

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA - UNESP

Faculdade de Ciências e Tecnologia - Júlio de Mesquita Filho - campus de Presidente Prudente

CRISTIANE PARAIZO OROSCO TREPICHE

O ensino da teoria matricial sob um olhar computacional

Presidente Prudente

2025

Cristiane Paraizo Orosco Trepiche

O ensino da teoria matricial sob um olhar computacional

Dissertação de Mestrado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre em Matemática em Rede Nacional.

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Prof.^a Dra. Larissa Ferreira Marques

Presidente Prudente

2025

T795e

Trepiche, Cristiane Paraizo Orosco

O ensino da teoria matricial sob um olhar computacional / Cristiane Paraizo Orosco Trepiche. -- São José do Rio Preto, 2025
80 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientadora: Larissa Ferreira Marques

1. Ensino. 2. Matrizes. 3. Computação Matemática. 4. Octave. 5. Imagens Digitais. I. Título.

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Essa pesquisa tem um impacto relevante ao tornar o ensino de Matemática mais significativo e eficaz por meio do uso do GNU Octave, um software livre que permite aplicar conceitos de matrizes no processamento de imagens. A sequência didática desenvolvida promoveu engajamento dos alunos e mostrou que a integração entre tecnologia e educação pode facilitar a aprendizagem. Além disso, oferece um modelo replicável para outros contextos e estimula o uso de ferramentas acessíveis no ambiente escolar.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This research has a relevant impact by making the teaching of Mathematics more meaningful and effective through the use of GNU Octave, a free software that allows the application of matrix concepts in image processing. The developed didactic sequence promoted student engagement and demonstrated that the integration of technology and education can facilitate learning. Furthermore, it offers a replicable model for other contexts and encourages the use of accessible tools in the school environment.

CRISTIANE PARAIZO OROSCO TREPICHE

O ENSINO DA TEORIA MATRICIAL SOB UM OLHAR COMPUTACIONAL

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, para obtenção do título de Mestre(a) em Matemática, junto ao programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Área de Concentração: Matemática

Data da defesa: 06/03/2025

Banca Examinadora:

Documento assinado digitalmente
 LARISSA FERREIRA MARQUES
Data: 06/03/2025 22:31:36-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Larissa Ferreira Marques
UNESP – Faculdade de Ciências - Campus de Bauru

Documento assinado digitalmente
 CRISTIANE NESPOLI DE OLIVEIRA
Data: 07/03/2025 13:01:15-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Cristiane Nespoli de Oliveira
UNESP – Faculdade de Ciências e Tecnologia – Campus de Presidente Prudente

Documento assinado digitalmente
 ALISSON DE CARVALHO REINOL
Data: 07/03/2025 11:00:01-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alisson de Carvalho Reinol
UTFPR – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campus de Apucarana

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu marido, Márcio Trepiche, e às minhas filhas Gabriela e Manuela, pelo amor incondicional e apoio constante que sempre me proporcionaram. Aos meus pais, José Roberto e Olga, que sempre acreditaram em mim. Sem vocês, nada disso seria possível.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, que sempre foi minha fonte de força e sabedoria. Sem Sua orientação e apoio, este trabalho não teria sido possível. Sou grata pelas bênçãos e oportunidades que me foram concedidas ao longo desta jornada. A fé e a perseverança que encontrei Nele me guiaram em cada desafio enfrentado.

Minha gratidão à minha amiga Patrícia Cristina Oliveira de Jesus Molina, que esteve ao meu lado em mais esta etapa. Aos meus amigos, que me acompanharam em cada desafio, oferecendo palavras de encorajamento e momentos de descontração.

Agradeço, ainda, a todos os professores, em especial ao coordenador local do Mestrado em Rede Nacional – PROFMAT, campus de Presidente Prudente, Prof. Dr. Suetônio de Almeida Meira, ao Prof. Dr. José Roberto Nogueira e à Profa. Dra. Cristiane Nespoli, cuja dedicação foi fundamental para minha formação. Nesta experiência, inspiraram-me e compartilharam seu conhecimento, contribuindo significativamente para meu crescimento pessoal e acadêmico.

Por fim, agradeço à minha orientadora, Profa. Dra. Larissa Ferreira Marques, por sua orientação e apoio inestimáveis ao longo de toda esta jornada. Sua expertise, paciência e incentivo foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho.

“A mente que se abre a uma nova ideia jamais volta ao seu tamanho original.”
(Ferr, 2024, Albert Einstein)

Resumo

A Matemática exerce um papel fundamental no processamento de imagens digitais, pois cada uma delas pode ser representada matematicamente por uma matriz. Nesse contexto, a utilização da linguagem computacional GNU Octave permite a manipulação de imagens por meio de operações matriciais bem definidas. A incorporação de tecnologias na educação é um fator essencial para a aprendizagem dos alunos, uma vez que métodos inovadores e atrativos tornam o processo mais envolvente e eficaz. Em particular, o ensino da Matemática pode ser facilitado por ferramentas didáticas computacionais, que contribuem significativamente para o processo de ensino-aprendizagem dessa disciplina. Essa perspectiva foi confirmada com a aplicação da sequência didática proposta, que evidenciou o engajamento e a participação ativa dos estudantes nas atividades voltadas ao ensino de matrizes utilizando o Octave, um software livre de alto nível para computação matemática. Diante disso, este trabalho tem como objetivo descrever a implementação de uma sequência didática para o ensino de matrizes, por meio de uma ferramenta didática computacional, desenvolvida com alunos do ensino médio de uma escola pública vinculada à Diretoria de Ensino da região de Presidente Prudente–SP.

Palavras-Chave: ensino; matrizes; computação matemática; octave; imagens digitais.

Abstract

Mathematics plays a fundamental role in the processing of digital images, as each of them can be represented mathematically by a matrix. In this context, the use of the GNU Octave computational language allows the manipulation of images through well-defined matrix operations. The incorporation of technologies in education is an essential factor for student learning, as innovative and attractive methods make the process more engaging and effective. In particular, the teaching of Mathematics can be facilitated by computational didactic tools, which contribute significantly to the teaching-learning process of this subject. This perspective was confirmed with the application of the proposed didactic sequence, which demonstrated the engagement and active participation of students in activities aimed at teaching matrices using Octave, a high-level free software for mathematical computing. Therefore, this work aims to describe the implementation of a didactic sequence for teaching matrices, through a computational didactic tool, developed with high school students from a public school linked to the Directorate of Education of the Presidente Prudente–SP region.

Keywords: teaching; matrices; mathematical computing; octave; digital images.

Lista de figuras

Figura 1	Interface gráfica do GNU Octave	39
Figura 2	Navegador de Arquivos; Ambiente de Trabalho e Histórico de Comandos	40
Figura 3	Menu do Octave	42
Figura 4	Barra de Ferramentas	43
Figura 5	Definindo matrizes no Octave	44
Figura 6	Operando com matrizes no Octave	45
Figura 7	Criando matrizes especiais no Octave	46
Figura 8	Eliminando linhas/colunas de matrizes no Octave	47
Figura 9	Ilustração de uma imagem de pixels	48
Figura 10	Ilustração do sistema de cores RGB	49
Figura 11	Leitura de imagem no Octave	50
Figura 12	Leitura da imagem ilustrada na Figura 11 com diferentes canais de cores	51
Figura 13	Leitura da imagem ilustrada na Figura 11 ao excluir o canal azul	51
Figura 14	Leitura da imagem ilustrada na Figura 11 em tons de cinza	52
Figura 15	Leitura da imagem da Figura 11 apenas com canal de cor vermelho	53
Figura 16	Criando imagem com uso de matriz	53
Figura 17	Matriz randômica x Imagem em tons de cinza	54
Figura 18	Rotação de uma imagem sob diferentes ângulos	56
Figura 19	Sala de aula da Escola Estadual Doutor José Foz	58
Figura 20	Registro da realização das atividades propostas	59
Figura 21	Registro da atividade realizada por um estudante da turma	60
Figura 22	Sala de informática da Escola Estadual “Doutor José Foz”	61
Figura 23	Atividade realizada por um estudante da turma	62
Figura 24	Atividade realizada por um estudante da turma	62
Figura 25	Registro da realização das atividades dos alunos	64

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Notas dos alunos X, Y, Z, do primeiro ano da escola estadual POT	16
Tabela 2	–	Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 2023	24
Tabela 3	–	Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 2024	24
Tabela 4	–	Soma da produção de grãos (em milhares de toneladas) nos anos de 2023 e 2024	24
Tabela 5	–	Comando para operações matemáticas usuais no Octave	44
Tabela 6	–	Gerando diferentes tipos de matrizes no Octave	46
Tabela 7	–	Transposição e inversão de matrizes no Octave	47
Tabela 8	–	Exemplos de cores do modelo RGB	49

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
2	MATRIZES	16
2.1	TIPOS DE MATRIZES	18
2.1.1	Matriz quadrada	18
2.1.2	Matriz nula	19
2.1.3	Matriz-coluna / Matriz-linha	19
2.1.4	Matriz diagonal	20
2.1.5	Matriz identidade	20
2.1.6	Matriz triangular superior (inferior)	20
2.1.7	Matriz simétrica	22
2.1.8	Matriz antissimétrica	22
2.2	IGUALDADE DE MATRIZES	23
2.3	OPERAÇÕES COM MATRIZES	23
2.3.1	Adição	23
2.3.2	Multiplicação por escalar	26
2.3.3	Multiplicação de matrizes	28
2.4	MATRIZES INVERSÍVEIS	33
2.5	O ESPAÇO VETORIAL DAS MATRIZES	35
3	OCTAVE	38
3.1	OCTAVE	39
3.1.1	Matrizes	43
3.1.2	Imagens digitais e o sistema RGB	46
4	O ENSINO DE MATRIZES SOB UM PONTO DE VISTA COMPUTACIONAL	57
4.1	O ENSINO DE MATRIZES: UMA ABORDAGEM CONCEITUAL	58
4.2	O ENSINO DE MATRIZES: UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL	61
5	CONCLUSÃO	65
	REFERÊNCIAS	66
	ANEXO A – PLANO DE AULA - SEQUÊNCIA DIDÁTICA	67

1 Introdução

A inserção de tecnologias no ensino de matemática é uma questão cada vez mais relevante, especialmente em um mundo onde a inovação transpassa quase todos os aspectos do dia a dia dos nossos estudantes. O uso de ferramentas digitais, como softwares educativos, aplicativos interativos e plataformas de ensino online, não apenas enriquece o ambiente de aprendizado, mas também responde à necessidade de preparar os estudantes para um futuro em que habilidades tecnológicas serão essenciais.

A Matemática, muitas vezes percebida como uma disciplina difícil, abstrata e desafiadora, pode beneficiar-se significativamente do uso de tecnologias que facilitam a visualização e a aplicação de conceitos. Ferramentas como gráficos dinâmicos, simulações e modelagens matemáticas permitem que os estudantes explorem e compreendam melhor as relações matemáticas de forma mais participativa. Essa abordagem prática e visual pode aumentar o engajamento dos estudantes, tornando o aprendizado mais atraente e acessível.

A utilização de recursos tecnológicos nas aulas de matemática pode enriquecer o processo de ensino-aprendizagem de várias maneiras. Segundo Moraes & Palhares (2006), a visualização de conceitos matemáticos através de gráficos dinâmicos e simulações interativas ajuda os alunos a identificar padrões e a entender melhor a relação entre diferentes variáveis matemáticas. Essa capacidade de visualizar problemas complexos em representações gráficas permite que os alunos percebam conexões que seriam difíceis de notar por meio de cálculos tradicionais, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos envolvidos.

Conforme visto anteriormente, a implementação de tecnologias no ensino de Matemática promove o desenvolvimento de competências importantes, como o pensamento crítico, a resolução de problemas e a colaboração. O uso de plataformas que possibilitam o trabalho em grupo e a troca de ideias estimula um aprendizado mais ativo, preparando os alunos para desafios reais que exigem a aplicação de conhecimentos matemáticos em contextos diversos.

