



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS
FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS**

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE CÁLCULO COM CALCULADORAS

João Victor Gonçalves do Carmo

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO - SP

2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

“Júlio de Mesquita Filho”

Instituto de Geociências e Ciências Exatas

Câmpus de Rio Claro (SP)

JOÃO VICTOR GONÇALVES DO CARMO

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE CÁLCULO COM CALCULADORAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Associada Dra.
Sueli Liberatti Javaroni

RIO CLARO - SP

2024

C287p

Carmo, João Victor Gonçalves do
Práticas experimentais de cálculo com calculadoras / João Victor
Gonçalves do Carmo. -- Rio Claro, 2024
196 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientadora: Sueli Liberatti Javaroni

1. Tecnologias Digitais. 2. Experimentos de Ensino. 3. Cálculo
Diferencial e Integral. 4. Ensino Superior. 5. Abordagem
Experimental com Calculadoras. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

JOÃO VICTOR GONÇALVES DO CARMO

PRÁTICAS EXPERIMENTAIS DE CÁLCULO COM CALCULADORAS

Dissertação apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Associada Dra. Sueli Liberatti Javaroni [Orientadora]

FC/UNESP – Bauru, São Paulo.

Profa. Dra. Maria Teresa Zampieri

IBILCE/UNESP – São José do Rio Preto, São Paulo.

Profa. Dra. Maria Francisca da Cunha

IAEL/UEG – Morrinhos, Goiás.

Conceito: **APROVADO**

Rio Claro/SP, 20 de Dezembro de 2023

*Dedico esse trabalho para Rafaela
Simões [in memoriam] que foi uma das
mulheres mais especiais que entraram
em minha vida! Te amo! Ohana!*

AGRADECIMENTOS

Agradeço, em primeiro lugar, a Deus por ter me dado forças para continuar a caminhada acadêmica e não ter desistido no meio do caminho.

Agradeço a Rafaella Simões [in memorian], uma das mulheres mais importantes que já entrou em minha vida, que foi e é minha principal razão por ter seguido a pós-graduação e por ter encontrado um sentido na vida. Esse trabalho é inteiramente para você!! Te amo pra sempre!!

Agradeço à minha família por terem acreditado no meu potencial e me dado forças morais para continuar a caminhada, sempre me ouvindo, me aconselhando, às vezes pedindo conselhos, focando sobre a vida, me distraindo nos momentos tristes e sempre apostando nos meus planos.

Agradeço a Profª Sueli Liberatti Javaroni pela orientação e leituras assíduas dos meus textos e ajudas burocráticas durante o mestrado.

Agradeço imensamente a Profª Maria Francisca da Cunha e Profª Maria Teresa Zampieri, que, além de fazerem parte de minha banca de qualificação e da defesa, sempre acreditaram no meu potencial e me ajudaram sempre que necessitei. Seus comentários e pontuações me ajudaram a enxergar novos rumos desta dissertação.

Agradeço aos amigos que o PPGEM me presenteou: Alissan Sarturato, Ana Melo, André Ferreira, Caroline Azevedo, Débora Pelli, Diana Pineda, Eduardo Reis, Ingrid Oara, Jeimy Cortez, Jinos Nejad, Joseane Mirtis, Lucas Lopes, Nathalia Henrique, Renata de Souza, Rogério Batista, Ronaldo Souza, Suzana Aparecida, Tailine Santi, Verusca Santos e Zamir.

Agradeço aos meus queridos amigos do GPIMEM por toda ajuda durante o mestrado e amizade: Carol Yumi, Daniel Tebaldi, Eliel Constantino, Fernanda Martins, Franciscico Sumbane, Geciara Carvalho, Hércules Gimenez, José Fernandes, Lara Martins, Marcelo Borba, Pamela Aleska, Ricardo Scucuglia, Rosicácia Florência, Samanta Milani, Tiele Schünemann e Valci Balbino Jr.

Agradeço aos meus ilustres amigos e companheiros de convivência da República Vila Lobo: Jaerle Campelo, Thiago Suzuki, Matheus Pedroso, Juliana Blanco, Andrea Rueda, Felipe Ramão [Betina], Ana Beatriz Cunico [Bia], Roberto Bissetti [Lobo], Mateus Manabu [Revisor do Abstract], Nito Vega, Pedro Mourão [Inri Cristo], João Vitor [Xará], Kurt Schumacher, Caroline Simel [Carolzinha], Luiz Fernando, Luana e Jefferson [Mineirinho].

Agradeço aos meus amigos incríveis que me apoiaram nas minhas decisões e sempre buscaram me ouvir, sorrir, chorar, se alegrar junto a mim, que estão espalhados pelo Brasil: Pollyane Vieira (Pelotas-RS); Grazielle Kowalczyk (Ribeirão Preto-SP); Jaqueline Simões (Goiatuba-GO); Patrícia Oliveira (Catalão-GO); Daiane de Paula (Belo Horizonte-MG); Eduardo Barros (Piracanjuba-GO); Fábio Júnior (Piracanjuba-

GO); Luark Bloom (Santo Anastácio-SP); Gustavo Biazon (Rio Claro-SP); Geovane Gouveia (Rio Claro-SP); Wellington Arantes (Leopoldo de Bulhões-GO); Marilda Assugeni (Martinópolis-SP); Otávio Guelfi (Martinópolis-SP); Matheus Henrique (Piracanjuba-GO) e Reila Costa (Catalão-GO);

Agradeço especialmente a Inajara Federson, secretária do PPGEM, que sempre me auxiliou quando precisei, quando as dúvidas ou frustrações com prazos me sucumbiam, sempre estava ali para me ajudar e falar “João, respira. Vai dar tudo certo. Você sabe o que está fazendo!”. Fica aqui registrado meu muito obrigado pela força, auxílio e amizade que construímos.

Agradeço aos técnicos do Departamento de Matemática, à Elisa (secretária do curso de Matemática), às funcionárias de limpeza do departamento, em especial à Alessandra, grande pequena amiga [risos].

Agradeço aos meus avós de consideração Joaquim José da Cunha e Maria Benice da Conceição que sempre me acolheram de braços abertos e estiveram em oração para que essa realização do mestrado acontecesse. Muito obrigado a vocês!!

Agradeço também a Prof^a Renata Zotim que cedeu parte de sua aula regular para que eu apresentasse meu projeto de pesquisa aos seus alunos da graduação em Matemática.

Agradeço aos estudantes do curso de Matemática que participaram do meu projeto de pesquisa e também agradeço pela amizade sadia que construímos ao longo dos experimentos de ensino. Confio no potencial de cada um de vocês e tenho certeza que serão ótimos professores de Matemática.

Agradeço à Casio Brasil Comércio de Produtos Eletrônicos LTDA pela doação das Calculadoras (científicas e gráficas) e também pela concessão da bolsa de mestrado, que me ajudou do início ao fim desses dois anos e ao auxílio administrativo da FUNDUNESP nessa movimentação.

Agradeço ao Grupo CASIO (Sueli Javaroni, Maria Teresa Zampieri, Otávio Sgavioli, Pedro Rubbi, Mariana Matulovic, Bruno Turci, Leandra Santos, Franciele Teixeira e Suellen Paiva), que, através das discussões profícuas, dos projetos, das leituras e atividades-piloto analisadas e/ou desenvolvidas, permitiram-me uma visão mais crítica e pedagógica da calculadora.

Por fim, mas não menos importante, deixo registrado minha gratidão pela acolhida deste goianinho em território paulista [risos]. Assim, agradeço às pessoas que me acolheram, à UNESP e ao estado de São Paulo por me proporcionar experiências fora da minha zona de conforto.

Encerro aqui um ciclo muito importante da minha vida pessoal e profissional. Devido a isso, agradeço a todos vocês, seres humanos e entidades acadêmicas e políticas, que fizeram parte dessa experiência ímpar que, para mim, se transformou em aprendizado. Muito Obrigado!!

“Não tenha medo de dar um grande passo quando necessário. É impossível cruzar um abismo com dois pequenos saltos” (David L. George).

RESUMO

GONÇALVES, J. V. C. Práticas Experimentais de Cálculo com Calculadoras. 2024 196p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, SP, 2024.

Apresento, neste trabalho acadêmico, a minha pesquisa de mestrado desenvolvida no paradigma qualitativo na linha de pesquisa de Novas Tecnologias em Educação Matemática. O objetivo da referida pesquisa é de *analisar como os estudantes exploram as aplicações de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real com calculadoras*. Alinhado a esse objetivo, busquei, através da pesquisa, responder ao seguinte questionamento: *Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?* Sendo assim, com vistas a atender o objetivo e o questionamento principal, desenvolvi Experimentos de Ensino com oito alunos regulares do curso de graduação em Matemática da UNESP *Campus* de Rio Claro (SP), de modo que foram configurados em duplas. Os encontros ocorreram no Laboratório de Ensino em Matemática (LEM), do Departamento de Matemática (DM) da instituição mencionada. Os estudantes realizaram as tarefas propostas com a Calculadora Científica Casio fx-991LAX, Calculadora Gráfica Casio fx-CG50, além dos seus cadernos para anotações, bem como quadro e caneta. Para o desenvolvimento dos encontros do experimento de ensino, as duplas de estudantes trabalharam com propostas de ensino, que consistiram em questões exploratórias referentes a conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real. Esses encontros foram gravados com um *smatphone* para fins de análise e salvos em hd externo e em um pasta privada do *YouTube* caso houvesse perdas de algum arquivo. Com o meu diário de campo, as anotações dos estudantes ao resolver as atividades propostas e as gravações de cada atividade do experimento de ensino foi possível realizar a triangulação dos dados da pesquisa, aqui relatada. Os referenciais teóricos ao qual adoto nesta pesquisa são: Experimentação com Tecnologias e Tecnologias da Inteligência. Analisando os dados produzidos, com base nos referenciais adotados, identifiquei três unidades de análise diante da Experimentação com Calculadoras, sendo: A calculadora como partícipe do processo; A calculadora como complementar do processo; e A visualização como recurso para Experimentação. Diante das três unidades de análise, concluo que o uso das Calculadoras Científicas e Gráficas, em uma abordagem experimental no Ensino Superior, pôde permitir, além de uma forma exploratória do CDI, a produção de conhecimentos em Cálculo diante do uso partícipe, complementar e/ou visualizativo da tecnologia.

Palavras-Chave: Tecnologias Digitais; Experimentos de Ensino; Cálculo Diferencial e Integral; Ensino Superior; Abordagem Experimental com Calculadoras.

ABSTRACT

GONÇALVES, J. V. C. Práticas Experimentais de Cálculo com Calculadoras. 2024 196p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, SP, 2024.

In this term paper, I present my master's research developed in the qualitative paradigm in the line of research on New Technologies in Mathematics Education. The objective of this research is *to analyze how students explore the applications of Differential and Integral Calculus (DIC) of functions of a real variable with calculators*. In line with this objective, I sought, through research, to answer the following question: *How do undergraduate Mathematics students explore concepts of Differential and Integral Calculus (DIC) of functions of a real variable using calculators?* Therefore, in order to meet the objective and the main question, I developed Teaching Experiments with eight regular students from the undergraduate Mathematics course at UNESP Campus de Rio Claro (SP), so that they were configured in pairs. The meetings took place in the Mathematics Teaching Laboratory (MTL), of the Mathematics Department (MD) of the aforementioned institution. The students performed the proposed tasks with the Casio fx-991LAX Scientific Calculator, Casio fx-CG50 Graphic Calculator, in addition to their notebooks for taking notes, as well as a board and pen. To develop the teaching experiment meetings, pairs of students worked on teaching proposals, which consisted of exploratory questions regarding Differential and Integral Calculus (DIC) content of functions of a real variable. These meetings were recorded with a smartphone for analysis purposes and saved on an external hard drive and in a private *YouTube* folder in case any files were lost. With my field diary, the students' notes when solving the proposed activities and the recordings of each activity of the teaching experiment, it was possible to triangulate the research data, reported here. The theoretical references that I adopt in this research are: Experimentation with Technologies and Intelligence Technologies. Analyzing the data produced, based on the adopted references, I identified three units of analysis regarding Experimentation with Calculators, namely: The calculator as a participant in the process; The calculator as a complement to the process; and Visualization as a resource for Experimentation. Given the three units of analysis, I conclude that the use of Scientific and Graphic Calculators, in an experimental approach in Higher Education, could allow, in addition to an exploratory form of the DIC, the production of knowledge in Calculus through participatory, complementary and/or or technology visualization.

Keywords: Digital Technologies; Teaching Experiments; Differential and Integral Calculus; University Education; Experimental Approach with Calculators.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Diagrama Pentagonal da Pesquisa	19
Figura 02: Triângulo de Refinamento.....	23
Figura 03: Polinômio Interpolador de Lagrange	42
Figura 04: Caso da Demonstração com Visualização de Scucuglia (2006)	56
Figura 05: Fundamentação Teórica da Pesquisa	66
Figura 06: Calculadora Científica fx-991LAX	73
Figura 07: Calculadora Gráfica fx-CG50	73
Figura 08: Quantidade de Inscrições	75
Figura 09: Esquema da organização física dos encontros do Experimento de Ensino..	78
Figura 10: Registros Fotográficos das duplas	78
Figura 11: Recursos para Triangulação dos Dados	85
Figura 12: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 1ª Parte	87
Figura 13: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 2ª Parte	88
Figura 14: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 3ª Parte	89
Figura 15: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 4ª Parte	90
Figura 16: Representação Gráfica da Equipe “TRANSfinito” sobre Limites – 1ª Parte	91
Figura 17: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 1ª Parte	92
Figura 18: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 2ª Parte	93
Figura 19: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Limites – 1ª Parte ...	95
Figura 20: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Limites – 2ª Parte ...	95
Figura 21: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 3ª Parte	96
Figura 22: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Limites – 1ª Parte	96
Figura 23: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 4ª Parte	98
Figura 24: Representação da resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 5ª Parte	98
Figura 25: Representação da Resolução da Equipe “TRANSfinito” sobre Derivadas – 1ª Parte	101
Figura 26: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Derivadas – 1ª Parte ..	103

Figura 27: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Derivadas – 2ª Parte ..	104
Figura 28: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Derivadas – 1ª Parte	106
Figura 29: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Derivadas – 2ª Parte	107
Figura 30: Interface da Calculadora Científica: Comando de Derivadas	108
Figura 31: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Derivadas – 1ª Parte	109
Figura 32: Representação da Resolução da Equipe “TRANSfinito” sobre Derivadas – 2ª Parte.....	109
Figura 33: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Derivadas – 3ª Parte	114
Figura 34: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Derivadas – 2ª Parte	116
Figura 35: Representação da Resolução da Equipe “TRANSfinito” sobre Derivadas – 3ª Parte	116
Figura 36: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Derivadas – 1ª Parte	118
Figura 37: Organograma de Custos.....	118
Figura 38: Registros Escritos da Equipe “C” – Custos Marginais e Totais.....	119
Figura 39: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Integrais – 1ª Parte	121
Figura 40: Registros Escritos da Equipe “TRANSfinito” – Custos Totais.....	122
Figura 41: Registros Escritos da Equipe “Kaju” – Custos Marginais e Totais.....	123
Figura 42: Representação Gráfica da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 1ª Parte.....	124
Figura 43: Registros Escritos da Equipe “As Capitalistas” – Custos Marginais e Totais	125
Figura 44: Representação Gráfica da Equipe “As Capitalistas” sobre Integrais – 1ª Parte	126
Figura 45: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Integrais – 2ª Parte	128
Figura 46: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Integrais – 1ª Parte	129
Figura 47: Representação Gráfica da Equipe “TRANSfinito” sobre Integrais – 1ª Parte	129
Figura 48: Representação Gráfica da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 2ª Parte.....	130
Figura 49: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 1ª Parte	131
Figura 50: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 2ª Parte	131
Figura 51: Representação Gráfica da Equipe “As Capitalistas” sobre Integrais – 2ª	

Parte	132
Figura 52: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Integrais – 1ª Parte	132
Figura 53: Características da Experimentação com Calculadoras	142
Figura 54: Nuvem de Palavras – Destaques da Análise	172

LISTA DE QUADROS

Quadro 01: Obras Acadêmicas Seleccionadas	24
Quadro 02: Configuração das equipes participantes	76
Quadro 03: Ambientação com os comandos das calculadoras	82

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CASIO	Comércio de Produtos Eletrônicos LTDA
CBL	Calculator Based Laboratory
CDI	Cálculo Diferencial e Integral
CDI-I	Cálculo Diferencial e Integral I
DM	Departamento de Matemática
FUNDUNESP	Fundação para o Desenvolvimento da UNESP
GA	Geometria Analítica
GPIMEM	Grupo de Pesquisa em Informática, Outras Mídias e Educação Matemática
LEM	Laboratório de Ensino em Matemática
LTDA	Limitada
PMA	Pensamento Matemático Avançado
PPGEM	Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática
RA	Realidade Aumentada
RV	Realidade Virtual
SAI	Situação de Atividade Instrumental
S-H-C-M	Seres-Humanos-Com-Mídias
SP	São Paulo
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
TD	Tecnologia(s) Digital(is)
TFC	Teorema Fundamental do Cálculo
TI	Tecnologia(s) Informática(s)
UFSCAR	Universidade Federal de São Carlos
UNESP	Universidade Estadual Paulista
ULBRA	Universidade Luterana do Brasil

SUMÁRIO

1 A INTRODUÇÃO	18
1.1 Por que pesquisar com Calculadoras?	18
1.2 Estrutura da Dissertação	21
2 DA REVISÃO DE LITERATURA À FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
2.1 O Levantamento Bibliográfico	22
2.2 Um olhar para as pesquisas com Calculadoras	24
2.3 Outras pesquisas explorando a Calculadora e o Cálculo	37
2.4 Referencial Teórico da Pesquisa	46
3 METODOLOGIA E PROCEDIMENTAÇÃO DA PESQUISA.....	68
3.1 O que é Pesquisa?	68
3.2 A natureza da pesquisa.....	70
3.3 O Cenário de Investigação.....	73
3.4 Seleção dos Participantes.....	75
3.5 Os Recursos para Produção de Dados e Procedimentos de Análise	78
4 DESCRIÇÃO DOS DADOS	87
4.1 Primeira Proposta de Ensino: Conteúdo de Limites	87
4.2 Segunda Proposta de Ensino: Conteúdo de Derivadas	100
4.3 Terceira Proposta de Ensino: Conteúdo de Derivadas	112
4.4 Quarta Proposta de Ensino: Conteúdo de Integrais.....	121
4.5 Quinta Proposta de Ensino: Conteúdo de Integrais	129
5 ANÁLISE DOS DADOS	135
5.1 Equipe “C”	135
5.2 Equipe “TRANSfinito”	137
5.3 Equipe “Kaju”	139
5.4 Equipe “As Capitalistas”	141
5.5 Evidências da Análise Coletiva.....	142
5.6 Síntese do compreendido	172
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	175
6.1 Um panorama geral diante da dissertação	175

6.2 O futuro: Expectativas e possibilidades para as novas pesquisas	178
REFERÊNCIAS.....	180
APÊNDICES	185
Apêndice A: Proposta de Ensino com Limites utilizando calculadoras	185
Apêndice B: Proposta de Ensino com Derivadas utilizando calculadoras	187
Apêndice C: Proposta de Ensino com Derivadas utilizando calculadoras	189
Apêndice D: Proposta de Ensino com Integrais utilizando calculadoras	190
Apêndice E: Proposta de Ensino com Integrais utilizando calculadoras	192
Apêndice F: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE).....	194

1. A INTRODUÇÃO

1.1 Por que pesquisar com Calculadoras?

No ano de 2022, ingressei no mestrado em Educação Matemática na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus de Rio Claro (SP), em que recebi o convite para participar do Projeto Temático¹ intitulado “Ensino e Aprendizagem de Matemática com Calculadoras: possibilidades para a prática do professor”, aprovado sob Processo nº: 3221/2021 – CCP – FUNDUNESP, em que tive a oportunidade de estudar, investigar e dialogar sobre ensino com calculadoras.

Este projeto temático é constituído por pesquisas de iniciação científica, mestrado, doutorado, bem como de pós-doutoramento. Além disso, também tem a parceria com dois professores da educação básica paulista, um na cidade de São Carlos (SP) e outra na cidade de Macatuba (SP), uma pesquisadora associada, além da coordenadora do projeto.

Quando aceitei o convite, surgiu a ideia de trabalhar com as calculadoras no Ensino Superior. Como o projeto utilizado para ingresso no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) estava direcionado a uma aplicação de *softwares* matemáticos no Ensino Superior, a ideia permaneceu a mesma com exceção dos objetos de investigação que, neste caso, passaram a ser especificamente as calculadoras.

Entretanto, o motivo principal para se trabalhar o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real com as calculadoras esteve imbricado ao fato de identificar, com o uso desses recursos, como os estudantes de graduação poderiam explorar os conceitos e as aplicações relacionadas a essa disciplina, tendo em vista que é um componente temido em maior parte dos cursos de graduação.

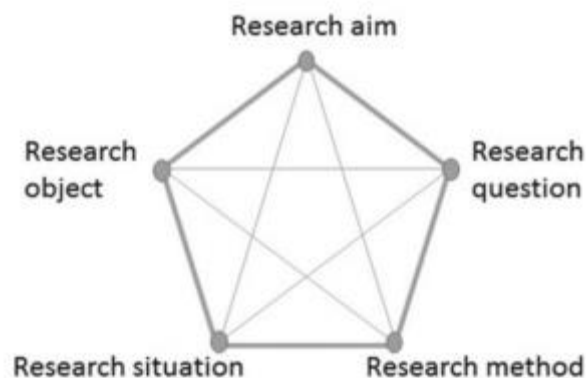
Um detalhe importante a se pontuar é acerca do nome “Práticas Experimentais”, presente no título. Utilizo esse conceito de Práticas Experimentais para designar justamente os Experimentos de Ensino que foram desenvolvidos na pesquisa de campo. Assim, o nome “Práticas Experimentais” está fazendo relação ao trabalho de campo onde foi possível analisar a relação de exploração dos estudantes com as calculadoras.

É importante delimitar o modelo inicial que utilizei para pensar nos próximos passos da pesquisa. Esse modelo inicial se trata da forma com que comecei a pensar na estrutura da dissertação bem como das teorias e conceitos associados à cada etapa de

¹ Esse Projeto Temático é fruto de uma parceria entre o Grupo de Pesquisa, Outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), ao qual faço parte, e a Casio Comércio de Produtos Eletrônicos LTDA.

descrição, como será mostrado a seguir. Como a pesquisa é um ato enredado de subjetividade, estudei um diagrama específico que ajudasse na compreensão dos rumos a serem tomados neste relatório científico.

Figura 01: Diagrama Pentagonal da Pesquisa



Fonte: Bikner-Ahsbabs e Prediger (2010)

Bikner-Ahsbabs (2022) considera o diagrama pentagonal como uma ferramenta analítica para pensar nos primeiros passos de uma pesquisa. Contudo, a autora deixa claro que esses passos não são universais tampouco pré-estabelecidos como uma regra de desenvolver uma determinada pesquisa, mas são estratégias que o pesquisador pode utilizar ao pensar em desenvolvê-la (a pesquisa).

Analisando o pentágono em sentido anti-horário, tem-se: a) Objetivo de Pesquisa; b) Objeto de Pesquisa; c) Situação de Pesquisa; d) Metodologia de Pesquisa; e) Questão de Pesquisa. Para a autora, o objetivo de pesquisa é o rumo principal da investigação, de modo que é nessa etapa que se explicita o porquê de pesquisar tal conceito, tal teoria; os objetos de pesquisa são aqueles itens que farão parte da produção de dados, que, no caso desta pesquisa de mestrado, serão as Calculadoras; a situação de pesquisa está relacionada ao conhecimento teórico ao qual a pesquisa estará assentada assim como também representa um atributo importante na análise e interpretação dos dados e, conseqüentemente, terá influência nos procedimentos metodológicos; a metodologia da pesquisa, além de fazer junção do conhecimento teórico com o conhecimento empírico (os dados de campo), contribui na identificação dos métodos a serem seguidos para produção dos dados; e, por último, a questão de pesquisa é o ponto-chave da pesquisa, pois, sem ela não há o que pesquisar e, ainda de acordo com a autora, ela é a força motriz para conduzir um estudo bem sucedido (BIKNER-

AHSBAHS, 2022).

A autora coloca essas etapas em pentágono, conforme a figura 01 está explicitando, porque defende que cada etapa mencionada não se trata de uma unidade isolada, mas cada uma está interligada. Isso significa que uma etapa depende da outra, de forma que esse movimento de interligação pode contribuir para refletir nos passos a se tomar diante de uma pesquisa, principalmente para jovens pesquisadores (BIKNER-AHSBAHS, 2022).

Quando delimitar que seria feita uma investigação com CDI de forma que as calculadoras (que são os objetos de pesquisa) seriam recursos colaboradores no processo de exploração e de experimentação, o foco estava em identificar as formas com que os participantes da pesquisa explorariam e realizariam experimentações com os conceitos de CDI munidos de uma determinada Tecnologia Digital (TD). Daí surgiu também a seguinte pergunta de pesquisa:

Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?

Gostaria de destacar que as calculadoras são adotadas tanto nesse relatório científico quanto no trabalho de campo como tecnologias, ou seja, um equipamento ao qual se consegue realizar estudos investigativos e não apenas como uma máquina que fornece uma resposta pronta, acabada e imediata (instrumentos de algoritmização). Considerar as calculadoras como meios possíveis de explorar e desenvolver determinado conteúdo matemático vai na contramão do imediatismo que diversas pessoas acreditam que a calculadora seja.

Assim, pensando que a calculadora pode ser capaz de contribuir para a produção de conhecimento matemático e, somando a pergunta de pesquisa que foi formulada, o objetivo geral desta investigação é ***analisar como os estudantes exploram as aplicações de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real com calculadoras.***

Como já evidenciei três das etapas compostas no Diagrama Pentagonal da Pesquisa, de Bikner-Ahsbahs e Prediger (2010), evidenciarei as outras etapas restantes e, inclusive, trarei outras etapas que não estão contempladas no Diagrama, uma vez que ele funciona como um “norte” para pensar na estrutura de uma pesquisa científica em relação aos passos iniciais para gerar reflexão, e não na pesquisa como um todo. Dessa

forma, a seguir, apresento uma subseção que trará a forma com que esta dissertação está estruturada.

1.2 Estrutura da Dissertação

Este trabalho está dividido em seis seções, sendo:

1ª Seção: A Introdução

2ª Seção: Da Revisão de Literatura à Fundamentação Teórica

3ª Seção: Metodologia e Procedimentação da Pesquisa

4ª Seção: Descrição dos Dados

5ª Seção: Análise dos Dados

6ª Seção: Considerações Finais

Nesta seção, correspondendo à Introdução, busquei evidenciar o projeto maior ao qual faço parte, a presente pesquisa fruto dessa ideiação, os primeiros caminhos que considere para iniciar uma pesquisa bem como a pergunta diretriz e o objetivo central da investigação; a segunda seção trará algumas obras acadêmicas relacionando o ensino de Cálculo Diferencial e Integral com o uso de calculadoras e, também, ao final, os Referenciais Teóricos aos quais esta pesquisa está assentada; na terceira seção serão evidenciados os aspectos metodológicos da pesquisa bem como as informações concernentes ao cenário do trabalho de campo; na quarta seção serão expostas as falas em formas de narrativas como meios de identificar as relações que serão postas na quinta seção que corresponde à análise dos dados obtidos em campo; e na sexta seção serão discutidas as considerações finais diante do panorama geral da dissertação.

Cabe complementar que além das seções comentadas, após a seção de Considerações Finais, há a seção de Referências e, após esta última, a seção de Apêndices. A seguir será iniciada a discussão da segunda seção.

2. DA REVISÃO DE LITERATURA À FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O Levantamento Bibliográfico

Para iniciar esta seção, é conveniente frisar que “A produção de conhecimento não é um empreendimento isolado” (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSZNAJDER, 1998, p. 180). Pensando nessa ideia, é inconcebível iniciar uma investigação acadêmica sem que haja uma análise cuidadosa acerca das obras que fazem convergência com a investigação que deseja-se conduzir, está sendo conduzida ou que já foi conduzida, pois são essas obras que darão estrutura nas ideias procuradas no desenvolvimento do trabalho e, para além disso, posiciona a pesquisa diante das que já foram conduzidas.

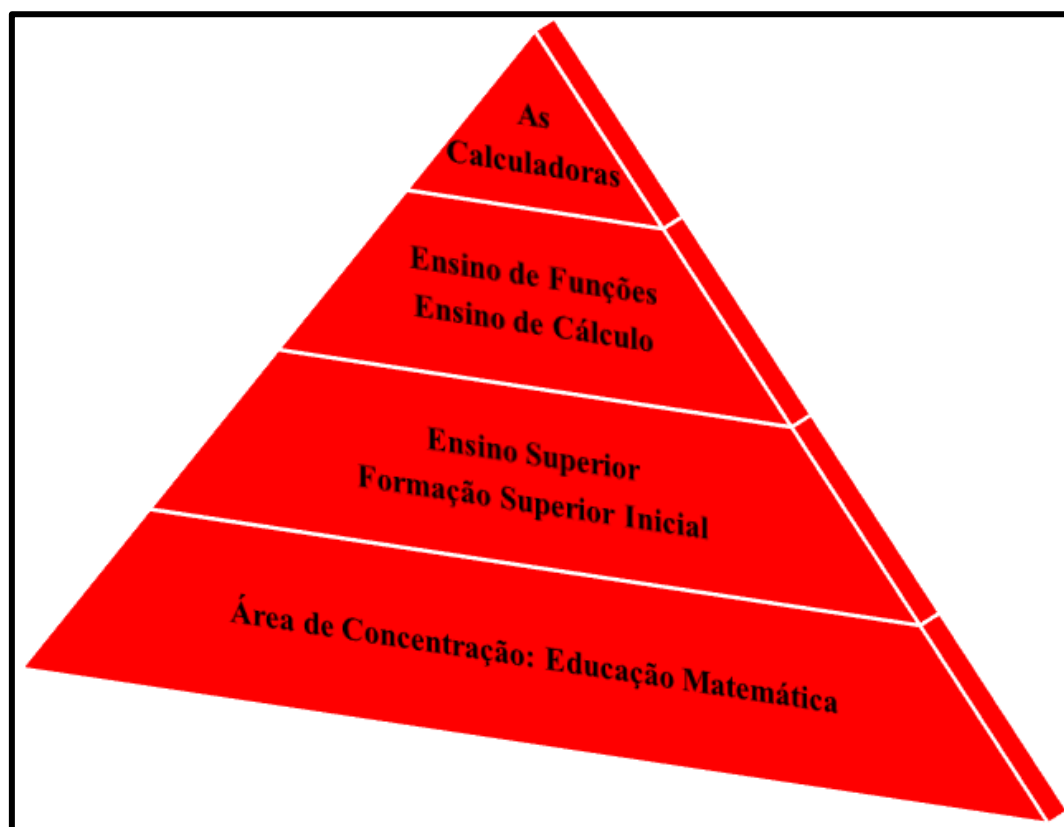
Seguindo essa perspectiva, para Galvão (2011, p. 1)

[...] realizar um levantamento bibliográfico é se potencializar intelectualmente com o conhecimento coletivo, para se ir além. É munir-se com condições cognitivas melhores, a fim de: evitar a duplicação de pesquisas, ou quando for de interesse, reaproveitar e replicar pesquisas em diferentes escalas e contextos; observar possíveis falhas nos estudos realizados; conhecer os recursos necessários para a construção de um estudo com características específicas; desenvolver estudos que cubram lacunas na literatura trazendo real contribuição para a área de conhecimento; propor temas, problemas, hipóteses e metodologias inovadoras de pesquisa; otimizar recursos disponíveis em prol da sociedade, do campo científico, das instituições e dos governos que subsidiam a ciência.

Dessa forma, percebo que realizar um levantamento bibliográfico é uma estratégia de localizar o trabalho em questão diante dos demais trabalhos já defendidos e publicados. Pensando na temática da presente investigação de mestrado que se pauta no **Cálculo** e nas **Calculadoras**, realizei uma busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES com os seguintes termos: “calculadora” and “cálculo”. Nessa primeira busca, foram encontrados 100.613 trabalhos acadêmicos, então foi necessário um critério de refinamento.

Para afunilar esse número considerável de pesquisas, a busca foi refinada por **Área de Concentração: Educação Matemática**. Assim, nesse primeiro refinamento, foram encontrados 2455 trabalhos acadêmicos. Como ainda havia muitos trabalhos, foi necessário um segundo critério de refinamento que segue conforme a Figura 02.

Figura 02 – Triângulo de Refinamento



Fonte: Autoria própria

A Figura 02 mostra um triângulo de refinamento que serviu como base para selecionar as obras que serão apresentadas na subseção seguinte. Para que uma obra se encaixasse nessa seleção ela deveria ser um trabalho que colocasse a calculadora (seja ela qual for) em evidência na produção dos dados². Além disso, deveria ser uma pesquisa que trabalhasse o Cálculo ou as Funções, tendo em vista que foram os conteúdos mais desenvolvidos na produção de dados da presente pesquisa. E, em adição aos dois critérios mencionados, deveria ser uma pesquisa desenvolvida no Ensino Superior.

O motivo dessa seleção criteriosa foi de descobrir quais são os trabalhos que são desenvolvidos dentro desse campo específico cuja motivação está na própria essência desta investigação, ou seja, com o que buscou se investigar neste trabalho: ***Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?***

² Para isso, utilizei o comando de teclado “CTRL + F” e digitei “Calculadora” para verificar onde ela aparecia na obra consultada. Caso ela aparecesse na seção de produção de dados e/ou metodologia (ou seja, colocando-a em evidência), eu analisava a fundo aquela obra para verificar se encaixava na seleção feita.

Dessa forma, “neste processo de “garimpagem”, obras de referência, [...], bibliografias selecionadas, são de extrema utilidade na identificação e seleção de estudos para revisão” (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSNAJDER, 1998, p. 181, grifo dos autores) e “Além disso, a familiarização com a literatura já produzida evita o dissabor de descobrir mais tarde (às vezes, tarde demais) que a roda já tinha sido inventada” (ALVES-MAZZOTTI; GEWANDSNAJDER, 1998, p. 180, grifo dos autores).

Após realizada todas as etapas de refinamento, pude encontrar quatro trabalhos³ que seguem dispostos no Quadro 1 e que serão mais detalhados na próxima subseção.

Quadro 01 – Obras Acadêmicas Selecionadas

OBRAS SELECIONADAS PARA REVISÃO DE LITERATURA				
<i>Autor(a)</i>	<i>Tipo do Trabalho</i>	<i>Área de Concentração</i>	<i>Ano de Publicação</i>	<i>Instituição</i>
Fernanda Cesar Bonafini	Dissertação (Mestrado)	Educação Matemática	2004	Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva	Dissertação (Mestrado)	Educação Matemática	2006	Universidade Estadual Paulista (UNESP)
Joel de Almeida Nunes	Dissertação (Mestrado)	Ensino de Ciências e Matemática	2011	Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)
Anderson Luís Pereira	Tese (Doutorado)	Educação Matemática	2022	Universidade Estadual Paulista (UNESP)

Fonte: Elaboração própria

2.2 Um olhar para as pesquisas com Calculadoras

A pesquisadora Bonafini (2004), preocupada com as possíveis intersecções que podem ser estabelecidas entre a Física e a Matemática no Ensino Superior, conduziu a investigação intitulada “Explorando conexões entre a Matemática e a Física com o uso da calculadora gráfica e CBL⁴”.

Como a pesquisadora já tinha atuado como docente e monitora de disciplinas de

³ Para confirmar se esses trabalhos entravam nos critérios estabelecidos, verifiquei títulos, resumos, metodologias, análises e considerações finais.

⁴ Calculator Based Laboratory

conteúdos matemáticos para cursos de graduação, especificamente para os cursos de Engenharia Civil e Elétrica, ela [a pesquisadora] pôde vivenciar como se desdobrava o desenvolvimento de conceitos e aplicações de algumas disciplinas, sendo: **(i)** Cálculo Diferencial e Integral I e III; **(ii)** Cálculo Numérico; **(iii)** Geometria Analítica; **(iv)** Álgebra Linear; e **(v)** Física Geral e Experimental I.

Então, Bonafini (2004), analisando as atividades que normalmente eram aplicadas em duas disciplinas (Cálculo I e Circuitos Elétricos), notou que não havia articulação entre as disciplinas, mesmo que ambas fossem necessárias e complementares entre si. Essa desarticulação estaria condicionada a um déficit na comunicação entre os conceitos trabalhados em ambos os contextos disciplinares, o que permitiu que a pesquisadora desenvolvesse um olhar para formas de intervir nos modelos educacionais, olhando para a própria prática docente.

Como a pesquisadora percebeu que os conceitos de Cálculo são necessários para compreender determinados fenômenos dos circuitos elétricos e que havia certa defasagem no desenvolvimento desses conceitos na perspectiva do ensino, buscou investigar formas de integrar a Matemática à Física e, em outro momento, integrar a Matemática à Engenharia, ambas as aplicações foram justapostas em disciplinas que ela já lecionava.

Quando se dedica a investigar algum fenômeno, é essencial ter bem delimitados os objetos de pesquisa ao qual fará parte do desenvolvimento e produção dos dados. Bonafini (2004), pensando em formas de integrar a Matemática à Física e a Matemática à Engenharia, decidiu fazer uso de Tecnologias Informáticas (TI), termo estabelecido atualmente como Tecnologias Digitais (TD), na expectativa de que a inserção de recursos tecnológicos poderia contribuir na formação acadêmica dos estudantes. Pensando em objetos de pesquisa, até mesmo por ter familiaridade com os recursos tecnológicos, a pesquisadora decide desenvolver uma investigação utilizando o sensor CBL e as Calculadoras Gráficas HP-48GX e TI-83.

Bonafini (2004) defendeu que a inserção desses recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos e/ou físicos poderia contribuir na produção de conjecturas, generalizações e formalizações de resultados. Dessa forma, pensando em vincular as TD com os possíveis meios de proceder uma investigação baseada em conceitos de Matemática e Física, surge a seguinte pergunta diretriz: *“Como estudantes trabalham conceitos matemáticos e físicos utilizando o CBL (Calculator Based Laboratory) e a calculadora gráfica em atividades de experimentação?”*.

Observar o “*como trabalhar*”, segundo o viés da própria pesquisadora, é importante uma vez que a preocupação imbuída na pesquisa é de observar as múltiplas possibilidades que se desdobram no próprio ambiente de aprendizagem, de modo a verificar a construção de conhecimentos naquele determinado assunto de pesquisa. Essa ação de “*como trabalhar*” acopladas às Tecnologias Portáteis, de acordo com a própria autora, influenciou sua percepção ao se valer das calculadoras gráficas e do sensor CBL para conferir como essas tecnologias influenciam a interação dos participantes da pesquisa na articulação, negociação e construção de conceitos matemáticos e físicos.

A metodologia que a pesquisadora utilizou para conduzir e produzir os seus dados está inserida na perspectiva qualitativa e os procedimentos metodológicos descrevem o movimento de Experimentos de Ensino. Baseada em Steffe e Thompson (2000), Bonafini (2004) conduziu seus experimentos com oito estudantes e os temas matemáticos que perpassaram pelas atividades que foram aplicadas na pesquisa foram: **(i)** Introdução às Funções; **(ii)** Introdução às Derivadas; **(iii)** Introdução às Integrais; e **(iv)** Introdução às Equações Diferenciais. Em relação às temáticas do campo da Física, foram: **(i)** Calorimetria; **(ii)** Termologia; e **(iii)** Ótica em nível inicial.

Em cada proposta de ensino, Bonafini (2004) buscou identificar a interação do estudante com as mídias em todas as suas peculiaridades de campo buscando ao máximo estabelecer uma visão crítica acerca do uso exploratório das TD e das estratégias de negociações entre duplas, tendo em vista que a configuração dos participantes da pesquisa foi de quatro duplas. Essa análise da negociação (troca de experiências entre duplas) foi importante, pois cada participante possuía uma especificidade e manifestava seu trabalhar as atividades de experimentação de um modo único; assim, o movimento de unir o trabalhar de um participante com o trabalhar de outro participante foi essencial para observar como ocorre o processo de construção de conhecimentos tanto em Matemática quanto em Física, pois, os trabalhos que a priori seriam individuais, se tornam um conhecimento conjunto.

Bonafini (2004) aplicou quatro atividades experimentais, onde ela denominou de: **a)** Mistura de Duas Soluções; **b)** Luminosidade *versus* distância; **c)** Os acetatos; e **d)** Lei de Resfriamento de Newton.

Bonafini (2004) concluiu que o fator *visualização* assumiu papel importante no processo de experimentação. Para além disso, o fato de explorarem com a calculadora gráfica (movimentos, maxi(mini)mizações na tela, formulação de hipóteses, validação/verificação dos resultados produzidos, etc.) e vincularem o sistema CBL para

produzir dados em tempo real (no ato da experimentação) favoreceu o desenvolvimento de grupos cooperativos e foi perceptível que a construção de conhecimentos em Matemática e Física se deu, mais acentuadamente, através do empirismo. Esse movimento empírico de produzir conhecimentos com as TD ofertadas, segundo a pesquisadora, pôde ser analisado pelo sistema seres-humanos-com-mídia (BORBA; VILLARREAL, 2005) e pelo referencial de Reorganização do Pensamento (TIKHOMIROV, 1981).

Dois anos após a defesa da dissertação de Bonafini (2004), o pesquisador Scucuglia (2006) defendeu uma investigação de mestrado intitulada “A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas” utilizando, também, as Calculadoras Gráficas como recursos de exploração.

Segundo o pesquisador, a ideia de se trabalhar com Calculadoras Gráficas surgiu através de uma Iniciação Científica (IC) proposta no Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), onde, no seu segundo ano de graduação em Matemática pela UNESP “Júlio de Mesquita Filho”, houve a oportunidade de participar das pesquisas científicas que vincularam o uso das calculadoras com o estudo das Funções Polinomiais.

Scucuglia (2006) afirma que pelo fato de as Calculadoras Gráficas, em sua maioria, possuírem um sistema sofisticado e com diversas potencialidades em relação aos seus comandos internos, elas podem ser concebidas como um “mini computador” de fácil transporte. Curiosamente, tal denominação vai ao encontro do que Bonafini (2004) classifica como Tecnologias Portáteis. E, ainda nessa perspectiva de olhar para as Tecnologias Portáteis como recursos para o estudo de conceitos e/ou aplicações em Matemática, o pesquisador em questão participou de um projeto temático, desenvolvido pelo GPIMEM intitulado “Projeto Texas”, onde pôde ter contato com os equipamentos da *Texas Instruments*, em especial as Calculadoras Gráficas TI-83, que, inclusive, foram objetos de sua pesquisa de mestrado.

A experiência de ter que ir a campo (escola de nível estadual) para desenvolver as atividades vinculadas ao projeto temático permitiu que Scucuglia (2006) não só pudesse ter uma visão prática acerca do ambiente e como as TD poderiam ser inseridas no ensino de Matemática, mas também possibilitou que ele confeccionasse uma apostila de atividades acerca das Funções Polinomiais e o uso de Calculadoras Gráficas.

Além disso, Scucuglia (2006) atuou como monitor de um curso de extensão universitária destinado a estudantes da graduação da UNESP *Campus* de Rio Claro (SP)

e, foi através dessa vivência, que inquietações acerca do processo de demonstração matemática foram intensificando-se a partir das manifestações dos participantes do curso ao munirem-se das TD.

Pensando em uma forma de entender a algebrização presente nos processos de demonstração com o auxílio das exposições gráficas que as Calculadoras Gráficas são capazes de fornecer e, adicionando o fato de o pesquisador ter tido experiência com essa abordagem de investigar com TD (o que ele traz como Tecnologias Informáticas) na IC e no Curso de Extensão, desenvolveu em seu mestrado uma investigação articulando o estudo de Funções, os processos demonstrativos e as próprias Calculadoras Gráficas contribuindo no processo de produção de conhecimentos a partir da visualização abordando as temáticas: a) Regra da Cadeia; b) Teorema do Valor Médio; e c) Teorema Fundamental do Cálculo.

Embasando-se na concepção de Seres-Humanos-Com-Mídias (S-H-C-M), de Borba e Villarreal (2005), Scucuglia (2006) afirma que esse coletivo está intimamente ligado com a experimentação-com-tecnologias onde foi possível construir um novo coletivo: **Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas**. Os referenciais teóricos, as literaturas consultadas para embasar cientificamente suas arguições e comentários, suas experiências acadêmicas com o tema e o surgimento de um novo coletivo de pesquisa foram fatores condicionantes para que a pergunta norteadora de pesquisa de Scucuglia (2006) surgisse, sendo: *Como Estudantes-com-Calculadoras-Gráficas investigam o Teorema Fundamental do Cálculo?*.

Na obra de Scucuglia (2006) é possível identificar que o pesquisador utiliza o advérbio interrogativo *como* preocupado com os processos que podem ser desdobrados quando os estudantes estão em uma situação de investigação em um determinado contexto com determinados objetos de pesquisa. Entendo que, com a preocupação do *como*, surge também a inquietação metodológica; e, pensando que esse movimento qualitativo abre portas para surgirem conceitos variados de acordo com o que se espera pesquisar, Scucuglia (2006) escolhe os Experimentos de Ensino, baseados em Steffe e Thompson (2000), por possibilitarem a construção e desenvolvimento de estruturas conceituais que podem emergir através da interação entre a linguagem dos estudantes com a tecnologia.

Assim, o pesquisador em questão traz três episódios acerca dos conceitos⁵ de

⁵ Termo trazido pelo próprio pesquisador em sua dissertação.

Integral Definida que desenvolveu em sua pesquisa de forma que o primeiro episódio buscou investigar uma determinada Notação Matemática sobre a execução da funcionalidade AREA; o segundo episódio buscou desenvolver os conceitos de Integral Definida e experimentar a funcionalidade SOMA; e o terceiro episódio buscou articular a funcionalidade SOMA com o Comando $\int f(x) dx$.

Como foi dito anteriormente, Scucuglia (2006) escolheu os Experimentos de Ensino como procedimento metodológico para conduzir suas atividades de campo. É importante mencionar que ele contou com a participação de duas duplas de estudantes que se voluntariaram para compor os encontros que buscaram investigar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Com o desenvolvimento do primeiro episódio, o pesquisador conseguiu identificar que os estudantes que participaram de sua pesquisa conseguiram articular a noção matemática entre álgebra, gráficos e número e, a partir da articulação dessas representações, puderam produzir conhecimento matemático referente à Soma de Riemann, principalmente dando destaque à visualização que permitiu a criação de inferências, conjecturas e justificativas.

Com o segundo episódio, o pesquisador constatou que ambas as duplas de estudantes, ao desenvolverem um estudo acerca da área sob uma superfície curva pautados no conceito da Soma de Riemann, perceberam que a funcionalidade SOMA da Calculadora Gráfica trazia alguns elementos relacionados ao Limite ($n \rightarrow ? = n$ tendendo à algo) e, ao realizar as experimentações, conseguiram chegar a um parâmetro de generalização que representasse o cálculo do valor exato daquela Região R chegando na seguinte notação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

A partir dessa conjectura construída através da experimentação com a Calculadora Gráfica, o pesquisador destaca que foi possível avançar para a terceira discussão relacionando as funcionalidades SOMA e o comando $\int f(x) dx$. Com o terceiro episódio, o pesquisador percebeu que as estudantes conseguiram identificar a equivalência entre as duas funcionalidades de modo que ambas mostravam o mesmo resultado para aquela atividade proposta. Estratégias de resolução a partir da

visualização também contribuíram quando os estudantes se depararam com áreas hachuradas em regiões negativas do plano cartesiano quando uma função quadrática e uma função afim se interseccionavam ($f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 1$).

Scucuglia (2006) destaca também dois encontros onde foi possível desenvolver uma investigação sobre o Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) na qual as estudantes, munidas das Calculadoras Gráficas, conseguiram investigar determinados exemplos triviais de Funções Polinomiais desenvolvendo um processo indutivo de generalização dos resultados obtidos pela calculadora ao usar o comando $\int f(x) dx$ e, posteriormente, experimentando condições que satisfizessem a seguinte definição integrativa:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Sendo assim, o pesquisador concluiu que os estudantes investigaram o TFC de uma forma que envolve os aspectos do pensamento indutivo e, contribuindo com esse processo, surgiu também o pensamento dedutivo na medida em que os encontros foram se passando. Assim, o procedimento de Experimentação-com-Tecnologias (as calculadoras, nesse caso) contribuiu para o processo de produção de conhecimentos matemáticos e esse movimento assumiu caráter **abduativo**⁶, dando evidência para a possibilidade de generalização e formação de conjecturas mediadas pela visualização.

Anos mais tarde o pesquisador Joel de Almeida Nunes (2011) defendeu sua pesquisa de mestrado intitulada “Design Instrucional na Educação Matemática: trajetória de um professor de Matemática que elabora atividades sobre Funções Trigonométricas com a Calculadora HP 50G”.

Nunes (2011) discute que a ideia de trabalhar a construção de conceitos matemáticos com o uso de TD⁷ surgiu desde sua época de graduação, foi amadurecendo com a especialização e se intensificou no mestrado, e teve como base as preocupações acerca das estratégias pedagógicas que eram utilizadas em sala de aula tanto no ensino quanto na aprendizagem de conceitos matemáticos. Assim, buscou trabalhar com os recursos tecnológicos como alternativas de resposta ao modelo reprodutivista de ensino⁸

⁶ Uma característica intrínseca ao pensamento indutivo e dedutivo. “[...] é uma forma de inferência que vai de dados que descrevem algo, a hipóteses que explicam ou respondem aos dados.” (SCUCUGLIA, 2006, p. 86). O raciocínio abduativo se desenvolve entre os dois extremos anteriores: o que comumente busca a confiabilidade e o que busca a validação.

⁷ O autor trará o termo “Tecnologias Informáticas” (TI) para se referir ao que se chama hoje em dia de Tecnologias Digitais (TD).

⁸ Característica do Ensino Tradicional pautado na memorização de conceitos e procedimentos. Ver

e como uma noção estratégica de possibilidade para produção de conhecimentos.

Com base nas inquietações pontuadas acima, Nunes (2011) buscou em sua pesquisa de mestrado tratar as Calculadoras Gráficas como meios para realizar uma possível produção de conhecimento matemático diante das Funções Trigonométricas. E, com o plano inicial de trabalhar as Funções Trigonométricas e verificar como as TD podem contribuir no desenvolvimento de conceitos matemáticos atrelados a essa aplicação funcional, o pesquisador buscou responder à seguinte pergunta diretriz: *“Como pode acontecer o processo de Design Instrucional com a calculadora HP 50G por parte de um professor/pesquisador de Matemática, visando ao desenvolvimento de atividades didáticas com TI sobre Funções Trigonométricas?”*.

Através dessa pergunta, Nunes (2011) investigou como acontecia o *Design Instrucional*⁹ utilizando a Calculadora Gráfica HP 50G no desenvolvimento de atividades que contemplam as Funções Trigonométricas, de modo que esse recurso tecnológico não fosse domesticado, mas participe no processo de elaboração.

O pesquisador dedica uma parte de sua fundamentação teórica para explicitar a importância do estudo da Trigonometria e das Funções Trigonométricas para os cursos de Engenharia e de Licenciatura em Matemática, principalmente pelo fato de ser um conteúdo que é de grande utilidade até para outras áreas da ciência. E pensando nessa proposição, o pesquisador aponta a importância e necessidade do uso deste conteúdo nos documentos oficiais. E, uma vez que os próprios documentos apontam para a necessidade de inserir recursos tecnológicos no ensino, o pesquisador consegue encontrar um sentido para unir a investigação com Função Trigonométrica e os recursos tecnológicos digitais. Assim, o pesquisador denota as Calculadoras Gráficas como meios possíveis de investigar o conteúdo escolhido por elas fornecerem um elemento crucial em qualquer investigação com Funções: **a visualização gráfica**.

Nunes (2011) definiu sua pesquisa no paradigma qualitativo e divulgou sua pesquisa inicialmente nos cursos de graduação em Matemática, Engenharia e Física, porém estendeu o convite para que membros de outros cursos também participassem do seu trabalho de campo. Além disso, separou sua investigação em três momentos, de

Libâneo (1983).

⁹ Segundo Nunes (2011, p. 27-28) “O Design Instrucional é definido por Filatro (2008) como um processo que liga a teoria de aprendizagem à prática educacional e pedagógica, considerando as teorias como bases, o designer instrucional como meio e a tecnologia funcionando como parte da prática. Assim, a autora define design como um ciclo de atividades que inclui a sequência, a estrutura de unidades, o controle e a avaliação”. Munido dessa afirmação, Nunes (2011) adota o *Design Instrucional* como a construção das atividades-com-tecnologia.

forma que o primeiro momento foi formado pelos paradigmas do pesquisador no processo de elaboração de atividades-com-tecnologia e as preocupações e reflexões buscando estratégias de ensinar Funções Trigonométricas. O segundo momento foi formado pelo “coletivo participante na construção”, que o pesquisador denota como os encontros com o orientador e com o grupo de pesquisa que contribuiu na (re)formulação das atividades e objetivos dos encontros com os participantes da pesquisa. O terceiro momento foi dividido em outros dois outros movimentos, de modo que o primeiro foi trabalhado os tutoriais da Calculadora Gráfica HP 50G e as primeiras atividades sobre a temática investigada, enquanto o segundo momento foi destinado à aplicação do restante das atividades. Cabe ressaltar que o pesquisador destaca que a importância principal é o **feedback** dos estudantes em relação às atividades-com-tecnologias¹⁰.

