

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Engenharia e Ciências- campus de Guaratinguetá

JOÃO PEDRO SIQUEIRA MONTEIRO

Efeito de Maré sobre o Sistema Kepler-80

Guaratinguetá

2025

João Pedro Siqueira Monteiro

Efeito de Maré sobre o Sistema Kepler-80

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentada à
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Facul-
dade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá,
para obtenção do título de Bacharel em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti
Winter

Guaratinguetá
2025

M775e	Monteiro, João Pedro Siqueira Efeito de maré sobre o sistema Kepler-80 / João Pedro Siqueira Monteiro - Guaratinguetá, 2025. 51 f : il. Bibliografia: f. 45-46 Trabalho de Graduação em Física (Bacharel) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025. Orientadora: Prof^a. Dr^a. Silvia Maria Giuliatti Winter 1. Exoplanetas. 2. Integração numérica. 3. Ressonância. 4. Astronomia. I. Título. CDU 52
-------	--

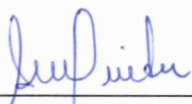
JOÃO PEDRO SIQUEIRA MONTEIRO

EFEITO DE MARÉ SOBRE O SISTEMA KEPLER-80

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado(a) à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências, Guaratinguetá, para obtenção do título de Bacharel em Física.

Data de defesa: 14/11/2025

BANCA EXAMINADORA



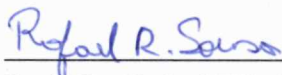
Profa. Dra. Silvia Maria Giuliatti Winter

UNESP – Faculdade de Engenharia e Ciências – Campus de Guaratinguetá



Profa. Dra. Daniela Cardozo Mourão

UNESP - Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá



Prof. Dr. Rafael Ribeiro de Sousa

UNESP - Faculdade de Engenharia e Ciências - Campus de Guaratinguetá

Dedico este trabalho àqueles que me motivaram a estudar física.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a minha família, que sempre me apoiou na minha decisão de estudar física; em especial agradeço à minha mãe, que forneceu todo o suporte necessário para eu conseguir chegar até aqui, sempre me incentivando a seguir o meu sonho.

Agradeço a minha orientadora, Silvia Maria Giuliatti Winter, pela orientação e apoio para desenvolver este trabalho que não seria possível sem ela; bem como pelas aulas de cálculo que me motivaram imensamente.

Agradeço a todas as amigas que fazem parte da minha vida, tanto as antigas quanto as recentes, as que se mantêm próximas e as que se distanciaram, pois contribuíram para que eu me tornasse quem sou.

Agradeço a UNESP, especialmente os departamentos de Física e Matemática, por proporcionar um ensino de qualidade, que contribuiu imensamente para o meu aprendizado.

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo nº 133650/2024-3.

*"Não importa o que alguém diga a você, palavras e ideias podem mudar o mundo."
Sociedade dos Poetas Mortos (1989)*

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar a influência do efeito de maré sobre a dinâmica do sistema de exoplanetas Kepler-80. Este sistema, composto por seis exoplanetas do tipo super-Terras, apresenta uma configuração de órbitas compactas e uma cadeia de ressonância de movimento médio envolvendo cinco dos planetas. Inicialmente foi verificada a existência desta cadeia de ressonância, utilizando o pacote Mercury para realizar a integração numérica do sistema. As integrações indicaram a libração do ângulo crítico apenas para o caso de órbitas inicialmente circulares. Em seguida foi estudado o efeito da força de maré sobre o sistema, utilizando o modelo de marés dinâmicas atuando na estrela e nos planetas. A evolução temporal de semieixo maior e excentricidade foi calculada numericamente utilizando a biblioteca SciPy da linguagem de programação Python, utilizando expressões obtidas das equações planetárias de Lagrange. A partir das simulações realizadas, foi verificada a migração dos planetas e a circularização de suas órbitas.

Palavras-Chave: ressonância de movimento médio; efeito de maré; equações planetárias de Lagrange; integrações numéricas.

ABSTRACT

The present work analyses the influence of tidal effects on the dynamics of the Kepler-80 system. This system, made up of six exoplanets classified as super-Earths, presents a configuration of compact orbits and a chain of mean motion resonances involving five planets. Initially the existence of the resonance chain was verified, using the Mercury package for the numerical integration of the system. The integrations showed the critical angle librating only for the case of initially circular orbits. After that the effects of the tidal force on the system were studied, using the model of dynamical tides acting on the star and on each planet. The evolution of semimajor axis and eccentricity was numerically calculated using the SciPy library of the Python programming language, utilizing expressions obtained from the Lagrange planetary equations. From the simulations, the migration of the planets and the circularization of the orbits were verified.

Keywords: mean motion resonance; tidal effects; Lagrange planetary equations; numerical integrations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Ângulos de Euler: i, Ω, ω	16
Figura 2	Distribuição de raios planetários no sistema Kepler-80	20
Figura 3	ϕ_{deb}, ϕ_{ebc} e ϕ_{bcg} para o caso $e = 0$	23
Figura 4	ϕ_{deb} para o caso $e \neq 0$	23
Figura 5	ϕ_{ebc} para o caso $e \neq 0$	24
Figura 6	ϕ_{bcg} para o caso $e \neq 0$	24
Figura 7	Evolução temporal de a	25
Figura 8	Evolução temporal de e	25
Figura 9	Corpo primário e secundário	27
Figura 10	Deformação causada no corpo primário devido ao corpo secundário . . .	28
Figura 11	Potencial gravitacional no ponto P , considerando a deformação causada pela maré	29
Figura 12	Caso 1 ($\Omega \ll n$): bojo da maré atrasado em relação ao corpo secundário .	30
Figura 13	Caso 2 ($\Omega \gg n$): bojo da maré adiantado em relação ao corpo secundário	31
Figura 14	Evolução temporal de semieixo maior	39
Figura 15	Evolução temporal de excentricidade	40
Figura 16	Variação de excentricidade por semieixo maior	41
Figura 17	Evolução temporal de semieixo maior	42
Figura 18	Evolução temporal de excentricidade	42
Figura 19	Variação de excentricidade por semieixo maior	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	–	Condições iniciais do sistema Kepler-80 ($e = 0$)	21
Tabela 2	–	Condições iniciais do sistema Kepler-80 ($e \neq 0$)	21
Tabela 3	–	Condições iniciais para a análise do efeito de maré	38
Tabela 4	–	Resultados da simulação numérica (caso 1)	38
Tabela 5	–	Resultados da simulação numérica (caso 2)	40

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MODELAGEM MATEMÁTICA	13
2.1	PROBLEMA DE DOIS CORPOS	13
2.1.1	Equação de Movimento	13
2.1.2	Elementos Orbitais	16
2.2	PROBLEMA DE N-CORPOS	17
3	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	19
3.1	KEPLER-80	19
3.2	PACOTE MERCURY	20
3.3	RESSONÂNCIAS	21
4	EFEITOS DE MARÉ	26
4.1	MODELOS	26
4.1.1	Maré Estática	26
4.1.2	Maré Dinâmica	30
4.2	EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE	33
4.3	FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA	36
4.4	APLICAÇÃO DA MARÉ PARA O SISTEMA KEPLER-80	37
4.5	RESULTADOS	38
4.5.1	Caso 1	38
4.5.2	Caso 2	40
5	CONCLUSÃO	44
	REFERÊNCIAS	45
	APÊNDICE A – CÁLCULO DO ÂNGULO CRÍTICO	47
	APÊNDICE B – CÁLCULO DO EFEITO DE MARÉ	48

1 INTRODUÇÃO

Em 2009 foi lançado pela NASA o telescópio espacial Kepler, cujo objetivo era detectar exoplanetas orbitando estrelas parecidas com o Sol. Ao longo dos nove anos de duração da missão, o telescópio descobriu milhares de exoplanetas utilizando o método de fotometria de trânsito, no qual pequenas variações no brilho de uma estrela indicam a passagem de um planeta. Um dos sistemas detectados foi o sistema Kepler-80, observado pela primeira vez em 2012 (Xie, 2012), que é objeto de interesse para o estudo de ressonâncias e de efeitos de maré.

O sistema Kepler-80 é composto por seis exoplanetas do tipo super-Terras (SHALLUE; VANDERBURG, 2018) orbitando uma estrela tipo anã laranja (MACDONALD et al., 2016). Os planetas se encontram em órbitas compactas, sendo o semieixo maior do planeta mais externo menor que 0,11 unidades astronômicas. As órbitas próximas e as massas relativamente elevadas tornam o sistema sensível a interações gravitacionais entre os planetas e a efeitos dissipativos. Observações indicam que cinco dos seis planetas formam uma cadeia de ressonância de movimento médio que confere estabilidade ao sistema (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023), sendo possivelmente influenciada pelo efeito de maré.

O efeito de maré é um fenômeno de natureza gravitacional que ocorre quando diferentes pontos de um corpo estão sujeitos a forças gravitacionais de intensidades diferentes, que ocorre devido a variação do potencial gravitacional. Esta diferença de forças causa uma deformação no corpo, que pode gerar dissipação de energia e alteração dos elementos orbitais. No caso de sistemas compactos, o efeito de maré é importante para a dinâmica, podendo estabilizar ou desestabilizar as órbitas.

A análise do efeito que a maré tem sobre um sistema multiplanetário requer uso combinado de teoria e simulações numéricas. De um lado, o tratamento teórico permite compreender a origem física da força de maré e as consequências para a dinâmica do sistema. Ao mesmo tempo, as simulações numéricas permitem reproduzir a evolução do sistema em escalas de tempo da mesma ordem que a idade do sistema. Para o sistema Kepler-80, os efeitos de maré são particularmente relevantes devido a presença da cadeia de ressonância que compreende cinco dos seis planetas, que pode aumentar ou reduzir o efeito dessas forças dissipativas (MURRAY; DERMOTT, 1999).

A formação de um sistema planetário envolve inicialmente um disco de gás ao redor da estrela, onde se formam planetesimais devido a instabilidades no gás. Estes planetesimais acretam massa do disco, eventualmente se tornando planetas massivos; no entanto, o planeta pode migrar após sua formação devido a efeitos dissipativos do gás, alterando a configuração do sistema. Em sistemas multiplanetários, a migração pode levar a uma captura em ressonância, em que os planetas atingem uma configuração estável devido ao estabelecimento de ressonância de movimento médio (Armitage, 2025).

Assim, estudar o efeito de maré sobre o sistema Kepler-80 pode contribuir para a compreensão

da formação e evolução de outros sistemas compactos semelhantes, e para compreender sua configuração atual. A utilização conjunta de modelos teóricos, simulações numéricas e dados observacionais permite analisar o efeito de processos dissipativos para a evolução dinâmica a longo prazo desses sistemas.

Os objetivos deste trabalho são verificar a existência da cadeia de ressonância de movimento médio no sistema Kepler-80 através da libração dos ângulos críticos e analisar o efeito que a maré tem sobre o semieixo maior e excentricidade das órbitas dos planetas. Para a verificação de ressonância, foi utilizado o integrador numérico Mercury, que permite observar a evolução temporal dos elementos orbitais em um sistema de N corpos. Para o tratamento do efeito de maré, foi escrito um programa na linguagem de programação Python para resolver as equações diferenciais que expressam a taxa de variação de semieixo maior e excentricidade em função do tempo.

No capítulo 2 é apresentada a formulação teórica do Problema de Dois Corpos, que constitui a base da mecânica celeste e fornece a fundamentação necessária para a compreensão da dinâmica de sistemas planetários. O capítulo 3 descreve a metodologia numérica utilizada para verificar a presença da cadeia de ressonância no sistema Kepler-80, por meio de integrações numéricas do sistema de acordo com dados obtidos da análise de variações de tempo de trânsito (TTV). No capítulo 4 são apresentados os diferentes modelos teóricos de maré e a análise dos efeitos de maré sobre a evolução orbital dos planetas do sistema. Por fim, o capítulo 5 apresenta e discute os resultados obtidos e projetos futuros.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo será apresentada a base teórica da dinâmica orbital, necessária para descrever quantitativamente os efeitos da maré. Inicialmente será detalhado o Problema de Dois Corpos, modelo que serve como base para caracterizar o movimento de um corpo celeste ao redor de outro sob atração mútua devido a gravidade, sendo apresentada a solução analítica do problema. Então serão apresentados os seis elementos orbitais, que permitem descrever a forma e orientação da órbita no espaço, de forma a facilitar a análise de sistemas dinâmicos. Por fim será apresentado o problema de N-corpos, cuja solução numérica para o sistema Kepler-80 será explorada no capítulo seguinte.

2.1 PROBLEMA DE DOIS CORPOS

Um dos problemas mais fundamentais da Mecânica Clássica é o chamado Problema de Dois Corpos, que trata do movimento de duas partículas pontuais sujeitas a uma interação do tipo força central. Visto que a gravidade é uma força central, o Problema de Dois Corpos pode descrever com boa aproximação o movimento de corpos celestes em sistemas compostos por um corpo pequeno orbitando um corpo maior. Para tratar deste problema, o livro de (MURRAY; DERMOTT, 1999) foi utilizado como referência.

2.1.1 Equação de Movimento

Vamos considerar o movimento de duas massas pontuais m_1 e m_2 , com posições $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ (em relação a uma origem O) respectivamente. Sendo $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ o vetor posição da massa m_2 em relação a m_1 , a partir da Lei da Gravitação Universal e da segunda Lei de Newton temos :

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad \text{e} \quad \vec{F}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}, \quad (2.1)$$

onde $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ são as forças sobre as massas 1 e 2, respectivamente, e G é a constante de gravitação universal. Para simplificar o problema, podemos calcular o movimento de m_2 em relação a m_1 . Pela definição do vetor $\vec{r}$, temos:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \quad (2.2)$$

Utilizando a equação (2.1), calculamos $\vec{F}_2/m_2 - \vec{F}_1/m_1$:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{Gm_1}{r^3} \vec{r} - \frac{Gm_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.3)$$

Definindo o parâmetro gravitacional padrão $\mu = G(m_1 + m_2)$ e reorganizando a equação (2.3), temos a equação do movimento relativo:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \mu \frac{\vec{r}}{r^3} = \vec{0}, \quad (2.4)$$

A equação (2.4) não pode ser resolvida de forma imediata. Por exemplo, escolhendo um sistema de coordenadas cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ centrado em m_1 e utilizando $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, a equação 2.4 toma a forma

$$\frac{d^2}{dt^2}(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) + \mu \frac{(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \vec{0} \quad (2.5)$$

A equação (2.5) corresponde a três equações diferenciais ordinárias de segunda ordem acopladas e não lineares. Ainda assim, é possível resolver a equação (2.4), calculando constantes do movimento.

Tomando o produto vetorial de $\vec{r}$ com a equação do movimento, obtemos

$$\left(\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \right) + \mu \left(\vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{0}. \quad (2.6)$$

O segundo termo da equação (2.6) é nulo; assim, $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{0}$. Integrando o resultado obtido, temos

$$\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \vec{h}, \quad (2.7)$$

onde $\vec{h}$ é um vetor constante, perpendicular a $\vec{r}$ e a $\dot{\vec{r}}$. Portanto, é possível concluir que o movimento de m_2 em relação a m_1 se dá em um plano perpendicular a direção de $\vec{h}$. Já que $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$ estão sempre no mesmo plano, vamos restringir a análise ao movimento neste plano. Além disso, é conveniente utilizar um sistema de coordenadas polares (r, θ) com origem em m_1 e um eixo de referência arbitrário e fixo correspondente a $\theta = 0$. Os vetores posição, velocidade e aceleração em coordenadas polares serão

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}, \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \right] \hat{\theta}. \quad (2.8)$$

Substituindo a expressão de $\vec{r}$ e $\dot{\vec{r}}$ na equação (2.7), obtemos uma expressão para $\vec{h}$:

$$\vec{h} = r^2\dot{\theta}\hat{h}, \quad (2.9)$$

onde o vetor unitário $\hat{h}$ é dado por $\hat{r} \times \hat{\theta}$, e define a direção perpendicular ao plano da órbita.

