



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Faculdade de Engenharia - Campus de Bauru

**Comportamento Hidrodinâmico de uma Película Líquida
Descendente em Placa Plana**

Edson Fernando Batochio

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia da Unesp - Campus de Bauru,
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Industrial.

Bauru - SP.

Fevereiro - 2002



**COMPORTAMENTO HIDRODINÂMICO DE UMA PELÍCULA LÍQUIDA
DESCENDENTE EM PLACA PLANA**

EDSON FERNANDO BATOCHIO

**Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia da UNESP – Campus de Bauru,
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Industrial.**

**BAURU - SP
fevereiro – 2002**

*unesp
CI
m. claus*

00- CAPES 3.00.00 00- 9- Engenharias
Filme descendente - Comportamento de
Distribuição de líquido entrada Hidrodinâmica

unesp  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**
Faculdade de Engenharia
Campus de Bauru

Número de chamada:
Clas. T/UNES
PHA 0337e
Tombo n.º 1010



A

COMPORTAMENTO HIDRODINÂMICO DE UMA PELÍCULA LÍQUIDA DESCENDENTE EM PLACA PLANA

EDSON FERNANDO BATOCHIO



Orientador: Prof. Dr. Alcides Padilha

Dissertação apresentada à Faculdade de
Engenharia da UNESP – Campus de Bauru,
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Industrial.

BAURU – SP
fevereiro – 2002





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia
Campus de Bauru



COMPORTAMENTO HIDRODINÂMICO DE UMA PELÍCULA LÍQUIDA
DESCENDENTE EM PLACA PLANA

Ficha catalográfica elaborada por
DIVISÃO TÉCNICA DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO
UNESP - Bauru

Batochio, Edson Fernando

Comportamento hidrodinâmico de uma película líquida
descendente em placa plana / Edson Fernando Batochio. –
Bauru : [s.n.], 2002.
101 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual
Paulista. Faculdade de Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Alcides Padilha

1. Filme descendente 2. Distribuidor de líquido 3.
Comportamento de entrada hidrodinâmico I – Título. II –
Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.





ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE *EDSON FERNANDO BATÓCHIO*,
ALUNO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA INDUSTRIAL, DA FACULDADE
DE ENGENHARIA DA UNESP – CAMPUS DE BAURU.

No dia vinte e cinco de fevereiro de dois mil e dois, às nove horas, no anfiteatro do prédio da Pós-graduação da Faculdade de Engenharia da UNESP, Campus de Bauru, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos Professores Doutores: Alcides Padilha do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Bauru, Presidente da Banca, Kamal Abdel Radi Ismail do Departamento de Engenharia Térmica e de Fluidos da Faculdade de Engenharia Mecânica – UNICAMP – Campinas e Ivan De Domenico Valarelli do Departamento de Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia – UNESP – Campus de Bauru, a fim de proceder a arguição pública da Dissertação de Mestrado do candidato ***Edson Fernando Batocchio***, intitulada “COMPORTAMENTO HIDRODINÂMICO DE UMA PELÍCULA LÍQUIDA DESCENDENTE EM PLACA PLANA”. O Professor Doutor Alcides Padilha, Presidente da Banca, apresentou o candidato, que dissertou sobre seu trabalho, em trinta minutos, após, a candidato foi argüido oralmente pelos membros componentes da Comissão Examinadora no tempo regulamentar exigido. Logo após, reuniu-se a Comissão Examinadora, tendo apresentado o conceito final: **APROVADO**, atribuindo a menção ***com distinção e louvor***. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após, lida e aprovada, será assinada pelos Senhores Membros da Comissão Examinadora. Bauru, vinte e cinco de fevereiro de dois mil e dois.

Prof. Dr. Ivan De Domenico Valarelli - Membro

unesp 

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Faculdade de Engenharia - Bauru

Av. Engº Luiz Edmundo Carrijo Coube s/nº • Caixa Postal 473 • CEP 17 033-380 • Bauru • SP • Fone: 14 221 6000 e 14 221 6108 • Fax: 14 221 6104
E-mail: spc-fe@bauru.unesp.br • home page: www.bauru.unesp.br/pos/fe.htm

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Romildo Batochio e Lídia Litrento Batochio, companheiros leais, exemplos de honestidade, amor, carinho, trabalho e irrestrito apoio na educação de seus filhos.

Aos meus filhos Márcio Fernando Batochio e Thaís Batochio pelo incentivo, amor e companheirismo nos difíceis momentos de nossas vidas.



AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos aqueles que colaboraram direta ou indiretamente na realização deste trabalho e em particular:

Ao professor Dr. Alcides Padilha, pelo seu idealismo incomensurável, pelo seu amor, dedicação e sensibilidade às pesquisas científicas, pelo ser humano humilde e maravilhoso, pelo esposo, pai fiel e carinhoso, pela nossa amizade fraternal, pela longa trilha de trabalho traçada ao longo de sua vida, pela sua orientação, incentivos e confiança em mim depositadas;

Ao professor Dr. Vicente Luiz Scalon, pelas suas colaborações e pelos seus conhecimentos científicos e domínio de tecnologia que tanto somaram no desenvolvimento do presente trabalho;

À Dra. Maria Beatriz Martins pela atenção, dedicação e apoios a mim dispensados;

A todos os meus professores que contribuíram para minha formação intelectual, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Alcides Padilha, que me despertou com seu entusiasmo à pesquisa científica.

Ao bolsista da FAPESP, Fábio Donato de Sousa, aluno do Curso de Engenharia Mecânica da UNESP, Campus Universitário de Bauru – S.P., pela participação na obtenção dos dados experimentais.



SUMÁRIO

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xv
Simbologia	xvii
RESUMO	xviii
ABSTRACT	xix
1 – INTRODUÇÃO	1
2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	4
3 – OBJETIVOS	6
4 - MATERIAIS E METODOLOGIA	
4.1 - Descrição do equipamento	7
4.2 - Medições das espessuras dos filmes líquidos	12
4.3 – Das dificuldades surgidas	15
5 - MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO	
5.1 - Fluxo laminar em desenvolvimento	16
5.2 - Escoamento bidimensional no plano $x - y$	19
5.2.1 - Equação da Vazão Volumétrica	23
5.2.2 – Equação da Velocidade Média	24
6 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	
6.1 - Medidas das espessuras dos filmes líquidos	26



6.2 - Medidas das velocidades nas superfícies livres das películas e comprimento de entrada hidrodinâmico	28
6.3 - Tabela geral	57
6.4 - Resultados obtidos do modelo matemático proposto	
6.4.1 - Confronto entre os resultados extraídos do modelamento matemático proposto e valores experimentais	58
6.4.2 - O modelamento matemático proposto	87
7 – CONCLUSÕES	89
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
ANEXOS A - BALANÇO DE FORÇAS	93
ANEXOS B – MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO	98



LISTA DE FIGURAS

FIGURA 4.1 – Foto ilustrando uma visada geral do aparato experimental	8
FIGURA 4.2 – Foto detalhando uma vista frontal do aparato experimental	9
FIGURA 4.3 – Foto destacando-se a região posterior do equipamento	10
FIGURA 4.4 – Foto mostrando o início de um dos ensaios onde o disco de PVC era abandonado no topo do canal para sobrenadar a película líquida descendente	11
FIGURA 4.5 – Fotos do cronômetro e micrômetro de profundidade utilizados nos ensaios	12
FIGURA 4.6 – Detalhando-se as medições das espessuras δ do filme líquido ao longo do canal	13
FIGURA 4.7 – Pose fotográfica destinada a ilustrar a utilização do micrômetro de profundidade para mensurar a espessura do filme líquido descendente	14
FIGURA 5.1 – Destacando-se as regiões do fluido em escoamento descendente, desde a posição ($x=0$) até que o perfil de velocidade se torne plenamente desenvolvido	16
FIGURA 5.2 – Mostrando o comprimento de entrada X_e onde o perfil de velocidade encontra-se em desenvolvimento e a espessura δ do filme variando em função de x	19
FIGURA 6.3 – Sequência de quadros mostrando em detalhes o círculo de PVC em suas posições ao longo do escoamento para 5 instantes de tempo	29
FIGURA 6.4 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,019$ l/s e $\beta = 87^\circ$	59



FIGURA 6.5 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 87^\circ$ 60

FIGURA 6.6 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 87^\circ$ 61

FIGURA 6.7 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 84^\circ$ 62

FIGURA 6.8 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 84^\circ$ 63

FIGURA 6.9 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 84^\circ$ 63

FIGURA 6.10 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 80^\circ$ 64

FIGURA 6.11 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 80^\circ$ 65

FIGURA 6.12 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 80^\circ$ 66

FIGURA 6.13 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 75^\circ$ 66

FIGURA 6.14 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 75^\circ$ 67

FIGURA 6.15 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e $\beta = 75^\circ$ 68

FIGURA 6.16 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,0005 \text{ l/s}$ e $\beta = 85^\circ$ 68

FIGURA 6.17 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,0005 \text{ l/s}$ e $\beta = 85^\circ$ 69

FIGURA 6.18 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,0005 \text{ l/s}$ e $\beta = 85^\circ$ 70

FIGURA 6.19 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,0005 \text{ l/s}$ e $\beta = 80^\circ$ 70



FIGURA 6.20 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 80^\circ$ 71

FIGURA 6.21 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 80^\circ$ 71

FIGURA 6.22 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 85^\circ$ 72

FIGURA 6.23 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 75^\circ$ 73

FIGURA 6.24 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 75^\circ$ 73

FIGURA 6.25 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 74

FIGURA 6.26 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 75



FIGURA 6.27 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,0005$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 75

FIGURA 6.28 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 85^\circ$ 76

FIGURA 6.29 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 85^\circ$ 77

FIGURA 6.30 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 85^\circ$ 77

FIGURA 6.31 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 80^\circ$ 78

FIGURA 6.32 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 80^\circ$ 78

FIGURA 6.33 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 80^\circ$ 79

FIGURA 6.34 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 75^\circ$ 80



FIGURA 6.35 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 75^\circ$ 81

FIGURA 6.36 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 75^\circ$ 81

FIGURA 6.37 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 82

FIGURA 6.38 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 83

FIGURA 6.39 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 83

FIGURA 6.40 – Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 84

FIGURA 6.41 – Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, e ambas na superfície livre do filme para $Q = 0,00625$ l/s e $\beta = 70^\circ$ 85



FIGURA 6.42 - Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal para $Q = 0,00625 \text{ l/s}$ e $\beta = 70^\circ$ 85

FIGURA 6.43 - Espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $\beta = 20^\circ$; $\beta = 40^\circ$; $\beta = 60^\circ$; $\beta = 70^\circ$; $\beta = 75^\circ$; $\beta = 80^\circ$ e $\beta = 85^\circ$ e vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ 87

FIGURA 6.44 - Espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e) para $Q = 0,019 \text{ l/s}$; $Q = 0,00625 \text{ l/s}$ e $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e $\beta = 80^\circ$ 88

FIGURA A.1 – Diagrama esquemático de uma película líquida descendente 93

FIGURA A.2 – Fluxo viscoso isotérmico de uma película de líquido sob a influência da gravidade, sem formação de ondulações. Casca de espessura Δx sobre a qual se aplica o balanço da quantidade de movimento 94

LISTA DE TABELAS

Medidas das espessuras dos filmes líquidos

Tabela 1	26
Tabela 2	26
Tabela 3	27
Tabela 4	27
Tabela 5	27
Tabela 6	27

Medidas das velocidades nas superfícies livres dos filmes líquidos

Tabela 1.1 referente ao Ensaio 1.1	29
Tabela 1.2 referente ao Ensaio 1.2	31
Tabela 1.3 referente ao Ensaio 1.3	32
Tabela 1.4 referente ao Ensaio 1.4	33
Tabela 2.1 referente ao Ensaio 2.1	35
Tabela 2.2 referente ao Ensaio 2.2	37
Tabela 2.3 referente ao Ensaio 2.3	38
Tabela 2.4 referente ao Ensaio 2.4	39
Tabela 2.5 referente ao Ensaio 2.5	40
Tabela 2.6 referente ao Ensaio 2.6	41
Tabela 2.7 referente ao Ensaio 2.7	42
Tabela 3.1 referente ao Ensaio 3.1	43
Tabela 3.2 referente ao Ensaio 3.2	44
Tabela 3.3 referente ao Ensaio 3.3	45
Tabela 3.4 referente ao Ensaio 3.4	46
Tabela 3.5 referente ao Ensaio 3.5	47
Tabela 3.6 referente ao Ensaio 3.6	48
Tabela 4.1 referente ao Ensaio 4.1	50
Tabela 4.2 referente ao Ensaio 4.2	51
Tabela 5 referente ao Ensaio 5	53
Tabela 6 referente ao Ensaio 6	55



Tabela 7 – Apresentação dos resultados teóricos, experimentais e os respectivos erros relativos	57
---	----

Tabela 8 – Posições ao longo da região de entrada do canal e os correspondentes valores das espessuras do filme de líquido medidos, teóricos e os erros relativos entre os mesmos	58
---	----



SIMBOLOGIA BÁSICA

Re_y	Número de Reynolds = { Força inercial/ Força viscosa } $[V.L / \nu]$
Fr	Número de Froude = {Força inercial/Peso} $[V^2/L.g]$
V_m	Velocidade média do filme de líquido $[m/s]$
ρ	Massa específica do fluido $[kg/m^3]$
δ	Espessura do filme de líquido $[m]$
δ_o	Espessura do filme de líquido na entrada do canal $[m]$
μ	Viscosidade dinâmica do fluido $[kg/m.s]$
ν	Viscosidade cinemática do fluido $[m^2/s]$
Γ	Vazão mássica por unidade de comprimento $[kg/m.s]$
Q	Vazão volumétrica $[m^3/s]$
w	Largura do canal de escoamento $[m]$
g	Aceleração da gravidade local $[m/s^2]$
g_{nm}	Aceleração da gravidade padrão $[9,81m/s^2]$
θ	Ângulo de inclinação da placa em relação à horizontal [graus]
β	Ângulo de inclinação da placa em relação à vertical [graus]
X_e	Comprimento de entrada hidrodinâmico $[m]$
X_{ew}^*	Comprimento de entrada limite
K_f	Número do filme
τ	Tensão de cisalhamento atuante no fluido $[N/m^2]$
L	Comprimento da placa $[m]$
x, y, z	Direção dos eixos coordenados
ΔS	Espaço percorrido pelo disco de PVC entre uma foto e outra $[m]$
Δt	Intervalo de tempo decorrido entre uma foto e outra $[s]$
$V_{x\text{ máx}}$	Velocidade média máxima na superfície livre do filme de líquido, na direção x $[m/s]$



BATOCHIO, E. F. Comportamento Hidrodinâmico de uma Película Líquida Descendente em Placa Plana. Bauru, 2002. 101 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Faculdade de Engenharia, Campus Universitário de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido e otimizado um distribuidor de filme de líquido para placas planas, o qual foi utilizado para estudar o comportamento hidrodinâmico da água escoando em regime laminar. A construção e o ensaio com o referido equipamento permitiu a obtenção de dados experimentais do comprimento de entrada hidrodinâmico do filme de líquido em escoamento e a comparação destes resultados com resultados teóricos obtidos a partir de equações desenvolvidas. As vazões foram medidas através de um recipiente devidamente calibrado. Com a placa posicionada em várias inclinações em relação à vertical e o escoamento estabelecido foi inserido um pequeno disco de PVC, sendo que devido a sua pequena massa específica possibilita que o mesmo sobrenade na superfície da tênue massa fluida que se desloca por ação exclusiva da força gravitacional. A posição do disco em relação ao tempo foi registrada por uma filmadora e editada num computador utilizando uma placa de vídeo na razão de 30 quadros por segundo. Assim, através dos quadros, obteve-se as posições do disco em uma escala fixada ao longo do canal e as velocidades máximas para cada inclinação da placa e conseqüentemente o comprimento de entrada hidrodinâmico. Para cada vazão, e, com os parâmetros geométricos medidos diretamente na placa, obteve-se o Número de Reynolds e o comprimento de entrada teórico. A variação da espessura da camada líquida descendente sobre a placa plana foi medida por meio de um micrômetro de profundidade, a partir de diversas medições eqüidistantes ao longo do canal, até que esta se tornasse constante, ou seja, escoamento plenamente desenvolvido.

Palavras-chave: distribuidor de líquido, filme descendente, comprimento de entrada hidrodinâmico.



BATOCHIO, E. F. Hydrodynamic Performance of a Falling Liquid Film on Flat Plate. Bauru, 2002. 101 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Industrial) – Faculdade de Engenharia, Campus Universitário de Bauru, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

ABSTRACT

In this work the flow of a falling liquid film was developed and optimized along a canal formed by flat plate and a fluid distributor to establish the flow in laminar regime. The flow rates were measured through a recipient correctly gauged. With a flat plate settled in several inclinations in relation to the vertical and on the established flow it was inserted a small disk of PVC which due to its small specific mass made possible for it to slide down on the surface of the thin fluid mass. The position of the disk in relation to the time was registered by a video camera and edited in computer with a video plate at the ratio of 30 pictures per second. Thus, through the pictures, the positions of the disk were obtained in relation to the scale fixed along the canal and the maximum velocities for each plate inclination and consequently the length of hydrodynamic entrance of the liquid film flowing. The equipment allowed the obtaining of experimental data and the comparison of these results with theoretical results obtained from the solution of the equations of mathematical model proposed, which showed good agreement.

Keywords: fluid distributor, falling film, length of hydrodynamic entrance.



1 - INTRODUÇÃO

O escoamento de uma película líquida descendente é freqüentemente empregado em equipamentos industriais tais como paredes úmidas de colunas de destilação, absorvedores de gás, vários tipos de refrigeradores, condensadores e umidificadores, encontrando sua principal utilização em trocadores com transferência de calor e massa. A vantagem desse tipo de dispositivo é a grande superfície de contato da fina camada de líquido em circulação, que possibilita altas taxas de transferência de calor e massa, necessitando de uma pequena vazão de líquido.

Além das aplicações no campo industrial, pode-se também citar o resfriamento de equipamentos que constitui uma aplicação na segurança de reatores nucleares, que consiste no estabelecimento e manutenção de mecanismos efetivos de proteção contra os riscos da radioatividade.

Este tipo de sistema, onde o líquido é introduzido no topo de placas verticais e distribuído através de dispositivos especiais como um filme na superfície interna ou externa, por onde descende por gravidade ou é transportado por agitação mecânica, está sendo utilizado em larga escala comercial e de serviços. O filme líquido é caracterizado por uma grande área interfacial por unidade de volume, apresentando uma simples configuração geométrica. A especial vantagem é a fina espessura do filme, que permite uma pequena quantidade de líquido enquanto mantém uma alta taxa de transferência de calor e massa. A dificuldade de distribuição uniforme do líquido em toda a extensão da placa torna-se freqüentemente um problema de projeto. Para atingir este objetivo é necessário o cumprimento de princípios básicos de segurança. Entre estes princípios existe o chamado Princípio da Defesa em Profundidade que tem como base a existência de barreiras sucessivas, cuja integridade é garantida através de um conjunto de medidas e sistemas, que evitam a liberação de radioatividade. O sistema de segurança inclui um envoltório de contenção de aço, que envolve o reator e os componentes do sistema primário de refrigeração, sendo este projetado para formar a última barreira física para a radioatividade. Este sistema utiliza a superfície de aço do vaso como área de troca de calor, onde escoa uma película de água por gravidade para refrigeração. Em suma pode-se ressaltar que o processo de transferência de calor e massa, em um filme líquido escoando, aquecendo e evaporando em contracorrente de uma mistura de ar-vapor, é



considerado como sendo um mecanismo eficiente para controle da temperatura e pressão do sistema.

Um fator crítico para o sucesso da aplicação do filme de líquido descendente é o projeto do distribuidor de líquido. Este último deve possibilitar uma distribuição da película líquida em suficiente quantidade, para garantir a umidade interna ou externa da parede, e fluxo com espessura de filme uniforme sobre a placa. No caso de tubos o filme deve ser distribuído igualmente em toda sua circunferência.

O método tipo transbordamento, adotado nesse trabalho, é o mais simples e tem uma série de vantagens. Um irregular carregamento de líquidos no reservatório freqüentemente resulta em oscilações no nível do filme de líquido. A taxa de fluxo de filme de líquido e a distribuição na superfície da placa são bastante influenciados pelas flutuações no nível do líquido na superfície da placa e pelo alinhamento vertical da mesma com o distribuidor. O distribuidor tipo abertura em anel, embora mais desejável do ponto de vista de uma distribuição uniforme tem apresentado dificuldades industriais de produção. Alta precisão é requerida devido a pequenas aberturas, da ordem de 1 mm, tem que ser fabricado e instalado de maneira que produzam um perfeito alinhamento com a superfície molhada. Contaminantes ou partículas sólidas no líquido devem ser evitadas para prevenir a obstrução da abertura.

Com o distribuidor de filme de líquido tipo jato livre, o líquido é injetado contra a parede da placa. Geralmente apenas três jatos são necessários para espaçar sobre a placa de maneira a formar um filme contínuo descendente. O diâmetro do bico injetor é maior que a fenda anular da abertura, diminuindo dessa maneira os problemas de obstrução. Além do mais, uma maior tolerância é permitida em um alinhamento vertical. Um novo distribuidor tipo parafuso foi projetado e comparado com um distribuidor convencional tipo cone (similar ao abertura em anel). O distribuidor tipo parafuso foi encontrado para ser substancialmente melhor por garantir uma adequada perda e uma apropriada distribuição da alimentação na periferia da placa ou entre várias placas. Além disso, os coeficientes de transferência de calor em evaporadores de filme são apreciavelmente maiores com este tipo de distribuidor do que com o tipo cone.

Em suma, a forma do distribuidor de líquido tem grande influência no posterior desenvolvimento do filme na superfície da placa. O filme de líquido formado tanto no tipo de distribuidor por transbordamento como no tipo de distribuidor por



abertura em anel, irá acelerar e se tornará mais fino parede abaixo até atingir um perfil de velocidade plenamente desenvolvido e uma espessura de filme constante, onde ocorre um fluxo estável. Esta zona de aceleração, em que o fluxo é estável, mas não uniforme, é chamada de região de entrada hidrodinâmica. Por outro lado, acima de um certo Número de Reynolds, quando a espessura média do filme excede a largura da abertura, um fluxo acelerado torna-se retardado. Uma vez que fluxos acelerados são mais estáveis contra distúrbios, desenvolvendo uma superfície ondulada somente depois da zona de aceleração, fluxos retardados tendem a ser instáveis. Diferenças substanciais nos comprimentos de entrada podem ser obtidos para diferentes distribuidores de líquidos.