Em termos de configuração metodológica do cenário de campo de Nunes (2011), o pesquisador selecionou três alunos de graduação, de modo que cada um pertencia a um curso diferente: Graduação em Matemática, Graduação em Engenharia e Graduação em Física. Nunes (2011) selecionou aqueles estudantes que já tinham cursado a disciplina de Fundamentos da Matemática Aplicada, na ULBRA, cujo professor da disciplina foi seu orientador, em adição ao conhecimento da Calculadora Gráfica HP 50G, ou seja, ele selecionou aqueles estudantes que sabiam manusear o equipamento e que já tivessem a disciplina mencionada concluída.

Uma ação muito interessante no trabalho de Nunes (2011) é que o pesquisador faz uso do *software Graphmatica* para esboçar desenhos variados no plano cartesiano, junto a suas respectivas nomenclaturas matemáticas. E, através das fórmulas encontradas, leva-as para a Calculadora Gráfica como um meio de familiarização com a interface do recurso tecnológico. Essa ação de ligar uma tecnologia à outra, faz jus a caracterização de que as TD podem ser possíveis recursos que participam efetivamente da produção de conhecimento.

É importante frisar que Nunes (2011) não descreve exatamente qual sua procedimentação metodológica (o que utiliza como aporte metodológico em relação à sua atividade de campo) nem a quantidade de encontros necessários em seu trabalho de campo. Entretanto, analisando os dados produzidos pelo pesquisador e oriundos de sua análise, percebo uma relação de observação participante, pois o pesquisador interferia diretamente na pesquisa, de forma que produzia seus dados, e moldava-os, em conjunto

¹⁰ Termo trazido pelo próprio autor.

com as três estudantes participantes.

Nunes (2011) conclui com sua pesquisa que os *feedbacks* formados pelos dizeres das estudantes, dos encontros com o grupo de pesquisa e com o orientador, contribuíram num processo constante de autoreflexão em relação à construção das atividades-com-tecnologia. Ao final de cada encontro, o pesquisador recolhia o *feedback* das estudantes e, no momento de análise desses dados produzidos em campo, esse *feedback* das estudantes que participaram da pesquisa revelaram, em primeiro momento, uma dificuldade em utilizar a Calculadora Gráfica pelo fato de o equipamento possuir uma linguagem diferenciada em relação aos comandos utilizados; entretanto, com o final dos encontros, o pesquisador constatou que a Calculadora Gráfica foi um recurso que contribuiu efetivamente na exploração das Funções Trigonométricas devido a possibilidade de experimentação, de forma que as atividades não se tornassem engessadas e os pensamentos das estudantes não fossem condicionados pelo modo de pensar do pesquisador. Assim, ele traz o equipamento como um fator capaz de transformar o processo cognitivo matemático.

Nessa perspectiva, posso citar as vantagens que descobri em trabalhar com tal tecnologia (calculadora HP 50g), entre elas: a possibilidade de deslocar o cursor sobre o gráfico (ação que permite a identificação das coordenadas dos pontos); a possibilidade de mudar o fundo da tela (permitindo visualizar apenas a figura sem o plano cartesiano) e a possibilidade de trabalhar com a barra inferior (por ser um recurso que realiza diversas operações e funções, as quais, dificilmente, um programa de computador não apresentaria). Também, destaco o fator de mobilidade que a calculadora apresenta, pois é um recurso de fácil locomoção (NUNES, 2011, p. 108).

Ainda, o pesquisador sugere que quando se está munido de uma TD as ações em sala de aula podem ser mais dinâmicas de modo que os alunos podem experimentar múltiplas possibilidades acerca da temática trabalhada, o que se torna mais eficiente do que a manipulação manual de diversas contas e/ou esboço de gráficos. E, por mais que Nunes (2011) traga como desvantagens o próprio manual da calculadora por ter uma linguagem muito direta e a própria interface do equipamento, ele aponta para o fato de que são percalços que podem ser superados e, mesmo com essas barreiras, pode ser levado para a sala de aula como um recurso capaz de potencializar a produção de conhecimento matemático.

Com o passar do tempo, as calculadoras foram se sofisticando em todos os sentidos: estrutura, interface, comandos, possibilidades de exploração matemática, disposição e linguagem, etc. Devido ao fato de as TD estarem sempre em constante evolução e melhorias (ainda mais com o advento da internet), claramente a calculadora

não iria ficar para trás. Um exemplo notório disso são as diversas Calculadoras 3D, que, por mais recentes que sejam, têm chamado a atenção de pesquisadores interessados nessa temática, a exemplo do pesquisador Anderson Luís Pereira (2022) que defendeu uma tese de doutorado intitulada “Realidade aumentada e o ensino de cálculo: possibilidades para a constituição do conhecimento”.

Pereira (2022) discute sobre sua trajetória acadêmica e profissional até chegar ao doutorado e menciona que seu estágio-docência possibilitou que ele refletisse observando como os estudantes de Licenciatura em Matemática da UNESP *Campus* de Guaratinguetá (SP) produziam conhecimento matemático e suas percepções acerca das atividades que desenvolveu. Uma das abordagens utilizadas nesse estágio foi inserir as TD em sala de aula e, influenciado também pelas exposições da Semana da Ciência e Tecnologia de 2017 na UNESP *Campus* de Guaratinguetá (SP), o pesquisador se interessou no tema de Realidade Aumentada (RA).

Como a temática de RA é mais vinculada a Jogos Digitais (cenário de gamificação), o pesquisador encontrou uma forma dinâmica, alternativa e inovadora de introduzir conceitos do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) através de uma calculadora virtual que é capaz de projetar funções em forma de Realidade Aumentada: a Calculadora 3D (ou também chamada de *GeoGebra AR*). Com esse novo formato de calculadora, o pesquisador se interessou nas possibilidades de constituir conhecimento matemático que podem ser evidenciadas ao manusear o equipamento. Assim, o pesquisador idealizou um estudo que tem por objetivo compreender os modos com que são desenvolvidos os conhecimentos matemáticos relacionados aos conteúdos de CDI com uma Calculadora 3D e, através disso, responder sua problematização principal: *como se mostra a constituição do conhecimento em Cálculo Diferencial e Integral ao se estar-com a Realidade Aumentada?*

Utilizando a fenomenologia como aporte para suas justificativas, o pesquisador encara a *constituição* como melhor termo a ser utilizado tendo em vista que as experiências do indivíduo são desdobradas em seu íntimo “*mundo da vida*” e são expostas no *corpo-próprio*, organismo que experimenta vivências em sua totalidade (materialidade e imaterialidade) (ROSA; BICUDO, 2018).

O pesquisador faz uma distinção importante entre Realidade Virtual (RV) e Realidade Aumentada (RA), pois, segundo ele, muitas pessoas costumam ter as duas concepções como semelhantes. Basicamente se resume acerca do espaço físico em que o indivíduo está inserido, ou seja, a RV muda todo o ambiente de modo que o indivíduo

não perceba os elementos reais do ambiente físico; já em contrapartida, a RA não modifica o ambiente completamente, mas insere elementos holográficos captados por um receptor (smartphone, tablet, computadores, etc.). Isso significa que a RA pode adicionar (aumentar) elementos no espaço físico.

Assim, Pereira (2022) utiliza a perspectiva fenomenológica para explicar que a realidade física e a virtual não se restringe apenas *ao que “tenho” e ao que “não tenho”*, mas que são ambientes onde a realidade se desdobra com suas particularidades. Assim, para o pesquisador, a RA é compreendida como um dos modos de “ser do real” e daí surgem os chamados “ser-com-realidade-aumentada” e “estar-com-RA”. E um fato muito importante é que o pesquisador coloca a perspectiva fenomenológica como um *corpus* que vai de encontro ao método positivista e, portanto, reitera que a pesquisa não assumiu nenhum viés pronto, mas procedimentos pautados na filosofia fenomenológica que ajudaram a nortear a pesquisa de modo que não existe separação entre o percebido daquele que percebe; assim o pesquisador é conduzido pelo desejo de querer saber buscando compreender a interrogação de sua pesquisa.

Pereira (2022) defende que trabalhar e experienciar o Cálculo com RA possibilitaria novas compreensões acerca da investigação que ele [o pesquisador] está desenvolvendo. Assim, no âmbito dos procedimentos, desenvolveu um curso de curta duração abordando assuntos sobre Cálculo com a Calculadora 3D, com seis licenciandos em Matemática da UNESP *Campus* de Guaratinguetá (SP), configurados em duplas, com a colaboração de uma das professoras de CDI da instituição.

Pereira (2022) destaca que os primeiros encontros, e as atividades, foram destinados à familiarização com a Calculadora 3D e, conseqüentemente, com o recurso de RA com auxílio de *smathphones*. Até o 5º encontro, os estudantes realizaram tarefas de Cálculo com duas variáveis envolvendo Superfícies Cilíndricas e Quadráticas, Limites e Derivadas Direcionais. No 6º encontro, as duplas elaboraram uma tarefa cujos assuntos escolhidos foram: a) Integral Dupla; b) Plano Tangente; e c) Máximos e Mínimos de Funções de Duas Variáveis. Já nos 7º e 8º encontros foram as apresentações dos estudantes, onde eles apresentaram não só a parte conceitual que estava imbricada naquela aplicação escolhida, mas também a aplicabilidade daquele conteúdo na Calculadora 3D de forma a tornar o assunto mais dinâmico e exploratório.

Quando o curso terminou, Pereira (2022) buscou identificar nas *Cenas*

*Investigativas*¹¹ divergências e convergências entre as ideias significativas de cada encontro de modo a constituir um local de diálogo aberto, ou seja, formação de categorias abertas derivadas daquelas ideias principais identificadas pelo pesquisador.

O pesquisador observa que os desenvolvimentos de conjecturas se formaram através dos diálogos entre os participantes e isso foi moldando a forma de olhar a tarefa. Inclusive, ele observa que a tríade conjectura-argumentação-validação se deu de forma conjunta (em equipe), de forma colaborativa, quando os estudantes participantes da pesquisa experimentavam com a Calculadora 3D. Outro ponto importante para Pereira (2022) é a exposição de que uma imagem estática pouco ajuda na compreensão do fenômeno, assim uma relação de movimento e visualização permite que essas ideias sejam mais bem construídas. Essa afirmação é evidente quando as dúvidas que surgem nas duplas vão sendo solucionadas por eles mesmos quando entram em interação com a RA movimentando, elaborando possíveis hipóteses e relacionando-as com alguma ideia matemática.

Quando Pereira (2022) percebe essas manifestações em sua análise, conclui que foi possível perceber que os estudantes constituem conhecimento “Investigando assuntos matemáticos; ao moverem-se, potencializando formas de ver; dialogando e comunicando o compreendido para se fazer entender” (PEREIRA, 2022, p. 205), de modo que se envolvem nos processos investigativos quando estão-com-RA, ou seja, o sentido não é atribuído aos estudantes, mas é um fenômeno que vai se fazendo espontaneamente através das experiências com a Calculadora 3D.

Para concluir, o autor destaca que o movimento de *estar-com* acaba se tornando um fator de grande importância quando o assunto é Ensino e Aprendizagem de Matemática com Tecnologias Digitais, em especial no âmbito do CDI e com o auxílio de calculadoras, porque é uma alternativa relevante em termos de metodologias tanto de pesquisa quanto de ensino. E, segundo Pereira (2022), o fator visualização é um item importante na construção de significados matemáticos, em especial no Cálculo, pois contribui nos processos de abstração, generalização e novas conjecturas com base no que está sendo observado.

É perceptível que as pesquisas de Bonafini (2004), Scucuglia (2006), Nunes (2011) e Pereira (2022) tratam de determinadas ramificações específicas do Cálculo

¹¹Segundo Pereira (2022) *Cenas Investigativas* consistem em captar em forma de vídeos as expressões que ocorrem em um ambiente de investigação e que não se limita às linguagens oral e escrita. Infere que isso permitiu um fluxo de acontecimentos de modo a identificar a experiência em sua totalidade.

utilizando calculadoras; entretanto chamo a atenção para o fato de quão diversificadas são as utilizações da tecnologia “calculadora” no desenvolvimento de cada pesquisa. Esse episódio aponta para o fato de que a calculadora em si não é somente uma opção para simples validação algorítmica, ou seja, para verificar um resultado final produto de uma operação, mas, para além disso, se trata de um recurso capaz de contribuir para a formulação de conjecturas, ideias, novas formas de explorar um determinado conceito e até mesmo ser utilizada como possibilidade introdutória de uma Geometria Dinâmica, como é o caso das Calculadoras 3D.

Dessa forma, é tangível que a calculadora pode se tornar um recurso muito válido para compor o repertório de recursos metodológicos do professor, independente do nível de ensino. É necessário que o utilizador da calculadora se desprenda das amarras de que ela se trata de uma ferramenta que somente contribui para o comodismo e zona de conforto do estudante. Assim, a utilização de forma investigativa das calculadoras depende diretamente do que se espera trabalhar e como se espera trabalhar um determinado conhecimento matemático. Mas a calculadora, assim como qualquer dispositivo digital, tem suas limitações; então é interessante que seu utilizador tenha em mente as limitações da máquina para procurar convergências entre o que se deseja ensinar ou investigar e se a calculadora “responde” aos anseios de quem a utiliza.

E, diante desse panorama de pesquisas no âmbito da Educação Matemática, surge a presente investigação de mestrado que também procura analisar as relações entre o Cálculo (especificamente Diferencial e Integral) e as calculadoras. Entretanto, esta pesquisa se diferencia das demais devido ao fato de estar preocupada em como os participantes da pesquisa exploram os conceitos de CDI presentes em propostas de ensino de modo experimental, ou seja, de maneira que eles utilizem as calculadoras de forma exploratória buscando proposições e formalização de conjecturas em aplicações diversas do CDI: envolvendo Limites, Derivadas e Integrais Definidas e Indefinidas.

Na próxima subseção delimito algumas obras que podem contribuir na visão crítica de como a tecnologia está sendo retratada em algumas aplicações no Ensino Superior considerando o Cálculo como foco disciplinar.

2.3 Outras pesquisas explorando a Calculadora e o Cálculo

Pensando em complementar a discussão desdobrada anteriormente, com as

quatro obras acadêmicas, trago quatro artigos encontrados¹² no Google Acadêmico e Scielo que podem contribuir ainda mais com essa discussão entre Calculadoras e o Ensino de Cálculo.

Baldin e Baldin (2001), no artigo intitulado *Calculadoras Gráficas como auxiliar didático no Ensino de Matemática para as Engenharias*, comentam que discussões em torno da metodologia de ensino entre os professores das disciplinas básicas e profissionalizantes dos cursos de Engenharia da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar) têm sido cada vez mais frequentes dentro da ideia de incluir as TD no repertório do docente em suas disciplinas.

Os autores comentam que, para a época, o surgimento das Calculadoras Gráficas poderia remodelar as abordagens pedagógicas nas disciplinas, de modo que a capacidade desses equipamentos era equivalente a de um computador de forma que o uso consciente e bem administrado desses equipamentos poderia substituir uma sala de aula informatizada, caso não houvesse uma, e abrir novos caminhos para diferentes abordagens metodológicas.

Pensando nisso, os pesquisadores fizeram uso da Calculadora Gráfica TI-92 *Plus*, da Texas Instruments, no objetivo de explorar novas formas de ensino com o equipamento de forma a apresentar algumas aplicabilidades fazendo um estudo comparativo com o *software Maple*, que já era de uso rotineiro dos professores.

Visando uma sala de aula informatizada onde a postura do aluno migre de receptor para um corpo ativo no processo de conhecimento, segundo Baldin e Baldin (2001), os computadores podem fomentar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, mas quando há limitações, como número grande de alunos ou até mesmo instalações precárias, é necessário recorrer a outros métodos e objetos pedagógicos que venham auxiliar a disciplina. Assim, trabalhar com as calculadoras, segundo os autores, remonta “[...] o potencial didático das calculadoras gráficas como mais um recurso tecnológico que, somado aos programas de computador, significarão novos avanços [...]” (BALDIN; BALDIN, 2001, p. 114).

Em primeiro momento, analisando a Calculadora Gráfica TI-92 *Plus*, os autores comentam que seu sistema operacional, envolvendo sua linguagem de programação,

¹² Busquei na barra de pesquisa por “Ensino de Cálculo com Calculadoras” e em outra guia duplicada “Calculadora e Cálculo”. Realizei esse processo no Google Acadêmico e as obras encontradas foram analisadas pelo resumo, introdução e considerações finais no intuito de verificar se o assunto seria pertinente ao trabalho. É importante ressaltar ao leitor que existe uma grande escassez de trabalhos que relacionam o uso de calculadoras no ensino de Cálculo, devido a isso não foi necessário um critério de seleção.

pode ser um atrativo aos interessados em linguagem computacional e também, através de seus comandos, se torna uma grande aliada na resolução de problemas, principalmente envolvendo o Cálculo.

Nesta perspectiva, Baldin e Baldin (2001) acrescentam que trabalhar a visualização é um fator de suma importância dentro das Engenharias, principalmente quando relacionadas com os conteúdos de

[...] funções de uma variável real, traços de curvas planas parametrizadas, gráficos na forma polar, pontos de uma sequência, gráficos 3-dimensionais de funções de 2 variáveis e funções soluções de equações diferenciais de 1ª ordem com campo de direções (BALDIN; BALDIN, 2001, p. 115)

Percebo que os autores trazem essa relação com mais evidência ao considerar que a visualização é um dos caminhos possíveis de conseguir compreender um problema enunciado e formular hipóteses diante daqui que se observa ou se destina a investigar; além disso, “[...] por permitir a visualização e a análise manipuladas individualmente pelos alunos ao mesmo tempo que acompanha a teoria, consideramos a sua utilização extremamente eficiente” (BALDIN; BALDIN, 2001, p. 115). Já analisando o Gráfico 3D, os autores percebem que a calculadora possui uma limitação acerca da resolução de tela e, devido a isso, julgam melhor trabalhar com o *Maple* caso a pessoa não conheça outros comandos da calculadora, como o comando “*DrwCtour*” embutido em *Catalog*, que ajuda a visualizar melhor os parâmetros da figura.

Os pesquisadores, então, para demonstrar que a Calculadora pode ser útil no processo de Resolução de Problemas baseados no Cálculo, elaboram alguns exemplos utilizando sistemas não lineares graficamente e outro sobre ajuste de curvas aos dados por curvas de regressão. De acordo com Baldin e Baldin (2001), sobre o primeiro, o indivíduo que resolver pela calculadora pode plotar as funções algébricas, de modo a fazer gráficos simultâneos e, através do cursor, analisar possíveis soluções para o sistema. Sobre o segundo, os autores explicitam também esse lado de plotagem do gráfico de funções e comentam que a estratégia é praticamente a mesma, entretanto,

Após a leitura dos valores de y obtidos, o mesmo procedimento aplicado agora para a variável x calculado com os valores de y encontrados, fornece as respostas. Comparando com a solução gráfica podemos observar o grau de aproximação ocorrido na leitura visual (BALDIN; BALDIN, 2001, p. 116).

Outro exemplo que os autores trazem é acerca do estudo do comportamento do gráfico da função $y = (1 + (1/x))^x$ para fazer discussões acerca do conteúdo de

Limites. Utilizando a ferramenta “TABLE” da calculadora, que gera uma tabela com números para $x \in R$, seu usuário pode, com o cursor, identificar o movimento do gráfico e para qual valor ele pode estar tendendo, observando a condição de Limite diante da análise dos limites laterais (BALDIN; BALDIN, 2001).

É importante mencionar que o *software Maple* apareceu, também, em todas as atividades como comparativo, ou seja, os autores compararam as resoluções. Como o intuito de trazer este artigo para o arcabouço teórico desta pesquisa de mestrado versa sobre o uso das calculadoras, busquei dar ênfase para essa aplicação.

Baldin e Baldin (2001, p. 117) concluem que o papel da Calculadora Gráfica, principalmente no desenvolvimento dos conceitos abordados, facilitou fundamentalmente:

- a) a transição das aulas tradicionais de “giz/quadro-negro/conceitos teóricos” com postura passiva dos alunos para uma aula/laboratório mais participativa com experiências e simulações realizadas juntamente com o desenvolvimento teórico;
- b) a transição de utilização de primeiros comandos computacionais numa interação mais amigável para a utilização de uma linguagem computacional mais poderosa e outras estruturas de programação;
- c) um acesso sistemático e intenso aos recursos tecnológicos contornando as dificuldades de uso de laboratórios mais sofisticados.

Outro artigo que vale a pena explicitar é o de Rehfeldt *et al* (2018) intitulado *A Calculadora HP em disciplinas de Cálculo: um estudo das concepções dos participantes*, buscam apresentar as perspectivas de sessenta e nove estudantes do curso Engenharia de uma Universidade do Sul do Brasil com o uso da Calculadora HP 50G na resolução de problemas envolvendo Derivadas e Integrais de modo a “problematizar os resultados decorrentes da exploração de dois tutoriais discutidos em disciplinas de Cálculo I, Cálculo II e em uma oficina com alunos das engenharias” (REHFELDT *et al*, 2018, p. 130).

Pautando-se em referências que fundamentam suas visões da tecnologia como aliada na compreensão de conceitos matemáticos e as possibilidades de inserção pedagógica da calculadora no Ensino Superior, Rehfeldt *et al* (2018) comentam que puderam desenvolver tutoriais buscando “avaliar a agilidade, a facilidade e a segurança de cálculos mais complexos, envolvendo, nesse caso, derivadas e integrais” (REHFELDT *et al*, 2018, p. 133) com o uso exploratório da Calculadora HP 50G.

Amparados na Análise Textual Discursiva (MORAES; GALIAZZI, 2006), tendo como dados as manifestações escritas dos estudantes, Rehfeldt *et al* (2018) analisaram todas as atividades que os alunos fizeram e chegaram a duas unidades de análise

explicitaram em sua obra: “a) Potencialidade da calculadora na resolução de derivadas e integrais; b) Aspectos do material que poderiam ser melhorados na proposta apresentada” (REHFELDT *et al*, 2018, p. 141).

Sobre a primeira unidade de análise, os autores enfatizam que explorar conteúdos de Derivadas e Integrais com o uso da Calculadora HP 50G mostrou diferentes possibilidades de se trabalhar e investigar um determinado conceito assim como estabeleceu uma relação harmoniosa entre o uso da calculadora academicamente e seu uso na vida profissional do engenheiro. Rehfeldt *et al* (2018) inferem que tal afirmação pôde ser constatada através da observação de campo e através da própria percepção dos alunos no decorrer das atividades que relataram a facilidade em manusear o equipamento, entretanto, segundo os autores, deveria ser utilizado com sabedoria para aliar prática com desenvolvimento e não deixar todo “trabalho duro” com a calculadora.

Rehfeldt *et al* (2018) explicitam que o uso da calculadora pôde fornecer um sistema de validação, de modo que muitos estudantes a utilizavam como uma forma de comparar suas resoluções feitas manualmente. E, de acordo esses autores, se tratando de um curso de Engenharia, a dinamicidade de se trabalhar cálculos complexos com a calculadora pode agilizar o trabalho do engenheiro, transformando-a em uma potencial aliada.

Sobre a segunda unidade de análise, Rehfeldt *et al* (2018) consideraram que a manifestação dos alunos culminou na importância de se pensar em possíveis implementações da calculadora em problemas de formas práticas tendo em vista o contexto profissional do público-alvo. Assim, mesmo realizando as atividades com Derivadas e Integrais, os estudantes sentiram a necessidade de propostas que contextualizassem a vivência deles, o que foi um fator levantado pelos autores como uma relação importante a se pensar em próximas aplicações (REHFELDT *et al*, 2018). Estas duas perspectivas citadas foram ideias concluídas pelos autores ao desenvolverem a pesquisa.

Dalla Vecchia e Kaiber (2011), em seu trabalho intitulado *Cálculo Numérico e Calculadoras Gráficas: construindo idéias e conceitos*, buscaram evidenciar uma pesquisa realizada na ULBRA, no curso de Licenciatura em Matemática com estudantes que cursaram a disciplina de Matemática Aplicada II dessa mesma instituição. A ideia da pesquisa foi de analisar a Calculadora HP 50G em interação com o Polinômio Interpolador de Lagrange e verificar se essa interatividade contribuiu na construção do conhecimento matemático de modo a observar indícios de potencialidades da utilização

dessa tecnologia (DALLA VECCHIA; KAIBER, 2011).

Os autores, embasados em aportes teóricos que analisam e debatem acerca do ciberespaço, principalmente Lévy (1993) acerca da informatização, abrem a discussão que o uso da calculadora pode proporcionar a geração de conjecturas mais profundas diante daquilo que está sendo posto para investigação, no entanto os autores deixam bem claro que

Entende-se o virtual, não como o espaço criado pelo software, ou especificamente, pela calculadora gráfica, mas sim o ambiente problemático criado em torno de uma entidade ou situação. Salienta-se dessa colocação e das citações acima o elemento “problemático”. Nele está a essência daquilo que se assume no presente artigo por virtual e virtualização, *não se devendo confundir a simples presença de um software, de um computador, de uma calculadora, ou passagem de uma tecnologia à outra com a virtualização*. É necessário criar um campo problemático, elevando a entidade ou situação analisada a esse campo (DALLA VECCHIA; KAIBER, 2011, grifo dos autores).

Dessa forma, os autores afirmam que o enfoque na mudança de problemática está condicionado ao fato de que eles pretendem observar as situações investigadas de modo a focar nos momentos que a entidade tecnologia foi colocada diante da situação-problema e modificou-se para viabilizar a construção do conhecimento (DALLA VECCHIA; KAIBER, 2011).

Analisando qualitativamente seus dados, os autores vão afirmar que a ideia, a priori, do desenvolvimento das atividades para investigar o Polinômio Interpolador de Lagrange, que segue conforme figura 03, esteve em articular os recursos algorítmicos e geométricos da Calculadora HP 50G visando a construção do conhecimento formal na definição e não apenas na resolução matemática.

Figura 03 – Polinômio Interpolador de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \cdot l_i(x), \text{ onde } l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \text{ com } i = 1, 2, \dots, n$$

Fonte: Dalla Vecchia e Kaiber (2011)

A ideia da atividade, de acordo com os autores, era que os alunos chegassem ao Polinômio a partir de um conjunto de pontos dado, sendo o primeiro conjunto composto pelos pontos (1, 2), (3, 2), (-1, 14); o segundo conjunto sendo (-1, -2), (1, 6), (0, -1); (2, 97), (-2, 45); e o terceiro conjunto sendo (1, 3), (-2, -3), (7, 15). Os pesquisadores

não descrevem os passos, mas comentam que, com a ajuda da calculadora os estudantes chegaram nos polinômios que contemplam os três conjuntos de dados.

Diante da análise de dados, os autores explicitam narrativas dos participantes, onde a participação da calculadora foi essencial para validar a hipótese de que com três pontos o polinômio seria de segundo grau, sendo que o resultado de uma aluna, com três pontos, tinha gerado um polinômio de primeiro grau. Através do uso da calculadora, um aluno conseguiu chegar uma conclusão, utilizando a plotagem de pontos no gráfico e a relação algébrica, que satisfizesse essa inquietação, de modo que apresentou a hipótese de que três pontos colineares formam uma reta. Assim, os pesquisadores afirmam que “Uma vez que os três pontos são colineares, o polinômio de Lagrange também resulta em uma expressão polinomial que representa uma situação linear” (DALLA VECCHIA; KAIBER, 2011, p. 6), compreendendo, assim, a problemática levantada pelos três pontos.

Diante da análise, Dalla Vecchia e Kaiber (2011, p. 7) enfatizam que a relação entre o uso da calculadora e a coletividade dos participantes diante da investigação do polinômio se “[...] mostra, não somente um exercício, mas sim uma harmonia entre atividade, atitudes dos envolvidos no ambiente de aprendizagem e interação com tecnologias”. Os autores afirmam que a sala de aula assumiu um rumo investigativo próprio na medida em que os questionamentos dos estudantes iam aparecendo e eles poderiam utilizar da calculadora ou não para investigarem essas inquietações entre si.

Os autores concluem que a visualização foi de suma importância para a compreensão de particularidades envolvendo o Polinômio de Lagrange bem como no desenvolvimento de conjecturas promovendo discussão, reflexão e construção do conhecimento específico de Matemática.

Sousa Junior e Nunes (2019), em sua obra intitulada *Níveis de instrumentação: o uso da calculadora científica em tarefas de Cálculo Diferencial*, investigaram o possível papel que as calculadoras poderiam desempenhar diante do estudo de Cálculo Diferencial evidenciando suas transições de artefato para instrumento. A investigação ocorreu em uma universidade privada em Belém (PA) com a participação de, ao todo, setenta estudantes regulares dos cursos de Engenharia Civil, Mecânica e Elétrica.

Para realizar tal investigação, os autores mencionam que utilizaram a disciplina de Cálculo Diferencial da instituição para desenvolver a pesquisa. Além disso, visando o trabalho colaborativo entre os estudantes, dividiram-se em grupos de cinco e oito pessoas, onde, segundo os autores, facilitou o processo de observação participante.

Sousa Junior e Nunes (2019) também lançaram mão de sete tarefas que tinham relação com as noções básicas e/ou intuitivas do Cálculo Diferencial, das quais três foram selecionadas para ser apresentada no artigo, uma vez que se trata de um recorte de uma pesquisa já desenvolvida.

Sousa Junior e Nunes (2019) comentam que fizeram um momento de ambientação com os estudantes antes de iniciar de fato a exploração do conteúdo de Cálculo Diferencial. Nessa ambientação dos estudantes com as calculadoras, os pesquisadores utilizaram expressões numéricas para que os estudantes pudessem se familiarizar com os comandos da Calculadora Científica e sua operacionalização.

Os autores, procurando estabelecer a Teoria da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995) buscam fazer uma diferenciação entre instrumentalização e instrumentação.

[...] para dar-se o processo de *instrumentalização* é necessário identificar o surgimento e evolução do componente artefato do instrumento, a saber: selecionando, agrupando, produzindo e definindo funções, transformando o artefato (estrutura, funções etc.) enriquecendo as propriedades do artefato cujos limites são difíceis de determinar. Enquanto, o processo de *instrumentação* é relativo ao surgimento e evolução de Esquemas de Utilização e da Ação Instrumental, por exemplo: sua constituição, seu funcionamento, sua evolução por acomodação, coordenação e combinação, inclusão e assimilação recíproca, a assimilação de novos artefatos aos esquemas pré-existentes (SOUSA JUNIOR; NUNES, 2019, p. 5, grifos dos autores).

Assim, Sousa Junior e Nunes (2019) buscam desenvolver situações onde a transição de artefato para instrumento seja notória, de modo que faz uso do modelo Situação de Atividade Instrumental (SAI) para verificar essa relação. Segundo os autores, esse modelo “[...] possibilita diferenciar a sequência de ações realizadas por alunos em atividades que requeiram manipulação de calculadora científica [...] [e] estrutura os caminhos quando o artefato transita a instrumento pela ação do sujeito” (SOUSA JUNIOR; NUNES, 2019, p. 6, grifo meu).

Baseando-se nessa abordagem, Sousa Junior e Nunes (2019, p. 7) comentam que, após verificarem e organizarem seus dados de campo, chegaram a três unidades de análise “• Categoria I: artefato como instrumento inicial; • Categoria II: artefato como instrumento intermediário; • Categoria III: artefato como instrumento final” utilizando três tarefas que continham as temáticas (não conjuntamente) de: (i) Expressões Numéricas; (ii) Juros Compostos; e (iii) Noção de Limite com ideia de Função Exponencial.

Diante do instrumento inicial, os autores afirmam que o uso dos comandos corretos da calculadora, principalmente os símbolos (como colchete, parênteses e chaves) e a hierarquia de operações, são fundamentais para desenvolver a compreensão do conhecimento matemático. É nessa fase que os estudantes podem perceber possíveis erros de resolução feitas em lápis e papel, construindo um ambiente de validação das conjecturas, de modo que “[...] a calculadora tornou-se instrumento assim que auxiliou nas ações dos graduandos, ou seja, nesse momento eles instituíram o artefato como Instrumento Inicial para si na resolução da tarefa” (SOUSA JUNIOR; NUNES, 2019, p. 10).

Acerca do instrumento intermediário, os autores inferem que a tarefa sobre Juros Compostos solicitava uma resposta baseada em anos, meses e dias após uma aplicação de um capital de R\$800.000,00 com uma taxa de juros de 12% ao ano com juros totais obtidos de R\$700.000,00. Como a calculadora tinha fornecido um número decimal (dízima não-periódica), os alunos deveriam mobilizar seus conhecimentos matemáticos de transformação de unidades para desenvolver na calculadora essas explorações. Sousa Junior e Nunes (2019, p. 12) explicitam que suas expectativas eram de que

[...] os graduandos demonstrassem aspectos que a teoria nos indicasse uma mudança de artefato para instrumento, mas constatamos como em Rabardel (1995) que não é fácil contemplar essa ação pelo sujeito, daí o processo de Instrumentalização não foi contemplada também nessa tarefa.

Assim, os autores vão afirmar que, mesmo os estudantes estarem envolvidos com o artefato e implicarem ação nele, a relação sujeito-objeto mostrou um processo de instrumentação, pelo fato de a maioria dos graduandos não conseguirem utilizar a calculadora como intermediador da mobilização de conceitos matemáticos (SOUSA JUNIOR; NUNES, 2019).

Já diante do instrumento final, Sousa Junior e Nunes (2019, p. 13, grifos dos autores) utilizaram a noção de “algo elevado a $1/x$ ” $[(\)^{\frac{1}{x}}]$ para que os estudantes pudessem investigar, explorando com a calculadora, o surgimento dos limites “[...] quando tentamos encontrar a tangente de uma curva ou a velocidade de um objeto e também para analisar o comportamento da função f definida para valores de x próximos de a pela direita e pela esquerda [...]”. Tendo R\$ 1.000,00 investidos a juros de 9% capitalizados n vezes por ano, onde $n = \frac{1}{x}$, os estudantes deveriam fazer uma investigação para descobrir quanto que esse valor daria olhando para um montante acumulado após 1 ano.

Como resultados dessa última investigação, Sousa Junior e Nunes (2019) afirmam que houve um processo de Ação Coletiva Instrumentada, de modo que os estudantes conseguiram reconhecer a hierarquia das operações e, através da exploração com a calculadora, encontraram respostas favoráveis à tarefa solicitada. Os graduandos, quando não conseguiam chegar ao resultado ou se confundiam no momento de substituir cada variável em seu devido lugar, ajudavam-se entre si utilizando a calculadora como fonte das discussões.

[...] observamos que os graduandos conseguiram superar suas dificuldades, pois manipularam a calculadora científica e registraram de forma adequada a sequência dos algoritmos com as hierarquias das operações solicitadas na função modeladora do limite por partes separadamente, como constatamos nas ações instrumentadas referentes as operações realizadas com êxito na calculadora: $1 \div 0.1 = 10$; $1 \div 0.01 = 100$; $1 \div 0.001 = 1000$ e $1 \div 0,0001 = 10000$. (SOUSA JUNIOR; NUNES, 2019, p. 15).

Assim, analisando os dados produzidos, os autores vão concluir que houve a transição efetiva da calculadora de artefato para instrumento e, somando-se a isso, revelou possibilidades voltadas para a Teoria da Gênese Instrumental de Rabardel (SOUZA, JUNIOR, NUNES, 2019).

Fazendo uma reflexão breve diante dos quatro artigos apresentados, percebo que são diversos os papeis que a calculadora (seja ela científica ou gráfica) pode assumir diante de uma pesquisa e que as abordagens para inserí-la em um cenário de pesquisa, principalmente no Ensino Superior, requer cuidado, planejamento, metodologia adequada e um propósito bem consolidado.

Novamente, ressalto que esta pesquisa de mestrado se diferencia, também, das obras explicitadas aqui por mais que também utilize a temática do Cálculo Diferencial e Integral, como visto em algumas pesquisas a priori. Assim, torna-se necessário evidenciar que explicitarei essa temática sob outra ótica: a exploração e experimentação. Além disso, se diferencia das demais porque as calculadoras são de outro modelo e porque estou atuando em outro contexto: um curso de graduação em Matemática, em uma universidade pública e estadual no interior do Estado de São Paulo.

Na próxima subseção delimito os referenciais teóricos ao qual esta investigação está assentada e, conseqüentemente, em que será evidenciado o que entendo por tecnologia e experimentação neste trabalho e como essa estrutura conversa com os procedimentos desta pesquisa.

2.4 Referencial Teórico da Pesquisa

Inicio essa subseção destacando que é importante migrar para os conceitos da Filosofia da Tecnologia para que haja compreensão acerca do que este trabalho defende por *Tecnologia* e quais são suas características na sociedade.

No ano de 2003, Andrew Feenberg, filósofo, professor e pesquisador da *Simon Fraser University*, ministrou uma palestra para os estudantes universitários de Komaba (Tóquio - Japão) intitulada “*What is Philosophy of Technology?*” onde expôs o que entendia e defendia por Filosofia da Tecnologia. Feenberg (2010) afirma que para entender o que é *Tecnologia* é necessário revisitar pressupostos históricos da Filosofia Ocidental pelo fato de suas raízes históricas estarem emaranhadas na Grécia Antiga.

Feenberg (2010) afirma que uma primeira percepção da humanidade, segundo a característica ocidental, era de que se trata de entes/animais racionais que trabalham de forma constante para transformar a natureza. E, a partir dessa noção de transformação, foram moldadas distinções basilares que prevaleceram ao longo das tradições da sociedade ocidental, sendo chamadas de *physis* e *poiesis*.

Physis geralmente é traduzido como natureza. Os gregos entendiam a natureza como um ser que se cria a si mesmo, como aquilo que emerge de si mesmo. Mas há outras coisas no mundo, coisas que dependem de que algo passe a existir. *Poiesis* é a atividade prática de fazer da qual os seres humanos se ocupam quando produzem algo (FEENBERG, 2010, p. 2).

E, como resultado de uma *poiesis*, um produto é gerado (o que o filósofo chamará de artefato). Dentre vários resultados que podem ser gerados diante de uma atividade prática, surgiu um termo que foi utilizado para representar a materialização do conhecimento ou disciplina que emerge dessa mesma atividade prática, que foi *Techne*, um termo usual para representar as técnicas e, posteriormente, a própria Tecnologia.

Assim, por mais diferentes que esses conceitos possam ter numa primeira visão do leitor, Feenberg (2010, p. 3) esclarece que

A fonte desse quebra-cabeça é o entendimento grego de *techne*, o ancestral da tecnologia moderna. Claro que os gregos não tiveram a tecnologia em nosso sentido moderno, mas eles tiveram todos os tipos de técnicas e ofícios que eram o equivalente em sua época à forma como a tecnologia é para nós hoje. E, por mais estranho que pareça, eles conceberam a natureza no modelo dos artefatos produzidos pela sua própria atividade técnica.

Analisando criticamente essa relação da Tecnologia com as Técnicas, percebo que a Tecnologia em si é intrínseca às atividades humanas. E, pensando na aparição da modernidade e da sofisticação dessas Tecnologias ao passar dos anos, principalmente condicionadas pela globalização, é comum que haja um avanço evidente na forma de estruturar, pensar e elaborar Tecnologias: a partir deste ponto surge a discussão acerca

do cenário das Tecnologias Digitais (TD). Desse modo, é necessário voltar um pouco na história para que alguns detalhes importantes sejam evidenciados.

Segundo os registros históricos, Tecnologias Modernas¹³ começaram a ter aparição na década de 40 sob fins militares, de forma que essas Tecnologias foram pensadas e utilizadas para capacitar, através de cursos, esquadrões militares durante a Segunda Guerra Mundial, o que colocaria tal nação (como é o caso dos Países Aliados) em determinada vantagem em relação aos outros países (ALTOÉ; SILVA, 2005); e, de acordo com Cunha (2018), esse foi o pontapé inicial para que investigações acerca dessas Tecnologias fossem desenvolvidas de forma mais intensa.

É conveniente enfatizar que, em primeira instância, as Tecnologias não foram pensadas para adentrar o cenário educacional (escolas e universidades, por exemplo), mas para compor uma frente militar em termos de estratégia bélica; contudo na mesma década começaram as implementações na Educação. Entretanto, essas Tecnologias começaram a ser pensadas formalmente para compor o cenário educacional brasileiro somente a partir de 1981 com o I Seminário Nacional de Informática Educativa, que ocorreu em um período onde as Tecnologias Modernas já estavam sendo tratadas como Tecnologias Educacionais em outros países e passaram a ser equiparadas às Tecnologias Informáticas (TI), com o advento da Revolução Digital ou Terceira Revolução Industrial (BORBA; PENTEADO, 2001; KENSKI, 2007; CUNHA, 2018).

Refiro-me, neste trabalho, o termo Tecnologia Informática como Tecnologias Digitais (TD). Além desse último termo ser mais usual nos dias de hoje, uma das bases da informática é a programação (PAPERT, 1980) e, para que uma Tecnologia seja classificada como Digital ela necessita do mesmo atributo basilar da programação: o código binário. Assim, adoto nesta pesquisa que as TD são um

Conjunto de tecnologias que permite, principalmente, a transformação de qualquer linguagem ou dado em números, isto é, em zeros e uns (0 e 1). Uma imagem, um som, um texto, ou a convergência de todos eles, que aparecem para nós na forma final da tela de um dispositivo digital na linguagem que conhecemos (imagem fixa ou em movimento, som, texto verbal), são traduzidos em números, que são lidos por dispositivos variados (RIBEIRO, 2014, p. 1).

Assim, pensando que as TD são capazes de transformar uma linguagem binária de programação em um resultado de visualização, é necessário pensar nesses recursos

¹³ Concepção baseada em Silveira e Bazzo (2005), Feenberg (2010) e Habowski, Conte e Trevisan (2019) que compreendem essas Tecnologias Modernas como inovações científicas oriundas da Segunda Revolução Industrial que tiveram forte inserção no contexto social, político e econômico.

de forma reflexiva, ou seja, pensar para além da sua própria existência. Ela se torna *Tecnologia* a partir do momento em que se reflete sobre seu uso e essa ação contribui para uma atividade humana (FEENBERG, 2010).

Delineados esses percursos históricos e filosóficos da Tecnologia, que foram importantes para dar corpo aos principais referenciais teóricos, utilizados também para analisar os dados, é importante explicitar a teoria de Pierre Lévy para contribuir nesse diálogo acerca das Tecnologias. Filósofo, sociólogo e pesquisador em ciência da informação e da comunicação, Lévy, em 1993, buscou desenvolver uma teoria que se chama Tecnologias da Inteligência. E, pensando criticamente, esse termo dialoga com as ideias de Tecnologia Moderna, Tecnologia Educacional, Tecnologia Informática (ou da Informação) e, atualmente, Tecnologia Digital, já que os percursos históricos da humanidade foram permeados pela oralidade, pela escrita e pela informática, que são tidas como Tecnologias da Inteligência, segundo Lévy (1993).

Lévy (1993) ao discutir sobre essas Tecnologias da Inteligência, baseado na Psicologia Cognitiva, o que ele chama de “os três tempos do espírito”, afirma que a oralidade é uma estrutura que faz parte da construção cultural e social da humanidade de modo que os conhecimentos adquiridos são perpassados, por exemplo, na forma de narrativas acerca das histórias de pessoas, de lugares, de itens materiais, etc., ou seja, a oralidade é a base da comunicação e da troca de informações. O filósofo faz uma distinção acerca dessa oralidade em: primária e secundária. A oralidade primária, antes da escrita, época que para se produzir e difundir conhecimento se usava a comunicação oral, através de mitos e contos, as gerações perpassavam o conhecimento através da fala. Segundo Lévy (1993) uma sociedade oral primária possui suas raízes fundadas na memória, o que significa que as lembranças, percepções, idealizações dos indivíduos estão intimamente condicionadas ao ato de ouvir. Interpreto que o ouvir, o interpretar, então, por esses indivíduos em uma oralidade primária, fomentava uma determinada perspectiva diante de uma imagem, um objeto ou até mesmo um ser metafísico onde as representações eram tidas como a bagagem cultural de uma dada sociedade.

No entanto, com a oralidade secundária, entendo que Lévy (1993) traz essa tecnologia como algo mais presente e menos condicionante. Isso significa que, com o advento da oralidade secundária, os ideais, as perspectivas, podem fomentar uma determinada racionalidade em contraponto com a oralidade primária, pois “[...] a oralidade *secundária* está relacionada a um estatuto da palavra que é complementar ao da escrita, tal como o conhecemos hoje” (LÉVY, 1993, p. 77, grifo do autor). Assim,

pensando na necessidade atual de validação das coisas, fazendo jus ao método científico, acredito que a oralidade secundária, por estar mais atrelada à escrita, também contribui para a gestão da memória social e para a compreensão de uma determinada causa. Além disso, “Hoje em dia a palavra viva, as palavras que “se perdem no vento”, destaca-se sobre o fundo de um imenso corpus de textos: “os escritos que permanecem”” (LÉVY, 1993, p. 77, grifo do autor).

Outro fator de suma importância que Lévy (1993) discute é a rede de armazenamento de informações denominadas de memória de curto e de longo prazo. A memória de curto prazo, como o próprio nome sugere, se trata de uma rede de estímulos neurais que mobilizam a própria atenção e que normalmente é marcada pelas repetições cansativas. Lévy (1993, p. 78) faz uma analogia muito interessante ao explicar, na prática cotidiana da educação como um todo, essa relação entre memória de curto prazo e repetição:

A repetição parece ser a melhor estratégia para reter a informação a curto prazo. [...] O estudante que esteja preocupado apenas com sua nota no exame oral irá reler sua lição pela décima vez antes de entrar em sala neste dia.

Já a memória de longo prazo, segundo Lévy (1993), está mais associada a uma única rede associativa onde as informações estão armazenadas e podem ser novamente acessadas de acordo com o conteúdo informacional e associações que estejam conectadas à essa rede central. Assim, para que uma informação que não esteja nesse estado ativo seja percebida novamente, Lévy (1993, p. 79) afirma que “a ativação deverá propagar-se dos fatos atuais até os fatos que desejamos encontrar” e para que isso aconteça é necessário que exista um estado de conservação para tal representação que se esteja buscando e caminhos associativos que levem até ela.

Ao estudar essas ideias de Lévy (1993), que estão baseadas, segundo ele, na Psicologia Cognitiva, ressalto a importância para que o leitor tenha em vista a vastidão que é o simples pensar no ato da oralidade. Devido ao fato de ela ser uma tecnologia que permite todo esse sequenciamento de interligações neurais, uma rede central de armazenamento e processamento de informações bem como pólos de distribuição dessa informação que podem estar alocadas dentro das memórias de longo prazo, é compreensível quando o filósofo comenta que ela faz parte do cotidiano humano até os dias atuais (LÉVY, 1993).

Assim, o exercício de perceber, captar, internalizar e desenvolver algo começa com a oralidade até mesmo pela formulação de hipóteses e conjecturas. Um exemplo

tangível disso é encontrado na seguinte passagem de Lévy (1993, p. 26): “Quando ouço uma palavra, isto ativa imediatamente em minha mente uma rede de outras palavras, de conceitos, de modelos, mas também de imagens, sons, odores, lembranças, afetos, etc”.

Entendendo a importância da oralidade e que ela é uma tecnologia que fez e faz parte de toda uma construção historicamente cultural e social, Lévy (1993) traz, conforme pontuado anteriormente, outra tecnologia da inteligência que complementa as características da oralidade: a escrita.

Sobre a escrita, Lévy (1993) defende que ela se trata de um fator cognitivo, pois permite estender as capacidades da memória. A priori, Lévy (1993) insere a escrita como complementar às “palavras que se perdem no vento” sob efeito da temporalidade: “[...] a escrita, ao intercalar um intervalo de tempo entre a emissão e a recepção da mensagem, instaura a comunicação diferida, com todos os riscos de mal-entendidos, de perdas e erros que isto implica” (LÉVY, 1993, p. 88). Para o filósofo, a escrita é uma forma de exercer a oralidade, porém de uma forma mais única, de modo que através da escrita, o leitor pode desenvolver uma forma de comunicação que não dependa de outro indivíduo e/ou da audição, como é o caso, por exemplos, dos livros de ficção científica onde se consegue “viajar pelo tempo” e perceber o autor comunicando com o leitor através dos fatos sequenciados que vão dando corpo a uma espécie de comunicação para quem lê. Sobre isso, Lévy (1993, p. 89-90) comenta que

A escrita permite uma situação prática de comunicação radicalmente nova. Pela primeira vez os discursos podem ser separados das circunstâncias particulares em que foram produzidos. [...] A comunicação puramente escrita elimina a mediação humana no contexto que adaptava ou traduzia as mensagens vindas de um outro tempo ou lugar. [...] o mundo se oferece como um grande texto a ser decifrado. [...] A leitura é fonte de uma temporalidade paradoxal, pois no exato momento que aproxima o hermenêuta da origem do texto, alarga o fosso de tempo que tencionava preencher.

Pautado no problema da racionalidade, Lévy (1993) não insere a escrita como uma tecnologia melhor que a oralidade, mas sim, conforme supracitado, complementar. O filósofo, ancorado na antropologia, afirma que a questão central de diferenciação entre uma e outra tecnologia está nas suas características de classificação, de modo que as pessoas puramente orais (que não possuem letramento) possuem a tendência de pensar por situações enquanto as pessoas que possuem uma cultura escrita tendem a pensar por categorias, de modo realmente seletivo¹⁴. Em outras palavras,

¹⁴ Para Lévy (1993) pensar por situações está relacionado com o modo empírico de fazer as coisas (aprender a fazer), enquanto pensar por categorias está mais relacionado com um modo de fazer as coisas de modo planejadamente crítico.

filosoficamente, “[...] um certo tipo de pensamento racional ou crítico só pode desenvolver-se ao se relacionar com a escrita” (LÉVY, 1993, p. 93).

Assim, a escrita é muito mais do que um simples meio de arquivamento das ideias arquitetadas pelos oralistas, pois permite que, através da racionalidade, encontrem-se meios, perspectivas, noções e até novas interpretações diante daquilo que foi dito, catalogado e, então, registrado¹⁵ (LÉVY, 1993).

Já sobre a informática, a terceira tecnologia da inteligência, Lévy (1993) afirma que as possibilidades (que ele chama de técnicas) para processar e armazenar informações de determinadas épocas, e seu multiculturalismo, torna possível e viável uma nova estrutura para evolução cultural. Para o filósofo essas informações são produtos de uma cultura histórica e filosoficamente social onde “[...] linguagem e técnica contribuem para produzir e modular o tempo” (LÉVY, 1993, p. 76) e “[...] estruturam profundamente nosso uso das faculdades de percepção, de manipulação e de imaginação” (LÉVY, 1993, p. 160).

Uma característica interessante dessa tecnologia da inteligência é que, diferente das outras duas tecnologias, Lévy (1993) afirma que a informática não consegue ter um caráter de identidade estável devido ao fato de ela ser mutável e sujeita a transformações diante do significado de seu uso.

O aspecto da informática mais determinante para a evolução cultural e as atividades cognitivas é sempre o mais recente, relaciona-se com o último envoltório técnico, a última conexão possível, a camada de programa mais exterior. Eis por que nossa análise da informatização não estará fundada sobre uma definição da informática (LÉVY, 1993, p. 102).

Sendo assim, Lévy (1993) parte para uma noção muito presente na informática até os dias atuais a qual ele defende que é uma tendência e que consegue ter o impacto de atingir as técnicas de comunicação e processamento de informações: a digitalização. Nessa perspectiva, Lévy (1993, p. 102-103) discute que:

Compomos com bits as imagens, textos, sons, agenciamentos nos quais imbricamos nosso pensamento ou nossos sentidos. O suporte da informação torna-se infinitamente leve, móvel, maleável, inquebrável. O digital é uma matéria, se quisermos, mas uma matéria pronta a suportar todas as metamorfoses, todos os revestimentos, todas as deformações. É como se o fluido numérico fosse composto por uma infinidade de pequenas membranas vibrantes, cada bit sendo uma interface, capaz de mudar o estado de um circuito, de passar do sim ao não de acordo com as circunstâncias.

Considerando que Lévy (1993) elaborou e formalizou esse pensamento acerca

¹⁵ Trago o termo “registro” como uma transformação radical dos dispositivos de comunicação das pessoas de cultura escrita (ou letradas), que é justamente a impressão, de acordo com Lévy (1993).

da informática para a época da década de 90 do século passado, interpreto essas afirmações como algo visionário, tendo em vista que hoje em dia tem-se essa característica digital com mais ênfase e maior frequência do que quando o livro foi escrito e publicado. De toda forma, concordo com os dizeres de Lévy (1993) quando o filósofo comenta que a digitalização é uma matéria resistente a quaisquer transformações que podem ocorrer socialmente, como foi visto anteriormente nos percursos históricos da tecnologia. Desde uma bomba atômica às Calculadoras Gráficas, a digitalização mostra essa capacidade de ser maleável e exequível com um determinado propósito.