Utilizando a equação (2.8), a componente $\hat{r}$ da equação (2.4) é dada por

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{\mu}{r^2}. \quad (2.10)$$

É possível obter r como função apenas de θ utilizando a substituição $u = 1/r$ e eliminando a

dependência temporal utilizando a constante $h = r^2\dot{\theta}$. Assim, temos que

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{h^2}. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) é similar a equação de um oscilador harmônico simples, porém com um termo não-homogêneo. A solução geral da equação homogênea pode ser escrita como $u(\theta) = A \cos(\theta - \varpi)$, onde A é a amplitude e ϖ é uma fase, a princípio arbitrários. Uma solução particular para a equação não-homogênea é $u(\theta) = \mu/h^2$, e a solução geral da equação não-homogênea é a soma das duas soluções de $u(\theta)$. Fazendo $A = (\mu/h^2)e$ e somando as soluções:

$$u(\theta) = \frac{\mu}{h^2} [1 + e \cos(\theta - \varpi)], \quad (2.12)$$

Visto que $r = 1/u$, a solução para $r(\theta)$ é

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}, \quad (2.13)$$

que é identificada como a equação de uma cônica em coordenadas polares, sendo e a excentricidade, ϖ uma fase e p o *semilatus rectum*, dado por $p = h^2/\mu$.

A partir de (2.13), é possível concluir que todas as órbitas no Problema de Dois Corpos terão o formato de uma cônica, podendo ser uma órbita fechada ($e < 1$) ou aberta ($e \geq 1$). Para órbitas fechadas, as cônicas correspondentes são uma circunferência ($e = 0$) ou elipse ($0 < e < 1$). No caso de elipses, o *semilatus rectum* é dado por $p = a(1 - e^2)$. Assim, é possível reescrever a equação (2.13) como

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \varpi)}, \quad (2.14)$$

onde a é o semieixo maior da órbita. Quando $\theta = \varpi$, temos que

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e)(1 + e)}{(1 + e)} = a(1 - e), \quad (2.15)$$

que é a distância mínima de separação entre os dois corpos; o ponto na órbita em que isso ocorre é chamado pericentro, portanto o ângulo ϖ é chamado longitude do pericentro. Como θ é medido a partir de um eixo de referência arbitrário, é conveniente definir o ângulo $f = \theta - \varpi$, chamado de anomalia verdadeira, que mede o ângulo entre a posição de m_2 e o pericentro. Assim, temos que

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}. \quad (2.16)$$

A partir da solução do Problema de Dois Corpos, dada pela equação (2.16), é possível analisar problemas mais complexos tratados como perturbações do Problema de Dois Corpos. Ao incluir perturbações, como um corpo adicional ou o efeito de maré, os elementos orbitais apresentados neste capítulo não serão constantes, apresentando uma evolução temporal que está ausente no Problema de Dois Corpos. No entanto, se a evolução dos elementos orbitais ocorre

em uma escala de tempo suficientemente longa, é possível tratar a órbita perturbada como uma órbita quase kepleriana.

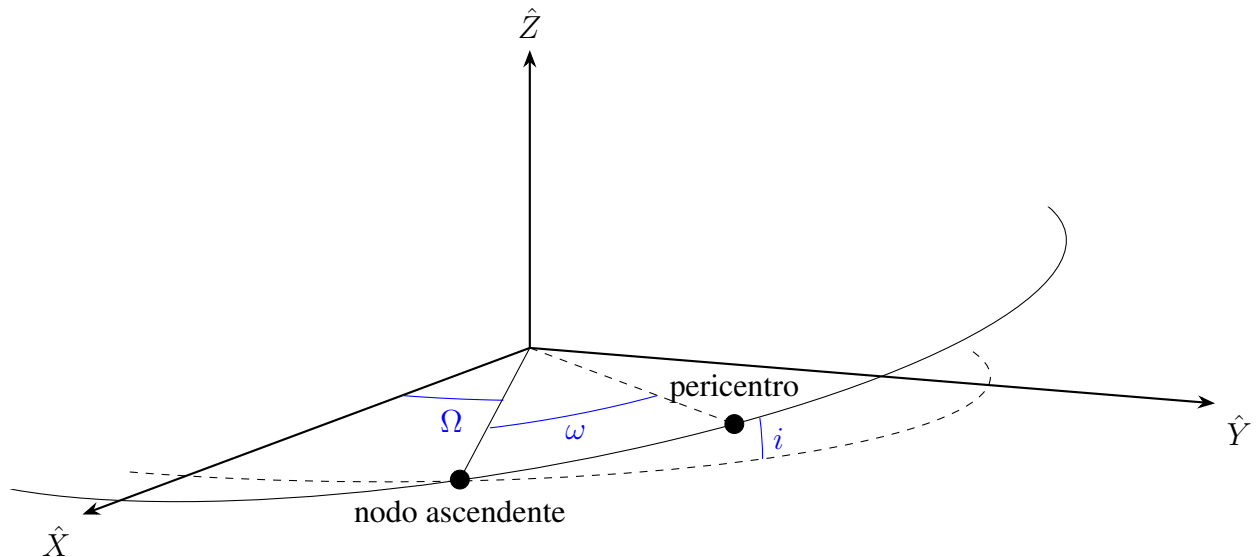
2.1.2 Elementos Orbitais

Em um referencial com o eixo $\hat{x}$ na direção do pericentro e $\hat{y}$ perpendicular a $\hat{x}$ no plano orbital, a órbita de uma massa m_2 ao redor de m_1 é descrita univocamente por três constantes: a , e e ϖ , enquanto a posição de m_2 ao longo da órbita é dada pela variável f . No entanto, é necessário definir a órbita no espaço tridimensional, em um sistema de referência arbitrário; para tanto, serão definidas grandezas adicionais.

Consideraremos um sistema de referência $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$ centrado em m_1 , onde o eixo $\hat{X}$ define a direção de referência, o eixo $\hat{Y}$ é perpendicular ao eixo $\hat{X}$ e está no plano de referência, e o eixo $\hat{Z}$ é dado por $\hat{X} \times \hat{Y}$.

O plano orbital pode estar inclinado em relação ao plano de referência por um ângulo i , chamado de inclinação da órbita; desta forma, a interseção entre os planos será uma reta, chamada de linha dos nodos. A órbita terá dois pontos de interseção com a linha dos nodos, sendo um dos pontos quando m_2 cruza o plano de referência, passando de $Z < 0$ para $Z > 0$. Este ponto é o nodo ascendente, e o ângulo Ω entre a direção de referência e o vetor posição do nodo ascendente é chamado de longitude do nodo ascendente, enquanto o ângulo ω entre o mesmo vetor e o pericentro da órbita é chamado de argumento do pericentro. Estes ângulos, chamados ângulos de Euler, estão esquematizados na Figura 1.

Figura 1 – Ângulos de Euler: i , Ω , ω



Fonte: Adaptado de Murray (1999).

A fim de transformar um vetor do referencial $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ para o sistema $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$, é necessário aplicar três rotações sucessivas: uma rotação em torno de $\hat{z}$ de um ângulo ω , que alinha $\hat{x}$ com a

linha dos nodos; uma rotação em torno de $\hat{x}$ de um ângulo i , que alinha os dois planos; e uma rotação em torno de $\hat{z}$ de um ângulo Ω .

Finalmente, a velocidade de m_2 varia ao longo da órbita; logo, a anomalia verdadeira f não é uma função linear do tempo. Portanto, é útil definir uma grandeza adicional chamada anomalia média, expressa como

$$M = n(t - \tau), \quad (2.17)$$

onde $n = \sqrt{\mu/a^3}$ é o movimento médio e τ é o tempo da passagem de m_2 pelo pericentro. M varia entre 0 e 2π linearmente com o tempo, com taxa de variação dada por n , sendo mais conveniente para denotar a posição do corpo ao longo da órbita.

Assim, para definir univocamente o movimento da massa m_2 relativo a m_1 em três dimensões, é necessário fornecer seis condições iniciais, visto que a equação (2.4) é uma equação diferencial de segunda ordem para o vetor posição. Podem ser utilizados dois conjuntos diferentes de parâmetros para caracterizar uma mesma órbita: $(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$ ou $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$. Em geral é mais prático utilizar o conjunto de elementos orbitais, visto que cada um possui uma interpretação mais direta do que os vetores posição e velocidade, além de serem constantes (ou função linear do tempo no caso de M) no problema de Dois Corpos.

2.2 PROBLEMA DE N-CORPOS

O problema de Dois Corpos tratado anteriormente pode ser expandido para analisar o movimento de N corpos sob atração gravitacional mútua. Neste caso, a força resultante sobre o i -ésimo corpo devido à presença das outras massas será

$$\vec{F}_i = Gm_i \sum_{j \neq i}^N \left(\frac{m_j}{\|\vec{r}_{ij}\|^3} \vec{r}_{ij} \right) = m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2}, \quad (2.18)$$

onde $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ é o vetor da posição de m_j em relação a m_i . Alternativamente, é possível utilizar a formulação Hamiltoniana da mecânica para obter equações equivalentes. A hamiltoniana do sistema é (CHAMBERS, 1999):

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m_i} - G \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j=i+1}^N \frac{m_j}{r_{ij}}. \quad (2.19)$$

As equações do movimento são obtidas a partir das equações de Hamilton:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (2.20)$$

Logo, o problema completo envolve um conjunto de $3N$ equações diferenciais de segunda ordem, ou $6N$ equações diferenciais de primeira ordem, sendo impossível obter uma solução analítica de forma fechada que satisfaça condições iniciais arbitrárias para $N \geq 3$. Para resolver

este problema, é necessário utilizar métodos numéricos para integrar as equações (2.20).

No próximo capítulo, será abordada a dinâmica do sistema Kepler-80, com objetivo de verificar a presença da cadeia de ressonância de movimento médio no sistema. Para tanto, foi utilizado o integrador Mercury (CHAMBERS, 1999), que permite analisar a evolução temporal dos elementos orbitais de cada planeta do sistema através da solução numérica das equações de movimento.

3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

No capítulo anterior, foi apresentada a solução do Problema de Dois Corpos. Para sistemas que são compostos por mais de dois corpos, não é possível obter uma solução analítica do problema, sendo necessário utilizar um integrador numérico para resolver as equações de movimento. Neste capítulo, será apresentado o integrador Mercury (CHAMBERS, 1999) utilizado para analisar o sistema Kepler-80, bem como os principais resultados acerca da cadeia de ressonância.

3.1 KEPLER-80

Exoplanetas, também chamados de planetas extrassolares, são corpos celestes com massa de escala planetária que orbitam alguma estrela que não seja o Sol. Ao longo das últimas décadas diversos sistemas compostos por exoplanetas foram identificados, sendo conhecidos 6042 exoplanetas atualmente (NASA, 2011).

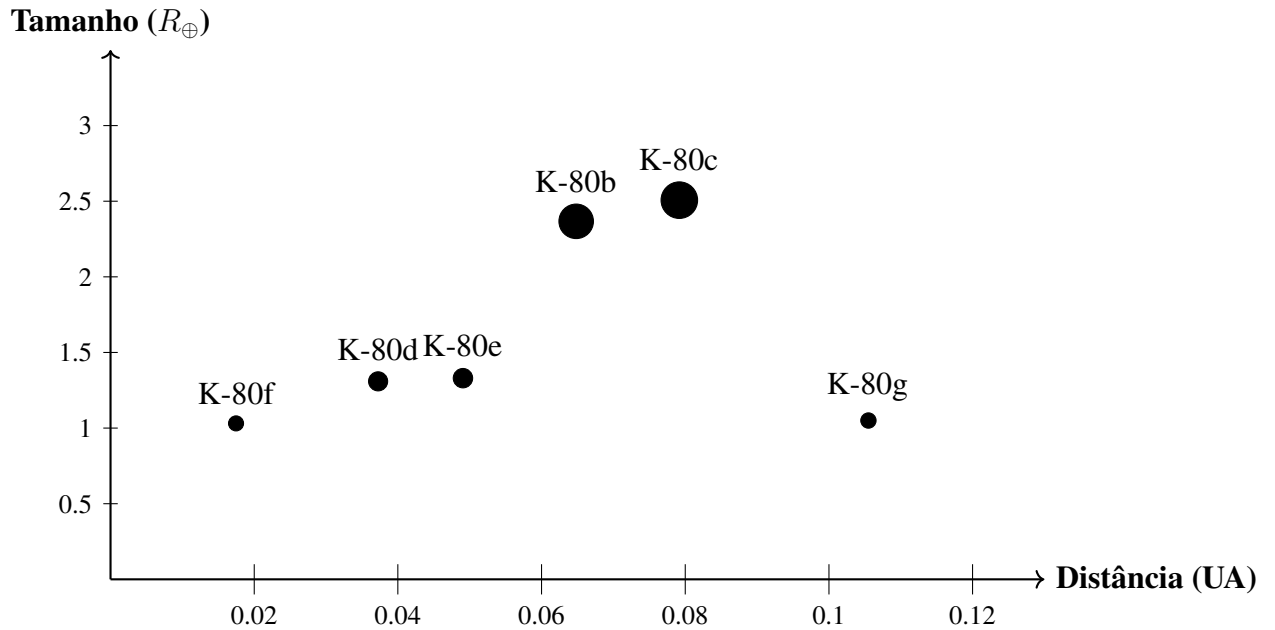
Entre os exoplanetas conhecidos, 2784 foram descobertos pelo telescópio espacial Kepler, que foi lançado em 2009 com objetivo de detectar exoplanetas parecidos com a Terra utilizando observações do brilho de estrelas. Tal método de observação é chamado de trânsito planetário, e consiste em analisar quedas no brilho de uma estrela devido a passagem de um exoplaneta na frente da mesma.

Há uma grande variedade de exoplanetas observados em relação a distribuição de raios e distância à estrela, sendo conveniente classificá-los com base em suas propriedades. Exoplanetas podem ser categorizados como tipo Terra, super-Terra, mini-Netuno, Netuno ou Júpiter, com base em seu raio planetário. Podem também ser classificados como quentes ou frios dependendo da distância à estrela, com planetas quentes situados próximos a estrela e planetas frios distantes da estrela (NASA, 2025).

O sistema Kepler-80 é composto por seis exoplanetas (SHALLUE; VANDERBURG, 2018) do tipo super-Terras, em órbita ao redor de uma estrela anã K, com massa estimada em $0,73M_{\odot}$ e raio $0,678R_{\odot}$ (MACDONALD et al., 2016), onde $M_{\odot}$ e $R_{\odot}$ são a massa e o raio do Sol, respectivamente. A partir de observações fotométricas da missão Kepler, foram calculados os parâmetros do sistema, o que permitiu a descoberta de uma cadeia de ressonâncias de movimento médio. A distribuição de tamanhos dos planetas do sistema está representada abaixo (Figura 2), com escala de distância dada em unidades astronômicas (UA) e escala de tamanho dada em raios da Terra ($R_{\oplus}$).

O estudo realizado por (MACDONALD; SHAKESPEARE; RAGOZZINE, 2021) refinou os parâmetros orbitais que haviam sendo obtidos previamente, levando em conta a presença do planeta Kepler-80g descoberto em 2018, mostrando que a massa dos planetas varia entre 0,065 e 5,95 massas terrestres e as excentricidades são menores que 0,2. Além disso, não há grande

Figura 2 – Distribuição de raios planetários no sistema Kepler-80



Fonte: Elaborada pelo autor.

variação de inclinação nas órbitas de cada planeta, que variam entre 85,99 e 89,24 graus. No entanto, neste caso o planeta Kepler-80g não participava da cadeia de ressonância, que envolvia apenas os planetas Kepler-80d, Kepler-80e, Kepler-80b e Kepler-80c.

Mais recentemente, (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023) utilizou o método de variação de trânsito, que consiste em analisar o desvio de um trânsito observado em relação ao trânsito teórico de uma órbita do problema de dois corpos, para obter os parâmetros orbitais do sistema. Essa diferença entre o trânsito observado e o trânsito teórico se dá devido a interações entre planetas, e é possível extrair informações sobre o sistema a partir desta variação. Para o sistema Kepler-80, foram considerados quatro casos: órbitas circulares ou excêntricas, e o sistema com ou sem o planeta Kepler-80g, identificando a presença da cadeia de ressonância de três corpos entre os cinco planetas externos d-e-b-c-g em todos os casos. A discrepância entre esse resultado e aquele obtido por (MACDONALD; SHAKESPEARE; RAGOZZINE, 2021) pode ser explicado pela diferença entre os métodos utilizados para obter os elementos orbitais, resultando em parâmetros diferentes para o sistema.