2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nos últimos anos tem-se realizado um considerável número de estudos acerca de escoamentos de películas líquidas, todos, praticamente, com aplicações diretas em diferentes tipos de dispositivos, incluindo estudos sobre variadas geometrias de escoamento. Apresenta-se aqui uma sinopse das informações mais significativas encontradas na literatura e que serviram como fulcros utilizados como subsídios básicos no desenvolver ao longo deste trabalho.

Dentre série de trabalhos publicados recentemente, cumpre destacar o trabalho desenvolvido por Bandelier (1997) onde são apresentados os recentes desenvolvimentos de trocadores de calor compactos, principalmente os que se utilizam películas descendentes. Uma das geometrias mais estudadas para a aplicação neste tipo de trocador de calor compacto é a geometria cilíndrica. Uma série de trabalhos envolvendo película descendente neste tipo de geometria pode ser encontrado tanto na série de simulação numérica (He et. al., 1998) como no tocante a medidas experimentais (Alhusseini et. al., 1998). Outra geometria, com significado número de estudos e objetivo deste trabalho, é a película descendente em placas planas como o estudo teórico de Shang et. al. (1998), que aplica a solução por similaridade nas equações da transferência de calor, conservação da quantidade de movimento e conservação da massa, em um filme de líquido não-Newtoniano, que escoar ao longo da região de entrada de uma placa plana inclinada. Esta geometria tem aplicação em uma série de dispositivos, inclusive trocadores de calor para coletores solar, como o tratado por Song et. al., (1999). A solução analítica de Fulford (1964), é resultado de um modelo matemático também simplificado, o qual fornece o comprimento de entrada hidrodinâmico do canal, ou seja, somente a partir da posição em que o perfil de velocidades da película em estudo torna-se plenamente desenvolvido. Já a solução analítica de Bird (1960) nos fornece tão somente as velocidades média e máxima, como também a espessura do filme de líquido escoando em placa plana, a partir do instante em que o perfil de velocidades encontra-se plenamente desenvolvido em região do escoamento onde não existem perturbações de entrada ou de saída.

Rahman et al. (1990) Rahman et al. (1992) apresentam resultados numéricos do escoamento de uma película fina sobre uma superfície livre, na presença e na



ausência de forças de gravidade. A distribuição da espessura da película é fortemente afetada pela intensidade e orientação da força da gravidade, assim como pelos números de Reynolds e Froude. Considerou-se no referido trabalho, um perfil de velocidades parabólico em escoamento totalmente desenvolvido.

A resolução do modelo matemático para uma película líquida que flui radialmente sobre uma superfície plana é apresentada por Siwon et al. (1991), a partir das equações da quantidade de movimento e da continuidade. É suposto um perfil de velocidades linear, embora seus trabalhos não sejam convalidados experimentalmente.



3 – OBJETIVOS

Este trabalho visa o desenvolvimento e a otimização do escoamento de filme de líquido descendente ao longo do canal de placa plana o qual será utilizado para estudar, teórico e experimentalmente, o comportamento de entrada hidrodinâmico da referida película líquida.

Os resultados experimentais obtidos da região de entrada hidrodinâmica, tais como velocidade limite e a variação da espessura da película de líquido ao longo do canal foram comparados com os resultados teóricos do modelo matemático proposto.

Para atingir tal objetivo fez-se necessário o desenvolvimento dos seguintes tópicos:

- Teoria de fluxos peliculares em superfícies livres;
- Rearranjo das equações de balanço da Mecânica dos Fluidos em uma forma mais adequada;
- Estudo de escoamentos bidimensionais, submetidos exclusivamente a ação gravitacional, fazendo-se estimativas de ordem de grandezas cuidadosos, visando eliminar termos das equações que são considerados desprezíveis;
- Discretização do problema e resolução por métodos analíticos de integração;
- Aplicação de métodos numéricos para a resolução de sistemas de equações não lineares.

É importante destacar as dificuldades enfrentadas no desenvolver deste trabalho científico, haja vista a escassez nas literaturas de subsídios que reportam-se à solução de problemas semelhantes a este, ou seja, comportamento de entrada hidrodinâmico de filme líquido descendente em superfícies diversas.



4 - MATERIAIS E METODOLOGIA

4.1 - DESCRIÇÃO DOS EQUIPAMENTOS

O aparato construído para os ensaios, como mostrado nas figuras de (4.1) a (4.7) constitui-se basicamente de uma placa plana de vidro com 1,80 m de comprimento 0,15 m de largura e 0,003 m de espessura, fixada sobre uma base de madeira. A placa é articulada no topo da base através de um eixo de aço, de maneira a possibilitar a sua inclinação e fixação no ângulo desejado. Uma escala angular na altura da articulação permite, através de um ponteiro fixado ao eixo articulado, a leitura da inclinação imposta à placa. Um reservatório plástico de 2 litros de capacidade, com uma abertura feita em sua parte posterior, é fixado à placa em sua extremidade superior de maneira que a abertura de saída de água do reservatório fique exatamente paralela à extremidade superior da placa. A placa possui 2 abas fixadas ao longo de seu comprimento formando um canal central de 5 cm de largura, por onde a água escoar. Ao lado de cada aba foram fixadas escalas com marcações em milímetros.

O reservatório era constituído por uma tomada de água em sua parte inferior, com o objetivo de evitar a menor agitação possível com a entrada da água, por onde foi abastecido. Esta tomada de água era conectada a uma válvula manual para o controle da vazão requerida para o ensaio.

Para iniciar o ensaio, a válvula foi aberta com uma determinada vazão. O nível do reservatório subiu até que a água atingiu a abertura e assim, por transbordamento, a água passou a escoar pelo canal formado na superfície da placa. Dessa maneira o nível do reservatório permaneceu constante e o escoamento entrou em regime. Esse recipiente de dois litros de capacidade foi alimentado por um reservatório, situado a três metros de altura, com capacidade de cinquenta litros controlado por uma bóia d'água, mantendo assim o nível de água constante no reservatório, o qual foi alimentado continuamente. Um recipiente de acrílico, para medir a vazão, foi construído e devidamente calibrado em uma balança de precisão. Uma tomada lateral partindo do fundo do recipiente permitiu a leitura do volume contido no mesmo. Utilizando-se este recipiente, para coletar a água do escoamento que deixou a extremidade inferior da placa e, um cronômetro da marca CASSIO para registrar o tempo necessário para atingir um determinado volume do recipiente, determinou-se a vazão em litros por segundo a ser utilizada no ensaio. Utilizando-se desse procedimento a válvula foi ajustada



manualmente para a vazão desejada. As vazões utilizadas no ensaio foram baixas, de maneira a garantir um escoamento em regime laminar, com um Número de Reynolds variando entre 100 e 2000 aproximadamente. A placa foi então colocada na inclinação desejada e travada nessa posição. Depois que o escoamento entrou em regime, utilizou-se de uma pinça para posicionar o disco de PVC com 6 mm de diâmetro e 0,2 mm de espessura no início do escoamento. Este disco foi liberado na extremidade superior da placa, ou seja, no início da região de entrada do escoamento, sendo arrastado pela água no mesmo instante que uma filmadora passou a registrar a posição do disco ao longo da placa.



Figura 4.1. Foto ilustrando uma visada geral do aparato experimental.



Figura 4.2. Foto detalhando uma vista frontal do aparato experimental.



Figura 4.3. Foto destacando-se a região posterior do equipamento.

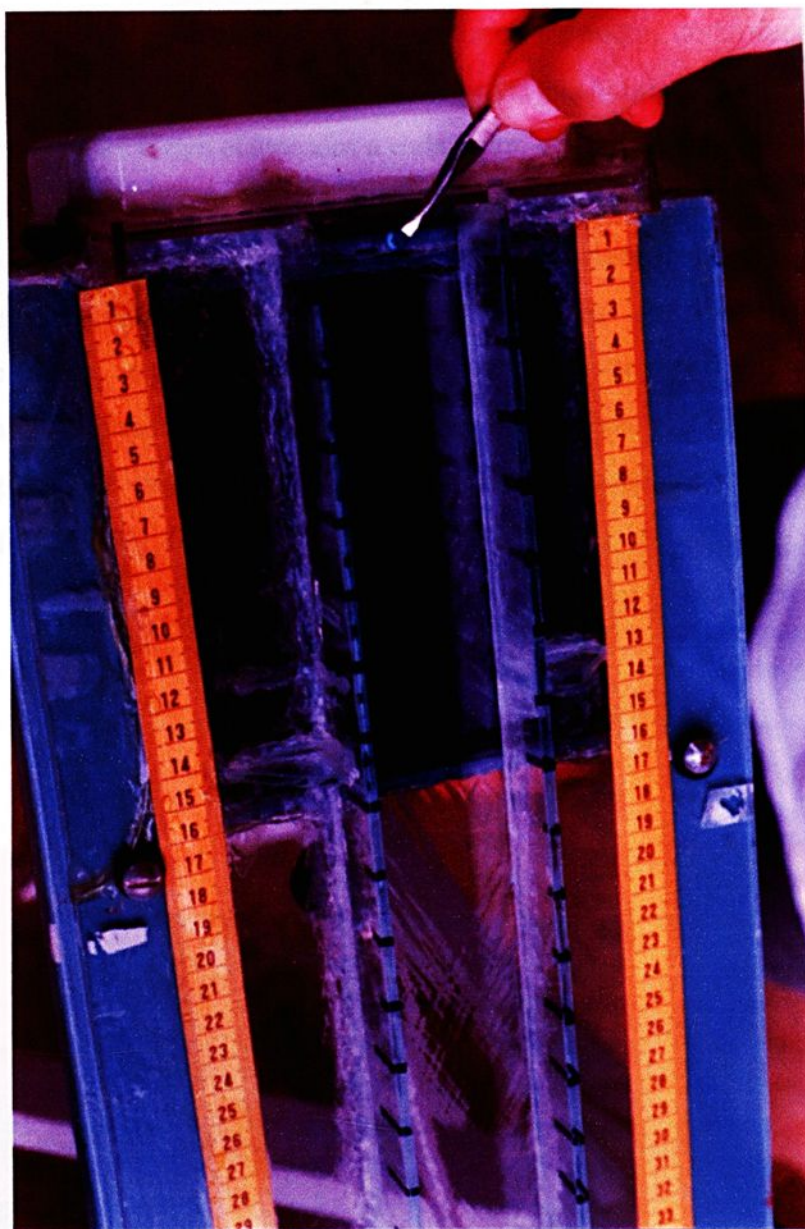


Figura 4.4. Foto mostrando o início de um dos ensaios onde o disco de PVC era liberado no topo do canal para sobrenadar a película líquida descendente.

4.2 - MEDIÇÕES DAS ESPESSURAS DOS FILMES LÍQUIDOS

As medidas das espessuras δ das películas em movimento descendente ao longo do canal foram elaborados com o auxílio de um micrômetro de profundidade da marca TESA, com 0,01 mm de precisão, como mostrados nas figuras de (4.5) até (4.7).

Tais medições foram elaboradas a cada 2 cm, desde a posição de entrada do fluido no canal até onde o perfil de velocidade se tornasse plenamente desenvolvido (perfil parabólico), região esta onde a espessura δ do filme tornava-se constante.

Submetidas à ação gravitacional as partículas da massa fluida em movimento descendente aceleravam-se até que desenvolvendo-se o perfil de velocidade tornava-se plenamente desenvolvido. Como a vazão volumétrica do fluido era mantida fixa a cada ângulo β de cada ensaio, a única variável em jogo que decrescia era a espessura δ do filme, haja vista que a largura w do canal mantinha-se constante ($w = 0,05$ m).



Figura 4.5. Fotos do cronômetro e micrômetro de profundidade utilizados nos ensaios.

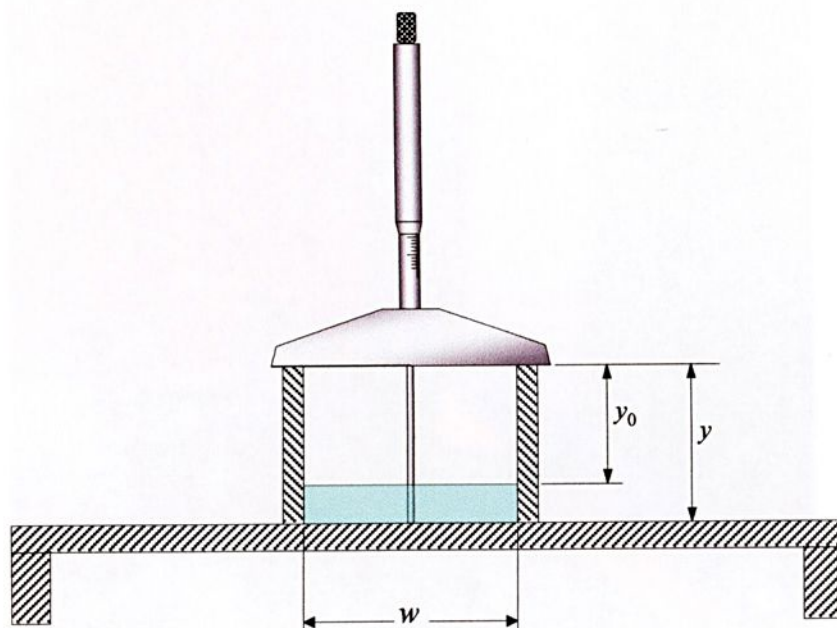


Figura 4.6. Detalhando-se as medições das espessuras $\delta = y - y_0$ do filme líquido ao longo do canal.

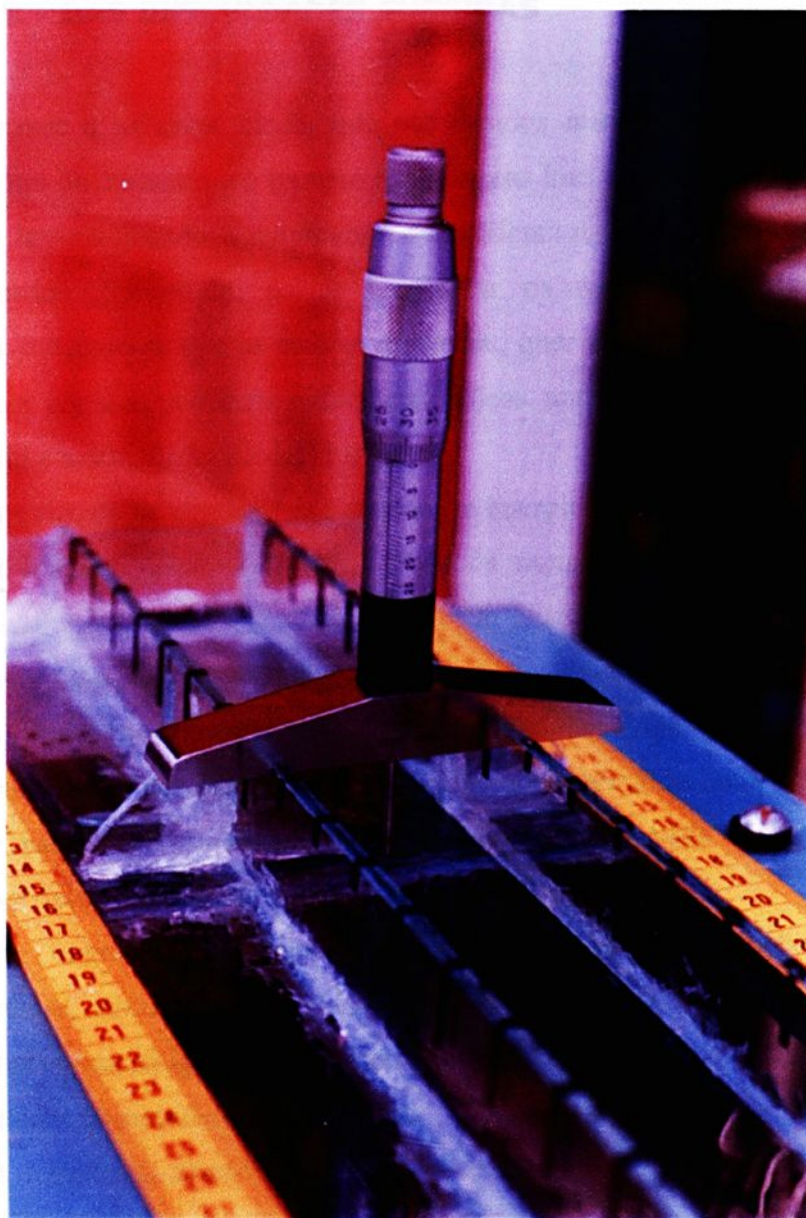


Figura 4.7. Foto destinada a ilustrar a utilização do micrômetro de profundidade para mensurar a espessura do filme líquido descendente.

4.3 - DAS DIFICULDADES SURGIDAS

Tem-se a salientar ainda, que nos ensaios iniciais utilizou-se esferas de isopor com 4 mm de diâmetro e o registro das imagens fora tomado com uma filmadora sem fixação e acompanhando o movimento descendente das esferas para cada um dos ensaios realizados. Sobretudo, ao se confrontar os resultados teóricos com os experimentais, detectou-se que as esferas utilizadas, quer por suas formas geométricas irregulares, quer por suas pequenas massas específicas, apresentaram imersão parcial no filme de líquido e assim, dificuldade de arraste.

Em virtude de pequena calota esférica imergir na superfície da tênue massa fluida em movimento descendente pelo canal da rampa, conclui-se que as esferas sofriam estas perturbações na interface líquido - ar aliada a correntes de massas de ar aos quais ficavam sujeitos os aparatos experimentais.

A filmagem acompanhando o movimento das trajetórias das esferas no decorrer de cada ensaio terminava por produzir distorções nas duas escalas paralelas que externamente margeavam as abas do canal, fato esse que reproduzia erros nas medições observados por ocasião da edição da filmagem no computador.

Por tudo que foi exposto, selecionou-se, em substituição às esferas supramencionadas, discos de PVC, com 6 mm de diâmetro e pequena espessura (0,2 mm). Tais discos em epígrafe praticamente aderiram à superfície da água, e assim menos submetidas às perturbações sobreditas.

A fixação da filmadora em tripé, assentado sobre placa de madeira, dotada de recursos que possibilitavam seu deslocamento a cada ensaio para que se focalizasse a região do canal onde a velocidade média da película fluida descendente se tornasse plenamente desenvolvida, haja vista que se conhecia previamente o comprimento de entrada teórico, de forma que a objetiva da filmadora permanecesse perpendicular à trajetória da película em deslocamento por ação gravitacional veio a minimizar as distorções sofridas nos ensaios iniciais.



5 - MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO

5.1 - FLUXO LAMINAR EM DESENVOLVIMENTO

Um fluxo é denominado laminar quando as velocidades são livres de flutuações macroscópicas para qualquer ponto do campo de fluxo. Para fluxo laminar permanente, todas as velocidades para pontos fixos no campo de fluxo permanecem constantes em relação ao tempo, mas, velocidades podem ser diferentes para diferentes pontos ao longo do escoamento. Fluxo laminar, também referente como fluxo viscoso ou fluxo com linhas de corrente é característico de um fluxo de fluido viscoso para baixo Número de Reynolds.

Fluxo laminar estacionário ou permanente em placa plana é designado como hidrodinamicamente desenvolvido plenamente, quando a distribuição do perfil de velocidade do fluido na direção do escoamento é de forma constante, isto é, independe da distância x , como mostrado na Fig. 5.1.

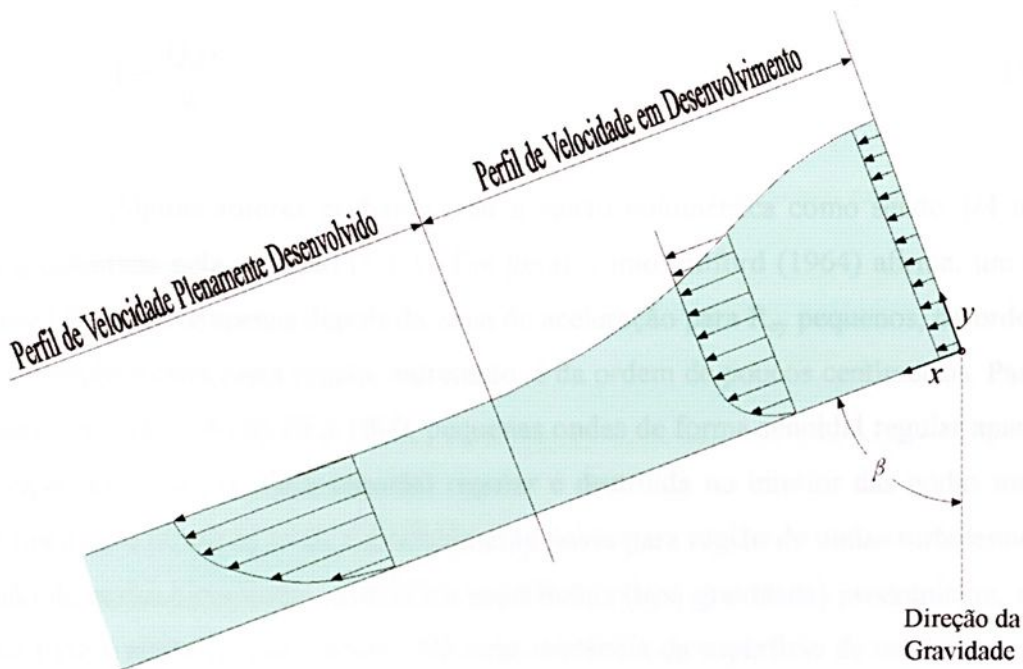


Figura 5.1. Destacando-se as regiões do fluido em escoamento descendente, desde a posição de entrada ($x = 0$) até que o perfil de velocidade se torne plenamente desenvolvido (perfil parabólico).

As propriedades do filme de líquido podem depender dos Números de Reynolds, Weber e Froude, um adimensional da tensão de cisalhamento na interface e várias relações geométricas. A caracterização do regime de escoamento é melhor representada pelo Número de Reynolds que é definido como:

$$R_{ev} = \frac{4 \cdot V_m \cdot \rho \cdot \delta}{\mu} \quad (5.1.1)$$

O Número de Reynolds, que foi a forma adotada para os cálculos experimentais deste trabalho pode também ser calculado da seguinte maneira:

$$R_{ev} = \frac{4 \cdot \Gamma}{\mu} \quad (5.1.2)$$

Sendo Γ , a vazão mássica por unidade de comprimento, calculada da seguinte forma:

$$\Gamma = \frac{Q \cdot \rho}{w} \quad (5.1.3)$$

Alguns autores preferem usar a vazão volumétrica como sendo 1/4 menor que a calculada pela equação (5.1.3). Em geral, como Fulford (1964) afirma, um fluxo laminar liso ocorre apenas depois da zona de aceleração para R_{ev} pequenos, da ordem de 10. O comprimento desta região, entretanto, é da ordem de poucos centímetros. Para R_{ev} maiores, no intervalo de 25 a 1000, pequenas ondas de forma senoidal regular aparecem na superfície livre. A onda senoidal regular é destruída no interior das ondas maiores que distorce a frente da onda e gradualmente passa para região de ondas turbulentas. Na região de ondas turbulentas, distúrbios superficiais (tipo gravidade) predominam, mas o filme base é ainda laminar natural. Há uma tendência da superfície de ondas emergirem e formarem uma grande onda secundária chamada de ressalto hidráulico. Dessa maneira, de acordo com o tipo de distribuidor usado, a vazão e o comprimento da placa empregada, podem aparecer diferentes regimes de fluxo no escoamento. A hidrodinâmica desses diferentes regimes de fluxo tem uma marcante influência na taxa de transferência de calor e massa.