Em ambos os exemplos que trouxe para fazer uma analogia aos ideais que Lévy (1993) defende, está contida uma particularidade imbricada da digitalização (ou informatizacionalização): o conhecimento por simulação. A rede computadorizada fornece um esquema de simulação para que a bomba atômica tenha a trajetória que o seu usuário deseja, até onde se tem registros históricos desse feito, conforme pontuado anteriormente nos percursos históricos, assim como a Calculadora Gráfica que, com seus dispositivos integrados, podem fornecer uma simulação de algo que se deseja analisar visualmente, pois, segundo Lévy (1993, p. 121, grifos do autor) “Um modelo digital não é *lido* ou *interpretado* como um texto clássico, ele geralmente é *explorado* de forma interativa”, o que faz com que a simulação digital, enquanto meio exploratório, contribua na descoberta de novos modelos bem como no estudo de fenômenos inacessíveis à experiência humana em primeiro momento.

A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário do programa uma espécie de intuição sobre as relações de causa e efeito presentes no modelo. Ele adquire um *conhecimento por simulação* do sistema modelado, que não se assemelha nem a um conhecimento teórico, nem a uma experiência prática, nem ao acúmulo de uma tradição oral (LÉVY, 1993, p. 122).

Isso demonstra que a interação humana com a informatização pode fomentar as propriedades de intuição de um determinado indivíduo diante de algo que esteja sendo colocado para investigação de modo que ele se torna o ator efetivo agindo diretamente naquele ambiente simulado, onde essa própria simulação se torna um módulo externo e suplementar ao fenômeno da imaginação (LÉVY, 1993).

Entretanto, para Lévy (1993), apenas a imaginação não é suficiente para desenvolver um movimento onde o indivíduo possa explorar modelos, por isso existe a simulação computadorizada que permite essa exploração de modos distintos, complexos e em maior número fomentando a união entre intuição e os recursos imagísticos que o

indivíduo esteja desempenhando naquele momento.

Assim, interpreto neste trabalho que os três tempos do espírito (LÉVY, 1993) coexistem e abrem diferentes possibilidades para a produção de conhecimentos. E essa coexistência sempre há de reverberar quando, para o filósofo, “A vida humana não é possível sem qualquer uma delas” (LÉVY, 1993, p. 128). Assim, ele admite que não há, também, como fazer uma dissociação entre os três estados do espírito, uma vez que, mesmo com o advento da simulação, as narrativas mitológicas e as teorias continuam até os dias atuais, o que mostra que uma tecnologia da inteligência resplandece na outra e assim mutuamente.

E pensando que as TD possuem também essa base teórica, sociocultural e filosófica (conforme pontuei anteriormente que refiro-me as TI como TD), defendo que, na tentativa de produzir conhecimento, é necessário que haja uma exploração de tal TD. É nessa concepção de pensamento que Borba e Villarreal (2005) trazem a teoria de Experimentação com Tecnologias, no livro “*Humans-with-media and Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*”, que também se trata de outro dos meus aportes teóricos principais.

Borba e Villarreal (2005) embasados na teoria de Tecnologias da Inteligência, de Lévy (1993) e na teorização de Reorganização do Pensamento (TIKHOMIROV, 1981) procuraram formalizar a ideia acerca do coletivo Seres-Humanos-Com-Mídias (S-H-C-M). É importante pontuar que não me aprofundarei na ideia do constructo, mas sim o utilizarei como base para explicar de onde surgiu a ideia de Experimentação com Tecnologias, que se trata de um dos meus referenciais teóricos principais, e o que ela vem a significar nas pesquisas que trabalham a exploração como método.

Para os autores, esse coletivo representa um pensamento acerca da interação do indivíduo com a tecnologia que ele esteja usufruindo, seja ela manifestada pela oralidade, pela escrita, pela informática ou até mesmo pela simulação. A interação entre seres humanos com seres não humanos recorre que “[...] o conhecimento é produzido junto com uma dada mídia ou tecnologia da inteligência” (BORBA, VILLARREAL, 2005, p. 23). Contudo, por mais que os autores estejam preocupados em enfatizar que as mídias estão sendo representadas também pela oralidade e pela escrita, Borba e Villarreal (2005) enfocam com mais evidência a relação do S-H-C-M com a Informática, pautados na visualização, visando uma possível Reorganização do Pensamento (TIKHOMIROV, 1981).

Os autores explicam que essa reorganização não está ligada ao fato de a informática, na visão de Tikhomirov (1981), desdobrar uma relação de substituição ou de complementação às atividades intelectuais, mas faz parte de uma conjuntura que reorganiza a cognição humana. Esse processo de reorganização do pensar (TIKHOMIROV, 1981) corrobora os excertos de Lévy (1993), como foi visto anteriormente, quando, para o filósofo, a escrita remodulou as formas da oralidade enquanto uma Tecnologia da Inteligência. E o mesmo vale para a Informática, que remodulou todos os seus antecedentes.

Assim, pensando que a tecnologia possibilita a reorganização do pensamento, Borba e Villarreal (2005), inserem o conceito de moldagem recíproca, onde os autores explicam que a mídia tem o poder de moldar as formas de agir e de pensar ao mesmo tempo em que o indivíduo pensante pode moldá-las, fazendo uma relação similar ao movimento de troca. Interpreto que essas noções puderam ser aproveitadas para adentrar na ideia de *experimentação*, onde o ser humano agiria diretamente na mídia de forma a buscar meios de compreender algum fenômeno pelos *feedbacks* fornecidos pela simulação (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Dessa forma, direcionando a análise dessas proposições para o cenário informatizadamente digital, para Borba e Villarreal (2005), *experimentalizar com tecnologias* equivale ao mesmo que explorar, investigar, procurar e buscar possíveis relações matemáticas diante de uma problemática utilizando, ou não, a visualização como suplemento. Os pesquisadores afirmam que fazer esse movimento de investigação com as TD não só contribui para testar hipóteses, mas também contribui no processo de produção de novas conjecturas e/ou uma nova forma de olhar para uma situação-problema. Realizar esse movimento de exploração também permite que, diante de uma problemática, sejam executados modos alternativos de testes e a possibilidade de múltiplas representações (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Normalmente, a intenção imbricada na Experimentação com Tecnologias está em construir um ambiente democrático onde o indivíduo, interagindo com a máquina, seja capaz de produzir conhecimento matemático, desde começar com o desejo e expectativa de desvendar meios para tentar solucionar uma situação-problema até formalizar conjecturas, repetir essas ações experimentais e proporcionar novas formas de encarar o desafio proposto e criar novos de maneira a evidenciar um estilo diferente de aprender Matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Borba e Villarreal (2005) discutem sobre as TD, uma vez que, sendo mídias

informáticas, a utilização de informações gráficas podem contribuir tanto quanto a algebrização na resolução de um determinado problema.

Uma abordagem visual no processo de pensamento matemático pode ser caracterizada pela:

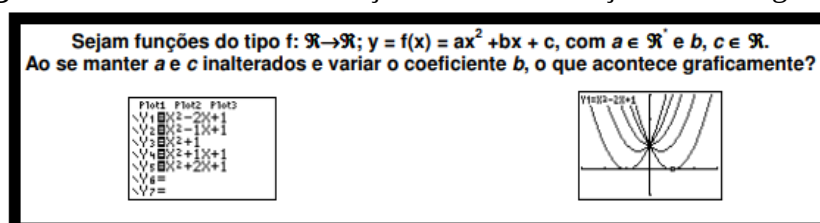
- Utilização de informação gráfica para resolver questões matemáticas que poderiam ser também abordadas algebricamente.
- Dificuldade em estabelecer interpretações algébricas das soluções gráficas.
- Não necessidade de recorrer primeiro à álgebra, quando as soluções gráficas são requisitadas.
- Facilidade na formulação de conjecturas e refutações ou dando explicações usando informação gráfica (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 93, tradução nossa).

Na subseção anterior, por exemplo, explicitiei obras que trabalharam as calculadoras não só em seu domínio algébrico e numérico, mas utilizaram da visualização gráfica para gerar conjecturas que, talvez, não fossem tão fáceis de serem formuladas sem o aspecto visual, ou seja, a investigação utilizando a percepção visual contribui no processo de teorização (caminho inverso do Ensino Tradicional) (BORBA; PENTEADO, 2003).

Discussões em torno da Experimentação com Tecnologias começaram bem antes do ano de publicação do livro de Borba e Villarreal (2005). O ato da experimentação já era algo que inquietava o Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), ao qual também faço parte.

Um exemplo disso pode ser encontrado em Scucuglia (2006) quando o autor conta a história de que, no ano de 2002, o GPIMEM elaborou um curso de extensão voltado para os alunos de graduação da Universidade Estadual Paulista “Julio de Mesquita Filho” (UNESP), *Campus* de Rio Claro (SP), de modo que a ideia desse curso era de explorar as diversas formas de produzir conhecimento matemático utilizando as Calculadoras Gráficas TI-83 onde o autor pôde atuar como monitor. No decorrer do curso, Scucuglia (2006) evidenciou que no momento de exploração das representações múltiplas de funções com a calculadora uma inquietação surgiu: o processo de demonstração. Diante da visualização gráfica, os estudantes desse curso discutiam sobre a necessidade de uma prova rigorosa algébrica diante daquilo que se observava, conforme a figura 04 explicita.

Figura 04: Caso da Demonstração com Visualização de Scucuglia (2006)



Fonte: Adaptado de Scucuglia (2006)

Conforme pode ser visto na Figura 04 os estudantes realizaram um movimento de experimentação fazendo inúmeros testes de funções de modo que o termo independente “c” tivesse o valor 1 como fixo. Assim, Scucuglia (2006) comenta que quando fixava esse valor, os estudantes desenvolviam algumas conjecturas:

[...] pode-se conjecturar, por exemplo, que a curva determinada pelos vértices das parábolas obtidas também é uma parábola. *E qual seria a equação desta parábola?* Notei que alguns estudantes, ao invés de elaborarem inicialmente uma estruturação algébrica, procuraram determinar tal equação valendo-se de informações gráficas, evidenciando a visualização e as múltiplas representações. Foram elaboradas conjecturas como: “a equação $y = ax^2 + bx + c$, deve ter o coeficiente a negativo, pois a parábola possui concavidade voltada para baixo”; “o coeficiente c deve ser igual a 1, pois é onde a curva intercepta o eixo- y ”; “as raízes são +1 e -1, logo a deve ser igual a -1”. Surgiu então a conjectura: $y = -x^2 + 1$ (SCUCUGLIA, 2006, p. 8, grifos do autor).

Através das diversas explorações gráficas, dos testes simultâneos, do trabalho colaborativo, os estudantes conseguiram chegar a uma função que satisfizesse as condições da inquietação trazida pelo autor. Essa experimentação pôde ter dois tipos de validação: a algébrica e a gráfica. Quando os estudantes utilizaram os gráficos para chegar a um resultado favorável ao que se investigava, fizeram uso da demonstração algébrica, após a descoberta da função, com base nas fórmulas do vértice da parábola.

Situações essas, conforme descrito por Villarreal (1999) e Scucuglia (2006), por exemplo, fomentam a ideia de que a Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) é uma alternativa interessante, exequível e dinâmica frente à produção de conhecimento matemático, o que corrobora as ideias de S-H-C-M de que o conhecimento é produzido interagindo com uma determinada mídia e essa interação de atores pode abrir ramificação para novas formas de pensamento bem como uma forma diferente de executar os preceitos matemáticos por meio da abstração (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Por mais que Borba e Villarreal (2005) se dediquem nesse pilar da *visualização*, é importante reiterar que eles explicitam fortemente o fato de que o próprio ato de *experimentação* já é uma forma de utilizar as abstrações e os recursos que são fornecidos para a investigação para pensar “um passo a frente”, onde não existem respostas corretas ou incorretas e não há um modelo único a ser seguido para desenvolver uma determinada questão.

Uma abordagem experimental em educação matemática implica:

- No uso de procedimentos de tentativas e processos educativos que

possibilitem a geração de conjecturas;

- Na descoberta de resultados matemáticos desconhecidos previamente à experimentação;
- Na possibilidade de testar modos alternativos de coletar resultados;
- Na chance de proporcionar novos experimentos;
- Em um modo diferente de aprender matemática;
- Na possibilidade de testar conjecturas usando um grande número de exemplos e a chance de repetir os experimentos. (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 75, tradução nossa).

Corroborando tais ideais, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) trazem em seu livro *“Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática Sala de aula e internet em movimento”* que a Experimentação com Tecnologias promove discussões e pensamentos diversificados acerca da exploração de uma determinada problemática e as ações diante desse movimento de reflexão “admitem diferentes soluções e abrem caminhos para o surgimento de novos problemas” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 57).

Dessa forma, os autores enfatizam que há a possibilidade de executar uma aproximação entre a Experimentação com Tecnologias e a Investigação Matemática principalmente pelo fato de a junção de ambos os atributos favorecerem o desenvolvimento do pensamento heurístico que, segundo Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) parafraseando Polya (1957), se trata de um raciocínio que não é determinístico, ou seja, não considerado final e rigoroso, mas é uma característica de pensar nas formas de descobrir a solução daquele problema específico.

Essa humanização no processo de conceber o raciocínio como não-determinístico é o que faz da Experimentação ter suas características similares aos da Investigação Matemática (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020). Os autores, baseados em Borba e Villarreal (2005) expõem algumas particularidades acerca das características que podem ser evidenciadas ao se desenvolver uma atividade investigativa com base na Experimentação com Tecnologias, sendo:

- Criação e simulação de modelos matemáticos;
- geração de conjecturas matemáticas;
- exploração de diversificadas formas de resoluções;
- manipulação dinâmica de objetos construídos;
- realização de testes de conjecturas usando um grande número de exemplos, modificando representações de objetos, simulando componentes de construções etc.;
- convencimento sobre a veracidade de conjecturas;
- elaboração de novos tipos de problemas e construções matemáticas;
- criação e conexão entre diferentes (e múltiplos) tipos de re-presentações de objetos matemáticos;
- exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos;
- incentivo à combinação de raciocínios intuitivo, indutivo ou abduutivo, que

podem contribuir ao desenvolvimento do raciocínio dedutivo;

- criação de atividades matemáticas “abertas controladas”, ou seja, com direcionalidade ao seu objetivo;
- ensinar e aprender Matemática de forma alternativa;
- compreensão de conceitos;
- conhecimento de novas dinâmicas, formas de conectividade e relações de poder em sala de aula;
- envolvimento com um novo tipo de linguagem (informática) na comunicação matemática, além da escrita;
- criação de diferentes tipos de símbolos e notações matemáticas;
- aprofundamento em variados níveis de rigor matemático;
- identificação de incoerências conceituais e/ou aprimoramento do enunciado. (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 57-58).

Em resumo, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) vão considerar, baseando-se em Borba e Villarreal (2005), que ao fazer um movimento de experimentação é importante que as ações desdobradas visem o desenvolvimento do pensamento heurístico com as tecnologias que serão ofertadas. Assim, buscar hipóteses, conjecturas, reformulação do pensamento, análises adicionais e desenvolvimento de uma comunicação matemática através da álgebra aliada à visualização gráfica bem como o aprofundamento nos conceitos e aplicações matemáticas são propostas principais para nortear um caminho que está sob a luz da Experimentação com Tecnologias.

Se tratando acerca do constructo S-H-C-M, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) corroboram as afirmações de Borba e Villarreal (2005) quando os autores expõem algumas ideias com relação a esse coletivo:

- O surgimento de uma nova tecnologia permite que novos tipos de problemas matemáticos sejam explorados;
- um problema baseado no uso de lápis e papel, por exemplo, pode vir a “perder seu sentido”, tornar-se trivial ou obsoleto, ao ser resolvido com um software;
- devemos evitar a domesticação de uma nova tecnologia. Ou seja, não devemos deixar que ela seja utilizada da mesma forma e ancorada nas mesmas práticas que eram condicionadas por outras mídias;
- devemos evitar o uso domesticado de novas tecnologias, buscando criar novos problemas e atividades investigativas;
- a Matemática baseada no uso de lápis e papel é qualitativamente diferente da Matemática baseada no uso de softwares;
- há uma moldagem recíproca entre pensamento e tecnologia;
- a produção de conhecimento matemático é condicionada pela tecnologia utilizada;
- as tecnologias não são neutras ao pensamento matemático;
- as tecnologias transformam a Matemática;
- as tecnologias não são figurantes nos cenários cognitivos. Humanos e tecnologias são protagonistas da ecologia cognitiva;
- os coletivos pensantes são formados por amálgamas do tipo humanos-tecnologias, humanos-com-mídias, seres-humanos-com-tecnologias ou, como temos utilizado, seres-humanos-com-mídias;
- ao propor, atuar ou investigar um cenário pedagógico, enfocamos o pensar-com-tecnologias (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, p. 47-48).

Assim como Borba e Villarreal (2005) trarão o ato da experimentação similar ao

ato de exploração, Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020), também consideram a exploração como um ato inerente do experimentar com tecnologias. Também, os autores mencionam que a interação do ser humano com a máquina pode provocar novos meios de desenvolver o raciocínio bem como novas formas de conceber a Matemática, de modo que a tecnologia pode se tornar um meio partícipe em quaisquer processos de investigação matemática. Outro detalhe ressonante é sobre o ato de validação domesticada. Ambos os referenciais (BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) defendem que o uso da tecnologia não pode ser tido como um ato de algoritmização, ou seja, não é ideal que seu uso se transforme numa domesticação, já que inserir a informatização como um meio exploratório objetiva uma exploração, uma investigação, uma busca, que vá além das barreiras tradicionais de ensino (BORBA; PENTEADO, 2010).

Outra característica desse pensar-com-tecnologias (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020), com base nas teorias de Borba e Villarreal (2005), está na produção de conhecimentos por intermédio da visualização gráfica: a moldagem recíproca. Ambos os referenciais são complementares e convergentes em suas ideias principais, pois na moldagem recíproca a tecnologia molda a forma com que o indivíduo pense e elabore suas conjecturas visando o desenvolvimento do pensamento heurístico enquanto o indivíduo molda a tecnologia que ele estiver usufruindo de maneiras distintas, como é o caso da programação, por exemplo.

Ao longo dos 30 anos de existência do GPIMEM, diversas obras se preocuparam em evidenciar estes aspectos da teorização de Borba e Villarreal (2005) acerca da Experimentação com Tecnologias. Consultei o site¹⁶ do GPIMEM e verifiquei as teses e dissertações que utilizavam-a como referencial teórico e/ou como uma forma de analisar e desenvolver os dados de campo. São diversas obras que trabalham essa abordagem teórica; sendo assim, trago como exemplo as seguintes obras¹⁷ desenvolvidas neste grupo de pesquisa: a) Soares (2012); b) Mazzi (2014); c) Zampieri (2018); e d) Chinelatto (2019).

Soares (2012) buscou identificar os possíveis papéis que um *software* pode

¹⁶ Como utilizarei apenas alguns exemplos de obras desenvolvidas pelo grupo, caso o leitor tenha interesse em verificar outras obras desenvolvidas que seguem a abordagem mencionada, está convidado a acessar o site do GPIMEM: <<https://igce.rc.unesp.br/#!/pesquisa/gpimem---pesq-em-informatica-outras-midias-e-educacao-matematica/gpimem/>>

¹⁷ É importante deixar claro que a intenção de trazer esses exemplos não está em detalhar a obra acadêmica por completo, mas sim realizar uma síntese para que o leitor entenda como foi realizado o movimento de Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) em algumas obras do GPIMEM que seguem esse aporte teórico.

desenvolver diante de uma abordagem pedagógica baseada em uma Análise de Modelos. Essa objetivação estava em consonância com o constructo S-H-C-M além de evidenciar aspectos da Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005). A pesquisadora fez seu estudo de campo com dez duplas do curso de Biologia da UNESP *Campus* de Rio Claro (SP), desenvolvendo Experimentos de Ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000) com a temática da disciplina que os estudantes estavam cursando (Matemática Aplicada) que tomou forma com a investigação de funções polinomiais, envolvendo também noções de limites, derivadas e integrais.

A pesquisadora faz uso da Experimentação com Tecnologias, mas chama-a de abordagem experimental, o que não perde o sentido tampouco a ideia do conceito. Pautando-se nessa abordagem, Soares (2012) conduziu uma investigação acerca da transmissão da malária onde o modelo matemático que ela utilizou no cenário de campo foi o modelo de RossMacdonald¹⁸. A pesquisadora investigou os *softwares* *Modellus* e *Camtasia* em sua análise de dados. O primeiro aplicativo estava relacionado com o modelo criado pelos estudantes e o segundo foi utilizado para analisar os vídeos gerados dessa aplicação.

Soares (2012), ao analisar seus dados qualitativamente, procura evidenciar os momentos em que os estudantes exploravam os *softwares* e suas narrativas deram estrutura para os elementos descritivos que se deram em complemento com a análise da pesquisadora. Ao longo de dez atividades aplicadas aos estudantes, Soares (2012) apresentou vídeos sobre a malária, organizou debates em grupos para que os estudantes pudessem formalizar seus pensamentos e traçar meios de investigação, desenvolveu relações correlatas à Matemática, como taxa de variação em forma de derivadas, tudo envolvendo o *sotware* *Modellus*.

Assim, através dessa abordagem experimental utilizando TD a pesquisadora constatou que foi possível identificar três papéis que o *software* pôde assumir no momento de experimentação pelos estudantes de modo que a tecnologia conseguiu fornecer resultados plausíveis diante do fenômeno biológico investigado; contribuiu para a compreensão de conceitos matemáticos, em especial o Cálculo Diferencial; e também mediou relações entre Matemática e Biologia de forma sintônica.

A pesquisa de Mazzi (2014) buscou evidenciar a Experimentação-com-

¹⁸ Por se tratar de uma síntese da pesquisa desenvolvida por Soares (2012), não vou me ater à explicação desse modelo. No entanto, esse modelo, e demais explicações que o envolvam, pode ser encontrado na tese de Soares (2012) em <https://igce.rc.unesp.br/Home/Pesquisa58/gpimem-pesqeminformaticaoutrasmidiaseeducaomatematica/soares_ds_rcla.pdf>.

GeoGebra no objetivo de identificar as possibilidades e limitações que o uso do *software* GeoGebra desenvolvia ao abordar experimentalmente as sequências convergentes, sequências limitadas, sequências monótonas e o Teorema do Valor Intermediário. O pesquisador enfatiza que sua pesquisa está assentada no constructo S-H-C-M e acredita que o conhecimento é sempre coletivo de modo que corrobora que o conhecimento surge através da interação do humano com uma mídia, satisfazendo a teoria Humanos-com-Mídias (BORBA; VILLARREAL, 2005). A partir dessa ideia, segundo Mazzi (2014), surgem as relações de Experimentação com Tecnologias, que foi um de seus aportes teóricos principais, inclusive, para desenvolver um novo constructo: os Alunos-com-GeoGebra.

Assim como Soares (2012), Mazzi (2014) também se dedicou em desenvolver Experimentos de Ensino (STEFFE; THOMPSON, 2000), porém com duas duplas de estudantes que estavam regularmente matriculados no curso de Matemática da UNESP Campus de Rio Claro (SP) e contou com o auxílio do *software* *Blueberry* nas gravações dos encontros. A intenção do pesquisador estava em procurar respostas plausíveis diante das possibilidades que o *software* GeoGebra poderia fornecer ao explorar alguns conceitos da Análise Real. Dessa forma, o pesquisador utiliza várias ferramentas para explicar as possíveis sequências que iam surgindo, principalmente com a plotagem de pontos formando um tipo de sequência com o controle deslizante.

Durante os experimentos, algumas atitudes foram tomadas pelo pesquisador para que ele instigasse as estudantes a pensarem proposições diante da visualização, como: fixar um determinado n_0 e verificar o comportamento da sequência; fixar um determinado ε (*épsilon*) para verificar se a desigualdade se mantinha ou se representaria outro tipo de sequência; e até utilizar outras funções para verificar se existe a convergência mediante a visualização no próprio GeoGebra, o que fomenta o aspecto experimental e o pensar-com-tecnologias (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020). Ainda, com essa experimentação no GeoGebra as estudantes puderam verificar se as relações entre sequência monótona (limitada ou não) e convergência eram equivalentes, o que gerou diversas discussões em torno das sequências que divergem ou convergem diante desse monotonismo (MAZZI, 2014).

Ao investigarem sobre o Teorema do Valor Intermediário, as estudantes utilizam o GeoGebra para formalizar seus pensamentos diante daquilo que estava sendo visualizado graficamente. Segundo o pesquisador, essas relações se mostraram quando as estudantes inseriam uma função no *software* para realizar a investigação deste

teorema; enquanto uma estudante emitia determinadas ideias, outra estudante procurava meios de verificar essas nuances matemáticas de acordo com o que se mostrava na tela do computador em movimento colaborativo e participativo (MAZZI, 2014).

Sendo assim, e fazendo uso da Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005), Mazzi (2014) irá constatar que o *software* GeoGebra contribuiu para a formação de conjecturas incluindo, através de testes, o processo de validação ou refutação dessas ideias observadas através da visualização gráfica. Ainda, complementa dizendo que a Experimentação com Tecnologias foi de suma importância para que as estudantes pudessem se convencer e compreender determinadas ideias matemáticas pertencentes à Análise Real promovendo, inclusive, uma mudança notória na comunicação dessas estudantes.

A pesquisa de Zampieri (2018) buscou, através da exploração do *software* GeoGebra, investigar os saberes constituídos e mobilizados em duas ações colaborativas distintas de formação continuada de professores que lecionavam a disciplina de Matemática. Ambas as ações foram distintas, pois uma foi aplicada no Brasil, na cidade de Bauru (SP) e outra foi aplicada em Portugal, na cidade de Coimbra, de modo que a distinção se trata apenas dos participantes da pesquisa, pois as propostas de investigação são equivalentes entre si. Nessa pesquisa participaram dezenove professores do Brasil e nove professores de Portugal.

A pesquisadora utiliza alguns referenciais teóricos, porém dois deles deram maior destaque à sua pesquisa: Lévy (1993) e Borba e Villarreal (2005). Zampieri (2018) debruça nos excertos da Tecnologia da Inteligência (LÉVY, 1993) e corrobora tais ideais em consonância com os conceitos trazidos da Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Ambos os referenciais, por conversarem entre si, deram corpo ao trabalho de campo e, conseqüentemente, à análise dos dados realizados pela pesquisadora.

Zampieri (2018) explicita, em sua análise de dados, a abordagem de Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) com mais evidência. A pesquisadora mostra articulações com o GeoGebra para fazer algumas atividades, que, generalizando em blocos, têm-se: (i) Construção de figuras planas e suas propriedades; (ii) Geometria Espacial e suas propriedades; (iii) Estudo e Construção de Funções Polinomiais e suas propriedades; e (v) Sistemas Lineares.

Para cada uma dessas investigações, Zampieri (2018) utiliza a Experimentação com Tecnologias de forma, também, a deixar a questão aberta para que não haja um

determinismo nas respostas. Percebo que a ideia da pesquisadora, além de fornecer esses momentos de experimentação, de interação entre sujeito e *software*, é fazer com que os próprios professores participantes levassem algo parecido para suas salas de aula, na intenção de difundir essa relação experimental.

Em um determinado momento de sua pesquisa, Zampieri (2018) explicita algumas adaptações feitas pelos participantes nas atividades experimentais com o uso do *software* GeoGebra, por exemplo o Estudo de Frações e a Condição de existência de Triângulos. Sobre o estudo de frações e a condição de existência de triângulos, os professores complementaram as respectivas atividades propostas, utilizando outras funcionalidades do GeoGebra, de modo a atender os contextos em que estavam atuando. Além disso, também evidenciou aspectos do que fora comentado acima acerca de difundir essas ideias de forma que adentre nas salas de aula, como é o caso de alguns professores levando essas ideias experimentais para suas salas de aula ou elaborando propostas com base no que foi visto durante os encontros de formação continuada (ZAMPIERI, 2018).

A pesquisadora destaca as ações colaborativas que aconteceram entre os professores ao elaborarem atividades investigativas e experimentais com o uso do *software* GeoGebra visando suplementar aquilo que estava preconizado nos currículos tanto do Estado de São Paulo quanto nos documentos curriculares de Coimbra. Ademais, Zampieri (2018) constata que essa investigação possibilitou não apenas a manifestação de diversas linhas de pensamento, mas também contribuiu para que houvesse uma constituição ou transformação de saberes nestes professores e, diante do aspecto experimental que a pesquisa desenvolveu, os participantes puderam aprender distintas funcionalidades do *software*, relações matemáticas que a priori talvez não tivessem sido aprofundadas e, também, permitiu a produção e aplicação (em alguns casos) de novas atividades investigativas e experimentais com o uso do GeoGebra.

A pesquisa de Chinelatto (2019) também estava pautada na formação continuada de professores com o uso do *software* GeoGebra de modo que investigou, qualitativamente, as perspectivas que esses professores tinham diante dessa formação com tecnologias e quando elaboravam atividades matemáticas baseadas no material didático do Estado de São Paulo com a contribuição do *software*. Assim como Zampieri (2018), o pesquisador utiliza a Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) como um de seus referenciais teóricos e defende, em seu trabalho, baseado na noção do constructo S-H-C-M, a relação Experimentação-com-

GeoGebra e explicita que não considera o *software* como uma simples ferramenta, mas como um ator importante na produção de conhecimentos matemáticos (CHINELATTO, 2019).

O pesquisador comenta que sua pesquisa pôde ser desenvolvida através da ação formativa que aconteceu na Diretoria de Ensino de Guaratinguetá (SP) e que os trinta e quatro professores que participaram desse movimento utilizaram os Cadernos do Aluno e do Professor da Rede Estadual para utilizar as questões contidas neles e aplicá-las no *software* fazendo suas próprias adaptações, reverberando o movimento de exploração e investigação (CHINELATTO, 2019). Além disso, os professores expuseram suas reflexões acerca do trabalho com TD diante da escolha das questões que utilizariam para explorá-las e adaptá-las.

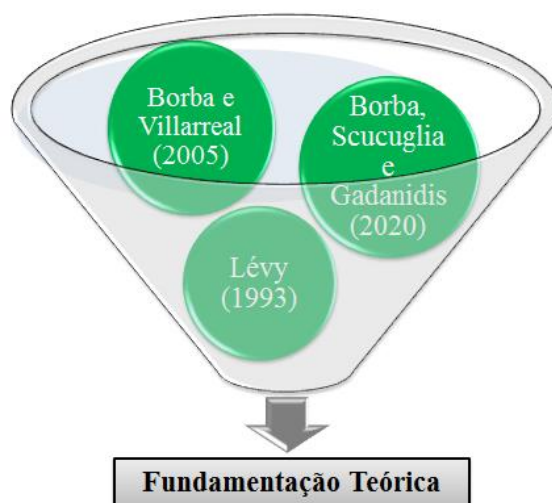
Chinelatto (2019) relata que os professores, individualmente, em duplas ou trios, escolheram os seguintes temas para realizar esse movimento de experimentação no *software*: (i) Funções; (ii) Homotetia; (iii) Geometria Espacial; (iv) Geometria Plana; (v) Números e Operações; e (vi) Grandezas Proporcionais. No momento de análise dos dados, o pesquisador enfatiza uma característica inerente à Experimentação com Tecnologias: a visualização gráfica. Essa característica, segundo Chinelatto (2019), foi de suma importância para o processo de conjecturação e criação de novas ideias exploratórias a partir da interação com o *software*.

Buscando compreender as perspectivas dos professores diante do curso de formação com TD, Chinelatto (2019) deixa explícito que nenhum professor teve uma reação negativa quanto à exploração de conceitos e aplicações matemáticas com o uso de uma TD, pois os *feedbacks* negativos estavam mais direcionados para a logística e organização do curso de um modo geral. O pesquisador mostra que a característica unânime do *feedback* positivo foi em relação à visualização, fator este que contribuiu na construção de novas ideias e numa forma exploratória e investigativa de ensinar e aprender Matemática. Assim, Chinelatto (2019) irá concluir que essa ação formativa envolvendo a experimentação-com-GeoGebra possibilitou a produção de conhecimentos matemáticos através dessa exploração dinâmica do objeto de estudo e, olhando para o contexto escolar em que os professores atuam, a produção atividades construindo novas abordagens para a sala de aula.

Neste momento é importante apontar que os três referenciais teóricos que utilizo nesta pesquisa (LÉVY, 1993; BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) dialogam entre si e são convergentes acerca da visão de

conhecimento. Lévy (1993) traz os três tempos do espírito e mostra as tecnologias da inteligência, teoria esta que é potencializada por Borba e Villarreal (2005) na formalização do S-H-CM e, posteriormente, à Experimentação com Tecnologias. Assim como Borba e Villarreal (2005), Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) também utilizam Lévy (1993) como base e aproveitam em grande parte os excertos de Borba e Villarreal (2005) principalmente acerca da Experimentação com Tecnologias e a relação de visualização gráfica pautada na simulação. A junção desses três referenciais teóricos estrutura a fundamentação teórica desta pesquisa, conforme figura 05 mostra, de modo que utilizo no decorrer desta pesquisa e do trabalho de campo os ideais empregados e explicitados pelos três referenciais, de modo a desenvolver tais experimentações, conforme será delineado na seção de análise dos dados (Seção 5).

Figura 05: Fundamentação Teórica da Pesquisa



Fonte: Autoria própria

Para concluir esta subseção, é importante frisar que utilizo tal fundamentação teórica (LÉVY, 1993; BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) para construir os delineamentos metodológicos desta pesquisa assim como serviu como lente teórica de análise dos dados, conforme será evidenciado na quinta seção desta dissertação. Espero que, até aqui, o leitor tenha compreendido em quais referências este relatório científico de mestrado se assenta e como adotarei e visualizarei a tecnologia durante o desenvolvimento do trabalho de campo. A seguir, na próxima seção, serão explicitados a metodologia de pesquisa e os procedimentos metodológicos que deram avanço e molde para as atividades de campo.

3. METODOLOGIA E PROCEDIMENTAÇÃO DA PESQUISA

Em primeira instância, é conveniente pontuar que

Os pesquisadores em Educação Matemática devem cuidar para explicitar sua interrogação (ou pergunta, ou problema), indicando o modo e a direção em que vão conduzir suas pesquisas (BICUDO, 1993, p. 20).

Tendo em vista que as ideias principais da pesquisa foram abordadas na introdução bem como os objetivos que a norteiam e a pergunta diretriz, faz-se necessário explicitar o que entendo e considero por Metodologia de Pesquisa. Assim, é conveniente implementar na visão deste trabalho o que se entende, e foi adotado, enquanto *pesquisa* e, posteriormente, explicar em que *lócus* ela está inserida.

3.1 O que é Pesquisa?

A priori, é interessante, para esclarecimentos do leitor, que sejam apresentadas as questões mais abrangentes para, *a posteriori*, relacionar com as questões específicas de pesquisa, que é o cunho, a vertente metodológica, em que ela está acoplada. Sendo assim, trago a noção de *pesquisa* que pode enriquecer a discussão que será desdobrada nesta subseção.

Nesta pesquisa procuro trazer o ato de pesquisar como um ato paradigmático. Lincoln e Guba (1985) trazem uma noção de que o paradigma é um conjunto de crenças, ideias, reflexões, que um pesquisador tem e assume acerca de um determinado fenômeno, uma determinada investigação. Garnica (2019) corrobora Lincoln e Guba (1985) quando para o autor:

Um método sempre traz, em si, uma noção de eficácia. [...] A eficácia, porém, será julgada segundo os pressupostos teóricos e vivências do pesquisador, e esse é o motivo principal de não se poder apartar uma metodologia de uma concepção de mundo e dos fundamentos teórico-filosóficos do pesquisador (GARNICA, 2019, p. 95).

Dessa forma, o ato de pesquisar caminha diretamente com o fato de que o pesquisador possui expectativas, questionamentos, críticas, reflexões e uma maneira de visualizar o mundo. Sendo assim, o paradigma se torna uma influência em uma investigação que o(a) pesquisador(a) assume de forma que as suas interrogações sejam postas em evidência consubstanciadas por essa ação.

Nesse aspecto do entrelaçamento entre o paradigma e a pesquisa, Bicudo (1993, p. 18) confirma os dizeres de Lincoln e Guba (1985) no que tange às configurações formadas pela ação diante da reflexão no ato de pesquisar.

Pesquisar configura-se como buscar compreensões e interpretações significativas do ponto de vista da interrogação formulada. Configura-se, também, como buscar explicações cada vez mais convincentes e claras sobre a pergunta feita. Essas configurações delineiam seus contornos conforme perspectivas assumidas pelo pesquisador: Buscar compreensões e interpretações? Responder a perguntas? Solucionar problemas? Entretanto, não há uma última resposta, uma solução definitiva, não há compreensão e interpretações plenamente desenvolvidas e que dão conta de todas as dimensões do fenômeno interrogado. Mas há sempre o "andar em torno... outra vez e outra ainda...".

Esse “andar em torno... outra vez e outra ainda” (BICUDO, 1993, p. 18) é o que faz da *pesquisa* um ato enredado de objetividade e subjetividade e, ainda mais, é o que faz dela uma busca pelo desconhecido que emerge através das compreensões e interpretações que se tem diante de uma inquietação do sujeito.

Pensando que o ato de pesquisar é essa busca por possíveis respostas e considerações que vão ao encontro de uma possível intervenção para aquilo que se questiona, entendo que a pesquisa é esse movimento reflexivo que tem como origem um paradigma sobre determinado fenômeno. Pensando assim, é importante que “o pesquisador persiga uma interrogação que faça sentido para ele e cujo significado é elaborado no contexto onde ela foi formulada” (BICUDO, 1993, p. 19). Dessa forma é possível pensar na pesquisa e traçar alguns pontos que favoreçam o desenvolvimento dela na esperança buscar compreensões àquilo que está sendo posto em evidência e discussão nesta dissertação: ***Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?***

Dialogando com os referenciais teóricos discutidos, entendo que a pesquisa nada mais é do que uma prática de busca ao que está sendo investigado e que, inclusive, se trata de um processo desenvolvido com reflexões e inquietações diante de uma problemática que tem um nexo na visão daquele determinado sujeito. Em outras palavras, visualizo a pesquisa como a passagem do mundo inteligível¹⁹ (território das ideias e das abstrações) para o mundo sensível (ambiente das ações/práticas), onde ocorre o desenvolvimento de atitudes objetivando responder o questionamento principal.

¹⁹ Trago a concepção de Mundo Inteligível e Mundo Sensível baseados na dialética de Platão, quando o filósofo constrói a Teoria das Ideias a partir da Alegoria da Caverna, onde o mundo inteligível é alcançado pela dialética ascendente (resultado da junção entre opinião e ciência) enquanto o mundo sensível é percebido pelos sentidos e onde ocorrem suas multiplicidades (ARANHA; MARTINS, 2013).

3.2 A natureza da pesquisa

Uma vez definido o que entendo por pesquisa se torna necessário identificar em qual *locus* esta pesquisa está alocada, isto é, o cunho metodológico ao qual ela está inserida. A natureza desta pesquisa prescreve atributos qualitativos já que os aspectos subjetivos são levados em consideração no desenvolvimento da pesquisa onde o foco principal não está em quantificar os dados e os resultados, mas olhar “através dos números” e atingir os pontos críticos, a exemplo de: comportamento, expressionismo e até formas de conduzir uma discussão e um determinado pensamento.

Com isso, a perspectiva qualitativa desta pesquisa compreende que as movimentações que acontecem numa investigação são essenciais para promover uma forma mais detalhada e profunda de analisar os dados produzidos e para conduzir uma discussão em torno de uma determinada temática; inclusive é a própria subjetividade que remonta a essência da natureza qualitativa presente em um estudo, uma pesquisa, uma ação. Garnica (2019, p. 96-97) infere que:

[...] o adjetivo “qualitativa” estará adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-la podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

Garnica (2019) corrobora uma teoria encontrada em Goldenberg (2004, p. 53) inferindo que “Não existindo regras precisas e passos a serem seguidos, o bom resultado da pesquisa depende da sensibilidade, intuição e experiência do pesquisador”. Além disso, “Não é possível formular regras precisas sobre as técnicas de pesquisa qualitativa porque cada entrevista ou observação é única: depende do tema, do pesquisador e de seus pesquisados” (GOLDENBERG, 2004, p. 57).

Para Goldenberg (2004) não é intenção da pesquisa qualitativa configurar meios para produzir generalizações a partir de leis estabelecidas. Isso vai ao encontro do reconhecimento da adjetivação “qualitativa” proposta por Garnica (2019), uma vez que os autores convergem na ideia de que esse cunho de pesquisa está sempre em movimento e depende diretamente dos paradigmas adotados pelo pesquisador. Assim, assumindo a metodologia qualitativa como articuladora das ações e reflexões (BICUDO, 1993), não existirá um modelo pronto e acabado de como conceber a

investigação tampouco procedimentos universais de obter um resultado, uma vez que se trabalha com seres humanos e eles estão sempre em transformação.

Em relação aos procedimentos metodológicos, a presente pesquisa propôs no trabalho de campo a realização de Experimentos de Ensino. Defino esse procedimento como uma forma de buscar possíveis explorações que podem ocorrer em um determinado ambiente de pesquisa diante das atividades matemáticas que os estudantes estarão desenvolvendo (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018). Por mais que haja determinadas adaptações que tomo durante a realização do Experimento de Ensino, concordo com Borba, Almeida e Gracias (2018, p. 46) quando discutem que

[...] o pesquisador deve estar constantemente procurando “ver” suas ações e as do estudante sob o ponto de vista do estudante, o que lhe permite compreender melhor as estratégias que o estudante utiliza.

Concordo também com Neves e Resende (2018, p. 2) quando os pesquisadores compreendem que o Experimento de Ensino “Consiste em um processo de intervenção para estudar as mudanças no desenvolvimento cognitivo dos alunos, por meio da participação ativa do pesquisador na experimentação”. Por mais que minha participação durante os encontros foi a mínima possível, visando contribuir com um ambiente onde a autonomia dos estudantes se sobressaia, acredito que a exploração dos recursos fornecidos durante os encontros puderam permitir esse desenvolvimento.

E, convergindo com as ideias postas acerca do Experimento de Ensino, Borba (2004, p. 7) defende que “Experimentos de ensino visam, prioritariamente, a permitir que compreendamos a forma como um estudante, ou pares de estudantes, lidam com tecnologias da informação e da comunicação (TIC)”. Assim, buscando evidências à pergunta central de pesquisa, que também sofreu alterações durante os experimentos, o estudante é o ponto central desse procedimento metodológico, de forma que suas vozes (BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018) se sobressaem e são importantes na identificação do processo de produção de conhecimentos através da exploração de um determinado conteúdo, conceito ou aplicação. Para Borba (2004, p. 10),

[...] é possível que o pesquisador valorize a voz do estudante de forma especial, trazendo-a para a pesquisa, tentando construir modelos que validem a Matemática do aluno (em contraposição a testes ou mesmos análises qualitativas que enfocam o erro). Neste sentido, é inegável que o experimento de ensino expressa de forma eloqüente ao menos um dos princípios da pesquisa qualitativa: fazer com que o humano apareça e não se esconda atrás de estatísticas. Dessa forma, apesar da complexidade deste tipo de pesquisa, é necessário ver que ela, da mesma forma que a pesquisa quantitativa também não é neutra.

Essa não-neutralidade do processo de fazer pesquisa qualitativa, principalmente trazendo para o contexto de Experimentos de Ensino, corrobora com Lincoln e Guba (1985) acerca da ação paradigmática. Um pesquisador não consegue se desvencilhar totalmente de seus paradigmas quando está no ato de realização do trabalho de campo, de modo que os anseios, as dúvidas, as expectativas, vão permear todo esse processo experimental. Como os Experimentos de Ensino estão preocupados com o processo e não com um resultado bruto (STEFFE; THOMPSON, 2000; BORBA; 2004; BORBA; ALMEIDA; GRACIAS, 2018; NEVES; RESENDE, 2018), entendo que olhar para as formas com que os estudantes exploram aquela determinada temática investigada, é o ponto-chave da realização e compreensão do que se trata realmente um Experimento de Ensino.

Entendo, então, que o fator “exploração” é essencial no desenvolvimento do trabalho de campo e é ele que estrutura o *corpus* da pesquisa (SCUCUGLIA, 2006), uma vez que a preocupação central está em observar os desdobramentos que ocorrem durante o percurso, sejam através de manifestações escritas, orais ou até mesmo comportamentais.

No âmbito prático da pesquisa, o Experimento de Ensino consiste em uma série de encontros onde os participantes do trabalho de campo da pesquisa se organizam em grupos durante um determinado período de tempo, sendo configurado pelo próprio pesquisador (COBB; STEFFE, 1983).

Normalmente, em seções de Experimento de Ensino, os participantes são divididos em duplas ou em trios, onde, conjuntamente, investigam uma determinada aplicação ou um conceito já estabelecido pelo pesquisador. O resultado dessas investigações (dados do cenário de campo) que ocorrem a cada encontro podem se desdobrar em novas formas de articular e compreender o conceito investigado bem como podem definir a forma com que serão conduzidos os próximos encontros ou as próximas temáticas, dependendo do que se almeja investigar.

Corroborando as ideias de Cobb e Steffe (1983), os pesquisadores Steffe e Thompson (2000) enfatizam a importância de alguns elementos para que o Experimento de Ensino seja, de fato, desenvolvido, sendo eles caracterizados nesta pesquisa como: (i) uma sequência de episódios; (ii) um ou mais participantes; (iii) um agente de ensino; e (iv) uma forma de gravar o que acontece durante a aplicação.

Outro fator de grande importância na realização de um Experimento de Ensino são as atividades pedagógicas (COBB; STEFFE, 1983; STEFFE; THOMPSON, 2000)

que foram aplicadas nos encontros a fim de potencializar a exploração do pensamento matemático. Durante esta dissertação, essas atividades pedagógicas serão denominadas de “propostas de ensino”, onde nelas contém questões de aplicação do Cálculo com o uso de TD de modo a provocar no participante o senso crítico de explorar um determinado conceito matemático com os recursos que lhe são fornecidos.

Pensando no porquê elas são importantes durante a investigação, Borba, Almeida e Gracias (2018, p. 48-49) enfatizam que:

[...] nesse tipo de pesquisa, atividades pedagógicas são propostas a estudantes de forma que o professor-pesquisador possa “ouvir” de forma detalhada a Matemática desenvolvida por estudantes e, a partir desse “ouvir”, elaborar modelos acerca do seu modo de pensar a respeito e lidar com certos conteúdos matemáticos. Tal abordagem metodológica tem sido considerada também em contextos mais específicos onde conteúdos matemáticos são abordados com o uso de tecnologias digitais.

A complementação trazida pelos autores acerca dessa especificidade contextual vai ao encontro dos detalhes metodológicos desta pesquisa, uma vez que as propostas de ensino aqui utilizadas possuem o objetivo de instigar a exploração dos conteúdos de CDI com o uso de TD. Nesse caso, as Tecnologias Digitais, compreendidas na citação acima, são interpretadas nesta pesquisa enquanto as calculadoras que, inclusive, são os recursos que os participantes da pesquisa tiveram para explorar os conceitos do Cálculo.

3.3 O Cenário de Investigação

Em primeira instância é de suma importância explicitar que o cenário de investigação ocorreu na Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), *Campus* de Rio Claro (SP), e contou com a participação de oito discentes regularmente matriculados no curso de graduação em Matemática da referida instituição.

O primeiro contato com esses discentes ocorreu através de uma parceria feita com uma professora de Cálculo Diferencial e Integral I (CDI-I) da instituição mencionada, onde tive a oportunidade de conhecer a turma e apresentar o projeto de pesquisa; dialogar com todos os discentes e ouvir sobre suas percepções do Cálculo como um todo; e solicitar, aos interessados, a responderem um *Google Forms* que serviu como instrumento de seleção para o Experimento de Ensino. Acerca dessa seleção dos participantes, evidenciarei na próxima subseção.

As propostas de ensino²⁰ em adição às calculadoras científicas e gráficas foram

²⁰ As propostas de ensino estão nos apêndices.

os meios principais para desenvolver os encontros do Experimento de Ensino, conforme foi compreendido na subseção anterior, de modo que os participantes não tiveram nenhum gasto compreendendo a impressão do material e os equipamentos, conforme descrito no Termo de Consentimento Livre e Esclarecido²¹ (TCLE), aprovado pelo Comitê de Ética²² e assinado pelos participantes da pesquisa. As calculadoras que foram utilizadas para os encontros do Experimento de Ensino foram: Casio fx-991LAX e Casio fx-CG50.

Figura 06: Calculadora Científica fx-991LAX



Fonte: CASIO LTDA

Figura 07: Calculadora Gráfica fx-CG50



Fonte: CASIO LTDA

As calculadoras evidenciadas nas figuras 06 e 07 possuem algumas funcionalidades que podem facilitar esse processo de explorar os conceitos de Cálculo. Dentre as funcionalidades comuns de toda calculadora (as operações básicas), a calculadora científica exibida na figura 06 dispõe de derivadas (mas não de forma algébrica) e integrações definidas, procedimentos de radiciação e exponenciação, logaritmos, relações trigonométricas, matrizes e determinantes, planilha, conjunto

²¹ O TCLE se encontra no apêndice F.

²² Número do processo do Comitê de Ética: 5.660.410

complexo, vetores, operações com uma variável real, estatísticas e suas propriedades, sistemas de equações, inequações, funções e o Ambiente Classpad²³. A calculadora gráfica, na figura 07, dispõe das mesmas funcionalidades da científica, porém possui uma configuração mais sofisticada em relação aos seus gráficos, podendo plotar gráficos simultâneos para analisá-los, incluindo gráficos em 3D. Também possui um *setup* para programação em linguagem phyton, geometria, sistema de finanças, probabilidade, conversão de unidades e um *setup* para calcular integrais indefinidas e as derivações que não precisam delimitar um ponto de substituição para x , que é o comando Khicas50, entretanto ele não está na interface da calculadora, então é necessário baixar o programa.

Ambas as calculadoras foram doadas ao pesquisador pela Casio Comércio de Produtos Eletrônicos LTDA (CASIO), fruto do projeto temático ao qual esta pesquisa de mestrado está vinculada. A ideia a priori é que, tendo esses dois dispositivos a serviço do Experimento de Ensino, os participantes da pesquisa pudessem ter mais recursos para explorar os conceitos que foram solicitados nas propostas de ensino, envolvendo as questões concernentes ao Cálculo.

3.4 Seleção dos Participantes

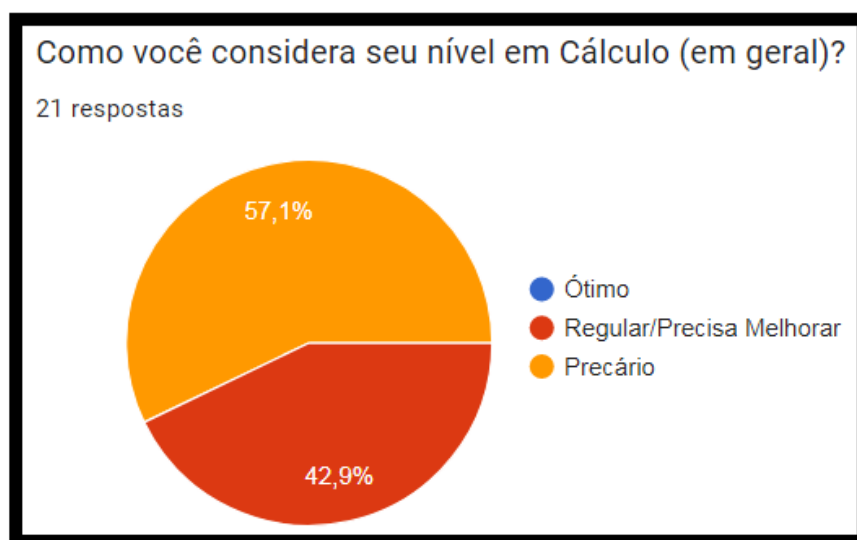
Como dito anteriormente, os participantes desta pesquisa são alunos regulares do curso de graduação em Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), *Campus* de Rio Claro (SP). Por conta da logística, considerando as atividades obrigatórias do PPGEM (a exemplo de reuniões com o grupo de pesquisa e jornadas acadêmicas e seminários de matemática e educação matemática) ao qual sou discente regular de mestrado, houve uma restrição acerca da quantidade de participantes, discriminada por mim nos documentos do Comitê de Ética, de oito estudantes.

Após o convite aos alunos, alguns deles divulgaram o experimento para os anos seguintes, tendo em vista que a turma ao qual foi apresentada a pesquisa se tratava do 1º ano da graduação em Matemática. Ainda, após a apresentação e os detalhes de forma mais geral, os alunos que se interessaram em participar da pesquisa de campo assinaram um formulário eletrônico que serviu como uma “ficha de inscrição”, no intuito de não apenas selecionar participantes, mas identificar como eles consideravam os seus

²³Um ambiente gráfico virtual que pode ser acessado através do QR Code da Calculadora Científica fx-991LAX ou através do link do ambiente: <https://classpad.net/note/#/tools/math>

“níveis²⁴” pessoais referentes ao Cálculo. Veja a seguir:

Figura 08: Quantidade de Inscrições



Fonte: Dados da Pesquisa

O gráfico mostra que de vinte e um (21) inscritos, doze (12) estudantes, representando a maioria, selecionaram o nível de precariedade em Cálculo. Os outros nove (9) alunos autodeclararam que seus respectivos níveis em Cálculo são regulares ou necessitam de melhorias.

