Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Alan Rodrigo Marinho Gualberto

Relatividade Especial: uma aplicação de Álgebra Linear

Rio Claro - SP
2022

Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Relatividade Especial: uma aplicação de Álgebra Linear

Alan Rodrigo Marinho Gualberto

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Wladimir Seixas

Rio Claro - SP
2022

G899r

Gualberto, Alan Rodrigo Marinho
Relatividade Especial: uma aplicação de Álgebra Linear / Alan Rodrigo Marinho Gualberto. -- Rio Claro, 2022
52 p. : il.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Wladimir Seixas

1. Métodos Matemáticos. 2. Aplicações da Álgebra Linear. 3. Relatividade Especial. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

TERMO DE APROVAÇÃO

Alan Rodrigo Marinho Gualberto

RELATIVIDADE ESPECIAL: UMA APLICAÇÃO DE ÁLGEBRA LINEAR

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática, mestrado profissional, do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Orientador

Prof. Dr. Antonio Luís Venezuela
CCTS/UFSCar/Sorocaba (SP)

Prof. Dr. Nelson Callegari Júnior
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Rio Claro, 26 de agosto de 2022

Dedico esse trabalho aos mestres, com carinho! Ao sr. João Gualberto, meu pai, pelo exemplo. Ao professor Arnaldo Antônio de Souza (in memoriam), a matemática que me ensinou é uma semente que germinou.

Agradecimentos

A minha esposa, Priscila, e aos meus filhos Miguel e Rafael pelo auxílio.

Ao Prof. Dr. Wladimir Seixas, meu orientador, pela dedicação, paciência e conhecimentos transmitidos. Por sua orientação de forma ímpar, sem a qual esse trabalho não teria atingido o ideal traçado.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UNESP, campus de Rio Claro.

Aos meus professores de matemática do Ensino Fundamental: Arnaldo (in memorian) e Adonias (in memorian).

Aos professores, Dr. Thiago de Melo e Dra. Marta Cilene Gadotti pelas excelentes aulas de Álgebra Linear e Análise Matemática.

Aos professores Dr. João Peres Vieira e Dr. Nelson Callegari Junior pelas sugestões propostas no exame de qualificação.

Aos amigos Lourival Vieira e Lenara pelo companheirismo.

Aos colegas pós-graduandos e aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática.

No primeiro mês você luta, e luta e não vence.
Nos meses que se sucedem você segue lutando, desanimando e querendo parar. Alguns dizem que jamais conseguirá. Até que finalmente você desiste. Um dia você percebe que quem não parou está tão longe que dificilmente poderá ser alcançado.

Alan R. M. Gualberto

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo geral obter as transformações de Lorentz da Relatividade Especial apresentando uma aplicação da Álgebra Linear, a partir das transformações pseudo-ortogonais definidas para os espaços pseudo-euclidianos, o objetivo específico é demonstrar sua invariância sob as transformações de Lorentz e discutir as transformações de Lorentz como estrutura de grupo e suas representações.

Palavras-chave: Métodos Matemáticos, Aplicações da Álgebra Linear, Relatividade Especial.

Abstract

The present work has for general objective to obtain the Lorentz transformations of Special Relativity presenting an application of Linear Algebra, from the pseudo-orthogonal transformations defined for the pseudo-Euclidean spaces, the specific objective is to demonstrate its invariance under the Lorentz transformations and discuss the Lorentz transformations as a group structure and its representations.

Keywords: Mathematical Methods, Linear Algebra Applications, Special Relativity.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Por volta da metade do século XIX, um ramo da Física Clássica conhecido por eletromagnetismo, adquire uma formulação matemática suscinta e generalizada baseada no conceito de campo e que considerava a existência de uma substância, que permeiava todo o universo, denominada éter. Aparentemente não tinha estrutura epistemológica distinta, porém à medida que se aprofundava a discussão do tema era percebido que o eletromagnetismo não se comportava da mesma maneira que as outras leis da Física conhecidas até então. Enquanto na mecânica as leis permaneciam inalteradas para os chamados referenciais inerciais, o eletromagnetismo por sua vez, parecia possuir um referencial especial. As leis da mecânica obedeciam a relatividade de Galileu e eram denominadas de covariantes, já o eletromagnetismo não se adequava a isso (BEZERRA, 2006; DIAS; MORAIS, 2014).

Essa inconsistência evidente das leis do eletromagnetismo na representação apresentada por James Clerk Maxwell (1831-1879), em relação aos referenciais galileanos, não passaram desapercebidas. Embora esse talentoso físico e matemático tenha conseguido reescrever as equações que descreviam os fenômenos elétricos e magnéticos em apenas quatro equações, trazendo uma elegância matemática na forma de apresentar tais resultados unificando a eletricidade, o magnetismo e a ótica, existia a necessidade de corroborar experimentalmente esses resultados (SEIXAS, 2005).

As equações do eletromagnetismo não eram covariantes pelo princípio da relatividade galileana e os resultados apresentados por Maxwell carregavam essa inconveniência que poderia ser sanada adotando-se um referencial absoluto para manter sua validade. Assim, vários cientistas buscaram uma maneira de confirmar a existência desse referencial absoluto ou éter.

Segundo Barros et al. (2005), vários conceitos de éter foram sugeridos. O físico e matemático dinamarquês Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) conseguiu impor sua opinião partindo do conceito de éter de Fresnel (1788-1827), ou seja, de que o éter de Fresnel permeia o espaço e não é afetado pelo movimento dos corpos. É conveniente salientar ainda que o conceito de éter proposto por Lorentz não remete ao modelo aristotélico do universo, no qual o conceito de éter era a contraposição ao vácuo (vazio de matéria) (ÉVORA, 2007). Os defensores da teoria de Maxwell defendiam a existência do éter, supondo que esse era o referencial absoluto no qual as leis de Maxwell eram válidas ou invariantes.

Em 1809, François Jean Dominique Arago (1786-1853) realizou um experimento para detectar o movimento da Terra em relação ao éter, obtendo resultado nulo. Vários experimentos foram propostos, porém uma visão simplista é apresentada em relação à atmosfera científica pré-teoria da relatividade restrita. Aparentemente o mundo científico, de acordo com os fatos históricos, acreditava que o éter pudesse ser detectado pelo interferômetro dos cientistas estadunidenses Michelson (1852-1931) e Morley (1838-1923). Porém, os resultados obtidos demonstraram o contrário e, assim, como o de Arago, o resultado foi nulo. De acordo com os resultados compilados da experiência de Michelson-Morley, concluía-se que o éter não existia, ou seja, o deslocamento das franjas de interferência, comprovando a velocidade relativa da Terra em relação ao éter, não foi observado. Foi um forte impacto para os defensores das equações (leis) de Maxwell. De qualquer forma, a ideia de éter de Fresnel como referencial absoluto prosperou entre os períodos das publicações de Maxwell até 1886, aproximadamente um quarto de século. Maxwell tinha defensores, físicos e matemáticos, que se debruçaram sobre o problema com o objetivo de salvar o legado de uma teoria tão original. A relatividade galileana se aplicava perfeitamente às leis da mecânica, porém as leis do eletromagnetismo não se ajustavam a esse conceito (MARTINS, 2012; DARRIGOL, 2000).

No contexto do final do século XIX, vários experimentos tinham fracassado, ou simplesmente obtido resultado nulo no cálculo da velocidade relativa da Terra em relação ao éter de Fresnel. O experimento de Michelson-Morley em 1886 não desencorajou totalmente aqueles que persistiam com a ideia de éter de Fresnel. Neste sentido, Lorentz com a teoria de tempo local e George Francis Fitzgerald (1851-1901) com a teoria de contração do espaço, buscavam explicar o experimento de Michelson-Morley considerando o éter. Na busca de contornar o fato de que as leis do eletromagnetismo não eram covariantes, surgem as chamadas transformações de Lorentz, vistas apenas como artifício matemático. Albert Einstein (1879-1955) elaborou e publicou em 1905 o artigo "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento", que por sua vez, estava de acordo com o experimento de Michelson-Morley (DARRIGOL, 2000; ROBERTSON, 1949).

O ponto de vista de Einstein era bastante peculiar e mudou o paradigma até então aceito, além de trazer um modelo novo. Suas ideias inovadoras permitiram concluir que o espaço está vinculado à matéria, enquanto para Newton o espaço era absoluto, ou seja, a matéria ocupa lugar no espaço e esse existe independente da matéria. O conceito de tempo absoluto e que não tem relação com nada externo a ele também foi revisto por Einstein. Em outras palavras, a medida do tempo passou a considerar a matéria, sendo tempo e matéria grandezas dependentes (STACHEL, 2004). Dessa forma, com o objetivo de corrigir a não covariância das leis do eletromagnetismo, surgiu a teoria que conhecemos atualmente por teoria da relatividade restrita.

O presente trabalho tem por objetivo geral obter as transformações de Lorentz da Relatividade Especial apresentando uma aplicação da Álgebra Linear, a partir das transformações pseudo-ortogonais definidas para os espaços pseudo-euclidianos, o objetivo específico é demonstrar sua invariância sob as transformações de Lorentz e discutir as transformações de Lorentz como estrutura de grupo e suas representações.

No capítulo 2, aborda-se a invariância de Galileu onde os sistemas referenciais se movem com velocidade relativa constante um em relação ao outro. Na sequência, apresentam-se as transformações de Galileu e detalha-se porque as leis da mecânica são idênticas em todos os referenciais inerciais.

No capítulo 3, são apresentados os aspectos históricos que antecederam o desenvolvimento das equações para o eletromagnetismo propostas por Maxwell e se apresentam as equações de Maxwell na configuração proposta nos anos iniciais dos cursos superiores das áreas de exatas, demonstrando-se que as leis do eletromagnetismo não são invariantes sob transformações de Galileu.

No capítulo 3, detalham-se os aspectos históricos relativos as transformações de Lorentz e se desenvolve o conteúdo de álgebra linear, mais especificamente descreve-se base, produto interno, espaço euclidiano e pseudo-euclidiano, consequentemente, obtém-se a transformação de Lorentz via álgebra linear.

No capítulo 4, realiza-se uma apresentação das principais definições de teoria de grupos, tais como, lei de composição interna, propriedades de uma operação, grupóide, semigrupo, monóide, grupos, subgrupos e homomorfismo de grupo. Com isso, pretende-se preparar o leitor para compreender, sem grandes dificuldades, os grupos de Galileu e de Lorentz e, consequentemente, ampliar o seu repertório matemático ao lidar com as leis do eletromagnetismo.

2 Mecânica newtoniana e os referenciais inerciais

Neste capítulo aborda-se a invariância de Galileu, onde os sistemas referenciais se movem com velocidade relativa constante um em relação ao outro. Ademais, também é tratado na sequência as transformações de Galileu, na qual detalha-se porque as leis da mecânica são idênticas em todos os referenciais inerciais.