O fluxo de filme na região de entrada tem sido estudado por vários autores para diferentes distribuidores de líquidos. Abertura horizontal, por transbordamento, tipo cone com abertura anular, transbordamento livre, abertura de prato paralelo e outros.

Depois de completada a região de aceleração, o escoamento plenamente desenvolvido resulta do equilíbrio entre as forças da gravidade e de atrito. Fulford (1964) apresenta uma equação para o cálculo do comprimento de entrada adimensional Xe^* para a formação do fluxo laminar, dada por:

$$Xe^* = Xe \cdot \left(\frac{g \cdot \cos \beta}{3 \cdot v^2} \right)^{1/3} = 0,67 \cdot \left(\frac{\Gamma}{\mu} \right)^{4/3} \quad (5.1.4)$$

Desde que apareçam ondas depois do fluxo laminar completamente desenvolvido, outro comprimento de entrada Xe_w^* pode ser definido como o comprimento acima do qual ondas começam a se formar, e $Xe^* < Xe_w^*$. Além disso foi providenciado um diagrama representando vários estados de fluxo de filme acelerado. Esses estudos mostraram que em geral:

- Para Re_y iguais, os comprimentos de entrada são maiores para líquidos mais viscosos devido ao aumento proporcional da taxa de vazão.
- Para mesma vazão, entretanto, o comprimento de entrada é menor para líquidos mais viscosos.
- O comprimento de entrada aumenta com o aumento de Re_y .

Para a determinação dos resultados teóricos do comprimento de entrada Xe obtidos neste trabalho, será utilizada a equação (5.1.4) rearranjada da seguinte forma:

$$Xe = \frac{0,67 \cdot \left(\frac{\Gamma}{\mu} \right)^{4/3}}{\left(\frac{g \cdot \cos \beta}{3 \cdot v^2} \right)^{1/3}} \quad (5.1.5)$$

onde a viscosidade cinemática do fluido v é definida como:

$$v = \frac{\mu}{\rho} \quad (5.1.6)$$



5.2 - ESCOAMENTO BIDIMENSIONAL NO PLANO xy

No caso deste escoamento, o vetor velocidade em cada ponto depende tanto da abscissa x quanto da ordenada y . Considerando-se forças volumétricas gravitacionais, as equações da conservação da quantidade de movimento e da continuidade para escoamento incompressível reduzem-se, respectivamente a:

Direção x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = g \cdot \cos \beta - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.2.1)$$

Direção y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = g \cdot \sin \beta - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.2.2)$$

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.2.3)$$

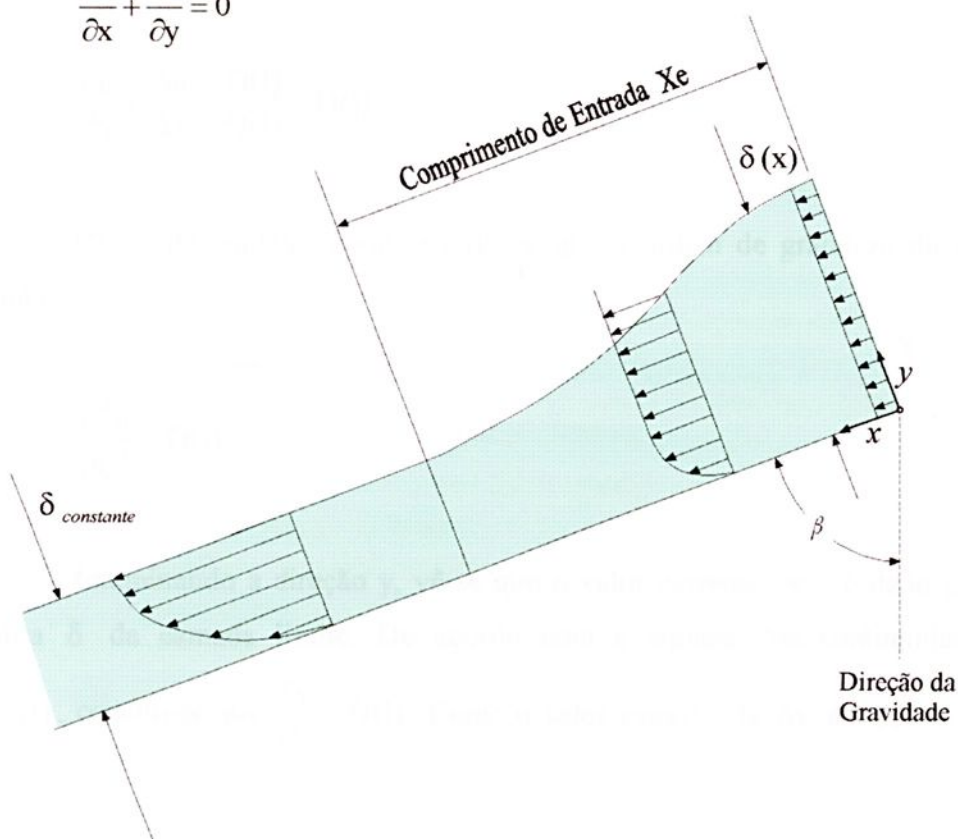


Figura 5.2. Mostrando o comprimento de entrada hidrodinâmico X_e onde o perfil de velocidade encontra-se em desenvolvimento e a espessura δ do filme fluido variando em função de x .

Foram feitas estimativas de ordem de grandeza para cada um dos termos destas equações, visando eliminar aqueles que podiam ser desprezados. Certamente os resultados foram aproximações, porém aproximações cuidadosas fazem parte da essência do significado da Engenharia. Para começar esta análise, atribui-se o valor 1 ao comprimento máximo e à velocidade máxima envolvida neste problema, e avalia-se o valor extremo a todos os termos em comparação com estes. Portanto, a velocidade máxima é $u_{\text{máx}}$ na superfície livre do filme de líquido, e assim diz-se que u é da ordem de grandeza 1, ou seja,

$$u = O(1) \quad (5.2.4)$$

Agora x pode variar de zero a 1, e, portanto a variação máxima de x é da ordem de grandeza da unidade. A variação de u pode ser de zero a 1, e, escrevendo-se a derivada em forma de diferenças finitas, tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{O(1)}{O(1)} = O(1) \quad (5.2.5)$$

De modo análogo pode-se mostrar que a ordem de grandeza da segunda derivada é:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = O(1) \quad (5.2.6)$$

Examinando a direção y , vê-se que o valor extremo de y é dado pela fina espessura δ da camada limite. De acordo com a equação da continuidade com $\frac{\partial u}{\partial x} = O(1)$, conclui-se que $\frac{\partial v}{\partial y} = O(1)$. Como o valor extremo de Δy é $O(\delta)$, é preciso que:

$$v = O(\delta) \quad (5.2.7)$$



Então, as derivadas de u em relação a y são:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (5.2.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = O\left(\frac{1}{\delta^2}\right) \quad (5.2.9)$$

Usando argumentos semelhantes, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = O\left(\frac{1}{\delta}\right) \quad (5.2.10)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = O(\delta) \quad (5.2.11)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = O(\delta) \quad (5.2.12)$$

Tratando-se de fluxo laminar em regime permanente e que a única força motriz do escoamento seja a força gravitacional, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = O(0) \quad (5.2.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = O(0) \quad (5.2.14)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = O(0) \quad (\text{não há gradiente de pressão em } x, \text{ pois a única força inercial é a gravidade}) \quad (5.2.15)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = O(0) \quad (\text{gradiente de pressão em } y \text{ desprezível, pois } \delta \ll 1) \quad (5.2.16)$$

E daí também se conclui que os termos de inércia são da mesma ordem de grandeza em cada uma das equações de Navier-Stokes. A ordem de V deve ser δ^2 para que os termos viscosos desta equação sejam da mesma ordem de grandeza dos termos inerciais. Também, como cada termo da equação do momento linear na direção y é da ordem de δ e cada termo da equação na direção x é da ordem da unidade, a equação completa na direção y é insignificante; e, observando que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2.17)$$

Analisando-se estas ordens de grandezas nas equações de (5.2.1) a (5.2.3):

Direção x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \cos \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 1 \quad 1 \quad \delta \quad 1/\delta \quad 0 \quad \delta^2 \quad 1 \quad 1/\delta^2$

Direção y:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g \sin \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $0 \quad 1 \quad \delta \quad \delta \quad 1 \quad 0 \quad \delta^2 \quad \delta \quad 1/\delta$

Continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $1 \quad 1$

Resumindo, a análise da ordem das grandezas reduziram o problema de três para duas equações simultâneas e uma das derivadas parciais de segunda ordem dos termos viscosos também foi eliminado, ou seja.

$$\text{Direção x:} \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = g \cdot \cos \beta + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (5.2.18)$$

$$\text{Continuidade:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.2.19)$$

Sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$x = 0, \quad u = U_0, \quad v = 0 \quad (5.2.20)$$

$$x = X_e, \quad u = a \cdot y^2 + b \cdot y + c, \quad v = 0 \quad (5.2.21)$$

$$y = 0, \quad u = v = 0 \quad (5.2.22)$$

$$y = \delta(x), \quad u = U_{\text{máx}}(x), \quad v = 0 \quad (5.2.23)$$

onde:

a, b, c: Constantes a serem determinadas pela condição de perfil de velocidade plenamente desenvolvido.

X_e : Comprimento de entrada hidrodinâmico.

U_0 : Perfil de velocidade constante na entrada do canal.

$\delta(x)$: Espessura da película ao longo do comprimento de entrada.

5.2.1. Equação da vazão volumétrica:

A espessura do filme de líquido pode ser obtido pela seguinte relação:

$$\delta = Q / (w \cdot V_m)$$

5.2.2 Equação da Velocidade média:

$$V_m = \frac{\int_0^w \int_0^\delta v_x(y) dy dz}{\int_0^w \int_0^\delta dy dz} = \frac{w \cdot \int_0^{\delta(x)} v_x(y) dy}{w \cdot \delta(x)} = \frac{\int_0^{\delta(x)} v_x(y) dy}{\delta(x)}$$

As equações de (5.2.18) a (5.2.23) são adimensionalizadas a partir dos seguintes parâmetros (Anexo B):

$$x' = \frac{x}{\delta_0}, \quad y' = \frac{y}{\delta_0}, \quad \delta' = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad g' = \frac{g}{g_{nm}},$$

$$u' = \frac{u}{\langle U_0 \rangle}, \quad v' = \frac{v}{\langle U_0 \rangle}, \quad \xi = \frac{y'}{\delta'} = \frac{y}{\delta}$$

e segundo as equações (B.1) a (B.6) do Anexo B, resultam nas seguintes equações adimensionalizadas, ou seja:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (5.2.24)$$

$$u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{Fr} \cdot g' \cdot \cos \beta + \frac{1}{Re_y} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (5.2.25)$$

Sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$x' = 0, \quad u' = 1, \quad v' = 0 \quad (5.2.26)$$

$$x' = Xe/\delta_0, \quad u' = a' \cdot y'^2 + b' \cdot y' + c', \quad v' = 0 \quad (5.2.27)$$

$$y' = 0, \quad u' = v' = 0 \quad (5.2.28)$$

$$y' = \delta(x) / \delta_0, \quad u' = U_{\max}(x) / \langle U_0 \rangle, \quad v' = 0 \quad (5.2.29)$$

e, aplicando-se as seguintes Transformada de Landau, que, segundo Padilha (1990), equações B.7 a B.10 do Anexo B, ou seja:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u^*}{\partial x'} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \delta} \right) \left(\frac{\partial \delta}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) \quad (5.2.30)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial \xi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \quad (5.2.31)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial \xi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \xi} \quad (5.2.32)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y'} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y'^2} \quad (5.2.33)$$

e que resultam, segundo as equações B.11 a B.16 do Anexo B, no seguinte sistema de equações transformadas:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\xi}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \xi} = 0 \quad (5.2.34)$$

$$u^* \left[\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\xi}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right] + \frac{v^*}{\delta} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} = \frac{g \cdot \cos \beta}{Fr} + \frac{1}{R_{ey} \cdot \delta^2} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \quad (5.2.35)$$

sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$x' = 0, \quad u^* = 1, \quad v^* = 0 \quad (5.2.36)$$

$$x' = Xe/\delta_0 \quad u^* = a' \xi^2 + b' \xi + c', \quad v^* = 0 \quad (5.2.37)$$

$$\xi = 0, \quad u^* = v^* = 0 \quad (5.2.38)$$

$$\xi = \delta(x') / \delta_0, \quad u^* = U_{\max}(x') / \langle U_0 \rangle, \quad v^* = 0 \quad (5.2.39)$$

O sistema de equações de (5.2.34) a (5.2.39) do modelo proposto foi discretizado pela técnica das Diferenças Finitas e o sistema de equações algébricas não linear resultante resolvido pelo método iterativo de Newton - Raphson.

6 - APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

6.1 - MEDIDAS DAS ESPESSURAS DOS FILMES LÍQUIDOS

As tabelas de (1) a (6) a seguir mostram os valores mensurados da espessura δ das películas líquidas descendentes ao longo do canal em epígrafe para as vazões Q e ângulos β da rampa com a vertical.

Tabela 1. Espessuras do filme líquido para $Q = 0,019 \text{ l/s}$

Posição X [cm]	Espessura δ [mm]			
	$\beta=87^\circ$	$\beta=84^\circ$	$\beta=80^\circ$	$\beta=75^\circ$
0	2,86	2,86	2,45	1,43
2	1,82	1,53	1,35	1,20
4	1,61	1,38	1,04	1,00
6	1,51	1,25	1,0	0,85
8	1,45	1,16	1,0	0,82
10	1,42	1,12	0,86	0,80
12	1,40	1,02	0,84	0,77
14	1,38	0,94	0,83	0,77
16	1,36	1,00	0,82	0,74
18	1,33	1,00	0,79	0,73
20	1,34	0,98	0,82	0,70
22	1,32	0,98	0,82	0,70
24	1,30	0,97	0,80	0,70
26	1,29	0,95	0,80	0,70
28	1,26	0,96	0,80	
30	1,27	0,95		
32	1,25	0,95		
34	1,25	0,95		
36	1,24			
38	1,24			

Tabela 2. Espessuras do filme líquido para $Q = 0,005 \text{ l/s}$

Posição X [cm]	Espessura δ [mm]					
	$\beta=85^\circ$	$\beta=80^\circ$	$\beta=75^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=10^\circ$	$\beta=0^\circ$
0	1,37	1,22	1,06	0,95	0,33	0,37
2	0,86	0,69	0,55	0,51	0,29	0,33
4	0,72	0,60	0,50	0,50	0,29	0,29
6	0,70	0,60	0,50	0,43	0,29	0,29
8	0,70	0,60	0,50	0,43	0,29	0,29
10	0,70	0,60	0,50	0,43	0,29	0,29

Tabela 3. Espessuras do filme líquido para $Q = 0,00625 \text{ l/s}$

Posição X [cm]	Espessura δ [mm]						
	$\beta=85^\circ$	$\beta=80^\circ$	$\beta=75^\circ$	$\beta=70^\circ$	$\beta=60^\circ$	$\beta=40^\circ$	$\beta=20^\circ$
0	1,39	1,20	0,97	0,82	0,67	0,60	0,58
2	0,76	0,65	0,53	0,46	0,38	0,30	0,30
4	0,68	0,54	0,50	0,43	0,37	0,28	0,29
6	0,66	0,57	0,46	0,43	0,37	0,28	0,29
8	0,66	0,54	0,46	0,43	0,37	0,28	0,29
10	0,66	0,54	0,46	0,43	0,37	0,28	0,29

Tabela 4. Espessuras do filme líquido para $Q = 0,0093 \text{ l/s}$

Posição X [cm]	Espessura δ [mm]	
	$\beta=40^\circ$	$\beta=20^\circ$
0	0,80	0,63
2	0,51	0,45
4	0,46	0,42
6	0,36	0,42
8	0,38	0,42
10	0,38	0,42

Tabela 5. Espessuras do filme líquido para $Q = 0,0083 \text{ l/s}$ e $\beta = 0^\circ$

Posição X [cm]	Espessura δ [mm]
0	0,54
2	0,39
4	0,32
6	0,32

Tabela 6. Espessuras do filme líquido para $Q = 0,0071 \text{ l/s}$ e $\beta = 60^\circ$

Posição X [cm]	Espessura δ [mm]
0	0,72
2	0,55
4	0,35
6	0,38

6.2 - MEDIDAS DAS VELOCIDADES NAS SUPERFÍCIES LIVRES DAS PELÍCULAS E COMPRIMENTOS DE ENTRADAS HIDRODINÂMICOS

Os resultados teóricos e experimentais obtidos são apresentados e comparados para cada ensaio realizado. Os quadros registrados da filmagem foram editados para cada ensaio fornecendo a posição do disco de PVC em cada instante, conforme Fig. (6.3). As posições dos discos foram lidas diretamente em cada quadro por meio das escalas colocadas no equipamento. O intervalo de tempo entre um quadro e outro é de 1/30 segundos, já que a placa de vídeo STUDIO DC10 PLUS edita a gravação de 30 quadros por segundo. Dessa maneira pode-se determinar a velocidade máxima média dos discos na superfície livre do filme líquido a cada intervalo de tempo.

Como o comprimento de entrada foi o espaço percorrido pelo escoamento até que este atinja um perfil de velocidade plenamente desenvolvido, ou seja, atinja a velocidade limite, a análise das velocidades do escoamento a cada intervalo de tempo permitiu assim determinar o referido comprimento de entrada experimental.

Os resultados teóricos e experimentais dos comprimentos de entrada, espessuras dos filmes, assim como, os respectivos erros relativos são calculados individualmente e apresentados a seguir para cada um dos ensaios realizados. No subcapítulo (6.3) é apresentado na tabela geral (7) uma visualização global dos resultados obtidos em todos os ensaios.

Para os ensaios a seguir estabeleceu-se inicialmente uma vazão e mantendo-a fixa variou-se o ângulo de inclinação da placa plana, para as seguintes condições:

$$\beta = 87^\circ, 84^\circ, 80^\circ \text{ e } 75^\circ$$

$$Q = \frac{250 \text{ ml}}{13 \text{ s}} \approx 0,019 \text{ l/s}$$

$$w = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

Utilizando-se as equações (5.1.3) e (5.1.2) calcula-se:

$$\Gamma = 0,3846 \text{ kg/m.s}$$

$$Re_y = 1728,61$$

A seguir são apresentadas as tabelas de (1.1) até (1.4) correspondendo às condições acima citadas:

Ensaio 1.1

$\beta = 87^\circ$

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Os dados experimentais serão apresentados em forma de tabelas para cada sequência de quadros obtidos.

A tabela 1.1 mostra que a velocidade média máxima tornou-se constante a partir de 35,25 cm e, portanto, o comprimento de entrada experimental pertence ao intervalo: $35,25 \leq X_{e_{exp}} \leq 36,75$ cm.

Tabela 1.1 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 1.1

ΔS [cm]	$V_{x\,m\acute{a}x}$ [cm/s]	<i>quadros</i>
33,85 - 35,25	42,0	1 ; 2
35,25 - 36,75	45,0	2 ; 3
36,75 - 38,25	45,0	3 ; 4
38,25 - 39,75	45,0	4 ; 5

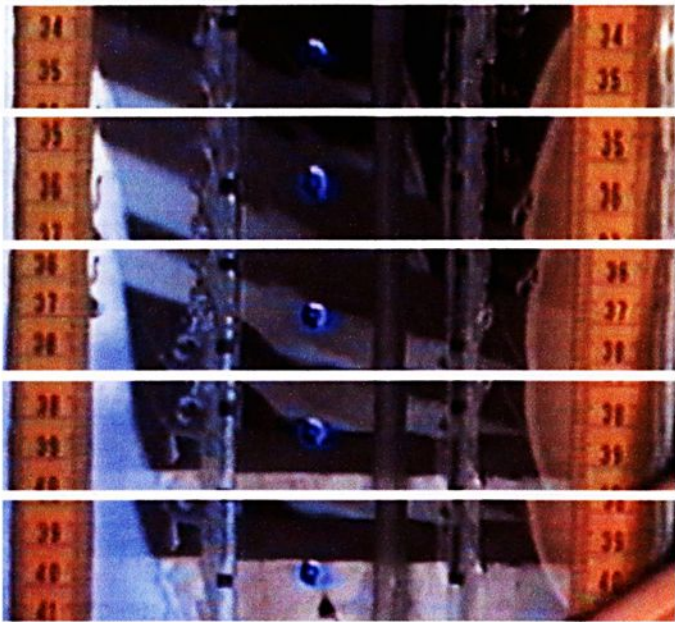


Figura 6.3. Sequência de quadros mostrando em detalhes o disco de PVC em suas posições ao longo do escoamento para 5 instantes de tempo.