3.2 PACOTE MERCURY

As integrações numéricas foram realizadas utilizando o pacote Mercury (CHAMBERS, 1999), desenvolvido para estudar a dinâmica orbital de sistemas planetários. São oferecidos diversos algoritmos para realizar a integração numérica, como o RADAU, Bulirsch-Stoer e MVS. Neste trabalho foi utilizado o algoritmo BS, que é um algoritmo robusto para sistemas de N corpos.

As condições iniciais do sistema foram incluídas de acordo com os casos 2 e 4 da tabela 1 de

(WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023), que correspondem a órbitas circulares ou excêntricas com o planeta Kepler-80g. Também foi considerado que todos os planetas estão no mesmo plano, ou seja, todos os planetas tem inclinação nula. As condições iniciais do caso 2 estão dispostas na tabela 1, e as condições iniciais do caso 4 estão dispostas na tabela 2. Cada planeta foi inserido como um corpo massivo, ou seja, há interação gravitacional mútua entre todos os corpos. Além disso, o planeta Kepler-80f não foi inserido, pois ele não faz parte da cadeia de ressonância e é considerado que ele não afeta a dinâmica do sistema (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023), logo não influencia na integração numérica.

Tabela 1 – Condições iniciais do sistema Kepler-80 ($e = 0$)

Parâmetro	Kepler-80d	Kepler-80e	Kepler-80b	Kepler-80c	Kepler-80g
Semieixo maior (UA)	0,03724	0,04906	0,06482	0,07918	0,1055
Anomalia média (Graus)	96,0	171,42	289,01	132,58	0
Massa ($M_{\oplus}$)	4,1	6,3	4,5	4,0	0,8

Fonte: Adaptada de Weisserman (2023).

Tabela 2 – Condições iniciais do sistema Kepler-80 ($e \neq 0$)

Parâmetro	Kepler-80d	Kepler-80e	Kepler-80b	Kepler-80c	Kepler-80g
Semieixo maior (UA)	0,03724	0,04906	0,06481	0,07918	0,1055
Excentricidade	0,005	0,008	0,006	0,010	0,02
ω (Graus)	260	71	326	190	153
Massa ($M_{\oplus}$)	4,1	2,2	2,4	3,4	1,0

Fonte: Adaptada de Weisserman (2023).

Os arquivos de configuração da integração seguem o padrão do Mercury, com os planetas sendo inseridos no arquivo *big.in*, os parâmetros da integração inseridos no arquivo *param.in* e os dados de saída sendo configurados pelo arquivo *element.in*.

O intervalo total de integração utilizado foi 10^5 dias, com passo de integração de 0,05 dia. Este período é suficiente para observar o fenômeno de ressonância no sistema, pois o período orbital dos planetas é pequeno. O passo de saída utilizado foi 10 dias.

Visto que existem dois casos a serem tratados ($e = 0$ e $e \neq 0$), foram realizadas duas integrações separadas, a fim de verificar a existência da cadeia de ressonância em ambos os casos. Os resultados destas integrações serão apresentados e discutidos na seção seguinte.

3.3 RESSONÂNCIAS

O fenômeno de ressonância ocorre na dinâmica orbital quando um conjunto de corpos, orbitando um mesmo corpo central, exercem uma forte atração gravitacional mútua periodicamente, por terem seus períodos relacionados por números inteiros pequenos.

Para determinar se um sistema se encontra em ressonância de movimento médio de três corpos, devemos analisar o ângulo crítico do mesmo. O ângulo crítico ϕ é dado por

$$\phi = p\lambda_1 - (p + q)\lambda_2 + q\lambda_3, \quad (3.1)$$

onde p e q são números inteiros positivos (constantes), e λ_i é a longitude média do i -ésimo planeta, dada por

$$\lambda = M + \omega + \Omega. \quad (3.2)$$

Visto que no problema de N corpos os ângulos M , ω e Ω variam no tempo, λ também varia, e consequentemente ϕ é uma função do tempo. A verificação da ressonância se dá através da análise da variação temporal de ϕ , que adota valores no intervalo $[0, 2\pi)$. Se ϕ oscilar com pequena amplitude, é dito que o mesmo está librando, e tal fato indica que o sistema está em ressonância. Por outro lado, se ϕ estiver circulando entre 0 e 2π , então os planetas não estão em ressonância.

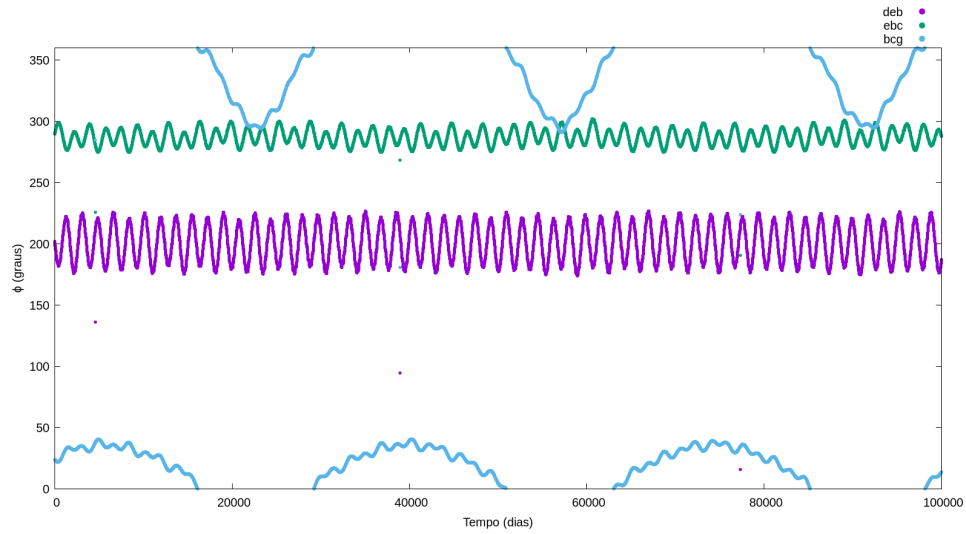
Portanto, para analisar a ressonância no sistema Kepler-80, é necessário obter a evolução temporal de M , ω e Ω , que é realizado através da integração numérica do sistema. A partir dos dados obtidos da integração, os ângulos λ foram calculados para cada planeta, permitindo o cálculo de ϕ para cada configuração de ressonância. O cálculo foi realizado utilizando a biblioteca NumPy (HARRIS et al., 2020) da linguagem de programação Python, e o programa escrito está apresentado no apêndice A. As diferentes configurações de ressonância presentes no sistema são dadas pelos ângulos críticos $\phi_{deb} = 2\lambda_d - 5\lambda_e + 3\lambda_b$, $\phi_{ebc} = \lambda_e - 3\lambda_b + 2\lambda_c$ e $\phi_{bcg} = \lambda_b - 2\lambda_c + \lambda_g$.

Para analisar a variação temporal de ϕ foram construídos gráficos utilizando o software livre *gnuplot*, que serão dispostos e discutidos abaixo para os casos $e = 0$ (Figura 3) e $e \neq 0$ (Figura 4, Figura 5 e Figura 6).

A partir da Figura 3, é possível notar que os três ângulos críticos do sistema estão librando com baixas amplitudes, o que indica que o sistema de fato está em ressonância. O ângulo crítico ϕ_{deb} está librando em torno de 200 graus, com amplitude de aproximadamente 25 graus, o ângulo crítico ϕ_{ebc} está librando em torno de 285 graus com amplitude de aproximadamente 14 graus, e o ângulo crítico ϕ_{bcg} está librando em torno de 350 graus com amplitude de aproximadamente 50 graus. No entanto, a libração foi observada somente para os elementos M , ω e Ω extraídos em coordenadas baricêntricas. Para grande parte dos sistemas planetários, o centro de massa do sistema é localizado muito próximo do centro da estrela, devido a diferença de massa entre os corpos e a distância dos planetas até a estrela. Para o sistema Kepler-80, os planetas têm massa da ordem de 10^{-6} até 10^{-5} massas estelares e estão localizados em órbitas compactas, e embora isto não seja suficiente para gerar um deslocamento significativo do centro de massa, a ressonância ainda é afetada, sendo um fenômeno extremamente sensível a variações dos elementos orbitais.

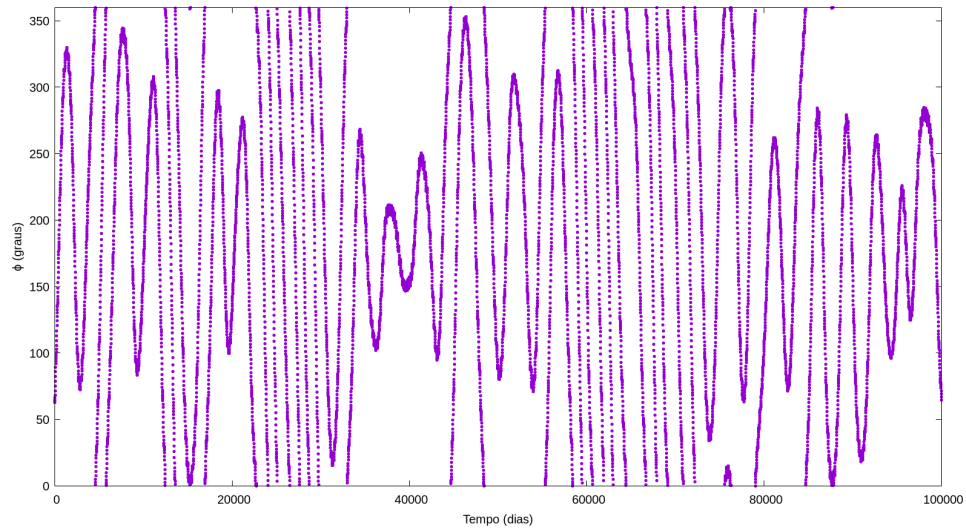
Ao analisar as figuras referentes ao caso $e \neq 0$ (Figura 4, Figura 5 e Figura 6), é possível notar que todos os ângulos críticos estão circulando, mesmo que os elementos orbitais sejam

Figura 3 – ϕ_{deb} , ϕ_{ebc} e ϕ_{bcg} para o caso $e = 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

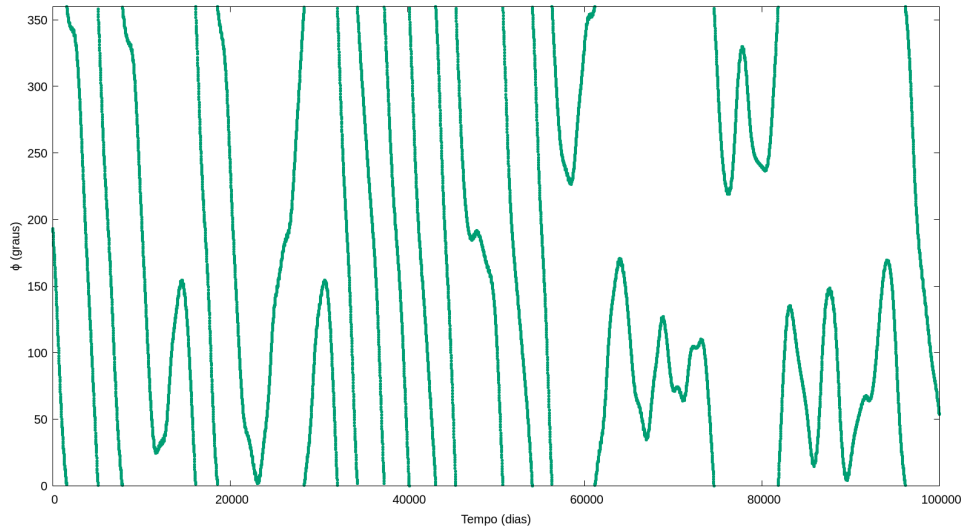
Figura 4 – ϕ_{deb} para o caso $e \neq 0$



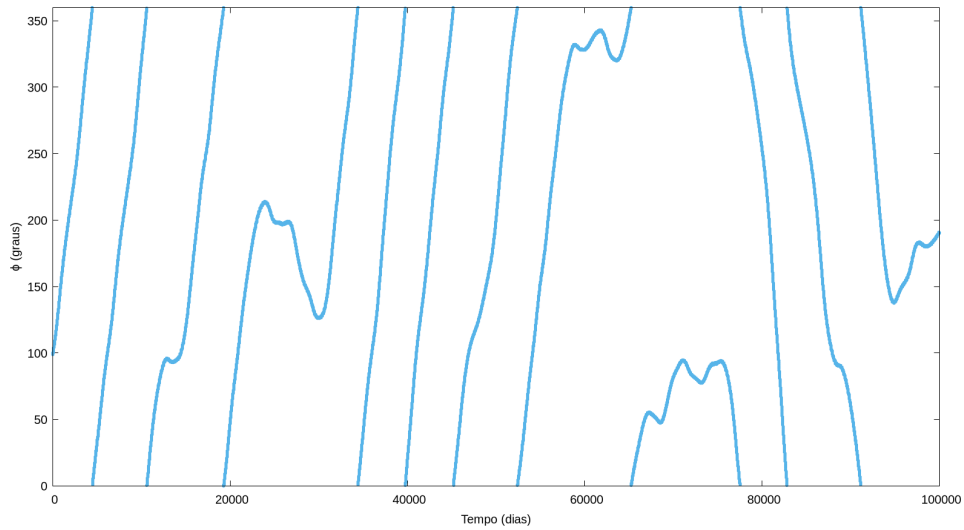
Fonte: Elaborada pelo autor.

dados em coordenadas baricêntricas. No caso em que a excentricidade não é nula, os parâmetros calculados a partir das observações de fotometria são a , e , ω e a massa dos planetas, enquanto para excentricidade nula são calculados a , M e a massa. Visto que são calculados mais parâmetros para $e \neq 0$, a precisão dos parâmetros calculados é menor, e como a ressonância depende sensivelmente dos elementos orbitais, não foi possível verificar a libração de nenhum ângulo crítico para os valores apresentados no caso 4 ($e \neq 0$) de (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023).

Ao comparar o resultado obtido para o caso $e = 0$ com o resultado de (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023), é observado que os ângulos críticos estão librando com amplitude maior na integração realizada em relação às simulações realizadas no artigo. Tal fato

Figura 5 – ϕ_{ebc} para o caso $e \neq 0$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

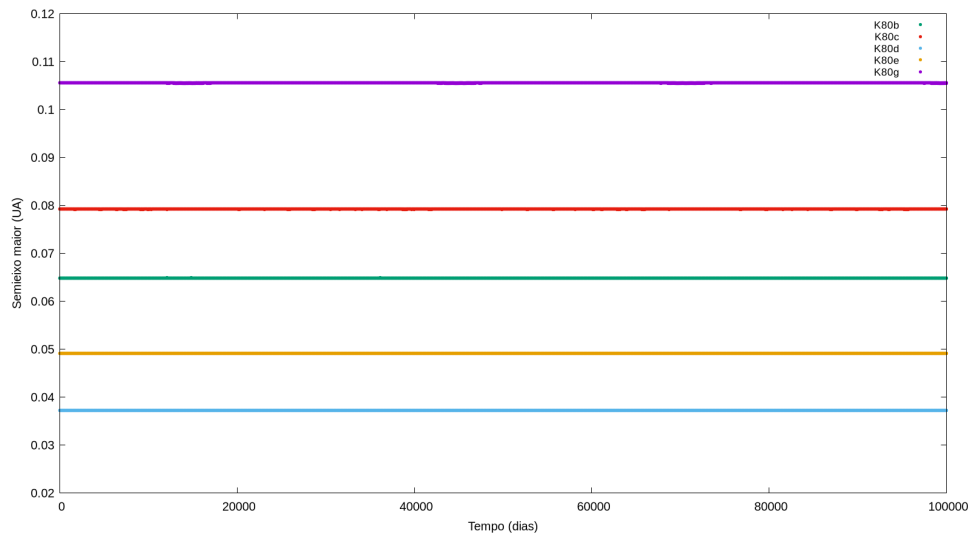
Figura 6 – ϕ_{bcg} para o caso $e \neq 0$ 

Fonte: Elaborada pelo autor.