2.1 Invariância Galileana

Consideremos um observador S em repouso (parado) em um porto e outro observador S' em um navio, carregado de contêineres, que se move com velocidade constante V em relação ao observador S. Podemos afirmar que o observador S observa os contêineres em movimento, enquanto para o observador S' os contêineres permanecem em repouso. Esse evento revela que o movimento é relativo, isto é, não existe movimento absoluto, no sentido de que o observador não conseguirá determinar se está em movimento ou em repouso. Assim, para descrevermos o movimento podemos adotar diferentes referenciais (observadores).

O movimento pode ser descrito por sistemas de referenciais ditos inerciais, ou seja, sistemas que se movem com velocidade constante relativa um em relação ao outro. Esses referenciais são não acelerados e não existe um referencial absoluto (preferencial).

As leis da mecânica clássica devem ser consideradas na descrição do movimento de corpos físicos. É baseada em um conjunto de hipóteses:

1. O espaço é euclidiano, isto é, os axiomas e os principais resultados da geometria euclidiana são válidos;

2. O espaço é homogêneo e isotrópico, ou seja, não há distinção entre regiões do espaço e não há direção preferencial, respectivamente;

3. As leis de Newton do movimento são válidas em referenciais inerciais. São elas:

1ª **Lei de Newton ou Lei da Inércia:** *Todo corpo tende a ficar em repouso ou em movimento retilíneo uniforme a não ser que seja compelido a mudar seu estado sob a ação de uma força externa.*

A primeira lei de Newton é válida em um sistema referencial inercial. Se o planeta Terra for escolhido como um referencial inercial é importante observar que este sofre aceleração devido ao movimento de rotação em torno do seu eixo e ao movimento de translação em torno do Sol. Não existe repouso absoluto, porém as acelerações sofridas pela Terra podem ser consideradas muito pequenas em relação a sua velocidade. Sendo assim, podemos considerar, em uma primeira aproximação, o planeta como um razoável sistema referencial inercial.

2ª **Lei de Newton ou Lei da Dinâmica:** *A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida.*

A segunda lei de Newton pode ser representada algebricamente, sendo a força $\vec{F}$ diretamente proporcional a derivada temporal do momento linear $\vec{p}$. Cabe lembrar que o momento linear é igual ao produto da massa m pela velocidade linear $\vec{v}$ do um corpo. Assim, podemos escrever:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}. \tag{2.1}$$

3ª **Lei de Newton ou Lei da Ação e Reação:** *A toda ação tem-se uma reação de mesma intensidade, mesma direção e sentido contrário.*

4. Como última hipótese temos que a Lei da Gravitação Universal é válida.

Lei da Gravitação *diz que a força de atração mútua entre dois corpos é diretamente proporcional as massas e inversamente proporcional ao inverso do quadrado da distância que une os centros de massas desses corpos.*

Se m_1 e m_2 são as massas dos corpos, r a distância em linha reta entre os centros de massas escrevemos:

$$\vec{F} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$

sendo que G é denominada de constante universal.

2.2 Transformações de Galileu

Suponhamos dois sistemas de coordenadas S e S' e que um corpo tem suas coordenadas (x, y, z) e (x', y', z') descritas nos sistemas S e S'.

Na mecânica, parte-se da hipótese de Galileu: "As leis básicas da mecânica são idênticas em todos os sistemas referenciais, desde que não estejam acelerados uns em relação aos outros". Desse modo, uma transformação entre sistemas de coordenadas S e S' será dada pela composição de uma a translação e um movimento retilíneo com velocidade constante. Assim, as coordenadas de um ponto são (x, y, z) no referencial S e este mesmo ponto terá coordenadas (x', y', z') no referencial S'. Suponhamos ainda que no instante inicial $t = 0$ as origens de ambos os referenciais coincidem e que o referencial S' se move retilineamente com velocidade constante v na direção do eixo Ox.

A equação de translação com velocidade constante ao longo do eixo Ox é dada por

$$\begin{cases} t = t' \\ x = x' + vt = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases} \tag{2.2}$$

Para obter as velocidades relativas nos sistemas S e S' derivamos as equações (2.2) em relação a t, resultando em

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt'} + v \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt'} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz'}{dt'}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Derivando novamente em relação a t obtém-se a aceleração em cada um dos sistemas, isto é,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d^2x'}{dt'^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{d^2y'}{dt'^2} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{d^2z'}{dt'^2}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Podemos verificar que a forma algébrica da equações no sistema S e no sistema S' são idênticas, ou seja, invariantes.

Em Física, usa-se o termo covariante se as equações mantêm a forma em sistemas de referências distintos. Observando um corpo material em um sistema referencial inercial S, a equação (2.1) referente a segunda lei de Newton assume a forma

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = \vec{F}(x, t). \tag{2.5}$$

Por outro lado, o mesmo corpo tem seu movimento descrito em relação ao sistema referencial inercial S', conforme descrito na equação (2.5), a forma algébrica da segunda lei de Newton permanece inalterada, isto é,

$$m \cdot \frac{d^2x'}{dt'^2} = \vec{F}'(x', t').$$

Assim sendo, a força no referencial S e a força no referencial S' são iguais. Concluímos que as leis da mecânica são invariantes segundo as Transformações de Galileu entre dois sistemas referenciais inerciais.

3 As Equações de Maxwell para o eletromagnetismo

No presente capítulo são apresentados os aspectos históricos que antecederam o desenvolvimento das equações para o eletromagnetismo propostas por Maxwell, também se apresentam as equações de Maxwell na configuração proposta nos anos iniciais dos cursos superiores das áreas de exatas, demonstrando-se que as leis do eletromagnetismo não são invariantes sob transformações de Galileu.

3.1 Aspectos históricos

Segundo Morais (2014), os primeiros relatos a respeito de eletricidade são do século VI a. C., na Jônia, colônia da Grécia. Atribui-se a Tales de Mileto (624-547 a.C.) a descrição do fenômeno observado ao esfregar um pedaço de lã de carneiro com uma porção de *elektron*. Tales percebeu que partículas de palha seca eram atraídas pelo *elektron*. Todavia, esse experimento precisou aguardar 2000 anos para que uma explicação científica. Hoje sabemos que esse fenômeno é devido à atração elétrica. Pela importância dessa observação, a palavra grega *elektron*, que significa âmbar (resina petrificada), passou a ser a raiz do nome do ramo da ciência que nascia, a eletricidade (SILVA; PIMENTEL, 2008; MORAIS, 2014).

Outro fenômeno tão impressionante quanto a eletricidade foi observado na cidade de Tessália, província grega. Diz a lenda que o pastor Magnes percebera que a ponta do seu cajado era atraída por uma pedra específica que encontrara no caminho; a tal pedra adquiriu o nome de magnetita, enquanto a região tornou-se conhecida por Magnésia. Já era conhecido desde os tempos de Tales de Mileto que a magnetita era capaz de atrair ferro e há registros históricos acerca do uso de bússolas em 215 a.C (TONIDANDEL; ARAÚJO; BOAVENTURA, 2018).

Coube ao matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) diferenciar os fenômenos elétricos e os magnéticos, pois trabalhos anteriores não diferenciavam atração magnética e elétrica. Em 1600, William Gilbert (1544-1603) publicou a obra *De magnete*, cujo conteúdo abordava experimentos elétricos e magnéticos descobertos até então e acrescentava outros, e ainda apresentou a teoria na qual a Terra se comportava como um imenso ímã. Esses conjuntos de experimentos e as respectivas obras deram à ciência bases para predizer se a causa de determinado fenômeno era elétrica ou magnética, em um tempo no qual as explicações desses fenômenos não eram bem estabelecidas (MAGALHÃES, 2007).

Por volta de 1660, o físico Otto von Guericke (1602-1686) apresentou uma máquina eletrostática que inventara. Tal dispositivo mecânico era capaz de gerar eletrização por atrito. Mais um avanço na busca de ampliar a compreensão acerca dos fenômenos elétricos. Somente em 1729, Stephen Gray (1666-1736) conseguiu transferir as cargas armazenadas, devido ao atrito, em tubos de vidro para outros corpos. Todavia, fez a distinção entre materiais condutores e não condutores (RAICIK; PEDUZZI, 2016).

Enquanto o entendimento a respeito do magnetismo permanecia latente, não se podia dizer o mesmo em relação à eletricidade, pois essa apresentava avanços. Entre esses avanços, está a descoberta de Charles Francis Dufay (1698-1739), na qual a eletricidade gerada por meio de atrito foi descrita em dois tipos: a vítrea e a resinosa. Concluiu que corpos com o mesmo tipo de eletricidade se repelem, enquanto corpos com eletricidade distintas se atraem (BOSS; CALUZI, 2007). Na Universidade de Leyden, Holanda, um dispositivo inventado no ano 1744, denominado garrafa de Leyden, era capaz de armazenar cargas elétricas, pode-se dizer que foi o precursor dos capacitores modernos. As pesquisas no campo da eletricidade avançavam na Europa. Entretanto, cabe destacar o feito de um notável cientista do Novo Mundo, Benjamin Franklin (1706-1790). Em 1750, Franklin reportou que havia realizado um experimento com uma pipa contendo uma garrafa de Leyden na extremidade, em meio a uma tempestade de raios, e concluiu que os raios eram uma forma de eletricidade capaz de carregar a garrafa de Leyden. Com base nesse experimento, Franklin cunhou os termos eletricidade positiva e eletricidade negativa.

Em 1785, Charles Augustin Coulomb (1736-1806) apresenta à Academia de Ciências de Paris um equipamento capaz de medir a repulsão de cargas elétricas. Esse equipamento ficou conhecido com o nome de balança de torção. A partir desses experimentos e de outros subsequentes determinou-se que a atração ou repulsão eletrostática variava com o inverso do quadrado da distância entre as cargas. Esse resultado é reconhecido como equação fundamental da eletrostática ou, simplesmente, Lei de Coulomb (SILVA, 2013). Novas correlações surgiam e campos que aparentemente não tinham conexão, como a eletricidade e a fisiologia começavam a se entrelaçar. Luigi Galvani (1737-1798) observou em 1780 que ao tocar com um bisturi as pernas de um batráquio morto, sobre uma placa metálica, as pernas do animal morto se moviam. Ele então concluiu que tal evento era devido à eletricidade, o que levou a um debate entre ele e Alessandro Volta (1745-1827) (RAICIK, 2020). Segundo Martins (1999), Alessandro Volta desenvolveu um aparato experimental capaz de transformar energia química em energia elétrica, que consistia em duas barras de metais distintas em contato com uma solução ácida. Essa configuração permitia os elétrons migrarem de uma barra metálica para outra, através da solução ácida. Surgia a primeira pilha, denominada pilha de Volta.

