sistema de coordenadas relativas a um ponto M arbitrário de V_n . Os símbolos de Christoffel serão nulos em M e deduziremos:

$$\nabla_t R_{i,rs}^h = \partial_{rt} \Gamma_{s\ i}^h - \partial_{st} \Gamma_{r\ i}^h \quad (1.33)$$

Permutando circularmente os índices:

$$\nabla_r R_{i,st}^h = \partial_{sr} \Gamma_{s\ i}^h - \partial_{tr} \Gamma_{s\ i}^h \quad (1.34)$$

$$\nabla_s R_{i,tr}^h = \partial_{ts} \Gamma_{r\ i}^h - \partial_{rs} \Gamma_{t\ i}^h \quad (1.35)$$

Fazendo (1.33)+(1.34)+(1.35):

$$\Rightarrow \nabla_r R_{i,st}^h + \nabla_s R_{i,tr}^h + \nabla_t R_{i,rs}^h = 0 \quad (1.36)$$

Que são as chamadas *Identidades de Bianchi*.

Fazendo um contração em (1.36) de t por h

$$-\nabla_r R_{is} + \nabla_s R_{ir} + \nabla_h R_{i,rs}^h = 0 \quad (1.37)$$

Contraindo i com s

$$-\nabla_s R_s^s + \nabla_s R_r^s + \nabla_h R_r^h = 0 \quad (1.38)$$

ou seja,

$$2\nabla_s R_r^s - \nabla_r R = 0 \quad (1.39)$$

$$\nabla_s \left(R_r^s - \frac{1}{2} g_r^s R \right) = 0 \quad (1.40)$$

na qual,

$$\nabla_r = \nabla_s g_r^s \quad (1.41)$$

Introduzindo o tensor simétrico S_{rs}

$$S_{rs} = R_{rs} - \frac{1}{2} g_{rs} R \quad \text{Equação de Einstein sem o termo cosmológico } K \quad (1.42)$$

$$\Rightarrow \nabla_s S_r^s = 0 \quad (1.43)$$

Elie Cartan [3] mostrou que a forma mais genérica de tensores em V_4 ou em V_n que satisfariam a lei (1.43) tem a forma:

$$S_{sr} = h \left(R_{sr} - \frac{1}{2} g_{sr} (R + K) \right) \quad \text{Equação de Einstein com termo cosmológico } k \quad (1.44)$$

Se o espaço tempo é plano, isto implica:

$$g_{ij} = cte \Rightarrow R_{ij,rs} = 0 \quad (1.45)$$

Definição 8:

Se o espaço tempo é plano, $R_{ij,rs} = 0$, foi axiomatizado por Einstein que no vácuo (espaço-tempo vazio) $R_{ij} = 0$ (Tensor de Ricci = 0) que é um resultado da contração de um índice do primeiro grupo com um índice do segundo grupo de $R_{ij,rs}$. A expressão constitui a *Lei de Einstein da Gravitação*.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0 \quad (1.46)$$

Seria interessante a esse ponto, enumerarmos algumas propriedades do tensor de curvatura e do tensor de Ricci.

Propriedades de $R_{ij,rs}$

1- $R_{ij,rs}$ tem $n^4 = 4^4 = 256$ elementos

2- $R_{ij,rs} = R_{rs,ij}$ (Simetria)

3- $R_{ij,rs} = -R_{ij,rs}$ (Anti-Simetria)

4- $R_{ij,rs} = -R_{ji,rs}$ (Anti-Simetria)

(n = número de dimensões do espaço-tempo)

Conclusão: Em virtude das propriedades 1, 2, 3 e 4, o tensor $R_{ij,rs}$ terá apenas 20 componentes independentes.

Por contração de dois índices, um do primeiro e outro do segundo grupo do tensor de Riemann-Chistoffel, resultará um outro tensor, dito tensor de Ricci, simétrico em i e j .

$$R_{i,hj}^h = R_{ij} = R_{ji}$$

Prova:

$$R_{ij} = g^{hk} R_{ik,hj} = g^{hk} R_{hj,ik} = g^{hk} R_{jh,ki} \Rightarrow R_{ij} = R_{ji}$$

A lei da gravitação de Einstein não se parece, a uma primeira observação, nem um pouco com a Lei de Newton. Para que observemos alguma similaridade é preciso que olhemos g_{ij} como potenciais de gravitação. Existem 10 desses potenciais, ao invés do único potencial da mecânica newtoniana. Esses potenciais descrevem não apenas o campo gravitacional, mas também o sistema de coordenadas.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = 0 \quad \begin{cases} R_{ij} = R_{ji} \\ g_{ij} = g_{ji} \end{cases} \Rightarrow 10 \text{ equações} \quad (1.47)$$

1.3.1. O espaço-tempo de Schwarzschild

1.3. Equações de Einstein no espaço-tempo de Schwarzschild – método analítico

As equações de Einstein para o vácuo são não lineares e consequentemente de soluções muito difíceis. No entanto, há um caso especial que pode ser resolvido sem maiores problemas: o campo gravitacional estático, simetricamente esférico produzido por um corpo, em repouso, esfericamente simétrico.

(i) Campo Estático $\Rightarrow g_{0m} = g_{m0} = 0, \quad m = 1, 2, 3$

no qual:

$$(t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

pois:

$$g_{0m} = \vec{e}_0 \vec{e}_m = 0;$$

(ii) Ter simetria esférica $\Rightarrow$ que todos os termos fora da diagonal $g_{\mu\nu} = 0$,

$$\begin{pmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix}$$

A distâncias muito grandes, do corpo que gera a gravitação é esperado que o campo gravitacional tenda a zero, portanto ter-se-á assintoticamente um Espaço-tempo plano (Flat Space-Time).

1.3.1. O espaço-tempo de Schwarzschild

A métrica de Minkowski é dada por:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - ((dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2) \quad (1.48)$$

Em um sistema de Simetria Esférica, as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , são tais que :

$$(t, x, y, z) \rightarrow (t, r, \theta, \phi)$$

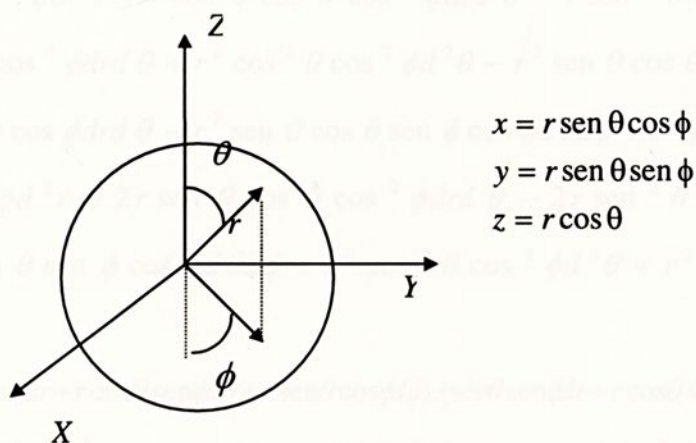


figura 2 (Coordenadas Esféricas)

Em coordenadas esféricas, portanto:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \quad (1.49)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \quad (1.50)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi \quad (1.51)$$

então:

$$dx = \sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi$$

$$dy = \sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi$$

$$dz = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$$

Calculando agora:

$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, tem-se que:

$$\begin{aligned} (dx)^2 &= (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) \cdot (\sin \theta \cos \phi dr + r \cos \theta \cos \phi d\theta - r \sin \theta \sin \phi d\phi) = \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 r + r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi d^2 \theta - r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \phi + \\ &+ r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi d^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi - \\ &- r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi - r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \phi = \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 r + 2r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi d^2 \theta - 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi - \\ &- 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (dy)^2 &= (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) \cdot (\sin \theta \sin \phi dr + r \cos \theta \sin \phi d\theta + r \sin \theta \cos \phi d\phi) = \\ &= \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 r + r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \phi + \\ &+ r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + \\ &+ r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \phi = \\ &= \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 r + 2r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + \\ &+ 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d^2 \theta d\phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \phi \end{aligned}$$

$$(dz)^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 = \cos^2 \theta d^2 r - 2r \sin \theta \cos \theta d^2 \theta + \cos^2 \theta d^2 r$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 r + \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 r + \cos^2 \theta d^2 r + \quad (1.52)$$

$$+ 2r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi d^2 \theta + 2r \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi d^2 \theta - 2r \sin \theta \cos \theta d^2 \theta - \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned}
 & - 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi dr d\phi + 2r \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi dr d\phi - \\
 & - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi d\theta d\phi + \\
 & + r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta d^2 \theta + \quad (1.54)
 \end{aligned}$$

$$+ r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \phi \quad (1.55)$$

Analisando (1.52)

$$\begin{aligned}
 & \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 r + \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 r + \cos^2 \theta d^2 r = \\
 & = \sin^2 \theta d^2 r (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta d^2 r = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) d^2 r = d^2 r
 \end{aligned}$$

Analisando (1.53)

$$\begin{aligned}
 & 2r \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi dr d\theta + 2r \sin \theta \cos \phi \sin^2 \phi dr d\theta - 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta = \\
 & 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi - 1) = 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

Analisando (1.54)

$$\begin{aligned}
 & r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta d^2 \theta = \\
 & r^2 \cos^2 \theta d^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + r^2 \sin^2 \theta d^2 \theta = \\
 & r^2 d^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 d^2 \theta
 \end{aligned}$$

Analisando (1.55)

$$\begin{aligned}
 & r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi d^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi d^2 \phi = \\
 & r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi
 \end{aligned}$$

Tem-se então que:

$$(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (1.52) + (1.53) + (1.54) + (1.55) = d^2 r + r^2 d^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi$$

Substituindo na Métrica de Minkowski

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (d^2 r + r^2 d^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi)$$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d^2 r - r^2 (d^2 \theta + \sin^2 \theta d^2 \phi) \quad (1.56)$$

Reescrevendo agora a métrica de uma forma mais geral compatível com a simetria do problema:

$$ds^2 = u dt^2 - V d^2 r - w r^2 (d^2 \theta + \sin^2 \theta d^2 \phi)$$

na qual u, V e w são funções de r

$w=1$; $u=e^{2\nu}$; $V=e^{2\lambda}$, ν e λ funções de r

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} d^2 r - r^2 d^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi \quad (1.57)$$

1.3.2 Cálculo dos Símbolos de Christoffel

A partir da expressão analítica para os Símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\mu\nu\sigma} = \frac{1}{2} (g_{\mu\nu, \sigma} + g_{\mu\sigma, \nu} - g_{\nu\sigma, \mu}) \quad (1.58)$$

Tem-se que:

$$\Gamma_{001} = \frac{1}{2} (g_{00,1} + g_{01,0} - g_{01,0})$$

$$= \Gamma_{010} = \frac{1}{2} (g_{01,0} + g_{00,1} - g_{10,0})$$

$$\Gamma_{100} = \frac{1}{2} (g_{10,0} + g_{10,0} - g_{00,1})$$

$$\Gamma_{111} = \frac{1}{2}(g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1})$$

$$\Gamma_{122} = \frac{1}{2}(g_{12,2} + g_{12,2} - g_{22,1})$$

$$\Gamma_{212} = \frac{1}{2}(g_{21,2} + g_{22,1} - g_{12,2})$$

$$= \Gamma_{221} = \frac{1}{2}(g_{22,1} + g_{21,2} - g_{21,2})$$

$$\Gamma_{133} = \frac{1}{2}(g_{13,3} + g_{13,3} - g_{33,1})$$

$$\Gamma_{313} = \frac{1}{2}(g_{31,3} + g_{33,1} - g_{13,3})$$

$$= \Gamma_{311} = \frac{1}{2}(g_{33,1} + g_{31,3} - g_{31,3})$$

$$\Gamma_{233} = \frac{1}{2}(g_{23,3} + g_{23,3} - g_{33,2})$$

$$\Gamma_{323} = \frac{1}{2}(g_{32,3} + g_{33,2} - g_{23,3})$$

$$= \Gamma_{332} = \frac{1}{2}(g_{33,2} + g_{32,3} - g_{32,3})$$

Como:

$$g_{00} = e^{2\nu}, g_{11} = -e^{2\lambda}, g_{22} = -r^2, g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$$

$$g^{00} = e^{-2\nu}, g^{11} = -e^{-2\lambda}, g^{22} = -r^{-2}, g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta$$

$$\Gamma_{00}^1 = g^{11} \Gamma_{100} = -e^{-2\lambda} \frac{1}{2} (-e^{2\nu})' = (-e^{-2\lambda}) \frac{1}{2} 2\nu' (-e^{2\nu}) = \nu' e^{2\nu-2\lambda}$$