“uma das maneiras mais eficazes de motivar os alunos que realmente querem construir conhecimento e desenvolver uma aprendizagem significativa é a utilização de metodologias que permitam o aprendente a manipular e construir os conceitos estudados, quando por meio dessa prática, ele possa vir a fazer relações e buscar aplicações dos conteúdos estudados em seu cotidiano” (Ludvig, 2016).

Outro fator relevante a ser ressaltado é a singularização do aprendizado, uma vez que o uso de tecnologias educacionais pode oferecer caminhos particularizados para os estudantes, permitindo que cada um avance em seu próprio ritmo. Isso é especialmente relevante em turmas com diferentes saberes, onde a inclusão e a atenção às necessidades individuais são essenciais para o sucesso educacional.

O tema Matrizes foi pensado para a elaboração de atividades que estimulassem e facilitassem a apropriação significativa do conteúdo, estabelecendo assim a relação entre a teoria e a prática,

com a intenção de contribuir para o ensino da Matemática. Os jovens estão conectados ao mundo digital, em especial às redes sociais, nas quais são postadas e compartilhadas inúmeras imagens digitais. Sendo assim, associar as imagens digitais às matrizes seria uma forma de mostrar a relação entre a disciplina de Matemática e a Matemática presente em atividades do cotidiano dos estudantes. Neste contexto, os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio destacam que:

“Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comércio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências e quantas outras variáveis houver.” (Brasil, 2000).

O estudo de matrizes e imagens no Octave é fundamental para a formação de profissionais em diversas áreas do conhecimento, como ciência da computação, engenharias, matemática e afins. As matrizes são estruturas matemáticas essenciais que representam dados em inúmeras aplicações, desde algoritmos de processamento de imagens até a resolução de sistemas lineares. No contexto de processamento de imagens, no qual cada pixel pode ser representado como um elemento de uma matriz, estas desempenham um papel crucial entre a teoria e a prática.

A escolha do Octave como ferramenta para esse estudo se justifica por sua acessibilidade e semelhança com o MATLAB, amplamente utilizado em ambientes acadêmicos e industriais. O Octave permite que estudantes e profissionais experimentem e implementem conceitos de forma interativa e visual, facilitando a compreensão de operações matriciais e suas aplicações no processamento de imagens.

A propósito, a crescente demanda por habilidades em análise de dados e aprendizado de máquina torna imprescindível que os estudantes se familiarizem com ferramentas que facilitem a manipulação e visualização de grandes volumes de informações. O estudo de matrizes e imagens no Octave não apenas fornece uma base teórica sólida, mas também desenvolve competências práticas que são altamente valorizadas no mercado de trabalho.

Dessa forma, a presente dissertação busca explorar o processamento de imagens, envolvendo diversas habilidades, tais como: aplicar operações básicas entre matrizes, a matriz presente nas imagens, manipulações e criações de imagens por meio de recursos tecnológicos. Logo, o domínio dessas habilidades se torna um diferencial na formação dos estudantes.

1.1 ESTRUTURA DO TRABALHO

O presente trabalho encontra-se estruturado da seguinte maneira:

Na Seção 2, é apresentado o referencial teórico sobre matrizes e suas operações básicas, conforme os conteúdos abordados no Ensino Médio. Essa teoria é introduzida de forma tradicional, complementada com exemplos que buscam facilitar o entendimento dos conceitos propostos.

A Seção 3 traz um breve resumo sobre o software Octave, incluindo informações gerais sobre o programa e um tutorial explicativo sobre algumas de suas ferramentas. Na sequência, demonstra-se como o Octave pode ser utilizado para criar e manipular matrizes e, a partir delas, gerar imagens digitais, permitindo edições como ampliações, reduções e rotações.

A Seção 4 relata a experiência prática da aplicação de atividades relacionadas a matrizes e suas operações, além do uso do Octave para a manipulação e visualização de matrizes sob uma perspectiva computacional. Essa experiência foi conduzida com uma turma da 3^a série do ensino médio.

Por fim, na Seção 5, são apresentadas as considerações finais sobre o trabalho, destacando suas potencialidades, as expectativas geradas pelo tema abordado e sugestões para possíveis desenvolvimentos futuros.

2 Matrizes

A Álgebra Linear ocupa uma posição central na Matemática, com aplicações que vão desde a resolução de sistemas de equações lineares até áreas avançadas, como aprendizado de máquina, análise numérica e mecânica quântica. Um dos conceitos essenciais dessa área é o das matrizes, que se destacam como representações organizadas de dados numéricos e ferramentas poderosas para modelar e resolver problemas em múltiplas dimensões.

A origem das matrizes remonta à antiguidade, quando matemáticos chineses e babilônios já utilizavam tabelas numéricas para resolver sistemas de equações. Contudo, foi apenas no século XIX que as matrizes foram formalizadas como objetos matemáticos independentes, graças aos trabalhos pioneiros de Cayley (1858) e Sylvester (1852). Desde então, o estudo das matrizes e das operações associadas tem evoluído, formando a base de inúmeras teorias e aplicações práticas.

Nesta seção, exploraremos os conceitos fundamentais da Álgebra Linear, com foco em matrizes e suas propriedades. Inicialmente, apresentaremos definições formais e operações básicas, estabelecendo uma base sólida para o entendimento de conceitos avançados e possibilitando a conexão do rigor matemático da Álgebra Linear às suas aplicações no mundo real.

O estudo teórico de matrizes apresentado nesta seção baseia-se nas obras de Callioli, Domingues & Costa (1990), Anton (2001) e Iezzi & Hazzan (1977).

É comum observar a grande dificuldade apresentada pelos alunos ao se depararem com a seguinte indagação:

“O que é uma matriz?”

Neste contexto, é possível introduzir este conteúdo por meio de uma situação problema clássica deste tema, que está diretamente relacionado à construção de tabelas. A 1 apresenta as notas de três estudantes matriculados no primeiro ano da escola estadual POT.

Tabela 1 – Notas dos alunos X, Y, Z, do primeiro ano da escola estadual POT

	Matemática	Língua Portuguesa	História	Geografia
Aluno X	8	3	6	5
Aluno Y	7	5	4	3
Aluno Z	5	7	8	2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Os dados da tabela anterior podem ser representados pela matriz

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

onde o elemento m_{23} , por exemplo, representa a nota 4, obtida pelo aluno Y, na disciplina de História.

Assim, uma matriz de m linhas e n colunas é definida da seguinte forma.

Definição 1 (Matriz). Dados dois números naturais m, n ($m, n \neq 0$). Uma *matriz* $m \times n$ real é uma dupla sequência de números reais, distribuídos em m linhas e n colunas, definindo uma tabela constituída por elementos de mesma ordem.

As matrizes são, de modo geral, representadas por letras maiúsculas $A, B, \dots$, e seus elementos por letras minúsculas acompanhados dos índices i e j que indicam, respectivamente, a linha e a coluna ocupada por este elemento. Formalmente, denotamos uma matriz de m linhas e n colunas por

$$A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}, \text{ com } 1 \leq i \leq m \text{ e } 1 \leq j \leq n, \text{ onde } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Neste caso, definimos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Observação 1. A seguir encontram-se algumas observações relacionadas à definição de matrizes.

1. Cada elemento que compõe uma matriz chama-se *termo* dessa matriz, sendo, por exemplo, a_{ij} o *termo geral* da matriz A .
2. A rigor, os elementos de uma matriz podem ser de outros tipos, que não apenas dados de natureza numérica.
3. Cada elemento a_{ij} da matriz A pode ser identificado de forma única por meio de seus índices de linha e de coluna.
4. Por convenção, o primeiro índice subscrito indica a posição da linha onde o elemento se encontra, enquanto o segundo, a posição da coluna.
5. Os índices variam num dado intervalo, satisfazendo as relações $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, onde m denota o número de linhas e n o número de colunas da matriz em questão. Neste caso, dizemos que a matriz é de *ordem* m por n .

Exemplo 1. A seguir são apresentados alguns exemplos de matrizes.

$$(a) \ A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

$$(b) B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

$$(c) C = (-5).$$

$$(d) D = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 7 & -3 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(e) E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}.$$

No último exemplo o elemento que ocupa a posição $(2, 3)$ na matriz E é o elemento e_{23} .

2.1 TIPOS DE MATRIZES

As matrizes podem ser classificadas de acordo com suas características. Entre elas, destacam-se os tipos clássicos, apresentados a seguir.

2.1.1 Matriz quadrada

Uma matriz $A_{m \times n}$ é quadrada se $m = n$. Neste caso, dizemos que A_n é uma matriz de ordem n .

Exemplo 2. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -3 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

é uma matriz quadrada de ordem 3. Os elementos $a_{11} = 2$, $a_{22} = \sqrt{2}$ e $a_{33} = -1$ definem a sua diagonal principal, e os elementos $a_{13} = 0$, $a_{22} = \sqrt{2}$ e $a_{31} = -3$ definem a sua diagonal secundária.

Observação 2. De modo geral, neste tipo de matriz, é possível observar que:

1. Todos os elementos da diagonal principal possuem índices de linha e de coluna iguais. Ou seja, a diagonal principal de uma matriz quadrada é definida pelo conjunto

$$\{a_{ij} / i = j\} = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}.$$

2. A diagonal secundária de uma matriz quadrada é definida pelos elementos cuja soma dos índices resulta em $n + 1$, ou seja,

$$\{a_{ij} / i + j = n + 1\} = \{a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, \dots, a_{n1}\}.$$

2.1.2 Matriz nula

A matriz nula é definida por $a_{ij} = 0, \forall i, j$. Neste caso, denota-se

$$0_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}, \forall i, j, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Em outras palavras, uma matriz nula possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo 3. A matriz nula de ordem $m \times n$ é escrita como

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz é caracterizada por definir o elemento neutro aditivo da operação de adição de matrizes.

2.1.3 Matriz-coluna / Matriz-linha

Uma *matriz-coluna* é definida por uma única coluna, ou seja, em $A = (a_{ij})_{m \times n}$, tem-se $n = 1$. Assim, podemos representar este tipo de matriz por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a *matriz-linha* é definida por uma única linha, ou seja, em $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ocorre que $m = 1$. Esse tipo de matriz é denotado por um vetor da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 4. O exemplo a seguir apresenta uma matriz-coluna e uma matriz-linha, respectivamente.

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2.1.4 Matriz diagonal

Uma *matriz diagonal* $A_{m \times n}$ é definida por uma matriz quadrada, ou seja, $m = n$, onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$. A matriz diagonal tem a seguinte forma geral:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

onde $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ são os elementos da diagonal principal.

2.1.5 Matriz identidade

A *matriz identidade* é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$. Em outras palavras, a matriz identidade I_n de ordem $n \times n$ possui a seguinte forma

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz identidade tem a propriedade única de que, quando multiplicada por qualquer matriz A de ordem compatível, a matriz A não é alterada, ou seja, $A \cdot I = A$ e $I \cdot A = A$. Ela é, portanto, o elemento neutro na multiplicação de matrizes, como veremos mais adiante.

2.1.6 Matriz triangular superior (inferior)

Uma *matriz triangular superior (inferior)* é uma matriz quadrada em que os elementos abaixo (acima) da diagonal principal são todos nulos. Ou seja, para uma matriz triangular superior A de ordem $n \times n$, os elementos a_{ij} são zero sempre que $i > j$. Por outro lado, para uma matriz B de ordem $n \times n$, os elementos b_{ij} são zero sempre que $i < j$.

A forma geral de matrizes triangulares superior ou inferior é dada, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 5. As matrizes A e B , definidas, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ \boxed{0} & 5 & 2 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & 9 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \boxed{0} & \boxed{0} \\ 0 & 7 & \boxed{0} \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

definem, respectivamente, uma matriz triangular superior e uma matriz triangular inferior.

Observação 3. Para a definição das matrizes simétricas e antissimétricas se faz necessário as definições a seguir.

1. A *matriz transposta* de uma matriz A é obtida trocando suas linhas por colunas (ou, equivalentemente, suas colunas por linhas). Se a matriz A é de ordem $m \times n$, a sua transposta, denotada por A^T , será uma matriz de ordem $n \times m$, ou seja, o número de linhas se torna o número de colunas e o número de colunas se torna o número de linhas.