No ano de 1820, um experimento científico mostrara que a eletricidade, embora não parecesse até então, tinha correlação com o magnetismo. Coube ao físico dinamarquês Hans Christian Oersted (1777-1851), em uma apresentação pública, demonstrar que a agulha de uma bússola era defletida nas imediações de um fio condutor ligado a uma fonte de tensão contínua em circuito fechado. O experimento de Oersted se distinguia de outros da mesma época em que se buscava uma correlação entre eletricidade e magnetismo com base em circuitos abertos. Dessa forma, a ciência do eletromagnetismo começava a vislumbrar o futuro (CHAIB; ASSIS, 2007). Apesar de demonstrar a correlação entre eletricidade e magnetismo, Oersted se limitou a explicar o fenômeno de forma qualitativa. Por outro lado, os físicos franceses Jean-Baptiste Biot (1774-1862) e Félix Savart (1791-1841) apresentaram uma solução quantitativa na qual o campo magnético ao redor de um condutor retilíneo é diretamente proporcional à corrente elétrica que atravessa a área de seção reta do condutor e inversamente proporcional à distância. Portanto, uma lei que fornece um campo magnético gerado por uma corrente constante no tempo. Essa lei é conhecida como Lei de Biot-Savart (SANTOS; GARDELLI, 2017).

Em 1823, André-Marie Ampère (1775-1836) demonstrou à Academia de Ciências de Paris que, dispondo de um condutor elétrico (bastão) fixo e outro móvel, ao atravessá-los com uma corrente elétrica contínua, o condutor móvel se aproximava ou se afastava do condutor fixo, dependendo dos sentidos das correntes elétricas. Assim, os condutores adquiriam forças de atração ou repulsão. Com esse experimento, verificou-se ser possível produzir magnetismo, apenas com corrente elétrica. Atualmente, conhecemos esse fato como lei de Ampère (ASSIS, 2010; CALUZZI, 2012). A eletrodinâmica, ramo da eletricidade que trata da condução de elétrons através de condutores devido à aplicação de uma diferença de potencial era enriquecida com os experimentos de Georg Simon Ohm (1789-1854). A Lei de Ohm estabelece que a corrente elétrica é diretamente proporcional à diferença de potencial. Todavia, demonstrou-se que a resistência elétrica depende diretamente do comprimento do condutor e da resistividade, e é inversamente proporcional à área da secção reta desse condutor (ROCHA; SANTIAGO, 2017).

Segundo Hessel, Freschi e Santos (2015), Michael Faraday (1791-1862) demonstrou experimentalmente, em 1831, que o movimento de ímãs próximos a uma bobina condutora promovia o aparecimento de corrente elétrica na bobina. Também foi observado que, se o ímã permanecesse em repouso enquanto a bobina condutora se movimentava na sua imediação, aparecia corrente elétrica. Assim, se existia uma corrente na bobina é porque uma força eletromotriz a gerara. Embora as observações descritas por Faraday fossem verdadeiras e reprodutíveis faltava uma descrição matemática para o fenômeno. Isso coube a Franz Ernst Neumann (1798-1895) e a equação descreve a lei de indução de Faraday-Neumann (HESSEL; FRESCHI; SANTOS, 2015). Cabe ressaltar que o estadunidense Joseph Henry (1797-1878) chegara a mesma conclusão que Faraday a respeito da indução eletromagnética e a conversão de magnetismo em eletricidade cerca de um ano antes, embora tenha explicado o fenômeno com menos detalhes do que o cientista inglês. Outro estadunidense, Heinrich Lenz (1804-1865), percebeu que o sentido da corrente elétrica induzida gera um campo magnético criado por ela e esse opõe-se à variação do campo magnético que produziu a corrente elétrica. Dessa forma, a lei de conservação de energia é preservada. O sinal negativo na equação da Lei de Indução de Faraday é contribuição da Lei de Lenz (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2016).

Havia algumas equações que buscavam explicar os fenômenos eletromagnéticos. Coube a James Clark Maxwell (1831-1879) a perspicácia de descrever todos os fenômenos eletromagnéticos apresentando quatro equações, sendo que em uma das equações acrescentou o conceito de corrente de deslocamento. Além disso, apresentou sua descrição matemática com base na teoria de campos. No entanto, suas equações não eram covariantes, ou seja, não preservavam a forma com a mudança de referencial inercial. Então, para que as equações estivessem em consonância com a Física vigente, foi sugerido um referencial absoluto, ou éter de Fresnel. Cabia então, aos cientistas experimentais, encontrar evidências da existência de tal substância. Além disso, Maxwell aplicou o operador rotacional na equação de Ampère e verificou que o campo elétrico satisfazia a equação de onda, concluindo o mesmo com relação ao campo magnético e demostrou que ambos os campos se propagavam com a velocidade c da luz. As equações de Maxwell descreviam a união entre eletricidade e magnetismo e também a óptica, isto é, o eletromagnetismo se fundia à óptica (OBERZINER, 2008; FERREIRA, 2015).

3.2 As equações de Maxwell

Vimos no capítulo 2 que as leis da mecânica são invariantes sobre as Transformações de Galileu entre dois sistemas referenciais inerciais.

Vamos agora verificar se essa invariância se estende a outras áreas da Física, por exemplo, ao eletromagnetismo. Neste sentido, para melhor compreensão vamos relembrar as equações de Maxwell que regem o eletromagnetismo.

1. A primeira lei é conhecida como lei de Gauss para campos elétricos e é dada, em unidades no sistema internacional de medidas, por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3.1}$$

onde $\nabla \cdot E$ denota o divergente do campo (vetorial) $\vec{E}$. Interpreta-se que o fluxo de campo elétrico $\vec{E}$ através de uma superfície fechada é proporcional à densidade de carga elétrica ρ envolvida pela superfície sendo ε_0 a permissividade elétrica no vácuo.

2. A segunda lei é dada por
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{3.2}$$
onde $\nabla \cdot \vec{B}$ denota o divergente do campo (vetorial) $\vec{B}$. Essa lei é conhecida como lei de Gauss para campos magnéticos, com unidades no sistema internacional de medidas. Interpreta-se que o fluxo magnético através de uma superfície fechada é sempre igual a zero sendo B o campo magnético.

3. Em seguida temos a lei de Faraday que, em unidades no sistema internacional de medidas, é dada por:
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{3.3}$$
onde $\nabla \times \vec{E}$ denota o rotacional do campo $\vec{E}$ e afirma que a variação de fluxo magnético induz um campo elétrico.

4. Por último temos
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{3.4}$$
onde $\nabla \times \vec{B}$ denota o rotacional do campo $\vec{B}$. Essa lei é conhecida como lei de Ampère-Maxwell, com unidades no sistema internacional de medidas. Interpreta-se que o primeiro termo do lado direito é referente à densidade de corrente elétrica, por exemplo, a corrente que flui através de um fio, enquanto o segundo termo do lado direito é denominado de corrente de deslocamento, por exemplo, a variação do campo elétrico entre as placas de um capacitor gera um campo magnético sendo $\vec{J}$ a densidade de corrente elétrica.

Vamos considerar as equações 3.1 e 3.2 em um sistema de coordenadas inercial S. As componentes do divergente do campo elétrico $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ são dadas por:
$$\frac{\partial E_1}{\partial x} + \frac{\partial E_2}{\partial y} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{3.5}$$

Para o campo magnético $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3)$ temos também,
$$\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 0. \tag{3.6}$$

Inicialmente lembramos que as derivadas parciais das transformações de Galileu são dadas por

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t'} - v\dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y'} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z'}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Aplicando as transformações as transformações (3.7) é fácil verificar que a forma algébrica para o divergente, e consequentemente, das equações (3.5) e (3.6) não teremos alteração na suas formas algébricas, isto é,

$$\frac{\partial E_1'}{\partial x'} + \frac{\partial E_2'}{\partial y'} + \frac{\partial E_3'}{\partial z'} = \frac{\rho'}{\varepsilon_0} \tag{3.8}$$

e

$$\frac{\partial B_1'}{\partial x'} + \frac{\partial B_2'}{\partial y'} + \frac{\partial B_3'}{\partial z'} = 0. \tag{3.9}$$

sendo $\vec{E}' = (E_1', E_2', E_3')$ e $\vec{B}' = (B_1', B_2', B_3')$ as componentes dos campos elétrico e magnético, respectivamente, no referencial S'.

Passemos a análise para a equação (3.3). No sistema referencial inercial S, essa equação é dada por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_3}{\partial y} - \dfrac{\partial E_2}{\partial z} = -\dfrac{\partial B_1}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial z} - \dfrac{\partial E_3}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_2}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial x} - \dfrac{\partial E_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial B_3}{\partial t} \end{cases} \tag{3.10}$$

Aplicando-se as transformações (3.7) nas componentes (3.10) obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_3}{\partial y'} - \dfrac{\partial E_2}{\partial z'} = -\dfrac{\partial B_1}{\partial t'} + v\dfrac{\partial B_1}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial E_1}{\partial z'} - \dfrac{\partial E_3}{\partial x'} = -\dfrac{\partial B_2}{\partial t'} + v\dfrac{\partial B_2}{\partial x'} \\ \dfrac{\partial E_2}{\partial x'} - \dfrac{\partial E_1}{\partial y'} = -\dfrac{\partial B_3}{\partial t'} + v\dfrac{\partial B_3}{\partial x'} \end{cases} . \tag{3.11}$$

Isolando $\dfrac{\partial B_1'}{\partial x'}$ na equação (3.9) segue que

$$\frac{\partial B_1}{\partial x'} = -\frac{\partial B_2}{\partial y'} - \frac{\partial B_3}{\partial z'}.$$

e substituindo na primeira equação de (3.11) tem-se,

$$\frac{\partial E_3}{\partial y'} - \frac{\partial E_2}{\partial z'} = -\frac{\partial B_1}{\partial t'} + v(-\frac{\partial B_2}{\partial y'} - \frac{\partial B_3}{\partial z'}).$$

Aplicando a propriedade distributiva,

$$\frac{\partial E_3}{\partial y'} - \frac{\partial E_2}{\partial z'} = -\frac{\partial B_1}{\partial t'} - v\frac{\partial B_2}{\partial y'} - v \cdot \frac{\partial B_3}{\partial z'}.$$

Reagrupando os termos,

$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial y'} + v\frac{\partial B_2}{\partial y'}\right) - \left(\frac{\partial E_2}{\partial z'} - v\frac{\partial B_3}{\partial z'}\right) = -\frac{\partial B_1}{\partial t'}.$$

Concluímos que

$$\frac{\partial}{\partial y'}(E_3 + vB_2) - \frac{\partial}{\partial z'}(E_2 - vB_3) = -\frac{\partial B_1}{\partial t'}. \tag{3.12}$$

Mantendo a forma algébrica da primeira equação de (3.10) para o sistema S' e comparando com (3.12) obtemos que

$$\begin{cases} E_3' = E_3 + vB_2 \\ E_2' = E_2 - vB_3 \\ B_1' = B_1. \end{cases} \tag{3.13}$$

Da segunda equação de (3.10) obtém-se

$$\frac{\partial E_1}{\partial z'} - \frac{\partial}{\partial x'}(E_3 + vB_2) = -\frac{\partial B_2}{\partial t'}.$$

Segue assim que

$$\begin{cases} E_1' = E_1 \\ E_3' = E_3 + vB_2 \\ B_2' = B_2. \end{cases} \tag{3.14}$$

Verificamos que a segunda condição de (3.14) está consistente com a primeira condição obtida em (3.13).