$$\Gamma_{10}^0 = g^{00} \Gamma_{010} = e^{-2\nu} \frac{1}{2} (e^{2\lambda})' = (e^{-2\nu}) \frac{1}{2} 2\lambda' e^{2\lambda} = \lambda'$$

$$\Gamma_{11}^1 = g^{11} \Gamma_{111} = -e^{-2\lambda} \frac{1}{2} (-e^{2\lambda})' = (-e^{-2\lambda}) \frac{1}{2} 2\lambda' (-e^{2\lambda}) = \lambda'$$

$$\Gamma_{12}^2 = g^{22} \Gamma_{212} = -r^{-2} \frac{1}{2} (-r^2)' = (-r^{-2}) \frac{1}{2} (-2r) = r^{-1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = g^{11} \Gamma_{122} = -e^{-2\lambda} \frac{1}{2} (r^2)' = (-e^{-2\lambda}) \frac{1}{2} 2r = -re^{-2\lambda}$$

$$\Gamma_{13}^3 = g^{33} \Gamma_{313} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta \frac{1}{2} (-r^2 \sin^2 \theta)' = r^{-2} \sin^{-2} \theta \frac{1}{2} 2r \sin^2 \theta = r^{-1}$$

$$\Gamma_{33}^1 = g^{11} \Gamma_{133} = -e^{-2\lambda} \frac{1}{2} (r^2 \sin^2 \theta)' = -e^{-2\lambda} \frac{1}{2} 2r \sin^2 \theta = -r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}$$

$$\Gamma_{23}^3 = g^{33} \Gamma_{323} = -r^{-2} \sin^{-2} \theta \frac{1}{2} (-r^2 \sin^2 \theta)'' =$$

$$-r^{-2} \sin^{-2} \theta \frac{1}{2} (-r^2 2 \sin \theta \cos \theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^{-2} \theta} = \cot \theta$$

$$\Gamma_{33}^2 = g^{22} \Gamma_{233} = -r^{-2} \frac{1}{2} (r^2 \sin^2 \theta)'' =$$

$$-r^{-2} \frac{1}{2} (r^2 2 \sin \theta \cos \theta) = -\sin \theta \cos \theta$$

Nos desenvolvimentos acima, cabe a seguinte observação (a notação ' e '' é devida a Dirac, em *P.A.M Dirac – General Relativity, Wiley, 1972*)

' derivada em função de r

'' derivada em função de θ

1.3.3 Cálculo de R_{uv} em Função dos Símbolos de Christoffel

Como,

$$R_{0v} = \Gamma_{0\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0v,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{0v}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{0\beta}^{\alpha} \Gamma_{v\alpha}^{\beta}$$

então,

$$\begin{aligned} R_{0v} &= (\Gamma_{00,v}^0 + \Gamma_{01,v}^1 + \Gamma_{02,v}^2 + \Gamma_{03,v}^3) - (\Gamma_{0v,0}^0 + \Gamma_{0v,1}^1 + \Gamma_{0v,2}^2 + \Gamma_{0v,3}^3) \\ &- (\Gamma_{0v}^0 \Gamma_{0\beta}^{\beta} + \Gamma_{0v}^1 \Gamma_{1\beta}^{\beta} + \Gamma_{0v}^2 \Gamma_{2\beta}^{\beta} + \Gamma_{0v}^3 \Gamma_{3\beta}^{\beta}) + (\Gamma_{0\beta}^0 \Gamma_{v0}^{\beta} + \Gamma_{0\beta}^1 \Gamma_{v1}^{\beta} + \\ &+ \Gamma_{0\beta}^2 \Gamma_{v2}^{\beta} + \Gamma_{0\beta}^3 \Gamma_{v3}^{\beta}) \Rightarrow R_{0v} = R_{00} = -\Gamma_{00,1}^1 - \Gamma_{00}^1 \Gamma_{1\beta}^{\beta} + 2\Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 \\ &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_{00} = -\Gamma_{00,1}^1 - (\Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{00}^1 \Gamma_{13}^3) + 2\Gamma_{00}^1 \Gamma_{10}^0$$

$$R_{1v} = \Gamma_{1\alpha,v}^{\alpha} - \Gamma_{1v,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{1v}^{\alpha} \Gamma_{\alpha\beta}^{\beta} + \Gamma_{1\beta}^{\alpha} \Gamma_{v\alpha}^{\beta}$$

$$\begin{aligned}
&= (\Gamma_{10,v}^0 + \Gamma_{11,v}^1 + \Gamma_{12,v}^2 + \Gamma_{13,v}^3) - (\Gamma_{1v,0}^0 + \Gamma_{1v,1}^1 + \Gamma_{1v,2}^2 + \Gamma_{1v,3}^3) - \\
&- (\Gamma_{1v}^0 \Gamma_{0\beta}^\beta + \Gamma_{1v}^1 \Gamma_{1\beta}^\beta (*) + \Gamma_{1v}^2 \Gamma_{2\beta}^\beta + \Gamma_{1v}^3 \Gamma_{3\beta}^\beta) + \\
&+ (\Gamma_{1\beta}^0 \Gamma_{v0}^\beta + \Gamma_{1\beta}^1 \Gamma_{v1}^\beta + \Gamma_{1\beta}^2 \Gamma_{v2}^\beta + \Gamma_{1\beta}^3 \Gamma_{v3}^\beta)(**) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$(*) \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3$$

$$(**) \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R_{11} &= \Gamma_{10,1}^0 + \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{13,1}^3 - \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{10}^0 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \\
&- \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \Gamma_{10,1}^0 + \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{13,1}^3 - \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3) \\
&+ \Gamma_{10}^0 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{13}^3
\end{aligned}$$

$$R_{2v} = \Gamma_{2\alpha,v}^\alpha - \Gamma_{2v,\alpha}^\alpha - \Gamma_{2v}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{2\beta}^\alpha \Gamma_{v\alpha}^\beta$$

$$= (\Gamma_{20,v}^0 + \Gamma_{21,v}^1 + \Gamma_{22,v}^2 + \Gamma_{23,v}^3) -$$

$$- (\Gamma_{2v,0}^0 + \Gamma_{2v,1}^1 + \Gamma_{2v,2}^2 + \Gamma_{2v,3}^3) -$$

$$- (\Gamma_{2v}^0 \Gamma_{0\beta}^\beta + \Gamma_{2v}^1 \Gamma_{1\beta}^\beta (*) + \Gamma_{2v}^2 \Gamma_{2\beta}^\beta + \Gamma_{2v}^3 \Gamma_{3\beta}^\beta) +$$

$$+ (\Gamma_{2\beta}^0 \Gamma_{v0}^\beta + \Gamma_{2\beta}^1 \Gamma_{v1}^\beta + \Gamma_{2\beta}^2 \Gamma_{v2}^\beta + \Gamma_{2\beta}^3 \Gamma_{v3}^\beta)(**) \Rightarrow$$

$$(*) \Gamma_{21}^1 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{23}^3$$

$$(**) \Gamma_{20}^0 \Gamma_{20}^0 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{22}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$\Rightarrow R_{22} = \Gamma_{23,2}^3 - \Gamma_{22,1}^1 - (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3) + \\ + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{22} = \Gamma_{23,2}^3 - \Gamma_{22,1}^1 - (\Gamma_{22}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{13}^3) + \\ + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{23}^3$$

$$R_{3v} = \Gamma_{3\alpha,v}^\alpha - \Gamma_{3v,\alpha}^\alpha - \Gamma_{3v}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\beta + \Gamma_{3\beta}^\alpha \Gamma_{v\alpha}^\beta$$

$$= (\Gamma_{30,v}^0 + \Gamma_{31,v}^1 + \Gamma_{32,v}^2 + \Gamma_{33,v}^3) - (\Gamma_{3v,0}^0 + \Gamma_{3v,1}^1 + \Gamma_{3v,2}^2 + \Gamma_{3v,3}^3) -$$

$$- (\Gamma_{3v}^0 \Gamma_{0\beta}^\beta + \Gamma_{3v}^1 \Gamma_{1\beta}^\beta (*) + \Gamma_{3v}^2 \Gamma_{2\beta}^\beta + \Gamma_{3v}^3 \Gamma_{3\beta}^\beta) +$$

$$+ (\Gamma_{3\beta}^0 \Gamma_{v0}^\beta + \Gamma_{3\beta}^1 \Gamma_{v1}^\beta + \Gamma_{3\beta}^2 \Gamma_{v2}^\beta + \Gamma_{3\beta}^3 \Gamma_{v3}^\beta)(**) \Rightarrow$$

$$(*) \Gamma_{31}^1 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{33}^3$$

$$(**) \Gamma_{30}^0 \Gamma_{30}^0 + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{31}^1 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{32}^2 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{33}^3$$

$$\Rightarrow R_{33} = -(\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2) - (\Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3) + (\Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2)$$

1.3.4 Cálculo dos Valores de R_{00} , R_{11} , R_{22} , R_{33}

$$R_{00} = (-v'e^{2v-2\lambda})'(*) - (v'e^{2v-2\lambda} \cdot v' + v'e^{2v-2\lambda} \cdot \lambda' + v'e^{2v-2\lambda} \cdot r^{-1} + v'e^{2v-2\lambda} \cdot r^{-1}) + 2v'e^{2v-2\lambda} \cdot v' \Rightarrow$$

$$(*)(-v'e^{2v-2\lambda})' = -v''e^{2v-2\lambda} - v'(2v-2\lambda)'e^{2v-2\lambda} =$$

$$= -v''e^{2v-2\lambda} - 2v'v'e^{2v-2\lambda} + 2v'\lambda'e^{2v-2\lambda} =$$

$$= -v''e^{2v-2\lambda} - 2v'^2e^{2v-2\lambda} + 2v'\lambda'e^{2v-2\lambda}$$

$$\Rightarrow R_{00} = -v''e^{2v-2\lambda} - 2v'^2e^{2v-2\lambda} + 2v'\lambda'e^{2v-2\lambda} - v'^2e^{2v-2\lambda} -$$

$$-v'\lambda'e^{2v-2\lambda} - \frac{v'}{r}e^{2v-2\lambda} - \frac{v'}{r}e^{2v-2\lambda} + 2v'^2e^{2v-2\lambda} =$$

$$= e^{2v-2\lambda}(-v'' - 2v'^2 + 2v'\lambda' - v'^2 - v'\lambda' - \frac{v'}{r} - \frac{v'}{r} + 2v'^2) =$$

$$= e^{2v-2\lambda}(-v'' - v'^2 + v'\lambda' - \frac{2v'}{r}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{00} = (\lambda'v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} - v'')e^{2v-2\lambda} \quad (1.59)$$

$$R_{11} = (v')' + (r^{-1})' - \lambda'(v' + r^{-1} + r^{-1}) + v'v' + r^{-1}r^{-1} + r^{-1}r^{-1} =$$

$$= v'' - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \lambda' v' - \frac{\lambda'}{r} - \frac{\lambda'}{r} + v' v' + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{11} = v'' - \lambda' v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} \quad (1.60)$$

$$R_{22} = (\cot g \theta)''(*) - (-re^{-2\lambda})' - (-re^{-2\lambda} v' - re^{-2\lambda} \lambda' - re^{-2\lambda} r^{-1} - re^{-2\lambda} r^{-1}) + (-re^{-2\lambda} r^{-1} + r^{-1}(-re^{-2\lambda}) + \cot g^2 \theta \Rightarrow$$

$$(*) (\cot g \theta)'' = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)' = \left(\frac{1}{\sin \theta} \cos \theta \right)' = \left(\frac{1}{\sin \theta} \right)' \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} (\cos \theta)' = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \cos \theta \cos \theta + \frac{1}{\sin \theta} - (-\sin \theta) = -\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1$$

$$\Rightarrow R_{22} = -\frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - 1 - 2r\lambda' e^{-2\lambda} \lambda' + rv' e^{-2\lambda} + r\lambda' e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda} - e^{-2\lambda} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = (1 + rv' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1$$

$$R_{22} = (1 + rv' - r\lambda') e^{-2\lambda} - 1 \quad (1.61)$$

$$R_{33} = -(\Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2) - (\Gamma_{33}^1 \Gamma_{10}^0 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3) + (\Gamma_{33}^1 \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{33}^1 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{33}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\left[(-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda})' + (-\sin \theta \cos \theta)''\right] - ((-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}) v' + (-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}) \lambda' + (-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}) r^{-1} + (-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}) r^{-1} + (-\sin \theta \cos \theta) \cot g \theta + (-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}) r^{-1} + (-\sin \theta \cos \theta) \cot g \theta + r^{-1}(-r \sin^2 \theta e^{-2\lambda}) + \cot g \theta (-\sin \theta \cos \theta)$$

$$\begin{aligned}
&= (r \sin^2 \theta e^{-2\lambda})' - \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + r v' \sin^2 \theta e^{-2\lambda} + r \lambda' \sin^2 \theta e^{-2\lambda} + \\
&+ \sin^2 \theta e^{-2\lambda} + \sin^2 \theta e^{-2\lambda} + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta e^{-2\lambda} - \cos^2 \theta - \sin^2 \theta e^{-2\lambda} - \\
&- \cos^2 \theta \\
&= \sin^2 \theta e^{-2\lambda} - r 2 \lambda' \sin^2 \theta e^{-2\lambda} + r v' \sin^2 \theta e^{-2\lambda} + r \lambda' \sin^2 \theta e^{-2\lambda} - \\
&- \sin^2 \theta = \\
&= \sin^2 \theta (e^{-2\lambda} - 2 r \lambda' e^{-2\lambda} + r v' e^{-2\lambda} + r \lambda' e^{-2\lambda} - 1) = \\
&= \sin^2 \theta [e^{-2\lambda} (1 - r \lambda' + r v') - 1] = \sin^2 \theta R_{22}
\end{aligned}$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22}$$