Adotando-se a média aritmética:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{35,25 + 36,75}{2} = 36,0 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 1,24 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS:

Através da equação (5.1.5), pode-se determinar o comprimento de entrada teórico para as referidas condições de ensaio. Como o fluido ensaiado foi a água e a temperatura média do ambiente durante os ensaios era de 28 °C, tem-se:

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 8,9 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m.s}$$

e, pela equação (5.1.6):

$$\nu = 8,9 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$$

A aceleração da gravidade local adotada foi:

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

Assim, obteve-se:

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 36,50 \text{ cm}$$

e, pela equação (A.16) do anexo A:

$$\delta_{\text{teórico}} = 1,26 \text{ mm}$$



Da equação (A.14) do anexo A obteve-se que a velocidade máxima na região do canal onde esta se tornava plenamente desenvolvida era:

$$V_{x \text{ máx}} = 45,78 \text{ cm/s}$$

Ensaio 1.2

$$\beta = 84^\circ$$

RESULTADOS DO ENSAIO

Tabela 1.2 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 1.2

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
25,75 - 27,55	54,0
27,55 - 29,45	57,0
29,45 - 31,35	57,0
31,35 - 33,25	57,0

De acordo com a tabela 1.2, a velocidade torna-se praticamente constante a partir de 27,55 cm. É de se esperar que comprimento de entrada experimental está entre 27,55 e 29,45 cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e \text{ exp}} = \frac{27,55 + 29,45}{2} = 28,50 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,95 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS



$$Xe_{teórico} = 28,90 \text{ cm}$$

$$\delta_{teórico} = 1,0 \text{ mm}$$

Da equação (A.14) do anexo A obteve-se que a velocidade máxima na região do canal onde esta se tornava plenamente desenvolvida era:

$$V_{x \text{ máx}} = 57,66 \text{ cm/s}$$

Ensaio 1.3

$$\beta = 80^\circ$$

RESULTADOS DO ENSAIO

Tabela 1.3 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 1.3

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
21,15 - 23,35	66,0
23,35 - 25,65	69,0
25,65 - 27,95	69,0
27,95 - 30,25	69,0

Em conformidade com a tabela 1.3, a velocidade torna-se praticamente constante a partir de 23,35 cm e o comprimento de entrada experimental está entre 23,35 e 25,65 cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$Xe_{exp} = \frac{23,35 + 25,65}{2} = 24,50 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:



$\delta_{exp} = 0,80\text{ mm}$

RESULTADOS TEÓRICOS

$Xe_{teórico} = 24,46\text{ cm}$

$\delta_{teórico} = 0,84\text{ mm}$

Da equação (A.14) do anexo A obteve-se que a velocidade máxima na região do canal onde esta se tornava plenamente desenvolvida era:

$V_{x\text{ máx}} = 68,30\text{ cm/s}$

Ensaio 1.4

$\beta = 75^\circ$

RESULTADOS DO ENSAIO:

Tabela 1.4 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 1.4

$\Delta S\text{ [cm]}$	$V_{x\text{ máx}}\text{ [cm/s]}$
17,85 - 20,25	72,0
20,25 - 22,75	75,0
22,75 - 25,25	75,0
25,25 - 27,75	75,0

De acordo com a tabela 1.4 , a velocidade torna-se praticamente constante a partir de 20,25 cm. O comprimento de entrada experimental está entre 20,25 e 22,75 cm.



Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$Xe_{\text{exp}} = \frac{20,25 + 22,75}{2} = 21,50 \text{ cm}$$

A espessura do filme medida diretamente no escoamento é:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,70 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS:

$$Xe_{\text{teórico}} = 21,41 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,74 \text{ mm}$$

Da equação (A.14) do anexo A obteve-se que a velocidade máxima na região do canal onde esta se tornava plenamente desenvolvida era:

$$V_{x \text{ máx}} = 78,0 \text{ cm/s}$$

Para o ensaio seguinte mediu-se uma nova vazão e, mantendo-a fixa, variou-se o ângulo de inclinação da placa plana, nas seguintes condições:

$$\beta = 85^\circ, 80^\circ, 75^\circ, 70^\circ, 60^\circ, 40^\circ \text{ e } 20^\circ$$

$$Q = \frac{250 \text{ ml}}{45 \text{ s}} \approx 0,0053 \text{ l/s}$$

$$w = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

Utilizando-se as equações (5.1.3) e (5.1.2) tem-se:

$$\Gamma = 0,1111 \text{ kg/m.s}$$

$$Re_y = 499,37$$

A seguir são apresentadas as tabelas de (2.1) até (2.7) correspondendo às condições acima citadas:

Ensaio 2.1

$$\beta = 85^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Tabela 2.1 – Seqüência de quadros registrados para o ensaio 2.1

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
3,50 - 4,10	18,0
4,10 - 4,80	21,0
4,80 - 5,55	22,5
5,55 - 6,35	24,0
6,35 - 7,15	24,0

A tabela 2.1 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 5,55 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $5,55 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 6,35 \text{ cm}$.



Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$Xe_{\text{exp}} = \frac{5,55 + 6,35}{2} = 5,95 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,70 \text{ mm}$$

Da equação (A.14) do anexo A calcula-se que a velocidade máxima na região do canal onde esta se tornava plenamente desenvolvida é:

$$V_{x \text{ máx}} = 23,71 \text{ cm/s}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$Xe_{\text{teórico}} = 5,88 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,70 \text{ mm}$$

Ensaio 2.2

$$\beta = 80^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:



Tabela 2.2 – Seqüência de quadros registrados para o Ensaio 2.2

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
2,75 - 3,50	22,5
3,50 - 4,40	27,0
4,40 - 5,35	28,5
5,35 - 6,30	28,5
6,30 - 7,25	28,5

A tabela 2.2 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 4,40 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $4,40 \leq X_{e \text{ exp}} \leq 5,35$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e \text{ exp}} = \frac{4,40 + 5,35}{2} = 4,875 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,60 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e \text{ teórico}} = 4,67 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,56 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 29,83 \text{ cm/s}$$



Ensaio 2.3

$$\beta = 75^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 2.3 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 2.3

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
2,00 - 2,80	24,0
2,80 - 3,70	27,0
3,70 - 4,80	33,0
4,80 - 5,90	33,0

A tabela 2.3 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 3,70 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $3,70 \leq X_{e \text{ exp}} \leq 4,80$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e \text{ exp}} = \frac{3,70 + 4,80}{2} = 4,25 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,50 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e \text{ teórico}} = 4,09 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,49 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 34,10 \text{ cm/s}$$



Ensaio 2.4

$$\beta = 70^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 2.4 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 2.4

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
2,00 - 3,10	33,0
3,10 - 4,35	37,5
4,35 - 5,60	37,5
5,60 - 6,85	37,5

A tabela 2.4 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 3,10 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está entre 3,10 e 2,90cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{3,10 + 4,35}{2} = 3,725 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,43 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 3,73 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,44 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 37,40 \text{ cm/s}$$



Ensaio 2.5

$$\beta = 60^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 2.5 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 2.5

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
1,20 - 2,55	40,5
2,55 - 4,00	43,50
4,00 - 5,45	43,50
5,45 - 6,90	43,50

A tabela 2.5 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 2,55 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $2,55 \leq X_{e \text{ exp}} \leq 4,00$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e \text{ exp}} = \frac{2,55 + 4,00}{2} = 3,275 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,37 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e \text{ teórico}} = 3,28 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,39 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 42,45 \text{ cm/s}$$



Ensaio 2.6

$$\beta = 10^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 2.6 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 2.6

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
0,60 - 2,00	42,0
2,00 - 3,60	48,0
3,60 - 5,20	48,0
5,20 - 6,80	48,0

A tabela 2.6 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 2,00 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $2,00 \leq X_{e \text{ exp}} \leq 3,60$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e \text{ exp}} = \frac{2,00 + 3,60}{2} = 2,80 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,29 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e \text{ teórico}} = 2,85 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,32 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 48,94 \text{ cm/s}$$



Ensaio 2.7

$$\beta = 0^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 2.7 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 2.7

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
0,00 - 1,65	49,5
1,65 - 3,40	52,5
3,40 - 5,15	52,5
5,15 - 6,90	52,5

A tabela 2.7 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 1,65 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $1,65 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 3,40$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{1,65 + 3,40}{2} = 2,525 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,29 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 2,66 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,32 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 52,40 \text{ cm/s}$$



Para o próximo ensaio mediu-se uma nova vazão e, mantendo-a fixa, variou-se o ângulo de inclinação da placa plana, nas seguintes condições:

$\beta = 85^{\circ}, 80^{\circ}, 75^{\circ}, 70^{\circ}, 40^{\circ}, \text{e } 20^{\circ}$

$Q = \frac{250 \text{ ml}}{40 \text{ s}} = 0,00625 \text{ l/s}$

$w = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

Utilizando-se as equações (5.1.3) e (5.1.2) tem-se:

$\Gamma = 0,125 \text{ kg/m.s}$

$Re_y = 561,80$

A seguir são apresentadas as tabelas de (3.1) até (3.6) correspondendo às condições acima citadas:

Ensaio 3.1

$\beta = 85^{\circ}$

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Tabela 3.1 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 3.1

$\Delta S \text{ [cm]}$	$V_{x \text{ máx }} \text{ [cm/s]}$
4,85 - 5,60	22,5
5,60 - 6,40	24,0
6,40 - 7,25	25,5
7,25 - 8,10	25,5

A tabela 3.1 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 6,40 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está no intervalo $6,40 \leq X_{e_{exp}} \leq 7,25 \text{ cm}$.



Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$Xe_{exp} = \frac{6,40 + 7,25}{2} = 6,825 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{exp} = 0,66 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$Xe_{teórico} = 6,88 \text{ cm}$$

$$\delta_{teórico} = 0,73 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 25,65 \text{ cm/s}$$

Ensaio 3.2

$$\beta = 80^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 3.2 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 3.2

$\Delta S \text{ [cm]}$	$V_{x \text{ máx}} \text{ [cm/s]}$
2,85 - 3,80	28,5
3,80 - 4,80	30,0
4,80 - 5,90	33,0
5,90 - 7,00	33,0

A tabela 3.2 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 4,80 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $4,80 \leq X_{e_{exp}} \leq 5,90$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{exp}} = \frac{4,80 + 5,90}{2} = 5,35 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{exp} = 0,54 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{teórico}} = 5,46 \text{ cm}$$

$$\delta_{teórico} = 0,58 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 32,28 \text{ cm/s}$$

Ensaio 3.3

$$\beta = 75^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 3.3 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 3.3

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
1,75 - 2,90	34,5
2,90 - 4,10	36,0
4,10 - 5,35	37,5
5,35 - 6,60	37,5



A tabela 3.3 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 4,10 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $4,10 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 5,35$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{4,10 + 5,35}{2} = 4,725 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,46 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 4,78 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,51 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 36,87 \text{ cm/s}$$

Ensaio 3.4

$$\beta = 70^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 3.4 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 3.4

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
1,05 - 2,30	37,5
2,30 - 3,60	39,0
3,60 - 4,95	40,5
4,95 - 6,30	40,5

A tabela 3.4 mostra que a velocidade tornou-se constante a partir de 3,60 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $3,65 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 4,60$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{3,60 + 4,95}{2} = 4,275 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,43 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 4,36 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,46 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 40,47 \text{ cm/s}$$

Ensaio 3.5

$$\beta = 40^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 3.5 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 3.5

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
0,35 - 2,05	51,0
2,05 - 3,95	57,0
3,95 - 5,85	57,0
5,85 - 7,75	57,0



A tabela 3.5 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 2,05 cm.

Portanto o comprimento de entrada experimental está : $2,05 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 3,95$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{2,05 + 3,95}{2} = 3,0 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,28 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 3,06 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,32 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 57,57 \text{ cm/s}$$

Ensaio 3.6

$$\beta = 20^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DO ENSAIO:

Tabela 3.6 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 3.6

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
0,25 - 2,05	54,0
2,05 - 4,00	58,5
4,00 - 5,95	58,5
5,95 - 7,90	58,5



A tabela 3.6 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 2,05 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $2,05 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 4,00$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e_{\text{exp}}} = \frac{2,05 + 4,00}{2} = 3,025 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,29 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e_{\text{teórico}}} = 3,05 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,32 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 57,85 \text{ cm/s}$$



Para o ensaio seguinte mediu-se uma nova vazão e, mantendo-a fixa, variou-se o ângulo de inclinação da placa plana, nas seguintes condições:

$$\beta = 40^\circ \text{ e } 20^\circ$$

$$Q = \frac{250 \text{ ml}}{27 \text{ s}} \approx 0,0093 \text{ l/s}$$

$$w = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

Utilizando-se as equações (5.1.3) e (5.1.2) tem-se:

$$\Gamma = 0,185 \text{ kg/m.s}$$

$$Re_y = 832,30$$

A seguir são apresentadas as tabelas de (4.1) e (4.2) correspondendo às condições acima citadas:

Ensaio 4.1

$$\beta = 40^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Tabela 4.1 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 4.1

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
2,25 - 4,45	66,0
4,45 - 6,75	69,0
6,75 - 9,05	69,0
9,05 - 11,35	69,0

A tabela 4.1 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 4,45 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $4,45 \leq X_{e_{\text{exp}}} \leq 6,75 \text{ cm}$.



Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$Xe_{exp} = \frac{4,45 + 6,75}{2} = 5,60\text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{exp} = 0,38\text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$Xe_{teórico} = 5,63\text{ cm}$$

$$\delta_{teórico} = 0,40\text{ mm}$$

$$V_{x\text{ máx}} = 68,80\text{ cm/s}$$

Ensaio 4.2

$$\beta = 20^\circ$$

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Tabela 4.2 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 4.2

ΔS [cm]	$V_{x\text{ máx}}$ [cm/s]
1,65 - 3,95	69,0
3,95 - 6,45	75,0
6,45 - 8,95	75,5
8,95 - 11,45	75,5

A tabela 4.2 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 3,95 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $3,95 \leq Xe_{exp} \leq 6,45\text{ cm}$.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:



$$Xe_{\text{exp}} = \frac{3,95 + 6,45}{2} = 5,20 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,42 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$Xe_{\text{teórico}} = 5,26 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,40 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 73,65 \text{ cm/s}$$



Para o ensaio seguinte mediu-se uma nova vazão e, mantendo-a fixa, juntamente a determinado ângulo de inclinação da placa plana, nas seguintes condições:

$\beta = 0^\circ$

$Q = \frac{250 \text{ ml}}{30 \text{ s}} \approx 0,0083 \text{ l/s}$

$w = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$

Utilizando-se as equações (5.1.3) e (5.1.2) tem-se:

$\Gamma = 0,1676 \text{ kg/m.s}$

$Re_y = 749,0$

A seguir é apresentada a tabela de (5) correspondendo às condições acima citadas:

Ensaio 5

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Tabela 5 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 5

$\Delta S \text{ [cm]}$	$V_{x \text{ máx}} \text{ [cm/s]}$
1,10 - 3,30	66,0
3,30 - 5,60	69,0
5,60 - 7,90	69,0
7,90 - 10,20	69,0

A tabela 5 mostra que a velocidade torna-se constante a partir de 3,30 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $3,30 \leq X_{e_{exp}} \leq 5,60 \text{ cm}$.



Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$Xe_{\text{exp}} = \frac{3,30 + 5,60}{2} = 4,45 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,32 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$Xe_{\text{teórico}} = 4,475 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,35 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 70,10 \text{ cm/s}$$

Para o último ensaio mediu-se uma nova vazão e, mantendo-a fixa, condicionada a determinado ângulo de inclinação da placa plana, nas seguintes condições:

$$\beta = 60^0$$

$$Q = \frac{250 \text{ ml}}{35 \text{ s}} \approx 0,0071 \text{ l/s}$$

$$w = 5 \text{ cm} = 0,05 \text{ m}$$

Utilizando-se as equações (5.1.3) e (5.1.2) tem-se:

$$\Gamma = 0,143 \text{ kg/m.s}$$

$$Re_y = 642,05$$

A seguir é apresentada a tabela de (6) correspondendo às condições acima citadas:



Ensaio 6

RESULTADOS OBTIDOS DOS ENSAIOS:

Tabela 6 – Sequência de quadros registrados para o Ensaio 6

ΔS [cm]	$V_{x \text{ máx}}$ [cm/s]
2,10 - 3,70	48,0
3,70 - 5,40	51,0
5,40 - 7,10	51,0
7,10 - 8,80	51,0

A tabela 6 mostra que a velocidade tornou-se constante a partir de 3,70 cm. Portanto o comprimento de entrada experimental está : $3,70 \leq X_{e \text{ exp}} \leq 5,40$ cm.

Adotando-se a média aritmética, tem-se:

$$X_{e \text{ exp}} = \frac{3,70 + 5,40}{2} = 4,55 \text{ cm}$$

Espessura do filme medida diretamente na região do canal onde o perfil de velocidade no escoamento tornou-se perfeitamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{exp}} = 0,38 \text{ mm}$$

RESULTADOS TEÓRICOS

$$X_{e \text{ teórico}} = 4,59 \text{ cm}$$

$$\delta_{\text{teórico}} = 0,42 \text{ mm}$$

$$V_{x \text{ máx}} = 50,20 \text{ cm/s}$$



6.3 - TABELA GERAL

As condições de ensaios experimentais, os valores e a comparação entre os resultados teóricos e experimentais, assim como os respectivos erros relativos são apresentados na Tab. (7).

Da tabela. 7, calcula-se os erros relativos médios entre os resultados teóricos e experimentais para o comprimento de entrada como sendo de 1,51%, para a espessura do filme de líquido de 5,97%, enquanto que para as velocidades médias na superfície livre do filme de 1,59%. De modo geral, embora varia-se o ângulo de inclinação da placa e a vazão do líquido, observa-se através, tanto dos erros relativos médios, como pelos erros relativos individuais, o bom comportamento entre os resultados teóricos e experimentais.

Tabela 7: Apresentação dos resultados teóricos, experimentais e os respectivos erros relativos.

Ensaio n ^o	β [°]	Q [l/s]	Γ [Kg/m.s]	Rey	Xe teor. [cm]	Xe exp. [cm]	Erro [%]	δ teor. [mm]	δ exp. [mm]	Erro [%]	V _x máx. teórica [cm/s]	V _x máx. experimental [cm/s]	Erro [%]
1.1	87	0,019	0,3846	1728,61	36,50	36,0	1,37	1,26	1,24	1,60	45,78	45,00	1,70
1.2	84	0,019	0,3846	1728,61	28,90	28,50	1,38	1,00	0,95	5,00	57,66	57,00	1,14
1.3	80	0,019	0,3846	1728,61	24,46	24,50	0,16	0,84	0,80	4,76	68,30	69,00	1,02
1.4	75	0,019	0,3846	1728,61	21,41	21,50	0,42	0,74	0,70	5,40	78,00	75,00	3,84
2.1	85	0,005	0,1111	499,37	5,88	5,95	1,19	0,70	0,70	0,00	23,71	24,00	1,22
2.2	80	0,005	0,1111	499,37	4,67	4,875	4,39	0,56	0,60	7,14	29,83	28,50	4,45
2.3	75	0,005	0,1111	499,37	4,09	4,25	3,91	0,49	0,50	2,04	34,10	33,00	3,22
2.4	70	0,005	0,1111	499,37	3,73	3,725	0,13	0,44	0,43	2,27	37,40	37,50	0,26
2.5	60	0,005	0,1111	499,37	3,28	3,275	0,15	0,39	0,37	5,12	42,45	43,50	2,47
2.6	10	0,005	0,1111	499,37	2,85	2,80	1,75	0,32	0,29	9,37	48,94	48,00	1,92
2.7	0	0,005	0,1111	499,37	2,66	2,525	5,07	0,32	0,29	9,37	52,40	52,50	0,19
3.1	85	0,00625	0,125	561,80	6,88	6,825	0,80	0,73	0,66	9,58	25,65	25,50	0,59
3.2	80	0,00625	0,125	561,80	5,46	5,35	2,01	0,58	0,54	6,89	32,28	33,00	2,23
3.3	75	0,00625	0,125	561,80	4,78	4,725	1,15	0,51	0,46	9,80	36,87	37,50	1,70
3.4	70	0,00625	0,125	561,80	4,36	4,275	1,95	0,46	0,43	6,52	40,47	40,50	0,07
3.5	40	0,00625	0,125	561,80	3,06	3,00	1,96	0,32	0,28	9,37	57,57	57,00	0,99
3.6	20	0,00625	0,125	561,80	3,05	3,025	0,82	0,32	0,29	3,12	57,85	58,50	1,12
4.1	40	0,0093	0,185	832,30	5,63	5,60	0,53	0,40	0,38	5,00	68,80	69,00	0,29
4.2	20	0,0093	0,185	832,30	5,26	5,20	1,14	0,40	0,42	5,00	73,65	75,00	1,83
5.0	0	0,0083	0,167	749,06	4,475	4,45	0,56	0,35	0,32	8,57	70,10	69,00	1,57
6.0	60	0,0071	0,143	642,05	4,59	4,55	0,87	0,42	0,38	9,52	50,20	51,00	1,59



6.4 - RESULTADOS OBTIDOS DO MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO

6.4.1 - CONFRONTO ENTRE OS RESULTADOS EXTRAÍDOS DO MODELAMENTO MATEMÁTICO PROPOSTO E OS DADOS EXPERIMENTAIS OBTIDOS

A tabela 8 apresenta os valores teóricos e experimentais das espessuras do filme de líquido (δ) em função da posição (X) de entrada do canal, para a vazão $Q = 0,019$ l/s e ângulo $\beta = 87^\circ$ do canal com a vertical, para os seguintes parâmetros:

$$w = 0,05 \text{ m}$$

$$\Gamma = 0,3846 \text{ kg/m.s}$$

$$R_{ey} = 1728,61$$

Tabela 8. Posições ao longo da região de entrada do canal e os correspondentes valores das espessuras do filme de líquido medidos, os valores teóricos obtidos através do modelo proposto e os erros relativos entre os mesmos.