Analogamente, a terceira equação de (3.10) obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x'}(E_2 - vB_3) - \frac{\partial E_1}{\partial y'} = -\frac{\partial B_3}{\partial t'}.$$

Segue assim que

$$\begin{cases} E_1' = E_1 \\ E_2' = E_2 - vB_3 \\ B_3' = B_3. \end{cases} \quad . \tag{3.15}$$

Observamos que as transformações obtidas em (3.13), (3.14) e (3.15) são consistentes entre si. Concluímos assim que as leis do eletromagnetismo não são invariantes quando aplicamos as transformações de Galileu entre dois sistemas referenciais inerciais. Haja visto que a forma algébrica da equação se altera conforme o referencial adotado (dependendo de v), tal resultado é anisotrópico e mostra que ou as equações de Maxwell estão incorretas ou novas transformações devem ser consideradas. O presente trabalho demonstrará as novas transformações.

4 As transformações de Lorentz

Neste capítulo são abordados os aspectos históricos relativos as transformações de Lorentz, na sequência desenvolve-se o conteúdo de Álgebra Linear, mais especificamente descreve-se base, produto interno, espaço euclidiano e pseudo-euclidiano, consequentemente, obtém-se a transformação de Lorentz via Álgebra Linear.

4.1 Aspectos históricos

Segundo Martins (2012), Augustin Jean Fresnel (1788-1827) elaborou um modelo quantitativo acerca do éter, no qual supunha que esse preenchia todo o universo, estava em repouso e interagia com corpos transparentes. De acordo com os defensores da teoria ondulatória, a luz apresentava velocidade menor nos meios transparentes e isso poderia se explicar devido a densidade do éter ser distinta dentro dos corpos transparentes. Por meio de suas equações, Fresnel conseguia explicar porque alguns experimentos que buscavam medir os efeitos do movimento da Terra sobre a luz não obtinham os resultados esperados.

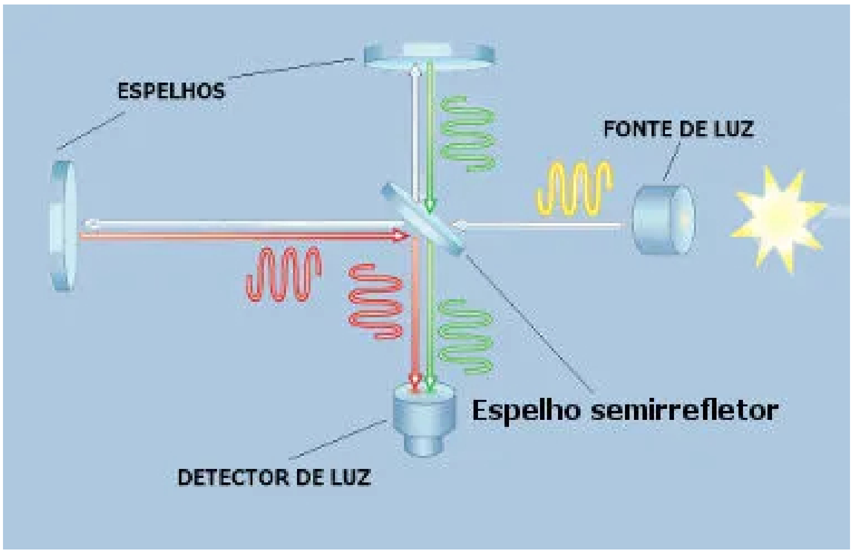
Um dos experimentos foi realizado em 1809 por François Arago (1786-1853). Ele buscava observar uma correlação entre o movimento da Terra e a luz das estrelas e medindo a deflexão sofrida pela luz estelar ao passar por um prisma, obteve resultado nulo. Em 1839, Jacques Babinet (1794-1872) realizou um experimento pelo método interferométrico, onde buscava medir a velocidade da luz em um bloco de vidro, no caso em que a luz tinha o mesmo sentido de movimento da Terra e no caso em que a luz tinha o sentido contrário - obteve resultado nulo. A teoria do éter de Fresnel gozava de grande reputação no século XIX, pois apresentava concordância com os resultados experimentais, no mínimo nas aproximações de primeira ordem (MARTINS, 2012; JÚNIOR; LORDÊLO, 2019).

Os cientistas franceses, Jean Bernard Leon Foucalt (1819-1869) e Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896), realizaram experimentos distintos no qual mediram na Terra a velocidade da luz e os resultados foram consonantes. Em 1851, em um novo experimento, Fizeau e Foucault buscavam demonstrar o arrastamento da luz em um meio transparente em movimento e chegaram a um resultado que corroborava a previsão teórica da teoria de Fresnel. Dessa forma, os cientistas do século XIX buscavam detectar o movimento da Terra em relação ao éter, haja visto que a teoria de Fresnel previa a existência de tal substância e, como os resultados experimentais previam que a teoria estava correta, muitos cientistas se debruçaram sobre esse problema sem sucesso (MARTINS, 2012).

Em 1881, o físico estadunidense Albert Abraham Michelson (1852-1931), considerando a velocidade da luz constante em relação ao éter, construiu um interferômetro e realizou medidas buscando encontrar resultados distintos da velocidade da luz em relação à Terra na direção do movimento de rotação e na direção ortogonal a essa. Os resultados obtidos foram nulos, mas a comunidade científica alegou que os resultados não eram confiáveis, pois vibrações externas deveriam influenciar as medidas, ponderando que o equipamento era muito sensível. Somente em 1887, com o auxílio do físico Edward Williams Morley (1838-1923), o interferômetro foi melhorado, eliminou-se a influência das vibrações externas, conferindo maior confiabilidade ao equipamento. A ideia consiste em medir o padrão de interferência da luz que se propaga em direções distintas.

Na figura 4.1 tem-se uma fonte de luz que emite um feixe de luz na direção horizontal, onde se encontra um espelho inclinado com 45 graus em relação à horizontal. Observa-se que uma parcela do feixe é refletida em direção a um espelho na vertical, enquanto a outra parcela é transmitida através do espelho de 45 graus em direção a um espelho colocado atrás no mesmo plano. Os dois feixes perpendiculares entre si são refletidos novamente em direção ao espelho de 45 graus, um dos feixes é refletido, enquanto o outro é transmitido em direção a um detector de luz. O resultado esperado pela teoria ondulatória da luz seria uma defasagem, ou seja, as velocidades dos feixes seriam distintas ponderando que as direções de propagação eram distintas. Dessa maneira, um padrão destrutivo de interferência deveria ser observado. O resultado, como é sabido, foi nulo. Em outras palavras, a velocidade da luz medida era a mesma em ambas as direções. Assim sendo, estava abrindo o caminho para uma nova teoria cuja suposição da existência do éter era desnecessária.

Figura 4.1: Interferômetro de Michelson-Morley.



Fonte: <https://brasilescola.uol.com.br/fisica/a-questao-eter-luminifero.htm>. Acesso em 11 de maio de 2022.

4.2 Espaço vetorial

Um espaço vetorial real V é um conjunto cujos elementos são denominados vetores munido de uma operação de adição entre seus elementos resultando em um elemento pertencente a V (operação fechada). Além disso, o produto de um vetor por um número real qualquer também é definido resultando em um vetor pertencente ao conjunto V.

Definição 4.1. Dado um conjunto não vazio, V, cujo os elementos μ e σ são vetores as operações de adição entre vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar real satisfazem as seguintes propriedades:

1. $\mu + \sigma \in V$ para todo $\mu, \sigma \in V$.
2. $\alpha\mu \in V$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mu \in V$.

Além disso, essas operações no conjunto V devem satisfazer os seguintes axiomas. Em relação à adição

1. $(\mu + \sigma) + \omega = \mu + (\sigma + \omega)$, para todo $\mu, \sigma, \omega \in V$ (propriedade associativa).
2. $\mu + \sigma = \sigma + \mu$, para todo $\mu, \sigma \in V$ (propriedade comutativa).
3. Existe o elemento $0 \in V$ tal que $\mu + 0 = \mu$ para todo $\mu \in V$ (propriedade elemento neutro da adição).
4. Dado $\mu \in V$ existe $(-\mu) \in V$ tal que $\mu + (-\mu) = 0$ (elemento simétrico).

Em relação à multiplicação

1. $(\alpha\beta)\mu = \alpha(\beta\mu)$, para todo $\mu \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (propriedade associativa).

2. $(\alpha + \beta)\mu = \alpha\mu + \beta\mu$, para todo $\mu \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (propriedade distributiva).

3. $\alpha(\mu + \sigma) = \alpha\mu + \alpha\sigma$, para todo $\mu, \sigma \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (propriedade distributiva).

4. $1\mu = \mu$ para todo $\mu \in V$ (propriedade elemento neutro multiplicativo).

O conjunto V munido das operações adição entre vetores e a multiplicação de um vetor por escalar satisfazendo os axiomas acima será denominado espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

4.3 Base de um espaço vetorial

O conceito de base de um espaço vetorial é muito importante em álgebra linear. Para adquirir uma compreensão mais adequada acerca desse conceito é necessário definir combinação linear de vetores.

Definição 4.2. Sejam os elementos $v_1, \ldots, v_n$ do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{R}$ e os escalares $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. O vetor $v \in V$ dado por $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ será dito combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_n$.

Definição 4.3. O gerador dos vetores $v_1, \ldots, v_n$ do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{R}$ é o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores, ou seja,

$$\text{Gerador}(v_1, \ldots, v_n) = \{v \in V \text{ tal que } v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, \text{ para todo } a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Da definição 4.2 surge a seguinte indagação: dado um conjunto de vetores qualquer do espaço vetorial, todos os vetores deste espaço vetorial podem ser escritos como combinação linear deste conjunto? A resposta se apresenta com os conceitos de dependência e independência linear.

Definição 4.4. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$. Se a combinação linear $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$ admitir apenas a solução trivial nula, $a_1 = \cdots = a_n = 0$, diremos que o conjunto de vetores é linearmente independente. Caso contrário, diremos que o conjunto é linearmente dependente.

Definição 4.5. O conjunto $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ será uma base do espaço vetorial V se, e somente se,

1. B é linearmente independente;

2. B gera o espaço vetorial V, ou seja, Gerador(B)=V.

Assim, uma base é formada pelo menor conjunto de vetores linearmente independentes possível para gerar todo o espaço vetorial. O número de vetores em uma base será denominado de dimensão do espaço vetorial.

4.4 Espaço vetorial com produto interno

Nesta seção iremos apresentar os conceitos de função bilinear, forma bilinear e forma quadrática.

Definição 4.6. Uma função $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ de duas variáveis definida em um espaço vetorial V é dita bilinear se, e somente se, é linear em relação a cada uma das variáveis. Isto é,

1. $\varphi(x_1 + \alpha x_2, y) = \varphi(x_1, y) + \alpha\varphi(x_2, y)$.

2. $\varphi(x, y_1 + \alpha y_2) = \varphi(x, y_1) + \alpha\varphi(x, y_2)$.

para todo $x_1, x_2, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base qualquer do espaço vetorial V. Dado os vetores $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ e $y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n$, a função bilinear $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ assume a forma

$$\varphi(x, y) = \varphi(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n, y_1e_1 + \ldots + y_ne_n)$$

Pela propriedade de linearidade segue que

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_iy_j\varphi(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

onde os coeficientes $a_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$ dependem apenas da base considerada. Dessa maneira, a base irá fixar a representação da função bilinear.