(1.62)

1.3.5 A Solução de Schwarzschild no Vácuo

$$R_{00} = R_{11} = 0$$

$$R_{00} = 0$$

$$R_{00} = (\lambda' v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} - v'') e^{2v-2\lambda} = 0$$

$$\text{como } e^{2v-2\lambda} \neq 0 \Rightarrow \lambda' v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} - v'' = 0$$

$$R_{11} = 0$$

$$R_{11} = v'' - \lambda' v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda' v' - v'^2 - \frac{2v'}{r} - v'' = 0 \\ v'' - \lambda' v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \end{array} \right.$$

$$-\frac{2v'}{r} - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \Rightarrow v' + \lambda' = 0$$

$$\text{Se } v' + \lambda' = 0 \Rightarrow (v + \lambda)' = 0 \Rightarrow v + \lambda = cte$$

(1.63)

Quando $r \rightarrow 0$, o espaço tende a se tornar plano $g_{00}g_{11} = -1$

$$g_{00} = e^{2\nu}$$

$$g_{11} = -e^{2\lambda}$$

Temos então:

$$e^{2\nu}(-e^{2\lambda}) = -1$$

$$-e^{2\nu+2\lambda} = -1$$

$$e^{2\nu+2\lambda} = 1$$

$$e^{2\nu+2\lambda} = e^0$$

$$2\nu + 2\lambda = 0$$

$$\nu + \lambda = 0$$

(1.64)

De (1.63) e (1.64) vem:

$$\nu + \lambda = cte$$

$$\nu + \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\nu + \lambda = 0 \text{ em todo o espaço.}$$

Então:

$$\lambda = -\nu \quad (1.65),$$

em $R_{22} = 0$ temos:

$$R_{22} = (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (1 + r\nu' - r\lambda')e^{-2\lambda} = 1$$

usando (1.65), temos:

$$(1 + r\nu' + r\nu')e^{2\nu} = 1$$

$$(1 + 2r\nu')e^{2\nu} = 1 \quad (1.66)$$

temos que:

$$(re^{2\nu})' = 1e^{2\nu} + r2\nu'e^{2\nu} = e^{2\nu}(1 + 2r\nu')$$

então, substituindo em (1.66)

$$(re^{2v})' = 1 \quad (1.67)$$

Integrando (1.67)

$re^{2v} = r - 2m$, onde m é a constante de Integração

$$e^{2v} = \frac{r}{r} - \frac{2m}{r}$$

$$g_{00} = e^{2v} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$R_{22} = (1 + rv' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1$$

usando (1.65), temos:

$$R_{22} = (1 - r\lambda' - r\lambda')e^{-2\lambda} - 1 = 0$$

$$(1 - 2r\lambda')e^{-2\lambda} = 1 \quad (1.68)$$

Mas, temos que:

$$(re^{-2\lambda})' = 1e^{-2\lambda} - r2\lambda'e^{-2\lambda} = e^{-2\lambda}(1 - 2r\lambda')$$

então, substituindo em (1.68)

$$(re^{-2\lambda})' = 1 \quad (1.69)$$

Integrando (1.69)

$re^{-2\lambda} = r - 2m$, onde m é a constante de Integração

$$e^{-2\lambda} = \frac{r}{r} - \frac{2m}{r}$$

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}$$

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}$$

Tínhamos que:

$$ds^2 = udt^2 - vdr^2 - wr^2(d^2\theta + \sin^2\theta d^2\phi)$$

onde u, v e w são funções de r

$w=1$; $u=e^{2v}$; $v=e^{2\lambda}$, v e λ funções de r

então:

$$ds^2 = e^{2v} dt^2 - e^{2\lambda} d^2 r - r^2 d^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi$$

Substituindo os valores encontrados para $e^{2v}, e^{2\lambda}$ temos a equação (1.70)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} d^2 r - r^2 d^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta d^2 \phi$$

CAPÍTULO 2

Método dos Elementos Finitos

2.1 – Breve Histórico

Por volta de 1950 o método de aproximação de Ritz-Galerkin era a aplicação que trazia melhor solução para problemas de mais dificuldade nas áreas da Física-Matemática, mas não a aplicação ideal, devido a dificuldades na geração de funções de base $w_i(x)$ apropriadas na equação

$$W(x) = \sum_{i=1}^G \alpha_i w_i(x) \quad , \quad (2.1)$$

na qual $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são escalares.

As equações de Ritz-Galerkin eram altamente sensíveis na escolha de funções $w_i(x)$ e esse esforço para encontrar tais funções trazia sérias desvantagens.

O Método dos Elementos Finitos é uma técnica sistemática para a construção das funções de base $w_i(x)$, para domínios irregulares, nas aproximações de Ritz-Galerkin. Além disso, o Método dos Elementos Finitos é de fácil implementação computacional.

O Método dos Elementos Finitos é uma aplicação de muito sucesso em métodos clássicos como:

- a) Método de Ritz;
- b) Método de Galerkin;
- c) Método dos Mínimos Quadrados.

Em geral é útil para aproximações de soluções de problemas de campo envolvendo a teoria de equações diferenciais parciais elípticas. Esse método foi primeiramente descrito com respeito ao problema:

$$Au = f \quad \text{em } \Omega \quad (2.2)$$

$$u = g \quad \text{em } \partial\Omega^{(1)} \quad (2.3)$$

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial v}{\partial x_j} \cos(v, x_i) = h \quad \text{em } \partial\Omega^{(2)}, \text{ na qual } A \text{ é um operador linear}$$

elíptico, $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ são coordenadas em $\mathbb{R}^n$, Ω é um domínio do campo $\mathbb{R}^n$ com campo $\partial\mathbb{R}$, v é a direção normal externa a $\partial\Omega^{(2)}$, e $\partial\Omega^{(1)} \cup \partial\Omega^{(2)} \equiv \partial\Omega$.

Pode-se a este ponto introduzir-se algumas notações:

(i) $L_2(\Omega)$ é um conjunto de funções do espaço W onde $\left[\int_{\Omega} w^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$

Se $w_1, w_2 \in L_2(\Omega)$ então

$$(w_1, w_2) = \int_{\Omega} w_1 w_2 dx$$

$$\|w_1\|_{L_2(\Omega)} = (w_1, w_1)^{\frac{1}{2}};$$

(ii) $H^m(\Omega)$, com $m \in \mathbb{Z}^+$ (conjunto dos números inteiros positivos), é a função do espaço W

$$D^{\alpha} w \in L_2(\Omega) \quad |\alpha| \leq m$$

$$\|w\|_{H^m(\Omega)} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} w\|_{L_2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Por exemplo:

$$H^0(\Omega) = L_2(\Omega), \text{ e}$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ w / w \in L_2(\Omega), \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L_2(\Omega) \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|w\|_{L_2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$L_2(\partial\Omega)$ é o espaço de função w onde $\left[\int_{\partial\Omega} w^2 ds\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$

O produto interno será denotado por:

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \int_{\partial\Omega} w_1 w_2 ds; \quad w_1, w_2 \in L_2(\partial\Omega)$$

2.2 – Métodos Clássicos

2.2.1 – Método de Ritz

Considerando o funcional:

$$I(v) = \int_0^1 (A(tv), v) dt - (f, v) \quad (2.4)$$

Este funcional terá um ponto mínimo quando

$$Av = f \quad (2.5)$$

esta última é a equação de Euler-Lagrange do Princípio Variacional. Se A é um operador linear, então:

$$I(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (f, v) \quad (2.6)$$

O subespaço H_A de H é definido por:

$$(w_1, w_2)_A = (Aw_1, w_2), \quad w_1, w_2 \in H_A \quad (2.7)$$

este é o subespaço H_A que nós observaremos como mínimo de $I(v)$, e consequentemente:

$$v \in H_A, \quad (\Omega \cup \partial\Omega)$$

No caso das equações de Laplace sujeitas as condições de campo apropriadas, depois das integrações por partes, tem-se:

$$I(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_x^2 + v_y^2) d\Omega \quad (2.8)$$

e também:



$$H_A \equiv H^1 \{ \equiv W_2^{(1)} \quad (\text{espaço de ordem 1 de Sobolev})$$

2.2.1.2 – Método de Ritz – Aplicação

O Método de Ritz consiste em minimizar $I(v)$ sob um subespaço dimensional finito de H_A e o uso do Método dos Elementos Finitos será computacionalmente conveniente na escolha do subespaço dimensional finito. A aproximação de Ritz

$$v = \sum_{i=1}^N U_i \Phi_i(x_1, \dots, x_N) \quad (2.9)$$

para a solução do problema de minimização

$$\delta I(v) = 0 \quad (2.10)$$

define um espaço de dimensão N e usando (2.8)

$$\frac{\partial}{\partial U_i} [I(v)] \equiv (Av, \Phi_i) - (f, \Phi_i) = 0$$

para $i = 1, 2, \dots, n$

Diz-se que $v \in S^n$, em que S^n é o subespaço dimensional finito de H_A .

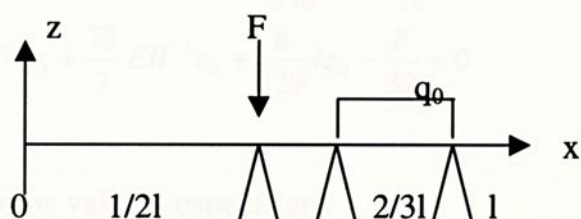
2.2.1.1 – Limitações para o Método de Ritz

O método só é aplicável a regiões limitadas por formas geométricas simples. Para regiões com um contorno complicado é impossível escolher funções $\Phi_i(x, y)$ que satisfaçam as condições essenciais de contorno. No entanto, a idéia básica do Método de Ritz foi modificada para se tornar o Método dos Elementos Finitos. O Método dos Elementos Finitos, por sua vez, é um desdobramento do Método de Galerkin, que discutiremos a seguir.



2.2.1.2 – Método de Ritz – Aplicação

Considere o exemplo:



O potencial total de energia poderia ser minimizado sujeito a condições de campo essenciais. Introdz-se duas dimensões de funções de aproximação

$$\Phi_1(x) = \frac{x^2(3x-2l)(x-l)}{l^4} \quad \text{e} \quad \Phi_2(x) = \frac{x^3(3x-2l)(x-l)}{l^5} \quad (2.11)$$

que satisfazem as condições essenciais. Com a aproximação

$$W(x) = c_1\Phi_1(x) + c_2\Phi_2(x), \quad (2.12)$$

a funcional toma a forma:

$$I(v) = \frac{1}{2}EI \int_0^l (c_1\Phi_1'' + c_2\Phi_2'')^2 dx - \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{4}} q_0(c_1\Phi_1 + c_2\Phi_2) dx - F(c_1\Phi_1(\frac{l}{2}) + c_2\Phi_2(\frac{l}{2}))$$

Esta é a funcional, quadrada em c_1 e c_2 , que será minimizada, e as condições necessárias para que isto ocorra são;

$$\begin{aligned} \frac{\partial I(v)}{\partial c_1} &= EI \int_0^l [c_1\Phi_1'' + c_2\Phi_2''] \Phi_1'' dx - \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{4}} q_0 \Phi_1 dx - F\Phi_1\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \\ \frac{\partial I(v)}{\partial c_2} &= EI \int_0^l [c_1\Phi_1'' + c_2\Phi_2''] \Phi_2'' dx - \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{3l}{4}} q_0 \Phi_2 dx - F\Phi_2\left(\frac{l}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$EI \int_0^l (\Phi_1''(x))^2 dx = EI \int_0^l \frac{1}{l^8} (36x^2 - 30lx + 4l^2)^2 dx = 11.2 \frac{EI}{l^3} \quad (2.14)$$

e finalmente o sistema:

$$\begin{cases} 11.2EI l^{-3} c_1 + 10EI l^{-3} c_2 + \frac{7}{540} l q_0 - \frac{F}{16} = 0 \\ 10EI l^{-3} c_1 + \frac{72}{7} EI l^{-3} c_2 + \frac{8}{729} l q_0 - \frac{F}{32} = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Quando os valores específicos

$$E = 2.10^7 \frac{N}{cm^2}, I = 16cm^2, l = 300cm, F = -100N \text{ e } q_0 = -2 \frac{N}{cm}$$

são usados, o sistema de equações torna-se, depois de dividirmos a equação por $EI l^{-3}$:

$$\begin{cases} 11.2c_1 + 10c_2 - 0.12891 = 0 \\ 10c_1 + 10.2857c_2 - 0.29188 = 0 \end{cases}$$

que nos dá:

$$c_1 = -0.1048 \quad \text{e} \quad c_2 = 0.1303$$



2.2.2. Fundamentos do Método dos Elementos Finitos

Seja uma região S delimitada por um limite C que pode se estender para o infinito. Cada ponto desta região será representado por $\mathbf{x} = (x, y)$. Em geral, uma equação diferencial para ser resolvida, pode ser escrita de uma forma simplificada:

$$L u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \quad \text{em } S \quad (2.16)$$

Em que L é um operador linear, $u(\mathbf{x})$ é uma função e $s(\mathbf{x})$ uma função conhecida.