Formalmente, a transposta de uma matriz $A = (a_{ij})$ é dada por $A^T = (a_{ji})$, ou seja, o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna de A se torna o elemento da j -ésima linha e i -ésima coluna de A^T .

Exemplo 6. Por exemplo, dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

A matriz transposta de A será

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Note que a primeira linha de A se torna a primeira coluna de A^T e, a segunda linha de A se torna a segunda coluna de A^T .

2. A *matriz oposta* de uma matriz A é a matriz obtida pela multiplicação de cada elemento de A por -1 . Em outras palavras, se $A = (a_{ij})$ for uma matriz, a sua matriz oposta, denotada por $-A$, será uma matriz cujos elementos são $-a_{ij}$.

Formalmente, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz de ordem $m \times n$, então a matriz oposta $-A$ é dada por

$$-A = (-a_{ij}).$$

Exemplo 7. Se $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, então a matriz oposta de A será $-A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

A matriz oposta é caracterizada por definir o elemento oposto aditivo. Esse tipo de matriz é bastante utilizado na solução de sistemas lineares.

2.1.7 Matriz simétrica

Uma *matriz simétrica* é uma matriz quadrada A é igual à sua transposta, ou seja, $A = A^T$. Isso significa que seus elementos obedecem à condição $a_{ij} = a_{ji}$ para todos os índices i e j .

Formalmente, se A é uma matriz quadrada de ordem n , ela será simétrica se $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j pertencente a $\{1, 2, \dots, n\}$.

Exemplo 8. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

é um exemplo de matriz simétrica de ordem 3.

Note que, neste exemplo, os elementos fora da diagonal principal são simétricos em relação a ela: $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$ e $a_{23} = a_{32}$.

As matrizes simétricas têm várias propriedades úteis, como o fato de que seus autovalores são sempre reais e elas são sempre diagonalizáveis. Este é um tópico de Álgebra Linear bastante interessante, porém não se encontra no contexto deste trabalho. Maiores detalhes podem ser encontrados em Anton (2013).

2.1.8 Matriz antissimétrica

Uma *matriz antissimétrica* é uma matriz quadrada A que satisfaz a condição $A^T = -A$. Ou seja, a matriz transposta de A é igual à sua matriz oposta. Isso implica que todos os elementos da diagonal principal devem ser iguais a zero, pois $a_{ii} = -a_{ii}$ (portanto, $a_{ii} = 0$).

Formalmente, se $A = (a_{ij})$ é uma matriz quadrada de ordem n , ela será antissimétrica se:

(i) $a_{ij} = -a_{ji} \forall i \neq j$.

(ii) $a_{ii} = 0 \forall i$.

Exemplo 9. Como exemplo de uma matriz antissimétrica 3×3 temos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neste exemplo é possível observar que $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$, e $a_{23} = -a_{32}$. Além disso, todos os elementos da diagonal principal são iguais a zero.

2.2 IGUALDADE DE MATRIZES

A *igualdade de matrizes* ocorre quando duas ou mais matrizes têm a mesma ordem e seus elementos correspondentes são iguais. Os elementos correspondentes são aqueles que ocupam a mesma posição nas respectivas matrizes.

Considere duas matrizes $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B_{r \times s} = (b_{ij})_{r \times s}$. Dizemos que $A = B$ se, e somente se

- (i) $m = r$ e $n = s$.
- (ii) $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall i, j$, com $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Isso significa que as matrizes devem ter o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas e, todos os elementos correspondentes nas duas matrizes devem ser iguais. Se essas condições forem satisfeitas, podemos dizer que as matrizes são iguais. Caso contrário, elas são diferentes.

Exemplo 10. Dadas as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 3^2 & 1 & \log 1 \\ 2 & 2^2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 10 \\ 1 & 3^0 & 5 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Note que as matrizes A e B são iguais. No entanto, tem-se $C \neq D$ pois $c_{11} \neq d_{11}$.

2.3 OPERAÇÕES COM MATRIZES

As matrizes são estruturas matemáticas fundamentais, amplamente utilizadas em diversas áreas do conhecimento. Ao utilizá-las, surge naturalmente a necessidade de realizar operações entre elas. As operações com matrizes são processos matemáticos que permitem manipular matrizes de diferentes formas. Essas operações são essenciais não apenas para resolver sistemas de equações lineares, mas também para processar grandes volumes de dados na computação.

2.3.1 Adição

Damos início ao estudo da operação de adição de matrizes por meio da seguinte situação-problema:

Considerando que as tabelas abaixo representam a produção de grãos em dois anos consecutivos, e que é solicitado criar uma nova tabela que mostre a produção por produto e por região nos dois anos combinados, será necessário somar os valores correspondentes de ambas as tabelas.

Se quisermos montar uma tabela que dê a produção por produto e por região nos dois anos conjuntamente, teremos que somar os elementos correspondentes das duas tabelas anteriores. Assim, podemos definir as matrizes A e B , respectivamente, com os dados da Tabela 2 e Tabela 3.

Tabela 2 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 2023

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	3000	200	400	600
Região B	700	350	700	100
Região C	1000	100	500	800

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3 – Produção de grãos (em milhares de toneladas) durante o ano de 2024

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	8000	250	600	600
Região B	2700	450	1000	400
Região C	3000	200	1100	1400

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ou seja, com

$$A = \begin{pmatrix} 3000 & 200 & 400 & 600 \\ 700 & 350 & 700 & 100 \\ 1000 & 100 & 500 & 800 \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 8000 & 250 & 600 & 600 \\ 2700 & 450 & 1000 & 400 \\ 3000 & 200 & 1100 & 1400 \end{pmatrix},$$

é possível obter

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 11000 & 450 & 1000 & 1200 \\ 3400 & 800 & 1700 & 500 \\ 4000 & 300 & 1600 & 2200 \end{pmatrix},$$

onde a matriz C denota os dados da Tabela 4, abaixo.

Tabela 4 – Soma da produção de grãos (em milhares de toneladas) nos anos de 2023 e 2024

	soja	feijão	arroz	milho
Região A	11000	450	1000	1200
Região B	3400	800	1700	500
Região C	4000	300	1600	2200

Fonte: Elaborada pelo autor.

A adição de matrizes é uma operação simples, mas poderosa, que exige que as matrizes envolvidas possuam a mesma ordem.

Definição 2 (Adição). Dadas as matrizes $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B_{m \times n} = (b_{ij})_{m \times n}$. Denota-se por

$A + B$ e chama-se *matriz soma* de A com B a matriz $m \times n$ cujo termo geral é $a_{ij} + b_{ij}$, ou seja,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Exemplo 11. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, a matriz soma de A com B é dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+4 \\ 4+2 & 0+0 \\ 2+1 & 3+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriedades: Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $C = (c_{ij})_{m \times n}$ matrizes de mesma ordem. Então, a adição de matrizes satisfaz as propriedades a seguir.

- (i) $A + B = B + A$ (comutatividade)
- (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
- (iii) $A + 0_{m \times n} = 0_{m \times n} + A = A$ (existência do elemento neutro)
- (iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$ (existência do elemento oposto)

A prova das propriedades apresentadas anteriormente encontra-se abaixo.

Demonstração:

- (i) Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ duas matrizes de ordem $m \times n$. Queremos mostrar que $A + B = B + A$.

De fato, por definição de adição de matrizes temos

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \quad \text{e} \quad B + A = (b_{ij} + a_{ij}).$$

Como a soma de números reais é comutativa, ou seja, $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, segue que

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A.$$

Portanto, $A + B = B + A$, o que mostra que a soma de matrizes é comutativa.

- (ii) Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes $m \times n$. Queremos mostrar que $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Com efeito, sabemos que

$$A + (B + C) = (a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})).$$

Por outro lado,

$$(A + B) + C = ((a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}).$$

Usando a associatividade da soma de números reais, obtemos

$$a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}.$$

Ou seja,

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Donde segue que a soma de matrizes é associativa.

(iii) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ e $0_{m \times n} = (0_{ij})$ a matriz nula de ordem $m \times n$.

A soma $A + 0$ é definida por

$$A + 0 = (a_{ij} + 0_{ij}) = (a_{ij}) = A.$$

Como a adição de matrizes é comutativa, obtém-se

$$A + 0 = 0 + A = A,$$

o que mostra que $0_{m \times n}$ é o elemento neutro da soma de matrizes.

(iv) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$, e seja $-A = (-a_{ij})$ a matriz oposta de A . Por definição, a soma $A + (-A)$ é

$$A + (-A) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = (0_{ij}) = 0_{m \times n}.$$

Usando a comutatividade da adição tem-se

$$A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n},$$

o que mostra que $-A$ é o elemento oposto de A na soma de matrizes.

2.3.2 Multiplicação por escalar

A operação de *multiplicação de uma matriz por escalar* é uma operação em que cada elemento da matriz é multiplicado por um número real, também chamado de escalar.

Definição 3 (Multiplicação por escalar). Considere a matriz $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ e um número real k , a multiplicação da matriz A pelo escalar k é a matriz real $m \times n$

$$kA = (ka_{ij})_{m \times n}.$$

Exemplo 12. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ e o escalar -2 , a multiplicação da matriz A pelo escalar -2 nos leva a definir uma nova matriz dada por

$$-2A = \begin{pmatrix} -2 \cdot 2 & -2 \cdot 0 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Propriedades: Sejam $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ matrizes quaisquer e $k, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então, as operações de adição de matrizes e de multiplicação de um escalar por uma matriz satisfazem as propriedades abaixo.

- (i) $k(A + B) = kA + kB$ (distributiva em relação à soma de matrizes)
- (ii) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$ (distributiva em relação à soma de escalares)
- (iii) $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$ (associatividade)
- (iv) $1A = A$ (existência do elemento neutro)

A seguir, encontra-se a demonstração de cada uma das propriedades apresentadas acima.

Demonstração:

- (i) De fato, dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, e $k \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} k(A + B) &= k((a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}) \\ &= (k(a_{ij} + b_{ij}))_{m \times n} \\ &= (ka_{ij} + kb_{ij})_{m \times n} \\ &= (ka_{ij})_{m \times n} + (kb_{ij})_{m \times n} \\ &= k(a_{ij})_{m \times n} + k(b_{ij})_{m \times n} \\ &= kA + kB. \end{aligned}$$

- (ii) Considere a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e os escalares. Por definição tem-se

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)A &= (k_1 + k_2)(a_{ij})_{m \times n} \\ &= ((k_1 + k_2)a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k_1a_{ij})_{m \times n} + (k_2a_{ij})_{m \times n} \\ &= k_1(a_{ij})_{m \times n} + k_2(a_{ij})_{m \times n} \\ &= k_1A + k_2A. \end{aligned}$$

(iii) Seja $A = (a_{ij})_{m \times n}$ uma matriz e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} k_1(k_2A) &= k_1(k_2(a_{ij})_{m \times n}) \\ &= k_1((k_2a_{ij})_{m \times n}) \\ &= ((k_1k_2)a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k_1k_2)(a_{ij})_{m \times n} \\ &= (k_1k_2)A. \end{aligned}$$

Portanto, $k_1(k_2A) = (k_1k_2)A$, como queríamos demonstrar.

(iv) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e tomando $k = 1$, por definição de multiplicação de matriz por escalar segue que

$$\begin{aligned} 1A &= 1 \cdot (a_{ij})_{m \times n} \\ &= (1 \cdot a_{ij})_{m \times n} \\ &= (a_{ij})_{m \times n} \\ &= A. \end{aligned}$$

2.3.3 Multiplicação de matrizes

A multiplicação de matrizes foi apresentada por Cayley (1858), no trabalho intitulado “*A Memoir on the Theory of Matrices*”. Nesse trabalho, Cayley notou que a multiplicação de matrizes, como ele a definiu, simplificava muito o estudo de sistemas de equações lineares.