Definição 4.7. Seja a função $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear definida no espaço vetorial V. A função $f : V \to \mathbb{R}$ definida por $f(v) = \varphi(v, v)$ para todo $v \in V$ é denominada de forma quadrática associada a φ.

Verificamos facilmente que dada a forma quadrática f podemos determinar φ de maneira única. De fato,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \varphi(x+y, x+y) \\ &= \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y). \end{aligned}$$

Como φ é simétrica segue que

$$f(x+y) = \varphi(x, x) + 2\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$$

Por outro lado, $\varphi(x,x) = f(x)$ e $\varphi(y,y) = f(y)$. Logo,

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right). \tag{4.1}$$

Definição 4.8. Seja V um espaço vetorial. Um produto interno é uma função $\langle , \rangle$: $V \times V \to \mathbb{R}$ de duas variáveis definida em V satisfazendo:

1. $\langle , \rangle$ é bilinear.
2. $\langle , \rangle$ é simétrica, ou seja, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ para todo $u, v \in V$.
3. $\langle u, u\rangle \geqslant 0$ para todo $u \in V$ e $\langle u, u\rangle = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Dizemos $\langle , \rangle$ é positivo definido.

Definição 4.9. Dado um vetor x de um espaço vetorial V, denominamos norma de x, o número real não-negativo, indicado por $|x|$ definido por $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$

Definição 4.10. O ângulo θ formado entre dois vetores x e y é definido por

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{|x| \,.\, |y|}.$$

Dois vetores de um espaço vetorial são ditos ortogonais entre si se, e somente se, o produto interno entre eles é igual a zero.

Definição 4.11. Sejam V um espaço vetorial e B uma base de V. A base B é dita ortogonal se, e somente se, seus vetores são ortogonais entre si, dois a dois. Isto é,

$$\langle v_i, v_j\rangle = 0, \text{ para todo } v_i, v_j \in V \text{ com } v_i \neq v_j.$$

Mais ainda, se

$$\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

então a base será dita ortonormal.

Veremos agora uma importante propriedade da forma quadrática.

Teorema 4.12. *Seja $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ uma função quadrática qualquer em um espaço vetorial de dimensão n. Existe uma base ortonormal na qual a forma quadrática se reduz a soma de quadrados, ou seja, uma base na qual todos os coeficientes dos produtos das coordenadas diferentes do vetor x são iguais a zero.*

Demonstração. Ver Golovina (1980). □

Deve-se lembrar que diferentes bases irão levar a diferentes diagonalizações de uma forma quadrática. No entanto, tem-se garantido o teorema a seguir.

Teorema 4.13 (Lei de inércia das formas quadráticas). *Se uma forma quadrática se reduz a soma de quadrados em duas bases distintas, o número de quadrados positivos e quadrados negativos são iguais nestas duas bases.*

Demonstração. A demonstração desse resultado será feita por absurdo. Seja a base ordenada $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subset V$ sendo a forma quadrática:

$$f(v) = \lambda_1|v_1|^2 + \lambda_2|v_2|^2 + \ldots + \lambda_s|v_s|^2 - \lambda_{s+1}|v_{s+1}|^2 - \ldots - \lambda_n|v_n|^2.$$

Considere outra base $B' = \{e'_1, \ldots, e'_n\} \subset V$ com a forma quadrática dada por:

$$f(v) = \lambda'_1|v'_1|^2 + \lambda'_2|v'_2|^2 + \ldots + \lambda'_{s'}|v'_{s'}|^2 - \lambda_{s'+1}|v'_{s'+1}|^2 - \ldots - \lambda'_n|v'_n|^2.$$

Suponha por absurdo que $s \neq s'$. Assim temos duas possibilidades, $s > s'$ ou $s' > s$ (caso análogo). Sejam M o subespaço gerado por $\{v_1, \ldots, v_s\}$ e M' o subespaço gerado por $\{v'_1, \ldots, v'_s\}$. Como $s > s'$, o conjunto $\{v_1, \ldots, v_s, v'_{s+1}, \ldots . v'_n\}$ será linearmente dependente pois contém mais de n vetores. Segue assim que

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i + \sum_{i=s'+1}^{n} \alpha_i v'_i = 0$$

terá solução não nula. Logo, existe um vetor v não nulo tal que

$$v = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i v_i \in M \quad \text{ou} \quad v = -\sum_{i=s'+1}^{n} \alpha_i v'_i = \sum_{i=s'+1}^{n} (-\alpha_i) v'_i \in M'.$$

Assim, para a diagonalização na base B segue que $f(v) > 0$ enquanto para a diagonalização na base B' tem-se $f(v) < 0$, o que é um absurdo. Para o caso com autovalores negativos o raciocínio é análogo. □

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão finita n e f uma forma quadrática. Para todo $x \in V$ com $x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ segue pela Lei da Inércia que:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

com $p + q = n$.

Vamos a partir desse momento nos restringir aos espaços vetoriais V de dimensão 2, isto é, bidimensionais. Se $x = x_1e_1 + x_2e_2$ com $\{e_1, e_2\}$ uma base ordenada de V então, segue que p e q podem assumir os seguintes valores.

- $p = 2$ e $q = 0$ e $f(x) = x_1^2 + x_2^2$. Este espaço é denominado espaço euclidiano.
- $p = 0$ e $q = 2$ e $f(x) = -x_1^2 - x_2^2$ também será denominado espaço euclidiano

- $p = 1$ e $q = 0$ e $f(x) = x_2^2$ é denominado de espaço semi-euclidiano.
- $p = 0$ e $q = 1$ e $f(x) = -x_2^2$ também será denominado espaço semi-euclidiano.
- $p = 1$ e $q = 1$ e $f(x) = x_1^2 - x_2^2$ será denominado de espaço pseudo-euclidiano.

Os espaços semi-euclidianos não serão tratados.

4.5 Espaço vetorial bidimensional euclidiano

Seja V um espaço vetorial bidimensional. Sejam os vetores $x = x_1e_1 + x_2e_2$ e $y = y_1e_1 + y_2e_2$ na base canônica $\{e_1, e_2\}$ com forma quadrática dada por (GOLOVINA, 1980)

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f((x_1+y_1, x_2+y_2)) \\ &= (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 \\ &= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2) + 2(x_1y_1 + x_2y_2) + (y_1^2 - y_2^2) \\ &= f(x) + 2(x_1y_1 + x_2y_2) + f(y). \end{aligned}$$

Segue que

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \frac{1}{2}\left(f(x+y) - f(x) - f(y)\right).$$

Pela relação (4.1) resulta que

$$\varphi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Verificamos facilmente que φ satisfaz as condições para produto interno. Podemos então definir

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Seja V espaço vetorial real munido de um produto interno $\langle , \rangle$ e $A : V \to V$ transformação (operador) linear de V em V. Diremos que A é uma transformação ortogonal se esta preservar o produto interno, ou seja,

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle, \text{ para todo } x, y \in V$$

Sejam $B = \{e_1, e_2\}$ uma base ortonormal de V. Aplicando a transformação linear A

ortogonal, temos que

$$\begin{cases} \langle Ae_1, Ae_1 \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = 1 \\ \langle Ae_2, Ae_2 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1 \\ \langle Ae_1, Ae_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Se denotarmos

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 \\ Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 \end{cases} .$$

Segue das definições de produto interno que

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Elevando ao quadrado a terceira equação de (4.3) temos

$$a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{21}^2 a_{22}^2 + 2a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} = 0. \tag{4.4}$$

Multiplicando a primeira e segunda expressões de (4.3) e substituindo em (4.4) obtemos

$$1 - a_{11}^2 a_{22}^2 - a_{12}^2 a_{21}^2 + 2a_{11}a_{22}a_{12}a_{21} = 0.$$

Logo,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \pm 1$$

Desta forma, existem duas possibilidades para representação matricial de A:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

A matriz A é denominada ortogonal.

4.6 Espaço vetorial bidimensional pseudo-euclidiano

Seja V um espaço vetorial bidimensional. Sejam os vetores $x = x_1e_1 + x_2e_2$ e $y = y_1e_1 + y_2e_2$ na base canônica $\{e_1, e_2\}$ com forma quadrática dada por (GOLOVINA, 1980)

$$f(x) = x_1^2 - x_2^2.$$

Analogamente ao que foi visto na seção 4.5 temos que

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f((x_1+y_1, x_2+y_2)) \\ &= (x_1+y_1)^2-(x_2+y_2)^2 \\ &= x_1^2+2x_1y_1+y_1^2-x_2^2-2x_2y_2-y_2^2 \\ &= (x_1^2-x_2^2)+2(x_1y_1-x_2y_2)+(y_1^2-y_2^2) \\ &= f(x)+2(x_1y_1-x_2y_2)+f(y). \end{aligned}$$

Segue que

$$x_1y_1-x_2y_2=\frac{1}{2}\left(f(x+y)-f(x)-f(y)\right).$$

Pela equação (4.1) resulta que

$$\varphi(x,y)=x_1y_1-x_2y_2.$$

Neste caso, φ não satisfaz as condições para produto interno positivo definido uma vez que, $\varphi(x,x)=x_1^2-y_1^2=0$ não temos uma única solução trivial nula. Mais ainda, φ nem sempre é positivo. Vamos retirar então a condição de positivo definido para o produto interno e continuamos agora definindo

$$\langle x,y\rangle = x_1y_1-x_2y_2.$$

Denotaremos o espaço vetorial bidimensional com este (pseudo-)produto interno por espaço vetorial bidimensional pseudo-euclidiano.