A condição limite para (2.16) no problema do valor limite pode ser expresso por:

$$B u(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x}) \quad \text{em } C \quad (2.17)$$

onde B é um operador linear diferencial e $t(\mathbf{x})$ uma função conhecida.

1.) Solução do Problema do Valor Limite

Temos, até então:

$$L u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}) \quad \text{em } S \quad (2.18)$$

$$B u(\mathbf{x}) = t(\mathbf{x}) \quad \text{em } C \quad (2.19)$$

A formulação de ambas as equações consiste simplesmente em procurar uma função $u(\mathbf{x})$ que admita funções de prova definidas no domínio S .

$$\langle L u, h \rangle = \langle s, h \rangle \quad (2.20)$$

para toda escolha de uma função arbitrária ou ponderada.

O símbolo $\langle , \rangle$ representa o produto interno, cuja definição é:

$$\langle v, w \rangle = \int_S v w \, ds \quad (2.21)$$

Integrando as partes da equação (2.20), temos que dada uma função $s(\mathbf{x})$ e uma função arbitrária $h(\mathbf{x})$ em H , encontraremos:

$$\langle C u, D h \rangle = \langle s, h \rangle, \text{ para qualquer função } h(\mathbf{x}) \quad (2.22)$$

onde C e D são operadores que podem conter derivadas de pequena ordem.

2) Soluções Aproximadas da Formulação Fraca

- O procedimento de Rayleigh-Ritz

Se ao invés de encontrar uma solução exata para a equação (2.22), encontrarmos uma aproximação adequada, algumas condições impostas nas funções de prova podem ser mudadas.

Temos dois procedimentos para a solução aproximada: um é o Método dos Resíduos Ponderados (MRP) e o outro é o da aproximação variacional. O que vamos estudar, ou seja, o Método dos Mínimos Quadrados estará dentro do primeiro tópico.

3) Método dos Resíduos Ponderados (MRP)

Admitindo uma função erro $r(x)$, temos:

$$r(x) = L u(x) - s(x) \quad (2.23)$$

que representa o erro na aproximação da função $u(x)$ na solução do problema.

Uma alternativa é a formulação forte do problema. Dada uma função $s(x)$, admitindo a função $u(x)$ em H , em que H é um espaço, tem-se:

$$r(x) = L u(x) - s(x) = 0 \quad \text{em } S \quad (2.24)$$

A correspondente formulação fraca pode ser expressa da seguinte maneira:

Dada uma função $s(x)$ e uma função arbitrária $h(x)$ em H , encontraremos a função $u(x)$ em H , tal que:

$$\langle r(x), h(x) \rangle = 0$$

para qualquer função $h(x)$ em H .

De acordo com propriedades de produto interno, temos que $r = 0$.

O MRP é uma família de métodos baseado na forma da formulação fraca.

No MRP, nós procuramos aproximações para soluções da equação (2.20) em um subespaço H_N de dimensão finita de H . Todo elemento $u(x)$ de H_N pode ser representado pela expansão da forma (formulação forte):

$$u(x) = \sum_{j=1}^N a_j b_j(x) \quad (2.25)$$

em que $a_1, a_2, \dots, a_n$ são coeficientes escalares.



Definimos agora um dual do espaço conjugado W_N , qualquer elemento $v(x)$ em W_N assumirá a forma:

$$v(x) = \sum_{i=1}^N c_i w_i(x) \quad (2.26)$$

na qual $w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x)$ são funções linearmente independentes que constituem uma base de W_N .

O MRP consiste em encontrar os coeficientes a_j para que $u(x)$ tenha uma solução aproximada usando as funções $v(x)$ como funções testes.

$$\langle r, v \rangle = \langle L u - s, v \rangle = 0 \quad \text{qualquer } v \text{ de } W_N \quad (2.27)$$

Substituindo (2.24) em (2.27), temos:

$$\langle (L u - s, \sum_{i=1}^N c_i w_i(x)) \rangle = \sum_{i=1}^N c_i \langle (L u - s), w_i \rangle = 0$$

para qualquer escolha de c_i , então teremos:

$$\langle L u - s, w_i \rangle = 0$$

o operador L é linear, induzindo um sistema de equações lineares de coeficientes a_j , ou seja:

$$\langle r, w_i \rangle = \langle L \left(\sum_{j=1}^N a_j b_j(x) - s \right), w_i \rangle = 0 \quad \text{para todo } i \quad (2.28)$$

Consequentemente:

$$\sum_{j=1}^N L_{ij} a_j - s_i = 0 \quad \text{para todo } i \quad (2.29)$$

com

$$L_{ij} = \langle L b_j(x), w_i(x) \rangle \quad \text{e} \quad s_i = \langle s(x), w_i(x) \rangle \quad (2.30)$$

Estas funções de prova ou as funções de base podem ser encontradas em muitos caminhos, e cada escolha corresponderá à diferentes critérios para resolver o problema (2.20) da forma fraca.

2.2.3. Método dos Mínimos Quadrados

Um outro caminho de solução de forma fraca no contexto do método dos resíduos ponderados é conhecido como a aproximação por mínimos quadrados. Se a função ponderada ou a função teste é tomada como:

$$w_i(x) = Lb_i(x), \quad \text{para todo } i \quad (2.31)$$

os coeficientes a_i da aproximação são aqueles que minimizam o erro residual. De fato, se considerarmos a representação funcional da norma do resíduo ao quadrado:

$$I(u) = \langle Lu - s, Lu - s \rangle = \|r\|^2 \quad (2.32)$$

Nós podemos perceber que esta minimização com respeito aos coeficientes a_i , nos conduz a:

$$\frac{\partial I(u)}{\partial a_i} = 2\langle r, Lb_i \rangle = 0 \quad (2.33)$$

que coincide com as condições quando as funções ponderadas são escolhidas como as (2.31). Uma vantagem deste método está no erro da fronteira que pode ser derivado nos moldes do erro funcional de (2.32).

Outra forma comum do método dos resíduos ponderados são os subdomínios e pontos de igualdade.

No método dos subdomínios, o domínio S do problema será subdividido em subdomínios S_i e a função ponderada poderá ser definida como:

$$\frac{\partial I(u)}{\partial a_i} = 2\langle r, Lb_i \rangle = 0 \quad (2.34)$$

e a equação dos resíduos ponderados reduz-se a:

$$\langle Lu - s, w_i \rangle = \int_{S_i} (Lu - s) ds = 0, \quad \text{para todo } i; \quad (2.35)$$

aumentando o número de subdomínios, faremos o erro da aproximação tender a zero quando o domínio S estiver completo.

O outro método é a colocação de pontos de igualdade. O teste da equação será fora dos pontos discretizados do domínio x_i . Em outras palavras, a função ponderada será selecionada como:

$$w_i(x) = \delta(x - x_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.36)$$

associada para N pontos selecionados num domínio S . A implementação dos elementos finitos da aproximação dos resíduos ponderados é ela mesma uma variação do método do subdomínio. Neste caso, o domínio será dividido em um número de elementos e as funções de base e as funções ponderadas serão definidas localmente em cada elemento.

2.2.4. Método de Galerkin

Um caso especial importante do método dos resíduos ponderados é o método de Galerkin. É um dos mais importantes e mais usados métodos para obtenção de soluções aproximadas na forma fraca.

No método de Galerkin, as funções são escolhidas como as funções base e teste:

$$w_i(x) = b_i(x) \quad (2.37)$$

As equações (2.29) e (2.30) agora tomam a forma:

$$\sum_{j=1}^N a_j \langle Lb_j(x), b_i(x) \rangle = \langle s(x), b_i(x) \rangle \quad \text{para todo } i \quad (2.38)$$

De (2.28) e (2.37) podemos ver que os coeficientes definem uma solução aproximada de (2.25); o erro residual é ortogonal para cada função selecionada $b_j(x)$ no espaço H_N . Usando a definição de produto interno, nós podemos observar que a aproximação de Galerkin para u_g é a melhor aproximação na norma da solução de u de (2.20), isto é:

$$\|u - u_g\| = \inf_{u \in H} \|u - u\| \quad (2.39)$$



2.2.4.1. Equação Diferencial de Poisson – uma Aplicação do Método de Galerkin

Considere a equação,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad (2.40)$$

em G , na qual G é uma região do plano (x, y) sujeita às condições de contorno de Dirichlet.

$$V = \Phi(s) \text{ em } C_1$$

e a condição de Cauchy:

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(s)u(s) = \gamma(s) \text{ em } C_2 \quad (2.41)$$

Então escolhamos o conjunto $\Phi_0, \dots, \Phi_m$ de modo que Φ_0 satisfaça as condições de contorno não homogêneas.

$$\Phi_0 = \Phi_s \text{ em } C_1 \text{ mas}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} + \alpha(s)\Phi_0(s) = \gamma(s) \text{ em } C_2$$

$$\Phi_1(x, y), \dots, \Phi_m(x, y) \text{ satisfazem as condições homogêneas}$$

$$\Phi_0 = 0 \text{ em } C_1, \text{ mas}$$

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial n} + \alpha(s)\Phi_k(s) = 0 \text{ em } C_2$$

Substituindo a aproximação na Equação de Poisson original, escrevemos a expressão para o resíduo:

$$\Delta \Phi_0 + \sum c_k \Delta \Phi_k - f(x, y) = R(x, y) \quad (2.42)$$

Na formulação de Galerkin, $w_i = \Phi_i$, e queremos que a integral dos resíduos ponderados por w_i seja nula nas regiões de G , logo:

$$\iint_G R(x, y) \Phi_j(x, y) dx dy = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2.43)$$

Substituindo o valor obtido acima para $R(x, y)$, temos:

$$\sum_{k=1}^m c_k \left(\iint_G \Delta \Phi_k \Phi_j dx dy \right) + \iint_G \Delta \Phi_0 \Phi_j dx dy - \iint_G f(x, y) \Phi_j dx dy = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (2.44)$$

na qual todas as integrais se estendem sobre o domínio G . Para reduzir a ordem das derivadas dentro das duas primeiras integrais, usamos a fórmula de Green:

$$\iint_G \Delta UV dx dy = - \iint_G \text{grad}(U) \text{grad}(V) dx dy + \oint_C \frac{\partial U}{\partial n} V ds \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \sum_k c_k \left(- \iint_G \text{grad}(\Phi_j) \text{grad}(\Phi_k) dx dy + \oint_C \frac{\partial \Phi_k}{\partial n} \Phi_j ds - \right. \\ & \left. \iint_G \text{grad}(\Phi_0) \text{grad}(\Phi_j) dx dy + \oint_C \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \Phi_j ds - \right. \\ & \left. \iint_G f(x, y) \Phi_j dx dy \right) = 0 \\ & j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.46)$$

Aplicando agora as condições de contorno às integrais de linha $\Phi_j(s) = 0$, obtem-se finalmente:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m c_k \left(- \iint_G \text{grad}(\Phi_j) \text{grad}(\Phi_k) dx dy + \int_{C_1} \alpha(s) \Phi_k(s) \Phi_j(s) ds + \right. \\ & \left. \iint_G \text{grad}(\Phi_j) \text{grad}(\Phi_0) dx dy + \int_{C_2} (\alpha(s) \Phi_0(s) - \gamma(s)) \Phi_j(s) ds + \right. \\ & \left. \iint_G f(x, y) \Phi_j dx dy \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.47)$$

$j = 1, 2, \dots, m,$

que é o sistema de equações a resolver.