Posição X [cm]	Espessura Exp. (δ) [mm]	Espessura Teórica (δ) [mm]	Erro Relativo (%)
0	2,86	2,86	0,00
2	1,82	1,82	0,00
4	1,61	1,64	1,86
6	1,51	1,52	0,66
8	1,45	1,45	0,00
10	1,42	1,41	0,70
12	1,40	1,36	2,85
14	1,38	1,35	2,17
16	1,36	1,34	1,47
18	1,33	1,32	0,75
20	1,34	1,30	2,98
22	1,32	1,27	3,78
24	1,30	1,25	3,84
26	1,29	1,24	3,78
28	1,26	1,22	3,17
30	1,27	1,22	3,93
32	1,25	1,22	2,40
34	1,25	1,20	4,00
36	1,24	1,20	3,22
38	1,24	1,20	3,22

Aplicando-se as propriedades da água na solução do modelo analítico (eq. A.14 e A.16 do Anexo A) ou seja, para a posição a partir da qual, o perfil de velocidade é plenamente desenvolvido e comprimento de entrada hidrodinâmico obtido da eq. (5.1.5) do modelo analítico proposto por Fulford (1964); o comprimento de entrada, a espessura e a velocidade máxima na superfície livre do filme de líquido, são respectivamente:

$$X_{e \text{ analítico}} = 36,50 \text{ cm}, \quad \delta_{\text{analítico}} = 1,26 \text{ mm} \text{ e } V_{x \text{ máx. analítico}} = 45,78 \text{ cm/s}$$

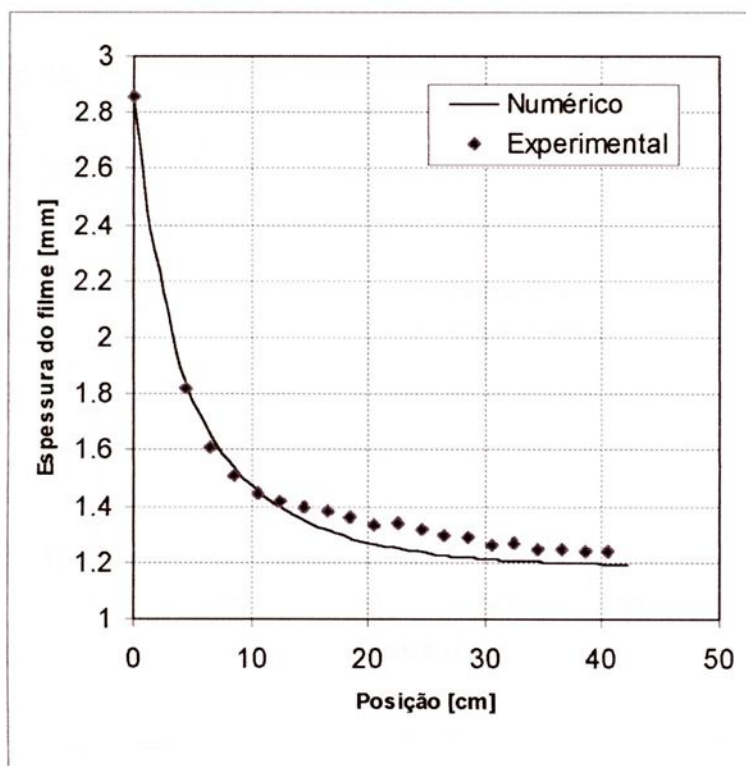


Figura 6.4. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

A Fig. 6.4. vem a corroborar os resultados teóricos do modelo numérico proposto e os dados experimentais obtidos, das espessuras do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal, com um erro relativo médio de 2,24%. A partir da posição em que o perfil de velocidades torna-se plenamente desenvolvido, observa-se a convergência entre as espessuras do filme, calculadas pelo modelo numérico proposto, pela obtida experimentalmente e pela solução analítica (eq. A.16 do Anexo A) ou seja:

$\delta_{\text{modelo proposto}} = 1,20 \text{ mm}$, $\delta_{\text{experimental}} = 1,24 \text{ mm}$ e o $\delta_{\text{analítico}} = 1,26 \text{ mm}$.

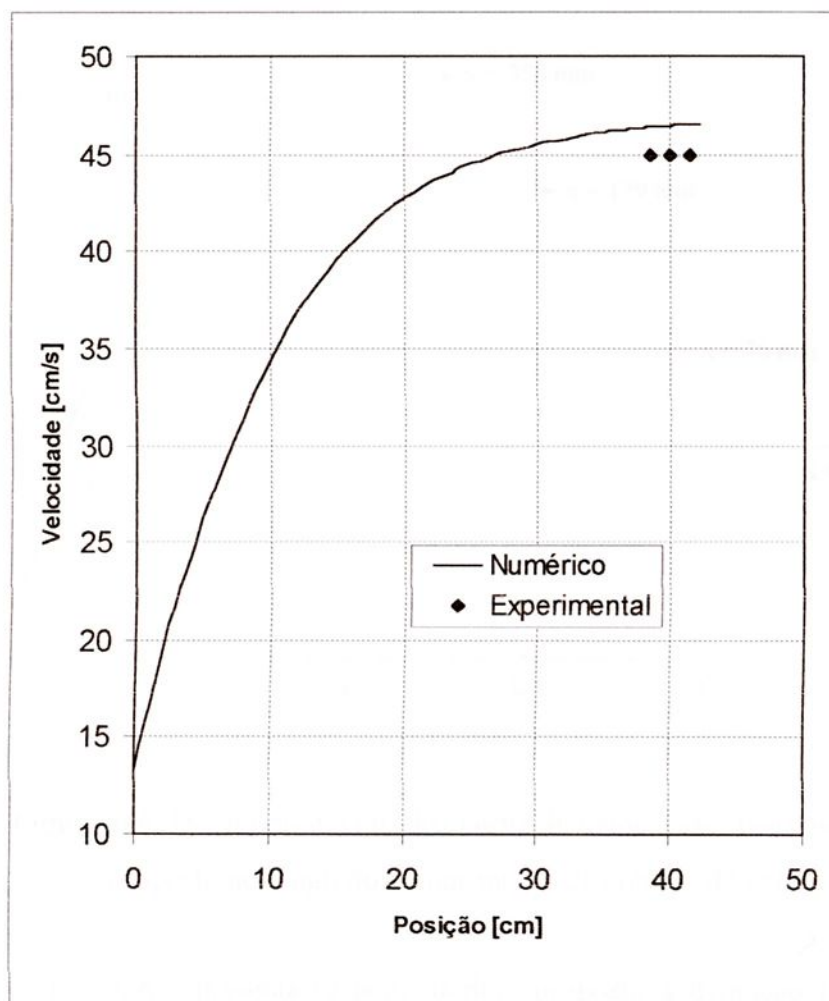


Figura 6.5. Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas medidas na superfície livre do filme.

A Fig. 6.5 apresenta o desenvolvimento das velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais, na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas tomadas na superfície livre do filme de líquido. Observa-se a convergência, para a posição de perfil de velocidades plenamente desenvolvido, com um erro relativo da ordem de 3,2%, entre as velocidades do modelo teórico proposto (0,465 m/s) e as obtidas dos dados

experimentais (0,45 m/s) e de 1,6% entre as velocidades do modelo analítico (eq. A.14 do Anexo A) (0,4578 m/s) e a do modelo numérico proposto (0,465 m/s).

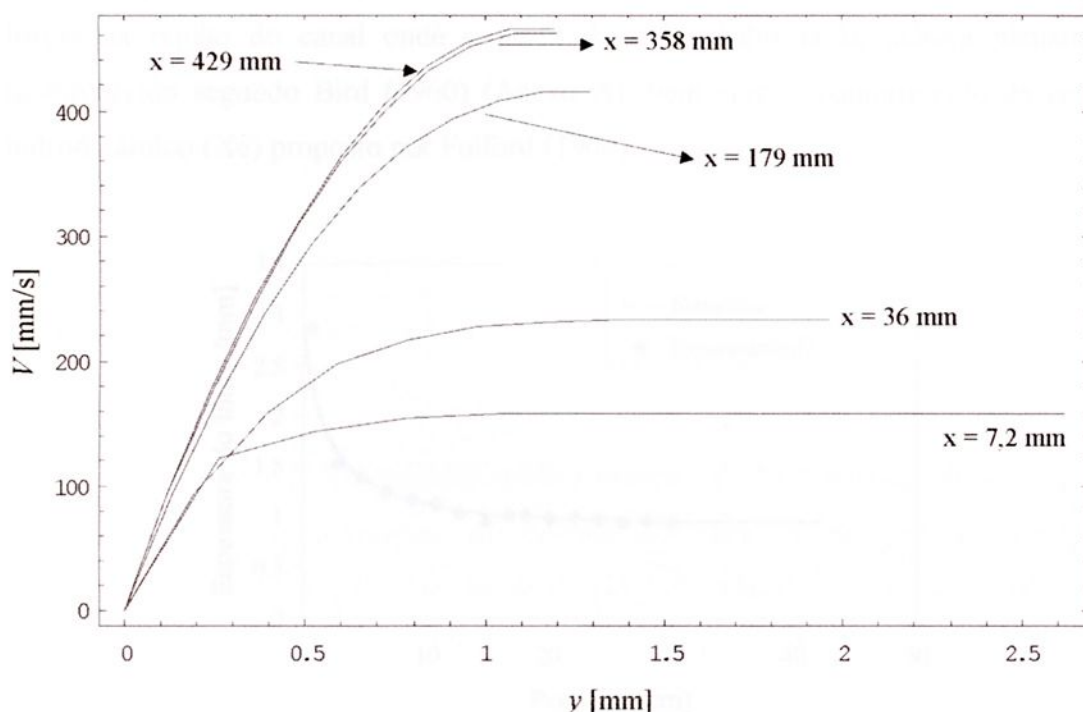


Figura 6.6. Desenvolvimento dos perfis de velocidades pelo modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

A Fig. 6.6 representa-se pelo modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 35,6 cm, para 35,755 cm do experimental e 36,50 cm para o analítico proposto por Fulford (eq. 5.1.5).

Nos valores anteriores obtidos, ao se calcular o erro relativo através das espessuras fornecidas pelos modelos, obtém-se aproximadamente 1,6% entre o modelo analítico e os dados experimentais, em torno de 5,3% entre o modelo numérico proposto e a solução analítica (eq. A.16 do Anexo A) e de 3,22% quando compara-se o modelo numérico proposto e os dados experimentais.

Nas figuras de (6.7) até (6.42) a seguir, são apresentados gráficos com a finalidade de se constatar confrontos elaborados entre o modelo matemático proposto, valores experimentais obtidos e valores analíticos calculados através do balanço de forças na região do canal onde o perfil de velocidades já se achava plenamente desenvolvido segundo Bird (1960) (Anexo A), bem com o comprimento de entrada hidrodinâmico (X_e) proposto por Fulford (1964).

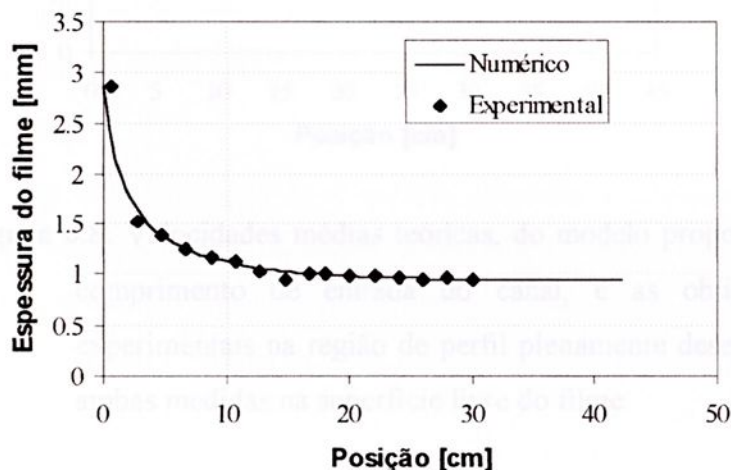


Figura 6.7. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

A Fig. 6.7 vem a constatar uma boa concordância entre os resultados teóricos do modelo numérico proposto e os dados experimentais obtidos, das espessuras do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal, com um erro relativo insignificante. A partir da posição em que o perfil de velocidades torna-se plenamente desenvolvido, observa-se a convergência entre as espessuras do filme, calculadas pelo modelo numérico proposto, pela obtida experimentalmente e pela solução analítica (eq. A.16 do Anexo A), ou seja:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,97 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,95 \text{ mm} \text{ e o } \delta_{\text{analítico}} = 1,00 \text{ mm}$$

Tais valores foram obtidos para uma vazão $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 84^\circ$.

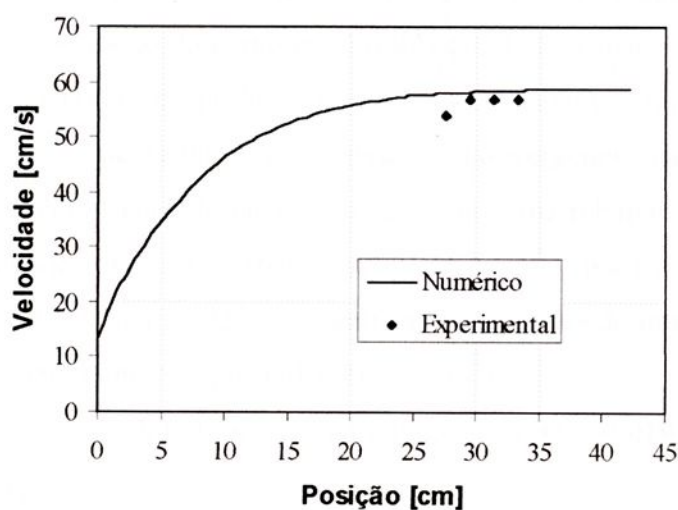


Figura 6.8. Velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas medidas na superfície livre do filme.

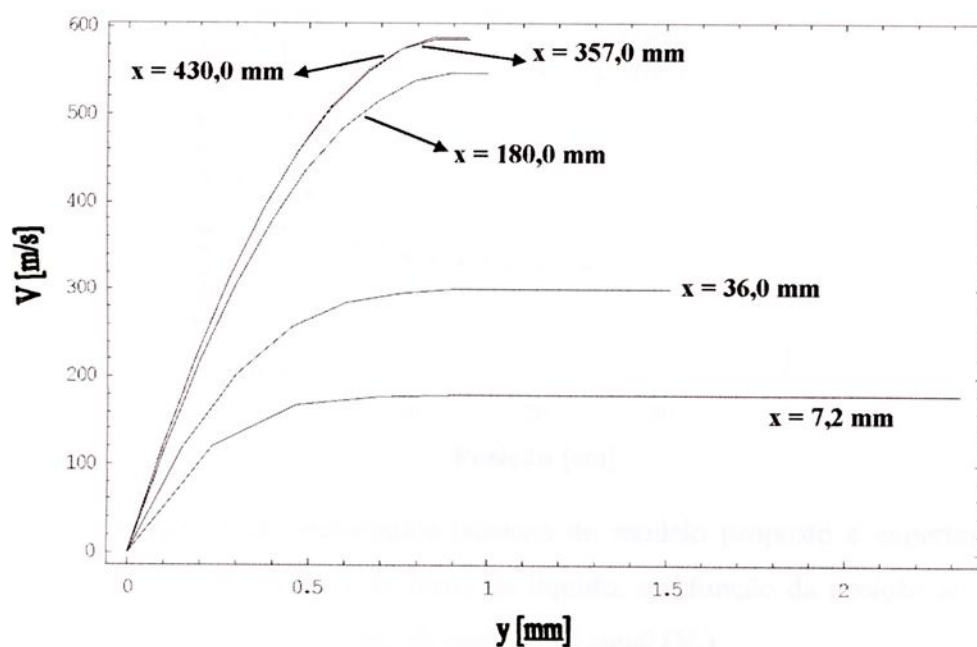


Figura 6.9. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

A Fig. 6.8 apresenta o desenvolvimento das velocidades médias teóricas, do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal, e as obtidas dos dados experimentais, na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas tomadas na superfície livre do filme de líquido. Observa-se a convergência, para a posição de perfil de velocidades plenamente desenvolvido, com um erro relativo da ordem de 2,56%, entre as velocidades do modelo teórico proposto (0,585 m/s) e as obtidas dos dados experimentais (0,570 m/s) e de 1,43% entre as velocidades do modelo analítico (0,576 m/s) e a do modelo numérico proposto (0,585 m/s).

Tais valores foram obtidos para uma vazão $Q = 0,019$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 84^\circ$.

Na Fig. 6.9 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 285,0 mm do experimental e 289,0 mm para o analítico, para uma vazão $Q = 0,019$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 84^\circ$.

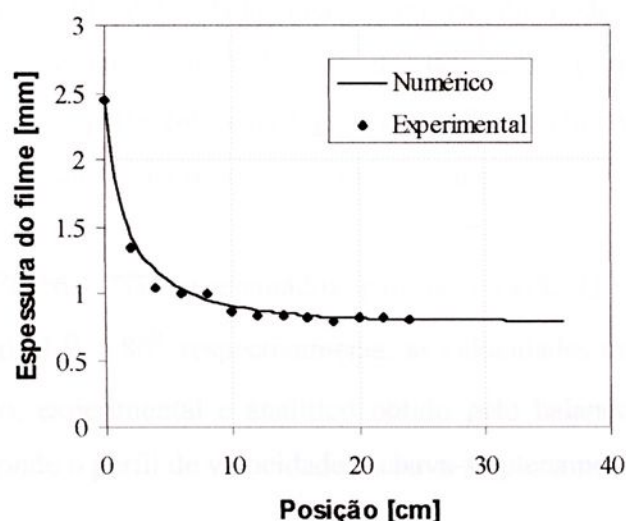


Figura 6.10. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.10 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,019$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo

proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,81 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,80 \text{ mm} \text{ e } \delta_{\text{analítico}} = 0,84 \text{ mm}$$

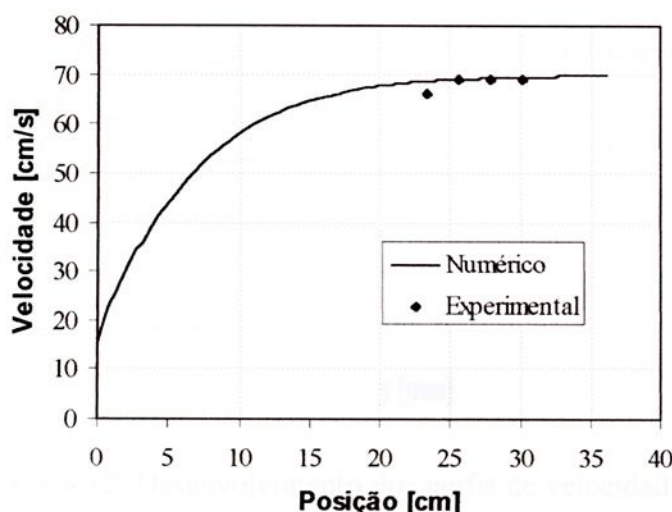


Figura 6.11. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

Na Fig. 6.11 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,695 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,690 \text{ m/s} \text{ e } V_{\text{analítico}} = 0,683 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.12 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 245 mm do experimental e 244,6 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$.

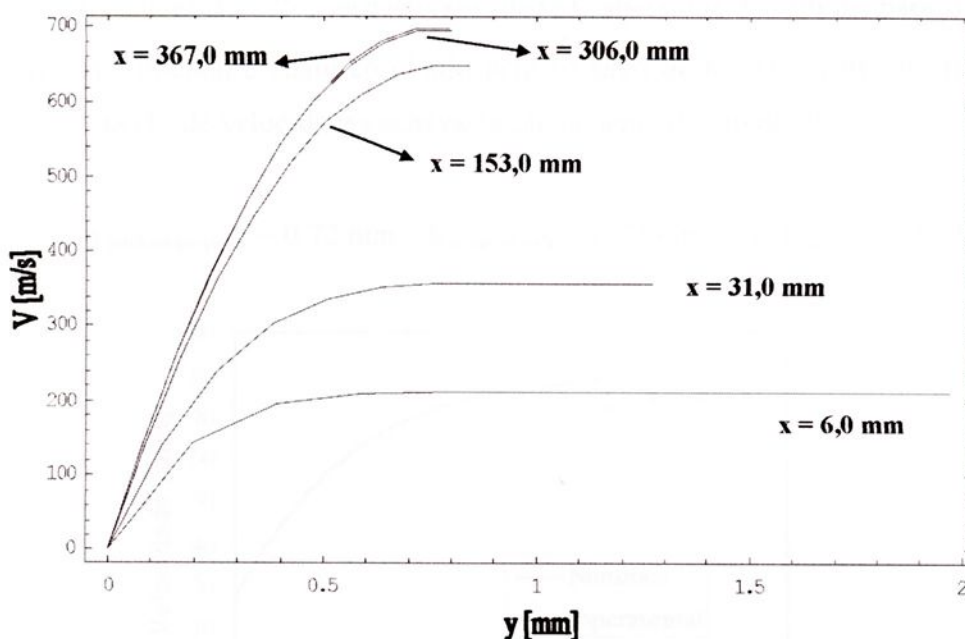


Figura 6.12. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

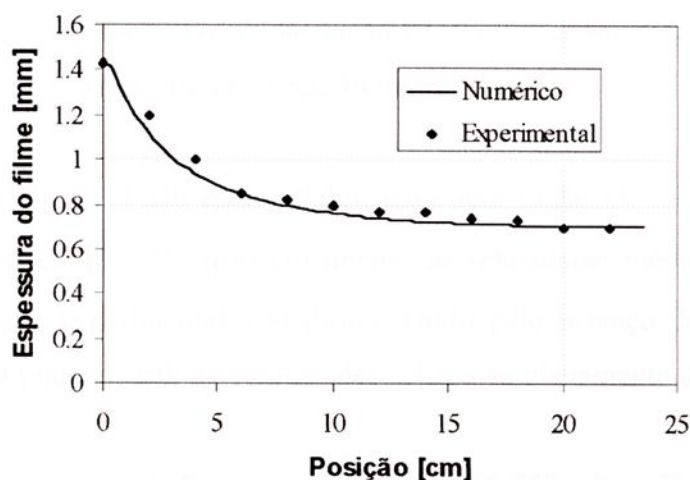


Figura 6.13. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.13 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,019$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,72 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,70 \text{ mm} \text{ e o } \delta_{\text{analítico}} = 0,74 \text{ mm}$$

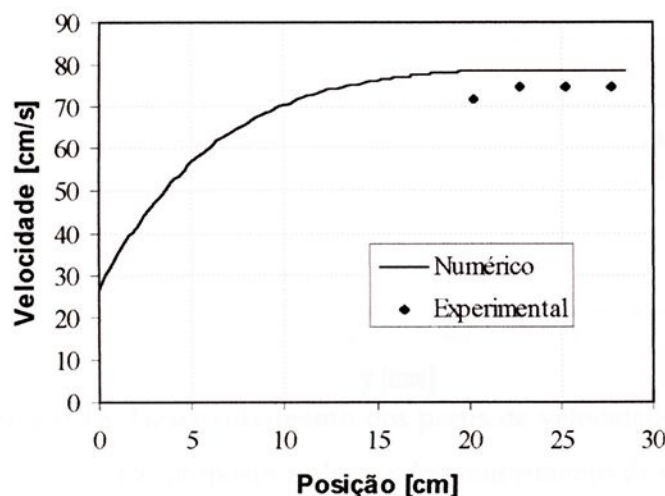


Figura 6.14. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

Na Fig. 6.14 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,019$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,785 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,750 \text{ m/s} \text{ e } V_{\text{analítico}} = 0,780 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.15 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 215,0 mm do experimental e 214,0 mm para o

analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,019 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$.