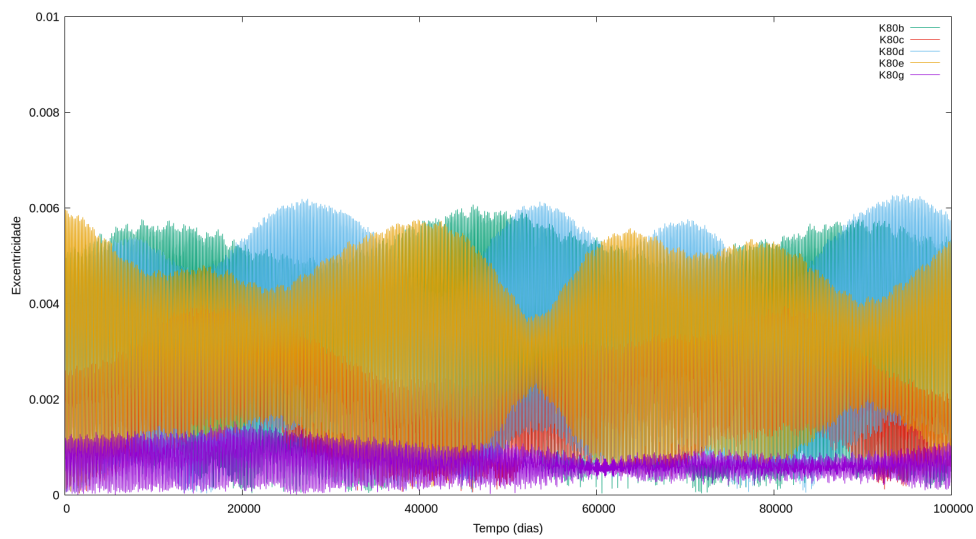
pode ser explicado pela escolha de integrador numérico, sendo utilizado o pacote *REBOUND* com o algoritmo IAS15 para realizar as integrações numéricas, além de terem sido realizadas 500 integrações com condições iniciais aleatórias dentro da margem de erro dos elementos orbitais calculados em (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023); em contraste, para este trabalho foi realizada uma única integração numérica, utilizando o algoritmo BS do integrador Mercury.

Para o caso $e = 0$, foram feitos gráficos para a análise da evolução temporal de semieixo maior e excentricidade, que estão dispostos a seguir (Figura 7 e Figura 8).

Embora todos os planetas estejam em órbitas circulares no início da integração numérica, a excentricidade evolui com o tempo como observado na Figura 8. A excentricidade final de cada

Figura 7 – Evolução temporal de a 

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Evolução temporal de e 

Fonte: Elaborada pelo autor.

planeta está incluída na tabela 3 do capítulo seguinte.

Visto que a ressonância não foi verificada para $e \neq 0$, será utilizado apenas o caso $e = 0$ para realizar o estudo do efeito da maré sobre o sistema Kepler-80. No entanto, o efeito de maré depende da excentricidade da órbita; portanto, as condições iniciais que serão utilizadas para a análise do efeito de maré são o estado final da integração numérica que apresentou ressonância utilizando os raios planetários obtidos por (MACDONALD; SHAKESPEARE; RAGOZZINE, 2021).

No próximo capítulo, serão apresentados os diferentes modelos teóricos de marés, bem como a metodologia utilizada para a análise do efeito da maré sobre a dinâmica do sistema Kepler-80.

4 EFEITOS DE MARÉ

No capítulo anterior, o sistema Kepler-80 foi tratado numericamente utilizando o integrador Mercury, que não leva em consideração o efeito da maré sobre os planetas do sistema. Neste capítulo, serão apresentados modelos que descrevem a maré tratando da perturbação gravitacional devido às dimensões dos corpos celestes, e o método numérico utilizado para resolver as equações de $\dot{a}$ e $\dot{e}$. Então, serão apresentados os resultados obtidos referentes a evolução temporal de semieixo maior e excentricidade no sistema Kepler-80.

4.1 MODELOS

O Problema de Dois Corpos, tratado anteriormente, considera a atração gravitacional entre duas massas pontuais, e devido à simplicidade do problema é possível obter uma solução exata (equação 2.16). No entanto, a aproximação de massas pontuais despreza um efeito importante, chamado de efeito de Maré, que surge devido a uma diferença de forças dentro de um corpo extenso. Nesta seção, serão apresentados modelos que descrevem este efeito, utilizando como referência o trabalho de (COELHO, 2023) e o livro de (MURRAY; DERMOTT, 1999).

4.1.1 Maré Estática

Vamos tratar inicialmente o caso de um sistema onde o corpo primário é extenso, perfeitamente fluido com massa M , e o corpo secundário possui massa m , em uma órbita circular com inclinação nula. O potencial gravitacional em um ponto P na superfície do corpo primário, devido ao corpo secundário, é

$$V = -G \frac{m}{q}, \quad (4.1)$$

onde q é a distância de P até o centro de massa de m (Figura 9).

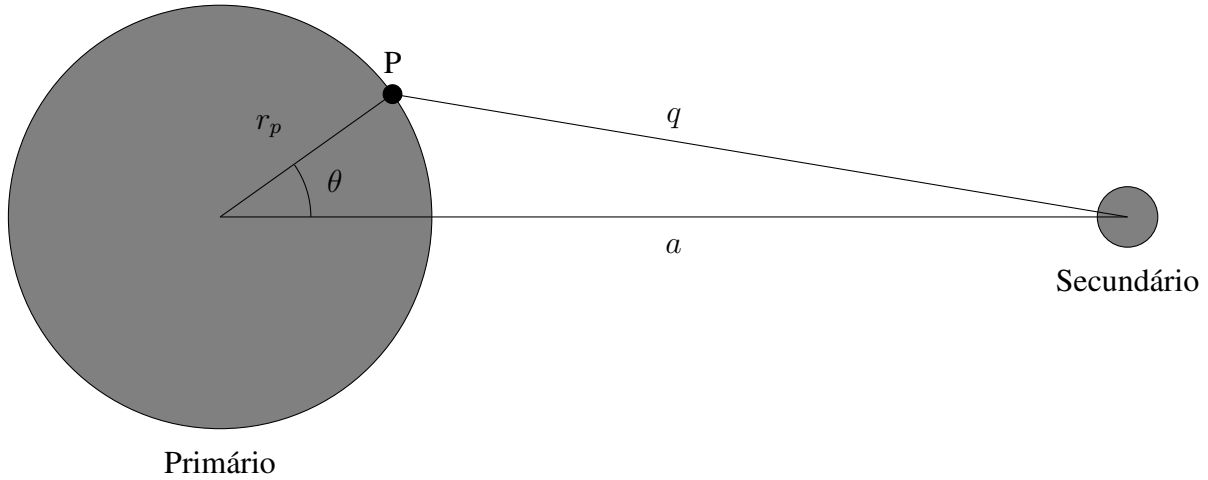
É evidente que a força gravitacional exercida sobre a superfície do corpo primário não será uniforme, pois $F \propto 1/q^2$; no entanto, a força centrífuga é igual em qualquer ponto da superfície, pois os dois corpos estão em órbita ao redor do centro de massa. Assim, há uma força resultante não nula e não uniforme que gera uma deformação na superfície do corpo primário. Para calcular esta força, vamos partir da equação (4.1).

Utilizando a lei dos cossenos (Figura 9), temos que

$$q = a \left(1 + \left(\frac{r_p}{a} \right)^2 - 2 \frac{r_p}{a} \cos(\theta) \right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Considerando $r_p \ll a$, podemos substituir a expressão de q no potencial e realizar uma expansão

Figura 9 – Corpo primário e secundário



Fonte: Adaptado de Murray (1999).

multipolar, de forma que

$$V = -\frac{Gm}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r_p}{a}\right)^n P_n(\cos \theta), \quad (4.3)$$

onde $P_n(\cos \theta)$ é o polinômio de Legendre de grau n . O primeiro termo ($n = 0$) de (4.3) corresponde a $V_0 = -Gm/a$. Visto que a separação entre o centro de ambos os corpos a é constante, o gradiente deste termo é nulo; logo, não há uma força associada. O segundo termo ($n = 1$) corresponde a $V_1 = -G(m/a^2)r_p \cos \theta$, e está associado à força que causa o movimento circular do ponto P ao redor do centro de massa. O terceiro termo ($n = 2$) corresponde a $V_2 = V_m = -G(mr_p^2/a^3)P_2(\cos \theta)$, e está associado à força de maré.

Explicitamente, temos que

$$V_m(\theta) = -G \frac{m}{2a^3} r_p^2 (3 \cos^2 \theta - 1). \quad (4.4)$$

A partir da equação (4.4), podemos notar que o valor absoluto do potencial é máximo quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, e é mínimo quando $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$. Assim, a deformação máxima do corpo primário ocorre ao longo da linha que une o centro dos corpos, enquanto a deformação mínima ocorre na direção perpendicular (Figura 10).

Uma outra maneira de escrever o potencial V_m é

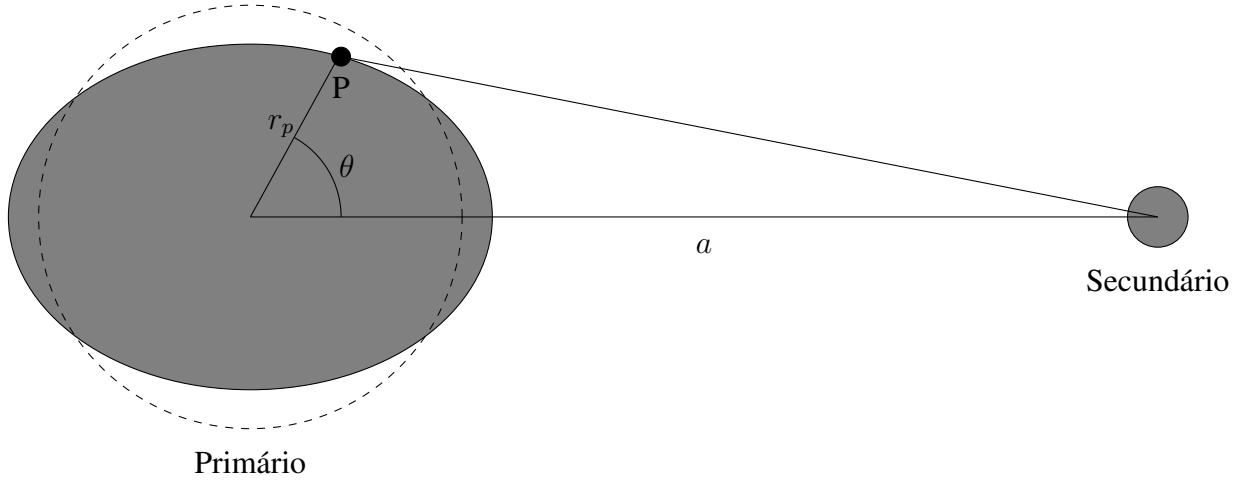
$$V_m(\theta) = -\xi g P_2(\cos \theta), \quad (4.5)$$

onde é definido

$$\xi = \frac{m}{M} \left(\frac{r_p}{a}\right)^3 r_p \quad \text{e} \quad g = \frac{GM}{r_p^2}. \quad (4.6)$$

Assim, $\xi P_2(\cos \theta)$ é a amplitude da maré para um dado valor de θ , e g é a aceleração da gravidade na superfície do corpo primário.

Figura 10 – Deformação causada no corpo primário devido ao corpo secundário



Fonte: Adaptado de Murray (1999).

É necessário também calcular o potencial gravitacional em um ponto externo ao corpo primário, considerando a deformação sofrida devido a maré. Em geral, o potencial gravitacional satisfaz a equação de Poisson; em uma região do espaço onde não há uma distribuição de massa, o potencial irá satisfazer a equação de Laplace, que pode ser escrita em coordenadas esféricas. O sistema (r, θ, ϕ) adotado é tal que r é a distância do ponto até o centro de massa do corpo primário, θ é o ângulo polar medido a partir da reta que une o centro de massa de ambos os corpos e ϕ é o ângulo azimutal medido a partir de uma direção fixa de referência. Assim, temos que

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (4.7)$$

Realizando a mudança de variável $\mu = \cos \theta$ e substituindo a solução de teste $V(r, \mu, \phi) = r^l S_l(\mu, \phi)$ (onde $S_l(\mu, \phi)$ é o harmônico esférico de grau l) na equação de Laplace, é possível eliminar a dependência da parte radial. Portanto, temos

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial S_l}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 S_l}{\partial \phi^2} + l(l + 1) S_l = 0. \quad (4.8)$$

A partir da equação (4.4), podemos utilizar o fato que a deformação devido a maré é simétrica, pois V não depende de ϕ . Assim, a equação (4.8) pode ser simplificada:

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 P_l(\mu)}{\partial \mu^2} - 2\mu \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial \mu} + l(l + 1) P_l(\mu) = 0, \quad (4.9)$$

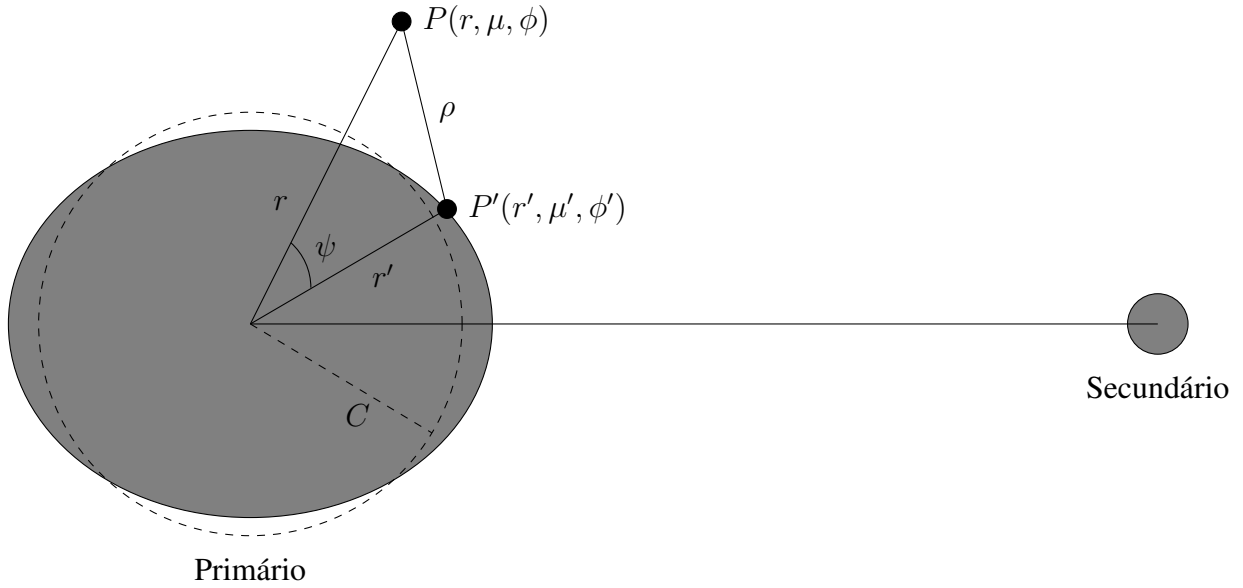
onde $P_l(\mu)$ é o polinômio de Legendre de grau l . Neste caso, utilizando o princípio da superposição e observando que a equação (4.9) não é alterada pela mudança $n \mapsto -(n + 1)$, a solução

geral para V deve ter a forma

$$V = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) P_l(\mu). \quad (4.10)$$

Vamos calcular o potencial em um ponto P fixo no espaço com coordenadas (r, μ, ϕ) devido a um corpo homogêneo cuja superfície é dada por $R(\theta') = C[1 + \epsilon_2 P_2(\cos \theta')]$, onde $\epsilon_2 \ll 1$ é uma constante e C é o raio médio (Figura 11), considerando que P é um ponto externo ao corpo.

Figura 11 – Potencial gravitacional no ponto P , considerando a deformação causada pela maré



Fonte: Adaptado de Murray (1999).