CAPÍTULO 3

Método das Diferenças Finitas

3.1. Métodos para Solução de Equações Harmônicas e Bi-harmônicas

Com exceção dos casos mais simples, equações diferenciais parciais harmônicas³ e bi-harmônicas⁴ não podem ser resolvidas analiticamente. Embora existam muitas funções matemáticas que satisfazem as equações diferenciais, elas raramente satisfazem as condições de campo propostas. Um método de solução é empregar as séries infinitas de funções para satisfazer as condições de campo, embora a aproximação envolva tanto computação como métodos puramente numéricos.

3.2. Aproximação por Diferenças Finitas

O método das Diferenças Finitas envolve a substituição das derivadas pelas aproximações por diferenças. A *figura 3* mostra parte da malha do domínio da solução bi-dimensional no plano x-y.

³ Funções harmônicas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

funções tais como $u(x,y)$, $v(x,y)$ que satisfazem tais equações são ditas funções harmônicas

⁴ Funções Bi-harmônicas, satisfazem a equação:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} = \nabla^4 \psi$$

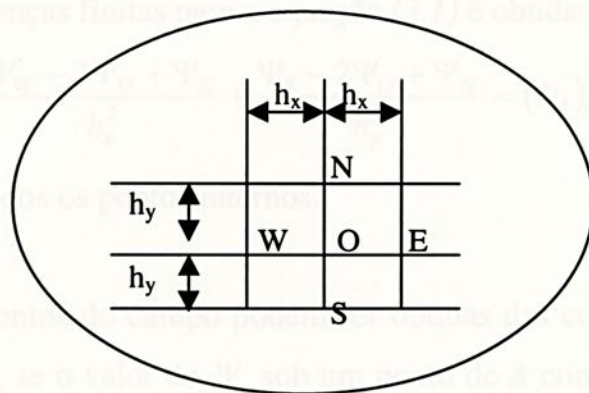


Figura 3

As linhas da malha são espaçadas uniformemente nas direções x e y ; as distâncias entre elas devem ser h_x e h_y respectivamente.

Os pontos que serão usados nas análises de diferenças finitas estão localizados nas intersecções das linhas da malha. O ponto O pode ser considerado como um ponto típico da malha dentro do domínio da solução, e os pontos limite N , S , E e W são usados para os quatro pontos adjacentes da malha.

A derivada com respeito a x na equação

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi = \Phi_1(x, y) \quad (3.1)$$

sob o ponto O pode ser expresso nos termos dos valores de Ψ no ponto da malha, pela fórmula da diferença central:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right)_O = \frac{\Psi_W - 2\Psi_O + \Psi_E}{h_x^2} + e_T \quad (3.2)$$

Este resultado pode ser obtido das séries de Taylor, e o erro de truncamento é da ordem de:

$$e_T \approx \frac{h_x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right)_O \quad (3.3)$$

Usando uma expressão similar para a derivada com respeito a y , a seguinte aproximação por diferenças finitas para a equação (3.1) é obtida:

$$\frac{\Psi_W - 2\Psi_O + \Psi_E}{h_x^2} + \frac{\Psi_S - 2\Psi_O + \Psi_N}{h_y^2} = (\Phi_1)_O \quad (3.4)$$

esta é aplicável para todos os pontos internos.

Equações para pontos do campo podem ser obtidas das condições relevantes do campo. Por exemplo, se o valor de Ψ sob um ponto de A como mostra a *figura 4* é prescrito como α , então $\Psi_A = \alpha$. As condições de campo derivadas podem ser aplicadas com o auxílio da formulação de diferenças finitas.

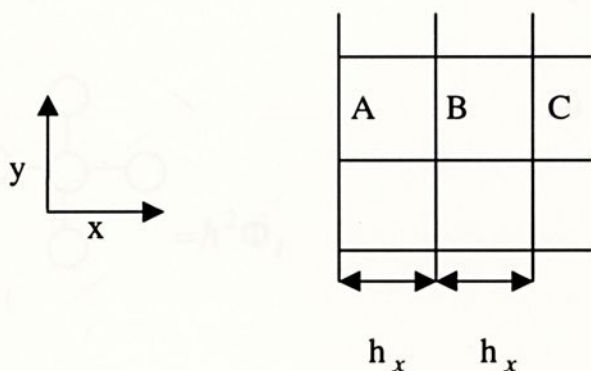


figura 4

Por exemplo:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)_A = \frac{\Psi_B - \Psi_A}{h_x} + O(h_x) \quad (3.5)$$

e, se esta derivada é exigida como tomando o valor de β , então Ψ_A é dado pela aproximação

$$\Psi_A = \Psi_B - \beta h_x$$

Pode-se notar, entretanto, que o erro de truncamento na equação (3.5) é de ordem diferente do erro da equação (3.2). A melhor aproximação para a derivada de campo é fornecida por:

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_A = \frac{1}{2h_x}(-3\Psi_A + 4\Psi_B - \Psi_C) + O(h_x^2) \quad (3.6)$$

e, por isto:

$$\Psi_A = \frac{1}{3}(4\Psi_B - \Psi_C - 2\beta h_x) \quad (3.7)$$

Se existem n pontos no domínio de solução, então existem n equações lineares para os valores de Ψ quaisquer da forma da equação (3.4), sendo expressas as condições de campo.

Para o caso especial de $h_x = h_y = h$, a equação (3.4) torna-se

$$\Psi_W + \Psi_E + \Psi_S + \Psi_N - 4\Psi_O = h^2(\Phi_1)_O \quad (3.8)$$

e é expressa na forma de uma *molécula* computacional como mostra a *figura 5*:

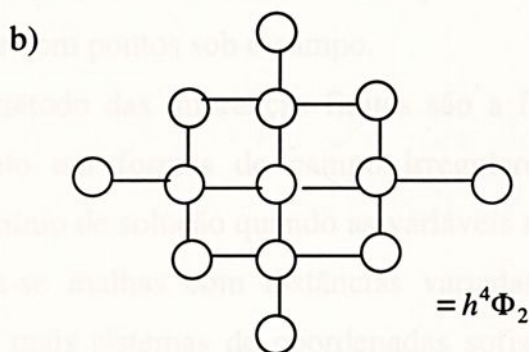
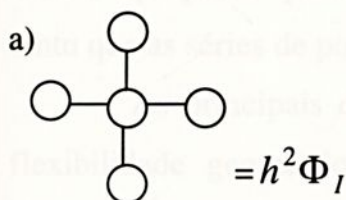


figura 5

figura 6

A molécula equivalente da equação bi-harmônica:

$$\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} = \nabla^2 (\nabla^2 \Psi) = \nabla^4 \Psi = \Phi_2(x, y) \quad (3.9)$$

é mostrada na *figura 6*

Outro método para solução de equações bi-harmônicas é a redução para um par de equações simultaneamente harmônicas. Por exemplo, no caso da recirculação do fluxo viscoso, a equação

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad (3.10)$$

é muitas vezes trocada por:

$$\nabla^2 \Psi = W \quad , \quad \nabla^2 W = 0 \quad (3.11)$$

quando W é a vorticidade⁵. Em princípio isto pode ser resolvido pelo método sobre equações harmônicas.

Uma importante vantagem do método das diferenças finitas é a facilidade para a solução ser formulada e programada pela computação digital.

Em todos os métodos de diferenças finitas, as linhas da malha são paralelas com as coordenadas dos eixos. Por esta razão, usando coordenadas cartesianas, o método é melhor apropriado para a solução de problemas com domínios de solução retangular, tanto que as séries de pontos pode terminar com pontos sob o campo.

As principais desvantagens do método das diferenças finitas são a falta de flexibilidade geométrica para ajustamento em formas de campo irregulares e a concentração de pontos em regiões de domínio de solução quando as variáveis mudam rapidamente. Isto acontece quando usa-se malhas com distâncias variadas entre colunas de pontos, e para introduzirmos mais sistemas de coordenadas sofisticadas para ajustar a forma do domínio de solução. Se o domínio não é conforme um sistema de coordenadas maior, então o problema será mais facilmente resolvido pelo método dos elementos finitos.

⁵ Vorticidade: sejam regiões de um escoamento nas quais as forças viscosas são desprezíveis. A partir daí, define-se esta grandeza chamada vorticidade como sendo duas vezes o valor da rotação.



CAPÍTULO 4

Comparação entre o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos Finitos

4.1. Aproximação por Elementos Finitos

A aproximação por elementos finitos para resolver problemas de mecânica do contínuo envolve divisão do domínio de solução em subregiões pequenas, ou os elementos finitos.

Associado a cada elemento estão pontos nodais sobre os elementos adjacentes que são facilmente ligados depois e, estes valores são as variáveis a serem determinadas.

Uma análise baseada em argumentos físicos, tanto de equilíbrio e de compatibilidade, é usada para originar uma série de equações algébricas simultâneas nestes valores de pontos nodais.

Há usualmente uma escolha de variáveis entre aquelas de deslocamento (velocidade) e tipos de força: o resultado da formulação de elementos finitos pode ser acomodada tanto para condições de campo de força quanto de deslocamento.

4.2. Análise Comparativa

É interessante compararmos, no detalhe, a estabilização das equações através da análise pelos elementos finitos, com aquela que vem da aproximação por diferenças finitas, descritas anteriormente. A equação

$$\frac{\Psi_W - 2\Psi_O + \Psi_E}{h_x^2} + \frac{\Psi_S - 2\Psi_O + \Psi_N}{h_y^2} = (\Phi_1)_O \quad (4.1)$$

já vista anteriormente provém da aproximação por diferenças finitas para equações harmônicas da forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \Psi = \Phi_1(x, y) \quad (4.2)$$

sob o ponto denominado O na *figura 3*, nos termos dos valores da variável dependente Ψ ao redor dos pontos W, E, S e N . No problema presente de fluxo viscoso baixo, a equação

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w = \frac{P_z}{u} \quad (4.3)$$

na qual P_z é o gradiente da pressão do fluxo, é uma forma particular da equação harmônica (4.2) acima, e $\Psi \equiv w, \Phi_1 \equiv \frac{P_z}{u}$. Então, a equação (4.1) acima, torna-se

$$\frac{W_W - 2W_O + W_E}{h_x^2} + \frac{W_S - 2W_O + W_N}{h_y^2} = \frac{P_z}{u} \quad (4.4)$$

Na ordem para obtenção da comparação do resultado das análises por elementos finitos faz-se necessário a escolha de uma malha que conecta o ponto O com os pontos W, E, S e N , apenas, como mostra a *figura 7*

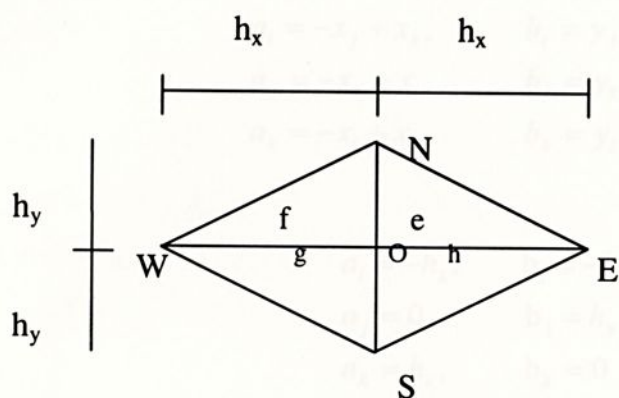


Figura 7

Tomamos os quatro elementos que tem o ponto O como um nodal e eles serão denominados e, f, g e h como mostra a figura (7). Para o elemento e , se os nódulos O, E e N for tomado equivalente a i, j e k , respectivamente, então tem-se o elemento típico como mostra a figura 8