Seja $T:V\to V$ transformação linear. Diremos que T é uma transformação pseudo-ortogonal se esta preserva o produto interno, ou seja,

$$\langle Tx,Ty\rangle=\langle x,y\rangle,\ \text{ para todo } x,y\in\mathbb{R}$$

Seja $B=\{e_1,e_2\}$ uma base ortonormal de V, isto é,

$$\begin{cases} \langle e_1,e_1\rangle = \langle (1,0),(1,0)\rangle = 1, \\ \langle e_2,e_2\rangle = \langle (0,1),(0,1)\rangle = -1, \\ \langle e_1,e_2\rangle = \langle (1,0),(0,1)\rangle = 0. \end{cases}$$

A transformação linear T é dada por

$$\begin{cases} Te_1=a_{11}e_1+a_{21}e_2, \\ Te_2=a_{12}e_1+a_{22}e_2. \end{cases}$$

Assim, segue que

$$\begin{cases} \langle Te_1, Te_1\rangle = \langle e_1, e_1\rangle = 1, \\ \langle Te_2, Te_2\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = -1, \\ \langle Te_1, Te_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 0. \end{cases}$$

Então, da definição de produto interno são obtidas as seguintes equações,

$$\begin{cases} a_{11}^2 - a_{21}^2 = 1, \\ a_{12}^2 - a_{22}^2 = -1, \\ a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Da primeira e segunda equação em (4.5), segue que $a_{11} \neq 0$ e $a_{22} \neq 0$. Da terceira equação (4.5) resulta em

$$\frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

Para simplificar a notação representaremos as razões anteriores pela letra grega $\beta \in \mathbb{R}$. Desse modo, obtemos as igualdades,

$$a_{12} = \beta a_{22} \quad \text{e} \quad a_{21} = \beta a_{11}. \tag{4.6}$$

Substituindo na primeira e segunda equação de (4.5) obtemos

$$\begin{aligned} a_{11}^2 - \beta^2 a_{11}^2 &= 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{11} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta^2 a_{22}^2 - a_{22}^2 &= -1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_{22} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

A matriz da transformação linear A associada a transformação T com relação a base ortonormal $\{e_1, e_2\}$, com os resultados obtidos será dada por

$$A = \begin{pmatrix} \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Fixando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Segue que as demais matrizes podem ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ -\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.7 Transformações de Lorentz

No ano de 1905, o físico alemão Albert Einstein (1879-1955) publicou o artigo "Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento" na revista Annalen der Physik[1], onde afirma na primeira parte do seu artigo que a eletrodinâmica, conforme era entendida àquela época, apresentava assimetrias. Além disso, muitos experimentos tinham sido mal sucedidos na tentativa de medir a velocidade da Terra em relação a um meio mecânico, o éter, para a propagação da luz. Einstein, partiu do pressuposto que não existe repouso absoluto, conforme apresentava a teoria de Fresnel (PIATTELLA, 2020). Mais ainda, expôs dois postulados em que afirmara que eliminariam as contradições da teoria de Maxwell em relação aos corpos em repouso. Ambos os postulados afirmam (MOREIRA, 2005):

1. As leis da física não se modificam, ou seja, são covariantes.

2. A velocidade da luz independe do referencial, ou seja, é invariante.

Na segunda parte do referido artigo, Einsten expõe que um sistema em repouso é qualquer sistema de coordenadas na qual as leis de Newton são válidas e ainda afirma que o movimento de um ponto material depende das coordenadas de posição em função do tempo. Entretanto, Einstein vê a necessidade de discorrer a respeito da definição do conceito de tempo, apontando que eventos simultâneos apenas definem o tempo no local e apresenta um exemplo simples na tentativa de tornar a ideia mais didática segundo o exemplo:

> *Esse trem chega aqui às 7 horas, ou seja, o ponteiro menor do meu relógio indica 7 e a chegada do trem são eventos simultâneos.*

[1] Ver Piattella (2020) a tradução para o português.

No artigo, Einstein defini uma maneira para sincronizar relógios iguais feitos em lugares distintos, considerando para isso, um sinal luminoso no qual admite que a velocidade da luz é uma constante universal. Segue aplicando o principio da relatividade na cinemática discorrendo acerca da relatividade dos comprimentos, apontando que o comprimento de uma barra rígida em um referencial de repouso tem comprimento (L), porém se a mesma barra estivesse em um referencial que se move com velocidade cujo valor é próximo ao valor da velocidade da luz (c), um observador no referencial de repouso perceberia um tamanho menor do que (L), ou seja, a contração do espaço. No artigo, Einstein afirma que um relógio no equador terrestre é mais lento que um outro idêntico localizado nos polos (PIATTELLA, 2020).

Sendo assim, antes de aplicar o princípio da relatividade na eletrodinâmica de Maxwell, o que ocorre na terceira e quarta parte do artigo e que é o objeto principal da investigação, Einstein define o conceito de tempo e disserta a respeito da cinemática nesse novo contexto. Logo, pode-se afirmar que esse novo paradigma unifica as leis da mecânica, da eletricidade, magnetismo e óptica. Cabe salientar que, por um caminho alternativo, também chegou ao resultado já conhecido anteriormente com as transformações de Lorentz, o que complementou a teoria e assentiu que as leis físicas conhecidas até então se tornassem covariantes (MOREIRA, 2005).

A relatividade einsteniana considera que as leis da física não se alteram em referenciais inerciais distintos (1º postulado) e que a velocidade da luz no vácuo é constante para quaisquer observadores independente da velocidade da fonte (2º postulado). Einstein também definiu o tempo com base do conceito de simultaneidade (PIATTELLA, 2020). Sendo assim, a descrição das coordenadas de um evento qualquer, passa a ter as três coordenadas de posição (x, y, z) e a coordenada do tempo t. Este sistema com quatro coordenadas é denominado espaço-tempo. Observamos que ocorre uma mudança de paradigma em relação a Física cuja a relatividade galileana é adotada, isto é, o tempo deixa de ser absoluto em todos os referenciais inerciais.

Sejam dois sistemas referenciais inerciais S e S' e, por simplicidade, bidimensional com origem comum de ambos temos $x = x' = 0$ para o tempo $t = t' = 0$. Neste momento, envia-se um sinal luminoso que pode ser captado no ponto x e instante t do sistema S, e no ponto x' e instante t' no sistema S'. Conforme foi postulado na Relatividade de Einstein a velocidade da luz c é um invariante. Logo,

$$\left|\frac{x}{t}\right| = \left|\frac{x'}{t'}\right| = c$$

Da igualdade resulta que $x^2 - c^2t^2 = 0$ e $x'^2 - c^2t'^2 = 0$. Consideramos agora o primeiro postulado da relatividade que afirma que as leis da física são covariantes, ou seja, as equações apresentam a mesma forma independente do sistema de referência inercial. Consideramos, por conveniência e simplicidade de escrita, que no sistema S, $x = x_1$ e

$ct = x_2$ ($x' = x'_1$ e $ct' = x'_2$). Então, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ e $x'^2_1 - x'^2_2 = 0$. Ora, essas expressões são o quadrado da distância entre dois pontos (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) em um plano pseudo-euclidiano. Sendo assim, a matriz de mudança da base de S para S' é pseudo-ortogonal, conforme discutido na seção 4.6 segue que

$$A = \begin{pmatrix} \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \pm\dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

Desta forma, os vetores da base S' podem ser escritos como

$$\begin{aligned} e'_1 &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}(e_1 + \beta e_2) \\ e'_2 &= \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}(\beta e_1 + e_2) \end{aligned}$$

Consideremos primeiramente o caso para o qual os denominadores são positivos. A matriz mudança de base torna-se

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

As coordenadas (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) podem ser escritas da seguinte forma,

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x'_1 + \beta x'_2) \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta x'_1 + x'_2) \end{aligned}$$

Substituindo pela notação $x_1 = x$, $x_2 = ct$, $x'_1 = x'$ e $x'_2 = ct'$ as equações tornam-se

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x' + \beta ct') \\ t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\dfrac{\beta x'}{c} + t'\right) \end{cases}.$$

Expressando as equações inversas, temos

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}(x + \beta ct) \\ t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(-\dfrac{\beta x}{c}\right) + t \end{cases}.$$

Cabe salientar que utilizando a métrica pseudo-euclidiana, considerando apenas os termos positivos da matriz mudança de base foi possível deduzir as transformações de Lorentz.

5 O grupo de Lorentz

Neste capítulo será apresentado as principais definições de teoria de grupos, tais como, lei de composição interna, propriedades de uma operação, grupóide, semigrupo, monóide, grupos, subgrupos e homomorfismo de grupo. Com isso, pretende-se preparar o leitor para compreender, sem grandes dificuldades, os grupos de Galileu e de Lorentz e, consequentemente, ampliar o seu repertório matemático ao lidar com as leis do eletromagnetismo.

5.1 Lei de composição interna e propriedades de uma operação

Definição 5.1. Seja G um conjunto não vazio. Uma operação fechada definida em G é uma função $* : G \times G \to G$, ou seja, para cada par ordenado (x, y) de $G \times G$, pela operação $*$, corresponde ao elemento $x * y$ em G.

As operações de adição, subtração, multiplicação e divisão no conjunto dos números reais são exemplos de operações fechadas definidas em $\mathbb{R}$.

Seguem as propriedades de uma operação:

(a) (Idempotência) Diz-se que uma operação $*$ em G é idempotente se, e somente se, para todos os elementos x de G tem-se $x * x = x$.

(b) (Associativa) Diz-se que a operação $*$ em G é associativa se para todos os elementos $x, y, z \in G$, tem-se $x * (y * z) = (x * y) * z$.

(c) (Comutativa) Diz-se que a operação $*$ em G é comutativa se para todos os elementos $x, y \in G$, tem-se $x * y = y * x$.

(d) (Existência do elemento neutro) Diz-se que $e \in G$ é elemento neutro para a operação $*$ em G se, e somente se, para todo elemento x em G tem-se $x * e = e * x = x$.

(e) (Existência do elemento simétrico) Diz-se que $x \in G$ é elemento simetrizável para a operação $*$ em G, que possui elemento neutro e, se existir $x' \in G$ tal que $x * x' = x' * x = e$.

(f) (Elemento regular) Diz-se que um elemento $g \in G$ é regular, ou seja, simplificável em relação a operação $*$ se, e somente se, para todos os elementos $x, y \in G$, tem-se $x * g = y * g \Rightarrow x = y$ e $g * x = g * y \Rightarrow x = y$.

Considerando os conceitos abordados acerca da operação fechada e suas propriedades, seguimos com as seguintes definições. Para maiores detalhes ver (FONSECA, 2011; PINHEIRO; SILVA, 2016).

Definição 5.2. Seja G um conjunto não vazio, munido de uma operação $*$:

(a) O par $(G, *)$ denomina-se grupóide.

(b) $(G, *)$ com a operação $*$ satisfazendo a propriedade associativa é denominado semigrupo.

(c) $(G, *)$ com a operação $*$ satisfazendo as propriedades associativa e existência do elemento neutro é denominado monóide.

Definição 5.3. O conjunto G não vazio munido de uma operação $*$ que satisfaz as propriedades associativa, existência de elemento neutro e elemento simétrico será denominado grupo.

Definição 5.4. Se o par $(G, *)$ é um grupo e a operação $*$ é comutativa, G será denominado grupo comutativo ou abeliano.

Seja $(G, *)$ um grupo. Então as seguintes propriedades estão satisfeitas:

(a) O elemento neutro do grupo $(G, *)$ é único.

(b) Um elemento qualquer do grupo $(G, *)$ tem um único elemento simétrico.

(c) Quaisquer que sejam os elementos x e y do grupo $(G, *)$, admite-se $(x * y)' = y' * x'$.

(d) Todos os elementos do grupo $(G, *)$ são regulares.

5.2 Subgrupos

Definição 5.5. Sejam o grupo $(G, *)$ e $H \subset G$ com $H \neq \emptyset$. Então, o par $(H, *)$ será dito subgrupo do grupo $(G, *)$ se satisfaz as seguinte condições:

(a) Quaisquer que sejam os elementos $x, y \in H$, então $x * y \in H$;

(b) O par $(H, *)$ é um grupo.

Cabe salientar as propriedades dos subgrupos, pois estas permitem identificar o subgrupo de maneira mais ágil. Os dois teoremas, apresentados a seguir, são relativos as mencionadas propriedades.