O potencial em P pode ser decomposto na soma do potencial devido a um corpo perfeitamente esférico e o potencial devido a uma pequena distribuição de massa entre o corpo deformado pela maré e a esfera de raio C . Assim, o primeiro termo do potencial será

$$V(r) = -\frac{4}{3}\pi\gamma G \frac{C^3}{r}, \quad (4.11)$$

onde γ é a densidade do corpo. Para calcular a contribuição da deformação para o potencial, consideramos um ponto P' na superfície do corpo, com coordenadas (r', μ', ϕ') . Neste ponto, a espessura da deformação é $C\epsilon_2 P_2(\mu')$, sendo o elemento de volume dado por $C^3 \epsilon_2 P_2(\mu') d\mu' d\phi'$. O potencial depende também da distância ρ entre os pontos, calculada a partir da lei dos cossenos de forma similar a equação (4.2). Utilizando o fato que $r > C$, $1/\rho$ pode ser expresso como uma série de polinômios de Legendre em $\cos \psi$. Utilizando $dV = -Gdm/\rho$ e a equação (4.11), obtemos

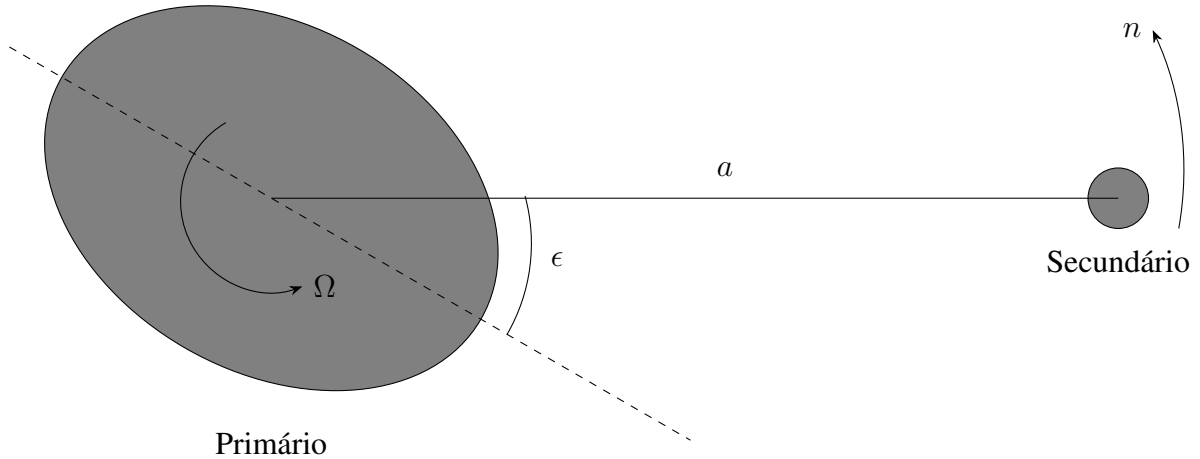
$$V(r, \theta) = -\frac{4}{3}\pi G C^3 \gamma \left[\frac{1}{r} + \frac{3C^2}{5r^3} \epsilon_2 P_2(\cos \theta) \right]. \quad (4.12)$$

4.1.2 Maré Dinâmica

Nesta seção será analisado o caso em que o corpo primário é composto por um fluido não-ideal, ou seja, um fluido viscoelástico. Devido à elasticidade do corpo, a deformação de M não será instantânea, se assemelhando ao movimento de um oscilador harmônico amortecido. Haverá também dissipação de energia interna do corpo primário, devido ao atrito do fluido; esta dissipação poderá alterar os elementos orbitais do corpo.

Neste caso, é importante levar em conta a rotação do corpo primário em torno de seu próprio eixo, denotada por Ω . No caso estático, o bojo da maré permanece alinhado com o centro de ambos os corpos, acompanhando o movimento orbital de m . No entanto, devido a diferença entre Ω e o movimento médio n do corpo secundário, o bojo da maré pode se encontrar atrasado ou adiantado em relação a m , nos casos em que $\Omega \ll n$ e $\Omega \gg n$ respectivamente (Figura 12 e Figura 13). O ângulo ϵ entre a direção do bojo da maré e a reta que une o centro de ambos os corpos é chamado ângulo de atraso.

Figura 12 – Caso 1 ($\Omega \ll n$): bojo da maré atrasado em relação ao corpo secundário



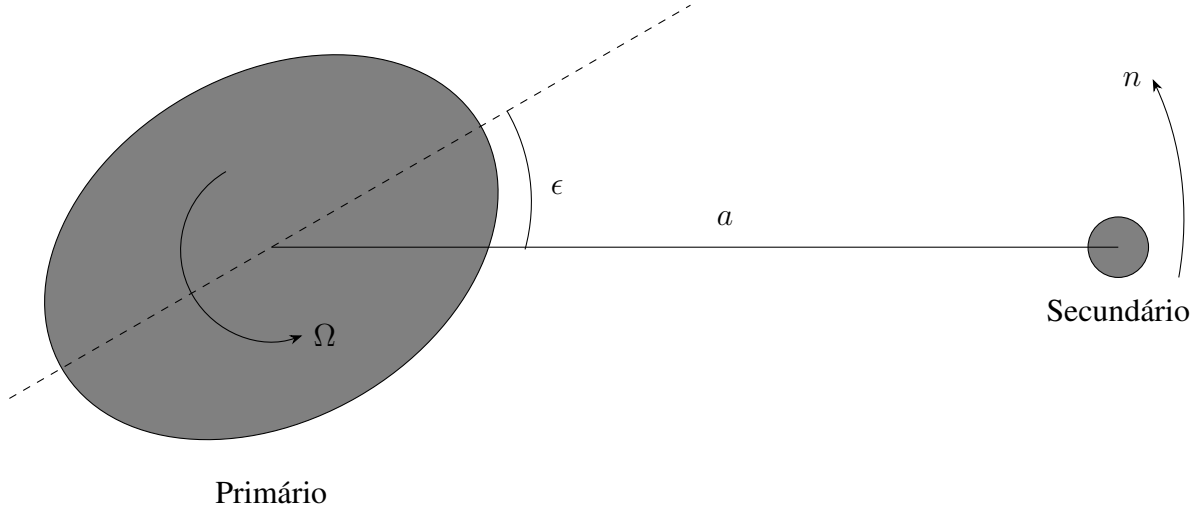
Fonte: Adaptado de Murray (1999).

Em ambos os casos, haverá uma alteração no semieixo maior da órbita. No caso 1 ($\Omega \ll n$), o corpo secundário tende a atrair o bojo em sua direção, aumentando a velocidade de rotação do corpo primário; pela conservação do momento angular, o semieixo maior deve diminuir, causando uma aproximação entre os dois corpos. No caso 2 ($\Omega \gg n$), já que o bojo está adiantado, a atração do corpo secundário causa uma diminuição da velocidade de rotação do primário, e pela conservação do momento angular o semieixo maior deve aumentar.

A fim de calcular a variação dos elementos orbitais devido à dissipação de energia, partimos da equação de um oscilador amortecido sujeito a uma força externa:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t. \quad (4.13)$$

Figura 13 – Caso 2 ($\Omega \gg n$): bojo da maré adiantado em relação ao corpo secundário



Fonte: Adaptado de Murray (1999).

Podemos reescrever a equação (4.13) para obter uma expressão para a aceleração do oscilador:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x - \frac{1}{\tau} \frac{dx}{dt} + \frac{F_0}{m} \cos \omega t, \quad (4.14)$$

onde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ é a frequência natural do oscilador, $\tau = m/\beta$ é o tempo característico, e F_0/m e ω são a amplitude e frequência da força externa, respectivamente. Realizando a substituição $x = A \cos(\omega t + \delta)$ na equação (4.14), temos que

$$A = \frac{F_0}{m} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad \text{e} \quad \sin \delta = -\frac{\omega}{\tau} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (4.15)$$

Podemos relacionar a fase δ com a função de dissipação de energia Q do oscilador, definida por

$$Q = \frac{2\pi E_0}{\Delta E}, \quad (4.16)$$

onde ΔE é a energia dissipada por ciclo e E_0 é a energia máxima armazenada no ciclo. Calculamos E_0 através do trabalho realizado pela força restauradora:

$$E_0 = \int_0^A kx dx = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \frac{1}{2} \omega_0^2 \frac{F_0^2}{m} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.17)$$

Para calcular a energia dissipada por ciclo, utilizamos a força de arrasto. O trabalho realizado em um intervalo dt para um deslocamento dx é $\beta \dot{x}$. Assim, a taxa de dissipação de energia será $\dot{E} = -\beta \dot{x}^2$. Utilizando a derivada temporal de x :

$$\dot{E} = -\beta [-\omega A \sin(\omega t + \delta)]^2. \quad (4.18)$$

Tomando a média temporal da equação (4.18) ao longo de um período de oscilação $T_0 = 2\pi/\omega$, obtemos a taxa média de variação de energia:

$$\langle \dot{E} \rangle = -\beta A^2 \omega^2 \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \sin^2(\omega t + \delta) dt \quad (4.19)$$

Assim, a taxa média de dissipação de energia é dada por

$$\langle \dot{E} \rangle = \frac{1}{2} \beta A^2 \omega^2. \quad (4.20)$$

A energia dissipada em um único ciclo é $\Delta E = \langle \dot{E} \rangle (2\pi/\omega)$, logo obtemos uma expressão pra ΔE :

$$\Delta E = \pi \frac{\omega F_0^2}{\tau m} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (4.21)$$

Substituindo o resultado das equações (4.17) e (4.21) em (4.16), podemos relacionar Q com $\sin \delta$ no caso em que não há ressonância e o amortecimento é fraco ($\omega_0^2 \gg \omega^2 \gg \omega^2/\tau^2$):

$$\sin \delta = -\frac{1}{Q}. \quad (4.22)$$

Assim como no oscilador amortecido, a maré irá dissipar energia no corpo primário, o que leva a uma fase δ na deformação do corpo devido a maré, com a relação entre o ângulo de atraso ϵ da maré e a fase dada por

$$2\epsilon = \delta = \frac{1}{Q}. \quad (4.23)$$

Devido ao desalinhamento do bojo da maré em relação ao eixo que une o centro de massa dos corpos, existe um torque resultante $\vec{N}$ que causa uma transferência de momento angular e energia entre os corpos. O torque que age sobre o corpo secundário é

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (4.24)$$

onde $\vec{F} = -m \vec{\nabla} V$ é a força que atua sobre o corpo secundário, levando em consideração a deformação do corpo primário; logo, o potencial relevante é dado pela equação (4.12). A única contribuição para o torque será devido a componente da força que não é do tipo força central, cujo termo relevante do potencial pode ser escrito utilizando o número de Love dinâmico k_2 :

$$V = -k_2 \xi g \left(\frac{C}{r} \right)^3 P_2(\cos \theta). \quad (4.25)$$

A componente da força perpendicular a direção radial é $F_\theta = -(m/r)(\partial V / \partial \theta)$. Logo, o valor absoluto do torque exercido sobre o corpo secundário é

$$|\vec{N}| = \frac{3}{2} k_2 \frac{G m^2}{a^6} C^5 \sin 2\epsilon. \quad (4.26)$$

O torque presente no sistema realiza trabalho em ambos os corpos, alterando a energia do sistema. No caso $\Omega \ll n$, a energia orbital do sistema diminui enquanto a energia rotacional do corpo primário aumenta, e no caso $\Omega \gg n$ o oposto ocorre. No entanto, em ambos os casos a energia total sempre diminui, a uma taxa

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} I \Omega^2 - G \frac{Mm}{2a} \right) = I \Omega \dot{\Omega} + G \frac{Mm}{2a^2} \dot{a}, \quad (4.27)$$

onde I é o momento de inércia do corpo primário. Utilizando a terceira lei de Kepler, obtemos

$$\dot{E} = I \Omega \dot{\Omega} + \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} n^2 a \dot{a}. \quad (4.28)$$

Embora a energia total do sistema não seja conservada, o momento angular total é conservado ($\dot{L} = 0$). Visto que o momento angular total é a soma do momento angular orbital e do momento angular devido a rotação do corpo, temos a partir da conservação do momento:

$$I \dot{\Omega} = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} n a \dot{a}. \quad (4.29)$$

Substituindo a equação (4.29) em (4.28), temos

$$\dot{E} = -\frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} n a \dot{a} (\Omega - n). \quad (4.30)$$

A variação de energia pode ser expressa também em termos do torque exercido. Para o caso $\Omega \ll n$, temos $\dot{E} = |\vec{N}|(\Omega - n)$, e para o caso $\Omega \gg n$ temos $\dot{E} = -|\vec{N}|(\Omega - n)$. Assim, utilizando as equações (4.23), (4.26) e (4.30):

$$\dot{a} = \text{sgn}(\Omega_p - n) \frac{3k_{2p}}{Q_p} \frac{m}{M} \left(\frac{C_p}{a} \right)^5 n a, \quad (4.31)$$

onde as quantidades com índice p se referem a grandezas relativas ao corpo primário.

A partir da equação (4.31), é possível calcular a variação do semieixo maior de uma órbita circular e equatorial, considerando a maré causada por um corpo secundário. É possível obter $\dot{a}$ devido a maré sobre o corpo secundário trocando $(\Omega_p, k_{2p}, Q_p, C_p)$ por $(\Omega_s, k_{2s}, Q_s, C_s)$, onde as grandezas com índice s são relativas ao corpo secundário. No entanto, para calcular a variação dos demais elementos orbitais no caso em que a órbita é excêntrica e inclinada, é necessário utilizar as equações planetárias de Lagrange.

4.2 EQUAÇÕES PLANETÁRIAS DE LAGRANGE

Para sistemas gravitacionais com múltiplas interações, o movimento orbital não pode ser descrito por soluções de forma fechada. A presença de perturbações mútuas induz uma alteração nos elementos orbitais ao longo do tempo, sendo necessário utilizar métodos de aproximação para

tratar destas perturbações. Para isso, é introduzida a função perturbadora, que está relacionada com a perturbação do potencial gravitacional em relação ao potencial do corpo central. No caso em que a maré dinâmica atua sobre ambos os corpos e as órbitas são excêntricas e inclinadas, o potencial perturbador é obtido de forma análoga à equação (4.12), a partir de uma expansão em série de polinômios de Legendre (KAULA, 1964).

A partir da função perturbadora $\mathcal{R}$, são utilizadas as equações planetárias de Lagrange para calcular a variação dos elementos orbitais. Para a variação de semieixo maior e excentricidade, as equações relevantes são (MURRAY; DERMOTT, 1999):

$$\dot{a} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} \quad (4.32)$$

$$\dot{e} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} (1 - \sqrt{1-e^2}) \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \epsilon} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \varpi} \quad (4.33)$$

onde o ângulo ϵ é a longitude média na época de referência, ou seja, $\lambda = nt + \epsilon$.

Assim, é possível obter expressões para a evolução temporal de a e e devido ao efeito de maré, considerando o mesmo como uma perturbação do problema de dois corpos. Neste caso, a função perturbadora será (BOUÉ; EFROIMSKY, 2019)

$$\mathcal{R} = -\frac{M' + M}{M'M} \left[M'U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)|_{\mathbf{r}^*=\mathbf{r}} + MU'(-\mathbf{r}', -\mathbf{r}^{*'})|_{\mathbf{r}^{*'}=\mathbf{r}'} \right], \quad (4.34)$$

onde $U(\mathbf{r}, \mathbf{r}^*)$ é o potencial de maré do corpo primário, em um ponto $\mathbf{r}$, devido ao perturbador localizado em $\mathbf{r}^*$, $U'(\mathbf{r}', \mathbf{r}^{*'})$ é o potencial de maré do corpo secundário no ponto $\mathbf{r}'$ devido ao perturbador localizado no ponto $\mathbf{r}^{*'}$, M é a massa do corpo primário e M' é a massa do corpo secundário.