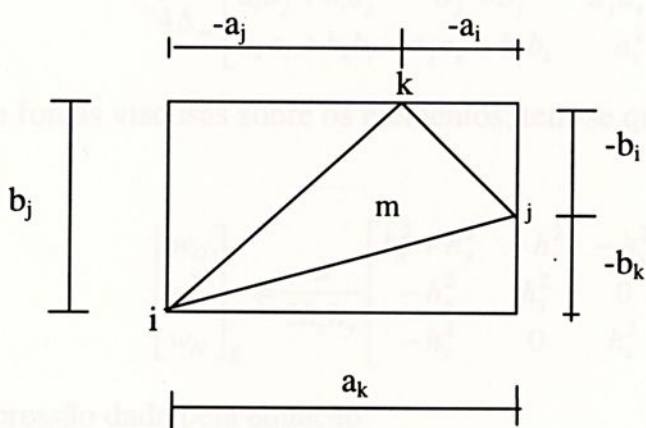


Figura 8

Então de acordo com as equações:

$$\begin{aligned} a_i &= -x_j + x_k, & b_i &= y_j - y_k \\ a_j &= -x_k + x_i, & b_j &= y_k - y_i \\ a_k &= -x_i + x_j, & b_k &= y_i - y_j \end{aligned} \quad (4.5)$$

temos,

$$\begin{aligned} a_i &= -h_x, & b_i &= -h_y \\ a_j &= 0, & b_j &= h_y \\ a_k &= h_x, & b_k &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Das equações:

$$\begin{bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \end{bmatrix} = \frac{u}{4\Delta_m} B^T B \begin{bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_k \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

e

$$\frac{u}{4\Delta_m} \begin{bmatrix} a_i^2 + b_i^2 & a_i a_j + b_i b_j & a_i a_k + b_i b_k \\ a_i a_j + b_i b_j & a_j^2 + b_j^2 & a_j a_k + b_j b_k \\ a_i a_k + b_i b_k & a_j a_k + b_j b_k & a_k^2 + b_k^2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

e da ação de forças viscosas sobre os elementos, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} w_O \\ w_E \\ w_N \end{bmatrix}_E = \frac{u}{2h_x h_y} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_y^2 & -h_x^2 \\ -h_y^2 & h_y^2 & 0 \\ -h_x^2 & 0 & h_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_O \\ w_E \\ w_N \end{bmatrix}_E \quad (4.9)$$

A força de pressão dada pela equação:

$$F_m = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} = -\frac{P_z \Delta_m}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

é tal que:

$$\begin{bmatrix} F_O \\ F_E \\ F_N \end{bmatrix}_E = -\frac{P_z h_x h_y}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

A matriz dos elementos g é idêntica à matriz apresentada na *figura 8*, que provem do ponto O que é tomado novamente como a origem. Por outro lado, se O é a origem para o elemento f , temos:

$$\begin{aligned} a_i &= -h_x, & b_i &= h_y \\ a_j &= h_x, & b_j &= 0 \\ a_k &= 0, & b_k &= -h_y \end{aligned} \quad (4.12)$$

e a força de viscosidade será dada por:

$$\begin{bmatrix} w_O \\ w_N \\ w_W \end{bmatrix}_f = \frac{u}{2h_x h_y} \begin{bmatrix} h_x^2 + h_y^2 & -h_x^2 & -h_y^2 \\ -h_x^2 & h_x^2 & 0 \\ -h_y^2 & 0 & h_y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_O \\ w_N \\ w_W \end{bmatrix}_f \quad (4.13)$$

A mesma matriz é apropriada para o elemento h se O é usado como origem. Para o equilíbrio das forças que atuam nos cinco pontos nodais, a equação

$$\sum F_i^{(m)} = \sum W_i^{(m)}$$

pode ser usada para dar-nos:

$$\frac{u}{2h_x h_y} \begin{bmatrix} 4(h_x^2 + h_y^2) & -2h_y^2 & -2h_x^2 & -2h_y^2 & -2h_x^2 \\ -2h_y^2 & 2h_y^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2h_x^2 & 0 & 2h_x^2 & 0 & 0 \\ -2h_y^2 & 0 & 0 & 2h_y^2 & 0 \\ -2h_x^2 & 0 & 0 & 0 & 2h_x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_O \\ w_E \\ w_N \\ w_W \\ w_S \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{P_z h_x h_y}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

A primeira destas equações, que expressa a condição de equilíbrio para as forças no ponto O , pode ser reescrita como:

$$\frac{W_w - 2W_O + W_E}{h_x^2} + \frac{W_S - 2W_O + W_N}{h_y^2} = \frac{2P_z}{3u} \quad (4.15)$$

A figura a seguir mostra a larga porção para completar a malha: isto é irregular sob o sentido que, considerando que o ponto O serve com um ponto nodal para apenas quatro elementos, pontos como W , E , S e N são associados com oito elementos.

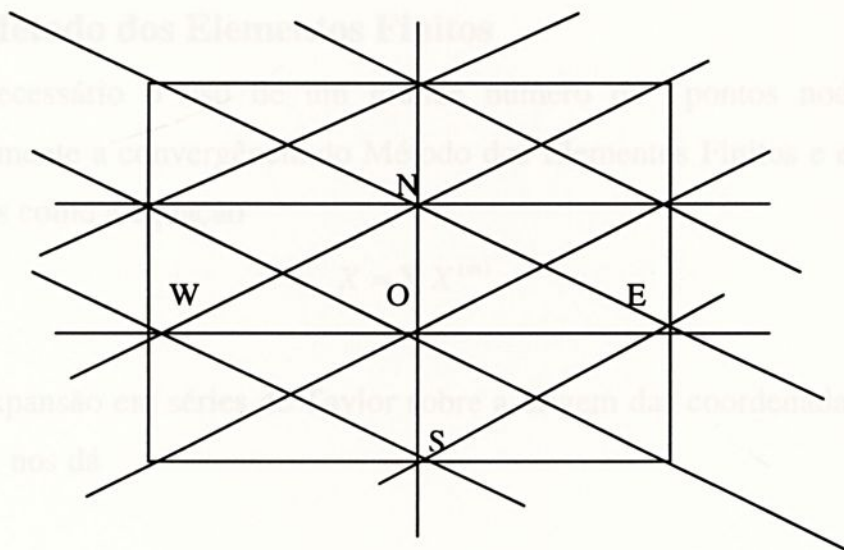


Figura 9

Consequentemente, a soma das forças de pressão nos pontos nodais é duas vezes maior que no ponto O . Por exemplo, a equação de equilíbrio para as forças que atuam sob um ponto N expressa equivalentemente em (4.15), se tornará $\frac{4P_z}{3u}$ no seu lado direito. Por esta razão, a média do lado direito na equação de equilíbrio para todos os pontos da malha, torna-se $\frac{P_z}{u}$, conforme a forma das diferenças finitas.

W e S e E são pontos nodais para apenas 4 elementos e N e O para 8 elementos.

Como vimos para o espaço fechado de similaridade entre a equação obtida dos elementos finitos e a do método dos elementos finitos, é esperado que esta ordem de precisão seja similar.

4.2.1.2. Método das Diferenças Finitas

4.2.1. Erro de Truncamento

O erro de truncamento obtido por esse método, para o problema em questão, anteriormente obtido (seção 3.2):

4.2.1.1. Método dos Elementos Finitos

É necessário o uso de um grande número de pontos nodais para obter satisfatoriamente a convergência do Método dos Elementos Finitos e este fato mostra que funções como a equação

$$X = \sum X^{(m)} \quad (4.16)$$

A expansão em séries de Taylor sobre a origem das coordenadas locais para a velocidade, nos dá

$$W = w_i + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) w + \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 w + \dots \quad (4.17)$$

e a derivada será avaliada sob a origem.

Agora, $C_1 = \frac{\partial w}{\partial x}$, $C_2 = \frac{\partial w}{\partial y}$, e o erro envolvendo o uso da equação (4.16) como um truncamento da forma da equação (4.17) para representar a velocidade sob o ponto j , é da ordem de:

$$e_T = \frac{1}{2} \left(a_k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2a_k b_k \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + b_k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (4.18)$$

Este erro de truncamento é da ordem do quadrado das dimensões dos elementos e tende a zero quando os elementos são reduzidos.

4.2.1.2. Método das Diferenças Finitas

O erro de truncamento obtido por esse método, para o problema em questão, anteriormente obtido [seção 3.2]:

$$e_T \approx \frac{h_x^2}{12} \left(\frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} \right)_0 \quad (4.19)$$

é tal que a ordem é a mesma que a obtida na seção 4.2.1.1. através do uso dos elementos finitos. Tanto h_x como a_k são componentes quadráticos.

CAPÍTULO 5

As Matrizes de Contribuição Local no espaço-tempo de Schwarzschild

O objetivo maior a que esta dissertação se propõe é o de expor algumas das potencialidades do método dos Elementos Finitos como uma alternativa no estudo de equações diferenciais parciais para o estudo das equações de Einstein baseado no método dos resíduos ponderados aplicado para calcular as matrizes de contribuição local do Método dos Elementos Finitos, e na introdução de um sistema de coordenadas homogêneas.

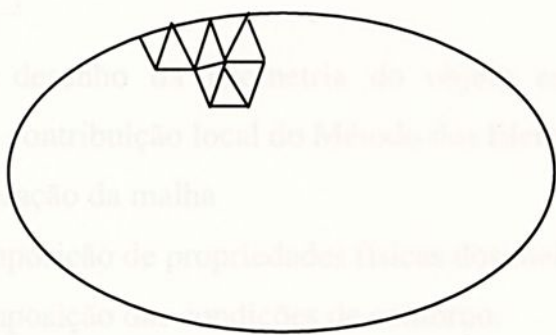
O modelo que aqui se propõe para o tratamento das equações de Einstein, já é utilizado há alguns anos como uma poderosa ferramenta na determinação das distribuições de campos eletromagnéticos em dispositivos e sistemas elétricos. O trabalho científico mais importante que marcou o início da aplicação do Método dos Elementos Finitos na engenharia foi desenvolvido por Silvester e Chari em 1.970[11]. A partir de então, o Método se difundiu rapidamente na solução dos maiores problemas da engenharia e eletricidade, que são os cálculos de campos eletromagnéticos presentes nos dispositivos e sistemas elétricos.



5.1 Aplicação do Método dos Elementos Finitos

A aplicação do Método dos Elementos Finitos mais difundida está relacionada a problemas do eletromagnetismo. Apesar das equações de Maxwell descreverem os fenômenos eletromagnéticos, sua solução analítica é impraticável em dispositivos com geometrias complexas. Uma alternativa para contornar este problema seria a utilização de métodos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas. Outros métodos numéricos, que não o Método dos Elementos Finitos, apresentam sérias dificuldades de aplicação, quer no cálculo dos coeficientes dos sistemas de equações, quer no tratamento de meios não lineares ou na exploração dos resultados obtidos.

Para utilização do Método dos Elementos Finitos, o objeto em estudo deve ter sua geometria subdividida em várias partes, que são os elementos finitos, tais que a união desses elementos nos dê o objeto e a sua intersecção seja nula. Essa subdivisão recebe o nome de discretização e é geralmente constituída, no caso bi-dimensional, de triângulos, e no caso tri-dimensional de tetraedros, mais usados em eletromagnetismo.



$$\cup \Omega_{T_i} = \Omega$$

$$\cap \Omega_{T_i} = \phi$$

Figura 10

Domínio bidimensional discretizado em elementos triangulares

A aplicação desse método em gravitação, todavia, é pouquíssimo difundida [1], porém teve seu uso incentivado e motivado por P. Laguna [6]: "...uma importante característica do Método dos Elementos Finitos é que a malha não é requerida ser uniforme; elementos podem ter diferentes tamanhos e orientações por todo o domínio computacional. Como consequência, com o Método dos Elementos Finitos é possível usar domínios computacionais com contornos irregulares. Estas são precisamente as dificuldades numéricas que se encara em construir-se valores iniciais para a colisão de buracos negros, qual seja, um contorno irregular próximo, e uma planura assintótica distante dos buracos negros."

Para a aplicação do Método dos Elementos Finitos em Gravitação, de modo a exemplificar as suas potencialidades, representaremos um tratamento de um bem conhecido problema, qual seja, o da solução da equação $R_{11} = 0$ [1.60] relacionada ao espaço-tempo de Schwarzschild. Os passos a serem seguidos podem ser sintetizados em três etapas:

a) *pré-processamento*;

b) *processamento*;

c) *pós-processamento*;

A fase de pré-processamento está relacionada principalmente:

a .1) o desenho da geometria do objeto estudado; identificação da matriz de contribuição local do Método dos Elementos Finitos

a .2) a geração da malha

a .3) a imposição de propriedades físicas dos meios envolvidos

a .4) a imposição das condições de contorno.

Os itens (a .3) e (a .4) são bem conhecidos e tratados em Relatividade Geral como a solução de Schwarzschild. Quanto ao item (a.2), o gerador de malhas a ser utilizado oportunamente, será o mesmo obtido por J.M.Machado e C.A .R.Marretto [8], usando o software MATHEMATICA. O item a .1), que concerne ao desenho da geometria do domínio e a identificação da matriz de



contribuição local do Método dos Elementos Finitos, será discorrido e ultimado em detalhes na próxima seção seguindo as etapas:

- a .1.1)* reescrever as equações de Einstein no Espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas cartesianas;
- a .1.2)* aplicação do método dos resíduos ponderados;
- a .1.3)* transformar as equações em coordenadas homogêneas;
- a .1.4)* subdividir o domínio estudado em pequenos tetraedros;
- a .1.5)* identificar as coordenadas e a matriz de contribuição local do problema , para um elemento finito tetraédrico unitário qualquer na aproximação linear (matriz 4x4).