Teorema 5.6. *O elemento neutro de um grupo coincide com os elementos neutros de cada um de seus subgrupos.*

Teorema 5.7. *O simétrico de qualquer elemento no subgrupo coincide com o seu simétrico no grupo, isto é, se* $x * x'_G = x'_G * x = e$ *então* $x * x'_H = x'_H * x = e$. *Sendo todo* $x \in G$ *elemento regular, então* $x'_G = x'_H$

Para a demonstração dos teoremas 5.6 e 5.7 ver (FONSECA, 2011).

5.3 Homomorfismo de grupos

Um homomorfismo de grupos é uma função entre dois grupos que preserva as respectivas operações, isto é, as operações dos grupos podem ser distintas contanto que satisfaçam a estrutura dos grupos (YARTEY, 2017).

Definição 5.8. Sejam os grupos $(G, *)$ e $(J, \otimes)$, uma aplicação $f : G \to J$ é um homomorfismo de G em J, quando ela é compatível com a estrutura dos grupos, ou seja, $f(x * y) = f(x) \otimes f(y), \forall x, y \in G$.

Por exemplo, o grupo real aditivo $(R, +)$ pode se relacionar por meio de uma função com o grupo real positivo multiplicativo $(R_+, *)$. Sejam os elementos x e $y \in (R, +)$, a estrutura deve ser respeitada $f(x + y) = f(x) * f(y)$. Isso é possível através da função exponencial $f(x) = e^x$. Assim, $f(x + y) = e^{x+y} = e^x * e^y = f(x) * f(y)$.

5.4 Grupo de matrizes m x n

Considera-se que K represente os conjuntos dos inteiros ($\mathbb{Z}$), dos racionais ($\mathbb{Q}$), dos reais ($\mathbb{R}$) e complexos ($\mathbb{C}$). Ademais, tem-se que a matriz $M_{m\times n}(K)$ represente as matrizes de elementos de K com m representando o número de linhas e n o número de colunas da matriz. Com base nas considerações iniciais será apresentado o grupo aditivo das matrizes $m \times n$, estando as matrizes genéricas A e B abaixo,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Então,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

O conjunto das matrizes $M_{m\times n}(K)$ munido da operação de adição satisfaz as seguintes propriedades (YARTEY, 2017):

(a) $(A + B) + C = A + (B + C)$, para quaisquer $A, B, C \in M_{m\times n}(K)$. (propriedade associativa).

(b) Existe a matriz nula $0 \in M_{m\times n}$ tal que $A + 0 = 0 + A = A$, para qualquer $A \in M_{m\times n}(K)$ (existência do elemento neutro para a adição).

(c) Se para todo $A \in M_{m\times n}(K)$, tem-se $A + (-A) = (-A) + A = 0$, desta forma, $(-A)$ é o elemento simétrico. (existência do elemento simétrico).

(d) $A + B = B + A$, para todo $A, B \in M_{m\times n}(K)$ (propriedade comutativa).

Assim, $M_{m\times n}(K)$ munido da adição é um grupo. Além disso, a operação de adição é comutativa. Logo, $(M_{m\times n}, +)$ é um grupo abeliano.

Observamos que para o conjunto das matrizes $M_{m\times n}(K)$ munido da operação de multiplicação $\cdot$ usual de matrizes também irá satisfazer as propriedades associativa, existência do elemento neutro considerando-se a matriz identidade I_{id} como elemento neutro. Entretanto, a propriedade do elemento simétrico apenas é satisfeita sob uma regra específica, sendo está descrita por um teorema da teoria dos determinantes.

Teorema 5.9. *A matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ é invertível se, e somente se, $det(A) \neq 0$.*

Pode-se expressar a propriedade do elemento simétrico da seguinte forma: se $A \in M_{n\times n}(K)$, tem-se $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_{id}$, sendo, A^{-1} o elemento simétrico. Porém, tal afirmação somente será possível se o determinante da matriz A for diferente de zero, indicando que a matriz inversa existe. Desta forma, as matrizes quadradas de ordem n cujo determinante é distinto de zero são indicadas pela nomenclatura $GL_n(K) = \{A \in M_{n\times n} : \det A \neq 0\}$, ou seja, o conjunto das matrizes invertíveis. Cabe ressaltar, que os grupos lineares de grau n não são comutativos para $n > 1$, isto é, não são grupos abelianos.

5.5 Grupo de Galileu

Considerando-se uma partícula livre, ou seja, uma partícula que não sofre ação de quaisquer forças, pode-se afirmar que a partícula está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Uma descrição mais assertiva desta partícula é obtida através de três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal, onde $x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Assim, as coordenadas de espaço-tempo da partícula podem ser representadas por uma matriz coluna (ROCHA; RIZZUTI; MOTA, 2013).

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}.$$

Pode-se descrever a partícula livre em outros sistemas de referências. Desta forma, a partícula descrita pelo sistema de referências x^μ pode ser descrita pelo sistema x'^ν. A associação entre os dois sistemas de referências x^μ e x'^ν é obtida por meio de uma transformação linear, conforme representado a seguir.

$$x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'^0 \\ -v_1 x'^0 + x'^1 \\ -v_2 x'^0 + x'^2 \\ -v_3 x'^0 + x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix}.$$

Assim, $x^\mu = \sum_{\nu=0}^{3} G^\mu_\nu x'^\nu$ com $\mu = 0, \ldots 3$.

Associando-se a matriz da transformação linear G^μ_ν com o grupo linear de grau 4 temos $G_{4\times4} = \left\{ G^\mu_\nu \in GL_4(\mathbb{R}), G^\mu_\mu = 1, G^i_0 = v_i \right\}$.

Observando as propriedades de grupos (multiplicativo) pode-se afirmar que G é um grupo, denominado grupo de Galileu. De fato, G satisfaz:

(a) Produto fechado em G, pois $G(v) \cdot G(v') = G(v'')$, onde $v'' = v + v'$;

(b) O produto usual de matrizes é associativo;

(c) O elemento neutro é a matriz identidade;

(d) O $\det G \neq 0$. Logo, para todo $G(v)$ em G, o elemento simétrico é igual a $G^{-1}(v) = G(-v)$

Considerando-se o conjunto G dotado da operação multiplicação temos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v'_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v'_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v'_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_1 - v'_1 & 1 & 0 & 0 \\ -v_2 - v'_2 & 0 & 1 & 0 \\ -v_3 - v'_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, a função que preserva a multiplicação será dada pela seguinte propriedade: $f(G_v \cdot G_{v'}) = f(G_v) + f(G_{v'})$. Tem-se um homomorfismo que mapeia os elementos de $G(\nu)$ de volta para si (YARTEY, 2017).

5.6 Grupo de Lorentz

A Teoria da Relatividade Restrita é descrita por quatro coordenadas, três coordenadas são relativas ao espaço e uma coordenada é relativa ao tempo. Assim, o conjunto das transformações entre referenciais será representado por um conjunto de matrizes quadradas L de ordem 4 cujos elementos relativos ao espaço e ao tempo são números reais.

O produto usual de matrizes deve satisfazer a seguinte restrição (ROCHA; RIZZUTI; MOTA, 2013)

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$$

onde η é uma matriz diagonal fixa do tipo

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$$

Observando as propriedades de grupos pode-se afirmar que L é um grupo, denominado grupo de Lorentz definido como

$$L = \left\{ \Lambda \in GL_4(\mathbb{R}), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \text{ e } \det \Lambda = \pm 1 \right\}.$$

As seguintes propriedades que caracterizam um grupo (multiplicativo) são satisfeitas:

(a) Produto fechado em L, pois $(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \Lambda_1^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta$, para todo $\Lambda_1, \Lambda_2 \in L$;

(b) O produto usual de matrizes é associativo;

(c) O elemento neutro é a matriz identidade;

(d) O $\det \Lambda = \pm 1$. Logo, para todo Λ em L, existe o elemento simétrico igual a Λ^{-1}.

Vamos nos restringir a um espaço-tempo bidimensional. Dado uma partícula descrita pelo sistema de referências x^μ, a mesma pode ser descrita pelo sistema x'^μ. A associação entre os dois sistemas de referências é dada pela transformação linear

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\mu.$$

Representando a mudança de referencial inercial na forma matricial e, considerando apenas uma coordenada de espaço e outra tempo, ambos os números pertencentes ao conjunto dos números reais. O conjunto das transformações será dado por

$$H = \left\{ \Lambda^\mu_\nu \in GL_2(\mathbb{R}), \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \det \Lambda = 1 \right\}.$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -(\Lambda^0_0)^2 + (\Lambda^1_0)^2 & -\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 + \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 \\ -\Lambda^0_0 \Lambda^0_1 + \Lambda^1_0 \Lambda^1_1 & -(\Lambda^0_1)^2 + (\Lambda^1_1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos as seguinte condições:

$$(\Lambda^0_0)^2 - (\Lambda^1_0)^2 = 1 \tag{5.1}$$
$$(\Lambda^1_1)^2 - (\Lambda^0_1)^2 = 1 \tag{5.2}$$
$$\Lambda^1_0\Lambda^1_1 - \Lambda^0_0\Lambda^0_1 = 0 \tag{5.3}$$

As condições (5.1) e (5.2) garantem que $\Lambda^0_0 \neq 0$ e $\Lambda^1_1 \neq 0$ respectivamente. Assim, da condição (5.3) segue que

$$\Lambda^1_0 = \frac{\Lambda^0_0}{\Lambda^1_1}\Lambda^0_1.$$

Vamos agora determinar a matriz inversa de Λ. Sabemos que, como $\det \eta \neq 0$, segue que

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \Leftrightarrow \eta^{-1}\Lambda^T\eta\Lambda = \eta^{-1}\eta.$$

Multiplicando à direita por Λ^{-1} obtemos

$$\eta^{-1}\Lambda^T\eta\Lambda\Lambda^{-1} = \eta^{-1}\eta\Lambda^{-1}$$

e portanto,

$$\eta^{-1}\Lambda^T\eta = \Lambda^{-1}.$$

Dessa maneira determinamos a matriz Λ^{-1}.

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 \\ -\Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Por outro lado, a matriz inversa Λ^{-1} pode ser obtida usando o método de inversão por matriz adjunta. Esse método se baseia no teorema representado pela equação $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \cdot \overline{M}$, onde M^{-1} é a matriz inversa, M é a matriz e $\overline{M}$ é a matriz adjunta. Desta forma, considerando a condição na qual $\det \Lambda = \Lambda^0_0\Lambda^1_1 - \Lambda^0_1\Lambda^1_0 = +1$. Segue que

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda^1_1 & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^1_0 & \Lambda^0_0 \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

Conclui-se das igualdades (5.4) e (5.5) que $\Lambda^0_0 = \Lambda^1_1$ e $\Lambda^0_1 = \Lambda^1_0$.