Como havia a limitação supracitada, era de suma importância que houvesse um critério de seleção. Essa primeira análise foi crucial para essa etapa, pois era de maior relevância para a pesquisa trazer aqueles estudantes que tinham o “nível precário” em Cálculo, de modo que desenvolvessem e explorassem esses conceitos no Experimento de Ensino e ultrapassassem esse “nível” que eles autodeclararam, como uma espécie de autoavaliação.

Sendo assim, os nove alunos, correspondendo aos 42,9%, foram retirados da etapa de seleção, de modo que apenas os que selecionaram “nível precário” fossem colocados na seleção. Durante a análise dos doze participantes restantes, dois participantes desistiram, pois estariam se ocupando com outras atividades da graduação. Sendo assim, na etapa final de análise para selecionar os oito integrantes, sobraram dez inscritos.

²⁴O termo “nível” foi entendido tanto nesse trabalho quanto na etapa de seleção como uma forma de autodeclaração, ou seja, um termo para que os estudantes (graduandos em Matemática) pudessem relacionar com dificuldades de natureza conceitual ou de aplicação do Cálculo em si.

O segundo critério para selecionar os participantes para o Experimento de Ensino, foi através da ordem de inscrição. Sendo assim, os oito primeiros inscritos foram selecionados. Os outros dois participantes foram notificados que, caso houvesse desistência de algum participante, o próximo colocado integraria a equipe. Como não houve desistências durante o período de realização dos encontros do Experimento de Ensino, a pesquisa se desdobrou com os oito estudantes compreendendo as duas etapas de seleção.

Para fins de organização, foi criado um grupo no app *WhatsApp* para aparelhar a configuração dos encontros com os estudantes de modo que pudessem escolher o dia que poderiam dispor para participar dos encontros. Quando todos os participantes estavam inseridos, foi solicitado para que eles escolhessem suas duplas, já que estavam em número par.

Para eles [os participantes], na intenção de facilitar a rotina de cada um e o dinamismo dos encontros, seria deveras interessante que cada dupla escolhesse um dia na semana, com um horário específico a ser estipulado pelo pesquisador. Sendo assim, com a concordância geral, foi estipulado o período de 2h, em média, para desenvolver os Experimentos, de modo que cada dupla ficou com um dia específico da semana.

Após as duplas dividirem-se, escolheram um horário específico para participar da investigação e, além disso, deliberaram entre si para escolher um nome que representasse tal equipe, de modo que ficaram configurados da forma como se mostra no quadro 02. Ênfase que a intenção de escolher um nome para a equipe estava em propiciar uma forma lúdica de tratamento dos participantes durante os encontros.

Quadro 02: Configuração das equipes participantes

Nome escolhido para representar a Equipe	Dia da Semana escolhido
Equipe “C”	Segunda-Feira
Equipe “TRANSfinito”	Terça-Feira
Equipe “Kaju”	Quarta-Feira
Equipe “As Capitalistas”	Quinta-Feira

Fonte: Dados da Pesquisa

O nome das equipes foi formado das seguintes formas: a) Equipe “C”, foi composta por dois estudantes cujas iniciais de seus respectivos nomes começavam com

a letra C; b) Equipe “TRANSfinito”, continha dois estudantes cujas identidades de gênero são a transsexualidade, daí pensaram em se denominarem TRANSversal, mas durante os encontros trocaram para TRANSfinito; c) Equipe “Kaju”, possuía dois estudantes onde um estudante tinha o nome começando em “Ka” e a outra participante tinha um nome composto, de modo que seu segundo nome começava com “Ju”; d) Equipe “As Capitalistas”, foi organizada por duas estudantes que, no início dos encontros, revelaram que se houvesse alguma atividade relacionando valores, de cunho monetário, elas colocariam preços exorbitantes, daí surgiu tal termo que representou a equipe.

Vale salientar que todos os encontros ocorreram no Laboratório de Ensino em Matemática (LEM), no Departamento de Matemática (DM) da UNESP *Campus* de Rio Claro (SP), onde os estudantes tiveram acesso às calculadoras científicas e gráficas e que, inclusive, já era um ambiente conhecido por todos os participantes.

Esclareço que, para preservar a identidade dos participantes, serão utilizadas letras maiúsculas do alfabeto para representar cada membro de cada equipe, sem repetições. Sendo assim, durante a descrição dos dados, que será apresentada na seção seguinte, os participantes serão identificados da seguinte forma:

- Equipe “C”: Estudantes **A** e **B**;
- Equipe “TRANSfinito: Estudantes **C** e **D**;
- Equipe “Kaju”: Estudantes **E** e **F**;
- Equipe “As Capitalistas”: Estudantes **G** e **H**.

3.5 Os Recursos para Produção de Dados e Procedimentos de Análise

Os recursos que foram utilizados para produzir os dados são as propostas de ensino²⁵, que se encontram no final desta dissertação, a gravação em vídeo de cada encontro do Experimento de Ensino e o diário de campo pessoal. Essas gravações ficaram armazenadas em hd externo de meu computador pessoal e, também, para evitar quaisquer perdas, as gravações foram inseridas em uma pasta privada do YouTube, onde há apenas meu acesso para fins de pesquisa. Para que o leitor entenda como foram organizados os encontros fisicamente, a figura 09 mostra uma simulação de como os estudantes estavam posicionados e a câmera também.

²⁵ As propostas de ensino completas estão nos apêndices A, B, C, D e E.

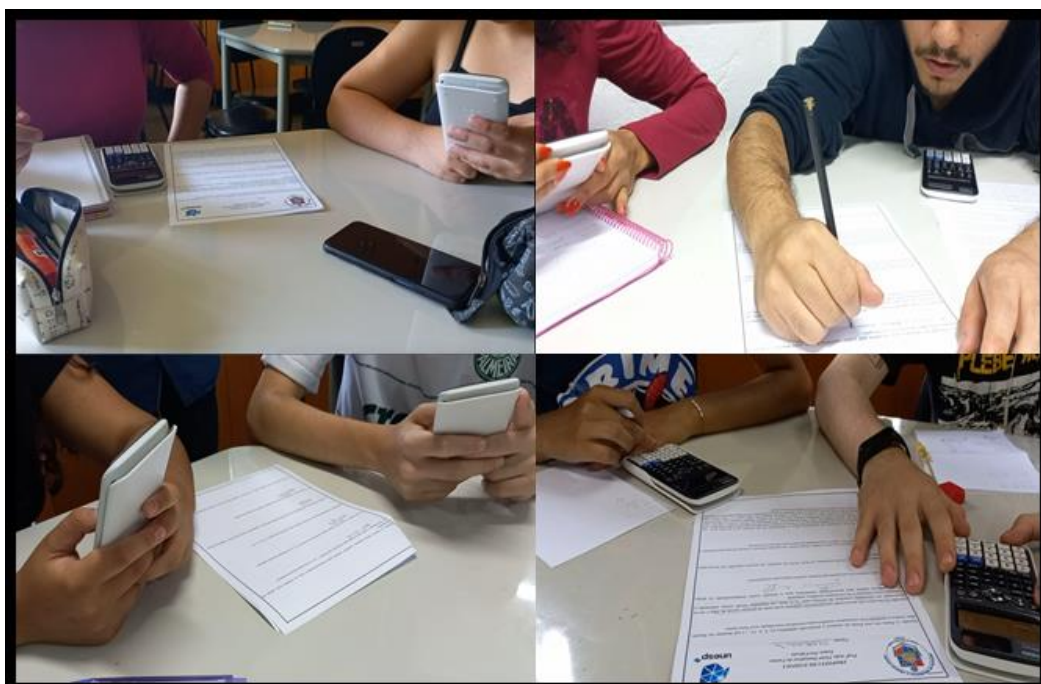
Figura 09: Esquema da organização física dos encontros do Experimento de Ensino



Fonte: Autoria própria

Adotando a Figura 09 como suporte visual para instigar a imaginação do leitor, os encontros foram organizados conforme se mostra: duas cadeiras em direção à câmera; foi utilizado um tripé que deu suporte ao meu celular, que foi o equipamento utilizado para gravar os encontros; e uma mesa ampla de modo que havia espaço suficiente para o tripé, para as propostas de ensino e para as calculadoras utilizadas na pesquisa. Assim, os estudantes se posicionavam frente à câmera de modo que seus rostos não apareciam, para manter o sigilo de identidade dos participantes, conforme se mostra na figura 10.

Figura 10: Registros Fotográficos das duplas



Fonte: Dados da Pesquisa

As propostas de ensino abordaram os conteúdos de Limites, Derivadas e Integrais, sendo especificamente desenvolvidas as propostas que relacionam: (i) Propriedade de Limites; (ii) Variação na Física Cinemática; (iii) Reta Tangente à Curva; (iv) Maximizações e Minimizações; (v) Custo Marginal; e (vi) Área delimitada por Funções no Plano Cartesiano R^2 .

Fazendo um panorama geral acerca dessas propostas de ensino, é conveniente pontuar que a proposta de ensino sobre limites versava sobre o desenvolvimento das propriedades de limites. Assim, a proposta objetivou instigar a exploração dessas propriedades de modo que a calculadora integraria essa investigação. Nesta proposta continham funções polinomiais envolvendo diversos tipos de representação de valores que x ou n deveria tender: a variável tendendo a algum número específico; tendendo a um número desconhecido, onde os estudantes deveriam investigar qual seria o número a ser inserido para a variável tender para chegar ao resultado esperado pelo enunciado; e relacionando os dados encontrados com os Limites Fundamentais, demonstrando uma articulação entre investigação e formalização com base em uma propriedade já definida em diversos livros de Cálculo. Inclusive, os estudantes poderiam realizar essa exploração de modos não-algébricos também, onde a visualização gráfica seria um artifício a se usar caso os estudantes quisessem utilizá-la.

As propostas de ensino que trouxeram o conceito de Variação na Física Cinemática, além de proporcionarem um cenário contextualizado fomentando a interdisciplinaridade, buscou incitar a exploração do conceito de variação como uma derivada, que foi o caso das propostas de ensino que abordaram o conceito de velocidade média como resultado da derivada do deslocamento Δs em função do tempo. O mesmo vale para as propostas que continham questões relacionando a integral da velocidade, em função do tempo, como representação do deslocamento Δs . Em ambos os casos, as propostas visavam essa exploração do conceito de variação e de anti-derivada para encontrar os caminhos necessários para dar andamento de acordo com o que as questões solicitavam.

Sobre as propostas de ensino que trataram o assunto de Reta Tangente a uma curva dada, buscou estimular os estudantes a utilizarem conceitos do CDI para identificarem a função que poderia servir como expressão da reta que tangenciasse uma determinada curva. Assim, a ideia era de que os estudantes explorassem diversos conceitos (equações fundamentais, derivadas e integrais) para conseguirem alcançar uma resposta satisfatória na visão deles. Além disso, os estudantes também podiam

utilizar a visualização gráfica para formalizarem e construírem conjecturas diante do que podia ser observado.

O objetivo da proposta de ensino que contemplava a temática de Maximizações e Minimizações estava em instigar a exploração dos conceitos de máximo e mínimo com as calculadoras (científica, gráfica ou ambas) diante de uma função polinomial. Assim, os estudantes deveriam procurar formas de encontrar o ponto máximo, o ponto mínimo ou ambos os pontos (quando a função tinha ambos os pontos) utilizando diversas estratégias (algebrização, visualização ou uma interação entre ambas) buscando revisitar os conceitos apreendidos nas aulas regulares de CDI. Essas revisitações podem implicar no desenvolvimento de um raciocínio pautado nas definições de máximo e mínimo, como é o caso dos testes pela primeira derivada, ou numa forma dinâmica de encontrar os pontos utilizando outros conceitos em aplicações, como é o caso da Fórmula de Bháskara.

A proposta de ensino que buscou trabalhar a temática de Custo Marginal objetivou proporcionar a exploração das integrais em formato dinâmico de modo que a autonomia do estudante afetaria diretamente na estrutura da questão. A ideia principal seria atribuir valores de custo para se tornarem a constante, resultado da integral, e esse valor, somado à função de Custo Total que os estudante encontrariam integrando as funções de Custo Marginal, contribuiria na formação de possíveis conjecturas diante dos valores escolhidos. Assim, os estudantes precisariam deliberar entre si para atribuir valores que fizessem sentido para a equipe, seja valores contextualizados ou valores aleatórios para verificar o comportamento gráfico das funções de Custo Total. Com a análise gráfica, os estudantes a utilizariam para verificar qual seria a função Custo Total que representasse a de maior custo diante do que eles adotaram para investigação, a exemplo de: uma loja iniciando seus empreendimentos, uma loja que já possui um tempo no mercado, etc.

Acerca da proposta de ensino sobre Área delimitada por Funções no Plano Cartesiano R^2 , o objetivo estava em incitar os alunos a explorarem uma aplicação muito frequente quando se trata de Integrais: a área delimitada por duas funções, de modo que as definições da Geometria Euclidiana não conseguiriam auxiliar totalmente os estudantes a desenvolverem a questão. Assim, os estudantes deveriam escolher duas funções, de modo que seus gráficos se cruzassem, sendo uma quadrática e outra afim. O resultado dessa delimitação, no plano cartesiano R^2 , com a ajuda da Calculadora Gráfica, formaria uma região hachurada com o valor desta área no canto inferior direito

da tela da calculadora. Dessa forma, os estudantes deveriam encontrar meios, descritivos ou orais, que justificassem a resposta dada pela calculadora, perfazendo passos da definição $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Vale ressaltar que, nesta questão, a visualização é de extrema importância para a formulação e generalização das conjecturas diante do que se investigava com as funções escolhidas pelos estudantes.

Em suma, o objetivo geral de cada proposta era de instigar o desenvolvimento dos raciocínios dos estudantes, com o uso da calculadora científica e/ou da calculadora gráfica, em relação aos conteúdos apresentados. As propostas de ensino não buscaram “misturar as temáticas”, assim a cada encontro uma temática específica era abordada. Cabe ressaltar que todas as propostas de ensino foram autorais, mas elaboradas tendo como base quatro livros de Cálculo, indicados pela professora de CDI-I que, conforme supracitado, permitiu que eu pudesse conhecer e dialogar com sua turma, sendo: a) *Um Curso de Cálculo*, de Hamilton Luiz Guidorizzi (2006); b) *Cálculo*, de James Stewart (2017); c) *Cálculo com Geometria Analítica*, de Earl William Swokowski (1995); e d) *O Cálculo com Geometria Analítica*, de Louis Leithold (1994). Todos esses livros faziam parte da bibliografia básica apresentada na ementa da disciplina de CDI-I da referida professora e a elaboração das propostas utilizando calculadoras foi uma ideia original e individual.

Outro detalhe de considerável importância pontuar é que todas as propostas de ensino entraram nos dados, mas nem todas as questões compostas nessas propostas entraram nesse processo de análise. Isso se dá ao fato de que, em algumas questões de uma determinada proposta de ensino, os estudantes não a exploraram a fundo e/ou preferiram não ter os resultados publicados neste relatório científico. Suponho que essa preferência dos estudantes esteja ligada ao fato de eles não terem certeza de suas respostas. Dessa forma, as questões selecionadas foram aquelas que mais geraram discussões profícuas e relacionadas à pergunta central de pesquisa **“Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?”** e, conseqüentemente, aquelas que os estudantes aceitaram que eu trouxesse neste relatório científico.

A ambientação dos estudantes com ambas as calculadoras foi necessária, pois ambos os equipamentos não eram triviais, de modo que foi indispensável uma explanação detalhada acerca dos comandos que seriam utilizados no decorrer dos

encontros do Experimento de Ensino. Antes de iniciar os encontros, tive que mostrar aos estudantes os comandos que eles poderiam estar utilizando para desenvolver suas respectivas investigações, pois ambos os equipamentos possuíam diversos comandos e esta ambientação se tornou necessária a fim de evitar maiores dispersões dos estudantes ou possíveis entraves que poderiam aparecer diante do uso destes comandos. Para que o leitor entenda como foi feita essa ambientação, o quadro 03 mostra a relação entre conteúdo desenvolvido, calculadora utilizada e os comandos utilizados.

Quadro 03: Ambientação com os comandos das calculadoras

Conteúdo	Calculadora Utilizada	Comandos Utilizados
Límites	Calculadora Científica Casio fx-991LAX	• Comando 1: Calcular • Comando A: Equação/Função • Comando 9: Tabela • Ambiente Classpad
Derivadas	Calculadora Científica Casio fx-991LAX	• Comando 1: Calcular • Comando A: Equação/Função • Comando 9: Tabela • Ambiente Classpad
	Calculadora Gráfica Casio fx-CG50	• Comando 1: Exe-Matriz • Comando 5: Gráfico • Comando Khicas50
Integrais	Calculadora Científica Casio fx-991LAX	• Comando 1: Calcular • Comando A: Equação/Função
	Calculadora Gráfica Casio fx-CG50	• Comando 5: Gráfico • Comando Khicas50

Fonte: Dados da Pesquisa

Como se pode ver, no Quadro 03, os estudantes tiveram uma ambientação com a(s) calculadora(s) antes de iniciar as gravações dos encontros. Assim, a ambientação ocorria de forma dialogada com os estudantes sem a necessidade de tutoriais ou quaisquer meios de suporte. Eram separados alguns minutos antes das gravações para tirar dúvidas, fazer simulações rápidas e até mesmo testar possibilidades de um

comando para o outro, ou seja, o que cada comando poderia contribuir caso os estudantes decidissem utilizar outro comando para explorar no decorrer das questões.

Sobre o tempo dessas ambientações, não existiu estritamente uma determinada quantia de tempo, entretanto as ambientações ocorriam num intervalo de até 15 minutos, de modo que algumas duplas se ambientavam em tempos menores e outras na faixa de 15 minutos. Ressalto que, em algumas vezes, foi preciso lembrar algum estudante, ou até mesmo a dupla, algo acerca do comando que queriam utilizar para a investigação, caso solicitassem minha ajuda. Também informo que, por mais que as ambientações tenham sido feitas com base nos comandos apontados no Quadro 03, nem todos os comandos foram utilizados por alguma dupla, ou seja, a ambientação era feita com os comandos listados, mas caso o(s) estudante(s) quisesse(m) utilizar apenas um único comando, por exemplo, ele(s) era(m) livre(s) para escolher qual iria utilizar, de modo que o uso dos comandos pontuados não era uma imposição, mas sugestões de exploração.

Sobre os recursos que foram utilizados para analisar e expor os dados, serão considerados: (i) a gravação dos encontros, onde mostram o desenvolvimento das propostas de ensino, que foram feitas através do smartphone com auxílio de um tripé adaptável; (ii) diário de campo do pesquisador, que forneceu detalhes mais específicos não registrados em vídeo; e (iii) os registros escritos das propostas de ensino.

Ressalto que o processo de transcrição se deu de forma que considerei os episódios que me chamaram a atenção e que permitiram maiores discussões diante do que estava sendo investigado. Cada encontro gravado tinha, em média, duas horas, de modo que alguns estudantes, na maior parte do tempo, ora ficavam em silêncio para pensar na questão ora se comunicavam para além do que a proposta solicitava. Sendo assim, foi necessário fazer alguns recortes considerando os pontos de principal destaque diante da proposta de ensino investigada.

Ainda, acerca desse processo de transcrição, as falas que serão evidenciadas na próxima seção possuem algumas adaptações para a linguagem culta. As falas que serão explicitadas foram totalmente proferidas pelos estudantes, porém a adaptação feita durante o processo de transcrição visou diminuir os vícios de linguagens e palavras que fugiam do decoro de sala de aula. Assim, algumas falas dos estudantes tiveram que passar por um refinamento para compor este relatório científico, mas reitero que as ideias que serão explicitadas são completamente originais dos próprios estudantes.

Além disso, devido ao fato de meu telefone celular ter sido utilizado para gravar

os encontros, em alguns momentos não foi possível registrar em fotografias o que os estudantes realizaram nas propostas de ensino, de modo que as figuras compostas na seção de descrição dos dados (próxima seção) foram elaborações minhas para representar a ação que os estudantes estavam realizando naquele determinado momento com a calculadora. Essas elaborações das figuras foram fielmente reproduzidas do que os estudantes estavam fazendo. De modo a garantir essa fidelidade, quando os estudantes utilizavam a calculadora, era solicitado a eles que comentassem, no ato da gravação, o comando que estavam utilizando e como estavam utilizando. Esses detalhes também foram para o diário de campo como suporte adicional à criação dessas imagens representativas.

Para realizar o movimento de análise, tanto separada por grupos quanto a coletiva, utilizei a Triangulação de Dados. Os pesquisadores Denzin e Lincoln (2006) afirmam que usar a triangulação é uma alternativa que confere um maior grau de validade ao desenvolvimento da pesquisa e possibilita o aprofundamento das compreensões diante do que se investiga. Ela se trata de “[...] uma estratégia para acrescentar rigor, amplitude, complexidade, riqueza, e profundidade a qualquer investigação” (DENZIN; LINCOLN, 2006, p. 31).

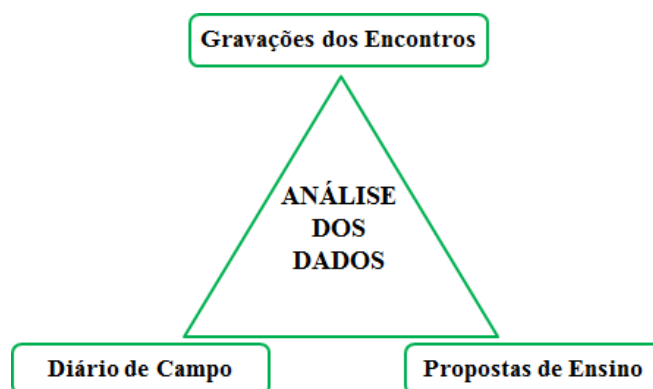
Por se tratar de uma abordagem qualitativa, a triangulação se torna uma forma de aumentar a credibilidade diante de uma pesquisa, o que envolve a plausibilidade dos dados, os sujeitos envolvidos até os resultados e suas respectivas interpretações (BORBA; ARAÚJO, 2019; DENZIN; LINCOLN, 2006; ALVES-MAZZOTTI, 1998; LINCOLN; GUBA, 1985). Ainda, “[...] a triangulação em uma pesquisa qualitativa consiste na utilização de vários e distintos procedimentos para obtenção dos dados” (BORBA; ARAÚJO, 2019), que corrobora com o que Nierotka, Monteiro e Silva (2019, p. 03) trazem de definição: “A triangulação de dados compreende o uso de diferentes fontes de dados, coletados em diferentes datas ou locais, com pessoas, grupos ou coletivo de pessoas distintos, de modo a obter uma descrição mais rica e detalhada dos fenômenos”.

Observando a convergência de opiniões entre os autores supracitados, concordo que a triangulação não consiste em um passo-a-passo que dará um resultado padrão em todas as pesquisas que a utilizarem como alternativa, mas se trata de uma conjuntura de paradigmas, que o próprio pesquisador irá associar, com diversos procedimentos de produção de dados que darão estrutura e credibilidade diante de uma determinada análise desenvolvida. Além disso, acredito que a triangulação pode ser útil para chegar

às unidades de análise que podem emergir diante dos dados produzidos.

Pensando nessas possibilidades, utilizo a Triangulação de Dados, conforme se mostra na figura 11, de modo a considerar três recursos para produção de dados que dará corpo na seção de análise de dados.

Figura 11: Recursos para Triangulação dos Dados



Fonte: Autoria própria

Assim como foi dito anteriormente acerca dos recursos que foram utilizados para analisar e expor os dados, trouxe-os aqui novamente, em forma visual, para que o leitor tenha em vista quais foram esses recursos que estou considerando e que fizeram parte da análise como um todo. Em resumo, foram analisadas todas as gravações simultaneamente com o diário de campo e as propostas de ensino que continham os registros escritos dos estudantes. Essa relação triangular acontecia de forma que eu escutava o que os participantes falavam e, imediatamente, inseria seus comentários em um arquivo separado do Microsoft Word ao mesmo tempo em que buscava nas propostas de ensino a resolução a ser inserida junto aos comentários, quando necessário. Somando às duas ações, no movimento de análise, lancei mão do Diário de Campo que me permitiu ter percepções além das que estavam sendo evidenciadas em vídeo, de forma a buscar proeminências que iriam ao encontro da pergunta central da pesquisa: ***Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?***

Dessa forma, a seguir apresento a descrição dos dados, compreendendo a configuração descritiva mencionada a priori, onde serão explicitados os comentários e expressões dos participantes usufruindo das propostas de ensino referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

4 DESCRIÇÃO DOS DADOS

Realizar um movimento de descrição, se tratando de uma pesquisa de natureza qualitativa, é de suma importância para que o leitor compreenda de onde a análise emergiu e sob qual contexto ela se encontra. Assim, a descrição detalhada se torna de fundamental importância neste trabalho e, também,

[...] significa que os autores descrevem o que ele veem. Esses detalhes são fornecidos *in situ*, isto é, dentro do contexto do ambiente da pessoa, local ou evento. A descrição se torna um bom lugar por onde começar em um estudo qualitativo [...] (CRESWELL, 2014, p. 150).

As discussões que serão evidenciadas nas próximas subseções foram extraídas da análise das gravações dos encontros, de modo que as propostas de ensino escolhidas foram aquelas que geraram mais discussões em torno da temática investigada. O intuito das próximas subseções, bem como da seção em si, está em narrar o que ocorreu em cada encontro com as duplas de modo que haja compreensão para o leitor no momento em que o movimento de análise dos dados for iniciado na próxima seção.

Ressalto que nesta seção, em conjunto com a exposição dos resultados, serão feitos comentários, extraídos do diário de campo do pesquisador, que estarão relacionados com a análise dos próprios dados. Entretanto, as discussões mais aprofundadas serão evidenciadas *a posteriori*.

4.1 Primeira Proposta de Ensino: Conteúdo de Limites

Descrição da Atividade:

Vamos iniciar algumas questões iniciais para familiarizarmos com os limites com ajuda da calculadora.

A) Para quanto o valor de x deve tender para obtermos um limite -1 ou -3 na função descrita abaixo?

$$\lim_{x \rightarrow ?} (x^2 - 5x + 3)$$

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante A:** Nesse caso agora, a gente teria que substituir -1 e -3 pra saber quanto vai dar esse limite.
- **Estudante B:** Não sei... A gente não precisa fazer com calculadora? Se usar a tabela de equações a gente consegue ter uma noção.
- **Pesquisador:** Isso. Pense na Calculadora como uma aliada. Tentem explorar com ela.

- **Estudante A:** Então se eu colocar $f(x) = x^2 - 5x + 3$ no comando 5, talvez eu veja alguma coisa sobre esse resultado...
- **Pesquisador:** Se atentem para os resultados que ela [a calculadora] mostra. Procurem tirar o significado desses resultados.

Figura 12: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 1ª Parte

$f(x) = x^2 - 5x + 3$	Intervalo Tabela	
	Inic : 1	
	Fim : 5	
	Passo : 1	

	x	$f(x)$
1	1	-1
2	2	-3
3	3	-3
4	4	-1

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante B:** Então com $x = 1$, temos $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$? Porque se seguir essa lógica, então com $x = 4$, também vai dar -1 . Aí com 2 e 3 a gente vai ter o resultado do limite como -3 , que é o que o exercício quer.
- **Estudante A:** Eu concordo. Faz todo sentido. Mas por que a calculadora só mostra esses 5 valores?
- **Pesquisador:** Porque você não delimitou o passo que quer que ela siga. Podemos voltar com o botão “AC” e mudar o passo, ou vocês podem ir digitando na própria tabela um valor específico para x .
- **Estudante B:** Vamos tentar com 0 pra ver o que vira...

Figura 13: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 2ª Parte

	x	$f(x)$
8	2	-3
9	1	-1
10	0	3
11	-1	9

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante B:** Deu 3, e com -1 tá dando 9.
- **Estudante A:** Então quando você ver que tá “crescendo demais” o valor do limite [distanciando do valor que o enunciado especifica], é porque já não é mais por aquele caminho.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Se formos usar essa tabelinha, vamos fazer um “sistema de comparação”, seria isso? Porque é o que faz sentido na minha cabeça.
- **Estudante D:** Se for assim, com $x = 1$, temos -1; com $x = 2$, temos -3; com $x = 3$, temos -3. E até que isso faz sentido, porque o x está representando [na calculadora] como “aquilo que está tendendo”.
- **Pesquisador:** E com x negativo? Já pensaram sobre?
- **Estudante C:** Com [números para x] negativos está dando um número além do que pede no enunciado, um número maior. Tipo, com $x = -1$ está dando 9, com $x = -2$ tá dando 17. Acho que não é por esse caminho... Então nem precisamos focar nos negativos, a resposta vai ser 1, 2, 3 e 4.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Se a gente usar o comando da tabela [Comando 9], acredito que facilita demais nossa vida. Porque o limite, na teoria, é uma técnica de substituição. Claro que para algumas funções a gente tem que manejar porque nem sempre dá certo, tipo aqueles denominadores onde dá zero.
- **Estudante F:** Exatamente. Além disso, acho que se a gente fazer um estudo com essa função nesse comando da tabela, mesmo que ela dê uma indeterminação, dá pra gente pensar pra onde ela tá indo e aí a gente pode até confirmar no gráfico e relacionar os dois.
- **Estudante F:** Olha só... pra $x = 1$ e $x = 4$, a gente tem a resposta de -1, pra $x = 2$ e $x = 3$ a gente tem a resposta -3. Eu fui tentando colocar números abaixo de 1 e acima de 4 pra ver e já dá pra perceber que não tem outro resultado a não ser esses.
- **Estudante E:** Concordo. Também fiz isso aqui na tabela.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Quando a gente usa o comando da tabela, ela nos fornece um x e um $f(x)$ ou $g(x)$, dependendo se queremos uma ou duas funções. Mas a questão é que acho que ela pouparia muito nosso tempo pra gente poder analisar. Então o que acha da gente começar nela?
- **Estudante H:** Concordo. A gente consegue ver “a reação” das respostas quando a gente colocar aqui com x variando.
- **Estudante G:** Olha só... Logo de cara a gente tem **1, 2, 3 e 4** que fornecem as

respostas que a gente quer. Para $x = 1$ e $x = 4$ nós temos -1; para $x = 2$ e $x = 3$ nós temos -3.

- **Estudante H:** E eu acho que são só esses valores mesmo que vão satisfazer o que o enunciado pede, porque tentei pra 0 e abaixo de 0, mas só tava dando números bem distantes do que -1 e -3. Então acho que já temos nossa resposta.

Continuação da Atividade 2:

B) Para quanto o valor de x deve tender para obtermos um limite 11 ou 12 na função descrita abaixo?

$$\lim_{x \rightarrow ?} \left(\frac{4x + 5}{\sqrt{x}} \right)$$

Analisando matematicamente, por quê a função não está definida para $x = 0$ e $x < 0$?

DÍÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante A:** Mesmo caso, vamos digitar essa função no $f(x)$ da calculadora e ver como ela se comporta.
- **Estudante B:** Tem certeza que tem valor pra x que dê 11 e 12?
- **Pesquisador:** Estamos trabalhando no plano dos números reais, correto? A calculadora está mostrando x enquanto pertencente aos naturais. Os números reais são só os naturais?
- **Estudante B:** Aaaah, então a gente pode colocar número fracionário, com vírgula, etc., pra ver se a gente encontra os resultados.
- **Estudante A:** Entendi, seria como um “tentativa e erro”.

Figura 14: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 3ª Parte

$f(x) = \frac{4x+5}{\sqrt{x}}$	Intervalo	Tabela											
	Inic : 1												
	Fim : 20												
	Passo : 1												
			<table><tr><th>x</th><th>$f(x)$</th></tr><tr><td>5</td><td>11,18</td></tr><tr><td>6</td><td>11,839</td></tr><tr><td>7</td><td>12,472</td></tr><tr><td>8</td><td>13,081</td></tr></table>	x	$f(x)$	5	11,18	6	11,839	7	12,472	8	13,081
x	$f(x)$												
5	11,18												
6	11,839												
7	12,472												
8	13,081												

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante B:** No número 6 [$x = 6$] isso deu 13 e no número 7 [$x = 7$] deu 14. Então pra ser 12, como o 5 não deu exato, estaria entre 5 e 6.
- **Estudante A:** Achei. Para o limite ser 11, o valor de x tem que tender pra 4,733 e para o limite ser 12 o valor de x precisa ser 6,25.

Figura 15: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Limites – 4ª Parte

x	$f(x)$	x	$f(x)$
21	4,731	22	6,24
22	4,732	23	6,24
23	4,733	24	6,25
24	4,734	25	6,26

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Pesquisador:** Okay, e quanto à análise matemática que podemos fazer acerca dessa função (como diz a atividade extra no enunciado)?
- **Estudante B:** Olha, eu vi aqui no classpad rapidinho pra ter uma noção do gráfico, mas algebricamente a gente consegue explicar também. Pra 0 não está definido porque vira uma indeterminação, agora com $x < 0$ eu ainda estou pensando...
- **Estudante A:** Pra $x < 0$ não dá porque, assim como o senhor [pesquisador] disse, a gente está trabalhando no plano R^2 . Então se x for menor do que 0, teríamos uma raiz negativa no denominador que partiria pro “universo” dos complexos. Acredito que não seja a proposta da atividade. Por isso não tá delimitada pra nenhum dos dois.

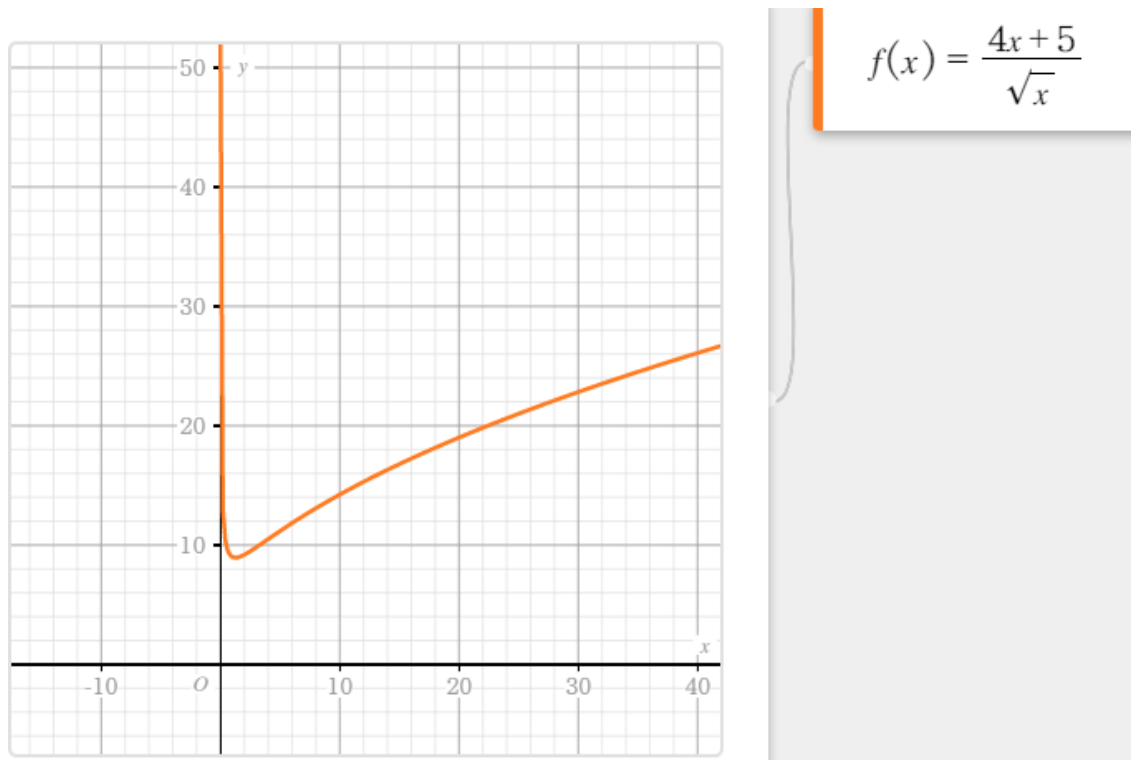
DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Vish, eu acho que não tem nenhum número que faça esse limite ir pra 11 e 12, hein.
- **Estudante D:** Mas o enunciado não restringiu o “universo” desses números, então podemos considerar que estamos falando de números reais. Assim, todos os números entram aqui. Vamos tentar “jogar uma vírgula” aqui entre 6 e 7 e fazer o teste, porque com 6 tá dando 13.
- **Estudante C:** Vou tentar fazer com o 11. Na calculadora aqui tá entre 4 e 5, então vou jogando números com vírgula aqui e ver se encontro a resposta.
- **Estudante D:** Consegui encontrar que quando o x assumir valor de 6,25 ele vai dar o limite que a gente quer.
- **Estudante C:** Eu fiz igual você, eu fui colocando os números aqui incansavelmente [risos] e quando eu vi que tava dando uma aproximação legal, eu fui testando mais números ali “em volta”. Então a gente achou 4,733 pra dar 11 e 6,25 pra dar 12.
- **Estudante C:** Sobre a pergunta que você fez aqui, a extra, a gente [os estudantes]

concordou que o x não pode ser zero porque dá indeterminação, nem é preciso calculadora pra verificar isso porque a gente já vê “de cara”, e não tem como o denominador ser negativo porque a gente está no plano cartesiano real, e raiz negativa é complexo. Então é por isso que não tá definida.

- **Estudante D:** Só que essa segunda parte, do negativo, a gente olhou no Classpad rapidinho só pra ver como era o comportamento da função no “território negativo”, e realmente ela não tá delimitada lá. Aí fica fácil entender quando a gente olha e quando tem explicação algébrica também.

Figura 16: Representação Gráfica da Equipe “TRANSfinito” sobre Limites – 1ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

DIALÓGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Mesmo procedimento. Eu coloquei a função e apertei igual. Com 4 vai dar 10,5 e com 5 deu 11,18. Então a primeira está entre 4 e 5. Já a segunda, pra dar 12, tá entre 6 e 7. Vou tentar achar o que vai dar 12 e você procura o que vai dar 11.
- **Estudante F:** Eu consegui achar a que vai dar 11, que no caso é 4,7333.
- **Estudante E:** A que vai dar 12 é 6,25.

- **Estudante F:** Nesse caso da pergunta extra, não pode ser igual a zero por conta da indeterminação que vai ser gerada. E sobre a raiz ser menor do que zero, no domínio dessa função, não vai existir raiz negativa no plano cartesiano real.
- **Estudante E:** Se a gente for ver como isso funciona visualmente a gente percebe que ele só existe no 1º Quadrante do Plano Cartesiano, onde só tem x e y positivos. Então isso “bate” com a explicação algébrica que a gente pensou aqui.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** O legal desse tipo de questão é que parece um joguinho de adivinhação [risos]. E isso até gera mais interesse e dá mais curiosidade na gente pra querer saber quanto vai dar aquele valor ou se tem outro valor que “bate” com o que a gente quer.
- **Estudante H:** Olha, eu sei que para dar 11 tá entre 4 e 5, aí a gente vai ter que fazer a investigação dentro desse “intervalo”. E para dar 12 ele tá entre 6 e 7. Foi bem na sequência mesmo da tabelinha aqui.

Figura 17: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 1ª

Parte

$\sqrt{x}$	x	$f(x)$
5	25	11,18
6	4,73	10,998
7	4,732	10,999
8	4,7325	11



Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante G:** Beleza. Eu achei 4,7325 pra dar 11 e 6,25 pra dar 12. Mas quer conferir no comando “Calcular”?
- **Estudante H:** Então, pra $x = 11$ não deu exato. Aí nesse caso teria que ser algo mais aproximado mesmo. Porque deu um valor “quebradiço”. Acredito que a tabela aproximou o resultado automaticamente. Mas com $x = 6,25$ deu exatamente o número 12.

Figura 18: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 2ª

Parte

$$\frac{4(4,7325)+5}{\sqrt{4,7325}} \quad \triangle \quad \frac{4(6,25)+5}{\sqrt{6,25}} \quad \triangle$$

11,0001191
12

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante G:** Sobre ele não estar delimitado pra $x = 0$ e $x < 0$ é justamente pelo fato da função dar uma indeterminação (*com* $x = 0$) e um número complexo (com $x < 0$) e, como a gente está trabalhando no Plano Real, isso não se aplica.

Descrição da Atividade:

Ainda utilizando a calculadora (ou se preferir poderá utilizar o classpad) vamos descobrir o seguinte limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3x} \right)$$

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Pesquisador:** Antes de começarem a investigar essa questão, deixe-me perguntar algo para vocês: Como eu sei, conceitualmente, que o Limite existe?
- **Estudante A:** A gente faz a condição de existência dele e se ele existir [o limite da função], ele é um limite real.
- **Estudante B:** Mas tem aquele “lance” de limites laterais, né? Se existir os limites laterais, então o limite existe naquele determinado ponto.
- **Estudante A:** Nossa, é verdade. Parecido com aquela imagem da questão 1. Se os limites caminharem pra direções diferentes não vai ter limite pra calcular, tipo um limite “em comum”.
- **Pesquisador:** Então usem esse conceito na hora de investigar porque vai ser útil para vocês.
- **Estudante A:** Eu coloquei aqui no comando normal [calcular] e fui colocando valores bem perto de 0: 0,3; 0,003; 0,0003, etc., e dá um valor absurdo de grande. Se eu fizer o contrário, dá um valor muito pequeno. Então chegamos no consenso que se o limite tende a 0 pela esquerda [no caso, o valor de x tende a 0 pela esquerda], ele dá $-\infty$, e se o limite tende a 0 pela direita [no caso, o valor de x tende a 0 pela direita] ele dá $+\infty$.

- **Pesquisador:** Para vocês o “infinito” não é tudo igual?
- **Estudante B:** Não, porque é uma representação de algo muito grande ou muito pequeno, daí os sinais na frente. Então não existe limite pra essa função aí.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Ué, mas vai dar uma indeterminação...
- **Pesquisador:** Quando eu sei que existe limite no ponto?
- **Estudante C:** Quando existe limite lateral dos dois lados...
- **Pesquisador:** Usa essa informação que vocês vão compreender na hora de experimentar os valores na calculadora.
- **Estudante D:** Quando a gente vai crescendo o valor de x , o resultado vai aumentando muito, só que não sei pra qual valor exatamente.
- **Estudante C:** Enquanto você tentava aí com número positivo, eu tentei colocar números negativos e também “cresce muito, mas negativamente”. E também não vai pra um valor específico igual no outro exercício.
- **Estudante C:** Creio que não tem a menor possibilidade de existir limite aqui, porque os dois vão se distanciar muito. Então pra mim não existe limite nesse ponto específico.
- **Estudante D:** Eu concordo, porque seria o mesmo que dizer que um é $+\infty$ e o outro é $-\infty$. De toda forma, vão ser diferentes mesmo. Os limites laterais não “batem”, então não existe esse limite.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Quando vem fração isso me assusta [risos], mas acho que se fizermos o mesmo processo vai dar certo. E pra gente ter uma boa noção, uma análise geral, disso que estamos fazendo, acho que seria legal eu fazer só dos números negativos e você [Estudante F] só dos números positivos, aí a gente coloca muitos números próximos de 0 pra ver o que acontece.
- **Estudante F:** Beleza. Da minha parte ficou dessa forma aqui

Figura 19: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Limites – 1ª Parte

	$\sqrt{x}$	$f(x)$
1	2×10^{-9}	75000
2	$1,2 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^6$
3	1×10^{-8}	$1,5 \times 10^8$
4	1×10^{-10}	1×10^{10}

Fonte: Dados de Pesquisa

- **Estudante F:** Por mais que esteja em notação científica, a gente consegue ver que dá um número tão grande quando a gente coloca valores pra x muito pequenos.
- **Estudante E:** No meu ficou com notações científicas também porque coloquei muitos zeros depois da vírgula. Então ficou assim:

Figura 20: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Limites – 2ª Parte

	$\sqrt{x}$	$f(x)$
1	-5×10^{-4}	-3000
2	-4×10^{-5}	-37500
3	-1×10^{-7}	-1×10^7
4	-1×10^{-10}	-1×10^{10}

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante E:** A gente chegou na conclusão aqui que o $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ e a característica básica para saber se aquela determinada função tem limite são os pontos laterais. Se são iguais, existe. Se são diferentes, não existe. Então para essa função específica, não existe limite.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante H:** Até agora a gente tava procurando o valor de x , então a situação mudou um pouco aqui. Ele já deu o valor de x , e está perguntando o valor do limite.
- **Estudante G:** Eu sei que a gente precisa de limites laterais pra poder descobrir o valor de um limite. Então analiso os valores antes do zero e você [Estudante H] analisa os valores depois de zero. Pode ser?
- **Estudante H:** Okay. Eu fui colocando valores bem próximos de zero aqui: **0,3; 0,2; 0,01; 0,0001** e tá dando um valor muito grande. Como que está aí contigo?
- **Estudante G:** Aqui eu fui colocando muitos números próximos também: **-0,002; -0,001; -0,0001** e tá dando um valor muito pequeno.

Figura 21: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 3ª

Parte

	$\sqrt{x}$	$f(x)$		$\sqrt{x}$	$f(x)$
1	0,5	2,2222	1	-2×10^3	-333,3
2	0,2	3,3333	2	-1×10^3	-666,6
3	0,01	66,6666	3	-1×10^4	-6666
4	1×10^4	6666,6	4		

Fonte: Dados da Pesquisa

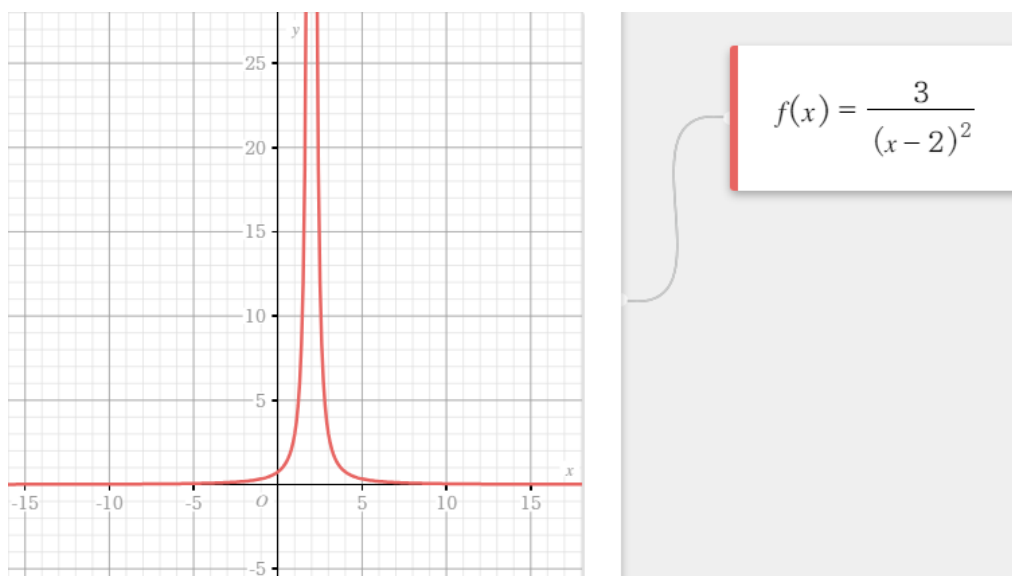
- **Estudante G:** Então a gente já “matou a charada”. Não existe limite pra essa função. Se os limites laterais não são iguais, não existe limite naquele ponto que indicou pro x tender.

Descrição da Atividade:

Vamos pensar se existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2}$. Existindo, negativamente seria o mesmo resultado?

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante A:** Sim, existe. Porque se a gente pensar no valor de x sendo um número tanto negativo quanto positivo, por conta de o denominador estar ao quadrado o resultado vai ser sempre positivo. Então eu sei que existe limite. A gente só precisa descobrir de quanto. Tipo, pensando em valores “brutos” mesmo...
- **Estudante B:** Olha, o classpad mostra dessa forma...

Figura 22: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Limites – 1ª Parte

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante B:** A gente chegou na conclusão de que se os dois [o gráfico da função]

estão subindo juntinhos, ambos estão indo pra $+\infty$, então esse é o limite pra essa função aqui.

- **Estudante A:** E sobre existir negativamente, é o mesmo caso que a gente comentou em uma questão anterior: $-\infty$ e $+\infty$ são representações distintas, só o símbolo que é igual. Então não, se uma é negativa e a outra positiva não tem limite lateral e, por isso, não vai existir o limite dessa função.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Acredito que seja igual vimos agora a pouco. Precisamos levar em consideração os limites laterais. Pra 2 aqui está dando ERRO [Mensagem da calculadora].
- **Estudante D:** Mas é porque pra 2, a função não tá delimitada, vai dar divergência [indeterminação]. Aí a gente vai precisar de números acima de 1 que chegue perto de 2 e números abaixo de 3 que se aproxime de 2 também. Daí a gente vê como tá o comportamento do gráfico.
- **Estudante C:** Eu vou olhar no Classpad e você [Estudante D] pode verificar no comando 9 se realmente bate com o que tá aqui.
- **Estudante D:** Pra mim, ele tá aumentando muito porque se eu coloco um número grande, ele dá um valor enorme. Se eu coloco um número muito pequeno, ele também dá um valor enorme. E olhando no Classpad, confirma isso que eu tô dizendo de ambos irem para um mesmo lugar.
- **Estudante C:** Então, podemos dizer formalmente que quando o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tender pela direita e esse mesmo limite tender pela esquerda, o resultado apontará para $+\infty$, então esse é o limite, porque os limites laterais existem.
- **Estudante D:** Sobre a pergunta extra, eu acho que não vai existir limite se colocarmos o “sinal de menos” na frente justamente por conta disso que C [Estudante C] falou: os limites laterais não vão ser iguais, então não existiria limite, o que significa que não seriam o mesmo resultado.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Nessa questão aqui a gente preferiu variar um pouco, pra não ficar tudo a mesma coisa. Então tanto eu quanto o Estudante F utilizamos o Classpad pra gente poder observar.

- **Estudante F:** Sim. Aí quando a gente digitou a função, leu o QR Code e entrou no Classpad, a gente viu que a função fazia um movimento parecendo com um cone. Só que o “bico” desse cone nunca encosta, eles não se ligam. Aí tanto eu quando a Estudante E fomos movimentando o plano pra gente ver se num ponto “bem lá em cima” eles encostariam, e ele não encosta, pelo menos nessa procura que fizemos.
- **Estudante E:** Justo. Aí a gente chegou na conclusão de que se eles não vão se encontrar e estão subindo infinitamente, como tanto o lado antes e depois de $x = 2$ estão subindo demais, o limite é $+\infty$.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Vamos verificar pra quanto estão indo os limites laterais. Eu posso ficar com a parte antes de dois e você [Estudante H] pode ficar com depois de 2.
- **Estudante H:** Nesse caso aqui, ele cresce muito na medida em que a gente vai colocando números muitíssimos próximos de 2.

Figura 23: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 4ª

Parte

	$\sqrt[n]{x}$	$f(x)$
1	2,1	300
2	2,001	3×10^6
3	2,0001	3×10^8
4		

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante G:** Eu vou fazer uma espécie de “simetria” com o seu, pra gente ver se tem alguma ordem, algum padrão...

Figura 24: Representação da resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Limites – 5ª

Parte

	$\sqrt[n]{x}$	$f(x)$
1	1,9	300
2	1,99	30000
3	1,999	3×10^6
4		

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante H:** Olha, na minha visão pessoal eu acho que eles estão iguais. Só não sei qual o valor final, mas que eles estão iguaizinhos eles estão [risos].
- **Estudante G:** É muito provável que ele não vai parar de crescer, então eu acredito

que o limite lateral que existe aqui é justamente esse “desconhecido crescente” que a gente não conseguiu definir. Então acredito que a resposta pra esse limite seja $+\infty$.

De acordo com os próprios estudantes que participaram desta pesquisa, em suas respectivas visões, na universidade o ensino de limites era marcado por um viés de demonstração de forma que eles não conseguiam articular tais aplicações em um contexto investigativo. Os estudantes A, B, C, D, E, F, G e H relataram que aprenderam uma nova maneira de investigar os limites, de uma disposição mais interativa e com um recurso que eles não imaginavam.

A calculadora enquanto recurso de exploração, para eles, foi algo inovador. Isso se dá ao fato de que a calculadora era vista por eles como um instrumento de validação de resultados e não como um recurso que poderia contribuir no processo de abordagem de algum determinado conceito (como é o caso dos Limites) bem como no desenvolvimento da produção de conhecimento matemático.

A maioria dos estudantes, por terem familiaridade com o procedimento algébrico dos limites, enfrentaram alguns problemas iniciais quando se depararam com o intuito das propostas de descobrir/investigar. Entretanto, a maioria das duplas de estudantes se ajudava, de modo que a presença do pesquisador conseguiu ser a mínima possível, onde foi possível identificar melhor as falas, os comportamentos e as formas com que cada indivíduo conduzia seu pensamento matemático.