Em etapas posteriores ao presente trabalho, usar-se-á primeiramente na fase de processamento, o gerador de malhas desenvolvido na fase *a .2)* para discretizar todo o domínio automaticamente e o cálculo da Matriz Global do problema; em seguida numa fase pós-processamento com os dados das etapas anteriores espera-se a reprodução de valores já conhecidos através da aplicação de outros métodos, o que confirmaria a pertinência da utilização do Método dos Elementos Finitos também em Relatividade Geral.



5.2) O Cálculo das Matrizes de Contribuição Local para um Elemento Finito Tetraédrico qualquer

5.2.1) A Equação de Einstein $R_{II} = 0$ em Coordenadas Cartesianas

A equação tensorial de Einstein $R_{II} = 0$ no espaço-tempo de Schwarzschild, no vácuo, é descrita por [capítulo 1]:

$$R_{11} = v'' - \lambda' v' + v'^2 - \frac{2\lambda'}{r} = 0 \quad (1.60)$$

Em coordenadas cartesianas tem-se que:

$$\frac{\partial \lambda(x, y, z)}{\partial r} = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z} = \lambda'$$

$$\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z} = v'$$

$$\frac{\partial v^2(x, y, z)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{(-y^2 - z^2)}{x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{(-x^2 - z^2)}{y^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{(-x^2 - y^2)}{z^3} = v''$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Substituindo os valores em $R_{II} = 0$ temos:

$$\begin{aligned}
 R_{11} = & \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{(-y^2 - z^2)}{x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{(-x^2 - z^2)}{y^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \frac{(-x^2 - y^2)}{z^3} \right) - \right. \\
 & - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z} \right) \\
 & + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}{z} \right) + \\
 & + \left(\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)}{x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)}{y^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\pm (x^2 + y^2 + z^2)}{z^2} \right) - \\
 & \left. - 2 \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{1}{x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{1}{y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{1}{z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

5.2.2 – A Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados a $R_{11} = 0$

A seguir, aplicaremos o método dos resíduos ponderados, já descrito em capítulos anteriores, à equação para $R_{11} = 0$, antes de passarmos ao sistema de coordenadas homogêneas.

Fazendo uma série de simplificações eliminando o Laplaciano e aplicando-se a identidade de Green, pela qual as integrais de superfície podem ser desprezadas com a escolha feita para w , obtém-se a expressão seguinte (5.1):

$$\begin{aligned}
& \sum_i w_i \left\{ - \sum_j u_j \int_r \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dx dy dz - \sum_j u_j \int_r \frac{(y^2 + z^2)(x-1)}{x^3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} dx dy dz - \right. \\
& - \sum_j u_j \int_r \frac{(y^2 + z^2)(-2x^3 + 3x^2)}{x^6} \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} dx dy dz - \sum_j u_j \int_r \frac{(x^2 + z^2)(y-1)}{y^3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} dx dy dz - \\
& - \sum_j u_j \int_r \frac{(x^2 + z^2)(-2y^3 + 3y^2)}{y^6} \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} dx dy dz - \sum_j u_j \int_r \frac{(x^2 + y^2)(z-1)}{z^3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} dx dy dz - \\
& - \sum_j u_j \int_r \frac{(x^2 + y^2)(-2z^3 + 3z^2)}{z^6} \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} dx dy dz + \sum_{j,k} u_j u_k \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2} dx dy dz + \\
& + \sum_{j,k} u_j u_k \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2} dx dy dz + \sum_{j,k} u_j u_k \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2} dx dy dz + \\
& + 4 \sum_{j,k} u_j u_k \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy} dx dy dz + 4 \sum_{j,k} u_j u_k \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xz} dx dy dz + \\
& + 4 \sum_{j,k} u_j u_k \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{yz} dx dy dz + 2 \sum_j u_j \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} \frac{1}{x} dx dy dz + \\
& \left. 2 \sum_j u_j \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} \frac{1}{y} dx dy dz + 2 \sum_j u_j \int_r \alpha_i \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \frac{1}{z} dx dy dz \right\} = 0
\end{aligned}$$

Logo, os termos entre chaves são iguais a zero, o que leva às equações sobre as quais iremos trabalhar em seguida no sistema de coordenadas homogêneas.

5.2.3 – Transformação em Coordenadas Homogêneas e Cálculo das Matrizes de Contribuição Local

Proceder-se-á agora a última fase da etapa de ‘pré-processamento’, que é o do cálculo das matrizes de contribuição local para um elemento finito tetraédrico unitário qualquer. Usar-se-á o sistema de coordenadas homogêneas, introduzido por Silvester e Ferrari [13].

As antigas coordenadas (x,y,z) relacionam-se às novas coordenadas (ξ, ϑ, ζ) por meio das equações [Schwarz, 1988] [14]:

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\vartheta + (x_4 - x_1)\zeta \quad (5.2)$$

$$y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\vartheta + (y_4 - y_1)\zeta \quad (5.3)$$

$$z = z_1 + (z_2 - z_1)\xi + (z_3 - z_1)\vartheta + (z_4 - z_1)\zeta \quad (5.4)$$

$$\text{com } 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \vartheta \leq 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1$$

; nestas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_4, y_4, z_4)$ são as coordenadas dos 4 vértices de um elemento finito tetraédrico.

Na aproximação linear, as quatro funções de base para o tetraedro coincidem com as coordenadas homogêneas, de modo que:

$$\alpha_1 = 1 - \xi - \vartheta - \zeta, \quad \alpha_2 = \xi, \quad \alpha_3 = \vartheta, \quad \alpha_4 = \zeta$$

Notamos ainda que as coordenadas homogêneas são tais que

$$\zeta_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y + d_i z}{3!V} \quad (5.5)$$

nas quais os fatores a_i , b_i , c_i e d_i são dados exclusivamente em termos das coordenadas dos vértices do tetraedro:

$$b_1 = (y_3 - y_4)z_2 + (y_4 - y_2)z_3 + (y_2 - y_3)z_4$$

$$b_2 = (y_4 - y_3)z_1 + (y_1 - y_4)z_3 + (y_3 - y_1)z_4$$

$$b_3 = (y_2 - y_4)z_1 + (y_4 - y_1)z_2 + (y_1 - y_2)z_4$$

$$b_4 = (y_3 - y_2)z_3 + (y_1 - y_3)z_2 + (y_2 - y_1)z_3$$

$$c_1 = (x_4 - x_3)z_2 + (x_2 - x_4)z_3 + (x_3 - x_2)z_4$$

$$c_2 = (x_3 - x_4)z_1 + (x_4 - x_1)z_3 + (x_1 - x_3)z_4$$

$$c_3 = (x_4 - x_2)z_1 + (x_1 - x_4)z_2 + (x_2 - x_1)z_4$$

$$c_4 = (x_2 - x_3)z_1 + (x_3 - x_1)z_2 + (x_1 - x_2)z_3$$

$$d_1 = (x_3 - x_4)y_2 + (x_4 - x_2)y_3 + (x_2 - x_3)y_4$$

$$d_2 = (x_4 - x_3)y_1 + (x_1 - x_4)y_3 + (x_3 - x_1)y_4$$

$$d_3 = (x_2 - x_4)y_1 + (x_4 - x_1)y_2 + (x_1 - x_2)y_4$$

$$d_4 = (x_3 - x_2)y_3 + (x_1 - x_3)y_2 + (x_2 - x_1)y_3$$

$$b_i, c_i, d_i^6 [12]$$

Para passar as integrais anteriores para coordenadas homogêneas, temos:

$$dx dy dz = 3! V d\zeta_1 d\zeta_2 d\zeta_3 \quad (5.6)$$

Tomemos como exemplo o cálculo de um dos 16 termos entre chaves e mostraremos sua transformação para coordenadas homogêneas. Então tomemos um dos termos:

$$\begin{aligned} \int_r \frac{(y^2 + z^2)(x-1)}{x^3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} dx dy dz = \\ = \frac{1}{36V^2} \int_0^1 d\xi \int_0^{1-\xi} d\vartheta \int_0^{1-\xi-\vartheta} A(\xi, \vartheta, \zeta) \sum_k \sum_m b_k b_m \frac{\partial \alpha_i}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial \alpha_j}{\partial \vartheta_m} d\xi d\vartheta d\zeta \end{aligned}$$

no qual, a função $A(\xi, \vartheta, \zeta)$, tem como valores já simplificados utilizando o *software Mathematica 2.2*:

$$\begin{aligned} A(\xi, \vartheta, \zeta) = & ((-1 + x_1 - \xi x_1 - \vartheta x_1 - \zeta x_1 + \xi x_2 + \vartheta x_3 + \zeta x_4) (\\ & (-1 + y_1 - \xi y_1 - \vartheta y_1 - \zeta y_1 + \xi y_2 + \vartheta y_3 + \zeta y_4)^2 + (z_1 - \xi z_1 - \vartheta z_1 - \zeta z_1 + \xi z_2 + \vartheta z_3 \\ & + \zeta z_4)^2) / (x_1 - \xi x_1 - \vartheta x_1 - \zeta x_1 + \xi x_2 + \vartheta x_3 + \zeta x_4)^3 \end{aligned}$$

Calculando cada uma das integrais com a sua respectiva função chegaremos ao valor:

$$\int_r \frac{(y^2 + z^2)(x-1)}{x^3} \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} dx dy dz = \frac{1}{36V^2} \frac{1}{3} b_k b_m$$

na qual, $1 \leq k \leq 4$ e $1 \leq m \leq 4$

Assim encontramos a primeira matriz de um conjunto de matrizes:

⁶ Tese de Doutorado – José Márcio Machado – USP



Matriz (1):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} b_1b_1 & b_1b_2 & b_1b_3 & b_1b_4 \\ b_2b_1 & b_2b_2 & b_2b_3 & b_2b_4 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3b_3 & b_3b_4 \\ b_4b_1 & b_4b_2 & b_4b_3 & b_4b_4 \end{pmatrix}$$

Seguindo raciocínio análogo para cada um dos outros 15 termos entre chaves da equação [5.1], encontramos as outras matrizes de contribuição local como a seguir.

Parte do cálculo encontra-se no *apêndice I*, levado a termo como já mencionado, utilizando o *software Mathematica* (2.2):

Matriz (2):

$$\frac{1}{18V} \begin{pmatrix} b_1\eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3\eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (3):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 & c_1c_4 \\ c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 & c_2c_4 \\ c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 & c_3c_4 \\ c_4c_1 & c_4c_2 & c_4c_3 & c_4c_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (4):

$$\frac{1}{18V} \begin{pmatrix} c_1\eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (5):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} d_1d_1 & d_1d_2 & d_1d_3 & d_1d_4 \\ d_2d_1 & d_2d_2 & d_2d_3 & d_2d_4 \\ d_3d_1 & d_3d_2 & d_3d_3 & d_3d_4 \\ d_4d_1 & d_4d_2 & d_4d_3 & d_4d_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (6):

$$\frac{1}{18V} \begin{pmatrix} d_1\eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3\eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (7):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} b_1b_1\eta_1 & b_1b_2\eta_1 & b_1b_3\eta_1 & b_1b_4\eta_1 \\ b_2b_1\eta_2 & b_2b_2\eta_2 & b_2b_3\eta_2 & b_2b_4\eta_2 \\ b_3b_1\eta_3 & b_3b_2\eta_3 & b_3b_3\eta_3 & b_3b_4\eta_3 \\ b_4b_1\eta_4 & b_4b_2\eta_4 & b_4b_3\eta_4 & b_4b_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (8):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} c_1c_1\eta_1 & c_1c_2\eta_1 & c_1c_3\eta_1 & c_1c_4\eta_1 \\ c_2c_1\eta_2 & c_2c_2\eta_2 & c_2c_3\eta_2 & c_2c_4\eta_2 \\ c_3c_1\eta_3 & c_3c_2\eta_3 & c_3c_3\eta_3 & c_3c_4\eta_3 \\ c_4c_1\eta_4 & c_4c_2\eta_4 & c_4c_3\eta_4 & c_4c_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (9):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} d_1d_1\eta_1 & d_1d_2\eta_1 & d_1d_3\eta_1 & d_1d_4\eta_1 \\ d_2d_1\eta_2 & d_2d_2\eta_2 & d_2d_3\eta_2 & d_2d_4\eta_2 \\ d_3d_1\eta_3 & d_3d_2\eta_3 & d_3d_3\eta_3 & d_3d_4\eta_3 \\ d_4d_1\eta_4 & d_4d_2\eta_4 & d_4d_3\eta_4 & d_4d_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (10):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} b_1c_1\eta_1 & b_1c_2\eta_1 & b_1c_3\eta_1 & b_1c_4\eta_1 \\ b_2c_1\eta_2 & b_2c_2\eta_2 & b_2c_3\eta_2 & b_2c_4\eta_2 \\ b_3c_1\eta_3 & b_3c_2\eta_3 & b_3c_3\eta_3 & b_3c_4\eta_3 \\ b_4c_1\eta_4 & b_4c_2\eta_4 & b_4c_3\eta_4 & b_4c_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (11):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} b_1d_1\eta_1 & b_1d_2\eta_1 & b_1d_3\eta_1 & b_1d_4\eta_1 \\ b_2d_1\eta_2 & b_2d_2\eta_2 & b_2d_3\eta_2 & b_2d_4\eta_2 \\ b_3d_1\eta_3 & b_3d_2\eta_3 & b_3d_3\eta_3 & b_3d_4\eta_3 \\ b_4d_1\eta_4 & b_4d_2\eta_4 & b_4d_3\eta_4 & b_4d_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (12):