Definição 4 (Multiplicação). Dadas duas matrizes $A_{m \times n} = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B_{n \times p} = (b_{jk})_{n \times p}$ encadeadas, ou seja, o número de colunas de A é igual ao número de linhas de B , a *matriz produto* de A por B , denotada por AB , é uma matriz

$$C_{m \times p} = (c_{ik})_{m \times p},$$

em que cada elemento c_{ik} é obtido através da soma da multiplicação ordenada dos elementos da i -ésima linha da matriz A pelos elementos da k -ésima coluna da matriz B . Em termos matemáticos, temos

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + a_{i3}b_{3k} + \cdots + a_{in}b_{nk} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}, \quad \forall i = 1, \dots, m \text{ e } \forall k = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Exemplo 13. Por exemplo, ao multiplicar a matriz 3×2 pela matriz de ordem 2, conforme o exemplo a seguir, obtemos como matriz resultante, uma matriz 3×2 .

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 \\ 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 4 \cdot 4 \\ 5 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 16 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}.$$

Propriedades: Sejam A , B e C matrizes que satisfaçam as condições de ordem necessárias para que as operações estejam bem definidas e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, a multiplicação de matrizes possui as propriedades descritas abaixo.

- (i) $AI = IA = A$ (existência do elemento neutro)
- (ii) $(A + B)C = AC + BC$ (distributiva à direita)
- (iii) $A(BC) = (AB)C$ (associativa)
- (iv) $(AB)^t = B^t A^t$
- (v) $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

A prova das propriedades da operação matricial em estudo será apresentada a seguir.

Demonstração:

- (i) Seja $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Queremos demonstrar que a multiplicação por uma matriz identidade resulta na própria matriz, ou seja:

$$I_n A = A \quad \text{e} \quad A I_n = A.$$

Seja $A = (a_{ij})$ e $I_n = (\delta_{ij})$, onde δ_{ij} é definido como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

O elemento da posição (i, j) da matriz $I_n A$ pode ser definido por

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} &= \delta_{i1} a_{1j} + \delta_{i2} a_{2j} + \cdots + \delta_{ii} a_{ij} + \cdots + \delta_{in} a_{nj} \\ &= 0 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \cdots + 1 \cdot a_{ij} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Portanto, $I_n A = A$. De maneira análoga, pode-se demonstrar que $A I_n = A$. Assim,

$$I_n A = A I_n = A.$$

- (ii) Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B, C \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Queremos demonstrar que a multiplicação de matrizes é distributiva em relação à adição, ou seja,

$$A(B + C) = AB + AC.$$

de fato, considere $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{jk})$. O elemento da posição (j, k) da matriz $B + C$ é definido por $b_{jk} + c_{jk}$. Assim, o elemento da posição (i, k) da matriz $A(B + C)$ pode ser definido como

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}).$$

Pela distributividade da multiplicação em relação à soma dos números reais, segue da equação anterior que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) &= \sum_{j=1}^n [(a_{ij}b_{jk}) + (a_{ij}c_{jk})] \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}. \end{aligned}$$

Note que o primeiro termo do lado direito da equação anterior corresponde ao elemento (i, k) da matriz AB e, o segundo, ao elemento (i, k) da matriz AC . Ou seja, o elemento da posição (i, k) da matriz $AB + AC$. Portanto,

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Analogamente prova-se que

$$(A + B)C = AC + BC.$$

- (iii) Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ e $C \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$. Queremos demonstrar que a multiplicação de matrizes é associativa, ou seja,

$$(AB)C = A(BC).$$

De fato, dadas as matrizes $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{kl})$, o elemento da posição (i, k) da matriz AB pode ser escrito como

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

Assim, o elemento da posição (i, l) , resultante, da matriz $(AB)C$ é dado por

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl}.$$

Por outro lado, o elemento da posição (j, l) resultante da matriz produto BC , é definido por

$$\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl}.$$

Multiplicando à esquerda da matriz BC pela matriz A , obtemos o elemento da posição (i, l) , da matriz resultante $A(BC)$, calculado por

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl} \right).$$

Assim, visto que

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk}c_{kl} \right),$$

concluimos que

$$(AB)C = A(BC).$$

(iv) Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Queremos demonstrar que

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

De fato, considere $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$. O elemento da posição (i, k) da matriz AB é dado por

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}.$$

O elemento na posição (k, i) da transposta da matriz AB , denotada por $(AB)^T$, pode ser calculado como

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}. \tag{1}$$

Sabemos que a transposta das matrizes B e A são $B^T = (b'_{kj})$ e $A^T = (a'_{ji})$, onde

$$b'_{kj} = b_{jk}, \quad a'_{ji} = a_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Substituindo os elementos definidos acima no somatório dado em (1), obtemos o elemento da posição (k, i) , da matriz $(AB)^T$,

$$\sum_{j=1}^n b'_{kj}a'_{ji},$$

o qual corresponde a definição do elemento (k, i) da matriz $B^T A^T$. Portanto,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

(v) Sejam $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Precisamos verificar que

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

De fato, sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$. O elemento da posição (i, k) da matriz $\lambda(AB)$ é dado por

$$\lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}.$$

Pela distributividade da multiplicação escalar sobre a adição, segue

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} &= \sum_{j=1}^n \lambda(a_{ij} b_{jk}) \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda a_{ij}) b_{jk}, \end{aligned}$$

o que corresponde ao elemento (i, k) da matriz $(\lambda A)B$. Logo,

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B.$$

De maneira análoga, podemos mostrar que

$$\lambda(AB) = A(\lambda B).$$

E, portanto,

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B).$$

No ensino da teoria de matrizes, é comum observar a convicção dos alunos de que a propriedade comutativa é válida para a multiplicação de matrizes. Neste contexto se faz relevante destacar as observações a seguir.

Observação 4. A multiplicação de matrizes pode não ser comutativa, ou seja, podemos ter $AB \neq BA$. Considere as matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{n \times p}$. Note que a multiplicação de $A_{m \times n}$ por $B_{n \times p}$ nos leva a matriz $AB = C_{m \times p}$. Por outro, vejamos quais são as possibilidades para a matriz resultante de $B_{n \times p}$ por $A_{m \times n}$:

- (i) A matriz BA pode nem existir. Caso em que $p \neq m$.
- (ii) Supondo que $p = m$, então BA será uma matriz de ordem n , enquanto AB é uma matriz de ordem m . Deste modo, se $m \neq n$, então $AB \neq BA$, pois são matrizes de ordens distintas.
- (iii) Se AB e BA são matrizes de mesma ordem, então elas poderão ou não, serem iguais.

2.4 MATRIZES INVERSÍVEIS

As matrizes inversíveis desempenham papel fundamental em diversas áreas da matemática. Especificamente, na Álgebra Linear, as matrizes representam transformações lineares, e as matrizes inversíveis correspondem a transformações bijetoras, ou seja, aquelas que possuem inversa. Nesse contexto, essas transformações preservam as dimensões e são amplamente aplicadas em mudanças de base, rotações, reflexões e outros tipos de transformações geométricas, tornando-se ferramentas indispensáveis para as mais variadas áreas do conhecimento.

Definição 5 (Matriz inversível). Uma matriz A de ordem n é dita *inversível* se existe uma matriz B de ordem n tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Neste caso, dizemos que B é a matriz inversa de A , e a denotamos $B = A^{-1}$.

Observação 5. Se A é uma matriz não inversível, dizemos que A é uma *matriz singular* (ou *não inversível*).

Propriedades: Dentre as propriedades das matrizes inversíveis, destacam-se as seguintes:

- (i) Se A é uma matriz inversível, então sua inversa é única.
- (ii) Se A e B são matrizes inversíveis, então AB é inversível, e a inversa de AB é dada por

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- (iii) Se A é uma matriz inversível, então A^{-1} também é inversível, e sua inversa é $(A^{-1})^{-1} = A$.

A seguir serão demonstradas algumas das propriedades apresentadas anteriormente.

Demonstração:

- (i) Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Desejamos demonstrar que, se A é inversível, então sua inversa é única.

De fato, vamos supor que existam duas matrizes B e C tais que

$$AB = I \quad \text{e} \quad AC = I,$$

onde I denota a matriz identidade de ordem n . Deste modo, precisamos provar que $B = C$. Para tal, multiplicamos à esquerda ambos os lados da igualdade $AC = I$ pela matriz B . Isso nos leva a

$$B(AC) = BI. \quad (2)$$

Usando a associatividade da multiplicação de matrizes, reescrevemos a Eq. (2) como

$$(BA)C = BI.$$

Assim,

$$(BA)C = B. \quad (3)$$

Como B é uma inversa à esquerda de A , temos

$$BA = I. \quad (4)$$

Substituímos a Eq. (4) na Eq.(3) para obter

$$IC = B.$$

Deste modo, concluímos que

$$C = B,$$

ou seja, a matriz inversa de A é única.

- (ii) Seja A uma matriz $n \times n$ inversível e B uma matriz $n \times n$ inversível. Queremos mostrar que AB também é inversível e que sua inversa é dada por $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Sabemos que A^{-1} e B^{-1} são as inversas de A e B , respectivamente, o que significa que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I \quad \text{e} \quad B^{-1}B = BB^{-1} = I,$$

onde I é a matriz identidade.

Agora, considere o produto AB . Queremos encontrar a matriz X tal que

$$(AB)X = I \quad \text{e} \quad X(AB) = I.$$

Vamos tentar $X = B^{-1}A^{-1}$ e verificar se ela satisfaz as equações acima.

Primeiro, verificamos $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$.

De fato,

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I.$$

Agora, verificamos $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

Temos

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I.$$

Portanto, $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$.

Como $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, concluímos que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(iii) Seja A uma matriz $n \times n$ inversível. Por definição de matriz inversa, existe uma matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

onde I é a matriz identidade.

Agora, queremos mostrar que $(A^{-1})^{-1} = A$, ou seja, que A^{-1} é inversível e sua inversa é A .

Considerando a matriz A^{-1} , queremos encontrar uma matriz X tal que

$$A^{-1}X = XA^{-1} = I. \quad (5)$$

Vamos supor que $X = A$ e verificar se essa suposição satisfaz as duas igualdades da (5).

Com efeito, segue da definição de matriz inversa que

$$A^{-1}A = I,$$

De modo análogo, verifica-se que

$$AA^{-1} = I.$$

Portanto, a matriz A é a inversa de A^{-1} , ou seja

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2.5 O ESPAÇO VETORIAL DAS MATRIZES

Os espaços vetoriais desempenham um papel fundamental em várias áreas da Matemática e suas aplicações, especialmente em Álgebra Linear, Física, Computação e muitas outras disciplinas. Eles fornecem uma estrutura para estudar vetores, que são objetos que podem ser somados e multiplicados por escalares, e suas propriedades podem ser exploradas de forma bastante geral. Na Álgebra Linear, por exemplo, fornecem a estrutura para manipulação de vetores e matrizes.

De modo geral, um conjunto não-vazio V define um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se, em seus elementos, denominados vetores, estão definidas duas operações, sendo uma delas a adição de vetores e a outra a multiplicação de um escalar por um vetor, munidas de determinadas propriedades, conforme a definição a seguir.

Definição 6 (Espaço vetorial). Seja V um conjunto não-vazio e $\mathbb{K}$ um corpo. Dizemos que V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se, e somente se:

- (A) existe uma operação de *adição* $(u, v) \mapsto u + v$ em V , que a cada par de vetores, $u, v \in V$ faz corresponder um novo vetor denotado por $u + v \in V$, chamado a *soma* de u com v , com as seguintes propriedades:
 - (i) $u + v = v + u$, $\forall u, v \in V$ (comutativa)
 - (ii) $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall u, v, w \in V$ (associativa)
 - (iii) $\exists 0 \in V$ tal que $u + 0 = u$, $\forall u \in V$ (existência do elemento neutro)
 - (iv) $\forall u \in V, \exists -u$ tal que $u + (-u) = 0$ (existência do elemento oposto)
- (B) está definida uma *multiplicação por escalar* de $\mathbb{K} \times V$ em V , que a cada par $(\alpha, v) \in \mathbb{K} \times V$ faz corresponder um único vetor denotado por αv , chamado *produto de escalar* α por v , satisfazendo as propriedades a seguir:
 - (i) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ (distributiva em relação à soma de escalares)
 - (ii) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ (associativa)
 - (iii) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributiva em relação à soma de vetores)
 - (iv) $1u = u$, $\forall u \in V$, $\forall u \in V$ (existência do elemento identidade).

para quaisquer $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Em particular, o *espaço vetorial das matrizes* é um conjunto de matrizes que satisfaz as propriedades que o caracterizam, conforme apresentado na Definição 6. Ou seja, o conjunto de todas as matrizes $m \times n$, aqui denotado por $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, define um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$, que no contexto do presente estudo, direciona-se para o corpo dos números reais, $\mathbb{R}$. No processamento de imagens, esse espaço desempenha um papel central, pois imagens digitais podem ser representadas por matrizes, onde cada elemento corresponde a um pixel. A estrutura de espaço vetorial dessas matrizes permite aplicar diversas operações matemáticas para manipulação, análise e transformação de imagens.