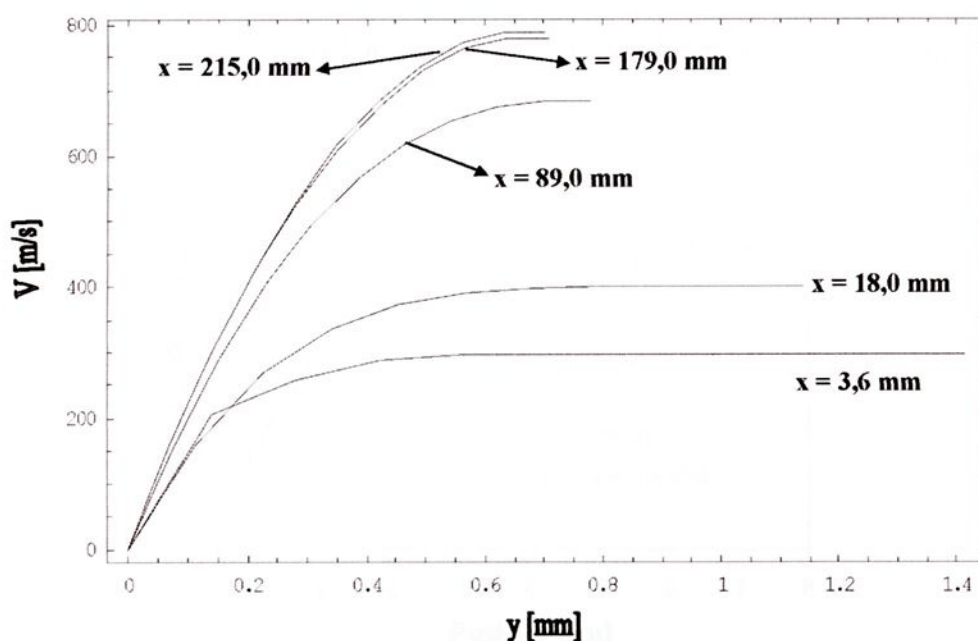


Figura 6.15. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

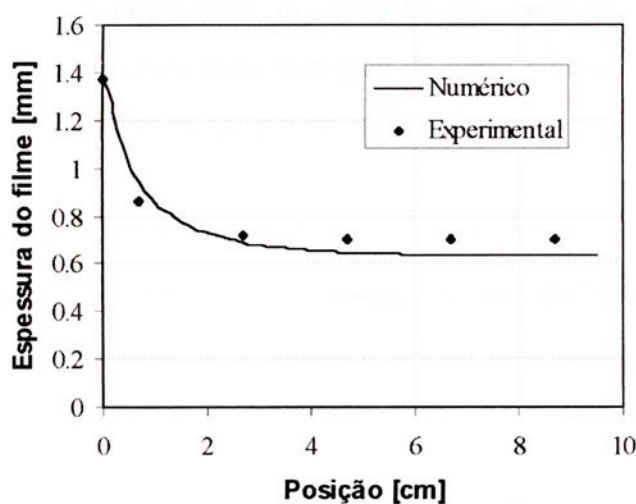


Figura 6.16. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.16 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 85^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo

proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,65 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,70 \text{ mm} \text{ e } \delta_{\text{analítico}} = 0,70 \text{ mm}$$

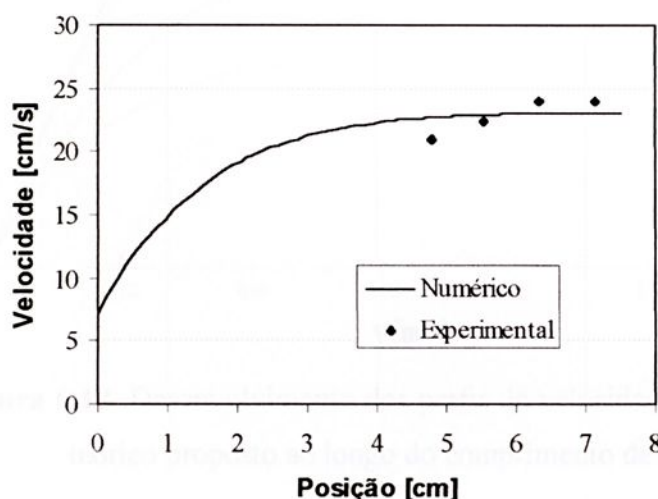


Figura 6.17. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

Na Fig. 6.17 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 85^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,255 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,240 \text{ m/s} \text{ e } V_{\text{analítico}} = 0,237 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.18 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 59,5 mm do experimental e 58,8 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 85^\circ$.

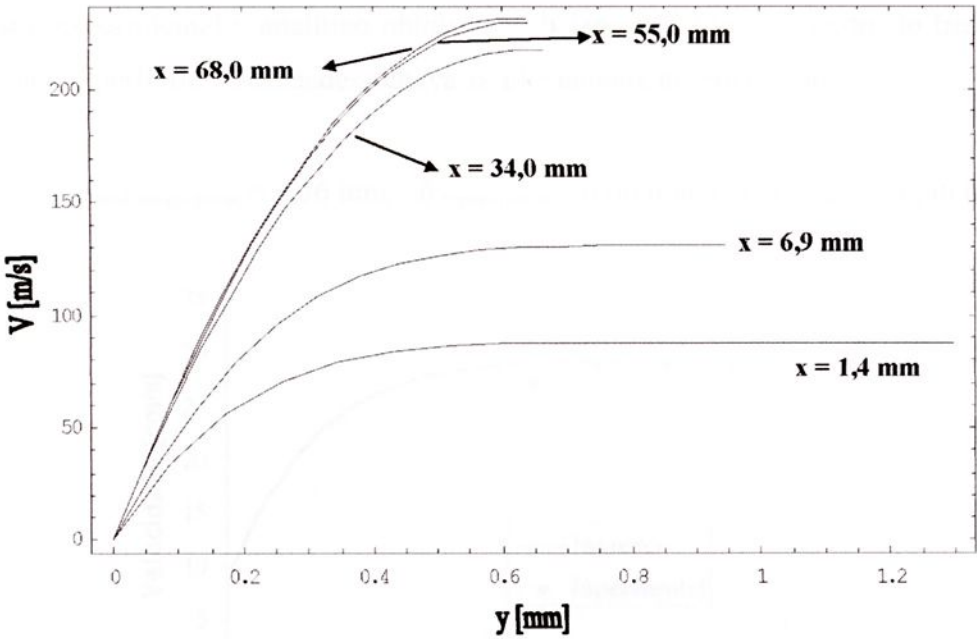


Figura 6.18. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

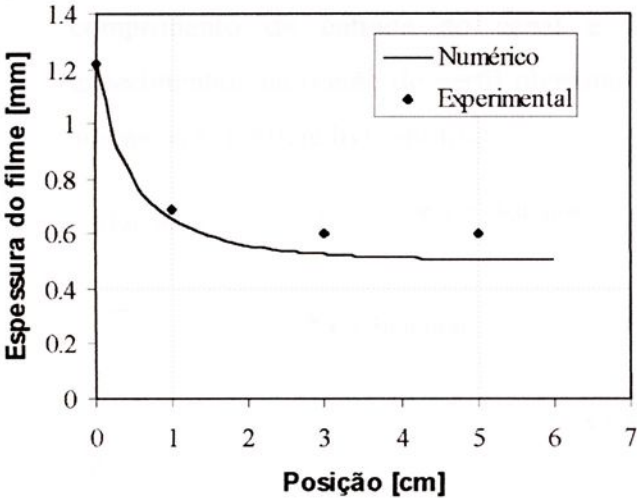


Figura 6.19. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.19 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo

proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,56 \text{ mm}$, $\delta_{\text{experimental}} = 0,60 \text{ mm}$ e o $\delta_{\text{analítico}} = 0,56 \text{ mm}$

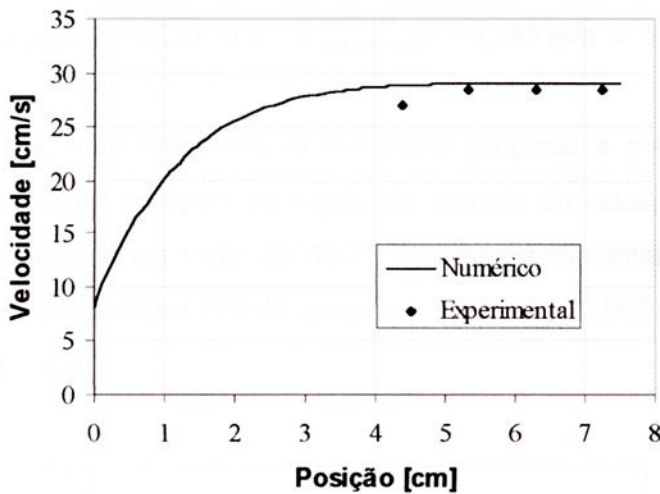


Figura 6.20. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

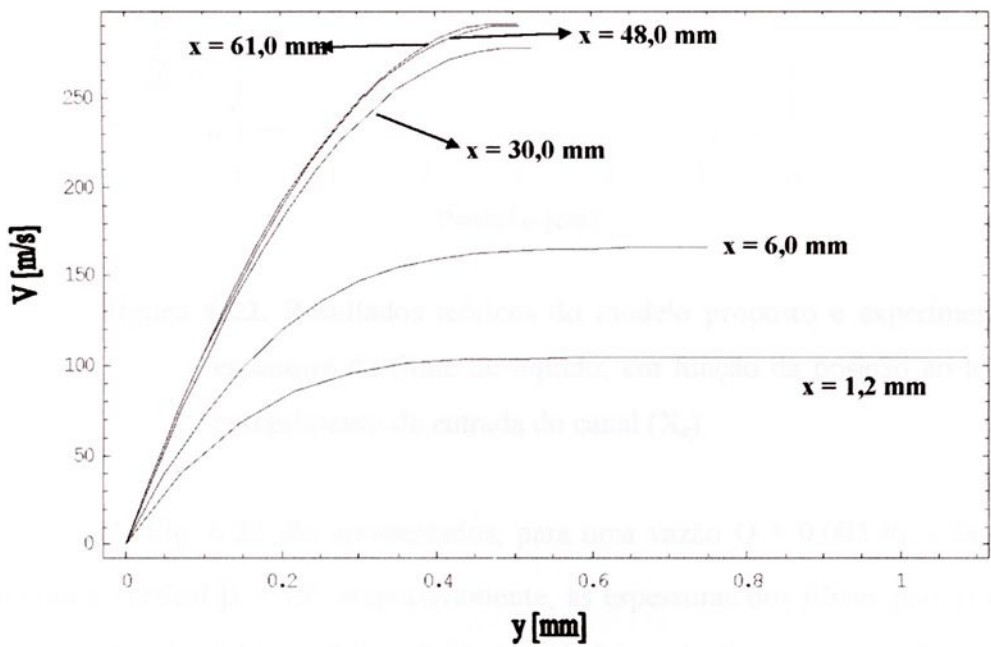


Figura 6.21. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.20 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,287 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,285 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad V_{\text{analítico}} = 0,298 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.21 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 48,75 mm do experimental e 46,70 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$.

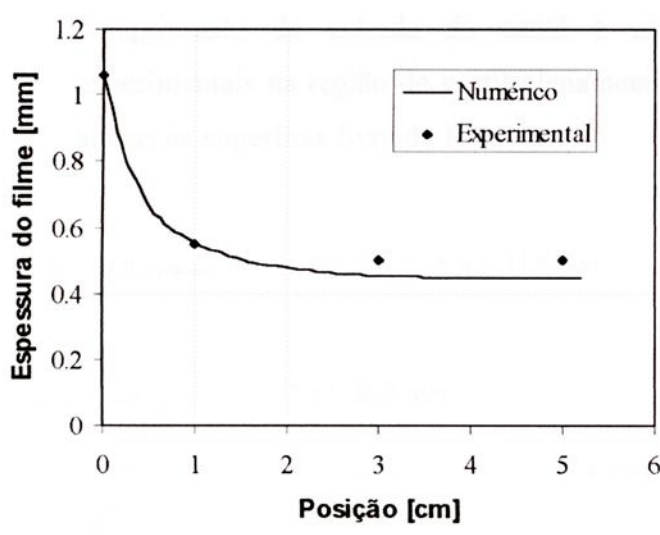


Figura 6.22. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.22 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,47 \text{ mm}$, $\delta_{\text{experimental}} = 0,50 \text{ mm}$ e o $\delta_{\text{analítico}} = 0,49 \text{ mm}$

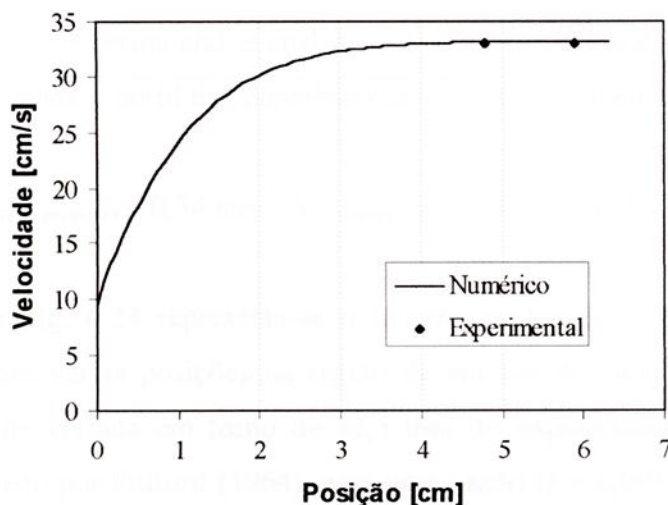


Figura 6.23. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

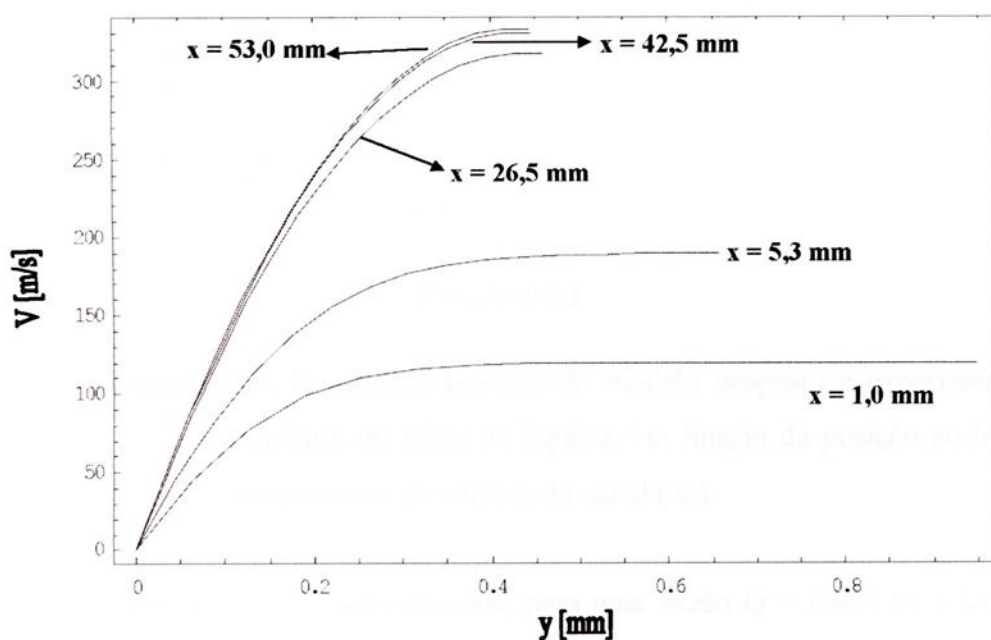


Figura 6.24. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.23 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,34 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,33 \text{ m/s} \text{ e } V_{\text{analítico}} = 0,34 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.24 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 42,5 mm do experimental e 40,9 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,005$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$.

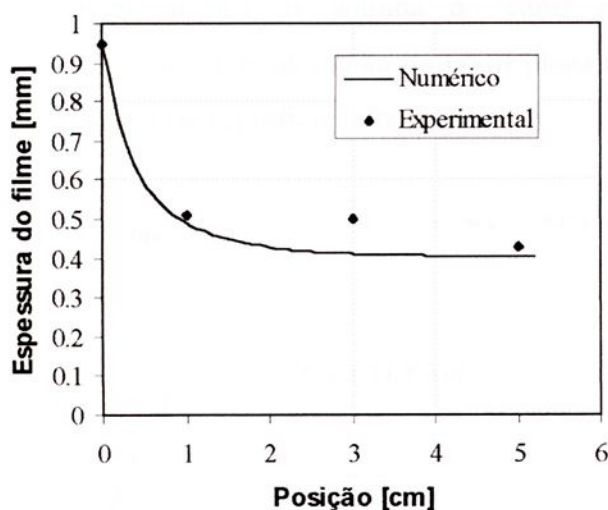


Figura 6.25. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.25 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 70^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,42 \text{ mm}$, $\delta_{\text{experimental}} = 0,43 \text{ mm}$ e o $\delta_{\text{analítico}} = 0,44 \text{ mm}$

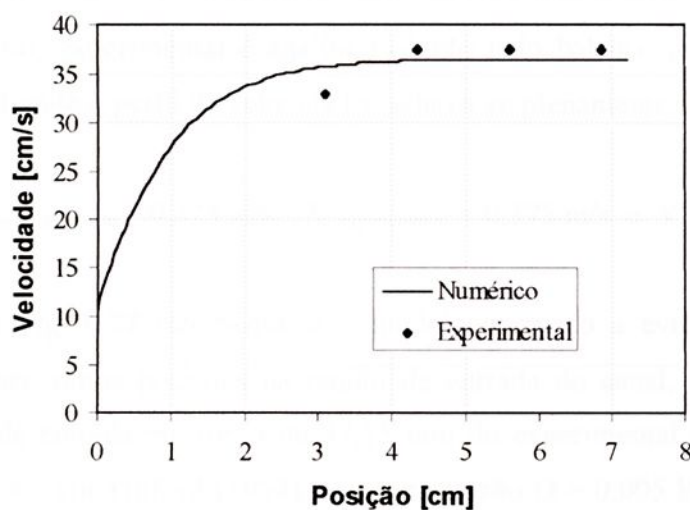


Figura 6.26. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

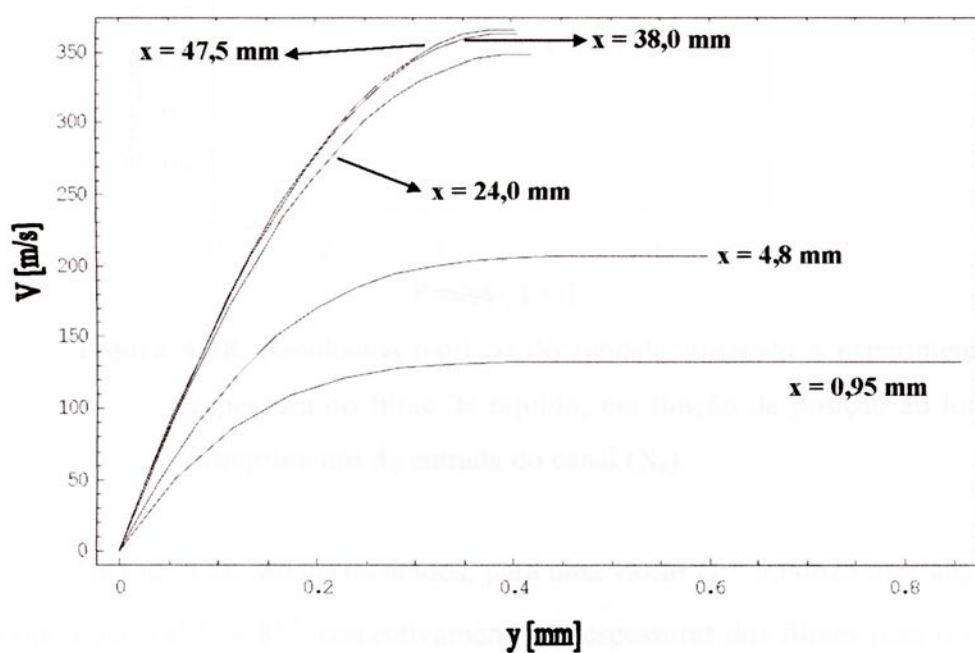


Figura 6.27. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.26 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 70^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,374 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,375 \text{ m/s} \text{ e } V_{\text{analítico}} = 0,374 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.27 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 37,25 mm do experimental e 37,30 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,005 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 70^\circ$.

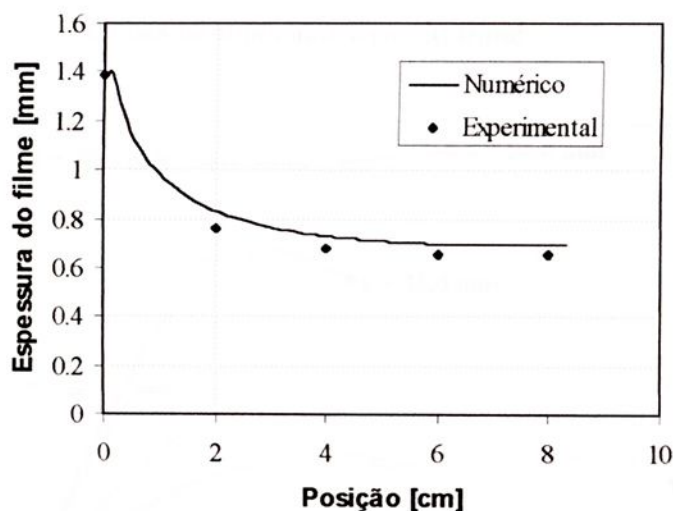


Figura 6.28. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.28 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 85^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,68 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,66 \text{ mm} \text{ e } \delta_{\text{analítico}} = 0,70 \text{ mm}$$

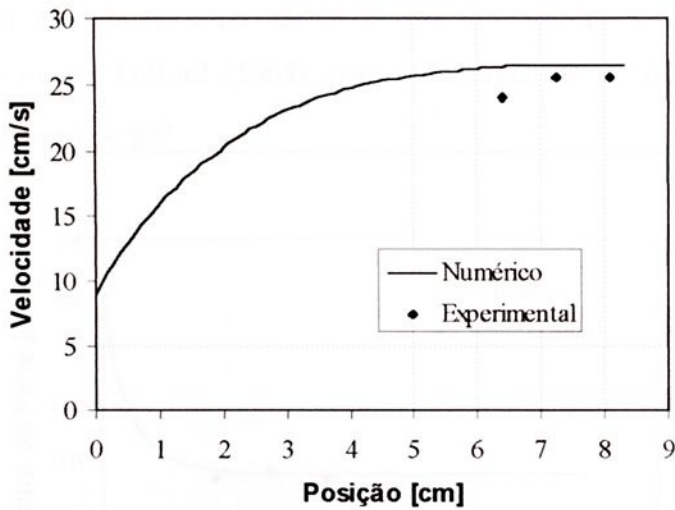


Figura 6.29. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

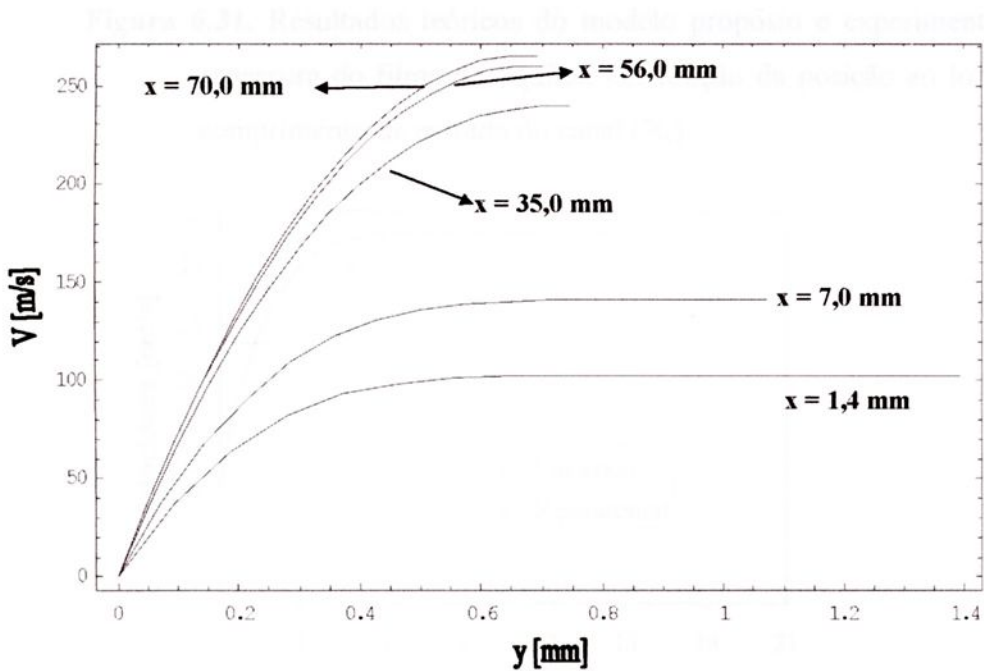


Figura 6.30. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.30 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um

comprimento de entrada em torno de 68,25 mm do experimental e 68,80 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 85^\circ$.