Os potenciais U e U' podem ser expandidos em série e expressos em termos dos elementos orbitais. Assim, a partir das equações planetárias de Lagrange é possível obter $\dot{a}$ e $\dot{e}$ como função de a , e e i , de forma que (BOUÉ; EFROIMSKY, 2019)

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = & -2na \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (2 - \delta_{0m}) \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{lpq}^2(e) [l - 2p + q] \\ & \left[\left(\frac{R}{a} \right)^{2l+1} \frac{M'}{M} F_{lmp}^2(i) K_l(\omega_{lmpq}) + \left(\frac{R'}{a} \right)^{2l+1} \frac{M}{M'} F_{lmp}^2(i') K_l'(\omega'_{lmpq}) \right] \end{aligned} \quad (4.35)$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = & -\frac{1-e^2}{e}n\frac{1}{M'M}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^l\frac{(l-m)!}{(l+m)!}(2-\delta_{0m})\sum_{p=0}^l\sum_{q=-\infty}^{\infty}G_{lpq}^2(e)[l-2p+q] \\
& \left[\left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1}(M')^2F_{lmp}^2(i)K_l(\omega_{lmpq}) + \left(\frac{R'}{a}\right)^{2l+1}M^2F_{lmp}^2(i')K'_l(\omega'_{lmpq}) \right] + \\
& + \frac{(1-e^2)^{1/2}}{e}n\frac{1}{M'M}\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=0}^l\frac{(l-m)!}{(l+m)!}(2-\delta_{0m})\sum_{p=0}^l\sum_{q=-\infty}^{\infty}G_{lpq}^2(e)[l-2p] \\
& \left[\left(\frac{R}{a}\right)^{2l+1}(M')^2F_{lmp}^2(i)K_l(\omega_{lmpq}) + \left(\frac{R'}{a}\right)^{2l+1}M^2F_{lmp}^2(i')K'_l(\omega'_{lmpq}) \right]
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Nas equações (4.35) e (4.36), R e R' são os raios do corpo primário e secundário, i e i' são as inclinações do equador do corpo primário e secundário em relação ao plano da órbita, F_{lmp} e G_{lpq} são as funções de inclinação e excentricidade da função perturbadora (KAULA, 1964), e K_l e K'_l são as *quality functions* dos corpos primário e secundário, que estão relacionadas a resposta do corpo à maré, sendo dependentes das características físicas do corpo. Em geral, para cada modo de Fourier ω_{lmpq} da maré, o número de Love k_l e a fase de atraso δ_l podem variar, de forma que $K_l(\omega_{lmpq}) = k_l(\omega_{lmpq}) \sin \delta_l(\omega_{lmpq})$ (BOUÉ; EFROIMSKY, 2019).

Considerando $i \approx i' \approx 0$, temos os termos de quadrupolo ($l = 2$) da expansão das equações (4.35) e (4.36):

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dt} = & -3na(1-5e^2)\left[\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{a}\right)^5 K_2(2n-2\Omega) + \frac{M}{M'}\left(\frac{R'}{a}\right)^5 K'_2(2n-2\Omega')\right] \\
& - \frac{9}{4}nae^2\left[\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{a}\right)^5 K_2(n) + \frac{M}{M'}\left(\frac{R'}{a}\right)^5 K'_2(n)\right] \\
& - \frac{3}{8}nae^2\left[\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{a}\right)^5 K_2(n-2\Omega) + \frac{M}{M'}\left(\frac{R'}{a}\right)^5 K'_2(n-2\Omega')\right] \\
& - \frac{441}{8}nae^2\left[\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{a}\right)^5 K_2(3n-2\Omega) + \frac{M}{M'}\left(\frac{R'}{a}\right)^5 K'_2(3n-2\Omega')\right] + O(e^4)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt} = & -ne\frac{M'}{M}\left(\frac{R}{a}\right)^5\left[-\frac{3}{16}K_2(n-2\Omega) - \frac{3}{4}K_2(2n-2\Omega) + \frac{147}{16}K_2(3n-2\Omega) + \frac{9}{8}K_2(n)\right] \\
& - ne\frac{M}{M'}\left(\frac{R'}{a}\right)^5\left[-\frac{3}{16}K'_2(n-2\Omega') - \frac{3}{4}K'_2(2n-2\Omega') + \frac{147}{16}K'_2(3n-2\Omega') + \frac{9}{8}K'_2(n)\right] + O(e^3)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

As equações (4.37) e (4.38) são equações diferenciais de primeira ordem, não-lineares e

acopladas, e não é possível obter soluções analíticas de forma fechada para as mesmas. Assim, devem ser utilizados métodos numéricos para obter $a(t)$ e $e(t)$ para cada sistema tratado.

4.3 FUNÇÃO DE DISSIPACÃO DE ENERGIA

A função de dissipação de energia Q , como definida na equação (4.23), está diretamente relacionada a fase de atraso da maré δ . Para modelos em que o número de Love e a fase da maré não dependem do modo de Fourier da maré, a função $K_2(\omega_{2mpq})$ pode ser substituída por k_2/Q nas equações (4.37) e (4.38). Logo, para determinar o efeito de maré sobre um corpo, basta determinar o valor de Q do mesmo.

O trabalho de (JACKSON; GREENBERG; BARNES, 2008), que será discutido nessa seção, teve como um de seus objetivos determinar valores de Q em sistemas extrassolares, tanto para as estrelas quanto para os exoplanetas, em especial para sistemas em que o semieixo maior das órbitas é menor que 0,2 UA. Para isso, utilizaram as equações

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = - \left[21(GM_*^3)^{1/2} \frac{k_{2p} R_p^5}{Q_p M_p} e^2 + 3(G/M_*)^{1/2} \frac{k_{2*} R_*^5 M_p}{Q_*} \right] a^{-13/2} \quad (4.39)$$

e

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = - \left[\frac{21}{2}(GM_*^3)^{1/2} \frac{k_{2p} R_p^5}{Q_p M_p} + \frac{57}{8}(G/M_*)^{1/2} \frac{k_{2*} R_*^5 M_p}{Q_*} \right] a^{-13/2}, \quad (4.40)$$

onde M_* , R_* e Q_* são a massa, raio e função de dissipação da estrela, respectivamente, e M_p , R_p e Q_p são a massa, raio e função de dissipação do planeta, respectivamente. Além disso, utilizaram o valor do número de Love $k_{2p} = k_{2*} = 3/2$.

As equações (4.39) e (4.40) foram integradas numericamente para o passado, utilizando os valores de semieixo maior e excentricidade obtidos a partir de observações de diversos sistemas de exoplanetas, variando os parâmetros Q_* e Q_p . O intervalo de integração utilizado foi 15×10^9 anos, de forma que o resultado da integração equivale ao estado do sistema próximo do período de formação do mesmo.

Devido ao fato que o efeito de maré tende a circularizar a órbita e diminuir o semieixo maior, o resultado obtido foi um aumento da excentricidade e migração dos planetas para longe da estrela. A determinação de quais valores para Q_* e Q_p melhor representam o conjunto de sistemas estudados é feita através da relação entre os valores de e observados para exoplanetas com $a > 0,2$ UA e os valores de e após a integração.

Observando que o efeito de circularização da órbita devido a maré é proporcional a $a^{-13/2}$ (equação 4.40), exoplanetas que se formaram distantes da estrela podem manter uma excentricidade elevada, o que é observado atualmente. Embora a maioria dos exoplanetas próximos da estrela ($a < 0,2$ UA) possuam excentricidades baixas, sua formação pode ter se dado com uma alta excentricidade que foi rapidamente reduzida. Assim, ao realizar a integração para o passado de sistemas com $a < 0,2$ UA, é esperado que a distribuição de excentricidades resultante se assemelhe à distribuição observada atualmente para $a > 0,2$ UA.

A partir desta análise, os valores que foram encontrados são $Q_p = 10^{6,5}$ e $Q_* = 10^{5,5}$, que serão utilizados para a aplicação da maré no sistema Kepler-80. É estimado que valores de Q_p para os planetas gigantes do sistema solar sejam maiores que 6×10^4 (GOLDREICH; SOTER, 1966); portanto, o valor de $Q_p = 10^{6,5}$ para exoplanetas é consistente com observações de planetas do sistema solar.

4.4 APLICAÇÃO DA MARÉ PARA O SISTEMA KEPLER-80

Para analisar o efeito de maré sobre o sistema Kepler-80, serão utilizados dois conjuntos de equações: as equações (4.37) e (4.38), e as equações (4.39) e (4.40), utilizando os valores de Q_p e Q_* obtidos por (JACKSON; GREENBERG; BARNES, 2008). Para as equações (4.37) e (4.38), será feita a aproximação $K_2(\omega_{2mpq}) = K_2 = k_2/Q$. Assim, as equações se reduzem a

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = - \left(3 + \frac{171}{4} e^2 \right) \left[\frac{M_*}{M_p} \frac{R_p^5 k_{2p}}{Q_p} + \frac{M_p}{M_*} \frac{R_*^5 k_{2*}}{Q_*} \right] n a^{-5}, \quad (4.41)$$

e

$$\frac{1}{e} \frac{de}{dt} = - \frac{75}{8} \left[\frac{M_*}{M_p} \frac{R_p^5 k_{2p}}{Q_p} + \frac{M_p}{M_*} \frac{R_*^5 k_{2*}}{Q_*} \right] n a^{-5}. \quad (4.42)$$

As equações (4.39) e (4.40) são diferentes das equações (4.41) e (4.42), e a diferença se dá devido as considerações feitas acerca de $K_2(\omega_{2mpq})$. Para obter as equações (4.39) e (4.40) a partir de (4.35) e (4.36), é necessário considerar que a velocidade de rotação da estrela é maior que $3n/2$, a velocidade de rotação do planeta é igual ao movimento médio, e $n = \sqrt{GM_*/a^3}$ (BOUÉ; EFROIMSKY, 2019).

Embora a velocidade de rotação da estrela do sistema Kepler-80 não seja conhecida, podemos utilizar a velocidade de rotação do Sol para analisar o sistema, devido à similaridade das duas estrelas. O período de rotação do Sol é de 25,67 dias (LANG, 2013), que corresponde a uma velocidade angular $\Omega = 2\pi/T \approx 2,833 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$. O raio síncrono de uma órbita é tal que $n = \Omega$, portanto para o sistema Kepler-80 o raio síncrono de uma órbita ao redor da estrela é $a_{syn} \approx 0,13 \text{ UA}$. Visto que o planeta mais externo, Kepler-80g, está a aproximadamente 0,1 UA, todos os planetas se encontram internos a a_{syn} , tendo movimento médio maior que a velocidade de rotação da estrela.

Para realizar a integração numérica de $\dot{a}$ e $\dot{e}$, foi escrito um programa em Python, que utiliza a função *solve_ivp* da biblioteca SciPy (VIRTANEN et al., 2020), capaz de resolver um conjunto de equações diferenciais acopladas para um determinado conjunto de condições iniciais. O programa escrito está apresentado no apêndice B.

As condições iniciais utilizadas para os planetas do sistema foram aquelas obtidas a partir da integração numérica realizada para a verificação da ressonância, e estão dispostos abaixo na tabela (3). Além disso, a utilização das equações (4.39), (4.40), (4.41) e (4.42) leva em consideração que a inclinação é pequena, que é válido para o sistema analisado. Para a estrela, foram adotados os mesmos parâmetros da integração numérica, $M = 0,73 M_\odot$ e $R = 0,678 R_\odot$.

Assim como em (JACKSON; GREENBERG; BARNES, 2008), foi utilizado $k_{2p} = k_{2*} = 3/2$, e $Q_p = 10^{6,5}$ e $Q_* = 5, 5$.

Tabela 3 – Condições iniciais para a análise do efeito de maré

Parâmetro	Kepler-80d	Kepler-80e	Kepler-80b	Kepler-80c	Kepler-80g
Semieixo maior (UA)	0,03724	0,04906	0,06482	0,07916	0,10549
Excentricidade	0,00555	0,00510	0,00504	0,00185	0,00051
Massa ($M_{\oplus}$)	4,1	6,3	4,5	4,0	0,8
Raio ($R_{\oplus}$)	1,309	1,330	2,367	2,507	1,05

Fonte: Elaborada pelo autor.

A função *solve_ivp* permite a utilização de diversos algoritmos para obter a solução numérica das equações diferenciais. O algoritmo utilizado foi o DOP853, que utiliza o método de Runge-Kutta de oitava ordem, fornecendo boa precisão para o problema com os valores padrões de tolerância para os erros, sendo a tolerância relativa (que controla a quantidade de dígitos corretos) igual a 10^{-3} e a tolerância absoluta (que controla a quantidade de casas decimais corretas) igual a 10^{-6} . Valores menores de tolerância foram testados, porém visto que o resultado não se alterou, foram mantidos os valores padrões. As equações para $\dot{a}$ e $\dot{e}$ foram integradas por um período de 10^{12} anos, com passo de saída de 2×10^7 anos. A partir das integrações, foram feitos gráficos dos resultados utilizando a biblioteca Matplotlib (HUNTER, 2007), que serão apresentados a seguir.

4.5 RESULTADOS

Os resultados obtidos serão apresentados em duas seções, sendo a primeira referente aos resultados obtidos utilizando as equações (4.39) e (4.40), e a segunda referente aos resultados obtidos utilizando as equações (4.41) e (4.42).

4.5.1 Caso 1

A partir da solução das equações (4.39) e (4.40), foi feita a tabela 4 contendo os resultados da simulação: semieixo maior e excentricidade ao final da integração, variação total de semieixo maior e excentricidade, e tempo de colisão. Foram feitos gráficos para a análise da evolução temporal de semieixo maior (Figura 14) e excentricidade (Figura 15).

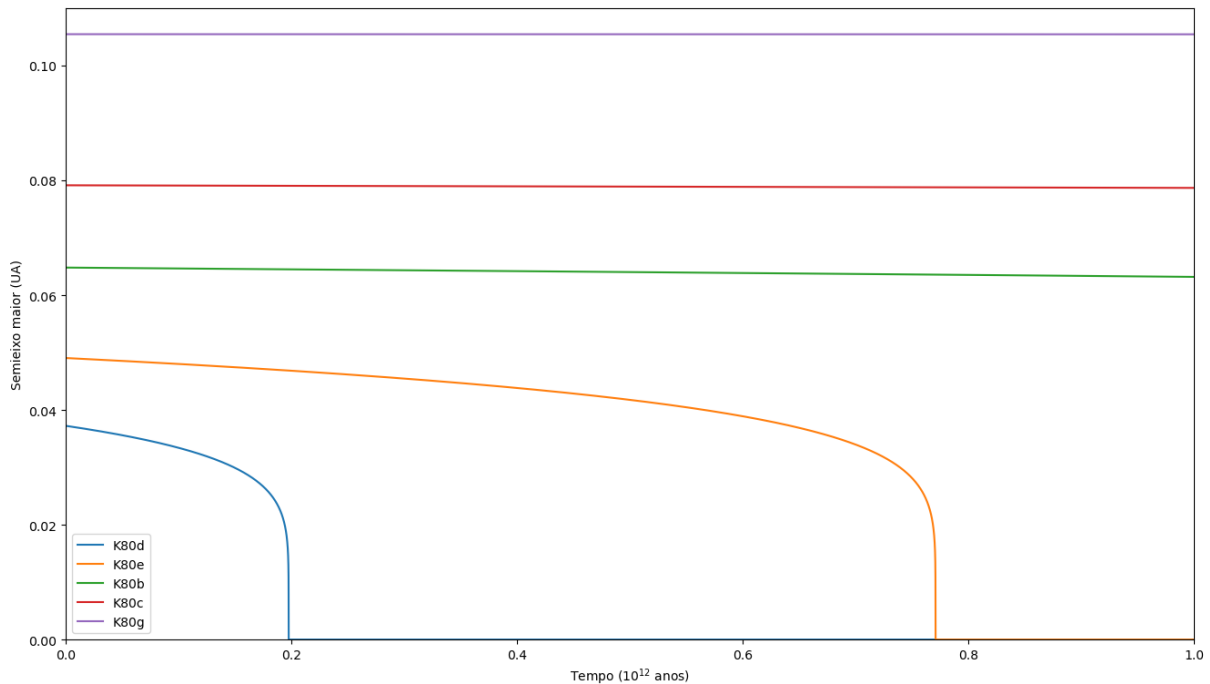
Tabela 4 – Resultados da simulação numérica (caso 1)

Parâmetro	Kepler-80d	Kepler-80e	Kepler-80b	Kepler-80c	Kepler-80g
a_{final} (UA)	0	0	0,06320	0,07870	0,10547
$ \Delta a $ (UA)	0,03724	0,04906	0,00162	0,00045	$1,84 \times 10^{-5}$
e_{final}	0	0	0,00199	0,00131	0,00051
$ \Delta e $	0,00555	0,00510	0,00305	0,00054	$1,87 \times 10^{-6}$
t_c (anos)	$1,9738 \times 10^{11}$	$7,7074 \times 10^{11}$	—	—	—

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir da Figura 14, é possível observar que os dois planetas mais internos colidem com a estrela ($a < R_*$), com a colisão do planeta Kepler-80d ocorrendo após aproximadamente $1,9 \times 10^{11}$ anos e a colisão do planeta Kepler-80e ocorrendo após aproximadamente $7,7 \times 10^{11}$ anos. Ao mesmo tempo, a variação de a dos três planetas mais externos é significativamente menor, sendo $\Delta a \approx 2,5\%$ de a para o planeta Kepler-80b, e menor que 1% para os planetas Kepler-80c e Kepler-80g.