Assim, sejam A e B matrizes $m \times n$, e α um escalar. O conjunto $\mathbb{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ de todas as matrizes de ordem $m \times n$ define um espaço vetorial com relação às operações de adição, definida na Subseção 2.3.1 e, de multiplicação por escalar, definida na Subseção 2.3.2. Esse espaço tem dimensão igual ao número total de entradas da matriz, e suas propriedades permitem aplicações

em diversas áreas, como no processamento de imagens; na computação gráfica, em física e aprendizado de máquina. Além disso, subespaços vetoriais importantes, como o espaço das matrizes simétricas ou antissimétricas, revelam estruturas ricas e úteis para a álgebra linear e a teoria das transformações lineares.

3 OCTAVE

A presente seção tem por objetivo fazer uma breve introdução à linguagem computacional GNU Octave, desenvolvida para computação matemática. Serão apresentados um tutorial sobre algumas das inúmeras funcionalidades desse software, em particular as principais funções aplicadas à teoria matricial e sua relação com imagens. O software Octave foi criado por John W. Eaton em 1988 como uma alternativa gratuita e de código aberto ao MATLAB. O objetivo principal era fornecer uma ferramenta acessível para cálculos numéricos e manipulação de dados, especialmente em ambientes acadêmicos e de pesquisa. No início de 1988, John W. Eaton iniciou o desenvolvimento do Octave como um projeto individual. A ideia era criar uma linguagem de programação que fosse semelhante ao MATLAB, mas que pudesse ser usada livremente. A primeira versão oficial do Octave foi lançada no ano de 1994, possibilitando que os usuários realizassem cálculos numéricos e experimentassem suas funcionalidades básicas.

Ao longo dos anos, o Octave ganhou popularidade, especialmente entre usuários que buscavam uma alternativa gratuita ao MATLAB. A comunidade começou a se formar em torno do projeto, contribuindo com melhorias e novas funcionalidades. O desenvolvimento do Octave continuou com várias versões sendo lançadas, cada uma trazendo novos recursos, melhorias de desempenho e compatibilidade com MATLAB.

O Octave foi integrado ao Projeto GNU em 2001, consolidando seu status como uma ferramenta de software livre e ampliando sua visibilidade. Sob os termos da licença GNU *General Public License* (GPL), conforme estabelecido pela *Free Software Foundation*, é possível redistribuir e modificar o Octave livremente. Isso permite que qualquer pessoa contribua para sua melhoria, seja escrevendo novas funções ou identificando e corrigindo erros. Nas versões posteriores, o Octave passou a contar com uma interface gráfica, tornando seu uso mais acessível para novos usuários e proporcionando um ambiente mais intuitivo e eficiente.

Atualmente, o Octave é amplamente utilizado em universidades, laboratórios de pesquisa e pela comunidade de código aberto, oferecendo uma poderosa ferramenta de cálculo numérico acessível a todos. A sua continuidade e desenvolvimento ativo refletem a demanda por alternativas de software livre em áreas científicas e de engenharia.

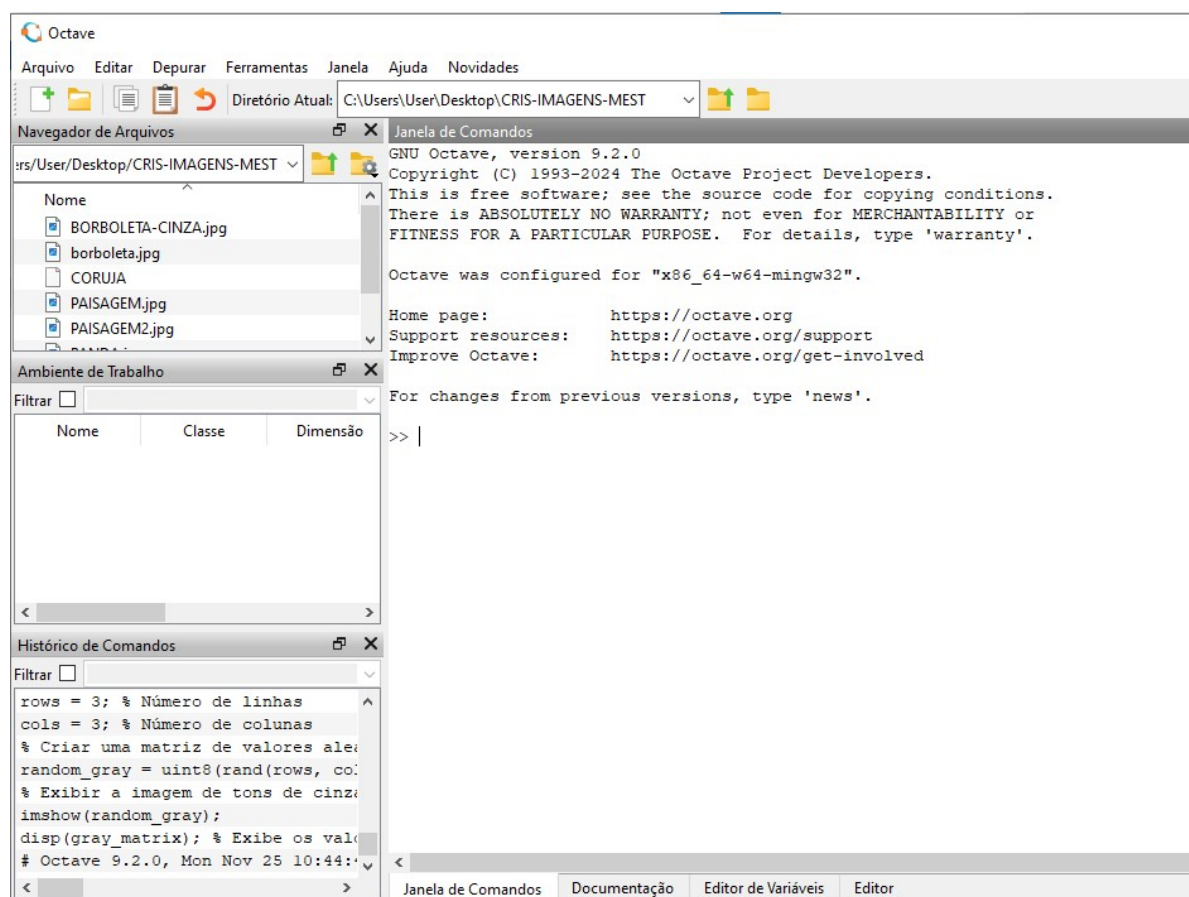
A versão do GNU Octave utilizada e descrita neste trabalho é a 9.2, lançada em julho de 2021. Essa versão trouxe diversas melhorias e novas funcionalidades e pode ser baixada gratuitamente para diferentes sistemas operacionais. O software está disponível para uso livre na página oficial do projeto, que pode ser acessada através do link a seguir:

<https://www.gnu.org/software/octave/#install>.

3.1 OCTAVE

A abordagem da linguagem computacional GNU Octave apresentada nessa seção está embasada no trabalho de Siqueira (2018).

Figura 1 – Interface gráfica do GNU Octave



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao iniciar o Octave, a tela inicial, ilustrada na Figura 1 apresenta as linhas de comando, além de diversas funções e atalhos que tornam seu uso mais prático. Seu layout é intuitivo e de fácil manipulação, com uma interface semelhante à do MATLAB. Nela, é possível visualizar diferentes janelas, como a de comando Command Window, a de criação e manipulação de variáveis, além de ferramentas para realizar operações numéricas, gerar e modificar matrizes e imagens. O Octave também pode ser utilizado como uma calculadora avançada, onde os comandos são digitados na linha de comando e executados ao pressionar a tecla Enter.

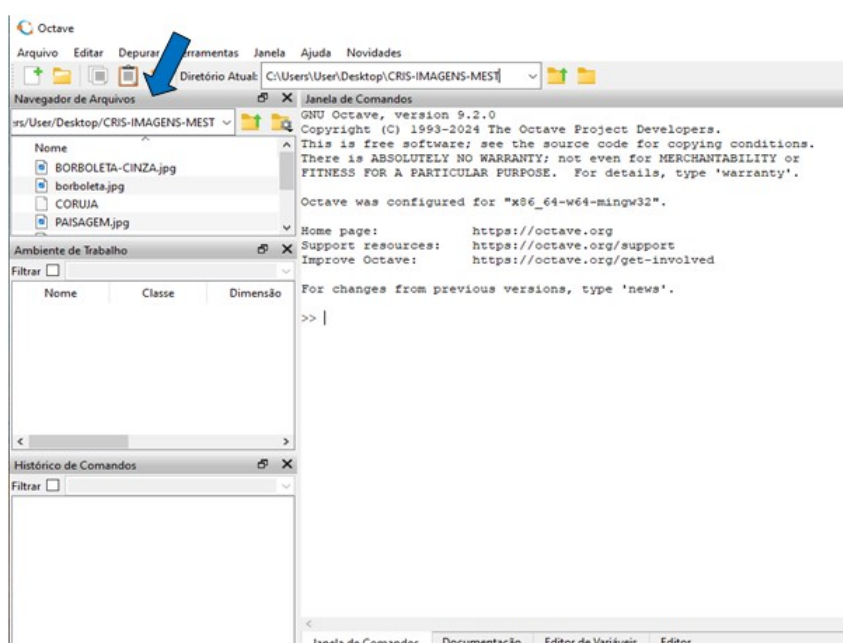
Para obter os resultados apresentados na Seção 4, utilizamos o Octave como ferramenta computacional para o ensino da teoria de matrizes. Como aplicação dessa teoria, exploramos a manipulação de imagens. Para isso, é necessário instalar o pacote Image Package, o que pode ser feito por meio da execução do seguinte comando:

```
>> pkg install -forge image,
```

onde `pkg install` representa o comando utilizado para instalar pacotes no Octave, `forge` especifica que o pacote será baixado imediatamente do repositório oficial do Octave Forge, e `image` é o nome do pacote que contém funções para processamento e manipulação de imagens.

No Octave, o termo `prompt` refere-se ao símbolo ou mensagem exibido na linha de comando, indicando que o sistema está pronto para receber comandos ou entradas do usuário. Esse `prompt` é exibido na *Command Window*, localizado à direita da interface gráfica, conforme ilustra a Figura 1. Nessa figura, além da janela de comandos, é possível visualizar e acessar três abas adicionais: *Documentação*, destinada à pesquisa de documentação do Octave; *Editor*, um editor de texto integrado; e *Editor de Variáveis*, que exibe a lista de todas as variáveis armazenadas no ambiente de trabalho.

Figura 2 – Navegador de Arquivos; Ambiente de Trabalho e Histórico de Comandos



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme observado na Figura 2, à esquerda da interface gráfica do Octave, existem três elementos, sendo eles: Navegador de Arquivos; Gerenciador de Arquivos; Ambiente de Trabalho, Gerenciador de Variáveis; e Histórico de Comandos.