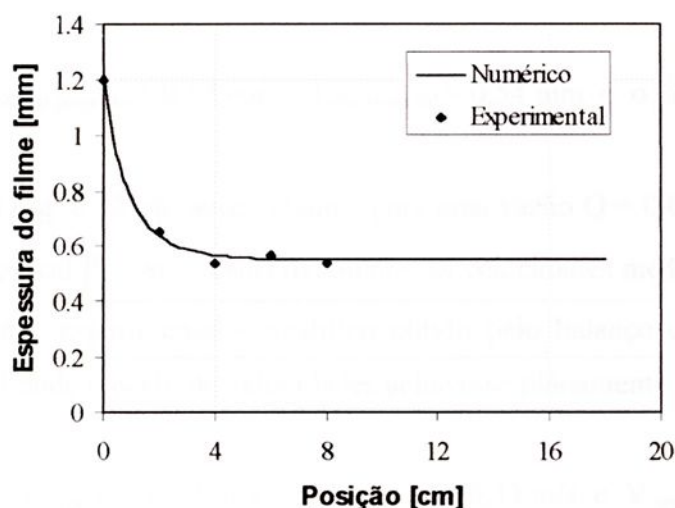


Figura 6.31. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

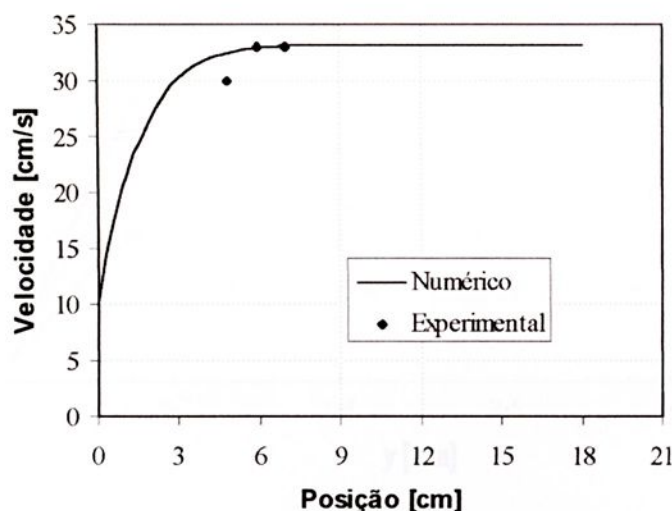


Figura 6.32. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

Na Fig. 6.31 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,57 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,54 \text{ mm} \text{ e } \delta_{\text{analítico}} = 0,60 \text{ mm}$$

Na Fig. 6.32 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,33 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,33 \text{ m/s} \text{ e } V_{\text{analítico}} = 0,32 \text{ m/s}$$

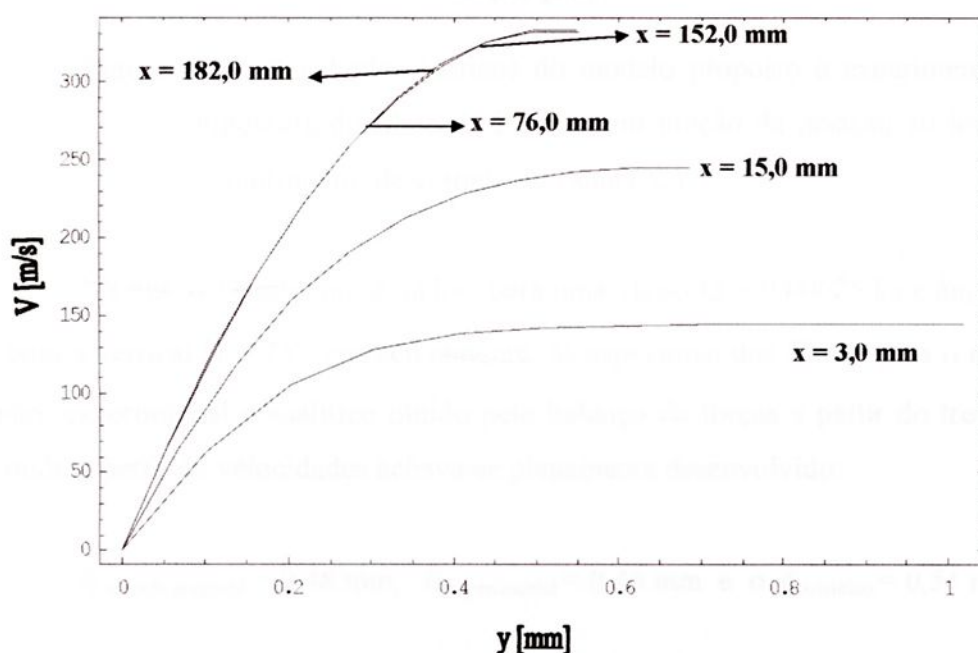


Figura 6.33. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.33 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um

comprimento de entrada em torno de 53,50 mm do experimental e 54,60 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 80^\circ$.

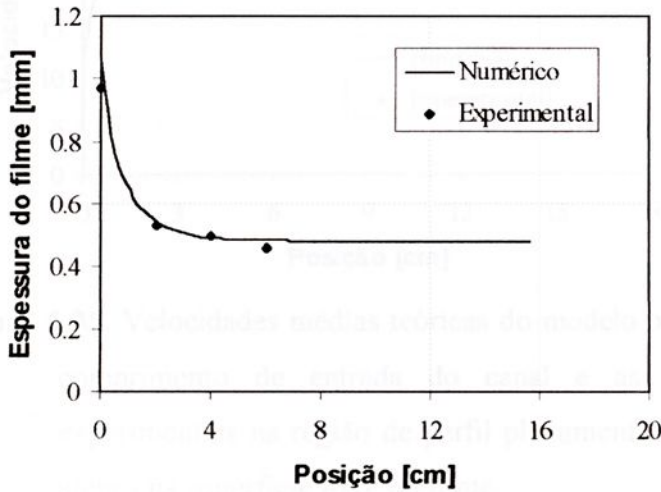


Figura 6.34. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.34 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,48 \text{ mm}$, $\delta_{\text{experimental}} = 0,46 \text{ mm}$ e o $\delta_{\text{analítico}} = 0,51 \text{ mm}$

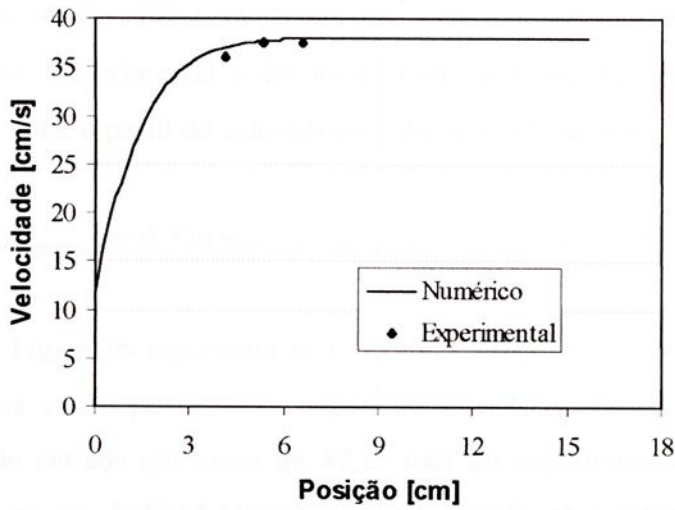


Figura 6.35. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

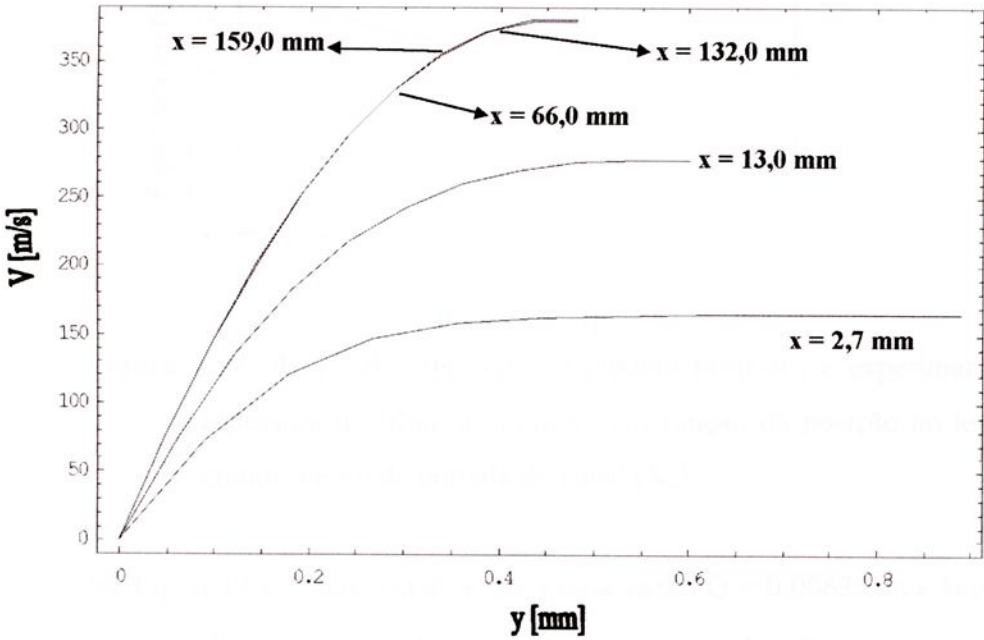


Figura 6.36. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.35 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,376 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,375 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad V_{\text{analítico}} = 0,337 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.36 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 47,25 mm do experimental e 47,8 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 75^\circ$.

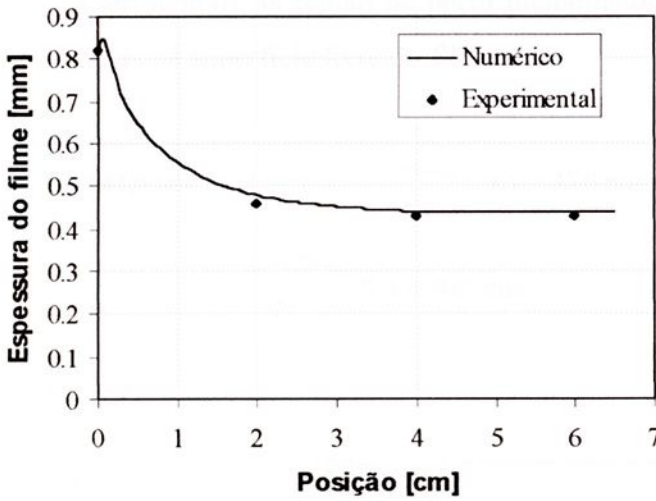


Figura 6.37. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.37 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 70^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,44 \text{ mm}, \quad \delta_{\text{experimental}} = 0,43 \text{ mm} \quad \text{e} \quad \delta_{\text{analítico}} = 0,46 \text{ mm}$$

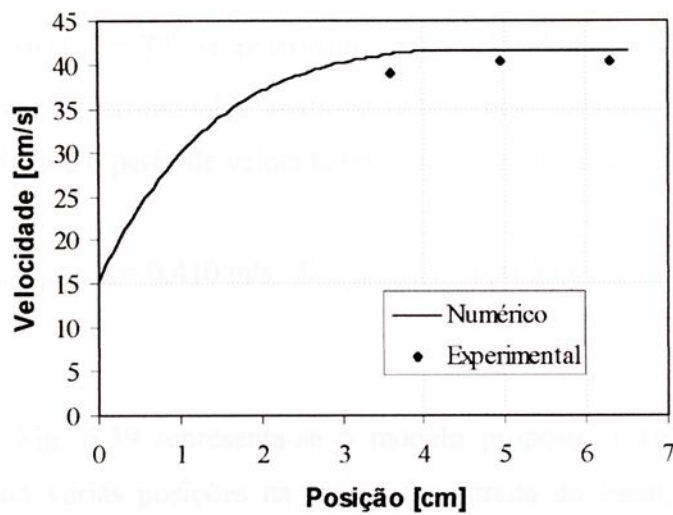


Figura 6.38. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

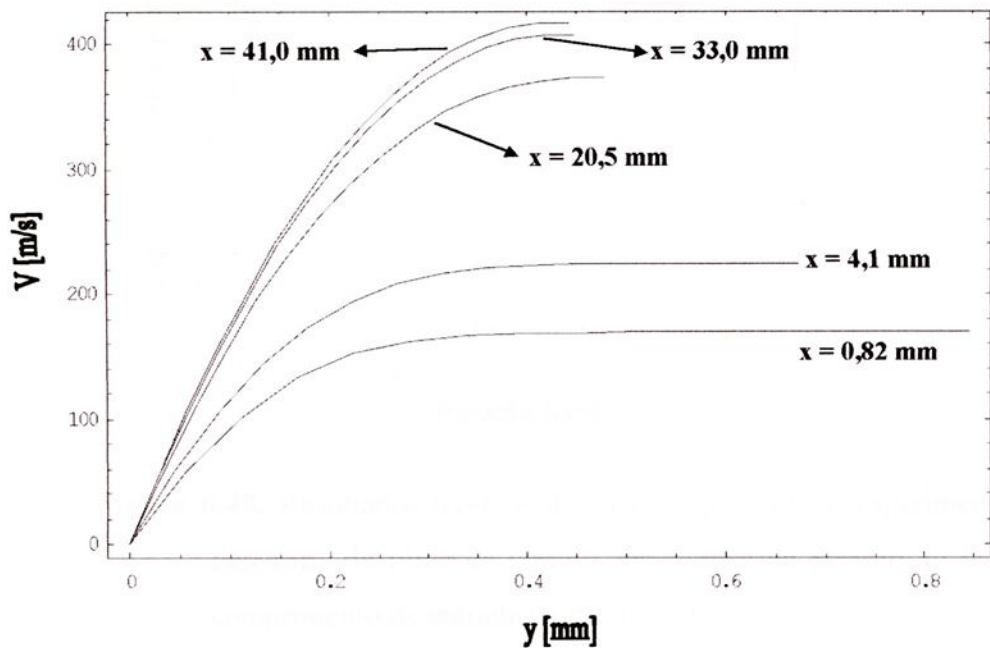


Figura 6.39. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.38 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 70^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,410 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,405 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad V_{\text{analítico}} = 0,405 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.39 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 42,75 mm do experimental e 43,60 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,00625 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 70^\circ$.

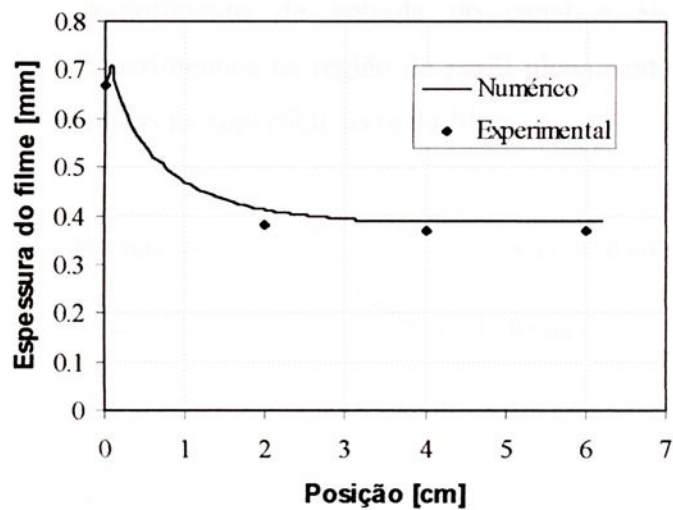


Figura 6.40. Resultados teóricos do modelo proposto e experimentais da espessura do filme de líquido, em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Na Fig. 6.40 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625 \text{ l/s}$ e ângulo do canal com a vertical $\beta = 60^\circ$, respectivamente, as espessuras dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$\delta_{\text{modelo proposto}} = 0,39 \text{ mm}$, $\delta_{\text{experimental}} = 0,37 \text{ mm}$ e o $\delta_{\text{analítico}} = 0,40 \text{ mm}$

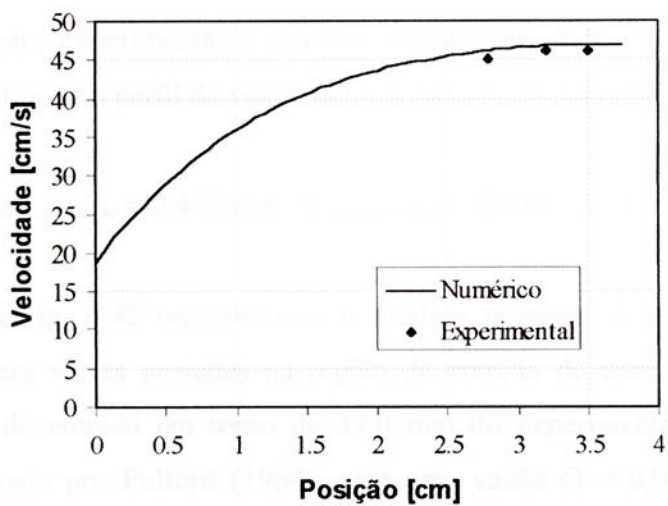


Figura 6.41. Velocidades médias teóricas do modelo proposto ao longo do comprimento de entrada do canal e as obtidas dos dados experimentais na região de perfil plenamente desenvolvido, sendo ambas na superfície livre do filme.

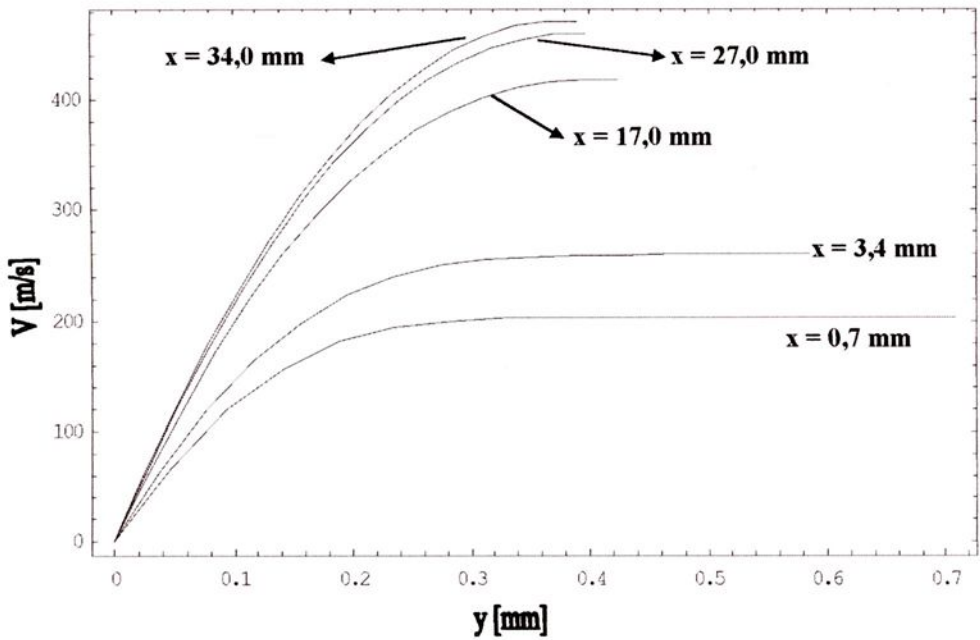


Figura 6.42. Desenvolvimento dos perfis de velocidades através do modelo teórico proposto ao longo do comprimento de entrada do canal.

Na Fig. 6.41 são apresentados, para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 60^\circ$, respectivamente, as velocidades médias dos filmes para o modelo proposto, experimental e analítico obtido pelo balanço de forças a partir do trecho do canal onde o perfil de velocidades achava-se plenamente desenvolvido:

$$V_{\text{mod. proposto}} = 0,462 \text{ m/s}, \quad V_{\text{experimental}} = 0,450 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad V_{\text{analítico}} = 0,459 \text{ m/s}$$

Na Fig. 6.42 representa-se o modelo proposto a evolução dos perfis de velocidades para várias posições na região de entrada do canal, correspondendo um comprimento de entrada em torno de 37,0 mm do experimental e 38,4 mm para o analítico proposto por Fulford (1964), para uma vazão $Q = 0,00625$ l/s e ângulo do canal com a vertical $\beta = 60^\circ$.

6.4.2 – O MODELAMENTO MATEMÁTICO PROPOSTO

Na Fig. 6.43 são apresentadas as espessura do filme de líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal para uma vazão de 0,00625 l/s e diversos ângulos de inclinação beta (β) formados entre o canal e a vertical.