Figura 14 – Evolução temporal de semieixo maior



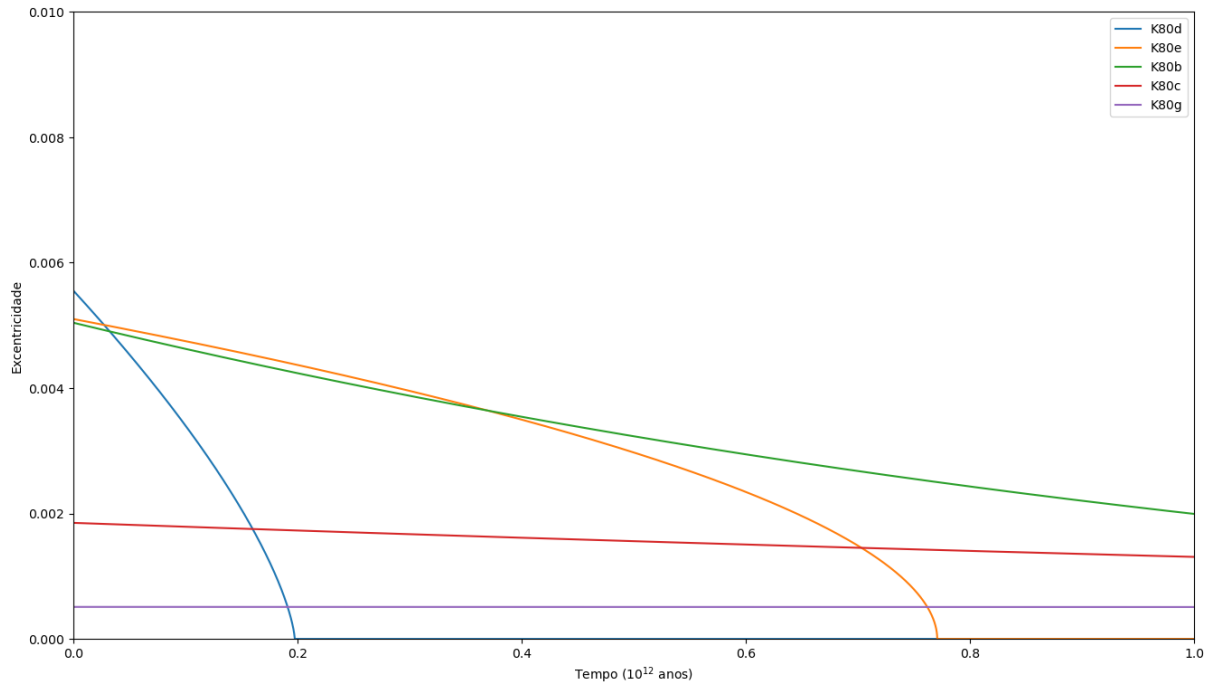
Fonte: Elaborada pelo autor.

O efeito de circularização das órbitas pode ser observado a partir da Figura 15. É possível notar que os planetas Kepler-80d e Kepler-80e, que colidem com a estrela, tem excentricidade final nula, enquanto os planetas Kepler-80b, Kepler-80c e Kepler-80g, que sobrevivem durante todo o período de integração, não tem suas órbitas totalmente circularizadas. O efeito de circularização é mais significativo para o planeta Kepler-80b, apresentando uma redução de aproximadamente 60% de sua excentricidade, enquanto o planeta Kepler-80c apresenta uma redução de aproximadamente 29%, e o planeta Kepler-80g apresenta uma redução menor que 1%.

Para comparar o efeito da maré sobre ambos os parâmetros, foi feito também um gráfico que mostra a relação entre a e e (Figura 16). Neste gráfico, a condição inicial de cada planeta está no ponto (a, e) na ponta superior direita de sua respectiva curva, sendo que a curva se aproxima da origem com o passar do tempo.

Como esperado, o efeito da maré é maior sobre os planetas mais internos do sistema, causando colisão dos dois planetas mais internos e diminuindo a excentricidade dos planetas sobreviventes.

Figura 15 – Evolução temporal de excentricidade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Além disso, é observado que o efeito é mais eficiente para circularizar as órbitas do que para causar migração.

4.5.2 Caso 2

A partir da solução das equações (4.41) e (4.42), foi montada a tabela 5, que contém os resultados da integração numérica.

Tabela 5 – Resultados da simulação numérica (caso 2)

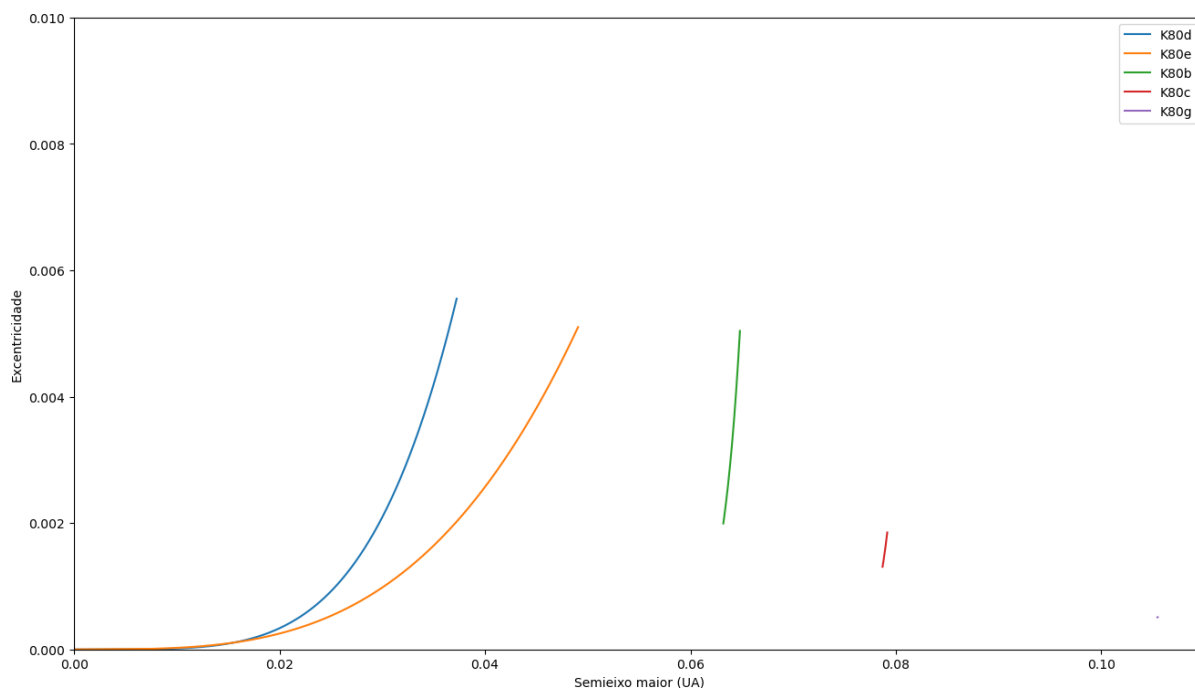
Parâmetro	Kepler-80d	Kepler-80e	Kepler-80b	Kepler-80c	Kepler-80g
a_{final} (UA)	0	0	0	0,06751	0,10537
$ \Delta a $ (UA)	0,03724	0,04906	0,06482	0,01164	0,00012
e_{final}	0	0	0	0,00112	0,00051
$ \Delta e $	0,00555	0,00510	0,00504	0,00072	$1,77 \times 10^{-6}$
t_c (anos)	$1,2250 \times 10^{11}$	$6,0196 \times 10^{11}$	$6,1062 \times 10^{11}$	—	—

Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como no caso anterior, foram feitos gráficos que mostram a evolução temporal do semieixo maior (Figura 17) e da excentricidade (Figura 18), assim como a variação de excentricidade por semieixo maior (Figura 19).

A partir da Figura 17, notamos que os dois planetas internos colidem com a estrela assim como no caso anterior, porém a colisão se dá em um tempo menor, ocorrendo aproximadamente $7,4 \times 10^{10}$ anos antes para o planeta Kepler-80d, e aproximadamente $1,7 \times 10^{11}$ anos antes para o planeta Kepler-80e. Neste caso, o planeta Kepler-80b também colide com a estrela, enquanto no

Figura 16 – Variação de excentricidade por semieixo maior



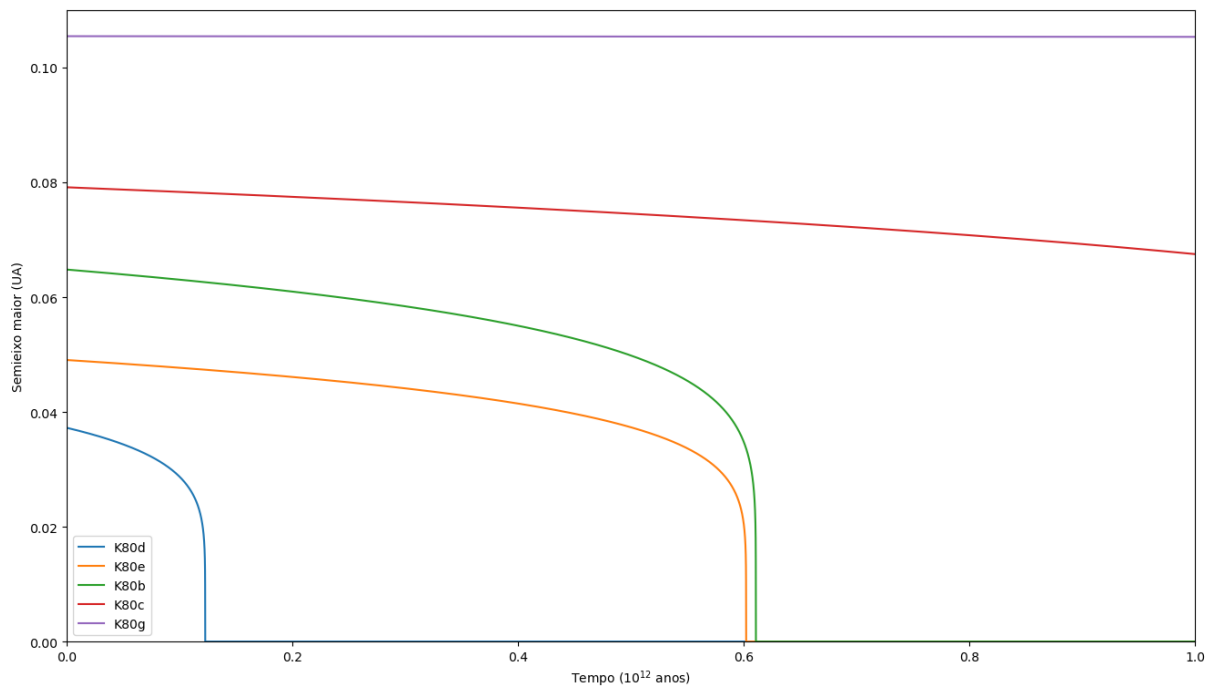
Fonte: Elaborada pelo autor.

caso anterior o mesmo não era observado. Além disso, o efeito de migração é mais significativo para os planetas Kepler-80c e Kepler-80g do que no caso anterior, sendo $|\Delta a|$ aproximadamente 26 vezes maior para o planeta Kepler-80c e aproximadamente 6,5 vezes maior para o planeta Kepler-80g.

Observando a Figura 18, notamos que o efeito de circularização das órbitas para este caso é similar ao caso anterior para os planetas sobreviventes, com o planeta Kepler-80c apresentando uma redução de 39% de sua excentricidade, e o planeta Kepler-80g apresentando uma redução menor que 1%.

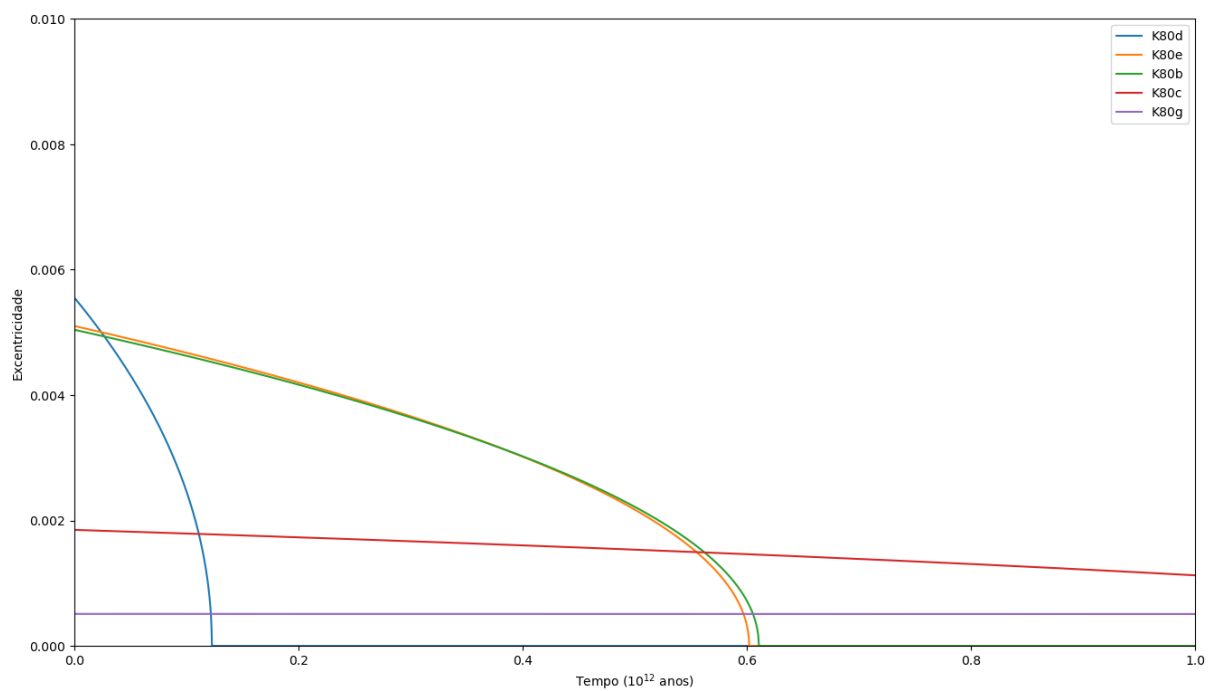
A partir da Figura 19, observamos novamente que o efeito da maré é mais intenso para os planetas mais próximos da estrela, levando à colisão dos três planetas internos. Além disso, o planeta Kepler-80c sofre uma alteração significativa em seu semieixo maior, enquanto o planeta Kepler-80g, que é o mais externo, não tem seus elementos orbitais alterado significativamente.