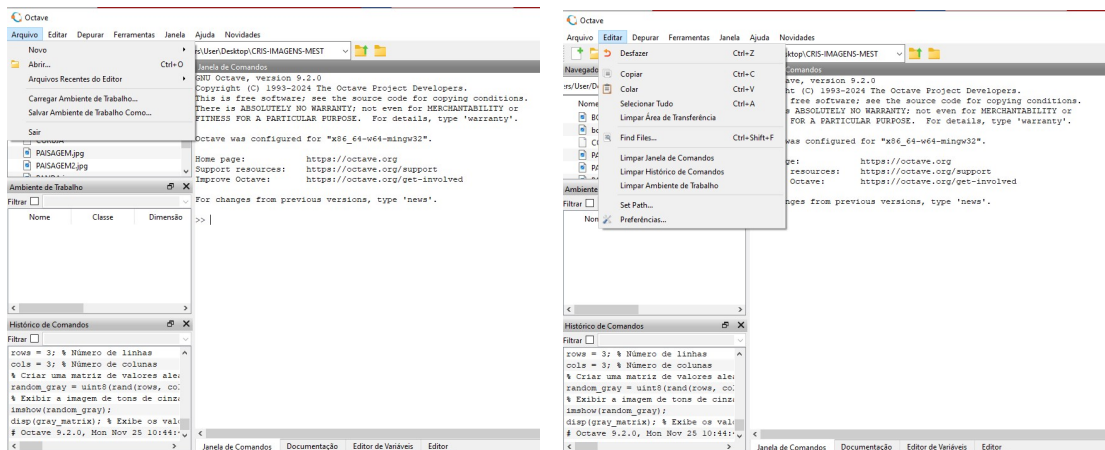
A interface gráfica do recurso computacional em uso também mostra uma barra de menus com as opções descritas a seguir, conforme ilustrado na Figura 3.

- **Arquivo:** O menu Arquivo apresenta opções para criar um novo arquivo ou abrir um já existente; reeditar arquivos recentes; carregar e gravar espaços de trabalho; alterar configurações e sair.
- **Editar:** No menu Editar temos as opções para desfazer; copiar; colar; selecionar tudo; limpar área de transferência; localizar arquivos; limpar a Janela de comandos, Histórico de comandos, ou Ambiente de trabalho. Nesse menu, a opção `Set Path` é usada para

configurar o caminho de pesquisa de diretórios, permitindo ao Octave localizar Funções e Scripts, além de Preferências que abre o painel de configurações onde você pode ajustar preferências de ambiente, como aparência, comportamento do editor, entre outras opções de personalização.

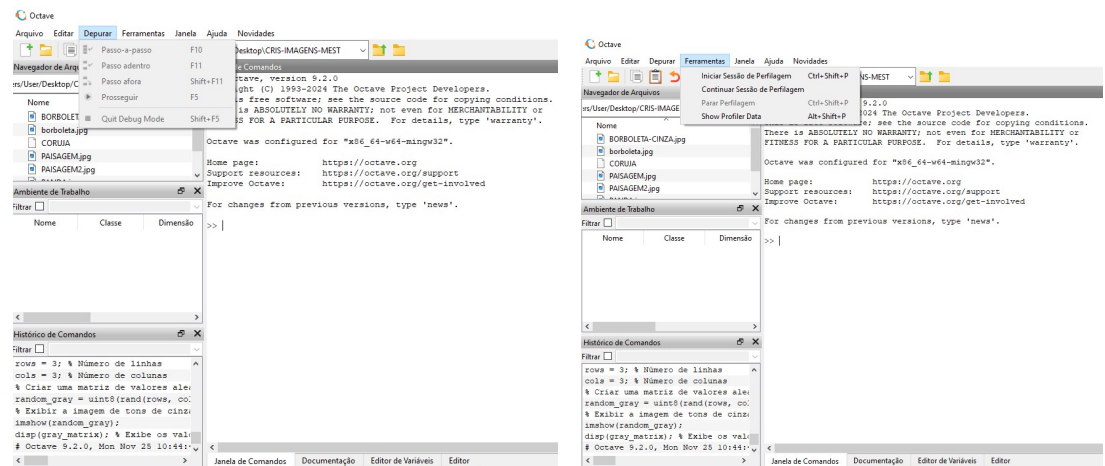
- **Depurar:** Como comandos para depuração temos as opções de executar, incluir e excluir passos, continuar a execução e sair do modo de depuração.
- **Ferramentas:** Nesse menu, encontramos as opções de iniciar ou continuar a sessão de perfilagem, que consiste em analisar e ativar a coleta de dados de desempenho do código em execução no Octave e também a função `show profile data` que é usada para exibir os dados de perfilamento coletados pelo `profiler`. O `profiler` é uma ferramenta que mede o tempo de execução de funções e trechos de código, ajudando na otimização de desempenho.
- **Janela:** Em resumo, o menu Janela, permite alterar a estrutura da interface gráfica, exibir elementos específicos e redefinir a disposição padrão dos elementos da interface.
- **Ajuda:** Nessa opção é possível abrir a documentação detalhada, incluindo guias completos sobre funções do Octave e pacotes já instalados. Além disso, você pode buscar por funções específicas ou navegar por tópicos relacionados ao Octave, Álgebra linear, Estatística, gráficos e muito mais.

Figura 3 – Menu do Octave



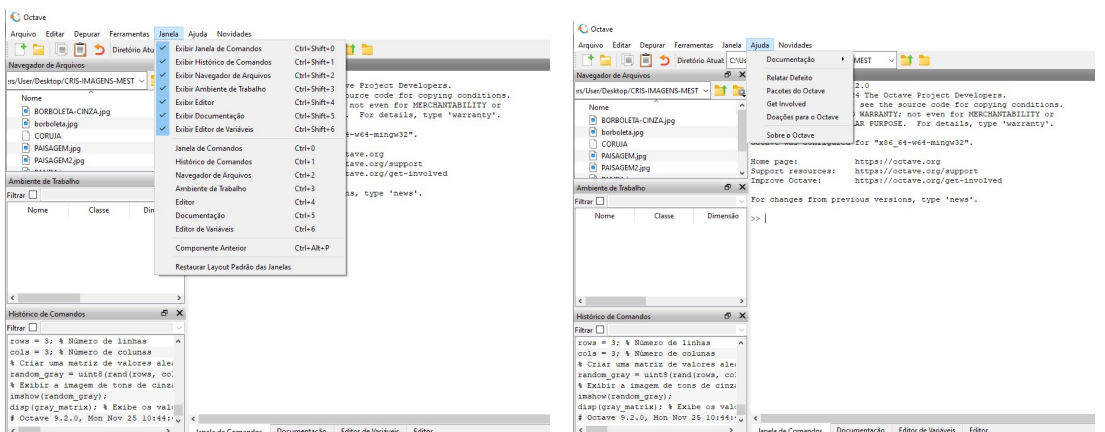
(a) Arquivo

(b) Editar



(c) Depurar

(d) Ferramentas



(e) Menu Janela

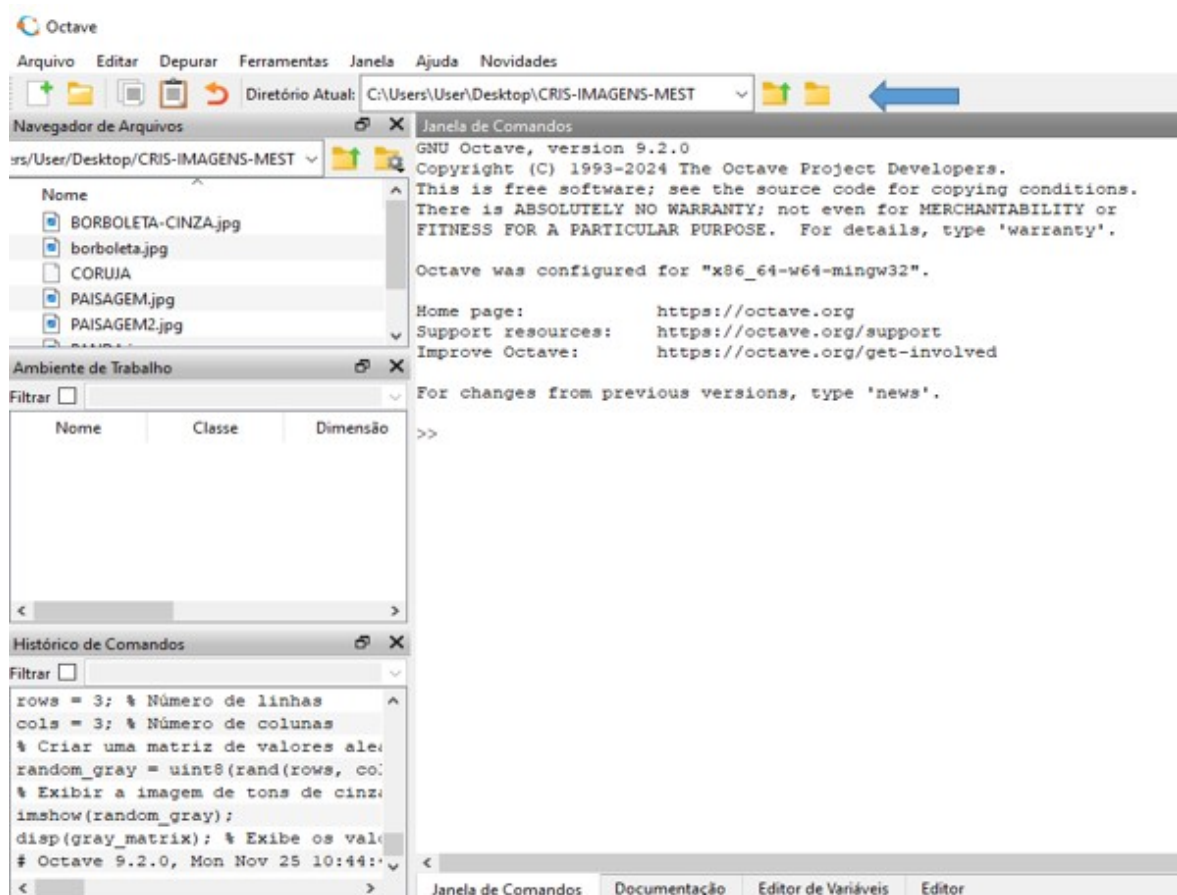
(f) Ajuda

Fonte: Elaborada pelo autor.

Seguindo com a descrição gráfica do Octave, nos deparamos com a barra de ferramentas com ícones para criar um novo script; abrir um arquivo; copiar, colar e voltar. Nessa mesma barra é possível verificar o diretório atual que está sendo acessado, além de mudar de diretório, caso

seja necessário, conforme pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Barra de Ferramentas



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para finalizar o Octave, é necessário digitar no prompt o comando

```
>> exit      % ou
>> quit
```

em seguida, a tecla Enter.

Ao utilizar o Octave pelo terminal, é possível finalizá-lo com a combinação de teclas `Ctrl + C`.

3.1.1 Matrizes

A seguir, apresentaremos alguns comandos para demonstrar a funcionalidade do Octave no ensino de matrizes. Utilizaremos o software para criar matrizes, realizar operações matriciais e explorar a relação entre a formação de imagens e o sistema RGB.