4.2 Segunda Proposta de Ensino: Conteúdo de Derivadas

Descrição da Atividade:

Em um determinado laboratório, um grupo de alunos está realizando um estudo para identificar a movimentação de uma partícula que desloca-se sobre o eixo das abscissas. Após anotar as observações e identificar determinados padrões do tempo, em segundos, os alunos chegaram à conclusão, com a ajuda de um software, que a função que determinaria uma posição favorável seria $x(t) = 7,8 + 1,5t + 3t^2$.

A) Dessa forma, e com a ajuda da calculadora, como podemos identificar a velocidade a cada 10 segundos?

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante A:** Confesso que estou um pouco perdido [risos]
- **Pesquisador:** Primeiro de tudo: do que se trata essa função? Considerando que ela

tem um elemento variável, que é o tempo, o que podemos fazer com essas informações?

- **Estudante B:** Na Física, uma variação também pode significar uma derivação, pelo que vi um tempinho atrás, mas, claro, tudo depende de onde se quer chegar.
- **Estudante A:** Essa função está tendo como variável principal o tempo, e como o enunciado tá falando de “posição favorável”, eu acho que seja uma função que esteja representando o espaço, aquele Δs , seria isso?
- **Estudante B:** Sim! Acho que deva ser isso sim. Lembro que no livro de cálculo tinha uma parte onde esse Δ era uma representação de derivação.
- **Pesquisador:** É justamente por esse caminho...
- **Estudante B:** Então vamos usar esse comando normal aqui mesmo da calculadora, porque pelo que ele [Pesquisador] comentou com a gente nos encontros passados, ela dá a derivação pra gente e já substitui.
- **Estudante A:** Eu vou fazer no comando 9, porque estou mais acostumado com ele. Aí eu faria a derivada diretamente “de cabeça” e a função já derivada que representaria a aceleração eu ploto na tabela e ajusto o passo a passo de 10 a 100, pra verificar. Aí comparamos as respostas.
- **Estudante B:** Da sua forma realmente é mais fácil. Assim a gente vai ter 61,5m/s para 10s; quando chegar em 20s a gente vai ter 121,5m/s; em 30s a gente vai ter 181,5m/s. E o legal é que dá pra saber como ele vai ser nos próximos segundos só acrescentando 60m/s, porque ele segue esse padrão.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Peraí... Eu me recordo do professor de Física dizendo que o que representa aquele “triangulozinho” seria uma variação, que matematicamente, seria representado por uma derivação de algo em relação ao tempo. Normalmente era em relação ao tempo, tipo aceleração média e velocidade média.
- **Estudante D:** Eu coloquei aqui na calculadora científica dessa maneira aqui $\frac{d}{dx}(7,8 + 1,5x + 3x^2)|_{x=10}$ e ela retornou a resposta de 61,5. Então a gente analisou aqui e viu que se trocar o x por +10 (20, 30, 40, 50, ...) [ir aumentando 10 unidades sucessivamente] a gente chega onde a gente quer.

Figura 25: Representação da Resolução da Equipe “TRANSfinito” sobre Derivadas –
1ª Parte

$$\frac{d}{dx}(7,8+1,5x+3x^2)\Big|_{x=10} \quad \frac{d}{dx}(7,8+1,5x+3x^2)\Big|_{x=20} \quad \frac{d}{dx}(7,8+1,5x+3x^2)\Big|_{x=30}$$

$$61,5 \qquad \qquad \qquad 121,5 \qquad \qquad \qquad 181,5$$

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante C:** Sim. Mas eu vi outra coisa legal aqui, mas também pode ser coisa da minha cabeça [risos]. Ele está aumentando de 60 em 60. Então se você perguntasse pra gente qual o centésimo valor, a gente conseguiria fazer sem ter que digitar toda a derivação de novo: era só colocar +60 e apertar igual 99 vezes.
- **Estudante D:** O legal disso é que dá até pra falar de Progressão Aritmética de um jeito bem bacana usando o “igual”. Se fosse pra generalizar eu colocaria $f(K) = 61,5 + 60.K$, com K pertencendo aos Naturais.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Eu sei que a derivada do espaço me retorna o valor da velocidade. Mas nunca ficou claro na minha cabeça o porquê. Foi uma informação mais “jogada” pra gente.
- **Estudante F:** Eu também sei que se trata de uma derivação. Mas tomei isso como verdade e, parando pra pensar, nunca me questionei disso. Poderia explicar pra gente?
- **Pesquisador:** Como vocês já sabem aplicar e não o desenvolvimento por trás, eu posso comentar com vocês. Na verdade, essa afirmação de que a derivada do espaço vai gerar a velocidade começa na definição de derivada, aquela que usa limite. Lembram qual é?
- **Estudante F:** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ [falou o estudante escrevendo a generalização no quadro], não é isso?
- **Pesquisador:** Sim. Essa é a ideia. Pela definição, nós temos $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$, e desenvolvendo isso nós temos $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$, como a gente teria uma indeterminação, se a gente aplicar a Regra de L’Hospital, nós encontramos nosso $v(t)$ [utilizei o quadro

para explicar essa relação entre espaço e velocidade].

- **Estudante E:** Ah tá... Agora faz bem mais sentido para mim. Vamos lá então... Esse $x(t)$ está representando o espaço que a gente tem nesse percurso. Agora que eu já entendi o porquê de derivar [risos], então a gente usa esse comando de derivação e como ele quer para cada 10 segundos, a gente já substitui e vê o que acontece.
- **Estudante F:** Olha só, pra 10 segundos deu 61,5; pra 20 segundos deu 121,5; pra 30 segundos deu 181,5. Então a gente concluiu aqui que pra identificar a velocidade a cada 10 segundos basta apenas somar 60 continuamente.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Primeiro de tudo a gente tem que saber que função é essa e o que ela tá representando. Então vamos lá... O enunciado fala que $x(t)$ é uma representação da posição favorável, então posição é nosso espaço (S). A gente viu na aula do professor x [professor de Física das estudantes] o percurso que a gente tem pra chegar na velocidade. Se bem me lembro parte daquele princípio da “derivada pela definição”.
- **Estudante H:** Sim. É justamente isso. A derivada do espaço vai ser a velocidade. E aí se você considera um Δv em relação à Δt , usando a mesma definição, a gente tem a aceleração da partícula, do material que tá sendo investigado.
- **Estudante G:** Então vamos lá... O que nós temos? Temos uma “função espaço” e o pedido do enunciado de identificar a velocidade atingida a cada 10 segundos. A gente consegue fazer isso pela calculadora mesmo. É só a gente fazer $\frac{d}{dx}(7,8 + 1,5x + 3x^2)|_{x=10}$ e ir aumentando esse 10 em +10. Aí a gente vai ter 61,5m/s; 121,5m/s, 181,5m/s e 241,5m/s, se formos pensar de 10 a 40 segundos.
- **Estudante H:** Não sei se você observou, mas tá tendo um padrão aqui. Se você aumentar 60 no resultado final continua dando o mesmo resultado. Por exemplo, ao invés de fazer toda a conta novamente, se a gente quisesse saber quanto de velocidade ele fez atingindo 100 segundos, a gente teria que somar 60 por 9 vezes, já que teríamos o primeiro resultado pra $x = 10$.
- **Estudante G:** Concordo. Inclusive, essa questão é até legal pra gente pensar no seguinte: a cada 10s, essa partícula tem uma velocidade constante de 60s. Mas, se a gente considerar que esses cientistas lançaram essa partícula várias vezes começando de 10s, aí já é outra história.

Em um filme de desenho animado, três personagens estão em um autódromo competindo entre si. Os três carros de marcas e modelos distintos estão dispostos na primeira fileira horizontal. Após a primeira arrancada, com o sinal verde, o carro A descreve um movimento tal que $S = 9,5t^2 - 8t$, enquanto os outros carros (B e C) descrevem, respectivamente, um movimento $S = 10t^2$ e $S = 9t^2 + 7t - 10$. Faça uma análise acerca da velocidade de modo comparativo, ou seja, entre os carros A e B; B e C; e A e C, quem tem mais velocidade? Também verifique qual dos três têm maior aceleração. Comente.

- **Estudante A:** Eu vou fazer os cálculos de A e B.
- **Estudante B:** Eu fico com A e C. Aí a gente calcula juntos o B e C.
- **Estudante B:** Na minha cabeça não faz sentido determinar agora, sendo que vai depender do tempo, porque agora o mais rápido é o $h(t) = 18t + 7$ [o estudante derivou diretamente sem uso da calculadora]. Ah, saquei... Agora eu vou ter que ver na tabela, jogar números para t para ver se ele continua tendo mais velocidade que $f(t) = 19t - 8$, aí depois faço outra comparação com $g(t) = 20t$ seria isso ou eu tô “viajando” demais?
- **Pesquisador:** É exatamente essa a ideia: vocês fazerem uma experimentação mesmo com a calculadora.
- **Estudante A:** Fazendo o comparativo de $f(t) = 19t - 8$ e $g(t) = 20t$, o $g(t)$ vai ter sempre mais velocidade. Eu utilizei os tempos $t = 1s$; $t = 50s$; $t = 100s$ e $t = 150s$ para ver se a velocidade continuava maior que $f(t)$ e continuou, então entre A e B, o B tem mais velocidade.

Figura 26: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Derivadas – 1ª Parte

$$f(x) = 19x - 8 \quad \text{Intervalo Tabela}$$

x	$f(x)$	$g(x)$
1	11	20
2	50	1000
3	100	2000
4	150	3000

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante B:** No meu (A e C), quase fui tapeado [risos]. Porque com $t = 1s$ e $t = 3s$, os valores iniciais que eu fui testando, deu 11 e 49 segundos, respectivamente. Mas aí eu joguei um $t = 20$ para testar, e até então o C estava sendo maior, e do nada o A ultrapassou. Ficou uma diferença de $t = 372s$ contra $t = 367s$. Aí depois disso, com segundos maiores que 20, o A só foi crescendo.

Figura 27: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Derivadas – 2ª Parte

$f(x) = 19x - 8$	$\sqrt{x}$	Intervalo	Tabela	$\sqrt{x}$	$f(x)$	$g(x)$	$\sqrt{x}$	$f(x)$	$g(x)$
$g(x) = 18x + 7$	$\sqrt{x}$	Inic : 1		$\sqrt{x}$	11	25	$\sqrt{x}$	30	43
		Fim : 10		$\sqrt{x}$	30	43	$\sqrt{x}$	49	61
		Passo : 1		$\sqrt{x}$	49	61	$\sqrt{x}$	68	79
				$\sqrt{x}$	68	79	$\sqrt{x}$	372	367

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante B:** Nessa comparação de B e C, a gente se dividiu aqui e eu fiquei com B e ela [a outra estudante] ficou com o C. E a gente usou o mesmo critério pra A e C: nós consideramos $t = 1$; $t = 3$ e $t = 5$. O C tava com maior velocidade, mas aí quando passa para $t = 5$, C fica atrás com 97s e o B passa na frente com 100s. Então entre B e C o B tem maior velocidade.
- **Estudante B:** E sobre a questão de aceleração, é bem visível. É só a gente fazer mais uma derivada. É só olhar os coeficientes de $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ pra saber que o maior é o $g(x)$, porque a aceleração dele vai ser 20 enquanto dos outros é 18 e 19.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Okay. Nessa aqui a gente tem que soltar números aleatórios?
- **Estudante D:** Praticamente. No mesmo tempo, quanto que cada um andou. Por exemplo, se um carro andou num tempo de 10s, ele andou 10m. Então a gente verifica se os outros dois foram mais rápidos, menos rápidos ou tiveram uma “constância”.
- **Estudante C:** Acho que se eu verificar a questão do espaço já é suficiente, não? O que se deslocou mais nesse período de tempo, que fez o maior espaço, é o que fez maior velocidade.
- **Estudante D:** Só que o conceito não tá certo... Porque em nenhum momento ele disse que a velocidade do carro seria constante. Então o motorista do carro B, por exemplo, pode pisar no acelerador do nada pra ficar mais rápido num momento

determinado. Então faria mais sentido se fosse uma grandeza constante.

- **Estudante C:** Então o que você sugere?
- **Estudante D:** Faz a derivada dos três, acha a velocidade, a gente vai jogando números pra t [no Comando 9] pra descobrir as possíveis velocidades e é isso.
- **Estudante C:** Okay. Então se eu tenho $\frac{d}{dx}(9,5x^2 - 8x)$, $\frac{d}{dx}(10x^2)$ e $\frac{d}{dx}(9x^2 + 7x - 10)$ [derivadas feitas manualmente] com x de 3 a 10, como a gente colocou aqui, então entre A e B o maior vai ser B; entre B e C o maior vai continuar sendo o B; entre A e C o maior vai ser A após 15s. E sobre maior aceleração, o B vai ser maior. É só derivar de novo. Então eu coloquei $\frac{d}{dx}(20x)|_{x=x}$, porque eu já sabia que ia ser constante, e deu 20.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Cara, eu acho muito mais legal trabalhar essas derivadas com aplicação em algo do que simplesmente “calcule tal coisa com derivada”, “faça a derivada segunda de tal coisa”, isso pra mim [a atividade em questão] é muito mais informativo.
- **Estudante F:** Concordo. E às vezes em sala de aula é tanto conteúdo que a ementa exige que o professor não consegue entrar nessas aplicações ou em um projeto prático.
- **Estudante F:** Eu já fiz as derivações aqui de cabeça. Agora é só jogar no comando da tabela que dá perfeitamente pra gente fazer um sistema de comparação aqui. Então a gente tem que $V_A = 19t - 8$; $V_B = 20t$ e $V_C = 18t + 7$.
- **Estudante E:** Sobre os carros A e B o que tem maior velocidade é B; entre B e C o maior vai ser B. Agora entre A e C o maior vai ser A se a gente analisar do momento da arrancada até os primeiros 15s, porque depois de 15s o C vai ter a maior velocidade. E a gente concordou aqui que o de maior aceleração vai ser justamente aquele que desenvolveu maior velocidade também, que no caso é o carro B.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Nessa questão acho que já temos uma ideia de como fazer, né? A gente vai fazer comparação das funções já derivadas com um valor específico pra x .
- **Estudante H:** Como assim “específico pra x ”?

- **Estudante G:** Quando a gente achou a velocidade no exercício passado, a gente teve que atribuir nosso valor de x a cada dez segundos, nesse caso aqui não é tão diferente. O enunciado não falou quanto tempo, mas deixou em aberto. Então a gente começa a fazer um estudo atribuindo nossos próprios valores.
- **Estudando H:** Hum... Agora entendi o que quis dizer. Então para as comparações, tudo bem se eu ficar com A e B, você com B e C e a gente faz A e C juntas?
- **Estudante G:** Por mim tudo bem. A gente pode colocar o tempo múltiplo de 5 que dá um intervalo maior pra identificar se ocorreu alguma mudança e tal... Dá uma olhada como ficou a velocidade comparada entre A e B:

Figura 28: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Derivadas – 1ª Parte

$\frac{d}{dx}(9,5x^2 - 8x) \Big _{x=5}$	$\frac{d}{dx}(10x^2) \Big _{x=5}$
87	100
$\frac{d}{dx}(9,5x^2 - 8x) \Big _{x=10}$	$\frac{d}{dx}(10x^2) \Big _{x=10}$
182	200
$\frac{d}{dx}(9,5x^2 - 8x) \Big _{x=15}$	$\frac{d}{dx}(10x^2) \Big _{x=15}$
277	300
$\frac{d}{dx}(9,5x^2 - 8x) \Big _{x=20}$	$\frac{d}{dx}(10x^2) \Big _{x=20}$
372	400

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante G:** Nesse caso aqui, o carro B vai continuar tendo maior velocidade, em comparação com o carro A.
- **Estudante H:** Dá uma olhada aqui no meu:

Figura 29: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Derivadas – 2ª Parte

$\frac{d}{dx}(10x^2) _{x=5}$	▲	$\frac{d}{dx}(9x^2+7x-10) _{x=5}$	▲
	100		97
$\frac{d}{dx}(10x^2) _{x=10}$	▲	$\frac{d}{dx}(9x^2+7x-10) _{x=10}$	▲
	200		187
$\frac{d}{dx}(10x^2) _{x=15}$	▲	$\frac{d}{dx}(9x^2+7x-10) _{x=15}$	▲
	300		277
$\frac{d}{dx}(10x^2) _{x=20}$	▲	$\frac{d}{dx}(9x^2+7x-10) _{x=20}$	▲
	400		367

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante H:** Aqui o carro B também ficou na frente. Então entre B e C, o carro B é o que descreve maior velocidade.
- **Estudante G:** Então agora pra saber quem é maior de A e C, é só a gente analisar o que a gente já tem. Dá uma olha que loucura [risos]: quando for 15s o carro C vai ficar no páreo com A e depois vai passar na frente. Então nesse caso aqui, depois dos 15s iniciais, o carro C tem maior velocidade em comparação com o carro A.

Descrição da Atividade:

Em uma determinada tribo indígena um índio faminto saiu para sua caça. De longe, avistou uma pequena lebre que estava no topo de uma montanha. Curiosamente, essa montanha é idêntica ao gráfico de uma função quadrática $f(a) = -a^2 + 5a$. O índio, então, subiu a montanha para capturar seu alimento. Quando chegou ao topo, disparou uma flecha no animal; entretanto, a lebre foi rápida e pulou da montanha no ponto **P(1, 4)** caindo, em linha reta, em uma árvore relativamente próxima da montanha.

Sabendo dessas informações, qual a expressão que representa a trajetória que a lebre fez para “escapar pela tangente”?

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

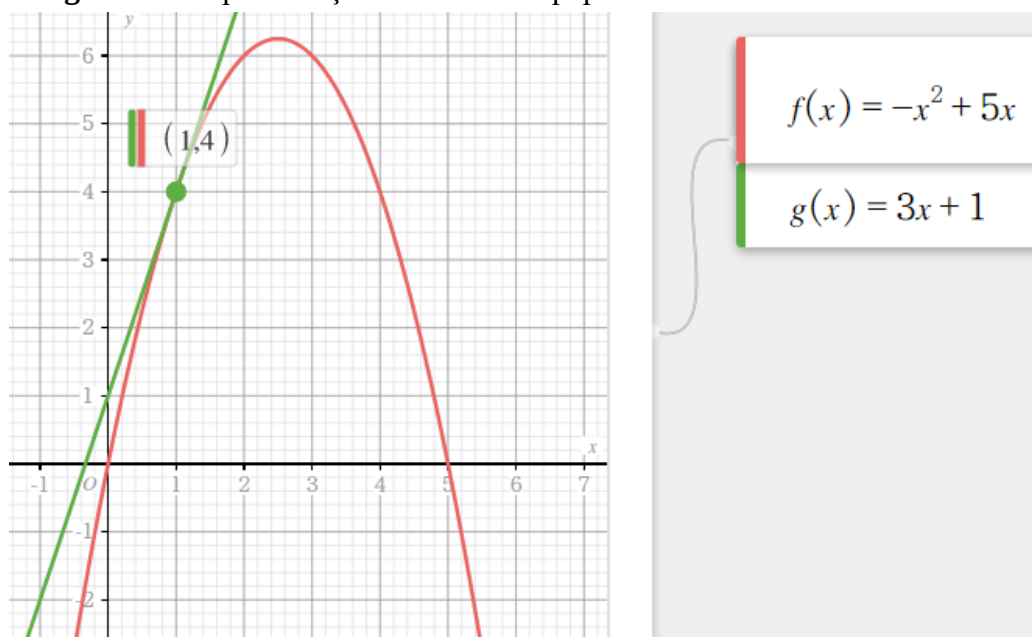
- **Estudante B:** Pelo que eu bem me lembro, a derivada dessa função vai dar a própria reta tangente naquele ponto indicado se a gente jogar na “equação geradora de equações”.
- **Estudante A:** Você diz a fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$?
- **Estudante B:** Isso, aí a gente encontra o m de $y = mx + n$.
- **Estudante A:** Mas como a gente tem que usar calculadora, a gente pode usar o comando $\frac{d}{dx}$ ■. Aí a gente coloca pra $x = 1$ porque a lebre pulou no ponto P(1, 4), seria isso?

Figura 30: Interface da Calculadora Científica: Comando de Derivadas



Fonte: Dados da Pesquisa

- **Pesquisador:** Esse é o caminho, mas tentem explorar outras possibilidades da calculadora também.
- **Estudante B:** Você faz essa parte algébrica e eu dou uma olhada no Classpad pra aproveitar que já está aberto aqui numa guia do celular. Aí a gente verifica e compara o gráfico com a “sua álgebra”.
- **Estudante A:** Então a reta tangente vai ser $y = 3x + 3$
- **Estudante B:** Tem certeza? Aqui o gráfico tá diferente. Não sei se é isso não.
- **Estudante A:** Ah, já sei... Fiz a distributiva errado. É $y = 3x + 1$.
- **Estudante B:** Agora sim. Eu ampliei aqui o *zoom* pra ter certeza e é isso mesmo.
- **Estudante A:** Essa lebre tinha um mini-jato nas costas pra andar em linha reta né? [risos].

Figura 31: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Derivadas – 1ª Parte

Fonte: Dados da Pesquisa

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante D:** Hum... Só pela forma com que tá escrita dá pra ver que é sobre reta tangente.
- **Estudante C:** Exatamente. Quando a gente estuda GA [Geometria Analítica] a gente tem uma “funçãozinha” $y = mx + n$, pelo que bem me lembro. E esse $m = \operatorname{tg} \theta$. Então se gente pensar num $y = (\operatorname{tg} \theta)x + n$ seria o mesmo que dizer $y = f'(1).x + n$ [disse o estudante escrevendo no quadro].
- **Estudante D:** É abstração demais pra minha cabeça, mas é interessante... [risos]
- **Estudante C:** O legal é que a calculadora já dá a derivada no ponto que a gente quiser pra x , pelo que o Pesquisador estava contando pra gente. Aí a gente deriva com o comando pra $x = 1$ pra ver o que a gente acha e depois substitui na equação da reta [$y - y_0 = m(x - x_0)$]

Figura 32: Representação da Resolução da Equipe “TRANSfinito” sobre Derivadas – 2ª Parte

$$\frac{d}{dx}(-x^2 + 5x) \Big|_{x=1}$$

3

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante D:** Certo, agora a gente tem que esse resultado é 3. Então agora a gente já consegue enxergar essa equação que a gente quer. É só substituir. Fica $y = 3x + 1$. Essa é a reta tangente, se fiz os cálculos corretos. Eu conferi aqui no Classpad e deu isso mesmo.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante F:** Eu tenho uma ideia. A gente teria que derivar, acharia o coeficiente angular da reta tangente à curva da montanha naquele ponto em que a lebre escapou. Aí com essas informações em mãos, a gente lançaria na Equação Fundamental da Reta e encontrava essa reta tangente. E como forma de verificar isso, a gente poderia abrir o Classpad e verificar se essas funções realmente satisfazem isso que queremos.
- **Estudante E:** Eu concordo com você. Então $f'(1) = -2(1) + 5 = 3$ [o estudante derivou na própria calculadora científica]. Aí a gente vai ter $y = 3x + 1$. Só que eu não confio muito na minha resposta [risos], então vou olhar no Classpad.
- **Estudante E:** Tá bom. É isso mesmo. Preciso confiar mais na gente [risos].

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Bom, que eu me lembre, essa derivada, no conceito de reta tangente, tá relacionada com a inclinação da reta, né? Porque quando a gente tem lá $y = mx + n$, a gente aprende que $m = tg(\alpha)$. Então derivar a função da curva seria o único caminho que eu enxergo para “resolver essa charada”.
- **Estudante H:** Por via das dúvidas, a gente usa o Classpad pra gente confirmar. Mas se a gente colocar aqui na calculadora $\frac{d}{dx}(-x^2 + 5x)|_{x=1}$ vai dar 3. Então pelo menos o m a gente já tem. Agora eu não me lembro como fazer isso ficar a reta tangente [risos].
- **Estudante G:** Não tem aquela equaçõzinha que a gente costuma jogar pra descobrir a reta normal e a reta tangente? Acho que se a gente colocar esse valor de m lá e substituir os pontos a gente chega onde a gente quer.
- **Estudante G:** Então a gente tem $y - y_0 = m(x - x_0)$ e, substituindo o ponto $P(1, 4)$ e o coeficiente da reta tangente que a gente achou, a gente consegue fazer isso até “de cabeça”, então ficaria $y = 3x + 1$. Agora a gente pode ir no Classpad pra conferir se ela realmente faz esse “movimento tangente” com a curva.

➤ **Estudante H:** Faz sim. Olha só, a reta só passa no ponto (1, 4).

Nessa proposta de ensino acerca das Derivadas, a intenção da investigação foi de identificar se esses estudantes conseguiam articular a derivada com outras áreas de aplicação dentro do próprio CDI, como a relação das Derivadas com a Física (variação) e com as Retas Tangentes à uma curva dada. Alguns estudantes se recordaram de ter visto a aplicação das Derivadas em Física e outros estudantes não conseguiram associar a variação como uma forma de Derivação, então foi necessário que houvesse minhas intervenções em algumas situações.

Nessa proposta os estudantes demonstraram maior familiaridade com a calculadora do que na proposta anterior. Além disso, algumas duplas tinham pessoas com mais curiosidades que outras, e isso, para algumas duplas, se tornava um fato complexo para concentração e/ou foco no que aquela determinada proposta de ensino solicitava devido às múltiplas ideias que iam aparecendo com o desenvolvimento dela.

Assim como no conteúdo de Limites, o conteúdo de Derivadas utilizando calculadoras foi uma abordagem nova para os estudantes participantes, onde ela não participou de todo o processo, mas contribuiu para a formação de conjecturas e formalizações dentro do cenário de aplicação das derivadas: Cinemática e Reta Tangente.

4.3 Terceira Proposta de Ensino: Conteúdo de Derivadas

Descrição da Atividade:

(EsPCex 2013) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, descubra o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo. Obs: Utilize o comando Khicas50 da Calculadora Gráfica para realizar as derivações.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

➤ **Estudante A:** Já aproveitei para fazer tudo na calculadora gráfica. Então eu fiz a diferença de $V(x)$ com $C(x)$ e eu chamei essa diferença de L . Aí nós vamos ter $L = -2x^2 + 28x + 40$, aí o $-2x^2$ passaria a ser $2x^2 = 28x + 40$, aí a gente descobriria o valor máximo, né?

- **Estudante B:** Não acho que essa seja a ideia. Acredito que até a parte do L está certo, mas pelo que me lembro do conteúdo de Máximo e Mínimo, a primeira derivada tem que ser igual a 0 pra gente poder descobrir o ponto (ou os pontos).
- **Estudante A:** Beleza! Derivei aqui e também descobri as raízes usando um dos comandos aqui [do Khicas50]. Aí ficou $-4x + 28 = 0$, aí encontrei $x = 7$ [manualmente]. Agora eu faço a substituição desse 7 na função derivada $L'(x)$?
- **Estudante B:** Acho que não precisa. O enunciado só quer saber a quantidade de lotes, e aqui tá dizendo que são “x lotes”, então acho que já encontramos o que o exercício quer: são 7 lotes desse produto. Mas eu fiz de uma forma diferente.
- **Pesquisador:** Que forma diferente você fez?
- **Estudante B:** Assim... Sei que usar derivada aqui pode ajudar, mas eu fiz manualmente aqui pra ter certeza que eu não estou “falando abobrinhas”, e conferi no Comando 5 [Gráficos] pra ver se tava certo meu pensamento. Foi assim: queremos o máximo, né? Então fiz $x = -\frac{b}{2a}$ da função lucro e deu 7 também. Aí eu fui no Comando 5 e conferi clicando na opção de MAX da função L.
- **Estudante A:** É... Realmente. Só o que difere uma da outra é que uma é mostrada na escola e a outra na faculdade [risos].

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Eu conheço a “lei”, mas nunca entendi o porquê da gente igualar a função derivável a zero pra achar o máximo ou mínimo.
- **Estudante D:** Eu acredito que seja porque a gente quer encontrar as raízes de uma função, quando igualamos a zero. E a partir desses pontos a gente consegue fazer um estudo pra ver se ela representa o máximo ou o mínimo daquela função. Seria isso? Ou estou falando “abobrinha”?
- **Pesquisador:** Pelo que eu entendi da sua fala, você está comentando um procedimento do teste da primeira derivada para descobrir um máximo ou mínimo. Nesse caso, os pontos que você for encontrar não vão representar o valor máximo ou o valor mínimo necessariamente, mas sim os pontos críticos dessa determinada função f . Agora vou deixar vocês pensarem.
- **Estudante D:** Okay. Então esses pontos críticos, se a gente substituir na função original, será que a gente encontra o ponto máximo ou o ponto mínimo?
- **Estudante C:** Muito provavelmente. Eu interpreto que pontos críticos são os pontos

necessários para descobrir algo. E esses valores não vão ficar “jogados”. A gente tem que substituir eles em algum lugar. Pensa, se substituir nessa função que a gente derivou, vai virar a mesma coisa. Mas se substituir na original, vai dar um outro resultado diferente.

- **Estudante D:** Bem que isso faz sentido pra ser máximo ou mínimo. Tipo um $2x^2$ que você deriva e fica $4x$, iguala a zero, e o resultado tanto do ponto crítico quando do mínimo dessa função é 0. Inclusive, nesse exemplo, a gente pode ver que ponto de máximo ou mínimo pode coincidir com o próprio ponto crítico. Legal isso.
- **Estudante C:** Acho que pra essa questão de lucro, só basta a gente igualar uma na outra e descobrir o x né? Ah não... Esquece. Não percebi o enunciado dizendo que é obtido pela diferença. Mas será que só fazendo Bháskara não resolve?
- **Estudante D:** Muito provavelmente não. Faz mais sentido derivar a expressão pra gente ter uma facilidade em calcular o x . Então se a gente faz a derivada da função lucro, a gente tem $L'(x) = -4x + 28$. Esse resultado igual a zero [manualmente], teremos $x = 7$. Aí a gente substitui esse valor de x na função lucro... [interrupção]
- **Estudante C:** Epa, calma aí... Ele não pediu pra determinarmos o lucro, mas sim a quantidade de lotes. O enunciado tá falando “uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto”, então a gente já achou: essa empresa tem que vender 7 lotes.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** É tão fácil que parece pegadinha [risos]. A função que representa o custo, como o próprio enunciado diz, vai ser a subtração do valor pelo custo, então a gente tem $y = -2x^2 + 28x + 40$. Como eu já fiz a subtração pelo comando, vou fazer a derivada também, já que tem como fazer aqui.
- **Estudante F:** Como você faz a derivada mesmo? Esqueci.
- **Estudante E:** Você abre o comando, escolhe **diff**, aí ele vai abrir um parêntese pra você colocar o valor que quer derivar. Aí, olha só, você vai ter $y' = -4x + 28$.
- **Estudante F:** Eu sei que pra gente achar máximo ou mínimo a gente precisa fazer o teste da primeira derivada e igualar a zero.
- **Estudante E:** Mas parando pra pensar bem, eu acho que essas quadráticas podem ser resolvidas pela fórmula do ponto máximo da parábola. Será que funciona?
- **Estudante F:** Se você quiser, faz essa da fórmula que você falou e eu tento aqui pela regra da primeira derivada. Se os resultados baterem, então tá certo. Em último

caso, a gente corre pro Classpad de novo [risos].

- **Estudante E:** Olha, nas minhas contas [no Comando A – Equação/Função] deu $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-2} = 7$. Como ele pediu foi o lucro máximo com o número de lotes, e o número de lotes é x , então a resposta que eu cheguei foi 7 lotes.
- **Estudante F:** Como eu já apliquei a derivada, então é só igualar a zero. Então com $4x = 28$ eu consegui fazer de cabeça e deu 7 mesmo. Acredito que está correto tanto meu raciocínio quanto o seu.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Já que temos que usar o Khicas50, então eu já vou fazer tudo nele aqui mesmo. Se a gente fizer aqui a subtração do valor da venda pelo custo, a gente tem o lucro representado por $L(x) = -2x^2 + 28x + 40$.
- **Estudante H:** Aqui a gente pode facilitar demais nossa vida. Ele [o enunciado] não quer o lucro máximo? A “função lucro” a gente já tem. É só usar o comando de equações da calculadora científica que a gente encontra o ponto máximo dessa função.
- **Estudante G:** Verdade. Dá pra gente fazer esse “pulo do gato”. Mas também só funciona pra quadráticas, né? Porque se for uma função de terceiro, quarto, quinto grau, por exemplo, já não funciona.
- **Estudante H:** Exatamente. Então se a gente usar o comando, a gente tem essas duas informações...

Figura 33: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Derivadas – 3ª Parte

Máx de $y = ax^2 + bx + c$ x=	Máx de $y = ax^2 + bx + c$ y=
7	138

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante H:** Agora não sei se pra obter o lucro máximo se vende 7 lotes do produto ou se vende 138. Se for levar em consideração ambos os números em termos de ser maior, acho que seria 138.
- **Estudante G:** Acho que não. Porque veja... Eu interpretei que o enunciado está

colocando x como a quantidade desses lotes. Se ele perguntasse, por exemplo, quanto seria o lucro, aí sim eu acho que seria 138.

- **Estudante H:** Realmente faz sentido. É isso mesmo: 7 lotes do produto devem ser vendidos pra empresa obter lucro máximo.

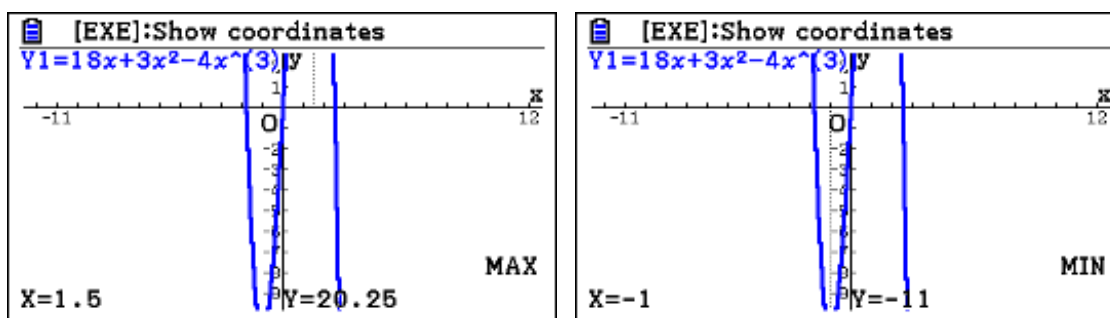
Descrição da Atividade:

Vamos fazer uma investigação inicial para familiarizarmos com as noções de máximo e mínimo? Considere que em determinado mês a curva que representa a taxa de produção de uma empresa foi dada por $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$. Como você faria para encontrar o ponto máximo e o ponto mínimo desta função?

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante A:** Acho que eu vou fazer igual o Estudante B e vou no Comando 5 pra ver também. Aí eu encontro o máximo de lá pelo comando G-SOLVE igual ele fez.
- **Pesquisador:** Aí não tem graça né? [risos] Pode colocar a resposta que achar conveniente, mas gostaria que desenvolvessem essa ideia de máximo e mínimo.
- **Estudante B:** Eu fiz a primeira derivada e deu $y = -12x^2 + 6x + 18$. Aí eu achei as raízes também nesse comando do Khicas50 ($x' = -1$ e $x'' = 3/2$). Mas não faz sentido elas serem as raízes, pelo que vi no gráfico. Então acho que são pontos críticos.
- **Pesquisador:** E o que são pontos críticos no seu entendimento?
- **Estudante B:** Pra mim, eles funcionam [os pontos críticos] como a *parte x* do par ordenado (x, y) do ponto máximo ou mínimo. Aí se a gente substitui esses pontos críticos na função original, a gente encontra a *parte y* do máximo ou mínimo.
- **Estudante A:** Então se a gente substituir os dois pontos que você achou, a gente encontra o ponto máximo e também o ponto mínimo.
- **Estudante A:** É isso mesmo. Deu certo. Comparei aqui com o gráfico e deu certinho o que fizemos. O ponto mínimo vai ser $(-1; -11)$ e o ponto máximo vai ser $(3/2; 20,25)$.

Figura 34: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Derivadas – 2ª Parte

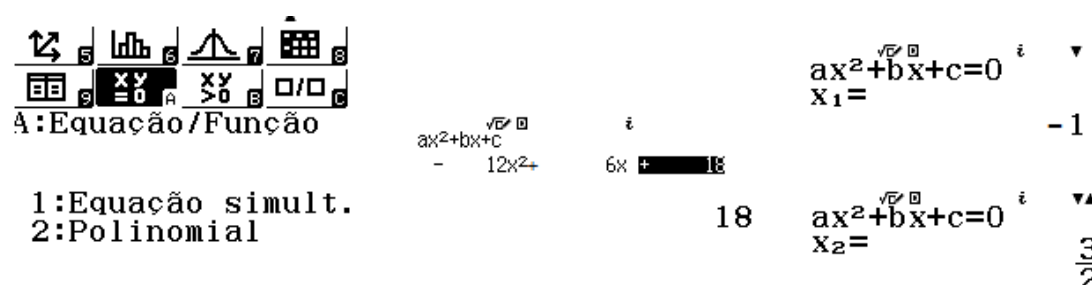


Fonte: Dados da Pesquisa

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Primeiro de tudo, uma função dessas dá um pouco de medo [risos]. Mas dá pra fazer tranquilo, eu acho, com as calculadoras. Se a gente derivar aqui no comando [Khicas50] a gente vai ter $-12x^2 + 6x + 18$.
- **Estudante D:** Como eu tenho mais habilidade na científica do que na gráfica [calculadoras], eu já me adiantei e coloquei aqui no comando de equações e achei as raízes dessa função.

Figura 35: Representação da Resolução da Equipe “TRANSfinito” sobre Derivadas – 3ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante C:** Tá, vamos lá... Esses pontos que você achou pra x_1 e x_2 não são os pontos de máximo e mínimo. Eu coloquei a função original no comando de gráficos [Comando 5: Gráficos] e eu vi de relance que essa função tem um ponto de máximo e outro de mínimo ao mesmo tempo. Então vamos pegar esses valores que você achou ($x_1 = -1$ e $x_2 = 3/2$) e vamos substituir pra ver o que achamos.
- **Estudante D:** Ah, entendi... Agora eu “saquei”. Então ele funciona como uma

espécie de par ordenado, tipo um $P(x, y)$, onde a gente já descobriu a primeira parte dessa coordenada que foi $P(1, y)$, agora só falta achar o y que vai ser resultado dessa substituição! Hum... Agora fez mais sentido pra mim. Estava confundindo os conceitos.

- **Estudante C:** É isso que eu tô tentando te explicar. Porque é mais simples do que parece. Se a gente substitui, a gente tem $y_1 = -11$ e $y_2 = 81/4$. Aí pronto. Já temos nosso ponto mínimo e nosso ponto máximo.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Eu já sou muito visual, então quando vem uma função “medonha” com terceiro grau eu já vou direto no gráfico pra ver o comportamento dela. Porque uma função afim, a gente tem noção “de cabeça”, a quadrática também, mas passou disso já complica um pouquinho.
- **Estudante F:** Olha, aqui no comando a gente vê que o gráfico tem tanto um ponto de máximo quanto um ponto de mínimo. Isso é muito interessante, né? Se eu fosse “sacana” eu apertava aqui na funcionalidade pra achar o máximo e o mínimo, mas eu quero desenvolver algebricamente a ideia [risos]. Pode começar, se quiser.
- **Estudante E:** Okay. A gente sabe, pela regrinha da primeira derivada, que ela tem que ser igual a zero para acharmos os pontos. Mas acho que não vão ser os pontos de máximo para x . Porque fica muito esquisito no gráfico. Parece que não é a mesma coisa.
- **Estudante F:** Pois é. Mas esses pontos aí realmente não são de máximo mesmo não. Nem de mínimo. São “pontos candidatos” que a gente vai substituir na equação original e, aí sim, ver qual é o ponto que a gente tá procurando. Então fazendo a derivada, a gente vai ter $y' = -12x^2 + 6x + 18 = 0$. Aí aqui eu vou usar o que você [Estudante E] fez no exercício passado usando a fórmula do ponto máximo. Mas me explica aqui como você fez isso na calculadora.
- **Estudante E:** É, mas se a gente usar os pontos máximos agora ele vai dar o resultado só para essa função quadrática e não para a que a gente quer. Lembra? Na aba de Equação/Função eu selecionei “Polinomial”, atribuí o grau 2, coloquei os coeficientes e encontrei os “pontos candidatos” de $x = -1$ e $x = 3/2$. E aí substituindo a gente tem isso [o valor máximo e o mínimo]:

Figura 36: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Derivadas – 1ª Parte

$$\begin{aligned}
 & -4\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 18\left(\frac{3}{2}\right) \\
 & -4\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 18\left(\frac{3}{2}\right) \\
 & \quad \quad \quad \frac{81}{4} \\
 & -4(-1)^3 + 3(-1)^2 + 18(-1) \\
 & \quad \quad \quad -11
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante F:** Então o ponto mínimo é P(-1, -11) e Q(3/2, 81/4), seria isso?
- **Estudante E:** Pelo que eu entendi das contas, sim. E “bate” com o gráfico.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Beleza. Nessa aqui a gente vai fazer a mesma coisa praticamente. A gente deriva aqui pelo comando [Khicas50] e aí a gente vai ter $-12x^2 + 6x + 18 = 0$ segundo a regrinha da primeira derivada. Só que a gente encontrou uma quadrática. Dá pra gente continuar pelo comando de equações da calculadora científica, né? Só não sei ao certo onde vou substituir.
- **Estudante H:** Pensa... Se você substitui as raízes que você encontrar, que são os “pontos candidatos” que a gente tem, na própria função que você derivou, vai dar zero. Então a gente não ia sair do lugar. Não tem como justificar essa substituição que a gente fez [risos].
- **Estudante G:** Você tem razão. Realmente não faz sentido. A gente encontra os “pontos candidatos” como uma das partes do par ordenado do ponto de máximo ou mínimo que a gente procura. Então como “pontos ideais” que nós temos são $x = -1$ e $x = 3/2$. E se a gente substitui na função original, a gente tem $y = -11$, pra $x = -1$ e $y = 20,25$ pra $x = 3/2$.
- **Estudante H:** Enquanto você substitua aí os valores dos “pontos candidatos”, eu abri aqui no comando de gráficos [Comando 5] da calculadora gráfica pra conferir e

realmente são esses pontos mesmo.

Nessa segunda proposta de ensino sobre Derivadas, o objetivo estava em identificar como que eles [os estudantes participantes] manifestavam suas compreensões diante de duas problemáticas pertencentes ao estudo das Derivadas: Maximizações e Minimizações.

As manifestações dos estudantes acerca dessa proposta, ao longo de todas as questões, demonstraram uma conexão original na maioria das ideias. O intuito do desenvolvimento para encontrar o máximo ou o mínimo de uma determinada função $f(x)$ estava em utilizar o teste da primeira derivada e encontrar o(s) zero(s) daquela determinada função. Entretanto, a maioria das duplas fez uma conexão repentina diferente da esperada: utilizar as próprias funções quadráticas encontradas para achar ora os Pontos Críticos, ora o próprio ponto de máximo ou de mínimo. Para deixar claro, a expectativa estava em utilizar os testes da derivada, chegar à uma função afim e encontrar o valor de x .

Outra observação que pôde ser feita foi acerca da forma com que eles compreenderam seus resultados e utilizaram múltiplas formas de confirmação. Alguns começaram analisando o gráfico e confirmaram no desenvolvimento da função; outros desenvolveram primeiro e depois validaram no comando gráfico; inclusive alguns estudantes investigaram outras funcionalidades da calculadora de modo a fazê-la participar de todo o processo de produção e formalização dos conhecimentos naquela atividade específica.

4.4 Quarta Proposta de Ensino: Conteúdo de Integrais

Descrição da Atividade:

O custo marginal é o custo a mais que a empresa vai ter para aumentar a produção de um determinado bem/produto. Uma informação muito importante ao calcular o custo marginal é que ele representa a derivada da função custo total $C(x)$. Vamos pensar em uma situação prática. Estipule um custo para os meses de produção para uma determinada empresa que fabrica artigos de decoração para festas. Uma contadora fez o balanço semestral e descobriu que o custo marginal dos meses puderam ser representados por uma generalização, conforme foi dado pela seguinte tabela.

Figura 37: Organograma de Custos

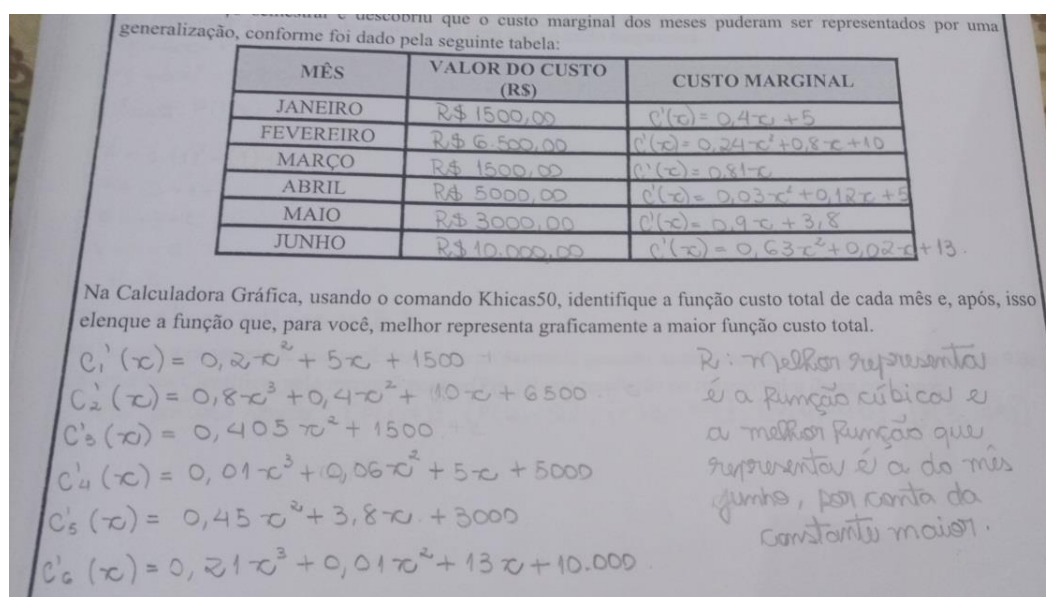
MÊS	VALOR DO CUSTO (R\$)	CUSTO MARGINAL
JANEIRO		$C'(x) = 0,4x + 5$
FEVEREIRO		$C'(x) = 0,24x^2 + 0,8x + 10$
MARÇO		$C'(x) = 0,81x$
ABRIL		$C'(x) = 0,03x^2 + 0,12x + 5$
MAIO		$C'(x) = 0,9x + 3,8$
JUNHO		$C'(x) = 0,63x^2 + 0,02x + 13$

Fonte: Autoria própria

Na Calculadora Gráfica, identifique a função custo total de cada mês e, após isso, elenque a função que, para você, melhor representa graficamente a maior função custo total.

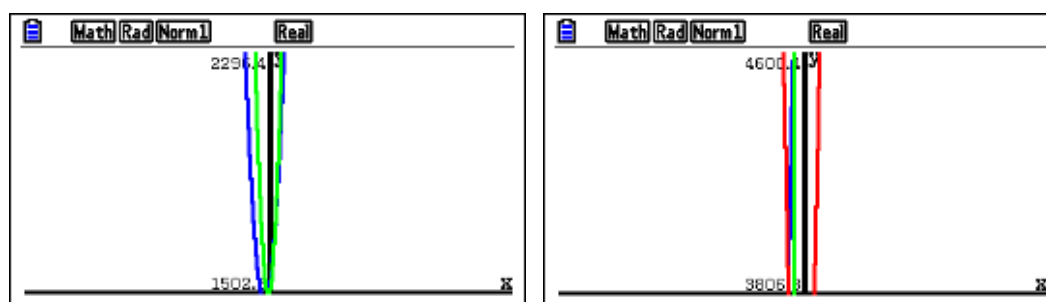
DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante A:** Vamos pensar então sobre essa situação prática... Janeiro tem o quê de festividade? Só ano novo. Então início de ano quanto que a gente colocaria de custo para uma loja assim?
- **Estudante B:** Acho que R\$1.500,00 tá bom. Porque não gasta muito.
- **Estudante A:** Fevereiro tem Carnaval, então acho que R\$6.500,00 é um custo okay pensando que é um período que gasta muito com decoração.
- **Estudante B:** Março acho que não tem nada importante, então eu colocaria o mesmo custo de Janeiro. Já Abril tem Páscoa, então eu colocaria R\$5.000,00 de custo.
- **Estudante A:** Maio tem Dia das Mães, então acho que R\$3.000,00 é um valor de custo até bom pro período. E Junho tem tanto Dia dos Namorados quanto Festa Junina, então eu estipularia um custo mais elevado como R\$10.000,00.
- **Estudante B:** Como a gente tem que montar uma função $C(x)$, a gente tem que aplicar alguma propriedade das derivadas para sair do $C'(x)$ pra $C(x)$?
- **Estudante A:** Ué... Mas a integral ela não é uma antiderivada? Se a gente fizer acho que volta a ser $C(x)$, né? Se for, a gente vai ter algo assim:

Figura 38: Registros Escritos da Equipe “C” – Custos Marginais e Totais

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante A:** A gente usa o Comando Khicas50 pra fazer as integrações indefinidas e o Comando 5 (Gráficos) e colocamos 3 funções em uma e 3 funções em outra calculadora pra não ficar muito “poluído visualmente”.

Figura 39: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Integrais – 1ª Parte

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante A:** Pra nós, a que representa o maior custo $C(x)$ é a do mês de Junho por ter uma constante maior.

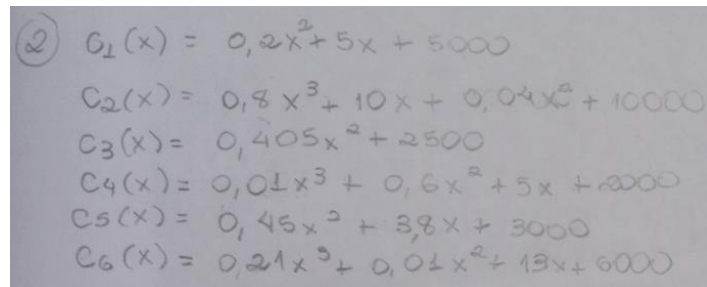
DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** Começo de ano é sempre festa, então pra Janeiro a gente pode

atribuir um valor de custo de R\$5.000,00. Fevereiro tem Carnaval, então podemos ter R\$10.000,00. Aí Março dá uma “caída” porque não tem tanta festa, então R\$2.500,00. Pra abril, só tem páscoa, e mesmo assim não acho que o custo seria muito grande, então acho que R\$2.000,00 tá bom. Maio eu colocaria uns R\$3.000,00. Agora Junho tem Festa Junina e gasta até uma quantia grande. Eu fecharia em R\$6.000,00. O que acha?

- **Estudante D:** Eu concordo. Os valores fazem sentido pra mim, já que cada mês tem uma comemoração diferente e tem meses que nem comemoração tem.
- **Estudante C:** Agora a gente precisa encontrar o custo total. Escolhe duas funções, eu fico com as outras duas e a gente analisa junto as duas que sobrarem nas calculadoras.
- **Estudante D:** Eu quero a de Fevereiro, Abril e Maio.
- **Estudante C:** Então eu fico com Janeiro, Março e Junho [nesse momento, os estudantes já tinham utilizado o Comando Khicas50 para fazer as Integrais Indefinidas].