Figura 17 – Evolução temporal de semieixo maior



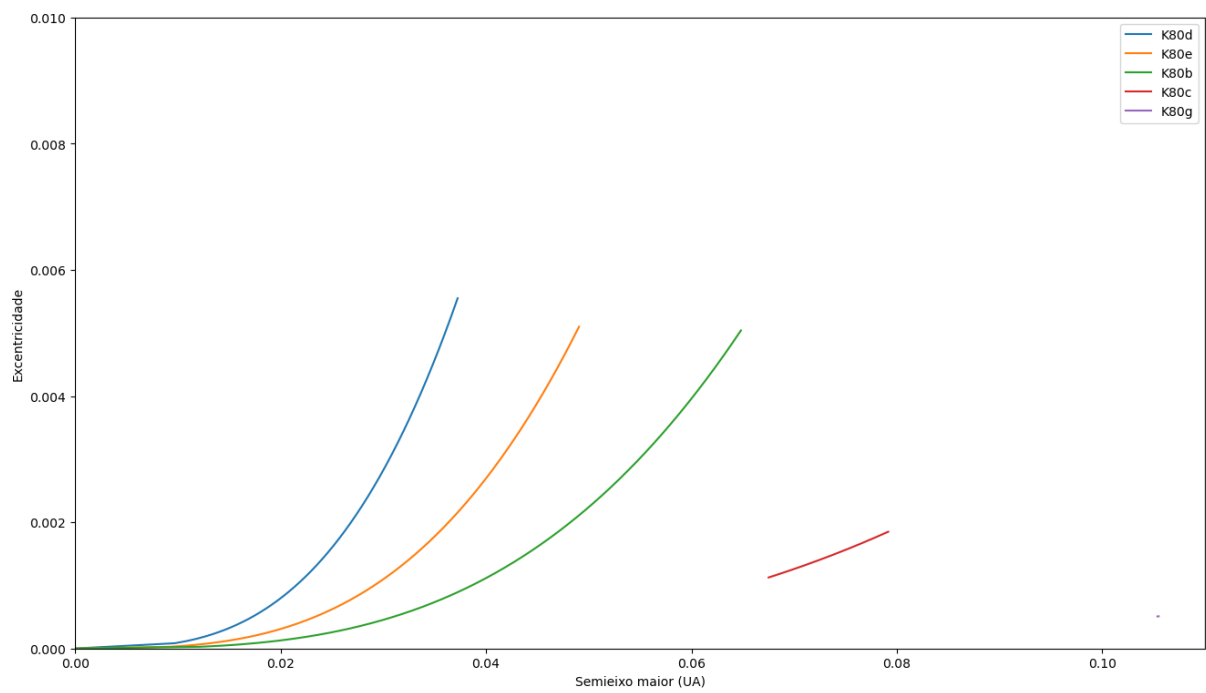
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Evolução temporal de excentricidade



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Variação de excentricidade por semieixo maior



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi estudado o sistema de exoplanetas Kepler-80, considerando dois objetivos: conferir a existência da cadeia de ressonância de movimento médio e explorar o efeito da maré sobre os elementos orbitais dos planetas do sistema.

Para realizar estes objetivos, foi necessário o estudo da teoria da mecânica celeste, envolvendo o problema de dois corpos, a perturbação dos elementos orbitais no problema de N corpos, a ressonância de movimento médio utilizando a libração do ângulo crítico, e a teoria de marés. Também foi necessária a utilização prática de ferramentas computacionais para tratar numericamente dos problemas que não possuem solução analítica, sendo as ferramentas utilizadas o pacote Mercury para realizar a integração numérica do problema de N corpos e a biblioteca SciPy da linguagem Python para integrar as equações de $\dot{a}$ e $\dot{e}$.

Utilizando a teoria aplicada para o sistema Kepler-80, foi possível verificar a cadeia de ressonância de movimento médio como em (WEISSERMAN; BECKER; VANDERBURG, 2023), porém apenas para o caso de órbitas circulares. Utilizando o sistema em ressonância, foi aplicado o efeito de maré para a análise da evolução do semieixo maior e excentricidade das órbitas, cujo resultado foi a colisão dos planetas internos, e a migração/circularização das órbitas dos planetas sobreviventes.

Próximos passos para este trabalho podem envolver a análise da formação planetária considerando o efeito de maré durante os estágios iniciais do sistema e a sua influência para o estabelecimento da cadeia de ressonância da forma que é observada atualmente; a análise da dinâmica de partículas situadas entre os planetas enquanto os mesmos estão sujeitos à maré, utilizando por exemplo a técnica de mapa de frequências; a integração numérica do sistema sujeito ao efeito da maré, utilizando o pacote REBOUNDx, para verificar se o sistema permanece na configuração de ressonância; e a inclusão de um fator dissipativo nas curvas de luz dos trânsitos utilizados para a obtenção dos elementos orbitais do sistema Kepler-80.

REFERÊNCIAS

- ADMINISTRAÇÃO NACIONAL DA AERONÁUTICA E ESPAÇO. **NASA Exoplanet Archive**. NASA, 2011. Disponível em: <https://exoplanetarchive.ipac.caltech.edu/>. Acesso em: 30 out. 2025.
- ADMINISTRAÇÃO NACIONAL DA AERONÁUTICA E ESPAÇO. **NASA Science**. NASA, 2025. Disponível em: <https://science.nasa.gov/exoplanets/planet-types/>. Acesso em: 31 out. 2025.
- ARMITAGE, P. J. **Planet formation theory: an overview**. 2025.
- BOUÉ, G.; EFROIMSKY, M. Tidal evolution of the keplerian elements. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**, v. 131, n. 7, p. 30, 2019.
- CHAMBERS, J. E. A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, Oxford, v. 304, n. 4, p. 793–799, 1999.
- COELHO, K. G. M. **Dissipação por maré em Saturno e o impacto na expansão orbital de Mimas**. 2023. Dissertação (Mestrado em Astronomia) — Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2023.
- GOLDREICH, P.; SOTER, S. Q in the solar system. **Icarus**, v. 5, n. 1, p. 375–389, 1966.
- HARRIS, C. R. et al. Array programming with numpy. **Nature**, v. 585, n. 7825, p. 357–362, 2020.
- HUNTER, J. D. Matplotlib: A 2d graphics environment. **Computing in Science & Engineering**, v. 9, n. 3, p. 90–95, 2007.
- JACKSON, B.; GREENBERG, R.; BARNES, R. Tidal evolution of close-in extrasolar planets. **The Astrophysical Journal**, v. 678, n. 2, p. 1396–1406, 2008.
- KAULA, W. M. Tidal dissipation by solid friction and the resulting orbital evolution. **Reviews of Geophysics**, v. 2, n. 4, p. 661–685, 1964.
- LANG, K. R. **Essential Astrophysics**. [S.l.]: Springer Berlin, 2013.
- MACDONALD, M. G. et al. A dynamical analysis of the kepler-80 system of five transiting planets. **The Astronomical Journal**, Washington, v. 152, n. 4, p. 105, 2016.
- MACDONALD, M. G.; SHAKESPEARE, C. J.; RAGOZZINE, D. A five-planet resonant chain: Reevaluation of the kepler-80 system. **The Astronomical Journal**, Washington, v. 162, n. 3, p. 114, 2021.
- MURRAY, C. D.; DERMOTT, S. F. **Solar System Dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- SHALLUE, C. J.; VANDERBURG, A. Identifying exoplanets with deep learning: A five planet resonant chain around kepler-80 and an eighth planet around kepler-90. **The Astronomical Journal**, v. 155, n. 2, p. 94, 2018.

VIRTANEN, P. et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. **Nature Methods**, v. 17, p. 261–272, 2020.

WEISSERMAN, D.; BECKER, J. C.; VANDERBURG, A. Kepler-80 revisited: Assessing the participation of a newly discovered planet in the resonant chain. **The Astronomical Journal**, Washington, v. 165, n. 3, p. 89, 2023.

XIE, J.-W. Transit timing variation of near-resonance planetary pairs: Confirmation of twelve multiple planet systems. **The Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 208, n. 2, 2012.

APÊNDICE A – CÁLCULO DO ÂNGULO CRÍTICO

```

import numpy as np
def main():
    arquivo_d = "K80d.aei"
    arquivo_e = "K80e.aei"
    arquivo_b = "K80b.aei"
    arquivo_c = "K80c.aei"
    arquivo_g = "K80g.aei"
    output = ["deb.txt", "cbe.txt", "gcb.txt"]
    coefs = [
        (2, -5, 3), #deb
        (2, -3, 1), #cbe
        (1, -2, 1) #gcb
    ]
    orb_d = elementos(arquivo_d)
    orb_e = elementos(arquivo_e)
    orb_b = elementos(arquivo_b)
    orb_c = elementos(arquivo_c)
    orb_g = elementos(arquivo_g)
    planetas = [
        (orb_d, orb_e, orb_b), #deb
        (orb_c, orb_b, orb_e), #cbe
        (orb_g, orb_c, orb_b) #gcb
    ]
    for (planeta, coeffs, output_arquivo) in zip(planetas, coefs, output):
        angulo_ressonante = calc_angulo(*planeta, coeffs)
        angulo_graus = np.degrees(angulo_ressonante)
        np.savetxt(output_arquivo, angulo_graus, fmt="%.6f")

def elementos(arquivo):
    dados = np.loadtxt(arquivo, usecols=(1, 2, 3))
    return np.radians(dados)

def calc_angulo(orb1, orb2, orb3, coeffs):
    k1, k2, k3 = coeffs
    lambda1 = orb1[:, 2] + orb1[:, 1] + orb1[:, 0]
    lambda2 = orb2[:, 2] + orb2[:, 1] + orb2[:, 0]
    lambda3 = orb3[:, 2] + orb3[:, 1] + orb3[:, 0]
    phi = (k1 * lambda1 + k2 * lambda2 + k3 * lambda3)
    phi = np.mod(phi, 2 * np.pi) #limita para o intervalo [0,2pi)
    return phi

if __name__ == "__main__":
    main()

```

APÊNDICE B – CÁLCULO DO EFEITO DE MARÉ

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

#constantes
G = 6.674e-11 #SI
AU = 1.496e11
DIA = 86400
ANO = 365*DIA
MSOL = 1.989e30 #kg
RSOL = 6.957e8 #metros
MTERRA = 5.972e24 #kg
RTERRA = 6.378e6 #metros
QE = 10**(5.5)
QP = 10**(6.5)
k2 = 3/2

#sistema
massaEstrela = 0.73 * MSOL
raioEstrela = 0.678 * RSOL
nomeCorpos = ['K80d', 'K80e', 'K80b', 'K80c', 'K80g']
nomeSistema = 'Kepler-80'
massaPlanetas = np.array([4.1, 6.3, 4.5, 4.0, 0.8]) * MTERRA
raioPlanetas = np.array([1.309, 1.330, 2.367, 2.507, 1.05]) * RTERRA
a_inicial = np.array([0.03724, 0.04906, 0.06482, 0.07916, 0.10549]) * AU
excentricidade_inicial = np.array([0.00555, 0.00510, 0.00504, 0.00185, 0.00051])

#parâmetros
metodo = 'boue' #opções: 'jackson' ou 'boue'
t_0 = 0.0 #início do intervalo de saída (segundos)
t_f = 1e12 * ANO #final do intervalo de saída
num_pontos = 50000 #número de pontos da saída
plt.rcParams["figure.figsize"] = (16,9) #resolução dos gráficos

intervalo = np.linspace(t_0, t_f, num_pontos, endpoint=True)
num_corpos = massaPlanetas.size

#funções
def movmedio(a, const_massa):
    return np.sqrt(const_massa/(a**3))

```

```

def semieixo_jackson(planeta, #massa, raio
                      estrela, #massa, raio
                      a, e):
    resultado=21*np.sqrt(G*estrela[0]**3)*(planeta[1]**5)*(e**2)/(QP*planeta[0])
    resultado+=3*np.sqrt(G/estrela[0])*(estrela[1]**5)*planeta[0]/QE
    if a <= 1:
        resultado *= 0
    resultado *= -1 * k2 * np.power(a, -5.5)
    return np.float64(resultado)

def excentricidade_jackson(planeta, #massa, raio
                           estrela, #massa, raio
                           a, e):
    resultado=10.5*np.sqrt(G*estrela[0]**3)*(planeta[1]**5)/(QP*planeta[0])
    resultado+=7.125*np.sqrt(G/estrela[0])*(estrela[1]**5)*planeta[0]/QE
    if a <= 1:
        resultado *= 0
    resultado *= -1 * k2 * np.power(a, -6.5) * e
    return np.float64(resultado)

def semieixo_boue(planeta, #massa, raio
                  estrela, #massa, raio
                  a, e):
    n = movmedio(a, G * estrela[0])
    fator_comum=((planeta[0]/estrela[0])*(estrela[1]/a)**5*(k2/QE))+\
        ((estrela[0]/planeta[0])*(planeta[1]/a)**5*(k2/QP))
    resultado=n*(3+(42.75*(e**2)))*fator_comum
    resultado*=-1*a
    return np.float64(resultado)

def excentricidade_boue(planeta, #massa, raio
                        estrela, #massa, raio
                        a, e):
    n = movmedio(a, G * estrela[0])
    fator_comum=((planeta[0]/estrela[0])*(estrela[1]/a)**5*(k2/QE))+\
        ((estrela[0]/planeta[0])*(planeta[1]/a)**5*(k2/QP))
    resultado=9.375*n*fator_comum
    resultado*=-1*e
    return np.float64(resultado)

def mare(t, y, metodo, planeta, estrela):
    yponto = [0.0, 0.0]
    a = y[0]
    e = y[1]
    if metodo == 'jackson':
        yponto[0] = semieixo_jackson(planeta, estrela, a, e)
        yponto[1] = excentricidade_jackson(planeta, estrela, a, e)

```

```

    if metodo == 'boue':
        yponto[0] = semieixo_boue(planeta, estrela, a, e)
        yponto[1] = excentricidade_boue(planeta, estrela, a, e)
    return yponto

def colisao(t, y, metodo, planeta, estrela):
    a = y[0]
    return a - raioEstrela

colisao.terminal = True

#integração
semieixo = np.zeros((num_corpos, num_pontos))
excentricidade = np.zeros((num_corpos, num_pontos))
tempo = intervalo / ANO

for i in range(num_corpos):
    resultado = solve_ivp(mare,
        (t_0, t_f),
        [a_inicial[i], excentricidade_inicial[i]],
        method='DOP853', #método Runge-Kutta de ordem 8
        t_eval=intervalo,
        args=(metodo, [massaPlanetas[i], raioPlanetas[i]], [massaEstrela, raioEstrela]),
        events=colisao
    )
    print(resultado.message)
    for k in range(resultado.t.size):
        semieixo[i][k] = resultado.y[0][k] / AU
        excentricidade[i][k] = resultado.y[1][k]

#arquivos de saída
with open(f'semieixo_{metodo}.txt', 'wb') as arquivo:
    np.savetxt(arquivo, np.c_[intervalo/ANO, semieixo[0], semieixo[1], semieixo[2],\
        semieixo[3], semieixo[4]], fmt=['%.4e', '%.7f', '%.7f', '%.7f', '%.7f', '%.7f'])

with open(f'excentricidade_{metodo}.txt', 'wb') as arquivo:
    np.savetxt(arquivo, np.c_[intervalo/ANO, excentricidade[0], excentricidade[1],\
        excentricidade[2], excentricidade[3], excentricidade[4]], fmt=['%.4e', '%.7f',\
        '%.7f', '%.7f', '%.7f', '%.7f'])

#gráficos
for i in range(num_corpos):
    plt.plot(semieixo[i], excentricidade[i], label=nomeCorpos[i])
plt.xlim(0.0, 0.11)
plt.ylim(0.0, 0.01)
plt.xlabel('Semieixo maior (UA)')
plt.ylabel('Excentricidade')

```

```

plt.legend()
plt.savefig(f'axe_{metodo}_{nomeSistema}.png', bbox_inches='tight')
plt.close()

for i in range(num_corpos):
    plt.plot(tempo/1e12, semieixo[i], label=nomeCorpos[i])
plt.xlim(0, tempo[-1]/1e12)
plt.ylim(0, 0.11)
plt.xlabel('Tempo ( $10^{12}$  anos)')
plt.ylabel('Semieixo maior (UA)')
plt.legend()
plt.savefig(f'axt_{metodo}_{nomeSistema}.png', bbox_inches='tight')
plt.close()

for i in range(num_corpos):
    plt.plot(tempo/1e12, excentricidade[i], label=nomeCorpos[i])
plt.xlim(0, tempo[-1]/1e12)
plt.ylim(0, 0.01)
plt.xlabel('Tempo ( $10^{12}$  anos)')
plt.ylabel('Excentricidade')
plt.legend()
plt.savefig(f'ext_{metodo}_{nomeSistema}.png', bbox_inches='tight')
plt.close()

```