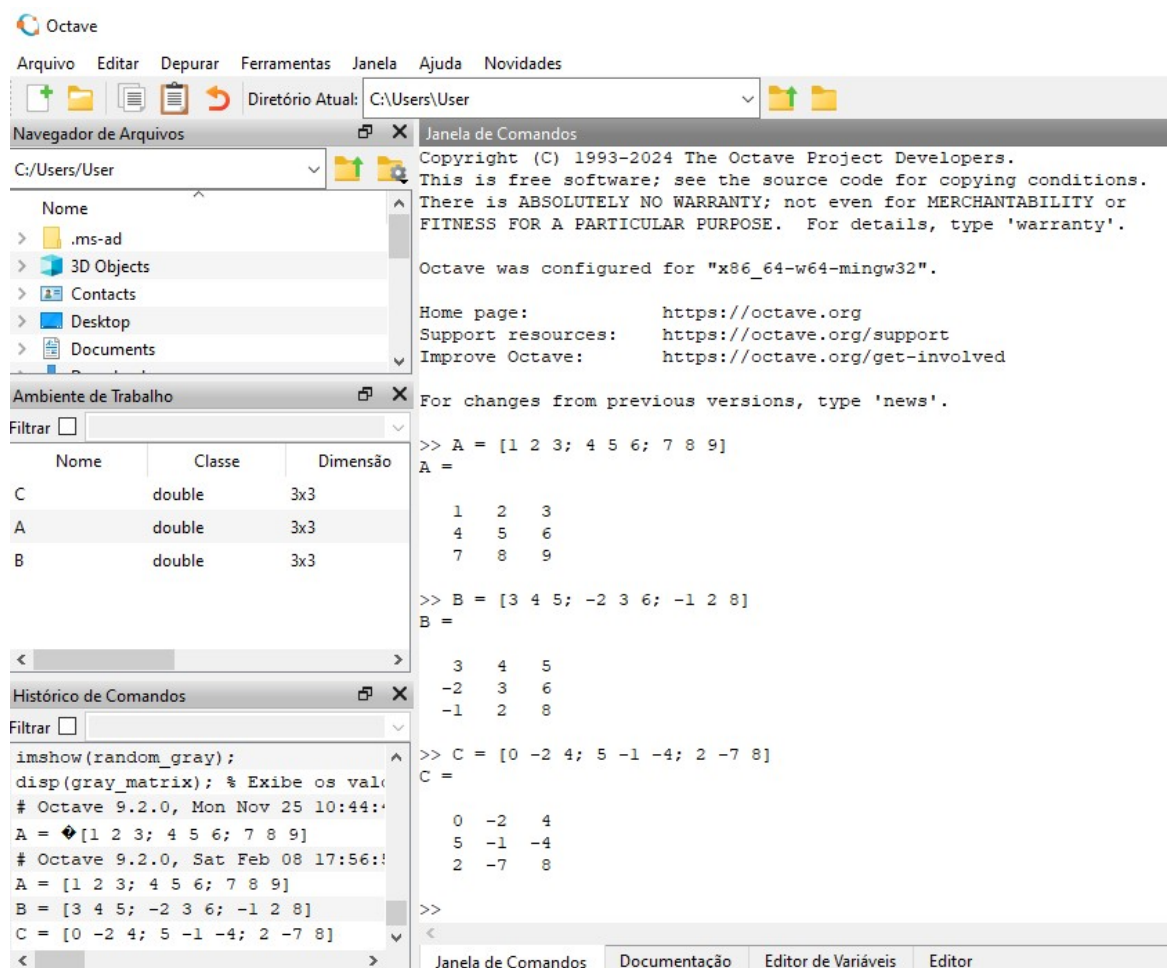
Nas linhas de comando, é possível realizar vários tipos de expressões matemáticas, desde que os símbolos sejam utilizados corretamente, com o auxílio de parênteses. As expressões serão resolvidas conforme o comando, sempre respeitando a ordem de resolução convencional

na matemática. A seguir, apresentamos uma tabela com as operações matemáticas básicas e seus respectivos comandos no Octave.

Operação	Comando
Adição	+
Subtração	-
Multiplicação	*
Divisão	/
Potenciação	^

Tabela 5 – Comando para operações matemáticas usuais no Octave

Figura 5 – Definindo matrizes no Octave



Fonte: Elaborada pelo autor.

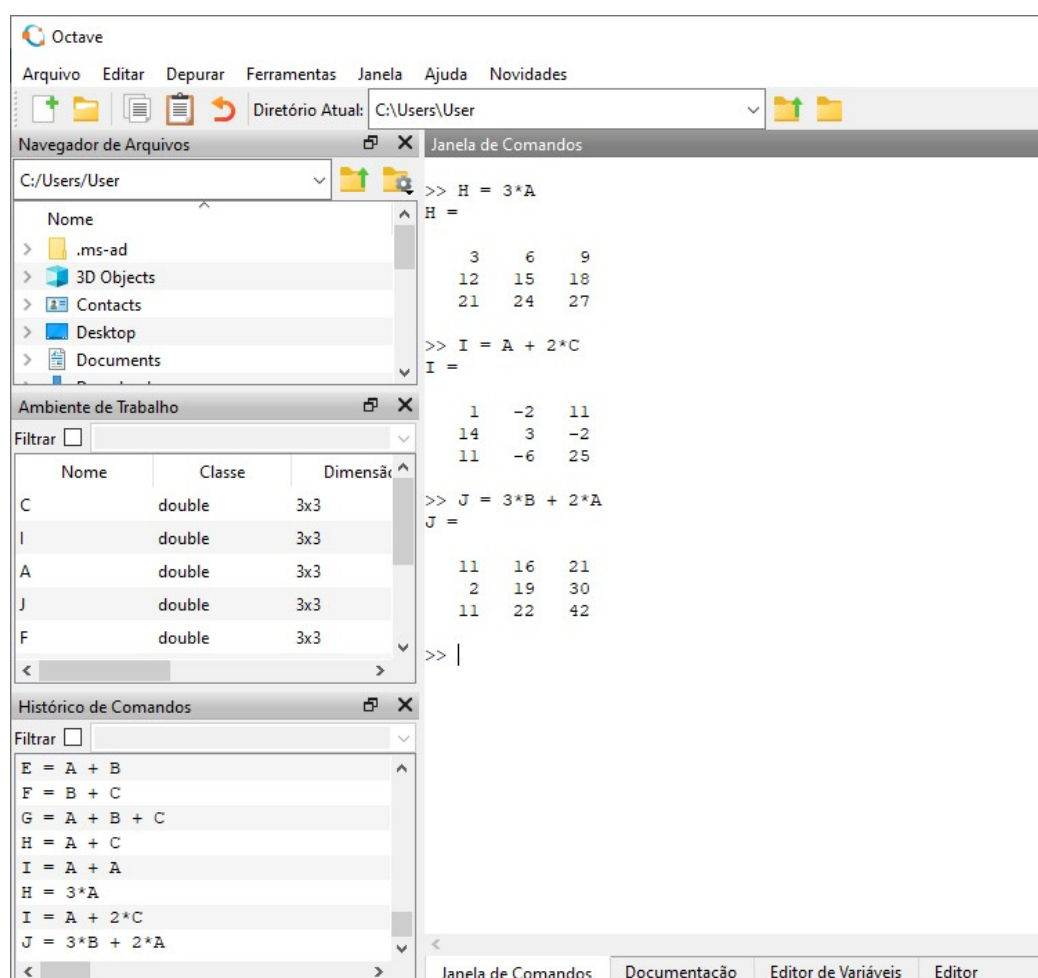
Para criar uma matriz no Octave, seus elementos devem ser digitados entre colchetes. Os elementos de cada linha podem ser separados por espaços ou vírgulas, enquanto as linhas devem ser separadas por ponto e vírgula.

Vale ressaltar que, se não colocarmos nenhum ponto após os colchetes, a matriz será visualizada; caso contrário, ela será armazenada na memória do software. Também é importante lembrar

que o Octave diferencia letras maiúsculas de letras minúsculas. Esse software oferece grande flexibilidade, permitindo realizar diversas operações com as matrizes previamente estabelecidas. A seguir, apresentamos alguns exemplos:

Exemplo 14. Após definir as matrizes A , B e C , conforme mostra a Figura 5, podemos utilizar o Octave para criar novas matrizes por meio das operações usuais já abordadas na Seção 2. A Figura 6 exemplifica as operações de adição e multiplicação por escalar, respectivamente.

Figura 6 – Operando com matrizes no Octave



Fonte: Elaborada pelo autor.

No Octave, alguns comandos são específicos para criar matrizes com características especiais. Esses comandos são apresentados na tabela 6, e exemplificados pela Figura 7.

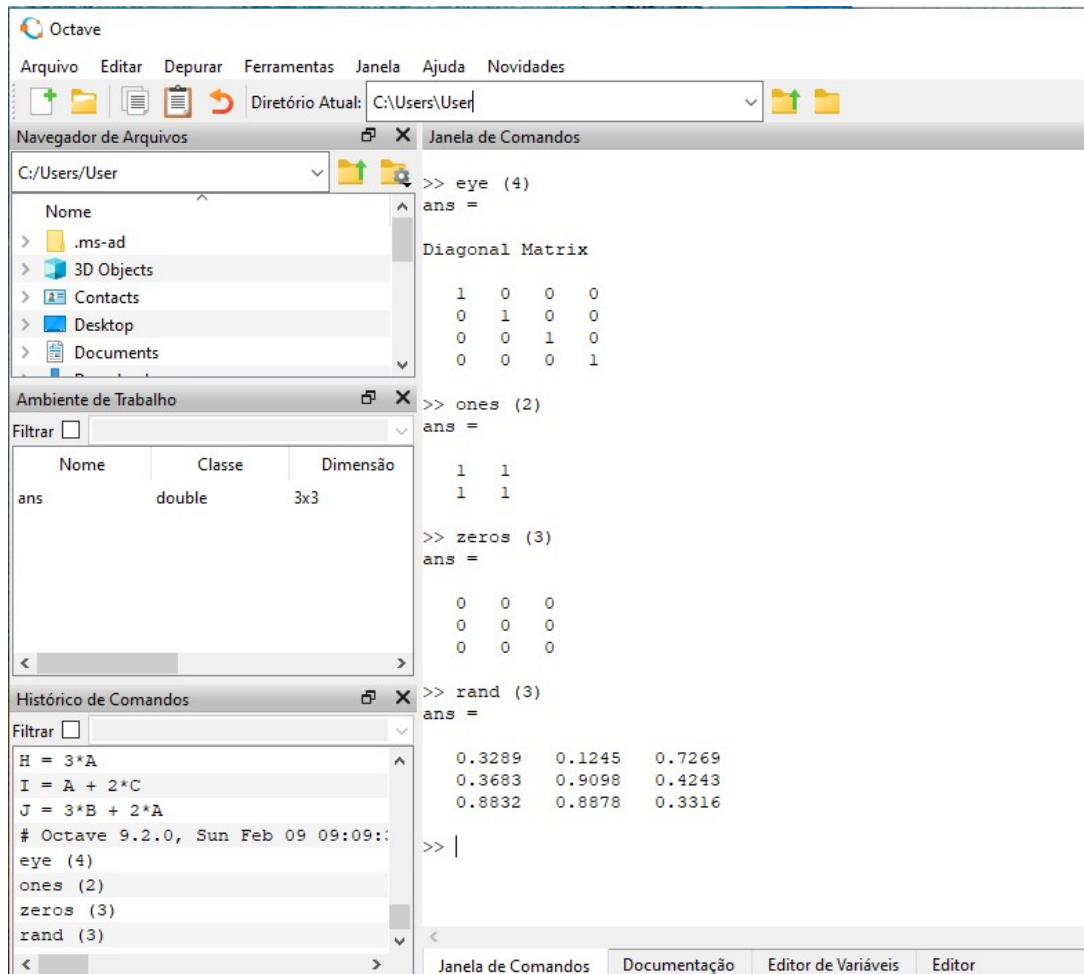
O Octave nos permite eliminar linhas ou colunas de matrizes. Uma das formas para remover uma determinada linha ou uma coluna de uma dada matriz, por exemplo, é utilizar a indexação. Vejamos alguns exemplos na Figura 8.

É muito importante que todos os `scripts` sejam bem documentados, para que as pessoas possam entender o que ele faz e como realiza sua tarefa. Uma maneira de documentar um script é colocar comentários nele. No Octave, um comentário é qualquer coisa, a partir do símbolo `%`

Tipo de Matriz	Comando
Matriz identidade de ordem n	<code>eye (n)</code>
Matriz quadrada de ordem n formada apenas por elementos 1	<code>ones (n)</code>
Matriz quadrada de ordem n formada apenas por elementos zeros	<code>zeros (n)</code>
Matriz quadrada de ordem n formada com elementos aleatórios	<code>rand (n)</code>

Tabela 6 – Gerando diferentes tipos de matrizes no Octave

Figura 7 – Criando matrizes especiais no Octave



Fonte: Elaborada pelo autor.