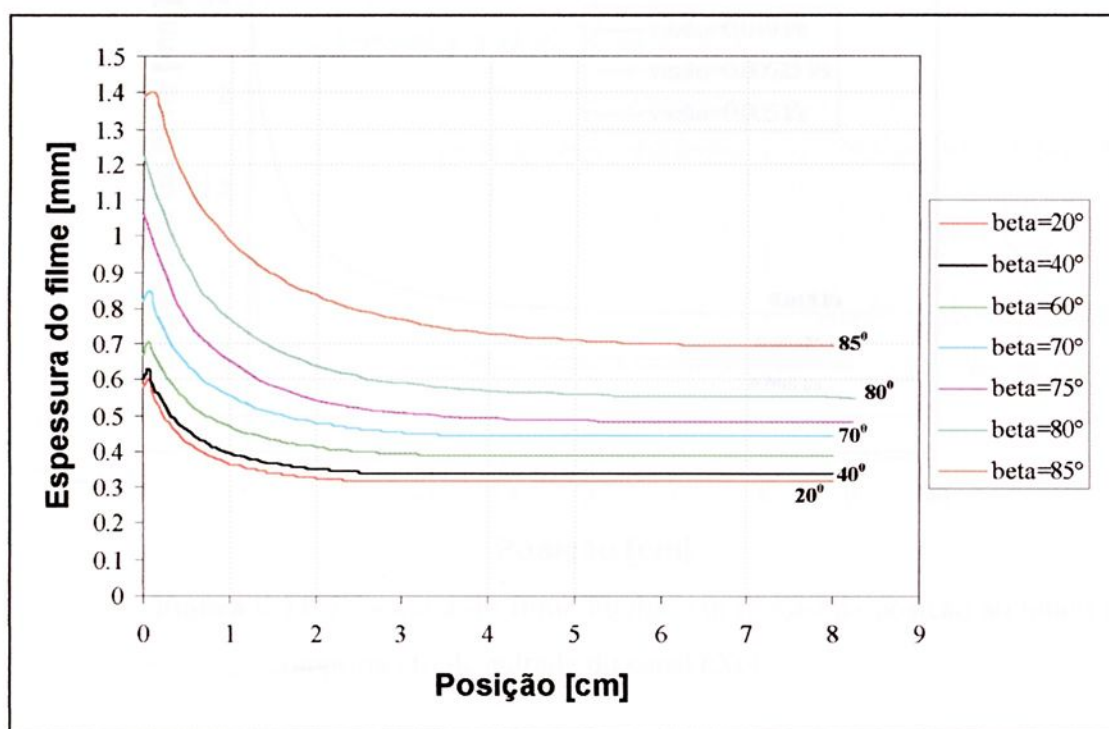


Figura 6.43. Espessura do filme líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Pode-se verificar através do modelo matemático proposto que, para uma mesma vazão, os ângulos beta maiores ($0^\circ \leq \beta < 90^\circ$) implicam em espessuras do filme líquido maiores e o perfil de velocidade progride em menos tempo que para os ângulos beta menores. Conseqüentemente isto fornece um maior tempo de contato entre a película de líquido e o canal, ou seja, o tempo de residência fluido-canal é maior.

Na Fig. 6.44 são apresentadas as espessura do filme líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal, para um mesmo ângulo $\beta=80^\circ$ formado com o canal e a vertical e algumas vazões escolhidas.

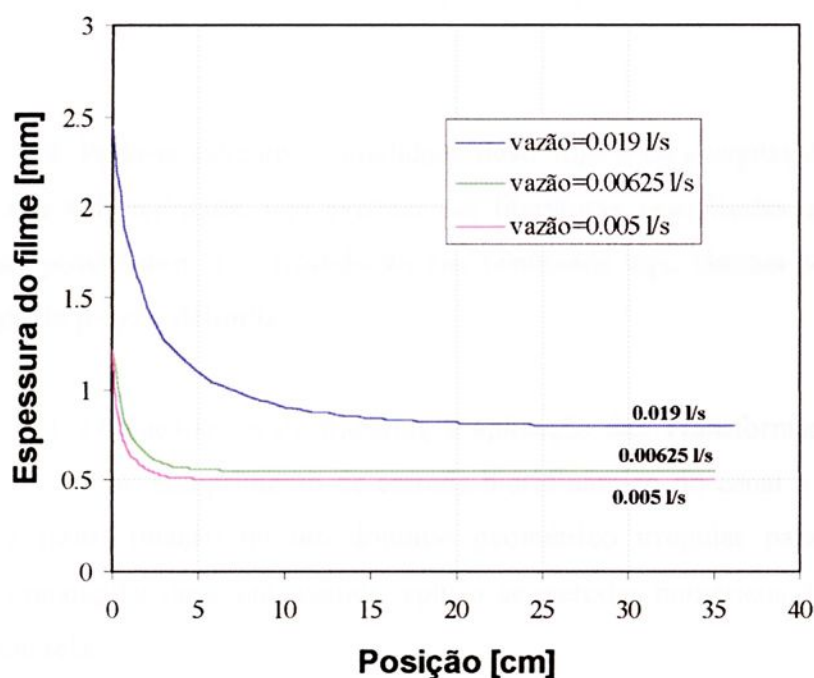


Figura 6.44. Espessura do filme líquido em função da posição ao longo do comprimento de entrada do canal (X_e).

Observa-se que, para um mesmo ângulo β , as maiores vazões provocam um tempo maior de residência entre o filme líquido e o canal por onde o fluido escoar.

Outrossim pode-se concluir que, para baixos Números de Reynolds, consegue-se um maior tempo de residência do fluido no canal para ângulos β próximos de 90° e vazões elevadas, sobretudo, mantendo-se as condições de escoamento laminar.

7 – CONCLUSÕES

7.1. A análise de erros, entre o modelo numérico proposto, os dados experimentais e os modelos analíticos de Fulford (1964) como aqueles obtidos pelas equações (A.14) e (A.16) do Anexo A, fornecem um bom grau de confiabilidade quanto à validade do modelo numérico proposto, para ser aplicado na região de entrada do canal.

7.2. Pode-se salientar a atualidade deste tópico de pesquisa científica, pois, apesar de sua aplicabilidade, não existem nas literaturas pesquisadas outros modelos teóricos que possibilitem a comvalidação dos resultados aqui obtidos bem como uma metodologia de projeto definida.

7.3. Destaca-se, neste trabalho, a aplicação das Transformadas de Landau (Padilha – 1990), no comprimento de entrada hidrodinâmico do canal a fim de que se obtivesse a transformação de um domínio geométrico irregular para um domínio geométrico retangular para, em seguida, aplicar-se métodos numéricos de resolução do problema em tela.

7.4. Concluiu-se que, trabalhando com baixos Números de Reynolds, as maiores vazões, associadas a ângulos beta (β) entre o canal e a vertical, ângulos esses próximos a 90° , provocam estas associações um maior lapso temporal de residência do filme de líquido no canal.

7.5. A maior permanência da película líquida escoando pelo canal possibilitará, em projetos futuros, o estudo evaporativo do filme líquido com altas taxas de transferência de calor e massa para grandes superfícies por unidade de volume, sendo que este trabalho desenvolvido fornecerá subsídios relevantes para se conseguir galgar sucessos em projetos de pesquisas seqüentes.

7.6. O modelo matemático proposto por Fulford (1964), fornecia-nos tão somente o comprimento de entrada hidrodinâmico X_e do filme de líquido que descidia



por placa plana em escoamento acelerado. Bird (1960), selecionava uma fina casca de fluido em região do escoamento já livre de perturbações de entrada e de saída, obtendo-se, assim, a espessura δ constante da película como também as velocidades média e máxima em região do canal onde o perfil de velocidades encontrava-se plenamente desenvolvido.

Os valores experimentais obtidos neste trabalho vieram a convalidar tais modelos matemáticos supracitados, outrossim, o modelo matemático desenvolvido ao longo desta pesquisa científica, veio a corroborar tanto os valores experimentais como também os modelamentos matemáticos propostos por Fulford e Bird mas, sobretudo, veio a dar-nos ciência do comportamento do filme na região de entrada hidrodinâmico, ou seja, como decrescia passo a passo a espessura δ do filme de líquido e como se desenvolvia o perfil de velocidades até que esse se tornasse plenamente desenvolvido.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALHUSSEINI, A.A., TUZLA, K. e CHEN, J.C., 1998, Falling film evaporation of a single component liquids, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, v. 12.
- BANDELIER, P., 1997, Improvement of multifunctional heat exchanger applied in industrial processes, *Applied Thermal Engineering*, v. 17.
- BIRD, R. B., STWART, W. E. e LIGHFOOT, E. N., 1960, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, Inc.
- CARNAHAN, B., LUTHER, H. A., and WILKES, J. O., 1979, *Applied Numerical Methods*, John Wiley & Sons, Inc., pp. 429.
- FULFORD, G. D., 1964, *Handbook of Heat and Mass Transfer*, v. 2: Mass Transfer and Reactor Design, Editor Nicholas P. Cheremisinoff.
- HE, S., NA, P., Li, J. e JACKSON. J. D., 1998, Combined heat and mass transfer in a uniformly heated vertical tube with water falling film, *Int. J. of Heat and Fluid Flow*, v.19.
- KAPITZA, P. L., 1963, *Handbook of Heat and Mass Transfer*, vol. 2: Mass Transfer and Reactor Design, Editor Nicholas P. Cheremisinoff.
- NUSSELT, W., 1910, *Handbook of Heat and Mass Transfer*, vol. 2: Mass Transfer and Design, Editor Nicholas P. Cheremisinoff.
- PADILHA, A., 1990, *Estudo Teórico e Experimental Do Movimento de Frente de Solidificação por Super-Resfriamento de um Líquido no Interior de um Duto*, Tese de Doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, Campinas – S.P..
- PATANKAR, S.V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation.
- RAHMAN, M. M., FAGHRI, A., 1992, Analysis of Heating and Evaporation from a Liquid Film Adjacent to a Horizontal Rotating Disk, *ASME*, vol. 3, pp. 47 - 55.
- RAHMAN, M. M., FAGHRI, A., and HANKEY, 1990, W. L., Computation of the Free Surface Flow of a Thin Liquid Film at Zero and Normal Gravity, *Numerical Heat Transfer*, vol. 17, pp. 53 - 71.



SHAMES, I. H., 1982, Mechanics of Fluids, McGraw-Hill, Inc..

SHANG, D. Y., ANDERSSON, H. I., 1998, Heat transfer in gravity – driven film flow of power – law fluids, International Journal of Heat and Mass Transfer 42 (1999) 2085 – 2099.

SIWON, B., and ENNAQUI, M., 1991, Calculating Hidrodynamics Problems for a Liquid Film Flowing Radially on a Flat Horizontal Surface, International Journal of Numerical Methods in Fluids, John Wiley & Sons, Ltda, vol. 13, pp.655 - 666.

SONG, B., INABA, H., HORIBE, A. e OZAKI, K., 1999, Heat, mass and momentum transfer of a water film flowing down a tilted plate exposed to solar irradiation, Int. J. of Thermal Science, v. 38.

VIRTO, L. A., 1993, Mecânica de Fluids. Fundaments I., Edicions UPC.

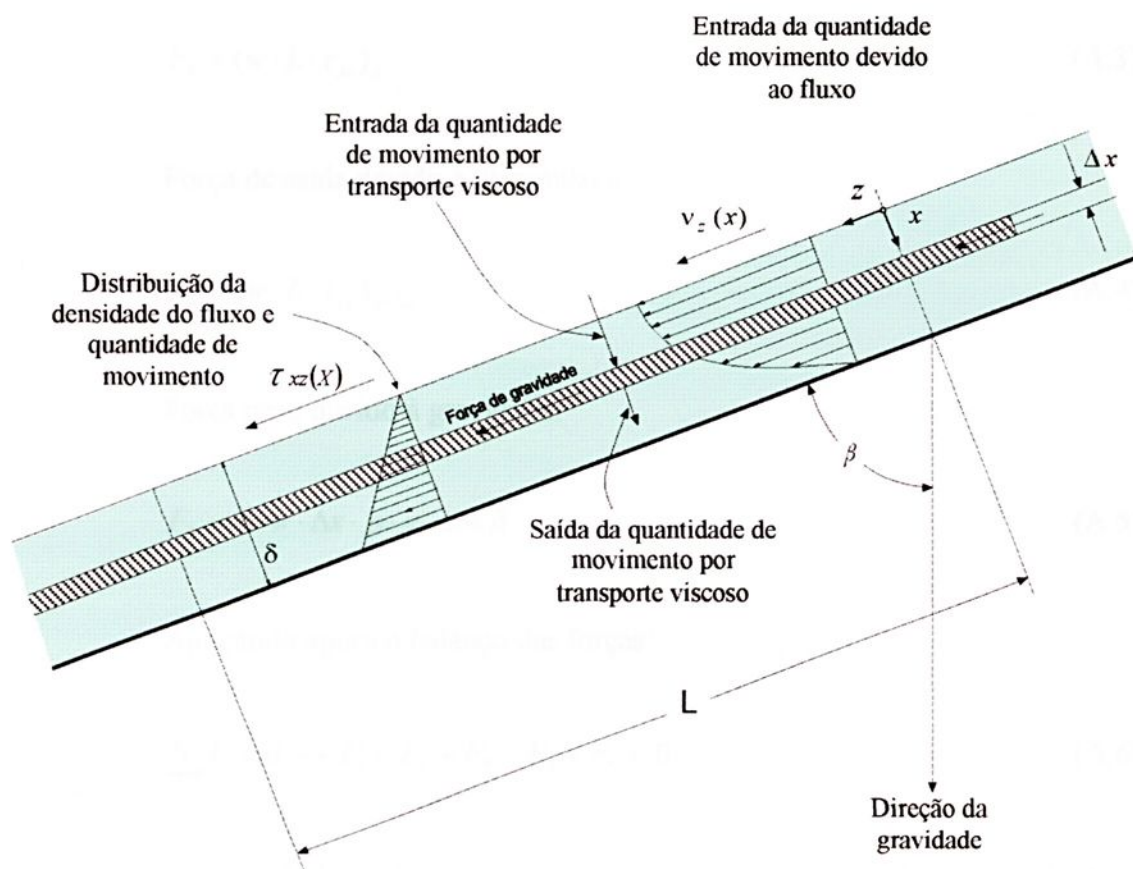


Figura A.2. Fluxo viscoso isotérmico de uma película de líquido sob a influência da gravidade, sem formação de ondulações. Casca de espessura Δx sobre a qual se aplica o balanço de quantidade de movimento. O eixo y é perpendicular ao plano $z - x$.

Força devido a variação da quantidade de movimento na entrada:

$$F_1 = w \cdot \Delta x \cdot V_z \cdot (\rho \cdot V_z)_{z=0} \quad (\text{A.1})$$

Força devido a variação da quantidade de movimento na saída:

$$F_2 = w \cdot \Delta x \cdot V_z \cdot (\rho \cdot V_z)_{z=L} \quad (\text{A.2})$$

Força de entrada devido à viscosidade:

$$F_3 = (w \cdot L \cdot \tau_{xz})_x \quad (\text{A.3})$$

Força de saída devido à viscosidade:

$$F_4 = (w \cdot L \cdot \tau_{xz})_{x+\Delta x} \quad (\text{A.4})$$

Força peso devido à gravidade:

$$F_5 = L \cdot w \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot \cos \beta \quad (\text{A.5})$$

Aplicando agora o balanço das forças:

$$\sum F = 0 \rightarrow F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + F_5 = 0 \quad (\text{A.6})$$

Como $(\rho)_{z=0} = (\rho)_{z=L}$, pois o escoamento é incompressível e $(V_z)_{z=0} = (V_z)_{z=L}$, pois já foi atingido o perfil de velocidade plenamente desenvolvido, tem-se que: $F_1 = F_2$ e assim: $F_3 - F_4 + F_5 = 0$, ou seja:

$$w \cdot L \cdot (\tau_{xz})_x - w \cdot L \cdot (\tau_{xz})_{x+\Delta x} + L \cdot w \cdot \Delta x \cdot \rho \cdot g \cdot \cos \beta = 0 \quad (\text{A.7})$$

dividindo-se membro a membro a eq. (7) por $(L \cdot w \cdot \Delta x)$, tem-se:

$$\frac{(\tau_{xz})_{x+\Delta x} - (\tau_{xz})_x}{\Delta x} = \rho \cdot g \cdot \cos \beta \quad (\text{A.8})$$

Aplicando-se limite para $\Delta x \rightarrow 0$, resulta:

$$\frac{d\tau_{xz}}{dx} = \rho \cdot g \cdot \cos \beta, \text{ equação diferencial para a tensão de cisalhamento} \quad (\text{A.9})$$

Integrando:

$$\tau_{xz} = \rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot x + C_1$$

Para $x = 0$, implica que $\tau_{xz} = 0$, e, portanto $C_1 = 0$, resultando:

$$\tau_{xz} = \rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot x \quad (\text{A.10})$$

Pela Lei de Newton da Viscosidade:

$$\tau_{xz} = -\mu \cdot \frac{dV_z}{dx} \quad (\text{A.11})$$

e assim,

$$-\mu \cdot \frac{dV_z}{dx} = \rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot x$$

$$\frac{dV_z}{dx} = -\frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot x}{\mu}$$

Integrando, vem:

$$V_z = -\frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot x^2}{2 \cdot \mu} + C_2$$

Para $x = \delta$ implica que $V_z = 0$, e, portanto $C_2 = \frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \delta^2}{2 \cdot \mu}$ e assim,

o perfil de velocidade resulta em:

$$V_z = \frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \delta^2}{2 \cdot \mu} \cdot \left[1 - \left(\frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \quad (\text{A.12})$$

A velocidade é máxima ($V_z = V_{z\text{máx}}$) para $x = 0$ é portanto:

$$V_{z \text{ máx}} = \frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \delta^2}{2 \cdot \mu}$$

Para a velocidade média tem-se:

$$V_m = \frac{\int_0^\delta \int_0^w V_z \cdot dx \cdot dy}{\int_0^\delta \int_0^w dx \cdot dy} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta V_z \cdot dx = \frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \delta^2}{2 \cdot \mu} \cdot \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right) d\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

ou:

$$V_m = \frac{\rho \cdot g \cdot \cos \beta \cdot \delta^2}{3 \cdot \mu} \quad (\text{A.13})$$

ou,

$$V_{z \text{ máx}} = \frac{3}{2} V_m \quad (\text{A.14})$$

Dessa maneira pode-se calcular a vazão volumétrica, como:

$$Q = V_m \cdot A$$

ou:

$$Q = \frac{\rho \cdot g \cdot \delta^2 \cdot \cos \beta}{3 \cdot \mu} \cdot w \cdot \delta \quad (\text{A.15})$$

Explicitando a variável δ na equação (A.15) tem-se:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot Q \cdot \mu}{\rho \cdot g \cdot w \cdot \cos \beta}} \quad (\text{A.16})$$

Uma vez explicitado δ , a variável Γ pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\Gamma = \frac{\delta^3 \cdot \rho^2 \cdot g \cdot \cos \beta}{3 \cdot \mu} \quad (\text{A.17})$$

Ou ainda,

$$\Gamma = \rho \cdot \delta \cdot V_m \quad (\text{A.18})$$



ANEXO B - MODELO MATEMÁTICO PROPOSTO

ADIMENSIONALIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO E DA CONTINUIDADE

As equações de (5.2.18) a (5.2.23) do capítulo (5), são adimensionalizadas a partir dos seguintes parâmetros:

$$x' = \frac{x}{\delta_0}, \quad y' = \frac{y}{\delta_0}, \quad \delta' = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad g' = \frac{g}{g_{nm}},$$

$$u' = \frac{u}{<U_0>}, \quad v' = \frac{v}{<U_0>}, \quad \xi = \frac{y'}{\delta'} = \frac{y}{\delta}$$

$$\partial u = U_0 \cdot \partial u'$$

$$\partial x = \delta_0 \cdot \partial x'$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_0}{\delta_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

$$g = g' \cdot g_{nm}$$

Substituindo-se os parâmetros adimensionais nas equações (5.2.18) a (5.2.23) tem-se:

$$\frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0$$

$$U_0 \cdot u' \cdot \frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + U_0 \cdot v' \cdot \frac{U_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = g_{nm} \cdot g' \cdot \cos \beta + v' \cdot \frac{U_0}{\delta_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

$$u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\delta_0}{U_0^2} \cdot g_{nm} \cdot g' \cdot \cos \beta + \frac{v'}{U_0 \delta_0} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

$$u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{Fr} \cdot g' \cdot \cos \beta + \frac{1}{Re_y} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}$$

Resultam nas equações adimensionalizadas

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad (B.1)$$

$$u' \cdot \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \cdot \frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{1}{Fr} \cdot g' \cdot \cos \beta + \frac{1}{Re_y} \cdot \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \quad (B.2)$$

Sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$x' = 0, \quad u' = 1, \quad v' = 0 \quad (B.3)$$

$$x' = Xe/\delta_0, \quad u' = a' \cdot y'^2 + b' \cdot y' + c', \quad v' = 0 \quad (B.4)$$

$$y' = 0, \quad u' = v' = 0 \quad (B.5)$$

$$y' = \delta(x) / \delta_0, \quad u' = U_{\max}(x) / \langle U_0 \rangle, \quad v' = 0 \quad (B.6)$$

e, aplicando-se as seguintes Transformada de Landau, que, segundo Padilha (1990), tem-se:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} = \frac{\partial u^*}{\partial x'} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \delta'} \right) \left(\frac{\partial \delta'}{\partial x'} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) \quad (\text{B.7})$$

$$\frac{\partial u'}{\partial y'} = \frac{\partial \xi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'} = \frac{\partial \xi}{\partial y'} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \xi} \quad (\text{B.9})$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial y'} \right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y'^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\xi = \frac{y}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial \delta} = -\frac{y}{\delta^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{y}{\delta^2} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\xi}{\delta} \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi}$$

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{1}{\delta}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2}$$

Resulta no seguinte sistema de equações transformadas:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\xi}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \xi} = 0 \quad (\text{B.11})$$

$$u^* \left[\frac{\partial u^*}{\partial x} - \frac{\xi}{\delta} \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right] + \frac{v^*}{\delta} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \xi} = \frac{g \cdot \cos \beta}{Fr} + \frac{1}{Re \cdot \delta^2} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial \xi^2} \quad (\text{B.12})$$

Sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$x' = 0, \quad u^* = 1, \quad v^* = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$x' = X e / \delta_0 \quad u^* = a' \xi^2 + b' \xi + c', \quad v^* = 0 \quad (\text{B.14})$$

$$\xi = 0, \quad u^* = v^* = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\xi = \delta(x') / \delta_0, \quad u^* = U_{\max}(x') / < U_0 >, \quad v^* = 0 \quad (\text{B.16})$$

Biblioteca – UNESP – Bauru – 02/08/2002

Aquisição: D Proc. 094/44/01/02

Depto. : FE R\$ 10,00

Procedência: Seção Pós-Graduação/FE

Incorporado em: 15/9/2002