$$\frac{1}{108V^2} \begin{pmatrix} c_1d_1\eta_1 & c_1d_2\eta_1 & c_1d_3\eta_1 & c_1d_4\eta_1 \\ c_2d_1\eta_2 & c_2d_2\eta_2 & c_2d_3\eta_2 & c_2d_4\eta_2 \\ c_3d_1\eta_3 & c_3d_2\eta_3 & c_3d_3\eta_3 & c_3d_4\eta_3 \\ c_4d_1\eta_4 & c_4d_2\eta_4 & c_4d_3\eta_4 & c_4d_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

Matriz (13):

$$\frac{1}{6V} C \begin{pmatrix} b_1\eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2\eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3\eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_4\eta_4 \end{pmatrix}$$

na qual:

$$C = \frac{x_1^2 \log[x_1]}{2(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_1 - x_4)} + \frac{x_2^2 \log[x_2]}{2(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)} + \\ + \frac{x_3^2 \log[x_3]}{2(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)} + \frac{x_4^2 \log[x_4]}{2(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)}$$

Matriz (14):

$$\frac{1}{6V} D \begin{pmatrix} c_1 \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \eta_4 \end{pmatrix}$$

na qual:

$$D = \frac{y_1^2 \log[y_1]}{2(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)(y_1 - y_4)} + \frac{y_2^2 \log[y_2]}{2(y_2 - y_1)(y_3 - y_2)(y_4 - y_2)} + \\ + \frac{y_3^2 \log[y_3]}{2(y_1 - y_3)(y_2 - y_3)(y_3 - y_4)} + \frac{y_4^2 \log[y_4]}{2(y_1 - y_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4)}$$

Matriz (15):

$$\frac{1}{6V} E \begin{pmatrix} d_1 \eta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 \eta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \eta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \eta_4 \end{pmatrix}$$

na qual:

$$E = \frac{z_1^2 \log[z_1]}{2(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)(z_1 - z_4)} + \frac{z_2^2 \log[z_2]}{2(z_2 - z_1)(z_3 - z_2)(z_4 - z_2)} + \\ + \frac{z_3^2 \log[z_3]}{2(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)(z_3 - z_4)} + \frac{z_4^2 \log[z_4]}{2(z_1 - z_4)(z_2 - z_4)(z_3 - z_4)}$$

Matriz (16):

$$V \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

na qual:

V: volume do tetraedro unitário



CONCLUSÃO

Concomitantemente ao desenvolvimento da alta tecnologia que tem aumentado gradativamente a performance dos computadores, como o rápido aumento de desempenho dos processadores paralelos, os últimos dez anos têm assistido a um crescente interesse no campo da Relatividade Numérica. Talvez a motivação física maior que norteia o interesse neste novo campo, seja a possível e futura detecção de ondas gravitacionais pelos modernos detectores em construção, tais como *VIRGO*, *LIGO* e *TAMA* [4]. A mais promissora fonte de ondas gravitacionais de provável detecção através desta rede de interferômetros a laser, seria sem dúvida a colisão de buracos negros. Contudo, como os sinais seriam fracos o bastante ao chegarem aos detectores, qualquer detecção confiável será muito difícil sem um conhecimento prévio da forma da onda emergente.

Buracos negros podem ser tratados através das técnicas dos elementos finitos. Com os elementos finitos é possível usar domínios com contornos não regulares, e construir valores iniciais da onda emergente na colisão.

Nesta dissertação é introduzida uma técnica baseada em elementos finitos para uma solução particular da equação de Einstein $R_{\mu\nu} = 0$, no espaço-tempo de Schwarzschild. Os métodos dos resíduos ponderados é aplicado para calcular as matrizes de contribuição local. Um formalismo de coordenadas homogêneas foi introduzido. Por meio deste formalismo as matrizes locais tem a mesma estrutura para cada Elemento Finito Tetraédrico, o que certamente nos levará a uma grande simplificação no cálculo da matriz global do problema.



APÊNDICE I

A seguir, encontram-se alguns dos cálculos realizados pelo software Mathematica (2.2), com as suas respectivas funções e integrais já calculadas; os cálculos restantes são feitos de maneira análoga e apresentam resultados idênticos aos calculados abaixo:

$K[A_ , B_ , C_] :=$

$$(((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4) +$$

$$(y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4))$$

$$(-1 + z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4)) /$$

$$(z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4);$$

$$\text{Integrate}[K[A,B,C],\{C,0,1-A-B\}]$$

$$2 (1 - A - B)$$

$$\text{Integrate}[\%,\{B,0,1-A\}]$$

$$(1 - A)$$

$$\text{Integrate}[\%,\{A,0,1\}]$$

$$1$$

$$-$$

$$3$$

L[A_,B_,C_] :=

$$(((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4) +$$

$$(y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4))$$

$$(3 (z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4) -$$

$$2 (z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4))) /$$

$$(z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4);$$

Integrate[L[A,B,C],{C,0,1-A-B}]

$$2 (1 - A - B)$$

Integrate[%,{B,0,1-A}]

$$(1 - A)$$

Integrate[%,{A,0,1}]

$$1$$

$$-$$

$$3$$

M[A_,B_,C_] :=

$$((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4) +$$

$$(y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4) +$$

$$(z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4)) /$$

$$(x_1^2 - A x_1 - B x_1 - C x_1 + A x_2 + B x_3 + C x_4);$$

$$\text{Integrate}[M[A,B,C],\{C,0,1-A-B\}]$$

$$2 (1 - A - B)$$

$$\text{Integrate}[\%,\{B,0,1-A\}]$$

$$\frac{2}{(1 - A)}$$

$$\text{Integrate}[\%,\{A,0,1\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

$$P[A_ ,B_ ,C_]:=$$

$$((x_1^2 - A x_1 - B x_1 - C x_1 + A x_2 + B x_3 + C x_4) +$$

$$+ (y_1^2 - A y_1 - B y_1 - C y_1 + A y_2 + B y_3 + C y_4) +$$

$$(z_1^2 - A z_1 - B z_1 - C z_1 + A z_2 + B z_3 + C z_4)) /$$

$$(y_1^2 - A y_1 - B y_1 - C y_1 + A y_2 + B y_3 + C y_4);$$

$$\text{Integrate}[P[A,B,C],\{C,0,1-A-B\}]$$

$$2 (1 - A - B)$$

$$\text{Integrate}[\%,\{B,0,1-A\}]$$

$$\frac{2}{(1 - A)}$$

$$\text{Integrate}[\%,\{A,0,1\}]$$

$$\frac{1}{3}$$

Q[A_,B_,C_] :=

$$\begin{aligned} & ((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4)^2 + \\ & (y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4)^2 + \\ & (z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4)^2) / \\ & (z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4); \end{aligned}$$

F[A_,B_,C_] :=

$$\begin{aligned} & ((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4)^2 + \\ & (y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4)^2 + \\ & (z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4)^2) / \\ & ((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4) \\ & (z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4)); \end{aligned}$$

Integrate[F[A,B,C],{C,0,1-A-B}]
2 (1 - A - B)

Integrate[%,{B,0,1-A}]
 $\frac{2}{3} (1 - A)^3$



Integrate[%,{A,0,1}]

1

-

3

G[A_,B_,C_]:=

((x1 - A x1 - B x1 - C x1 + A x2 + B x3 + C x4)² +

(y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4)² +

(z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4)²) /

((y1 - A y1 - B y1 - C y1 + A y2 + B y3 + C y4)

(z1 - A z1 - B z1 - C z1 + A z2 + B z3 + C z4));

Integrate[G[A,B,C],[C,0,1-A-B]]

2 (1 - A - B)

Integrate[%,{B,0,1-A}]

2

(1 - A)

Integrate[%,{A,0,1}]

1

-

3



$$W[A_ ,B_ ,C_]:= 1/(x1 + A (-x1 + x2) + B (-x1 + x3) + C (-x1 + x4));$$

$$\text{Integrate}[W[A,B,C],\{C,0,1-A-B\}]$$

$$\frac{\text{Log}[x1 - A x1 - B x1 + A x2 + B x3]}{x1 - x4} - \frac{\text{Log}[A x2 + B x3 + x4 - A x4 - B x4]}{x1 - x4}$$

$$\text{Integrate}[\%,\{B,0,1-A\}]$$

$$-\left(\frac{(-x1 + A x1 - A x2) \text{Log}[x1 - A x1 + A x2]}{x1^2 - x1 x3 - x1 x4 + x3 x4}\right) + \frac{(A x2 + x3 - A x3) \text{Log}[A x2 + x3 - A x3]}{(-x1 + x3) (x3 - x4)} -$$

$$\frac{(A x2 + x4 - A x4) \text{Log}[A x2 + x4 - A x4]}{(x3 - x4) (-x1 + x4)}$$

$$\text{Integrate}[\%,\{A,0,1\}]$$

$$\frac{x1^2 \text{Log}[x1]}{2 (-x1 + x2) (-x1 + x3) (x1 - x4)} + \frac{x2^2 \text{Log}[x2]}{2 (-x1 + x2) (-x2 + x3) (-x2 + x4)} +$$

$$+ \frac{x3^2 \text{Log}[x3]}{2 (x1 - x3) (x2 - x3) (x3 - x4)} - \frac{x4^2 \text{Log}[x4]}{2 (x1 - x4) (x2 - x4) (x3 - x4)}$$



REFERÊNCIAS

1. Hehl, F.W.; Puntingam, R.A. ; Ruder, H.; "*Relativity and Scientific Computing*", Springer, Berlim (1.996).
2. Dirac,P.A M.; "*General Theory of Relativity*"; Princeton University Press, Princeton (1.996).
3. Lichnerowicz; "*Elementos de Cálculo Tensorial*", Aguilar, Madri, (1.972)
4. Weinberg, S.; "*Gravitation and Cosmology; Principles and aplications of the General Theory of Relativity*", John Wiley and Sons, Inc, New York (1.972).
5. Abramovicci, A . A ., et al; "*LIGO: the laser interferometer gravitational wave observatory*", Science 256, 325-333 (1.992).
6. Narayan, R.; Piran, T.; Shemi, A . ; "*Newton star and black holes binaries in the galaxy*", Ap. astr. Journal 379, 17-20 (1.991).
7. J.R. Whiteman, et al, '*The Mathematics of finite Elements and aplications*', 'I, II, III, IV'; Academic Press, 1.973
8. A .J. Davies; '*The Finite Element Method: A First Approach*', Clarendon Press-Oxford, 1.986



9. Fenner, R.T.; '*Finite Element Methods for Engineers*', Imperial College Press, 1.996
10. Laguna, P.; in "*Alternative to Finite Difference Methods*", Relativity and Scientific Computing, Springer, 88-110, (1.996).
11. Silvester, P.P.; Chari, M.V.K.; '*Finite Solution of saturable magnetic field problems*'; IEEE Transation PAS, 89(7): 1.642-50, sep/oct, 1.970
12. J.M. Machado; C.A .R. Marreto; '*A compact library for automatic generation of tetrahedro meshes using the MATHEMATICA System*' VIII International IGTE Symposiun on Numerical Field Calculation, Áustria, 1998
13. Silvester, P.P.; Ferrari, R.L.; '*Finite element for eletrical engineers*', Cambridge University Press, 1.983
14. Schwarz, H.R.; '*Finite Element Methods*', Academic Press, 1.988, 386