Figura 40: Registros Escritos da Equipe “TRANSfinito” – Custos Totais



Handwritten mathematical functions for costs $C_1(x)$ through $C_6(x)$:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= 0,2x^2 + 5x + 5000 \\ C_2(x) &= 0,8x^3 + 10x + 0,04x^2 + 10000 \\ C_3(x) &= 0,405x^2 + 2500 \\ C_4(x) &= 0,01x^3 + 0,6x^2 + 5x + 2000 \\ C_5(x) &= 0,45x^2 + 3,8x + 3000 \\ C_6(x) &= 0,21x^3 + 0,01x^2 + 13x + 6000 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

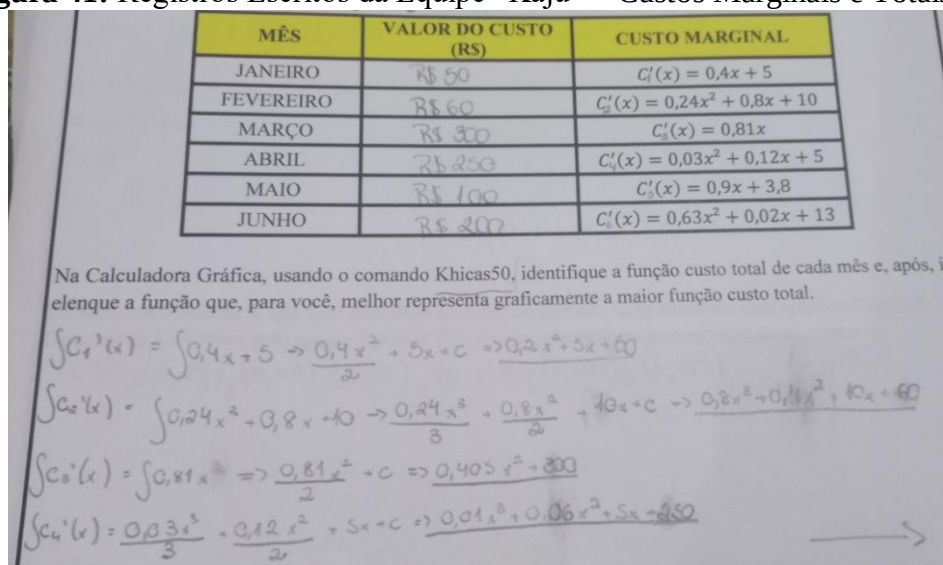
- **Estudante C:** Okay. A gente tem que achar o $C(x)$. Se a gente tem uma função já derivada representando o custo marginal, então se a gente aplicar a integral a gente consegue achar o $C(x)$, porque ela é uma antiderivada. E como no comando [Khicas50] não aparece a constante, pelo que ele [Pesquisador] disse pra gente, então acho que podemos substituir direto, né? Tipo, tratar a constante como o valor de custo, porque pra mim isso faz sentido.
- **Estudante D:** Agora fazendo uma análise aqui das funções, eu acho que nenhuma dessas quadráticas “sobe tanto” como as de terceiro grau, pensando no quadrante positivo. Não sei se concorda comigo...

- **Estudante C:** Sim, também acho. Nessas funções que colocamos aqui acho que as de terceiro grau realmente dão uma subida bem acentuada em relação às outras.
- **Estudante D:** Pra mim, a função que representa o maior custo total é o de fevereiro, principalmente por se tratar da função que tem maior valor de custo como constante. O que você acha?
- **Estudante C:** Concordo contigo. Também pensei dessa forma.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** A gente vai pensar um pouco “fora da casinha” [risos]. A gente vai imaginar uma empresa que tá começando agora, que acabou de abrir, bem pequena. Então a gente decidiu colocar valores baixos mesmo.
- **Estudante F:** É como aqueles botecos de esquina que acabou de fechar e virou uma mini-empresa [risos].
- **Estudante E:** Os valores de custo que a gente decidiu colocar, por ser uma empresa que tá começando, foram: R\$50,00 para Janeiro; R\$60,00 para Fevereiro; R\$300,00 para Março; R\$250,00 para Abril; R\$100 reais para Maio e R\$200 reais para Junho.
- **Estudante F:** A gente integrou cada função juntos [utilizando o Comando Khicas50 da Calculadora Gráfica] e aí fomos substituindo em C os valores de custo que a gente atribuiu, a gente vai ter algo assim:

Figura 41: Registros Escritos da Equipe “Kaju” – Custos Marginais e Totais

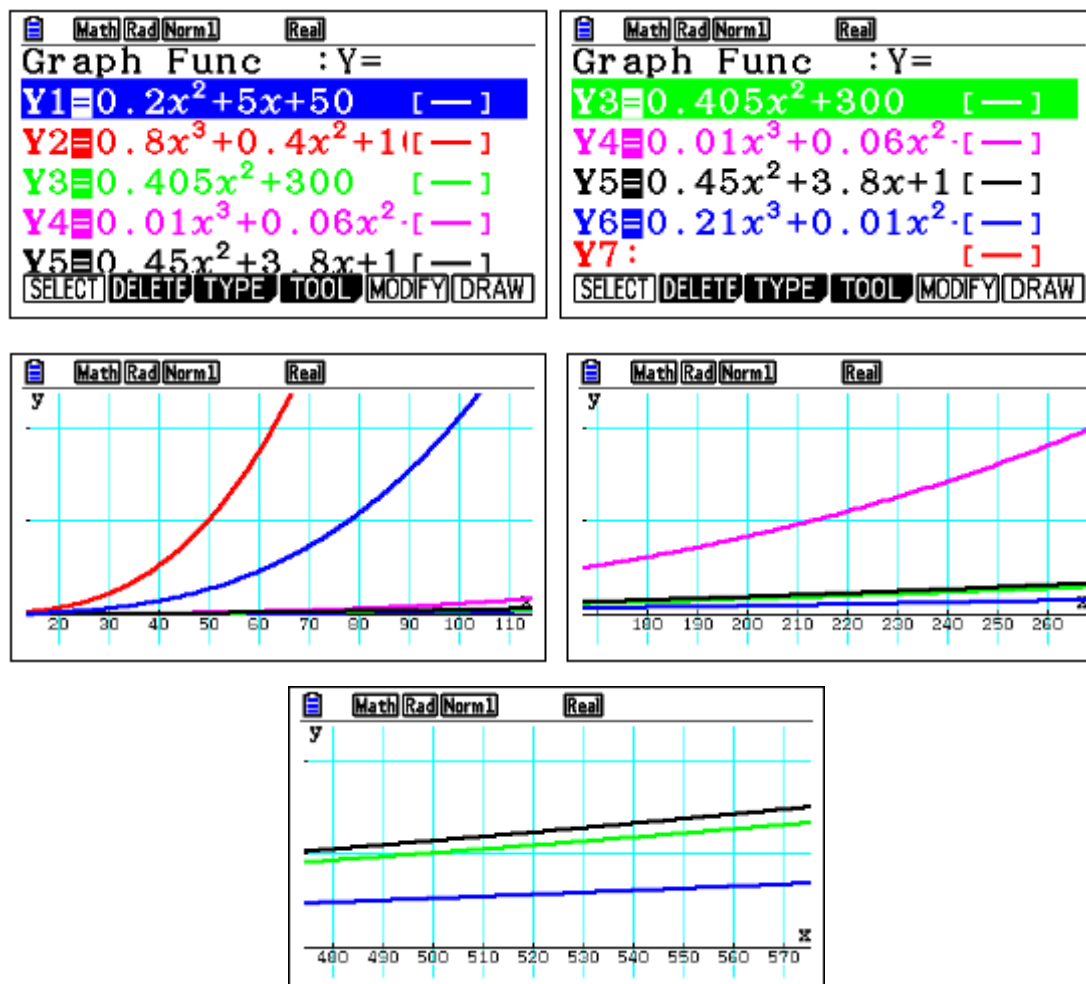


Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante E:** A gente conversou muito e chegamos na conclusão de que a melhor

função que, pra gente, representa o maior custo, graficamente, foi a Função de Janeiro ($C1(x)$). Justamente pensando nessa questão de ser uma loja que tá iniciando.

Figura 42: Representação Gráfica da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 1ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante G:** Uma coisa que eu reparei aqui no comando [Khicas50] é que quando a gente coloca **integrate** e coloca a função que queremos integrar, ele dá o resultado mas não dá a constante. Tá certo isso?
- **Estudante H:** Eu acho que é porque tá em linguagem *python* ou talvez seja um sistema da própria calculadora que não esteja lendo a constante. Meu achismo.
- **Estudante G:** Mas não tem problema, a gente acrescenta +C nessas que a gente for integrando. Mas antes de tudo vamos integrar todas essas funções e depois a gente

atribui o valor do custo, porque acho que aí sim entra a constante.

Figura 43: Registros Escritos da Equipe “As Capitalistas” – Custos Marginais e Totais

MÊS	VALOR DO CUSTO (RS)	CUSTO MARGINAL
JANEIRO	4.000	$C'(x) = 0,4x + 5$
FEVEREIRO	10.000	$C'(x) = 0,24x^2 + 0,8x + 10$
MARÇO	5.000	$C'(x) = 0,81x$
ABRIL	7.000	$C'(x) = 0,03x^2 + 0,12x + 5$
MAIO	5.000	$C'(x) = 0,9x + 3,8$
JUNHO	7.000	$C'(x) = 0,63x^2 + 0,02x + 13$

Na Calculadora Gráfica, usando o comando Khicas50, identifique a função custo total de cada mês e, após, isso elenque a função que, para você, melhor representa graficamente a maior função custo total.

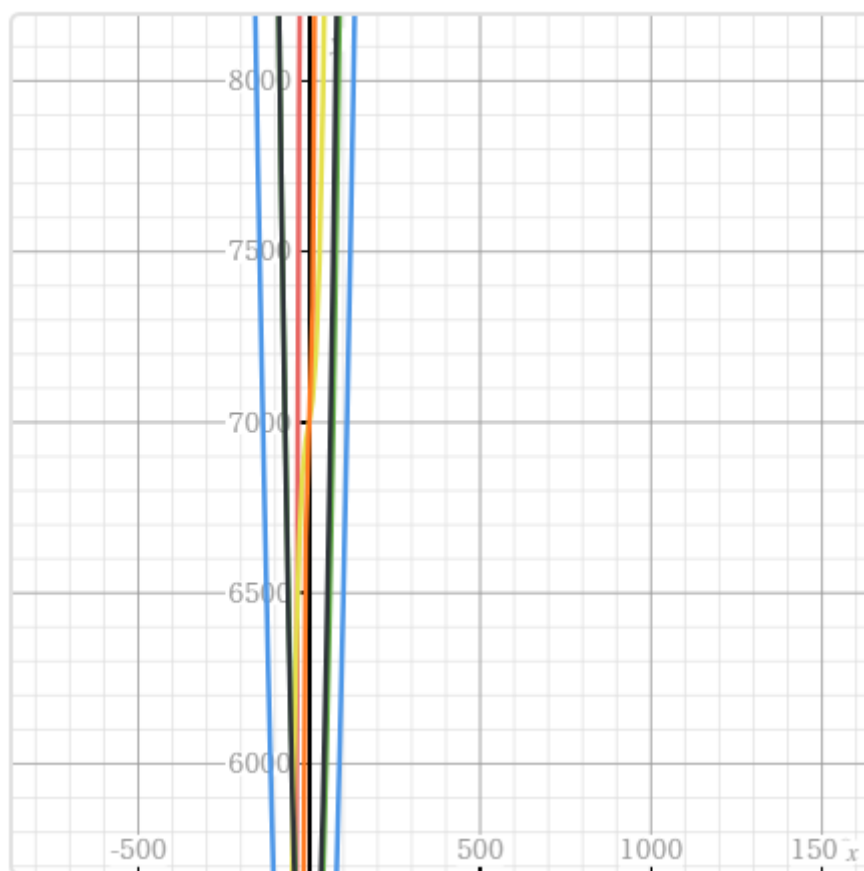
JAN - $0,2x^2 + 5x + 4000$
 FEV - $0,08x^3 + 0,4x^2 + 10x + 10000$
 MAR - $0,405x^2 + 5000$
 ABRIL - $0,01x^3 + 0,06x^2 + 5x + 7000$
 MAIO - $0,45x^2 + 3,8x + 5000$
 JUN - $0,21x^3 + 0,01x^2 + 13x + 7000$

a de junho pois apresenta um aumento no custo com pouco produto

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante H:** Agora pra analisar esses gráficos aqui, assim que a gente for colocando a gente já pode ir anotando no caderno as funções que a gente classifica como maiores. Mas a gente já coloca as 6 funções.
- **Estudante G:** Mas eu acho melhor a gente verificar esses gráficos no Classpad porque é melhor pra gente movimentar. Na gráfica, mesmo com zoom, a gente precisa ficar movimentando o mouse de 1 em 1 quadradinho e isso além de cansar não mostra como pode estar “lá em cima”.
- **Estudante H:** Também acho melhor.

Figura 44: Representação Gráfica da Equipe “As Capitalistas” sobre Integrais – 1ª Parte



$$f(x) = \frac{2}{10}x^2 + 5x + 4000$$

$$g(x) = \frac{8}{100}x^3 + \frac{4}{10}x^2 + 10x + 10000$$

$$h(x) = \frac{405}{1000}x^2 + 5000$$

$$i(x) = \frac{1}{100}x^3 + \frac{6}{100}x^2 + 5x + 7000$$

$$j(x) = \frac{45}{100}x^2 + \frac{38}{10}x + 5000$$

$$k(x) = \frac{21}{100}x^3 + \frac{1}{100}x^2 + 13x + 7000$$

- **Estudante G:** A gente chegou num consenso aqui: a que representa a maior função custo total é a do mês de Junho ($0,21x^3 + 0,01x^2 + 13x + 7000$) porque ela

apresenta um aumento no custo (em y) com pouco produto.

Nessa proposta de ensino em específico ocorreram duas situações curiosas: a) uma equipe não utilizou o comando gráfico; b) uma equipe atribui valores muito pequenos em relação às outras equipes.

O fato de uma das equipes não ter utilizado nenhum recurso visual que validasse suas falas pode estar condicionado ao fato de terem direcionado todo o foco para o valor que a constante (que representava o valor de custo) estava assumindo naquela função. Então foi perceptível que, para esses alunos, “quanto maior a constante, maior será a função de custo”, e essa pode ser uma afirmação muito perigosa dependendo do movimento que esse gráfico faz em relação aos outros gráficos, pois nem sempre a maior constante determinará que aquele gráfico pode representar algo maior ou máximo, dependendo do contexto. Já o fato de uma das equipes ter atribuído um valor de custo muito baixo, por mais que quisessem relacionar com um estabelecimento que esteja iniciando os primeiros passos, é notório uma estratégia nos valores, tendo em vista que a interface da Calculadora Gráfica ficaria muito desconfigurada em relação aos gráficos devido a escala das funções e a janela de visualização. Assim, atribuir valores pequenos ajudaria no reconhecimento das funções sem ter que movimentá-las demasiadamente.

4.5 Quinta Proposta de Ensino: Conteúdo de Integrais

Descrição da Atividade:

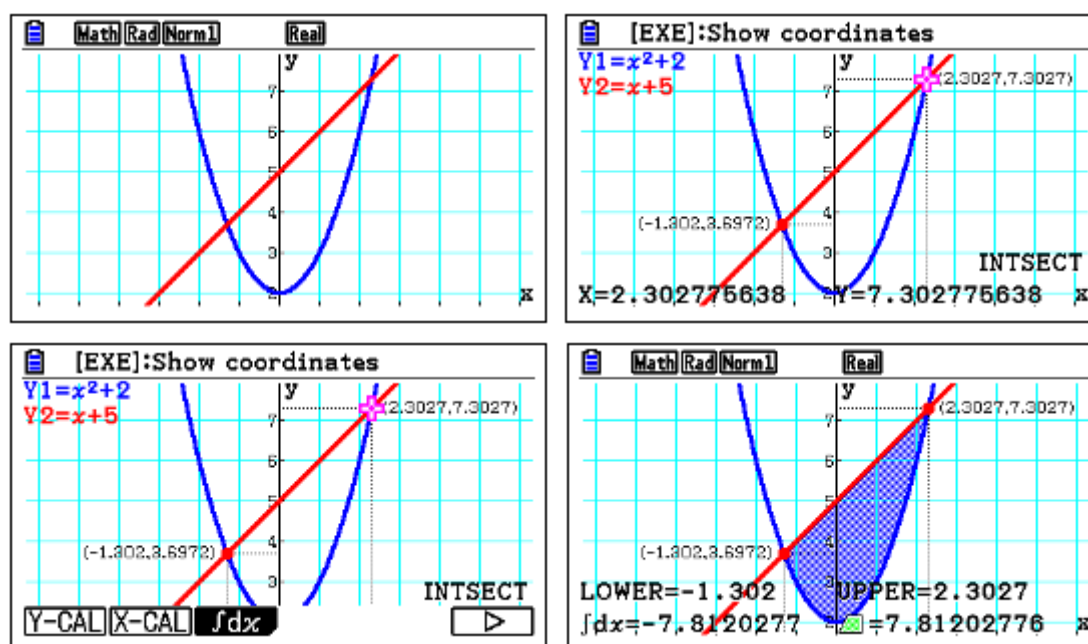
Uma das habilidades da Integral Definida está em definir o valor de uma área curva, onde as fórmulas que já conhecemos não conseguem auxiliar no processo de descobrimento da área. Pensando nisso, vamos brincar um pouco com o Comando 5 (Gráfico), da Calculadora Gráfica.

A) Pense em duas funções (uma quadrática e outra afim), de modo que elas se cruzem em determinados pontos, e plote ambas no comando indicado. Analisando o valor da área hachurada, comente como a Calculadora chegou a tal resultado. Obs: Se julgar necessário, pode expor a resolução como justificativa ou apenas comentar sobre.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “C” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante B:** O que você acha de $x^2 + 2$ e $x + 5$?
- **Estudante A:** Acho que pode ser uma boa.

Figura 45: Representação Gráfica da Equipe “C” sobre Integrais – 2ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante A:** A gente decidiu fazer “a ida” de uma vez só. Tipo, a gente vai desenvolver a integral na calculadora científica pra ver se é isso mesmo que deu na calculadora gráfica.
- **Estudante A:** Como a gente tá usando o comando $\int dx$, e a gente quer definida a gente não teria que determinar um intervalo?
- **Estudante B:** Se duas funções se cruzam, é uma intersecção. Se é uma intersecção, então ali já o primeiro ponto do intervalo que a gente quer. Assim que eu penso.
- **Estudante A:** Aí seria como x_1 e x_2 né? Pensando em um intervalo $[x_1, x_2]$.
- **Estudante B:** Acredito que sim. Eu achei a intersecção aqui e deu $x_1 = -1,302$ e $x_2 = 2,3027$. Aí a gente faz aqui na [calculadora] científica a “função superior, menos, a função inferior”.
- **Estudante B:** Se a gente integra dentro desse “intervalo de intersecção” [pontos de intersecção em x], então a gente vai ter $\int_{-1,302}^{2,3027} (x + 5) - (x^2 + 2) dx$ que vai dar uma área aproximada de 7,81. E quando a gente plotou as duas funções no comando “Gráfico”, e apertou em $\int dx$, a área “pintada” deu exatamente esse valor da área aproximada. Então acho que fizemos certo [risos].

Figura 46: Representação da Resolução da Equipe “C” sobre Integrais – 1ª Parte

$$\int_{-1,302}^{2,3027} -x^2 + x + 3 dx$$

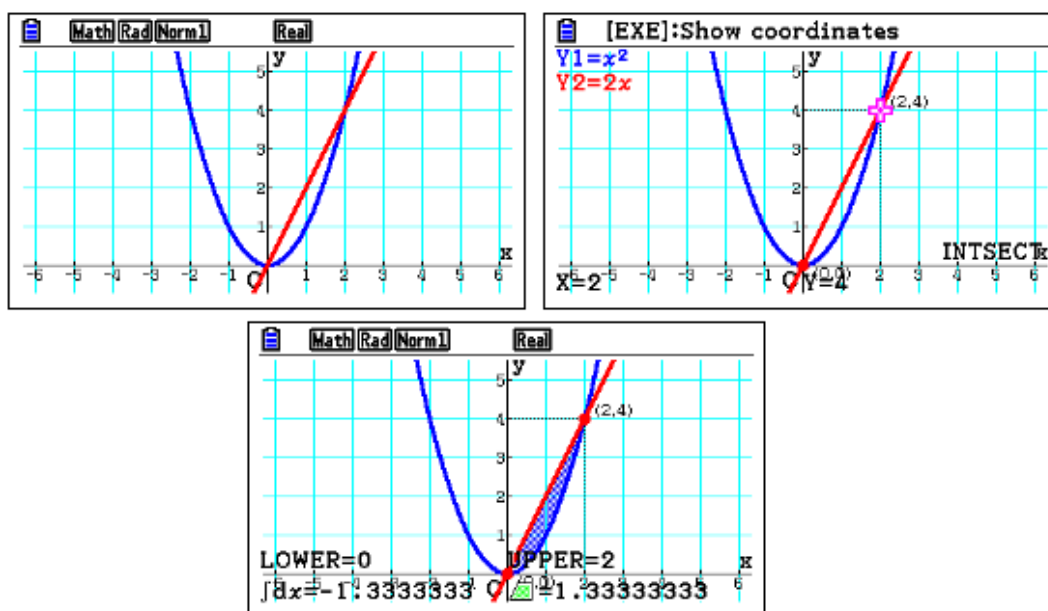
7,812026669

Fonte: Dados da Pesquisa

DIÁLOGOS DA EQUIPE “TRANSfinito” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante C:** A gente tava conversando aqui e como a gente ainda não sabe totalmente como que essa calculadora trabalha pra achar a área, se pode dar erro ou alguma coisa assim, a gente escolheu duas funções que se cruzam e não deixam uma área tão grande assim: $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x$.
- **Estudante D:** Se não estou enganado, a gente vai precisar dos pontos de intersecção pra saber até onde que a gente vai integrar. A própria calculadora gráfica já traz esses pontos no comando **INTSECT**, que são 0 e 2. Então a gente usa o comando $\int dx$ e encontra. Olha só... Aqui deu uma área aproximada de 1,3.

Figura 47: Representação Gráfica da Equipe “TRANSfinito” sobre Integrais – 1ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

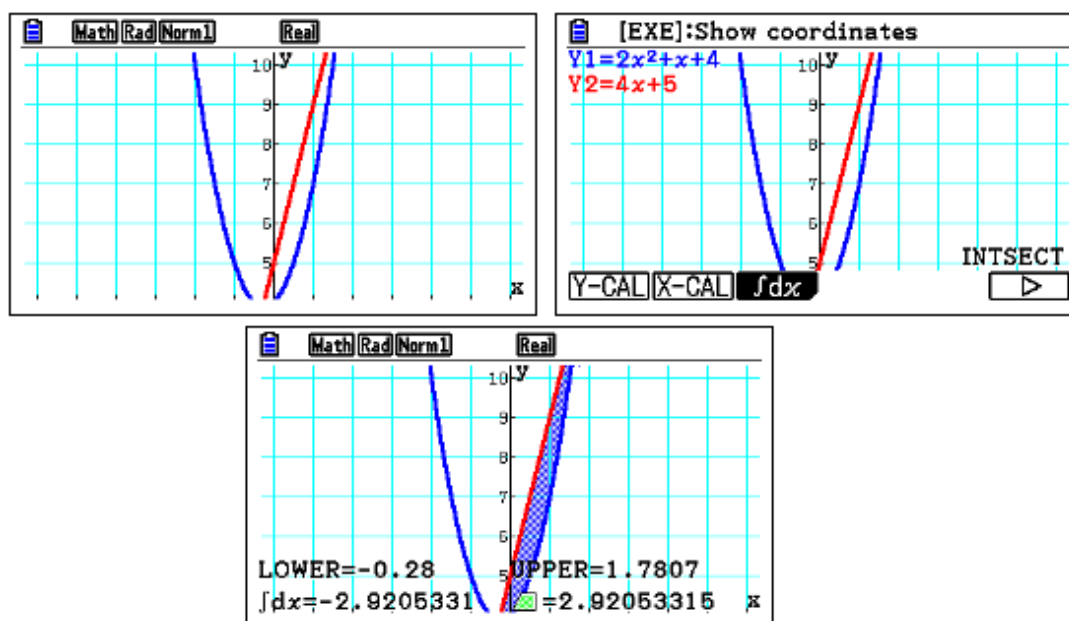
- **Estudante C:** Agora precisamos justificar [risos]. Pensando numa explicação, acho que podemos generalizar isso que você fez da seguinte forma: nós temos um $f(x)$ e

um $g(x)$, que nós escolhemos, achamos as intersecções na própria calculadora [gráfica] e identificamos quem é a função superior e a função inferior. Então, generalizadamente, se a gente faz $\int_0^2 g(x) - f(x) dx$, pensando que $g(x)$ é a função superior à $f(x)$, então nós temos a confirmação da área que é dada automaticamente na calculadora gráfica.

DIÁLOGOS DA EQUIPE “Kaju” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante E:** Eu escolho uma função quadrática e você [Estudante F] escolhe uma afim, pode ser? Acho que seria uma boa $f(x) = 2x^2 + x + 4$.
- **Estudante F:** Okay. Acho que pra mim seria legal um $g(x) = 4x + 5$.
- **Estudante F:** Agora a gente usa o comando $\int dx$ pra gente conseguir achar a área delimitada pela intersecção dessas duas funções, eu acho. Se for isso mesmo, a área vai dar aproximadamente 2,92.

Figura 48: Representação Gráfica da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 2ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante E:** Pra explicar o que a “gráfica” fez, a gente vai usar a “científica” pra explicar. Se a gente for pensar em como fazemos o processo de integração, pra achar a área delimitada pelas duas funções, então a gente precisa fazer a integração da “função que tá em cima *menos* a função que tá embaixo”. Só que a gente também precisa dos pontos de intersecção pra poder delimitar o intervalo. Então a gente tem

$$2x^2 - 3x - 1 = 0 \text{ e o intervalo } \left[\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4}; \frac{-\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4} \right].$$

Figura 49: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 1ª Parte

Handwritten work showing the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ and its solutions $x_1 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$ and $x_2 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4}$. The work includes a small table with '1: Equação simult.' and '2: Polinomial'.

Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante E:** Como a função $g(x)$ tá em cima da $f(x)$, pra achar essa integração, a gente tem a função sendo $-2x^2 + 3x + 1$, aí é só integrar essa função no intervalo, o que vai dar aproximadamente o resultado mostrado pela “gráfica” de 2,92u.a.

Figura 50: Representação da Resolução da Equipe “Kaju” sobre Integrais – 2ª Parte

Handwritten integral calculation: $\int_{\frac{3 - \sqrt{17}}{4}}^{\frac{3 + \sqrt{17}}{4}} (-2x^2 + 3x + 1) dx$. The result $2,920533151$ is circled in red.

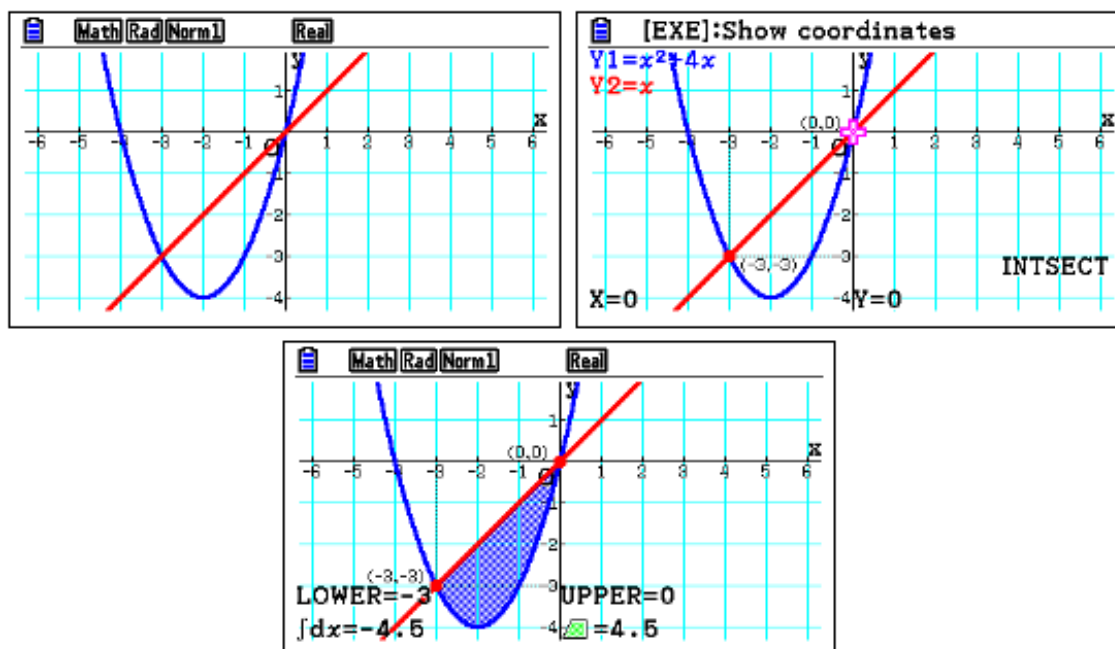
Fonte: Dados da Pesquisa

DIÁLOGOS DA EQUIPE “As Capitalistas” ACERCA DA ATIVIDADE:

- **Estudante H:** Acho que pra essa questão a gente pode escolher a reta identidade que é mais fácil de encontrar uma função que se cruzaria com ela. Vou tentar $Y = x^2 + 4$.
- **Estudante H:** É... Essa função não cruzou [risos].
- **Estudante G:** E se a gente acrescentar um x ? Vamos ver como fica com $Y = x^2 + 4x$.

- **Estudante G:** Agora deu certo. Então nós temos que achar a área delimitada por ambas as funções. Então nós temos isso:

Figura 51: Representação Gráfica da Equipe “As Capitalistas” sobre Integrais – 2ª Parte



Fonte: Dados da Pesquisa

- **Estudante H:** Acho que uma forma boa de explicar é expondo a resolução. Então, primeiro de tudo, precisamos dos pontos em x onde a reta e a parábola vai fazer intersecção, que é $x = -3$ e $x = 0$, aproveitando que já fizemos isso aqui na calculadora gráfica. Pra achar a área curva a gente faz a “função superior *menos* a função inferior”. No nosso caso, nós teremos $x - (x^2 + 4x)$. Então quando montarmos nossa integral definida no intervalo, nós achamos a área de 4,5u.a. que é exatamente o que tá sendo mostrado na calculadora gráfica [disse a estudante olhando o que fizera na calculadora e comunicando com a câmera].

Figura 52: Representação da Resolução da Equipe “As Capitalistas” sobre Integrais – 1ª Parte

$$\int_{-3}^0 x - (x^2 + 4x) dx$$

4,5

O intuito desta proposta de ensino foi de identificar como que os estudantes formalizavam seus conhecimentos em relação ao que era retornado pela calculadora ao executar o comando de integral delimitando a intersecção entre uma reta e uma curva. Dessa forma, cada dupla de estudantes experimentou diferentes funções de modo que elas se cruzassem em dois pontos.

Era necessário que o gráfico dessas funções se cruzassem em dois pontos para que elas pudessem formar uma região (pensando na delimitação dessas funções); e o motivo por escolher especificamente uma função quadrática e outra afim estava no fato de eles [os participantes] terem maior familiaridade com ambas as funções em comparação com outras funções, a exemplo de: Funções Logarítmicas, Exponenciais e Polinomiais de grau $n > 2$.

Assim como na primeira proposta de ensino sobre Derivadas, os estudantes participantes teriam que encontrar formas de explicar o que a Calculadora Gráfica estava retornando de resultado em relação à área delimitada pela intersecção das duas funções. Assim, todas as duplas encontraram meios para explicar a resposta da calculadora por meio do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC):

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

Com o decorrer dos encontros que tratavam da temática de “Integral Definida” pude perceber e observar que a ideia de encontrar uma área delimitada pelo gráfico de funções já estava imbricada no raciocínio dos estudantes, mesmo que não formalmente (de início) a ponto de descreverem com exatidão o TFC, mas já pensavam acerca de uma função sobrepondo outra, uma função superior e uma função inferior, bem como olhar para uma “área curva” de modo analítico e até espacial (geometricamente). Como pôde ser observado nas narrativas expostas anteriormente e, também, com essa proposta de ensino, eles conseguiram manifestar uma conexão entre resultado, conjectura e validação de forma que a calculadora foi partícipe em todo o processo.

A seguir será apresentada a análise dos dados, resultado da Triangulação (DENZIN; LINCOLN, 2005), obtida através dos elementos produzidos em campo, de forma a considerar o que foi percorrido nesta seção e evidenciando características inerentes ao processo de produção de conhecimentos com calculadoras.

5 ANÁLISE DOS DADOS

Trago nesta seção a análise dos dados produzidos em campo, onde serão evidenciadas as particularidades de cada dupla desenvolvendo as atividades propostas e também a análise coletiva posteriormente. Com o auxílio do diário de campo, serão identificadas as características advindas do uso de calculadoras para o estudo de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável real.

É importante anunciar ao leitor que, nas próximas subseções, por se tratar de uma análise minuciosa de cada proposta que os estudantes participantes fizeram durante os encontros, pode ser que os termos pareçam um pouco repetitivo, entretanto cada informação analisada é essencial para que sejam desenvolvidas unidades de análise que servirão como os elementos principais para desenvolver uma discussão analítica do coletivo.

Ressalto ainda que os termos que aparecerão a seguir, nas próximas subseções, em itálico, serão os elementos principais evidenciados por cada equipe ao desenvolverem as propostas de ensino e que estão relacionados com minha pergunta de pesquisa: *Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?*

Esses elementos serão necessários para que se chegue às unidades de análise, o que torna necessário que esses termos recebam um destaque especial e a junção deles, diante de meus movimentos de reflexão, formarão tais unidades de análise mencionadas. Esclareço que a discussão evidenciada *a posteriori*, emergida da triangulação entre os dados e os referenciais teóricos, será feita através da interpretação qualitativa baseada no que pude observar entre as ideias principais e a lente teórica.

5.1 Equipe “C”

Na proposta de ensino que continha o conteúdo de Limites, de início, os participantes ficaram curiosos quanto a forma com que deveria ser desenvolvido aquele limite. Por se tratar de um limite com x tendendo a uma interrogação ($\lim_{x \rightarrow ?}$) isso gerou um primeiro impacto de estranheza. Os estudantes relataram que nunca tinham visto uma abordagem de limite da forma com que foi colocada nas propostas de ensino, fato esse que fez-se perceptível que a experimentação, ainda mais com tecnologias, não era um ponto forte da equipe.

Foi tangível que a relação dos estudantes com a máquina foi se construindo aos poucos de forma com que eles a usavam de forma exploratória buscando responder ao que estava sendo posto em investigação. Com a utilização da calculadora científica, os estudantes puderam encontrar uma forma de relacionar o ponto x com a imagem $f(x)$ usando a tabela que o equipamento fornecia de modo que desenvolveram um raciocínio matemático para determinar em quais pontos para x daria o resultado solicitado no enunciado.

Embora essa equipe solicitasse mais auxílios em comparação às outras equipes, eles mantinham o diálogo de modo a ouvir as ideias e os desenvolvimentos que desdobravam em conjunto ou cada um separadamente. Esse sistema de colaboração foi essencial para que ambos chegassem a um denominador comum e, àquele indivíduo que possuía alguma dificuldade, eles se ajudavam para superar aquela dificuldade, seja ela de natureza conceitual, de aplicação ou até mesmo técnica, com a própria calculadora.

Outra característica desse grupo em relação ao conteúdo de Limites é que eles utilizaram tanto do recurso da *visualização* quanto da *algebrização* (desenvolvendo as resoluções). Assim, eles tinham como aporte o Classpad e a calculadora científica, já que nesse período de aplicação, a Calculadora Gráfica ainda estava sob meus estudos. A visualização foi um fator contribuinte na compreensão da maneira com que estavam sendo colocados os limites, por mais que não utilizaram desse recurso em todas as propostas.

Na segunda proposta de ensino (conteúdo de Derivadas), nas questões que abordam a Cinemática, os estudantes optaram por utilizar a calculadora no momento de realizar as comparações das velocidades. Na primeira questão, os estudantes utilizaram a tabela para verificar o comportamento dessa velocidade a cada 10 segundos, mas para isso eles fizeram a derivada automaticamente (ou como eles denominaram: “de cabeça”), de forma que a função derivada já fosse a velocidade, e isso, na visão deles, facilitaria e adiantaria o processo de descobrimento, fazendo com que a calculadora entrasse como *meio de comparação*. Na segunda questão, eles [os estudantes participantes] também utilizaram da mesma estratégia, mas experimentaram mais com a calculadora devido ao fato de se tratarem de três funções distintas lineares onde poderia haver uma “ultrapassagem” ou não.

Reitero que por diversas vezes que um estudante não se recordava de um conceito ou de alguma aplicação, outro estudante normalmente ajudava semelhante a uma espécie de monitoria, onde ambos iam se ajudando para conseguirem completar a

proposta de ensino daquele dia específico. Uma evidência disso foi na terceira questão (que também abordou a temática de Derivadas), em que um dos estudantes não se recordava da relação entre a derivada e a reta tangente. Inclusive, nesta mesma questão, utilizaram a calculadora como *complementar de um processo*, ou seja, utilizaram a calculadora para *validar o desenvolvimento de um conceito* que aprenderam em Geometria Analítica: o coeficiente angular, representado pela tangente de um determinado ângulo.

Com relação à terceira proposta de ensino (que continha o conteúdo de Derivadas), na primeira questão os estudantes se reuniram antes de começá-la para revisar o comando que eles utilizariam para fazer as derivações [Khicas50] no intuito de utilizar a calculadora em todos os processos. Dessa forma, tanto na primeira quanto na segunda questão, utilizaram a calculadora como *partícipe do processo*. Um foco maior deve ser dado à segunda questão, quando os estudantes utilizam ambas as calculadoras [científica e gráfica] num modo de *interconexão*, de forma com que os resultados que não conseguem ser obtidos com a calculadora científica foram obtidos com a calculadora gráfica e vice-versa. Além disso, a calculadora foi uma grande aliada na *formalização de conjecturas matemáticas* através da definição de Integral Definida.

Com relação às propostas de ensino sobre Integrais (tanto a primeira quanto a segunda), foi possível identificar que a *visualização gráfica* foi o elemento crucial para a equipe, pois, de início, tentaram métodos de substituição de valores usando a tabela para verificar qual seria a função que teria maior crescimento. Entretanto, com valores muito grandes, é muito difícil que haja uma clareza nos resultados. Além disso, muito provavelmente a calculadora retornaria a mensagem “ERRO” com as funções formadas. Assim, a *visualização* se torna não somente um escape, mas uma forma mais ampla de verificar o comportamento do gráfico das funções.

5.2 Equipe “TRANSfinito”

Analisando o percurso desta equipe na primeira proposta de ensino (conteúdo de Limites), nas primeiras questões os estudantes também exploraram com as calculadoras o recurso “Tabela”, da calculadora científica, e desenvolveram seus argumentos conforme os resultados foram aparecendo. Assim, o movimento de *experimentação* foi dado em conjunto com a *interação* entre os participantes, já que os participantes conversavam entre si, trabalhavam utilizando-se de estratégias para alcançar um número e registravam isso nas propostas de ensino.

Uma característica muito marcante nessa equipe é que ela é composta por um estudante que possui grandes curiosidades e um pensamento muito acelerado, enquanto o outro estudante é metódico e calmo. Essa dualidade comportamental, em algumas vezes, foi um fator preocupante nos encontros tendo em vista que, às vezes, acontecia algum atrito entre os participantes. No entanto, ambos conseguiam chegar a um consenso a cada proposta de ensino.

Outro fator importante é quanto aos limites laterais. Um estudante tinha se esquecido de como chamar o limite lateral que vem da esquerda para a direita (e vice-versa), então outro estudante foi até a lousa e desenhou diversos gráficos e depois voltaram para a calculadora utilizando o comando “Tabela”, da calculadora gráfica. Como mencionei anteriormente, neste período a calculadora gráfica ainda estava sendo alvo de meus estudos e estava em fase de testes. Assim, a calculadora científica e o Classpad foram os equipamentos utilizados pelos estudantes durante todo o desenvolvimento desta proposta de ensino bem como a própria lousa.

Analizando criticamente a desenvoltura de ambos os participantes com relação ao desenvolvimento da proposta de ensino sobre Limite usando a Calculadora foi possível identificar que eles conseguiram desenvolver uma forma diferente de aprender Limites através da *experimentação* e também pôde-se constatar que a *visualização* foi crucial para que um dos estudantes (re)lembrasse os limites laterais de uma determinada função.

Na segunda proposta de ensino (sobre Derivadas) acontecem algumas particularidades que valem a pena serem consideradas. No início do encontro um dos estudantes demonstra que reconhece o símbolo triangular como uma variação e que, matematicamente, ela representa a derivada. Essa *projeção*²⁶ que o estudante utiliza para dialogar com seu companheiro reverbera para o que foi dito na análise da equipe anterior: *trabalho colaborativo*. Ainda no desenvolvimento dessa proposta, especificamente na primeira questão, os estudantes conseguem utilizar a calculadora para *formalizar um argumento* de que existe um padrão matemático advindo das derivações realizadas. Além disso, essa equipe conseguiu chegar em uma *generalização de um resultado* com base nas experimentações realizadas com a tecnologia.

Os estudantes também desenvolveram uma discussão acerca do conceito que estava sendo posto: se substituir um tempo específico na função do espaço seria o

²⁶Chamo de projeção a capacidade do indivíduo de movimentar suas ideias já apreendidas para auxiliar seu próprio companheiro.

suficiente ou não, pensando na questão de que nessa faixa x de tempo daria para fazer uma comparação olhando para o deslocamento Δs . Por mais que o outro estudante não tenha compreendido as ideias do seu companheiro, foi perceptível o surgimento de *múltiplas estratégias*, mesmo que não tenham sido totalmente atendidas na resolução final da questão. Já na terceira proposta, os estudantes utilizaram a calculadora como meio para *validar o desenvolvimento de um conceito*, tal como utilizaram-na para, por meio da *visualização*, ter um outro parâmetro de confirmação.

Em relação à terceira proposta de ensino (ainda com Derivadas), na primeira questão os estudantes utilizaram a calculadora durante todo o processo, de forma com que a calculadora foi *partícipe no processo*. Também, os estudantes utilizaram da *visualização gráfica* para construir *explicações e validações* que constatassem o que observaram na calculadora gráfica. Assim, usaram os comandos da calculadora científica para encontrar meios de chegar a uma resposta plausível ao que foi visto no gráfico, ou seja, evidenciaram uma *articulação* do uso de ambas as calculadoras.

Analizando os encontros em que foram desenvolvidas as propostas de ensino sobre Integrais, essa equipe decidiu analisar as funções numericamente, pois, segundo eles, gostariam de ter outros parâmetros para identificar a melhor função. Dessa forma, utilizaram o comando “Tabela” da calculadora científica e colocaram alguns números para poder identificar a relação entre x e $f(x)$. De fato, com a *visualização gráfica* os estudantes conseguiriam analisar qual seria a melhor função para eles, uma vez que a função cúbica não necessariamente representa maior custo que uma função quadrática, pois depende da forma com que ela está sendo colocada no gráfico e dos parâmetros numéricos. Analisar apenas pela tabela e plotar números para identificar os movimentos de uma função não é uma estratégia incorreta, no entanto quando se trata de uma função polinomial com um grau elevado, como é o caso dessa questão, a visualização gráfica seria mais eficaz para encontrar a função que melhor representaria o custo total. Em contrapartida, na segunda questão dessa mesma proposta de ensino, os estudantes responderam à questão de modo que conseguiram, através da *visualização*, construir uma *generalização* para justificar o resultado que a calculadora gráfica retornou.

5.3 Equipe “Kaju”

Na proposta de ensino que corresponde ao estudo dos Limites, esta equipe também desenvolveu o mesmo conceito de *experimentação* que as outras equipes utilizando a tabela da calculadora científica no intuito de investigar para quanto os

limites laterais iriam e buscou *validar as informações encontradas* através da *visualização gráfica*. Através desses dois códigos, os estudantes conseguiram identificar aquelas funções que não havia limite e as funções cujo limite era um número ou uma representação infinita, desenvolvendo uma *formalização de um conceito*: os limites laterais. É possível analisar que a *interação comunicativa* também é uma característica marcante na equipe, de forma que os estudantes se comunicavam a todo tempo buscando complementarem-se um ao outro a cada passo da resolução.

Analisando o encontro em que foi desenvolvida a segunda proposta de ensino (sobre Derivadas), assim como as outras equipes, os estudantes utilizaram a calculadora científica para procurar formas de encontrar a velocidade de uma partícula. Entretanto, como os alunos não se lembravam da relação da derivada com a Física, foi necessária minha intervenção com uma explicação; mas aconteceu de forma breve para não condicionar o pensamento do estudante aos meus pensamentos. Na primeira questão, os estudantes utilizaram a calculadora para realizar as derivações e conseguiram encontrar o padrão que existia nas respostas, por mais que não fosse o objetivo central daquela questão específica, articulando assim a *experimentação* com a *formação de conjecturas*, o que foi semelhante na segunda questão com exceção das derivações de forma automática (sem calculadoras) que os estudantes realizaram. Mas a utilização das funções já derivadas na calculadora para compará-las e chegarem a um veredito, marcaram as mesmas características. E na terceira questão, os estudantes foram capazes de utilizar a calculadora como um recurso para *complementar o raciocínio* que estavam desenvolvendo com a Equação Fundamental da Reta.

Na terceira proposta de ensino (também sobre Derivadas), os estudantes, logo na primeira questão, desenvolveram uma característica muito interessante: *múltiplas estratégias*. Quando eles viram que conseguiam fazer a questão de duas formas distintas, ao invés de escolher entre uma abordagem ou outra, os participantes decidiram se dividir e cada um ficou com uma estratégia, cada um com um tipo de calculadora, de modo que fizeram, ao final das resoluções, a *validação dos resultados obtidos*. Na segunda questão os estudantes fizeram o caminho inverso: observaram o gráfico formado pela função dada, o ponto máximo e o ponto mínimo e tentaram chegar a uma *formalização* do que viram na calculadora gráfica utilizando a calculadora científica.

Com relação às propostas de ensino sobre Integrais, tanto a primeira quanto a segunda, foram marcadas pelo fator *visualização*. Entretanto, na primeira questão, os estudantes fizeram uma conexão muito interessante, principalmente em relação ao

gráfico formado. Como os estudantes escolheram valores muito pequenos para representar um custo, utilizaram a ideia de uma loja em fase inicial e, além disso, elencaram a função que, para eles, não representava um custo muito baixo e nem um custo muito alto. Esse esquema estratégico permitiu que fosse identificada a relação de *visualização* e *experimentação* com a formação de conjecturas enredadas de *diálogos*. Na segunda questão a calculadora foi *partícipe* em todo o processo de forma que os participantes buscaram meios de *validar* o resultado obtido pela calculadora gráfica utilizando a calculadora científica.

5.4 Equipe “As Capitalistas”

Quando as estudantes receberam as propostas de ensino contendo limites, assim como os outros estudantes dos demais grupos, também sentiram certa estranheza em relação à forma com que os limites estavam sendo colocados, mas logo entenderam o propósito de cada proposta de ensino. De todas as equipes, essa equipe foi a única que não considerou as informações retornadas pela calculadora como corretas totalmente. Quando as estudantes identificaram, por exemplo, que um limite cujo denominador possuía uma raiz retornava um número inteiro, as estudantes “tiraram a prova” e identificaram que o resultado mostrado naquela operação específica estava, na verdade, aproximado. Isso fez com que elas tivessem um *olhar crítico* e uma conduta de não aceitar necessariamente o que a calculadora retorna *sem validação*.

Com relação à segunda proposta de ensino (que continha o conteúdo de Derivadas), na primeira questão as participantes utilizaram a calculadora durante todo o processo. Não foram necessárias quaisquer intervenções minhas, pois as participantes já tinham a noção da relação entre a Derivada e a Física. Dessa forma, puderam utilizar a calculadora para desenvolver as resoluções e, através disso, encontrar padrões para *generalizar as respostas*; além disso, na segunda questão, as estudantes foram capazes de *formar conjecturas* através da *experimentação* realizada para descobrir a velocidade de modo comparado. Já na terceira questão, as estudantes já tinham desenvolvido uma forma de raciocínio e o uso da calculadora se deu como uma forma de *contribuição ao raciocínio* que elas tinham traçado para determinar a Reta Tangente.

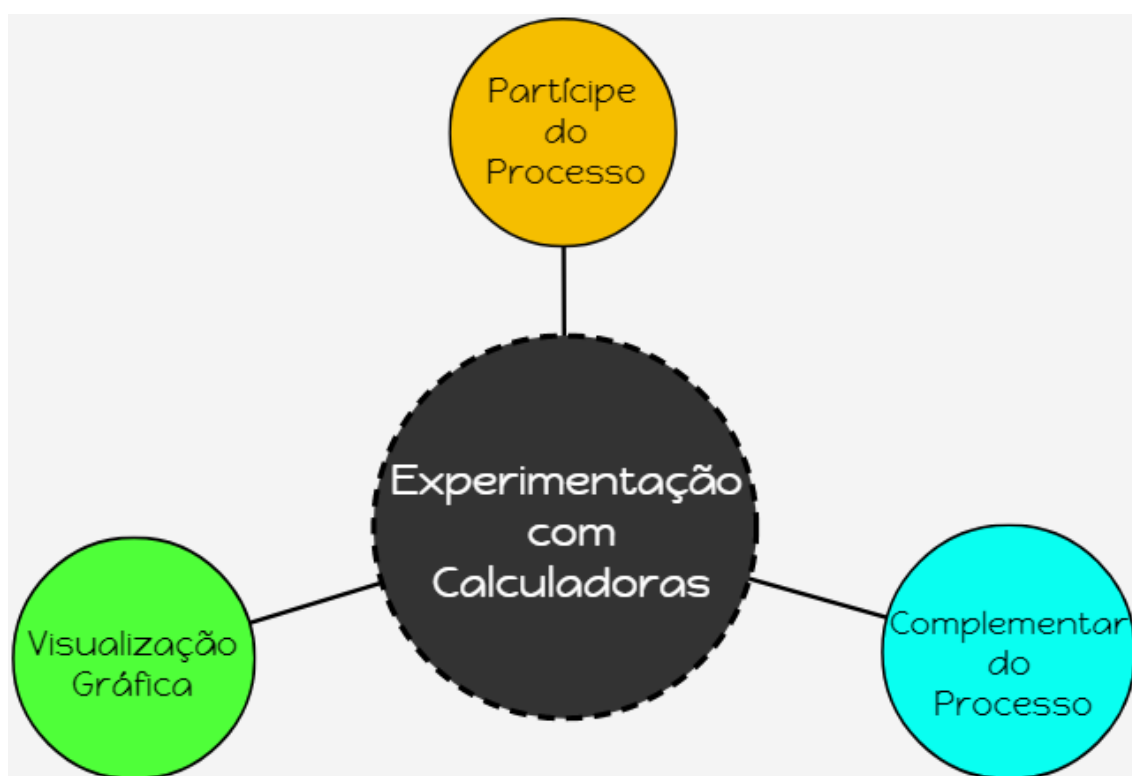
Sobre a terceira proposta de ensino (contendo Derivadas), na primeira questão as estudantes seguiram os mesmos passos das outras duplas, desenvolvendo as noções de máximo e mínimo articuladas com o manuseio das calculadoras. As estudantes utilizaram ambas as calculadoras para procurar formas de responder ao que havia sido

solicitado na questão, desenvolvendo assim uma *interação* de modo que as tecnologias não foram coadjuvantes, mas foram *partícipes* durante todo o processo. Na segunda questão, as estudantes não utilizaram a visualização gráfica sob a justificativa de “treinar a álgebra”. Dessa forma, desenvolveram as *formalizações*, mas onde o elemento gráfico não se fez presente.

Por fim, nas propostas de ensino sobre Integrais, na primeira questão as estudantes fizeram uso de outro recurso que também lhes foram ofertados: o *Classpad*. Para as estudantes, a calculadora gráfica demandava muito tempo para deslizar o cursor ora para cima ora para baixo ora para os lados, o que seria cansativo para elas. Outro fator a ser levado em consideração é a nitidez do gráfico, onde funções muito extensas e/ou com uma constante muito grande, pode acabar interferindo na legibilidade do gráfico, fazendo com que as estudantes preferissem migrar para outro ambiente gráfico, mas ainda ligado à calculadora. Isso mostrou nitidamente que a relação da *visualização gráfica* nessa questão foi um ponto extremamente essencial para a formação de *conjecturas matemáticas*. Na segunda proposta de ensino também foi nítida essa relação comentada, uma vez que as estudantes muniram-se de ambas as calculadoras (científica e gráfica) para procurar formas de explicar o resultado mostrado por uma ou outra calculadora.

5.5 Evidências da Análise Coletiva

Nesta subseção trago a análise de uma forma coletiva, de modo a evidenciar as convergências que puderam ser visualizadas perante os dados expostos na terceira seção e com as características (destaques em *itálico*) que puderam ser explicitadas nas subseções anteriores. A ação de observação que pôde ser feita acerca das características analisadas em cada dupla, estritamente, originou um esquema visual, conforme será mostrado na Figura 53, que abarca esse movimento de análise coletiva em junção aos referenciais teóricos que serão discutidos *a posteriori*.

Figura 53: Características da Experimentação com Calculadoras

Fonte: Autoria própria

Em primeiro momento, é de suma importância que se tenha em vista a pergunta que permitiu movimentos de reflexão em torno dos dados que foram produzidos em campo: *Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?*

Na busca em responder a esse questionamento foi necessário uma (re)visitação aos dados descritivos de modo a identificar os momentos em que os estudantes manifestaram tais características, conforme a figura 53 descreve. Pensando nesse movimento, trago abaixo recortes das falas dos participantes para que o leitor identifique como se desdobrou a produção de conhecimento matemático com as calculadoras em forma de uma análise coletiva.

É importante detalhar que as cores utilizadas nos esquemas a seguir fazem referência à cor que representa cada característica: a) cor bege representa a calculadora sendo partícipe do processo de produção de conhecimentos; b) cor azul ciano representa a calculadora como forma de complementação do processo de produção de conhecimentos; e c) cor verde representa a visualização gráfica como recurso para

produção de conhecimentos. Além disso, cada esquema abaixo contém fragmentos das falas, escolhidas da seção de descrição dos dados (Seção 4), que se enquadraram em alguma determinada característica da Figura 53. Esses recortes são evidências das características que puderam ser visualizadas, que configuraram-se enquanto unidades de análise. Opto por deixar as falas em formatos de esquemas devido ao fato de serem muitas manifestações e plurais, assim o esquema ajuda o leitor a visualizar onde considero cada característica vinculada à fala de cada participante.