Resolvendo o determinante e isolando o termo Λ^0_0 obtém-se,

$$\begin{aligned}\Lambda^0_0 \cdot \Lambda^1_1 - \Lambda^0_1 \cdot \Lambda^1_0 &= 1\\ \Lambda^0_0 \cdot \Lambda^1_1 &= 1 + (\Lambda^0_1)^2\\ \Lambda^0_0 &= \pm\sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2}.\end{aligned}$$

Consideremos agora uma partícula livre com velocidade v em um referencial inercial S com $x(0) = 0$. No instante de tempo t a posição da partícula nesse referencial será $x = x(t) = v \cdot t$. Quais serão as coordenadas dessa mesma partícula em um outro referencial S'? Sabe-se que uma transformação linear conforme descrito anteriormente do tipo $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\mu$ responde à pergunta. Apresentando a transformação linear em linguagem matricial temos,

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Descrevendo as coordenadas da partícula no sistema S', e considerando que a mesma está na origem do seu sistema referencial onde $x'(0) = 0$, no sistema S a partícula estará na posição x no instante de tempo t. Considerando o evento em questão e a matriz Λ como matriz de transformação e $x'^0 = c \cdot t'$ e $x^0 = c \cdot t$ para manter a simetria visto que são medidas de comprimento, segue que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^1_0 \\ \Lambda^0_1 & \Lambda^1_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2} & \Lambda^0_1 \\ \Lambda^0_1 & \sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Multiplicando as matrizes do segundo membro, temos

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2} + \Lambda^0_1 x \\ \Lambda^0_1 ct + x\sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2} \end{pmatrix}.$$

Para determinarmos Λ^0_1 faremos a seguinte consideração física. Seja uma partícula em repouso no sistema S' posicionada em $x' = 0$. Assim,

$$\begin{pmatrix} ct' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct\sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2} + \Lambda^0_1 x \\ \Lambda^0_1 ct + x\sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2} \end{pmatrix}.$$

Como resultado, obtém-se duas equações. Convenientemente, a segunda equação é escolhida por ser mais simples temos que

$$ct\Lambda^0_1 = -x\sqrt{1+(\Lambda^0_1)^2}.$$

Isolando o termo Λ_1^0

$$\Lambda_1^0 = \pm\frac{x}{\sqrt{c^2t^2 - x^2}}.$$

Lembrando que no referencial S a partícula em repouso em S' se movimentará com velocidade v e considerando $x = vt$ obtém-se:

$$\Lambda_1^0 = \pm\frac{v}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Definindo $\beta = \dfrac{v}{c}$ e escolhendo a raiz positiva de Λ_1^0 reescrevemos

$$\Lambda_1^0 = \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Assim,

$$\sqrt{1 + (\Lambda_1^0)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Substituindo as expressões obtidas na matriz Λ segue que,

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \dfrac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}.$$

que é a matriz obtida em (4.7). Verifica-se assim que as transformações de Lorentz definem o chamado grupo de Lorentz.

6 Considerações finais

A Relatividade Especial é um tema consolidado no meio científico, além de despertar curiosidade ao público leigo. No presente trabalho, buscou-se abordar a invariância de Galileu, além detalhar porque as leis da mecânica são idênticas em todos os referenciais inerciais. Posteriormente, o detalhamento dos aspectos históricos que antecederam o desenvolvimento das equações para o eletromagnetismo propostas por Maxwell até a encruzilhada, na qual a validade das leis do eletromagnetismo necessitava de um referencial preferencial e, consequentemente, demonstra-se que as leis do eletromagnetismo não são invariantes sob transformações de Galileu.

A solução para essa questão foi apresentada por Einstein ao considerar as leis do eletromagnetismo sob transformações de Lorentz. Tendo em vista os aspectos apresentados, ressalta-se que foi obtida a transformação de Lorentz via álgebra linear, uma solução bastante elegante para o problema. Em virtude do que foi mencionado buscou-se apresentar outro repertório matemático, os Grupos de Galileu e Lorentz, para uma compreensão mais ampla das leis do eletromagnetismo.

Portanto, os objetivos propostos foram alcançados, mas cabe ressaltar que esse assunto não se esgotou. Outros repertórios matemáticos, por exemplo, formas diferenciáveis, tensores e mecânica relativística podem ser estudados para revisitar esta dissertação em trabalhos futuros.

Referências

ASSIS, A. K. C. **Os fundamentos experimentais e históricos da eletricidade**. [S.l.: s.n.], 2010. Citado na página 19.

BARROS, A. et al. Sobre a contração de Lorentz-Fitzgerald. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 27, n. 4, p. 621–623, 2005. Citado na página 10.

BEZERRA, V. A. Maxwell, a teoria do campo e a desmecanização da Física. **Scientle Studia**, São Paulo, v. 4, n. 2, p. 177–220, 2006. Citado na página 10.

BOSS, S. L. B.; CALUZI, J. J. Os conceitos de eletricidade vítrea e eletricidade resinosa segundo Du Fay. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 29, n. 4, p. 635–644, 2007. Disponível em: <www.sbfisica.org.br>. Acesso em: 3 mar. 2021. Citado na página 18.

CALUZZI, J. J. Eletrodinâmica de Ampère: análise do significado e da evolução da força de ampère, juntamente com a tradução comentada de sua principal obra sobre eletrodinâmica. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis-SC, v. 29, n. 2, p. 345–349, 2012. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2012v29n2p345>. Citado na página 19.

CHAIB, J. P. M. C.; ASSIS, A. K. T. Experiência de Oersted em sala de aula. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 29, n. 1, p. 41–51, 2007. Disponível em: <www.sbfisica.org.br>. Acesso em: 8 mar. 2021. Citado na página 19.

DARRIGOL, O. **Electrodynamics from Ampère to Einstein**. New York-USA: [s.n.], 2000. Citado na página 11.

DIAS, P. M.; MORAIS, R. F. História da Física e ciências afins: os fundamentos mecânicos do eletromagnetismo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 36, n. 3, p. 3601, 2014. Citado na página 10.

ÉVORA, F. R. R. Discussão sobre a matéria celeste em Aristóteles. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 17, n. 2, jul.-dez. 2007. Citado na página 10.

FERREIRA, G. F. L. Um enfoque didático às equações de Maxwell. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 37, n. 2, p. 2301, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173721674>. Acesso em: 11 mar. 2021. Citado na página 20.

FONSECA, R. V. **Álgebra linear**. Belém: [s.n.], 2011. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.

GOLOVINA, L. I. **Algebra lineal y algunas de sus aplicaciones**. 2. ed. Moscou: [s.n.], 1980. Citado 3 vezes nas páginas 30, 32 e 33.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física volume 3: eletromagnetismo**. 10. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], 2016. Citado na página 20.

HESSEL, R.; FRESCHI, A. A.; SANTOS, F. J. Lei de indução de Faraday: uma verificação experimental. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 37, n. 1, p. 1506, 2015. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11173711719>. Acesso em: 8 mar. 2021. Citado na página 19.

JÚNIOR, R. S. M.; LORDÊLO, F. S. Uma análise de experimentos de corpos em movimento no éter sob a perspectiva da teoria ondulatória da luz de Fresnel. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 41, n. 2, 2019. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-REBF-2018-0208>. Citado na página 25.

MAGALHÃES, A. P. **Matéria elétrica e forma magnética: experimentos e concepções de William Gilbert no De Magnete**. 140 f. Tese (Doutorado em História da Ciência) — Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2007. Citado na página 18.

MARTINS, R. A. Alessandro Volta e a invenção da pilha: dificuldades no estabelecimento da identidade entre o galvanismo e a eletricidade. **Acta Scientiarum**, v. 21, n. 4, p. 823–835, 1999. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.4025/actascitechnol.v21i0.3079>. Citado na página 18.

MARTINS, R. A. O éter e a óptica dos corpos em movimento: a teoria de Fresnel e as tentativas de detecção do movimento da terra, antes dos experimentos de Michelson e Morley (1818-1880). **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis-SC, v. 29, n. 1, 2012. Disponível em: <https://doi.org/10.5007/2175-7941.2012v29n1p52>. Citado 3 vezes nas páginas 11, 25 e 26.

MORAIS, R. F. **A natureza da eletricidade (uma breve história)**. 84 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Física) — Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Citado na página 17.

MOREIRA, I. C. 1905: um ano miraculoso. **Física na Escola**, São Paulo, v. 6, n. 1, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

OBERZINER, A. P. B. **As equações de Maxwell e aplicações**. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008. Citado na página 20.

PIATTELLA, O. F. O artigo fundador da teoria da relatividade restrita. **Cadernos de Astronomia**, v. 1, n. 1, p. 157–176, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.47083/Cad.Astro.v1n1.31681>. Citado 2 vezes nas páginas 36 e 37.

PINHEIRO, A. J.; SILVA, P. C. L. **Introdução à álgebra linear**. Mossoró: [s.n.], 2016. Citado na página 41.

RAICIK, A. C. Galvani, Volta e os experimentos cruciais: a emblemática controvérsia da eletricidade animal. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 25, n. 1, p. 358–383, 2020. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.22600/1518-8795.ienci2020v25n1p358>. Citado na página 18.

RAICIK, A. C.; PEDUZZI, L. O. Q. Um resgate histórico e filosófico dos estudos de Stephen Gray. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v. 16, n. 1, p. 109–128, 2016. Citado na página 18.

ROBERTSON, H. P. Postulate versus observation in the Special Theory of Relativity. **Rewiews of Modern Physics**, v. 21, n. 3, p. 378–382, 1949. Citado na página 11.

ROCHA, A. N.; RIZZUTI, B. F.; MOTA, D. S. Transformações de Galileu e de Lorentz: um estudo via teoria de grupos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 35, n. 4, p. 4304, 2013. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172013000400004>. Acesso em: 22 abr. 2021. Citado 2 vezes nas páginas 43 e 45.

ROCHA, F. J.; SANTIAGO, S. B. A compreensão da primeira lei de Ohm através da proposta metodológica. **Revista Docentes**, n. 6, 2017. Citado na página 19.

SANTOS, H. S. T.; GARDELLI, D. Análise da Lei de Biot-Savart em comparação com a força entre elementos de corrente de Ampère. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 34, n. 3, p. 864–879, 2017. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2017v34n3p864>. Citado na página 19.

SEIXAS, W. O princípio da relatividade - de Galileu a Einstein. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 5, n. 10, p. 43–56, 2005. Citado na página 10.

SILVA, C. C.; PIMENTEL, A. C. Uma análise da história da eletricidade presente em livros didáticos: o caso de Benjamin Franklin. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis-SC, v. 25, n. 1, 2008. Citado na página 17.

SILVA, M. F. **Abordagens histórico-conceituais sobre a Lei de Coulomb e as representações imagéticas da balança elétrica em livros didáticos brasileiros de Física do nível médio: um estudo de caso**. 94 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura Plena em Física) — Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013. Citado na página 18.

STACHEL, J. 1905 e tudo mais. Artigos de Einstein e ensaios sobre sua obra. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 27, n. 1, p. 5–9, 2004. Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br>. Acesso em: 2 mar. 2021. Citado na página 11.

TONIDANDEL, D. A. V.; ARAÚJO, A. E. A.; BOAVENTURA, W. C. História da Eletricidade e do Magnetismo: da antiguidade à idade média. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 40, n. 4, 2018. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2018-0046>. Citado na página 17.

YARTEY, J. N. A. **Álgebra II**. Salvador: [s.n.], 2017. Citado 2 vezes nas páginas 42 e 44.