A) A Calculadora como partícipe do processo de Experimentação no Cálculo de Limites.

Partícipe do Processo (CONTEÚDO DE LIMITES)

1ª Questão sobre os Limites

Estudante A: Nesse caso agora, a gente teria que substituir -1 e -3 pra saber quanto vai dar esse limite.

Estudante B: Não sei... A gente não precisa fazer com calculadora? Se usar a tabela de equações a gente consegue ter uma noção.

Estudante C: Se formos usar essa tabelinha, vamos fazer um “sistema de comparação”, seria isso? Porque é o que faz sentido na minha cabeça.

Estudante D: Se for assim, com $x = 1$, temos -1; com $x = 2$, temos -3; com $x = 3$, temos -3. E até que isso faz sentido, porque o x está representando [na calculadora] como “aquilo que está tendendo”.

Estudante E: Se a gente usar o comando da tabela [Comando 9], acredito que facilita demais nossa vida. Porque o limite, na teoria, é uma técnica de substituição. Claro que para algumas funções a gente tem que manejar porque nem sempre dá certo, tipo aqueles denominadores onde dá zero.

Estudante F: Exatamente. Além disso, acho que se a gente fazer um estudo com essa função nesse comando da tabela, mesmo que ela dê uma indeterminação, dá pra gente pensar pra onde ela tá indo e aí a gente pode até confirmar no gráfico e relacionar os dois.

Estudante G: Quando a gente usa o comando da tabela, ela nos fornece um x e um

$f(x)$ ou $g(x)$, dependendo se queremos uma ou duas funções. Mas a questão é que acho que ela pouparia muito nosso tempo pra gente poder analisar. Então o que acha da gente começar nela?

Estudante H: Concordo. A gente consegue ver “a reação” das respostas quando a gente colocar aqui com x variando

2ª Questão sobre os Limites

Estudante B: Aaaah, então a gente pode colocar número fracionário, com vírgula, etc., pra ver se a gente encontra os resultados.

Estudante A: Entendi, seria como um “tentativa e erro”.

Estudante D: Consegui encontrar que quando o x assumir valor de 6,25 ele vai dar o limite que a gente quer.

Estudante C: Eu fiz igual você, eu fui colocando os números aqui incansavelmente [risos] e quando eu vi que tava dando uma aproximação legal, eu fui testando mais números ali “em volta”. Então a gente achou 4,7333 pra dar 11 e 6,25 pra dar 12.

Estudante E: Mesmo procedimento. Eu coloquei a função e apertei igual. Com 4 vai dar 10,5 e com 5 deu 11,18. Então a primeira está entre 4 e 5. Já a segunda, pra dar 12, tá entre 6 e 7. Vou tentar achar o que vai dar 12 e você procura o que vai dar 11.

Estudante F: Eu consegui achar a que vai dar 11, que no caso é 4,7333.

Estudante E: A que vai dar 12 é 6,25.

Estudante G: O legal desse tipo de questão é que parece um joguinho de adivinhação [risos]. E isso até gera mais interesse e dá mais curiosidade na gente pra querer saber quanto vai dar aquele valor ou se tem outro valor que “bate” com o que a gente quer.

Estudante H: Olha, eu sei que para dar 11 tá entre 4 e 5, aí a gente vai ter que fazer a investigação dentro desse “intervalo”. E para dar 12 ele tá entre 6 e 7. Foi bem na sequência mesmo da tabelinha aqui.

Estudante G: Beleza. Eu achei 4,7325 pra dar 11 e 6,25 pra dar 12. Mas quer conferir no comando “Calcular”?

Estudante H: Então, pra $x = 11$ não deu exato. Aí nesse caso teria que ser algo mais aproximado mesmo. Porque deu um valor “quebradiço”. Acredito que a tabela

aproximou o resultado automaticamente. Mas com $x = 6,25$ deu exatamente o número 12

3ª Questão sobre os Limites

Estudante A: Eu coloquei aqui no comando normal [calcular] e fui colocando valores bem perto de 0: 0,3; 0, 003; 0,0003, etc., e dá um valor absurdo de grande. Se eu fizer o contrário, dá um valor muito pequeno. Então chegamos no consenso que se o limite tende a 0 pela esquerda [no caso, o valor de x tende a 0 pela esquerda], ele dá $-\infty$, e se o limite tende a 0 pela direita [no caso, o valor de x tende a 0 pela direita] ele dá $+\infty$.

Estudante D: Quando a gente vai crescendo o valor de x , o resultado vai aumentando muito, só que não sei pra qual valor exatamente.

Estudante C: Enquanto você tentava aí com número positivo, eu tentei colocar números negativos e também “cresce muito, mas negativamente”. E também não vai pra um valor específico igual no outro exercício.

Estudante E: [...] E pra gente ter uma boa noção, uma análise geral, disso que estamos fazendo, acho que seria legal eu fazer só dos números negativos e você [Estudante F] só dos números positivos, aí a gente coloca muitos números próximos de 0 pra ver o que acontece.

Estudante G: Eu sei que a gente precisa de limites laterais pra poder descobrir o valor de um limite. Então analiso os valores antes do zero e você [Estudante H] analisa os valores depois de zero. Pode ser?

Estudante H: Okay. Eu fui colocando valores bem próximos de zero aqui: 0,3; 0,2; 0,01; 0,0001 e tá dando um valor muito grande. Como que está aí contigo?

Estudante G: Aqui eu fui colocando muitos números próximos também: $-0,002$; $-0,001$; $-0,0001$ e tá dando um valor muito pequeno.

4ª Questão sobre Limites

Estudante C: Acredito que seja igual vimos agora a pouco. Precisamos levar em consideração os limites laterais. Pra 2 aqui está dando ERRO [Mensagem da calculadora].

Estudante D: Mas é porque pra 2, a função não tá delimitada, vai dar divergência [indeterminação]. Aí a gente vai precisar de números acima de 1 que chegue perto de 2 e números abaixo de 3 que se aproxime de 2 também.

Estudante G: Vamos verificar pra quanto estão indo os limites laterais. Eu posso ficar com a parte antes de dois e você [Estudante H] pode ficar com depois de 2.

Estudante H: Nesse caso aqui, ele cresce muito na medida em que a gente vai colocando números muitíssimos próximos de 2.

Estudante H: Olha, na minha visão pessoal eu acho que eles estão iguais. Só não sei qual o valor final, mas que eles estão iguaizinhos eles estão [risos].

Em primeiro lugar é imprescindível reiterar que, de primeira vista para o leitor, pode ser que a análise desdobrada aqui pareça algo comparativo com as equipes que participaram da pesquisa, mas a ideia central dessa análise não está na comparação de seus procedimentos ou resultados finais, mas de fazer uma verificação de todos os procedimentos de forma conjunta para identificar convergências ou divergências diante do uso partícipe da calculadora. Esse movimento de análise será feito nesta etapa e também nas etapas posteriores.

Ao analisar estes encontros, onde ocorreu o desenvolvimento da proposta de ensino sobre Limites, pude perceber que a calculadora foi partícipe no processo. Interpreto, neste trabalho, que quando a calculadora se torna partícipe está relacionado ao fato de que os estudantes a utilizaram do início ao fim da questão, o que é o principal aspecto convergente entre as equipes.

Borba e Villarreal (2005) apontam que a experimentação está intimamente ligada ao fato de que a tecnologia pode possibilitar modos alternativos de produzir resultados, e foi justamente esse aspecto que pôde ser visualizado diante do que os estudantes realizaram. Essas multiplicidades acerca dos resultados produzidos estão sendo postas, neste trabalho, como as diversas formas que os estudantes utilizaram para obter seus resultados colocando a calculadora como partícipe dessa busca.

Os estudantes da equipe “C”, por exemplo, utilizaram a calculadora durante todo o processo, exceto na quarta atividade onde já tinham uma ideia pré-estabelecida e utilizaram outros componentes para solucionarem a questão de modo que a calculadora não teve papel no início de suas conjecturas, mas sim no final. Os estudantes da equipe “TRANSfinito”, assim como os estudantes da equipe “Kaju”, tiveram uma semelhança

nos procedimentos utilizados para encontrar uma solução para a questão, de modo que experimentaram com a tecnologia que estava sendo disposta a eles de modo integrado. Já um caso interessante está na segunda questão quando as estudantes da equipe “As Capitalistas” manifestaram, o que Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) vão chamar de um aprofundamento em um determinado nível de rigor matemático.

Este último caso mencionado das estudantes G e H partiu da inquietação de que a tabela da calculadora gráfica estava fornecendo um valor de resposta $f(x)$ exato para um valor de x em dízima periódica e, devido a capacidade técnica da calculadora, ela arredondava esse valor, o que foi imperceptível para as outras equipes. No entanto, as estudantes da equipe “As Capitalistas” trocaram o comando da calculadora (Comando Calcular – Comando 1) para validar o resultado que estava aparecendo na tabela. Assim, constataram que o valor que aparece no visor da calculadora, na tabela, está aproximado, o que permitiu uma discussão profícua acerca da resposta fornecida pela calculadora estar equivocada, de modo que não existe um valor específico para uma das exigências da questão, fato que mostrou um aprimoramento conceitual bem como o aprofundamento no rigor matemático (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

Pude construir alguns blocos das falas dos estudantes como: (i) indeterminação; (ii) sistema de comparação; (iii) tentativa e erro; (iv) limites laterais; e (v) representação infinitesimal ($-\infty$ e $+\infty$), os quais chamaram-me a atenção para o fato de que, para além dos estudantes manifestarem uma forma diferente de aprender o conteúdo de Limites (BORBA; VILLARREAL, 2005), também, com essa nova dinâmica de descobrir se uma determinada função tem limite ou não, conseguiram dar significado às diferentes abordagens que iam aparecendo em cada questão (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2005). Já a forma que os estudantes apontaram de estarem investigando uma questão baseada em “tentativa e erro”, remete-me à ideia de simulação mental, proposta por Lévy (1993). Quando Lévy (1993) traz essa relação baseada na Psicologia Cognitiva, enfatiza que “A capacidade de simular o ambiente e suas reações certamente desempenha um papel fundamental para todos os organismos capazes de aprender” (LÉVY, 1993, p. 124). Além disso,

Parece mais plausível que as pessoas construam *modelos mentais* das situações ou dos objetos sobre os quais estão raciocinando, e depois explorem as diferentes possibilidades dentro dessas construções imaginárias (LÉVY, 1993, p. 124, grifo do autor).

Assim, interpreto o fato de que a exploração dessas possibilidades pôde ser mais intensificada com o uso da calculadora científica que contribuiu com a criação de

hipóteses, testes, intensificação do raciocínio intuitivo bem como formas diferentes de representação e generalização de um determinado resultado (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020)

Pude perceber, também, que a maioria das hipóteses e críticas pontuadas pelos estudantes, entre si, foi também fruto da interação social entre eles através da oralidade. Para Lévy (1993) a oralidade é um canal habitual de informação de modo que essa tecnologia da inteligência situa-se antes mesmo de qualquer representação escrita, o que faz jus a maior parte das interações entre os participantes já que, por diversas vezes, conversavam entre si para poder identificar o que a questão objetivava e caminhos para traçar aquela determinada investigação. Quando debatiam sobre o assunto, se concentravam conjuntamente para desenvolver estratégias e começar o processo de experimentação baseado nessa interação que deu resultado para as manifestações escritas dos participantes (LÉVY, 1993).

B) A Calculadora como partícipe do processo de Experimentação no Cálculo de Derivadas.

Partícipe do Processo (CONTEÚDO DE DERIVADAS – 1ª Proposta)

1ª Questão sobre Derivadas

Estudante D: Eu coloquei aqui na calculadora científica dessa maneira aqui $\frac{d}{dx}(7,8 + 1,5x + 3x^2)|_{x=10}$ e ela retornou a resposta de 61,5. Então a gente analisou aqui e viu que se trocar o x por +10 (20, 30, 40, 50, ...) [ir aumentando 10 unidades sucessivamente] a gente chega onde a gente quer.

Estudante C: Sim. Mas eu vi outra coisa legal aqui, mas também pode ser coisa da minha cabeça [risos]. Ele está aumentando de 60 em 60. Então se você perguntasse pra gente qual o centésimo valor, a gente conseguiria fazer sem ter que digitar toda a derivação de novo: era só colocar +60 e apertar igual 99 vezes.

Estudante E: [...] então a gente usa esse comando de derivação e como ele quer para cada 10 segundos, a gente já substitui e vê o que acontece.

Estudante F: Olha só, pra 10 segundos deu 61,5; pra 20 segundos deu 121,5; pra 30 segundos deu 181,5. Então a gente concluiu aqui que pra identificar a velocidade a cada 10 segundos basta apenas somar 60 continuamente.

Estudante G: Então vamos lá... O que nós temos? Temos uma “função espaço” e o pedido do enunciado de identificar a velocidade atingida a cada 10 segundos. A gente consegue fazer isso pela calculadora mesmo. É só a gente fazer $\frac{d}{dx}(7,8 + 1,5x + 3x^2)|_{x=10}$ e ir aumentando esse 10 em +10. Aí a gente vai ter 61,5m/s; 121,5m/s, 181,5m/s e 241,5m/s, se formos pensar de 10 a 40 segundos.

2ª Questão sobre Derivadas

Estudante G: Quando a gente achou a velocidade no exercício passado, a gente teve que atribuir nosso valor de x a cada dez segundos, nesse caso aqui não é tão diferente. O enunciado não falou quanto tempo, mas deixou em aberto. Então a gente começa a fazer um estudo atribuindo nossos próprios valores.

Estudante H: Hum... Agora entendi o que quis dizer. Então para as comparações, tudo bem se eu ficar com A e B, você com B e C e a gente faz A e C juntas?

Estudante G: Por mim tudo bem. A gente pode colocar o tempo múltiplo de 5 que dá um intervalo maior pra identificar se ocorreu alguma mudança e tal.

3ª Questão sobre Derivadas

Não houve processo partícipe da Calculadora.

Partícipe do Processo (CONTEÚDO DE DERIVADAS – 2ª Proposta)

1ª Questão sobre Derivadas

Estudante E: A função que representa o custo, como o próprio enunciado diz, vai ser a subtração do valor pelo custo, então a gente tem $y = -2x^2 + 28x + 40$. Como eu já fiz a subtração pelo comando, vou fazer a derivada também, já que tem como fazer aqui.

Estudante E: Olha, nas minhas contas [no Comando A – Equação/Função] deu $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-14}{-2} = 7$. Como ele pediu foi o lucro máximo com o número de lotes, e o número de lotes é x , então a resposta que eu cheguei foi 7 lotes.

Estudante G: Já que temos que usar o Khicas50, então eu já vou fazer tudo nele aqui mesmo. Se a gente fizer aqui a subtração do valor da venda pelo custo, a gente tem o lucro representado por $L(x) = -2x^2 + 28x + 40$.

Estudante H: Aqui a gente pode facilitar demais nossa vida. Ele [o enunciado] não

quer o lucro máximo? A “função lucro” a gente já tem. É só usar o comando de equações da calculadora científica que a gente encontra o ponto máximo dessa função.

2ª Questão sobre Derivadas

Estudante B: Eu fiz a primeira derivada e deu $y = -12x^2 + 6x + 18$. Aí eu achei as raízes também nesse comando do Khicas50 ($x' = -1$ e $x'' = 3/2$). Mas não faz sentido elas serem as raízes, pelo que vi no gráfico. Então acho que são pontos críticos.

Estudante B: Pra mim, ele funciona como a *parte x* do par ordenado (x, y) do ponto máximo ou mínimo. Aí se a gente substitui esses pontos críticos na função original, a gente encontra a *parte y* do máximo ou mínimo.

Estudante C: Primeiro de tudo, uma função dessas dá um pouco de medo [risos]. Mas dá pra fazer tranquilo, eu acho, com as calculadoras. Se a gente derivar aqui no comando [Khicas50] a gente vai ter $-12x^2 + 6x + 18$.

Estudante D: Como eu tenho mais habilidade na científica do que na gráfica [calculadoras], eu já me adiantei e coloquei aqui no comando de equações e achei as raízes dessa função.

Estudante C: Tá, vamos lá... Esses pontos que você achou pra x_1 e x_2 não são os pontos de máximo e mínimo. Eu coloquei a função original no comando de gráficos [Comando 5: Gráficos] e eu vi de relance que essa função tem um ponto de máximo e outro de mínimo ao mesmo tempo. Então vamos pegar esses valores que você achou ($x_1 = -1$ e $x_2 = 3/2$) e vamos substituir pra ver o que achamos.

Estudante F: Então fazendo a derivada, a gente vai ter $y' = -12x^2 + 6x + 18 = 0$. Aí aqui eu vou usar o que você [Estudante E] fez no exercício passado usando a fórmula do ponto máximo. Mas me explica aqui como você fez isso na calculadora.

Estudante E: É, mas se a gente usar os pontos máximos agora ele vai dar o resultado só para essa função quadrática e não para a que a gente quer. Lembra? Na aba de Equação/Função eu selecionei “Polinomial”, atribuí o grau 2, coloquei os coeficientes e encontrei os “pontos candidatos” de $x = -1$ e $x = 3/2$.

Estudante G: A gente deriva aqui pelo comando [Khicas50] e aí a gente vai ter $-12x^2 + 6x + 18 = 0$ segundo a regrinha da primeira derivada. Só que a gente

encontrou uma quadrática. Dá pra gente continuar pelo comando de equações da calculadora científica, né? Só não sei ao certo onde vou substituir.

Estudante G: Então como “pontos ideais” que nós temos são $x = -1$ e $x = 3/2$. E se a gente substitui na função original, a gente tem $y = -11$, pra $x = -1$ e $y = 20,25$ pra $x = 3/2$.

No decorrer destes encontros, onde foram desenvolvidas as propostas de ensino sobre Derivadas, pude perceber que em grande parte das questões os estudantes utilizaram a calculadora, seja científica ou gráfica, como partícipe do processo. A maior parte dos estudantes já tinha uma ideia estabelecida de como desenvolver a análise da velocidade de modo comparativo (1ª e 2ª questões), de modo que eles puderam antecipar alguns procedimentos, como é o caso dos estudantes A, B, C, D, E e F, acerca da primeira proposta de ensino sobre Derivadas.

Já com a equipe “As Capitalistas” pude perceber um maior movimento partícipe da calculadora científica quando elas debruçam no comando $\frac{d}{dx}$ ■ para fazer as investigações atribuindo seus próprios valores. Essa ação, além de mostrar uma manipulação dinâmica (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) de uma funcionalidade básica da calculadora, explicitou a adaptabilidade das estudantes frente a um movimento de experimentação desenvolvendo formas de representar aquele determinado resultado sob uma forma heurística do pensamento (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Na segunda proposta de ensino sobre Derivadas, alguns estudantes encontraram respostas favoráveis à questão em uma calculadora e utilizaram outra calculadora para continuar esse desenvolvimento. Essa diversificação de procedimentos aliada à possibilidade de testar meios alternativos de encontrar uma solução para a questão são características destacadas por Borba e Villarreal (2005) como uma implicação da abordagem experimental baseada nessa busca. Além disso, é deveras interessante quando os estudantes consideram ambas as calculadoras partes de um único processo, fazendo uma conexão entre elas. A linguagem da Calculadora Gráfica (*phyton*) é mais complexa do que a linguagem da Calculadora Científica. Assim, quando os estudantes precisam realizar derivadas ou integrais, de forma algébrica, utilizam uma calculadora (gráfica) para obterem tal resposta e aplicam em outra calculadora (científica) para dar continuidade em suas resoluções, por conta dessa linguagem mais acessível.

Diferente da primeira proposta de ensino, nesta os estudantes puderam desenvolver dois tipos de explorações presentes em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 57) “exploração de diversificadas formas de resoluções; [...] exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos”. Por mais que a característica de visualização seja mais aprofundada *a posteriori*, é importante trazer aqui que os estudantes fazem um movimento partícipe com essa visualização para conseguirem pensar previamente se aquela determinada função investigada possuía pontos máximos, pontos mínimos ou os dois tipos de pontos. Sendo assim, verifico que essa relação de trazer ambas as calculadoras contribuindo no andamento da questão foi uma ação muito profícua perante a “descoberta de resultados matemáticos desconhecidos previamente à experimentação” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 75, tradução nossa) o que foi um gerador para a tomada de decisões.

Para concluir, assim como foi discutido anteriormente, foi notório que os estudantes só conseguiam chegar a um consenso por meio da comunicação. Quando um estudante perguntava ao outro e quando deliberavam entre si acerca do método ou do objeto de pesquisa que iriam utilizar, por exemplo, eles conversavam entre si, resgatavam ideias e memórias acerca de uma determinada elaboração e articulavam tais ideais dentro da própria questão. Essa relação entre oralidade, na comunicação, e escrita em sintonia harmoniosa pode ser explicada por Lévy (1993) quando, para o filósofo:

A inteligência [...] encontra-se muitas vezes identificada com a memória, sobretudo com a auditiva. A escrita suméria, ainda muito próxima de suas origens orais, denota a sabedoria representando uma cabeça com *grandes orelhas* (LÉVY, 1993, p. 77, grifo do autor).

Assim, seguindo essa analogia das *grandes orelhas* (LÉVY, 1993), interpreto que os estudantes puderam ouvir atentamente a ideia de seus companheiros de forma a considerar os passos a serem tomadas na resolução (escrita). Em algumas questões, a resolução era fruto principal da oralidade, fazendo com que eles tivessem um olhar mais cuidadoso para os procedimentos a serem desenvolvidos, o que contribuía de forma efetiva no processo de experimentação (BORBA; VILLARREAL, 2005).

C) A Calculadora como partícipe do processo de Experimentação no Cálculo de Integrais.

Partícipe do Processo (CONTEÚDO DE INTEGRAIS – 1ª e 2ª Propostas)

1ª Questão sobre Integrais

Estudante B: Como a gente tem que montar uma função $C(x)$, a gente tem que aplicar alguma propriedade das derivadas para sair do $C'(x)$ pra $C(x)$?

Estudante A: Ué... Mas a integral ela não é uma antiderivada? Se a gente fizer acho que volta a ser $C(x)$, né?

Estudante C: Okay. A gente tem que achar o $C(x)$. Se a gente tem uma função já derivada representando o custo marginal, então se a gente aplicar a integral a gente consegue achar o $C(x)$, porque ela é uma antiderivada. E como no comando [Khicas50] não aparece a constante, pelo que ele [Pesquisador] disse pra gente, então acho que podemos substituir direto, né? Tipo, tratar a constante como o valor de custo, porque pra mim isso faz sentido.

Estudante F: A gente integrou cada função juntos [utilizando o Comando Khicas50 da Calculadora Gráfica] e aí fomos substituindo em C os valores de custo que a gente atribuiu.

Estudante G: Uma coisa que eu reparei aqui no comando [Khicas50] é que quando a gente coloca **integrate** e coloca a função que queremos integrar, ele dá o resultado mas não dá a constante. Tá certo isso?

Estudante H: Eu acho que é porque tá em linguagem *python* ou talvez seja um sistema da própria calculadora que não esteja lendo a constante. Meu achismo.

Estudante G: Mas não tem problema, a gente acrescenta $+C$ nessas que a gente for integrando. Mas antes de tudo vamos integrar todas essas funções e depois a gente atribui o valor do custo, porque acho que aí sim entra a constante.

2ª Questão sobre Integrais

Estudante A: A gente decidiu fazer “a ida” de uma vez só. Tipo, a gente vai desenvolver a integral na calculadora científica pra ver se é isso mesmo que deu na calculadora gráfica.

Estudante E: Pra explicar o que a “gráfica” fez, a gente vai usar a “científica” pra explicar. Se a gente for pensar em como fazemos o processo de integração, pra achar a área delimitada pelas duas funções, então a gente precisa fazer a integração da “função que tá em cima *menos* a função que tá embaixo”. Só que a gente também precisa dos pontos de intersecção pra poder delimitar o intervalo. Então a gente tem $2x^2 - 3x - 1 = 0$ e o intervalo $\left[\frac{\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4}; \frac{-\sqrt{17}}{4} + \frac{3}{4}\right]$.

Estudante H: Acho que uma forma boa de explicar é expondo a resolução. Então, primeiro de tudo, precisamos dos pontos em x onde a reta e a parábola vai fazer intersecção, que é $x = -3$ e $x = 0$, aproveitando que já fizemos isso aqui na calculadora gráfica. Pra achar a área curva a gente faz a “função superior *menos* a função inferior”. No nosso caso, nós teremos $x - (x^2 + 4)$. Então quando montarmos nossa integral definida no intervalo, nós achamos a área de 4,5u.a. que é exatamente o que tá sendo mostrado na calculadora gráfica [disse a estudante olhando o que fizera na calculadora e comunicando com a câmera].

Como foi comentado previamente algumas questões que relacionam o uso da visualização com a algebrização não podem ser desprendidas desta análise, por mais que, em etapas posteriores, serão percorridas com maior profundidade a relação de visualização gráfica nos contextos das questões desenvolvidas. Sendo assim, nesta etapa busco evidenciar a Calculadora Gráfica como partícipe do processo de produção de conhecimentos, analisando essa característica específica e não as características concernentes à visualização gráfica em si.

Nas propostas de ensino sobre Integrais pude analisar que a maior parte dos estudantes utilizou a calculadora de modo integrado. Assim, diversas proposições que puderam ser erguidas pelos estudantes tiveram a calculadora como intermédio desse processo. No caso da questão de descobrir a função custo, todos os estudantes discutiram entre si a relação entre derivada e integral para depois pensar em meios de articular procedimentos para resolução.

Dessa forma, percebo que a oralidade foi essencial para desenvolvimento escrito (LÉVY, 1993). Quando Lévy (1993) traz a questão da oralidade, como foi comentado nas etapas anteriores, o filósofo insere essa tecnologia da inteligência como coexistente com a escrita (e com as demais tecnologias da inteligência), o que faz da oralidade um passo fundamental para o uso da escrita e, evidentemente, da memória (LÉVY, 1993). Iniro essa discussão aqui tendo em vista que os estudantes muniram-se de debates profícuos acerca do que fazer com a função que estava sendo posta a eles: derivar novamente, colocar aquela função no gráfico, somar a função original com as constantes ou até mesmo integrar aquelas funções que apareciam como funções de custo. A comunicação foi essencial para que eles pudessem traçar seus procedimentos através da

experimentação com a tecnologia que estava sendo fornecida a eles (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Olhando por esse viés, a calculadora gráfica assumiu um papel importante tanto nas discussões antes e após a aplicação no comando Khicas50 quanto na possibilidade de visualização. Assim, a calculadora pôde ser partícipe partindo do processo algébrico e finalizando no processo gráfico evidenciando modos alternativos que encontrar os dados e mostrando uma manipulação dinâmica das tecnologias, o que enquadra no enfoque experimental de Borba e Villarreal (2005) e Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020).

Com relação à segunda questão, os estudantes da equipe “TRANSfinito” optaram por usar a oralidade para explicar seus desenvolvimentos, de modo que utilizaram a calculadora apenas em outra etapa evidenciando outra característica que será discutida nas próximas etapas. Já os outros estudantes utilizaram a calculadora para desenvolver seus pensamentos de modo que houvesse uma interconexão, entre ambas as calculadoras, como foi supracitado. Eles utilizaram a calculadora científica para explicar o resultado que se encontrava na calculadora gráfica. Reafirmo que o processo de experimentação se trata dessa investigação, utilizando meios diversos, para buscar possíveis soluções para aquela determinada questão, evidenciando, também, uma forma alternativa de aprender Matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

D) A Calculadora como complementar do processo de Experimentação no Cálculo de Derivadas.

Complementar do Processo (CONTEÚDO DE DERIVADAS – 1ª Proposta)

1ª Questão sobre Derivadas

Estudante A: Eu vou fazer no comando 9, porque estou mais acostumado com ele. Aí eu faria a derivada diretamente “de cabeça” e a função já derivada que representaria a aceleração eu ploto na tabela e ajusto o passo a passo de 10 a 100, pra verificar. Aí comparamos as respostas.

2ª Questão sobre Derivadas

Estudante B: Na minha cabeça não faz sentido determinar agora, sendo que vai depender do tempo, porque agora o mais rápido é o $h(t) = 18t + 7$ [o estudante

derivou diretamente sem uso da calculadora]. Ah, saquei... Agora eu vou ter que ver na tabela, jogar números para t para ver se ele continua tendo mais velocidade que $f(t) = 19t - 8$ aí depois faço outra comparação com $g(t) = 20t$. Seria isso ou eu tô “viajando” demais?

Estudante D: Faz a derivada dos três, acha a velocidade, a gente vai jogando números pra t [no Comando 9] pra descobrir as possíveis velocidades e é isso.

Estudante C: Okay. Então se eu tenho $\frac{d}{dx}(9,5x^2 - 8x)$, $\frac{d}{dx}(10x^2)$ e $\frac{d}{dx}(9x^2 + 7x - 10)$ [derivadas feitas manualmente] com x de 3 a 10, como a gente colocou aqui, então entre A e B o maior vai ser B; entre B e C o maior vai continuar sendo o B; entre A e C o maior vai ser A após 15s. E sobre maior aceleração, o B vai ser maior. É só derivar de novo. Então eu coloquei $\frac{d}{dx}(20x)|_{x=x}$, porque eu já sabia que ia ser constante, e deu 20.

3ª Questão sobre Derivadas

Estudante B: Isso, aí a gente encontra o m de $y = mx + n$.

Estudante A: Mas como a gente tem que usar calculadora, a gente pode usar o comando $\frac{d}{dx}$ ■. Aí a gente coloca pra $x = 1$ porque a lebre pulou no ponto P(1, 4), seria isso?

Estudante C: O legal é que a calculadora já dá a derivada no ponto que a gente quiser pra x , pelo que o Pesquisador estava contando pra gente. Aí a gente deriva com o comando pra $x = 1$ pra ver o que a gente acha e depois substitui na equação da reta [$y - y_0 = m(x - x_0)$].

Estudante F: Eu tenho uma ideia. A gente teria que derivar, acharia o coeficiente angular da reta tangente à curva da montanha naquele ponto em que a lebre escapou. Aí com essas informações em mãos, a gente lançaria na Equação Fundamental da Reta e encontrava essa reta tangente. E como forma de verificar isso, a gente poderia abrir o Classpad e verificar se essas funções realmente satisfazem isso que queremos.

Estudante E: Eu concordo com você. Então $f'(1) = -2(1) + 5 = 3$ [o estudante derivou na própria calculadora científica]. Aí a gente vai ter $y = 3x + 1$. Só que eu

não confio muito na minha resposta [risos], então vou olhar no Classpad.

Estudante G: Bom, que eu me lembre, essa derivada, no conceito de reta tangente, tá relacionada com a inclinação da reta, né? Porque quando a gente tem lá $y = mx + n$, a gente aprende que $m = tg(\alpha)$. Então derivar a função da curva seria o único caminho que eu enxergo para “resolver essa charada”.

Estudante H: Mas se a gente colocar aqui na calculadora $\frac{d}{dx}(-x^2 + 5x)|_{x=1}$ vai dar 3. Então pelo menos o m a gente já tem.

Complementar do Processo (CONTEÚDO DE DERIVADAS – 2ª Proposta)

1ª Questão sobre Derivadas

Estudante A: Já aproveitei para fazer tudo na calculadora gráfica. Então eu fiz a diferença de $V(x)$ com $C(x)$ e eu chamei essa diferença de L . Aí nós vamos ter $L = -2x^2 + 28x + 40$, aí o $-2x^2$ passaria a ser $2x^2 = 28x + 40$, aí a gente descobriria o valor máximo, né?

Estudante B: Não acho que essa seja a ideia. Acredito que até a parte do L está certo, mas pelo que me lembro do conteúdo de Máximo e Mínimo, a primeira derivada tem que ser igual a 0 pra gente poder descobrir o ponto (ou os pontos).

Estudante A: Beleza! Derivei aqui e também descobri as raízes usando um dos comandos aqui [do Khicas50]. Aí ficou $-4x + 28 = 0$, aí encontrei $x = 7$ [manualmente]. Agora eu faço a substituição desse 7 na função derivada $L'(x)$?

Estudante D: Faz mais sentido derivar a expressão pra gente ter uma facilidade em calcular o x . Então se a gente faz a derivada da função lucro, a gente tem $L'(x) = -4x + 28$. Esse resultado igual a zero [manualmente], teremos $x = 7$.

Estudante E: A função que representa o custo, como o próprio enunciado diz, vai ser a subtração do valor pelo custo, então a gente tem $y = -2x^2 + 28x + 40$. Como eu já fiz a subtração pelo comando, vou fazer a derivada também, já que tem como fazer aqui.

Estudante F: Como eu já apliquei a derivada [na Calculadora Gráfica], então é só

igualar a zero. Então com $4x = 28$ eu consegui fazer de cabeça e deu 7 mesmo. Acredito que está correto tanto meu raciocínio quanto o seu.

2ª Questão sobre Derivadas

A Calculadora não foi complementar do processo, mas foi partícipe de todo o processo de produção de conhecimentos.

Primeiramente, é importante delinear que quando interpreto, nesta análise, a calculadora como complementar do processo de Experimentação, analiso a disposição dela diante da questão. Se para ser partícipe do processo, a calculadora precisa estar presente do início ao fim da investigação, a calculadora como meio de complementação entra justamente onde não pôde ser partícipe.

Em outras palavras, trago para essa análise a calculadora como complementar do processo quando os estudantes desenvolvem previamente seus pensamentos e raciocínios ou quando utilizam a calculadora inicialmente para terem um “norte” do que desenvolver posteriormente sem o uso dela. A partir dessa idealização, as motivações para tal ação são diversas, podendo ser desde uma adaptabilidade da questão (referente à já terem conhecimento do conceito que a questão trás) até um sistema de assimilação rápido (chamado coloquialmente de “resolver de cabeça”). Assim, o uso *a priori* ou *a posteriori* da calculadora enquadra-a enquanto complementar deste processo de produção de conhecimentos e merece destaque nesta análise assim como a característica partícipe que a calculadora pôde desenvolver nos casos supracitados no item anterior.

Com relação à primeira proposta de ensino, sobre Derivadas, pude verificar que os estudantes, por diversas vezes, utilizam um sistema de assimilação rápida (“resolver de cabeça”) para facilitar suas investigações, como é o caso das duas primeiras questões, com exceção dos estudantes da equipe “TRANSfinito” que desenvolveram a derivada de maneira escrita e depois utilizaram a calculadora científica para fazer o movimento de experimentação com a tabela. Percebo que esse uso *a posteriori* da calculadora pôde mostrar que, ao fazer uso da oralidade para comunicarem entre si e identificarem determinadas relações matemáticas baseadas na memória (LÉVY, 1993), esse movimento convergente entre comunicação e busca por preceitos matemáticos (memória) para desenvolver as experimentações na tabela da calculadora científica e realizar esse sistema de comparação entre variáveis, pôde fomentar o convencimento

sobre a veracidade das conjecturas elaboradas por cada equipe (BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

O atributo da memória, vinculada ao processo de oralidade (LÉVY, 1993), pôde ser mais perceptível no desenvolvimento da terceira questão quando todos os estudantes utilizaram a calculadora como uma forma de complementar seus pensamentos, de modo que deveriam resgatar noções acerca da Equação Fundamental da Reta. O uso *a priori* da calculadora permitiu que discussões acerca do coeficiente angular da reta que tangencia uma determinada função fossem desdobradas. No entanto, os estudantes da equipe “Kaju” não estavam satisfeitos com suas respostas, então utilizaram a calculadora *a priori* para descobrir o coeficiente angular da reta tangente e *a posteriori* a visualização gráfica para confrontarem a resposta que encontraram fazendo um meio de validação, de modo que a calculadora entrou como complementar do desenvolvimento dessa questão.

Pude, então, perceber que ocorreu uma forma de testar modos alternativos para validar o pensamento dos estudantes (BORBA; VILLARREAL, 2005). Essa validação faz parte do processo de experimentação quando, para Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020, p. 58), esse movimento

[...] têm como pano de fundo uma perspectiva na qual a produção de conhecimentos matemáticos assume uma dimensão heurística, de descoberta, sendo esta apropriada aos cenários de ensino e aprendizagem de Matemática.

Voltando, em relação à memória, baseado no que os estudantes precisariam resgatar para desenvolver esta terceira questão, pude perceber em campo que quando algum dos estudantes da dupla não lembravam do conceito ou da própria generalização da Equação Fundamental da Reta, alguns utilizavam desenhos no quadro, escreviam no caderno ou em uma folha avulsa suas ideias para, assim, ajudar seu(sua) companheiro(a) e, juntos, desenvolverem a questão da melhor forma possível incluindo a calculadora no intermédio desse processo.

Lévy (1993), insere que existem diversos tipos de memórias que são funcionalmente distintas. E, ao dialogar acerca da memória de longo prazo, o simples ato de repetição não é a melhor estratégia para se construir esse armazenamento de informações (LÉVY, 1993).

Quando uma nova informação ou um novo fato surgem diante de nós, devemos, para gravá-lo, construir uma representação dele. No momento em que criamos, esta representação encontra-se em estado de intensa ativação no núcleo do sistema cognitivo, ou seja, está em nossa zona de atenção, ou muito próximo a esta zona. [...] Cada vez que nós procuramos uma lembrança

ou uma informação, a ativação deverá propagar-se dos fatos atuais até os que desejamos encontrar. (LÉVY, 1993, p. 79).

Ainda em Lévy (1993), corroborando a citação acima, o filósofo menciona que são necessárias duas condições para que tal propagação aconteça, de modo que haja uma conservação da representação que está sendo posta para investigação e uma condição de existência que permita caminhos de associações que levem a tal representação. É nesse sentido que visualizo as ações dos estudantes ao conversarem entre si acerca da Equação Fundamental da Reta, com desenhos, ideias e debates profícuos. Pude perceber que, quando os estudantes não se recordavam da fórmula, utilizavam diversas analogias (representações) para conseguirem relembrar da generalização, já que foi um conteúdo abordado em sala de aula.

Esse movimento entre oralidade fomentando a memória e a experimentação com tecnologias (LÉVY, 1993; BORBA; VILLARREAL, 2005) foi fator de destaque no desenvolvimento desta terceira questão.

Com relação à segunda proposta de ensino sobre derivadas, os estudantes muniram-se da calculadora gráfica para utilizarem-na como um percurso inicial (a priori) para desenvolverem seus pensamentos posteriormente e chegar aos possíveis resultados da questão. Verifico que essa manipulação dinâmica da tecnologia (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) foi similar a um processo de validação, o que também se enquadra no processo de experimentação, tendo em vista que pôde ser gerado um determinado convencimento sobre a veracidade das informações encontradas com a tecnologia (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) e seu desenvolvimento posterior manualmente.

Para concluir, em síntese, pude perceber que o processo de experimentação com as tecnologias ofertadas (BORBA; VILLARREAL, 2005), nesta proposta de ensino, pôde evidenciar uma exploração diversificada relacionando as formas de resolução das questões (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) bem como, também, mostrou uma forte influência da oralidade e, conseqüentemente, nos (re)visitação das memórias, compreensões e ideias acerca de uma determinada questão (LÉVY, 1993).

E) A visualização gráfica como recurso para experimentação no Cálculo de Limites.

Visualização Gráfica (CONTEÚDO DE LIMITES)

1ª Questão sobre Limites

Os estudantes não utilizaram a visualização para desenvolver essa questão.

2ª Questão sobre Limites

Estudante B: Olha, eu vi aqui no classpad rapidinho pra ter uma noção do gráfico, mas algebricamente a gente consegue explicar também. Pra 0 não está definido porque vira uma indeterminação, agora com $x < 0$ eu ainda estou pensando...

Estudante A: Pra $x < 0$ não dá porque, assim como o senhor [pesquisador] disse, a gente está trabalhando no plano $\mathbb{R}^2$. Então se x for menor do que 0, teríamos uma raiz negativa no denominador que partiria pro “universo” dos complexos. Acredito que não seja a proposta da atividade. Por isso não tá delimitada pra nenhum dos dois.

Estudante D: Só que essa segunda parte, do negativo, a gente olhou no Classpad rapidinho só pra ver como era o comportamento da função no “território negativo”, e realmente ela não tá delimitada lá. Aí fica fácil entender quando a gente olha e quando tem explicação algébrica também.

Estudante E: Se a gente for ver como isso funciona visualmente a gente percebe que ele só existe no 1º Quadrante do Plano Cartesiano, onde só tem x e y positivos. Então isso “bate” com a explicação algébrica que a gente pensou aqui.

3ª Questão sobre Limites

Os participantes não utilizaram a visualização nesta questão.

4ª Questão sobre Limites

Estudante B: A gente chegou na conclusão de que se os dois [o gráfico da função] estão subindo juntinhos, ambos estão indo pra $+\infty$, então esse é o limite pra essa função aqui.

Estudante D: Pra mim, ele tá aumentando muito porque se eu coloco um número grande, ele dá um valor enorme. Se eu coloco um número muito pequeno, ele também dá um valor enorme. E olhando no Classpad, confirma isso que eu tô dizendo de ambos irem para um mesmo lugar.

Estudante C: Então, podemos dizer formalmente que quando o $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ tender pela

direita e esse mesmo limite tender pela esquerda, o resultado apontará para $+\infty$, então esse é o limite, porque os limites laterais existem.

Estudante F: [...] a gente viu que a função fazia um movimento parecendo com um cone. Só que o “bico” desse cone nunca encosta, eles não se ligam. Aí tanto eu quando a Estudante E fomos movimentando o plano pra gente ver se num ponto “bem lá em cima” eles encostariam, e ele não encosta, pelo menos nessa procura que fizemos.

Estudante E: Justo. Aí a gente chegou na conclusão de que se eles não vão se encontrar e estão subindo infinitamente, como tanto o lado antes e depois de $x = 2$ estão subindo demais, o limite é $+\infty$.

Um primeiro movimento a ser feito é explicar o que interpreto, nesta análise, por essa visualização gráfica. Em todos os momentos que os estudantes migram para o Ambiente Classpad ou para a interface gráfica da Calculadora Gráfica, o aspecto que se evidencia é de que a visualização pode (ou está a) moldar a forma com que aquela equipe de estudantes está desenvolvendo e/ou compreendendo aquela determinada questão baseada nessa exploração. Assim, a visualização gráfica pode ser considerada também, nesta análise, como uma forma partícipe do processo ou como uma forma de complementar as ideias que estão sendo desenvolvidas na questão.

Durante esta proposta de ensino dois fatores, que ligaram ao atributo da visualização, me chamaram a atenção: processo de algebrização, processo de validação e oralidade. Todos os estudantes, no momento da investigação, realizaram uma experimentação algébrica (com relação às funções) de forma a identificar os valores que poderiam responder ao critério estabelecido na questão. Contudo, os estudantes, em algum momento desse movimento experimental, em alguns casos, sentiram a necessidade de visualizar o que ocorria com aquela determinada função acerca do seu limite. Nesses casos específicos, a visualização pôde fazer parte de uma validação do pensamento dos estudantes e/ou como uma forma de permitir diálogos e conclusões diante do que estava sendo observado.

Essa ação faz jus ao que Borba e Villarreal (2005) vão trazer como uma das características inerentes à abordagem visual no processo de pensamento matemático: “Utilização de informação gráfica para resolver questões matemáticas que poderiam ser também abordadas algebricamente” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 93, tradução nossa). Quanto à parte de validar seus argumentos, assim como utilizar a comunicação

oral diante do que podia ser observado após esse procedimento de algebrização, observo que a visualização permitiu a “facilidade na formulação de conjecturas e refutações ou dando explicações usando informação gráfica” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 93, tradução nossa).

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) afirmam que a exploração dos meios visuais dos objetos matemáticos pode fomentar a compreensão de conceitos inerentes ao que se investiga, criação/simulação/formulação de conjecturas diante das informações concebidas bem como o desenvolvimento do pensamento heurístico. Todas essas características de um estudo exploratório utilizando recursos visuais fomentam justificativas plausíveis diante do que se observa e, conseqüentemente, uma forma dinâmica de ensinar e aprender conceitos matemáticos. É nesse sentido que pude observar o desenvolvimento dos estudantes ao munirem-se do ambiente gráfico para expor suas resoluções e/ou justificativas.

Lévy (1993) também discute sobre essa relação visual, quando insere a informática como uma das tecnologias da inteligência e considera uma inovação no processo de expansão e difusão do conhecimento. Para o filósofo “[...] foi esta inovação imprevisível que transformou a informática em um meio de massa para a criação, comunicação e simulação” (LÉVY, 1993, p. 101). É exatamente nesse sentido que pude observar, corroborando Borba e Villarreal (2005) e Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) acerca da experimentação com tecnologias, o processo de produzir conhecimentos através da visualização, pois através desse olhar os estudantes puderam formalizar suas justificativas através de uma simulação. Além disso, os estudantes conseguiram articular um sentido para as representações infinitesimais, de modo que a visualização foi crucial para ir além dos resultados obtidos com a algebrização.

F) A visualização gráfica como recurso para produção de conhecimentos em Cálculo de Derivadas.

Visualização Gráfica (CONTEÚDO DE DERIVADAS – 1ª Proposta)

1ª e 2ª Questões sobre Derivadas

Os estudantes não utilizaram a visualização gráfica para desenvolver esta questão.

3ª Questão sobre Derivadas

Estudante B: Você faz essa parte algébrica e eu dou uma olhada no Classpad pra

aproveitar que já está aberto aqui numa guia do celular. Aí a gente verifica e compara o gráfico com a “sua álgebra”.

Estudante A: Então a reta tangente vai ser $y = 3x + 3$

Estudante B: Tem certeza? Aqui o gráfico tá diferente. Não sei se é isso não.

Estudante A: Ah, já sei... Fiz a distributiva errado. É $y = 3x + 1$.

Estudante D: Certo, agora a gente tem que esse resultado é 3. Então agora a gente já consegue enxergar essa equação que a gente quer. É só substituir. Fica $y = 3x + 1$. Essa é a reta tangente, se fiz os cálculos corretos. Eu conferi aqui no Classpad e deu isso mesmo.

Estudante F: Eu tenho uma ideia. A gente teria que derivar, acharia o coeficiente angular da reta tangente à curva da montanha naquele ponto em que a lebre escapou. Aí com essas informações em mãos, a gente lançaria na Equação Fundamental da Reta e encontrava essa reta tangente. E como forma de verificar isso, a gente poderia abrir o Classpad e verificar se essas funções realmente satisfazem isso que queremos.

Estudante E: Eu concordo com você. Então $f'(1) = -2(1) + 5 = 3$. Aí a gente vai ter $y = 3x + 1$. Só que eu não confio muito na minha resposta [risos], então vou olhar no Classpad.

Estudante G: Então a gente tem $y - y_0 = m(x - x_0)$ e, substituindo o ponto P(1, 4) e o coeficiente da reta tangente que a gente achou, a gente consegue fazer isso até “de cabeça”, então ficaria $y = 3x + 1$. Agora a gente pode ir no Classpad pra conferir se ela realmente faz esse “movimento tangente” com a curva.

Estudante H: Faz sim. Olha só, a reta só passa no ponto (1, 4).

Visualização Gráfica (CONTEÚDO DE DERIVADAS – 2ª Proposta)

1ª Questão sobre Derivadas

Estudante B: Assim... Sei que usar derivada aqui pode ajudar, mas eu fiz manualmente aqui pra ter certeza que eu não estou “falando abobrinhas”, e conferi no Comando 5 [Gráficos] pra ver se tava certo meu pensamento. Foi assim: queremos o máximo, né? Então fiz $x = -\frac{b}{2a}$ da função lucro e deu 7 também. Aí eu fui no Comando 5 e conferi clicando na opção de MAX da função L.

2ª Questão sobre Derivadas

Estudante A: Então se a gente substituir os dois pontos que você achou, a gente encontra o ponto máximo e também o ponto mínimo.

Estudante A: É isso mesmo. Deu certo. Comparei aqui com o gráfico e deu certinho o que fizemos. O ponto mínimo vai ser $(-1; -11)$ e o ponto máximo vai ser $(3/2; 20,25)$.

Estudante E: Eu já sou muito visual, então quando vem uma função “medonha” com terceiro grau eu já vou direto no gráfico pra ver o comportamento dela. Porque uma função afim, a gente tem noção “de cabeça”, a quadrática também, mas passou disso já complica um pouquinho.

Estudante F: Olha, aqui no comando a gente vê que o gráfico tem tanto um ponto de máximo quanto um ponto de mínimo. [...] mas eu quero desenvolver algebricamente a ideia.

Estudante E: Okay. A gente sabe, pela regrinha da primeira derivada, que ela tem que ser igual à zero para acharmos os pontos. Mas acho que não vão ser os pontos de máximo para x . Porque fica muito esquisito no gráfico. Parece que não é a mesma coisa.

Estudante H: Enquanto você substituía aí os valores dos “pontos candidatos”, eu abri aqui no comando de gráficos [Comando 5] da calculadora gráfica pra conferir e realmente são esses pontos mesmo.

Assim como foi mencionado no item anterior, os estudantes, realizando a primeira proposta de ensino sobre as derivadas, inseriram a calculadora gráfica como meio para validar suas respostas baseadas na algebrização. Assim, desenvolveram todo o percurso com a calculadora sendo partícipe ou complementar de seus respectivos processos de resolução, mas utilizaram a visualização gráfica como uma “fonte final” para validar a resposta encontrada.

Reitero que validar ainda faz parte do ato de experimentar com as tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005), quando se trata de uma espécie de “convencimento sobre a veracidade de conjecturas” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p.

57). Isso aponta para o fato de que os estudantes não ficaram convencidos de suas conclusões, por isso decidiram usufruir da visualização gráfica para confirmarem (ou refutarem) essas respostas.

Por mais que na segunda proposta de ensino, ainda sobre as derivadas, os estudantes também utilizem a Calculadora Gráfica para fazer esse movimento de validação dos resultados, pude analisar que alguns estudantes faziam um sistema de comparação entre o gráfico gerado e a resolução utilizando outros meios. Em outras palavras, os estudantes olhavam o gráfico gerado e tentavam chegar a uma resposta, seja no lápis e papel, quadro ou até mesmo na Calculadora Científica, fazendo uma comparação entre a resolução que estavam desenvolvendo e os pontos de máximo e/ou mínimo que apareciam no gráfico.

Essa conexão entre tecnologias distintas, em junção à validação que os estudantes também realizavam ao finalizar seus desenvolvimentos, também é uma característica encontrada em Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) quando os autores discutem acerca do envolvimento de outra linguagem na comunicação com os preceitos matemáticos. Esse envolvimento, segundo os autores, é ligado à informática, e essa relação de envolvimento, que vai além da escrita (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020), corrobora para a percepção de incoerências nas resoluções, nos conceitos adotados para desenvolver a questão assim como contribui com o que foi chamado, nos itens supracitados, como uma manipulação dinâmica de outros recursos que são postos para a investigação daquela determinada questão.

Para concluir essa etapa, interpreto que, por mais que seja um movimento que vá além da escrita, não a desconsidero da investigação posta. As resoluções, tanto nas propostas de ensino quanto em cadernos e quadro, são características dessa escrita e, segundo Lévy (1993, p. 87), “com a escrita, abordamos aqueles que ainda são os nossos modos de conhecimento e estilos de temporalidade majoritários”. Assim, o desenvolvimento de cada resolução, representando a escrita de cada estudante, foi um fator primoroso para que outros meios entrassem em cena para articular o pensamento deles. Entendo, então, que essa relação entre escrita e informática não pode e não é desprendida, pois fazem parte de uma única estrutura do conhecimento.

G) A visualização gráfica como recurso para produção de conhecimentos em Cálculo de Integrais.

Visualização Gráfica (CONTEÚDO DE INTEGRAIS – 1ª e 2ª Propostas)

1ª Questão sobre Integrais

Estudante A: A gente usa o Comando Khicas50 pra fazer as integrações indefinidas e o Comando 5 (Gráficos) e colocamos 3 funções em uma e 3 funções em outra calculadora pra não ficar muito “poluído visualmente”.

Estudante C: Agora a gente precisa encontrar o custo total. Escolhe duas funções, eu fico com as outras duas e a gente analisa junto as duas que sobrarem nas calculadoras.

Estudante D: Agora fazendo uma análise aqui das funções, eu acho que nenhuma dessas quadráticas “sobe tanto” como as de terceiro grau, pensando no quadrante positivo. Não sei se concorda comigo...

Estudante C: Sim, também acho. Nessas funções que colocamos aqui acho que as de terceiro grau realmente dão uma subida bem acentuada em relação às outras.

Estudante E: A gente conversou muito e chegamos na conclusão de que a melhor função que, pra gente, representa o maior custo, graficamente, foi a Função de Janeiro ($C1(x)$). Justamente pensando nessa questão de ser uma loja que tá iniciando.

Estudante H: Agora pra analisar esses gráficos aqui, assim que a gente for colocando a gente já pode ir anotando no caderno as funções que a gente classifica como maiores. Mas a gente já coloca as 6 funções.

Estudante G: Mas eu acho melhor a gente verificar esses gráficos no Classpad porque é melhor pra gente movimentar. Na gráfica, mesmo com *zoom*, a gente precisa ficar movimentando o mouse de 1 em 1 quadradinho e isso além de cansar não mostra como pode estar “lá em cima”.

2ª Questão sobre Integrais

Estudante A: Como a gente tá usando o comando $\int dx$, e a gente quer definida a gente não teria que determinar um intervalo?

Estudante B: Se duas funções se cruzam, é uma intersecção. Se é uma intersecção, então ali já o primeiro ponto do intervalo que a gente quer. Assim que eu penso.

Estudante C: A gente tava conversando aqui e como a gente ainda não sabe totalmente

como que essa calculadora trabalha pra achar a área, se pode dar erro ou alguma coisa assim, a gente escolheu duas funções que se cruzam e não deixam uma área tão grande assim: $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x$.

Estudante D: Se não estou enganado, a gente vai precisar dos pontos de intersecção pra saber até onde que a gente vai integrar. A própria calculadora gráfica já traz esses pontos no comando **INTSECT**, que são 0 e 2. Então a gente usa o comando $\int dx$ e encontra. Olha só... Aqui deu uma área aproximada de 1,3.

Estudante E: Eu escolho uma função quadrática e você [Estudante F] escolhe uma afim, pode ser? Acho que seria uma boa $f(x) = 2x^2 + x + 4$.

Estudante F: Okay. Acho que pra mim seria legal um $g(x) = 4x + 5$.

Estudante F: Agora a gente usa o comando $\int dx$ pra gente conseguir achar a área delimitada pela intersecção dessas duas funções, eu acho. Se for isso mesmo, a área vai dar aproximadamente 2,92.

Estudante H: Acho que pra essa questão a gente pode escolher a reta identidade que é mais fácil de encontrar uma função que se cruzaria com ela. Vou tentar $Y = x^2 + 4$.

Estudante H: É... Essa função não cruzou [risos].

Estudante G: E se a gente acrescentar um x ? Vamos ver como fica com $Y = x^2 + 4x$.

Que a visualização foi um componente importante nas resoluções das questões é um fato, e nesta proposta de ensino sobre Integrais ela foi uma característica de extrema importância para desenvolver as ideias e interpretações diante dos dados gerados com a questão.

Com relação à primeira questão desta proposta, os estudantes tiveram que analisar o comportamento gráfico de funções baseadas em suas respectivas autonomias diante da escolha de um valor de custo, ou seja, a autonomia dos estudantes diante dos valores que eles escolheram interferia diretamente no comportamento gráfico e, posteriormente, na interpretação diante dessa visualização.

Para que os estudantes pudessem fazer esse movimento de interpretar o que o gráfico mostrava, a comunicação foi atributo essencial para que chegassem ao consenso tanto de valores de custo quanto da função $C(x)$ que melhor representaria o custo de uma determinada loja. A comunicação tem como elemento principal a oralidade e,

baseando nas ideias de Lévy (1993), essa narrativa, em forma de palavra viva “destaca-se sobre um fundo de um imenso corpus de textos: “os escritos que permanecem”.” (LÉVY, 1993, p. 77), o que, olhando para o trabalho desenvolvido em campo, evidencia o fato de que os estudantes, por diversas vezes, debatiam entre si para depois colocar as ideias na proposta de ensino de forma escrita, já que eles também profuravam significações para suas próprias interpretações.

Ainda na primeira questão, os estudantes puderam desenvolver a Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005) de modo a considerar o uso integrado da Calculadora Gráfica articulando a algebrização com a visualização e, principalmente, demonstrando segurança e solidez argumentativa no momento de realizar as simulações no ambiente gráfico. Identifico que essa segurança e solidez nos argumentos estão fortemente ligadas à criatividade dos estudantes para determinar valores de custo: alguns estudantes tinham ideia de um estabelecimento de festas comum ou pensavam em superfaturamento enquanto outros estudantes atribuíam valores de custo simulando um estabelecimento em fase inicial de abertura.

Além dessas simulações, o que vale para as duas questões desta proposta de ensino, permitirem uma forma dinâmica, exploratória e manipulativa de aprender conceitos e aplicações matemáticas também fornece a possibilidade de construir e elaborar novos problemas, o envolvimento com formas de linguagem diferenciadas ligadas à informática e o aprofundamento, aprimoramento e questionamentos acerca do que está sendo posto para investigação bem como traçar conexões originais partindo das experimentações realizadas (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020).

Lévy (1993) também comenta acerca dessa simulação, olhando para o viés da informática, mas antes discute acerca da questão imagética. A imagem, pensando na resposta gráfica que a Calculadora Gráfica pode fornecer, é fruto da digitalização neste período globalizado, pois, para Lévy (1993, p. 102) “[...] atinge todas as técnicas de comunicação e de processamento de informações”. Ainda, “Uma vez digitalizada, a imagem animada, por exemplo, pode ser decomposta, recomposta, indexada, ordenada, comentada, associada no interior de hiperdocumentos multimídias” (LÉVY, 1993, p. 103) e “[...] a foto ou desenho podem ser reprocessada e desviada à vontade, os parâmetros de cor, tamanho, forma, textura, etc. podendo ser modulados e reempregados separadamente” (LÉVY, 1993, p. 106). É nesse sentido que a simulação com os gráficos se encontra: um ambiente interativo onde, fruto da digitalização, os estudantes puderam movimentar os gráficos, mudar a coloração, alterar detalhes

gráficos e, principalmente, interpretar criticamente o que conseguiam verificar desse movimento de experimentação.

Assim, a imagem pode estar intimamente vinculada à simulação digital já que estas questões sobre Integrais se tratam de investigar a relação gráfica que era disposta de acordo com as funções que cada estudante considerou em analisar. Assim, esse movimento de experimentar com as calculadoras não apenas fomenta a dinamicidade e a formulação de conjecturas, mas se torna uma forma de “[...] estudar fenômenos inacessíveis à experiência [...] ou simplesmente para avaliar de forma menos custosa o interesse de novos modelos, mesmo quando a experimentação [algébrica] é possível” (LÉVY, 1993, p. 122, grifo nosso).

Fazer um movimento de simulação com objetos digitais, que neste caso são as calculadoras, foi importante para que os estudantes compreendessem e interpretassem ambas as questões. Identifico que nestas questões a intuição é acentuadamente visível para compreender, de modo dinâmico, as relações de causa e efeito presentes no ambiente informatizado contribuindo para a formação de um conhecimento por simulação diante do que observa (LÉVY, 1993).

Para que os estudantes pudessem encontrar a função de custo $C(x)$, na primeira questão, eles deveriam pensar em como encontrá-las revisitando conceitos do Cálculo Diferencial e Integral e aplicando-os na Calculadora Gráfica para que pudessem concluir a algebrização e partir para a visualização no momento da tomada de decisões. Esse movimento conectivo é explicado por Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) como uma das formas de desenvolver o pensamento heurístico bem como fomenta, através dessa experimentação, a manifestação do pensamento dedutivo.

Na segunda questão, os estudantes utilizaram a visualização para tomada de decisões e outras experimentações relacionando a nomenclatura de duas funções distintas (uma afim e outra quadrática) e, para justificar o que a interface gráfica emitia ao fazer a intersecção das duas funções e gerar a área delimitada pelo gráfico dessas funções com o comando $\int dx$, utilizavam uma explicação baseada apenas na oralidade e/ou explicitando a resolução num movimento de comprovação (chamado coloquialmente de “tirar a prova real”).

Essa relação de procurar meios de validar os resultados através da definição $\int_a^b f(x)dx$ mostrou uma “Não necessidade de recorrer primeiro à álgebra, quando as soluções gráficas são requisitadas” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 93, tradução

nossa), já que as funções que os estudantes escolheram são frutos de suas criatividade e tal definição foi pensada como justificativa após as investigações baseadas na visualização. Alguns estudantes utilizaram a definição com a resolução da questão mostrando uma justificativa enquanto outros apenas comentaram acerca da relação de diferença entre a função superior e a função inferior que deu formato à área delimitada por essas mesmas funções.

As duas espécies de justificativas foram aceitas para concluir a questão, tendo em vista que os estudantes já haviam feito uma “exploração do caráter visual, dinâmico e manipulativo de objetos matemáticos” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 57) e esse movimento de experimentação com a Calculadora Gráfica permitiu a criação de conjecturas matematicamente corretas e “aprofundamento em variados níveis de rigor matemático” (BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020, p. 58).

Para concluir essa subseção de análise coletiva, é importante mencionar que a Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) e as Tecnologias da Inteligência (LÉVY, 1993), especificamente acerca dos três tempos do espírito (oralidade, escrita e informática), me ajudaram a analisar os dados de forma coletiva em conjunto com a pré-análise feita nas subseções anteriores que permitiram a criação do diagrama explicitado na Figura 53. Assim, busco, na próxima subseção, fazer uma síntese do que pôde ser compreendido com a análise desenvolvida até aqui, tanto de maneira separada por equipe quanto a análise coletiva desenvolvida nesta subseção, de modo a situar o leitor das ideias principais que destacaram diante desse processo.

5.6 Síntese do compreendido

Primeiramente, é importante comentar que por mais que as propostas de ensino sejam iguais para todos os participantes, algumas duplas fizeram conexões originais de um pensamento matemático a partir de uma conjectura, a partir de uma visualização, a partir da busca por responder algo que foi colocado em evidência. Além disso, devo reiterar que o foco central da análise sempre se ateu à pergunta que deu corpo para toda a pesquisa de campo: ***Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?***

Pude notar diversos aspectos que emergiram tanto da análise de forma separada quanto da análise coletiva e todas estão ligadas a esse movimento de experimentação, de

três unidades centrais de análise, conforme Figura 53 apontou acerca da Experimentação com Calculadoras: a) A calculadora como partícipe do processo; b) A calculadora como complementar do processo; e c) A visualização como recurso do processo.

Percebo que a produção de conhecimentos com calculadoras, colocando-as como partícipe do processo ou complementar do processo e como recursos tecnológicos cuja visualização fomenta o aspecto da simulação, em minha análise, evidenciou a **exploração**²⁷ que os estudantes realizaram baseados na Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Além disso, essas três unidades de análise mencionadas permitiram identificar os momentos em que os estudantes faziam o uso integral da calculadora ou o uso parcial, envolvendo ou não a visualização.

Nos momentos em que comento a calculadora (seja ela científica ou gráfica) como partícipe do processo busquei explicitar os episódios, baseados na descrição dos dados, onde a calculadora teve sua participação do início ao fim de toda a resolução da questão. Quando insiro a calculadora como complementar deste processo, estou evidenciando-a de duas maneiras distintas: o seu uso *a priori* e seu uso *a posteriori*. Isso significa que os estudantes ora utilizavam a calculadora no início da resolução e desenvolvia seus pensamentos, após, sem o uso desse recurso; e, em outros casos, traçavam seus pensamentos em outros recursos (quadro, caderno, desenhos, etc.) para, após, fazerem o uso do recurso. Tanto a calculadora como partícipe do processo de Experimentação quanto complementar, desse mesmo processo, pude verificar que os estudantes conseguiam explicitar suas conjecturas, idealizações, posicionamentos críticos e, até mesmo, validar os seus resultados diante do que se objetivava.

E, pensando nesse processo de formulação de conjecturas, generalizações, críticas em geral, pude identificar alguns aspectos no ato de desenvolvimento das ideias que foram consolidados com a discussão entre os referenciais teóricos de Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) e o referencial teórico de Tecnologias da Inteligência (LÉVY, 1993), já que o movimento de experimentação estava intimamente ligado com o que Lévy (1993) chamou de “os três tempos do espírito”, que são a oralidade, a escrita e a informática. Essa relação harmoniosa entre os referenciais teóricos também foi de extrema utilidade na identificação e, claramente, na análise dos

²⁷ Destaco esse termo, pois, além de ser o fator principal de toda a investigação, liga à pergunta de pesquisa que busca analisar como os estudantes exploram os conceitos de CDI com calculadoras.

momentos em que os estudantes utilizam a visualização para desenvolver suas resoluções.

A visualização foi um pilar importante nesta investigação, pois, mesmo quando a questão (ou a ideia dela) não mencionava o atributo da visualização como forte contribuinte na resolução, os estudantes a utilizavam para validar ou para fortalecer suas conjecturas com base na simulação. Trago, em minha análise, esse fator da simulação como algo que corrobora a produção de conhecimentos de CDI aliado à Experimentação com Tecnologias que também defende a visualização como um fator que contribui diretamente nesse processo, de modo que a algebrização não fica isolada ou incompreendida, mas há sempre um significado para ela de modo dinâmico, manipulativo e, na maior parte dos casos, contextualizado, como foi o caso das questões contidas nas propostas de ensino.

Por fim, considero que a exploração realizada pelos estudantes participantes mostrou que a calculadora, seja ela científica ou gráfica, pôde se tornar um recurso tecnológico possível na produção de conhecimentos em CDI numa abordagem experimental. Pelo fato de os estudantes terem utilizado a calculadora de modos distintos, sob múltiplas formas de uso, a produção de conhecimentos matemáticos foi muito diversificada, até mesmo pelo fato de se tratar de uma pesquisa realizada com seres humanos, o que significa que, por mais que os resultados pudessem ser similares entre si, cada participante, cada equipe, tem seu próprio modo de interpretar e desenvolver a Matemática. Assim, se torna inconcebível uma única resposta diante de uma análise feita com mais de um participante.

Sendo assim, na próxima seção, que compreende as considerações finais acerca deste relatório científico, trarei o panorama geral do que foi abordado até aqui e uma retomada sintetizada das conclusões que puderam ser tomadas diante da pergunta de pesquisa e, conseqüentemente, dos dados produzidos.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta seção faço uma retomada das ideias presentes nesta dissertação de mestrado, uma síntese do que pôde ser visto até o presente momento e as conclusões que puderam ser evidenciadas diante da análise dos dados bem como expectativas desta pesquisa.

6.1 Um panorama geral diante da dissertação

No decorrer desta dissertação, busquei trazer minha experiência com as discussões e reflexões críticas que envolvessem o uso experimental das calculadoras a partir das discussões profícuas dentro do Projeto Temático “Ensino e Aprendizagem de Matemática com Calculadoras: possibilidades para a prática do professor” e também pelas discussões desenvolvidas no GPIMEM. Ambos os ambientes contribuíram para que minha visão pessoal acerca das calculadoras obtivesse um viés mais pedagógico e mais crítico.

O intuito principal desta dissertação e, também, da própria pesquisa de campo, estiveram pautados em procurar respostas plausíveis diante do questionamento principal: *Como os estudantes de graduação em Matemática exploram conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real utilizando calculadoras?* De modo alinhado, o objetivo central da investigação foi de *analisar como os estudantes exploram as aplicações de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) de funções de uma variável real com calculadoras.*

Tendo estes dois pilares sustentando a base de minha pesquisa, sabendo com o que queria investigar e o ambiente que gostaria de produzir os meus dados, tive que me atentar para as diversas pesquisas que trabalhavam a temática do Cálculo em conjunto com as Calculadoras. Esse movimento de observação foi de suma importância, não apenas para buscar bases teóricas e pesquisas similares, mas também para localizar esta pesquisa diante das demais.

Com o levantamento bibliográfico realizado, envolvendo as dissertações, teses e artigos, esta pesquisa se mostrou diferenciada das demais devido ao fato de se tratar de uma pesquisa que relaciona diversas temáticas do Cálculo Diferencial e Integral com o uso exploratório das Calculadoras Científicas e Gráficas, muitas vezes em movimento articulando ambas as calculadoras visando produzir conhecimento matemático sob a luz da Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Busquei trabalhar com uma opção metodológica que estivesse alinhada com

meus interesses de pesquisa e que, também, pudesse contribuir para possíveis afirmativas diante do fenômeno exploração. Assim, busquei estudar e compreender como se desenvolvia Experimentos de Ensino (COBB; STEFFE, 1983; STEFFE; THOMPSON, 2000) e as ideias inerentes a esse procedimento metodológico, ancorado na Psicologia e na Pesquisa Qualitativa, chamou-me a atenção e fazia jus às minhas expectativas diante dos pilares da pesquisa.

Quando a pergunta de pesquisa, o objetivo central e a metodologia estavam delineados, constituindo os três pilares principais da minha pesquisa, foi momento de “tirar o projeto do papel” e aplicá-lo. Assim, com o aval do Comitê de Ética da UNESP *Campus* de Botucatu (SP), desenvolvi os encontros dos Experimentos de Ensino e, durante três meses produzindo os dados, pude perceber diversas características advindas do uso da calculadora pelos estudantes de graduação em Matemática.

Relembrando o leitor, participaram do trabalho de campo oito estudantes do curso de graduação em Matemática, da UNESP *Campus* de Rio Claro (SP), regularmente matriculados, que estavam fazendo a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I pela primeira ou pela segunda vez. O convite para apresentar a ideia do projeto de pesquisa foi feito pela docente desta referida disciplina, onde convidei os alunos a participarem dos encontros e, inclusive, pude ouvir um pouco dos estudantes o que eles consideravam acerca do uso de calculadoras no CDI.

Baseando-me nos registros escritos dos estudantes, em meu diário de campo e nas gravações feitas em vídeo e áudio dos participantes durante os encontros, busquei analisar os dados obtidos qualitativamente pela Triangulação de Dados (DENZIN; LINCOLN, 2006) que, inclusive, é um procedimento de análise bem utilizado no GPIMEM. Esse procedimento consiste em analisar múltiplos registros que encapsularam os dados produzidos em campo e, a interação deles, fomenta uma interpretação qualitativa diante daquilo que está sendo posto para análise, sempre tendo em vista meios de responder a pergunta de pesquisa (DENZIN; LINCOLN, 2006).

Embasado em meus três referenciais teóricos (LÉVY, 1993; BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020) desenvolvi minha análise com base na manifestação dos estudantes, tanto em vídeo quanto escritas, e também com vistas ao meu diário de campo, conforme supracitado. Diante do movimento de análise pude verificar que a Experimentação com Calculadoras esteve ligada a três fatos, que se tornaram minhas unidades de análise: **a) A Calculadora como partícipe do processo de Experimentação; b) A Calculadora como meio de**

complementar de Experimentação; e c) A visualização gráfica como recurso para Experimentação.

Fazendo um entrelaçamento entre as ideias de Lévy (1993), Borba e Villarreal (2005) e Borba, Scucuglia e Gadanidis (2020) pude perceber que na maior parte dos momentos os estudantes inseriam a calculadora (seja ela científica e/ou gráfica) como partícipe do processo, de modo que seu uso se deu do início ao fim de todo o experimento. Assim, os estudantes começavam conversando entre si, utilizavam a calculadora para iniciar uma determinada resolução e permanecia com ela até o final, gerando conjecturas, formulações de hipóteses, investigações adicionais e até mesmo uma forma diferente de concluir suas ideias pautando-se em definições matemáticas.

Na segunda unidade de análise, acerca da calculadora como complementar do processo, pude perceber duas características distintas, que chamei de complementar a priori e complementar a posteriori. Sobre a primeira, pude perceber que os estudantes, no momento em que analisavam a questão para desenvolvê-la, utilizava a calculadora para iniciar seus passos ou conduzir suas ideias até um determinado ponto, pois, após isso, os estudantes usufruíam de outros recursos para desenvolver seus raciocínios, sendo: lápis e papel, quadro, desenhos, etc. Sobre a segunda, os estudantes desenvolviam suas ideias no papel (geralmente) ou em quadro e, após chegarem a uma consideração plausível, utilizavam a calculadora para dar continuidade aos seus pensamentos de modo que, em muitas ocasiões, o uso da calculadora esteve mais voltada para a validação dos resultados que os estudantes haviam conjecturado.

Sobre a terceira unidade de análise, que identificou a visualização como um recurso para a experimentação, pude perceber que a visualização foi crucial para que os estudantes pudessem formular hipóteses, realizar investigações além do que a questão solicitava e até compreender relações que, algebricamente, foram mais difíceis para os estudantes. Porém, além disso, pude perceber, também, que o uso da visualização gráfica, ora foi partícipe do processo, ora foi complementar. Isso significa que há indícios da primeira e da segunda unidade de análise corroborando na terceira unidade. Esse fato é muito interessante quando se trabalha com a Experimentação com Tecnologias, pois a exploração não segue um padrão ou uma listagem de regras, mas pode estar intrínseca ou explícita a uma investigação bem como pode corroborar em outros vieses que se esteja analisando (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Em uma visão geral, percebo que a capacidade comunicativa dos estudantes, a necessidade de escrever algo no quadro ou desenhar no caderno situações que

estivessem atreladas àquela questão investigada e o uso da simulação gráfica para desenvolverem uma interpretação diante do gráfico, além de ter fomentado as três unidades de análise, também puderam fazer jus ao que Lévy (1993) defende como Tecnologias da Inteligência.

Quando Lévy (1993) menciona sobre a informática e a simulação e fazendo usufruto da Experimentação com Tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005; BORBA; SCUCUGLIA; GADANIDIS, 2020), direcionando a visão para a exploração com uma TD (a calculadora), percebo que, além dos referenciais se complementarem, é notório o impacto que as TD podem exercer em um ambiente de ensino, principalmente com vistas à exploração de um conceito ou de alguma aplicação, corroborando no *pensar-com-tecnologias*.

Assim, observando todas essas características que deram forma para que a análise fosse desenvolvida, considero que o uso das Calculadoras Científicas e Gráficas, em uma abordagem experimental no Ensino Superior, no caso desta pesquisa, pôde permitir, além de uma forma exploratória do CDI, a produção de conhecimentos em Cálculo diante do uso partícipe, complementar e/ou visualizativo da tecnologia.

Em último lugar, é importante mencionar que esta pesquisa se encontra inserida dentro das temáticas postas para investigação na região de inquérito da Educação Matemática, trabalhando com professores de Matemática em formação (Formação Superior Inicial) sob o eixo de pesquisa de Novas Tecnologias.

Na próxima subseção trarei as expectativas deste trabalho de mestrado, as possibilidades que podem vir a emergir com a consolidação desta pesquisa e os possíveis desafios futuros.

6.2 O futuro: Expectativas e possibilidades para as novas pesquisas

Nesta última subseção e, também, fechamento desta dissertação de mestrado, busco explicitar as expectativas que tenho com esse trabalho e com trabalhos futuros que abordem essa temática assim como evidenciar as possibilidades de se trabalhar a temática “Calculadoras e o Ensino de Cálculo”.

Em primeiro momento, é importante explicitar que a expectativa principal atribuída a essa dissertação de mestrado é de que ela possa contribuir com reflexões, ideias e aplicações para com pesquisas futuras que estejam interessadas em trabalhar o CDI com as Calculadoras, seja ela científica ou gráfica. Aponto para o fato de que não são frequentes pesquisas que consideram a Calculadora como um ator que pode

contribuir na produção de conhecimento e, se relacionando com o CDI, as pesquisas são mais faltantes ainda.

Diante disso, espero que, com esta dissertação, pesquisadores possam se sentir motivados para trabalhar ambas as temáticas em consonância uma com a outra difundindo cada vez mais o conhecimento matemático através do uso consciente, exploratório e contextualizado da Tecnologia Digital de forma a dar potência para o surgimento de mais trabalhos que englobam essas temáticas.

Espero que as ideias desenvolvidas neste trabalho acadêmico possam contribuir de maneira eficaz para a adaptação de questões investigativas relacionadas ao CDI, a criação de novas questões investigativas, a ancoragem em algum conceito do CDI explorado de forma contextualizada e exploratória com as tecnologias e, até mesmo, aprimoramento nas ideias e questões por aqui apresentadas.

Em segundo, e último, lugar considero que existam diversas possibilidades para trabalhar os conceitos do CDI com as calculadoras de modo a desenvolver pesquisas acadêmicas que serão notoriamente importantes para o escopo da Educação Matemática, a exemplo de: (i) Funções Polinomiais em geral; (ii) Definição de L'Hospital; (iii) Propriedades de Limites, Derivadas e/ou Integrais; (iv) Aplicações em Ciências de outras naturezas; dentre diversas outras possibilidades.

Sendo assim, de maneira geral, espero que as escritas aqui colocadas, as ideias desenvolvidas, os referenciais articulando entre si, as metodologias e os dados produzidos fomentem a curiosidade, a investigação da temática aqui colocada sob novos vieses e/ou um carinho, atenção e tratamento especial para esse conteúdo deveras importante na formação do professor de Matemática que necessita de olhares críticos, reflexivos, pedagógicos e humanizados.

REFERÊNCIAS

- ALTOÉ, A.; SILVA, H. O Desenvolvimento Histórico das Novas Tecnologias e seu Emprego na Educação. In: ALTOÉ, A.; COSTA, M. L. F.; TERUYA, T. K. **Revista Educação e Novas Tecnologias**. Maringá: Eduem, 2005. p. 13-25.
- ALVES-MAZZOTTI, A. J. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. São Paulo: Editora Pioneira, 1998. parte I, p. 107-188. 1988.
- ALVES-MAZZOTTI, A. J; GEWANDSZNAJDER, F. **O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa**. São Paulo: Pioneiras, 1988.
- ARANHA, M. L. A.; MARTINS, M. H. P. **FILOSOFANDO: INTRODUÇÃO À FILOSOFIA**. 5. ed. São Paulo: Editora Moderna, Coleção PNLD (2015-2017), 2013.
- BALDIN, Y. Y.; BALDIN, N. Calculadoras gráficas como auxiliar didático no ensino de matemática para as engenharias. In: **CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, XXIX. Anais...** Porto Alegre, RS: PUCRS. 2001.
- BICUDO, M. A. V. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**, vol. 4, 1, março, pp.18-23, 1993.
- BIKNER-AHSBAHS, A. **The Research Pentagon: A diagram with Which to Think About Research**. 2022.
- BIKNER-AHSBAHS, A., PREDIGER, S. (2010). Network of theories—An approach to exploring the diversity of theoretical approaches. In B. Sriraman & L. English (Eds.), **Theories of Education Mathematics: Seeking New Frontiers** (pp. 479–512). Advances in mathematics education series. Dordrecht: Springer. 2010.
- BONAFINI, F. **Explorando conexões entre a Matemática e a Física com o uso de calculadoras gráficas e o CBL**. 2004. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.
- BORBA, M. C. **A PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Anped, Caxambu, MG, 21-24 Nov. 2004.
- BORBA, M. C.; ALMEIDA, H. F. L.; GRACIAS, T. A. S. **Pesquisa em Ensino e Sala de Aula: Diferentes Vozes em uma Investigação**. Belo Horizonte: Autêntica, 2018.
- BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2004.
- BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003. (Tendências em Educação Matemática).
- BORBA, M. C. VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and Reorganization of**

Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation. New York: Springer Science+Business Media, Inc., 2005.

CHINELATTO, T. G. **Formação continuada de professores com o uso de Tecnologias Digitais:** produção de atividades de conteúdos matemáticos a partir do currículo paulista. 2019 170 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2019.

COBB, P.; STEFFE, L. The Constructivist Researcher as Teacher and Model Builder. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 14, p. 83–94, 1983.

CRESWELL, J. W. **Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa.** 3. ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

CUNHA, M. F. **Tecnologias Digitais em cursos de Licenciaturas em Matemática de uma universidade pública paulista.** 2018 250f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2018.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introdução a disciplina e a prática da pesquisa qualitativa. In: DENZIN, N. K. e LINCOLN, Y. S. (Orgs.). **O planejamento da pesquisa qualitativa:** teorias e abordagens. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2006, p. 15-41.

FEENBERG, A. **O que é a filosofia da tecnologia?** A teoria crítica de Andrew Feenberg: racionalização democrática, poder e tecnologia, v. 2, p. 51-64, 2010.

FILATRO, A. **Design Instrucional na prática.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2008.

GALVÃO, M. C. B. **Levantamento bibliográfico e pesquisa científica.** Fundamentos de Epidemiologia. Barueri: Manole, 2011.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** Belo Horizonte, Autêntica, 2004.

GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.** Rio de Janeiro: Record, 1997.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo.** Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2006.

HABOWSKI, A. C.; CONTE, E.; TREVISAN, A. L. Por uma cultura reconstrutiva dos sentidos das tecnologias na educação. **Educação & Sociedade**, v. 40, p. e0218349, 2019.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias: O Novo Ritmo da Informação.** 3. Ed. São Paulo: Papirus, 2007.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

LÉVY, P. **As Tecnologias da Inteligência: O futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LIBÂNEO, J. C. TENDÊNCIAS PEDAGÓGICAS NA PRÁTICA ESCOLAR. São Paulo, SP. **Revista da Associação Nacional de Educação – ANDE**, 1983.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. Londres: Sage Publications. Lisboa - Portugal, Edições 70, 1985.

MAZZI, L. C. **Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da análise real**. 2014 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2014.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. Análise textual discursiva: processo construído de múltiplas faces. **Ciência & Educação**, pp. 117-128, 2006.

NEVES, J. D.; RESENDE, M. R. **O experimento didático como metodologia de pesquisa: Um estudo na perspectiva do “estado do conhecimento”**. 2018. Disponível em: <https://sites.pucgoias.edu.br/pos-graduacao/mestrado-doutorado-educacao/wp-content/uploads/sites/61/2018/05/Jos%c3%a9-Divino-Neves_-Marilene-Ribeiro-Resende.pdf>. Acesso em: 27/11/2023.

NIEROTKA, R. P.; MONTEIRO, A. M.; SILVA, M. E. K. TRIANGULAÇÃO NA PESQUISA EM SAÚDE: PRINCÍPIOS, POSSIBILIDADES E DESAFIOS. In: **Anais do 6º Congresso Internacional em Saúde**. UNIJUI, Ijuí, RS, 2019.

NUNES, J. A. **DESIGN INSTRUCIONAL NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: TRAJETÓRIA DE UM PROFESSOR DE MATEMÁTICA QUE ELABORA ATIVIDADES SOBRE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COM A CALCULADORA HP 50G**. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA): Canoas, RS, 2011.

PAPERT, S. **Mindstorms - Children, Computers and Powerful Ideas**. New York: Basic Books, Inc., 1980.

PEREIRA, A. L. **REALIDADE AUMENTADA E O ENSINO DE CÁLCULO: POSSIBILIDADES PARA A CONSTITUIÇÃO DO CONHECIMENTO**. 2022 225p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2022.

PIROZZI, G. P. Tecnologia ou Metodologia? O grande desafio para o século XXI. **Revista Pitágoras**, v.4, n.4. FINAN - Nova Andradina/MS, dez/mar 2013.

POLYA, G. **How to Solve It: a new aspect of mathematical method**. Princeton: Princeton University Press, 1957.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies**. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

REHFELDT, M. J. H.; QUARTIERI, M. T.; GIONGO, I. M.; HAUSCHILD, C. A.; AZAMBUJA, K.; POLETTI, E. F. A CALCULADORA HP EM DISCIPLINAS DE CÁLCULO: UM ESTUDO DAS CONCEPÇÕES DOS PARTICIPANTES. **Revista Ciências e Ideias**, v. 9, n.1, Nilópolis, RJ, 2018.

RIBEIRO, A. E. **Tecnologia digital**. 2014. [S.l.]: Disponível em: <<https://www.ceale.fae.ufmg.br/glossarioceale/verbetes/tecnologia-digital>> Acesso em: 25 de Setembro de 2023.

ROSA, M.; BICUDO, M. A. V. Focando a constituição do conhecimento matemático que se dá no trabalho pedagógico que desenvolve atividades com tecnologias digitais. In: PAULO, R. M., FIRME, I. C., BATISTA, C. C. (Orgs.). **Ser professor com tecnologias: sentidos e significados**. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2018, p. 13-36.

SCUCUGLIA, R. **A Investigação do Teorema Fundamental do Cálculo com Calculadoras Gráficas**. 2006 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2006.

SILVEIRA, R. M. F.; BAZZO, W. A. CIÊNCIA E TECNOLOGIA: Transformando a relação do ser humano. **IX Simpósio Internacional Processo Civilizador**, Paraná, 2005. Disponível em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/processoscivilizadores/portugues/sitesanais/anais9/artigos/workshop/art19.pdf> . Acessado em 12 de Setembro de 2023.

SOARES, D. S. **Uma abordagem pedagógica baseada na análise de modelos para alunos de biologia: qual o papel do software?** 2012 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2012.

SOUSA JUNIOR, M. A.; NUNES, J. M. V. Níveis de instrumentação: o uso da calculadora científica em tarefas de cálculo diferencial. **Revista Cocar**, UEPA, v. 13, n.26. Belém (PA), 2019.

STEFFE, L.; THOMPSON, P. W. Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and Essentials Elements. In: LESH, R.; KELLY, A. E. (Org.). **Research Design in Mathematics and Science Education**. Hillsdale (MI): Erlbaum, 2000. p. 267–307.

STEWART, J. **CÁLCULO**. Vol. 1, Cengage Learning, 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995.

TEIXEIRA, E. B. A Análise de Dados na Pesquisa Científica: importância e desafios em estudos organizacionais. **Revista Desenvolvimento em Questão**, Editora Unijuí, ano 1, n. 2, jul./dez., 2003.

TIKHOMIROV, O. K. The Psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J.V. (Ed.) **The concept of activity in soviet psychology**. New York:

M.E.Sharpe, 1981. p. 256-278.

ZAMPIERI, M. T. **Ações colaborativas de formação continuada de educadores matemáticos: saberes constituídos e mobilizados.** 2018 280f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho: Rio Claro, 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Proposta de Ensino com Limites utilizando calculadoras



PROPOSTA DE ENSINO I
Profº João Victor Gonçalves do Carmo
Tema: CDI (Cálculo Diferencial e Integral)

Equipe _____



Questão 1) Uma importante base para entender o Cálculo Diferencial e Integral (CDI) é um conceito muito importante do Pré-Cálculo que é o Limite. Observe as seguintes imagens:

Imagem 1



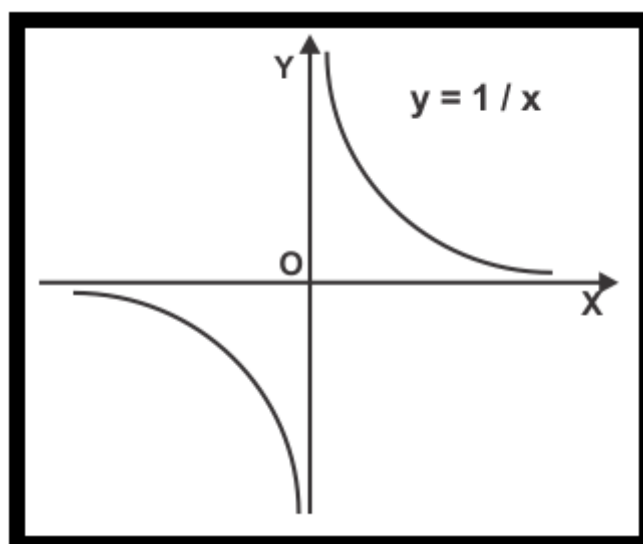
Fonte: Elaborado pelo autor

Imagem 2



Fonte: Elaborado pelo autor

Imagem 3



Fonte: <https://www.alfaconnection.pro.br/matematica/funcoes/funcoes/esboco-de-graficos-das-funcoes/>

Analisando as imagens acima, o que elas têm em comum? Comente um pouco sobre.

Questão 2) Vamos iniciar algumas questões iniciais para familiarizarmos com os limites

com ajuda da calculadora.

- a) Para quanto o valor de x deve tender para obtermos um limite -1 ou -3 na função descrita abaixo?

$$\lim_{x \rightarrow ?} (x^2 - 5x + 3)$$

- b) Para quanto o valor de x deve tender para obtermos um limite 11 ou 12 na função descrita abaixo?

$$\lim_{x \rightarrow ?} \left(\frac{4x + 5}{\sqrt{x}} \right)$$

Analisando matematicamente, por quê o gráfico não está definido para $x = 0$ e $x < 0$?

- c) Ainda utilizando a calculadora (ou se preferir poderá utilizar o classpad) vamos descobrir o seguinte limite.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{3x} \right)$$

- d) O que pode se interpretar através da análise gráfica do seguinte limite?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{sen}(x)}{x} \right)$$

- e) Vamos pensar se existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{(x-2)^2}$. Existindo, negativamente seria o mesmo resultado?

- f) Investigue o limite abaixo. Que conclusões podemos tirar acerca dele?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Referências Bibliográficas

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **CÁLCULO**. Vol. 1, Cengage Learning, 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995.

Questão 3) Em uma determinada tribo indígena um índio faminto saiu para sua caça. De longe, avistou uma pequena lebre que estava no topo de uma montanha. Curiosamente, essa montanha é idêntica à uma função quadrática $f(a) = -a^2 + 5a$. O índio, então, subiu a montanha para capturar seu alimento. Quando chegou ao topo, disparou uma flecha no animal; entretanto, a lebre foi rápida e pulou da montanha no ponto $P(1, 4)$ caindo, em linha reta, em uma árvore relativamente próxima da montanha. Sabendo dessas informações, qual a expressão que representa a trajetória que a lebre fez para “escapar pela tangente”?

Questão 4) Uma costureira está em processo de manufaturar um tecido quadriculado (semelhante a um plano cartesiano). Essa costureira, além de seus dotes para manufatura, possui habilidades com os conceitos matemáticos de retas. Ela utiliza as noções de retas para aperfeiçoar seu trabalho e deixa-lo impecável. Essa costureira fez um movimento curvo no tecido, matematicamente descrito por $y = -x^3 + 2x^2 - x + 2$, na tentativa de cobrir uma falha no ponto $(1, 2)$ com apenas uma movimentação. Após ver o insucesso, passou o tecido na máquina de forma tangente à curva na tentativa de cobrir a falha no ponto indicado. Qual expressão melhor representa essa reta? Em sua opinião, pode(m) existir outra(s) reta(s) tangente nesse caso? Por quê?

Referências Bibliográficas

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **CÁLCULO**. Vol. 1, Cengage Learning, 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995.

APÊNDICE C – 2ª Proposta de Ensino com Derivadas utilizando calculadoras



PROPOSTA DE ENSINO III **Profº João Victor Gonçalves do Carmo** **Tema: CDI (Cálculo Diferencial e Integral)**

Equipe _____



Questão 1) (EsPCex 2013) Uma indústria produz mensalmente x lotes de um produto. O valor mensal resultante da venda deste produto é $V(x) = 3x^2 - 12x$ e o custo mensal da produção é dado por $C(x) = 5x^2 - 40x - 40$. Sabendo que o lucro é obtido pela diferença entre o valor resultante das vendas e o custo da produção, descubra o número de lotes mensais que essa indústria deve vender para obter lucro máximo. Obs: Utilize o comando Khicas50 da Calculadora Gráfica para realizar as derivações.

Questão 2) Vamos fazer uma investigação inicial para familiarizarmos com as noções de máximo e mínimo? Considere que em determinado mês a curva que representa a taxa de produção de uma empresa foi dada por $f(x) = 18x + 3x^2 - 4x^3$. Como você faria para encontrar o ponto máximo e o ponto mínimo desta função

Questão 3) Em uma determinada loja de eletrônicos, um cliente comprou um equipamento de 30 centímetros de altura e solicitou que o depositassem em uma caixa de papelão de 20 litros de capacidade devido cabos adicionais e outros recursos que estavam inclusos no equipamento. Supondo que nesta loja há apenas caixas em formato de paralelepípedo reto atribua um valor para a altura da caixa de modo que o equipamento fique bem acomodado e descubra as dimensões desta caixa de modo a obter o custo mínimo com o papelão.

Questão 4) (FURG – Adaptado) Um campo retangular deve ser cercado com 750 m de cerca ao longo de três lados para que o gado não fuja para outros terrenos, mas apenas serão cercadas três dimensões tendo em vista que existe um rio reto que impede a passagem dos animais. Considerando que x é o comprimento de cada lado perpendicular ao rio e y o comprimento de cada lado paralelo ao rio, como podemos encontrar a área máxima que pode ser cercada?

Referências Bibliográficas

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **CÁLCULO**. Vol. 1, Cengage Learning, 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995.

APÊNDICE D – 1ª Proposta de Ensino com Integrais utilizando calculadoras



PROPOSTA DE ENSINO IV **Profº João Victor Gonçalves do Carmo** **Tema: CDI (Cálculo Diferencial e Integral)**

Equipe _____



Questão 1) É comum ouvirmos que a Derivação e a Integração são tidas como “Funções Inversas” por conta do conceito da Função Primitiva [$F'(x) = f(x)$], fazendo com que a Integração seja o “caminho contrário” à derivação. Em contrapartida, encontramos em alguns livros a teoria de que a Integração não é uma Função Inversa, mas uma “antiderivada”. Pensando nessas duas proposições, para você, qual conceito melhor se encaixa na definição de Integração e por quê?

Questão 2) O custo marginal é o custo a mais que a empresa vai ter para aumentar a produção de um determinado bem/produto. Uma informação muito importante ao calcular o custo marginal é que ele representa a derivada da função custo total $C(x)$. Vamos pensar em uma situação prática. Estipule um custo para os meses de produção para uma determinada empresa que fabrica artigos de decoração para festas. Uma contadora fez o balanço semestral e descobriu que o custo marginal dos meses puderam ser representados por uma generalização, conforme foi dado pela seguinte tabela:

MÊS	VALOR DO CUSTO (R\$)	CUSTO MARGINAL
JANEIRO		$C'(x) = 0,4x + 5$
FEVEREIRO		$C'(x) = 0,24x^2 + 0,8x + 10$
MARÇO		$C'(x) = 0,81x$
ABRIL		$C'(x) = 0,03x^2 + 0,12x + 5$
MAIO		$C'(x) = 0,9x + 3,8$
JUNHO		$C'(x) = 0,63x^2 + 0,02x + 13$

Na Calculadora Gráfica, identifique a função custo total de cada mês e, após isso, elenque a função que, para você, melhor representa graficamente a maior função custo total.

Questão 3) Uma criança está brincando no quintal de sua casa. Em meio ao gramado, a

criança monta morrinhos de terra para compor uma de suas brincadeiras. Após montar os morrinhos, ela liga seu aviãozinho de controle remoto e a brincadeira é “tentar pegar um ponto do morrinho de terra”, ou seja, tangenciar o morrinho em um determinado ponto $P(x, y)$, conforme figura abaixo:



Fonte: Elaborado pelo autor

Em um determinado ponto $P(x,y)$ do morrinho de terra, onde o avião tocará, a reta tangente tem uma lei de formação representada por $f(x) = 6x - 1$. Sabendo que essa curva contém o ponto $(1, 7)$, tente descobrir uma possível função que represente a curvatura do morrinho de terra onde o avião tangenciará.

Questão 4) (CENTRO CIENTÍFICO CONHECER – Adaptado) A função velocidade de um certo movimento é dada por $v(t) = 3t^2 - 20t + 36$, com “t” medido em segundos. Entendendo que no tempo de 2 segundos o espaço percorrido é de 47 metros, como podemos descobrir uma função espaço que compreenda os dados fornecidos?

Referências Bibliográficas

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **CÁLCULO**. Vol. 1, Cengage Learning, 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995.

APÊNDICE E – 2ª Proposta de Ensino com Integrais utilizando calculadoras



PROPOSTA DE ENSINO V Profº João Victor Gonçalves do Carmo Tema: CDI (Cálculo Diferencial e Integral)

Equipe _____



Questão 1) Os problemas de acumulação basicamente consistem em fornecer uma função que representa a *taxa de variação* de uma grandeza em um determinado intervalo de tempo. Nesse caso, temos um problema envolvendo acumulação. Vamos imaginar um Laboratório de Física onde uma equipe de cientistas e pesquisadores estão analisando o comportamento termométrico de uma substância líquida que está bem aquecida. Analisando a amostra, identificaram que a temperatura da substância está aumentando a uma taxa de $r(t) = 30e^{-0,3t}$ graus Celsius por minuto (em que t é o tempo em minutos).

OBS: Use a informação de que no instante $t = 0$ a temperatura da substância é de 12 graus Celsius.

- a) Analisando os dados fornecidos, complete a tabela abaixo com as informações que faltam.

Intervalo de Tempo	Mudança de Temperatura em graus Celsius
[0, 1]	
[0, 2]	
[0, 3]	
[0, 4]	
[0, 5]	
[0, 6]	
[0, 7]	

(Extra) Vamos pensar em outra situação. E se esta equipe quisesse identificar qual seria a temperatura exata em cada um dos instantes?

Questão 2) Uma das habilidades da Integração Definida está em definir o valor de uma área curva, onde as fórmulas que já conhecemos não conseguem auxiliar no processo de descobrimento da área. Pensando nisso, vamos brincar um pouco com o Comando 5 (Gráfico), da Calculadora Gráfica.

a) Pense em duas funções (uma quadrática e outra afim), de modo que elas se cruzem em determinados pontos, e plote ambas no comando indicado. Analisando o valor da área hachurada, comente como a Calculadora chegou a tal resultado. Obs: Se julgar necessário, pode expor a resolução como justificativa ou apenas comentar sobre.

b) Vamos pensar agora em duas funções já dadas, como é corriqueiro nos livros de Cálculo. Identifique o valor da área delimitada pelas funções $f(x) = \sqrt{2x}$ e $g(x) = x^2 - 2x$, assim como o exercício anterior, justifique o valor encontrado da melhor forma para você.

Questão 3) (EdUFERSA) Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$, pelo eixo x e pelas retas $x = 0$ e $x = 2$.

Referências Bibliográficas

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de Cálculo**. Vol. 1, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda, 2006.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, 3. ed. São Paulo: Editora Harbra, 1994.

STEWART, J. **CÁLCULO**. Vol. 1, Cengage Learning, 2017.

SWOKOWSKI, E. W. **Cálculo com Geometria Analítica**. Vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1995.

APÊNDICE F – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO - (TCLE) (Conselho Nacional de Saúde, Resolução 466/12 e 510/16)

Eu, João Victor Gonçalves do Carmo, mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) e membro do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) da Universidade do Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” campus de Rio Claro/SP, portador do RG _____ e do CPF _____, sou o responsável pelo projeto intitulado **“PRÁTICAS EXPERIMENTAIS COM CALCULADORAS: O que expressam os discentes da Unesp Campus Rio Claro?”**. A presente pesquisa conta com a colaboração da orientadora do presente pesquisador: Profª Drª Sueli Liberatti Javaroni, assim como a colaboração da pesquisadora associada Profª Drª Maria Teresa Zampieri e ambas também são membros do GPIMEM.

Convidamos você para participar da pesquisa, sob a responsabilidade do pesquisador, a qual pretende aprofundar a compreensão de se e como as calculadoras científicas e gráficas podem contribuir na produção de conhecimentos nos conceitos de Pré-Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral através de experimentos de ensino abordando tais conceitos.

Caso aceite este convite, estará disponibilizando as gravações das reuniões dos encontros e as fotografias para fins de pesquisa. Desta forma, também estará autorizando a publicação de tais mídias em trabalhos acadêmicos, eventos, bem como a própria dissertação de mestrado do pesquisador.

Ressalto que a participação nesta pesquisa é voluntária e os riscos são mínimos ao participante, como a possibilidade dele sentir-se incomodado por ter que dialogar abertamente. Devido a isso, o participante poderá, a qualquer momento, pedir para que seja retirada/corrigida toda manifestação que ele tiver durante a produção de dados.

Com base na resolução 466/2012 e 510/2016 ressaltamos que toda pesquisa contém riscos, destacamos a seguir possíveis riscos reais e/ou em potencial:

- É possível que os participantes da pesquisa se sintam desanimados tendo em vista que o experimento será ao longo de um semestre;
- É possível que haja desinteresse repentino acerca de um conteúdo a ser abordado por já ter uma prévia noção sobre o assunto explicitado;
- Existe a possibilidade de algum participante desistir do experimento ao longo do semestre;
- O participante pode se sentir incomodado por dialogar abertamente.

As atividades observadas no contexto dos encontros do grupo serão gravadas em áudio e vídeo o que implica em risco de constrangimento, desconforto, timidez ou mesmo sentimento de medo de participar dos encontros ou de estar sendo julgado, seja durante os momentos de

exposição de alguma opinião ou relato, ao compartilhar modos de ensinar aos demais participantes nas reflexões acerca da experiência vivida na aula ou ao se perceber interagindo com os alunos nos recortes das gravações das telas dos IPads. Nesse sentido, destaca-se que o participante poderá, a qualquer momento, pedir para que seja retirada/corrigida toda e qualquer manifestação que lhe cause tais sentimentos durante a coleta de dados, pedir para que a gravação seja encerrada ou mesmo deixar o local da atividade, interrompendo sua participação. Além disso, está garantido ao participante o seu anonimato na divulgação dos resultados.

Para minimizar tais riscos, também serão adotados alguns procedimentos como: o respeito ao silêncio do participante, caso decida não expor sua opinião, relatos, informações, etc.; deixar claro que suas falas não serão utilizadas como forma de avaliação/julgamento; e a disponibilidade do pesquisador para ouvir as queixas/questões/incômodos apresentados pelos participantes mediante meios virtuais (e-mail, telefonema) e/ou presencialmente, caso seja necessário.

Em relação às formas de indenização, enfatizamos a existência do direito de cada participante que decida colaborar com nossa pesquisa de buscar ser indenizado(a) em caso de algum dano decorrente da investigação. No entanto, os danos devem ser comprovados conforme decisão judicial ou extra-judicial.

Considerando os possíveis riscos citados buscaremos tomar as devidas precauções para que os mesmos sejam extintos ou minimizados visando preservar sua integridade ao participar da pesquisa. Dentre as medidas a serem adotadas asseguramos o caráter confidencial, o anonimato das informações e do participante dessa pesquisa. Para garantir o anonimato dos participantes, caso os mesmos queiram, serão utilizados nomes fictícios nos relatórios das pesquisas, uma vez que o relato de suas percepções e apontamentos serão transcritas e mantidas sob a responsabilidade do pesquisador. Quanto às questões relacionadas as entrevistas e observações, as mesmas devem respeitar o seu direito enquanto participante de respondê-las ou não, de acordo com o tempo que necessitar, sem qualquer constrangimento ou identificação do participante.

No que diz respeito à participação das entrevistas e questionários buscaremos deixá-lo à vontade em um ambiente calmo, de modo que possa se sentir bem, sem qualquer tipo de pressão psicológica, moral, intelectual para avaliar e opinar segundo suas concepções e convicções a respeito das metodologias desenvolvidas.

Os benefícios de sua participação estão atrelados às contribuições para construção de conhecimentos em Pré-Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral com calculadoras, bem como participar de pesquisas que busquem analisar o efeito das calculadoras no ensino e aprendizagem de Matemática.

Os dados da pesquisa serão armazenados no computador pessoal do pesquisador e em hd externo, sendo apagados todos os registros de ambientes virtuais compartilhados. Em caso de

roubo e/ou hackeamento desse computador serão tomadas as medidas cabíveis conforme a Lei 12.737/12 que trata de crimes cibernéticos.

Os resultados da pesquisa serão analisados e publicados, mas sua identidade não será divulgada, sendo guardada em sigilo. Caso concorde em participar, necessitamos que preencha e assine este termo de consentimento. Ao final da pesquisa, se for do seu interesse, terá livre acesso ao conteúdo da mesma, podendo discutir os resultados junto com o pesquisador. Na necessidade de contatar os profissionais acima descritos, poderá fazê-lo a qualquer momento com o mestrando João Victor Gonçalves do Carmo, e-mail: jvg.carmo@unesp.br. Desde já agradecemos pela sua participação. Vale lembrar que para participar NÃO TERÁ NENHUMA DESPESA, BEM COMO, NÃO TERÁ QUALQUER TIPO DE REMUNERAÇÃO e você é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação.

Consentimento: Ao considerar as informações e todas as garantias acima mencionadas, eu _____ CPF/ou RG _____, fui informado (a) sobre minha participação na mencionada pesquisa e estando consciente dos riscos e dos benefícios que a participação poderá implicar. Concordo em autorizar a minha participação e para isso DOU MEU CONSENTIMENTO SEM QUE PARA ISSO EU TENHA SIDO FORÇADO (A) OU OBRIGADO (A). Receberei uma cópia deste termo de consentimento e me foi dada a oportunidade de ler e esclarecer as minhas dúvidas.

João Victor Gonçalves do Carmo

Pesquisador Responsável

CPF _____

E-mail: jvg.carmo@unesp.br

Assinatura do Pesquisador:

Dados sobre a Pesquisa:

Título do Projeto: “PRÁTICAS EXPERIMENTAIS COM CALCULADORAS: O que expressam os discentes da Unesp Campus Rio Claro?”

Pesquisador Responsável: João Victor Gonçalves do Carmo

Instituição: Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Instituto de Geociências e Ciências Exatas/Unesp/Rio Claro [IGCE/RC]

Endereço: Av. 24A, nº 1515 – Bela Vista – 13506-900 – Rio Claro/SP. Fone: (19) 3526-9381

Dados para Contato: Fone (64) 9 9226-2906/ e-mail: jvg.carmo@unesp.br

CEP-FMB/UNESP

Endereço: Chacára Butignoli s/n, Rubião Júnior – Botucatu - São Paulo

CEP: 18618-970 (Localizado na FAMESP)

Telefone: 3880-1608 / 3880-1609

Número do parecer: **5.660.410**