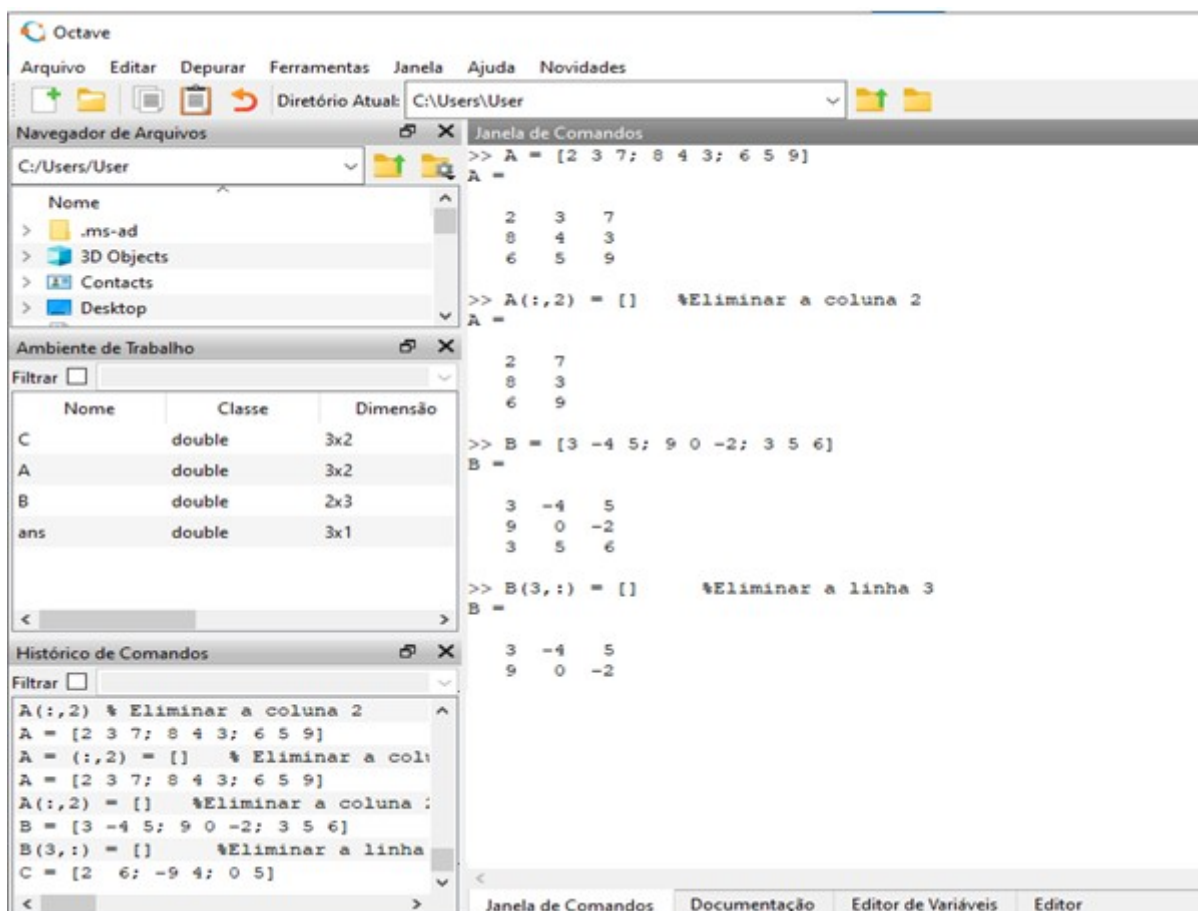
até o final dessa linha em particular. Os comentários são completamente ignorados quando o script é executado. Tome como exemplo a Figura 8.

A teoria de matrizes abordada na Seção 2 inclui a transposição e o estudo das matrizes inversíveis, para as quais o Octave oferece comandos específicos. Para ilustrar o uso dessas operações, considere a matriz *A*, apresentada na Tabela 7, como uma matriz inversível.

3.1.2 Imagens digitais e o sistema RGB

Observamos que, a cada dia, os estudantes estão mais conectados às redes sociais. Isso despertou um interesse ainda maior em explorar as matrizes presentes nas imagens e as diversas

Figura 8 – Eliminando linhas/colunas de matrizes no Octave



Fonte: Elaborada pelo autor.

Operação	Comando
Matriz transposta de A	A'
Matriz inversa de A	A^{-1}

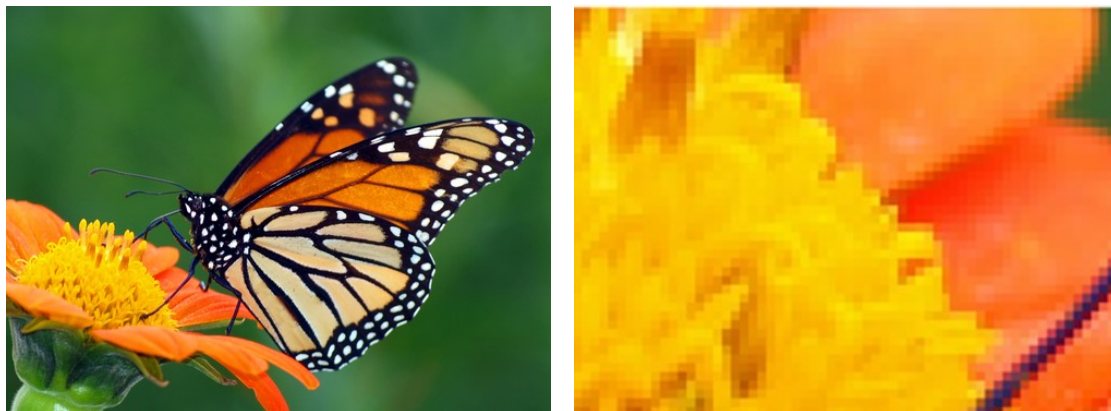
Tabela 7 – Transposição e inversão de matrizes no Octave

transformações possíveis, que estão implicitamente relacionadas a comandos matemáticos.

Consideremos a imagem da Figura 9, que, à primeira vista, pode parecer apenas uma representação de uma flor, uma borboleta e parte de uma paisagem. No entanto, ao ampliá-la utilizando um computador, é possível perceber que a imagem é composta por pequenos elementos, conhecidos como *pixels*, que são unidades de cor. O termo *pixel* é uma abreviação de “*picture element*”. O computador representa essa imagem por meio de uma matriz, onde cada elemento dela corresponde a um pixel. Cada pixel armazena informações sobre cor e luminosidade e, quando combinados, esses pixels formam a imagem digital que vemos em uma tela ou que é impressa em uma folha de papel.

No entanto, no computador, não é armazenada uma cor para cada elemento da matriz, mas sim um valor. No processamento de imagens, as tonalidades de cinza representam as diferentes intensidades de cinza entre o preto absoluto e o branco absoluto. As imagens em escala de cinza

Figura 9 – Ilustração de uma imagem de pixels



(a) Imagem original

Fonte: Brasil Escola (2025).

(b) Imagem ampliada

Fonte: Elaborada pelo autor.

são representadas por matrizes, em que cada elemento corresponde à intensidade de cinza de um pixel.

As imagens coloridas são formadas pelas cores do sistema RGB (*do inglês, Red, Green, Blue*). Segundo Gonzalez & Woods (2010), as cores do sistema RGB são cores formadas através de luz do espectro de cores que está contido na faixa de luz visível. Em 1666, Sir Isaac Newton descobriu que, quando um feixe de luz solar atravessa um prisma de vidro, o feixe de luz emergente não é branco, mas consiste em um espectro contínuo de cores variando de violeta, em uma extremidade, a vermelho, na outra. Como apresentado na Figura 10a, o espectro de cores pode ser dividido em seis amplas regiões: violeta, azul, verde, amarelo, laranja e vermelho. Quando visto em cores reais, nenhuma cor do espectro termina abruptamente, pois cada cor se funde suavemente à próxima.

O sistema RGB é um modelo de cores aditivas usado para representar imagens digitais. Nesse sistema, cada cor é formada combinando diferentes intensidades de vermelho (R), verde (G) e azul (B), variando de 0 a 255 em imagens de 8 bits por canal. Quando todos os canais estão no máximo, obtemos branco; quando estão no mínimo, obtemos preto.

A seguir temos uma síntese de como o RGB funciona em imagens:

- (i) *Imagens coloridas*: Cada pixel é definido por três valores correspondentes aos níveis de vermelho, verde e azul.
- (ii) *Imagens em tons de cinza*: Possuem valores iguais nos três canais RGB.
- (iii) *Imagens binárias*: São representadas apenas por preto (0) e branco (255) em um único canal.
- (iv) *Combinação de cores*:
 - $(255, 0, 0) \implies$ Vermelho puro

Figura 10 – Ilustração do sistema de cores RGB



(a) Espectro de cores visto pela passagem de luz branca através de um prisma

(b) Representação do modelo RGB com diagrama de Venn

Fonte: Open (2023).

- $(0, 255, 0) \Rightarrow$ Verde puro
- $(0, 0, 255) \Rightarrow$ Azul puro
- $(255, 255, 0) \Rightarrow$ Amarelo (mistura de vermelho e verde)
- $(0, 255, 255) \Rightarrow$ Ciano (mistura de verde e azul)
- $(255, 0, 255) \Rightarrow$ Magenta (mistura de vermelho e azul)
- $(255, 255, 255) \Rightarrow$ Branco (todos os canais no máximo)
- $(0, 0, 0) \Rightarrow$ Preto (todos os canais no mínimo)

Na estrutura do modelo RGB, cada pixel de uma imagem colorida é armazenado como um conjunto de três camadas (Red, Green e Blue), com valores variando de 0 a 255 (se for `uint8`, ou seja, imagens de 8 bits por canal) ou de 0 a 1 (se for `double`). Vejamos alguns exemplos na Tabela 8.

Cor	R	G	B
Preto	0	0	0
Branco	255	255	255
Vermelho	255	0	0
Verde	0	255	0
Azul	0	0	255
Amarelo	255	255	0
Ciano	0	255	255
Magenta	255	0	255

Tabela 8 – Exemplos de cores do modelo RGB

No GNU Octave, você pode trabalhar com imagens e cores no sistema RGB usando matrizes tridimensionais. Na prática, o uso do modelo RGB no Octave depende da biblioteca "imread" para carregar imagens, "imshow" para a exibição das imagens e das operações matriciais para manipular os canais de cor.

Figura 11 – Leitura de imagem no Octave



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para carregar e exibir uma imagem RGB no Octave, usamos as linhas de comando:

```
>> img = imread('imagem.jpg'); % Carrega a imagem
>> imshow(img); % Exibe a imagem
```

A imagem apresentada na Figura 11 é colorida, por esse motivo cada pixel da imagem é representado por uma matriz 3D de dimensões (altura, largura, 3), em que:

- `'img(:,:,1)'` $\Rightarrow$ Canal vermelho (R);
- `'img(:,:,2)'` $\Rightarrow$ Canal verde (G);
- `'img(:,:,3)'` $\Rightarrow$ Canal azul (B).

Por exemplo, uma das maneiras de extrair e visualizar cada canal separadamente no Octave, é utilizar as linhas de comando:

```
% Extrair os canais separadamente:

>> R = img(:,:,1); % Extrai o canal vermelho
>> G = img(:,:,2); % Extrai o canal verde
>> B = img(:,:,3); % Extrai o canal azul

% Exibir os canais separadamente:
```

```
figure;
>> subplot(1,3,1); imshow(R); title('Canal vermelho');
>> subplot(1,3,2); imshow(G); title('Canal verde');
>> subplot(1,3,3); imshow(B); title('Canal azul');
```

A Figura 12 é o resultado obtido no Octave após executar as linhas de comando apresentadas anteriormente.

Figura 12 – Leitura da imagem ilustrada na Figura 11 com diferentes canais de cores



Fonte: Elaborada pelo autor.

De forma bastante interessante, o Octave nos permite remover um determinado canal de cor, caso isso seja necessário. Por exemplo, vamos supor que queremos remover o canal azul da imagem. Para tal, podemos zerar essa matriz, através das linhas de comando:

```
>> img_sem_azul = img; % Cópia a imagem original
>> img_sem_azul(:, :, 3) = 0; % Zera o canal azul
>> imshow(img_sem_azul); title('Imagem sem Azul');
```

O resultado da execução dos comandos acima encontra-se ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Leitura da imagem ilustrada na Figura 11 ao excluir o canal azul



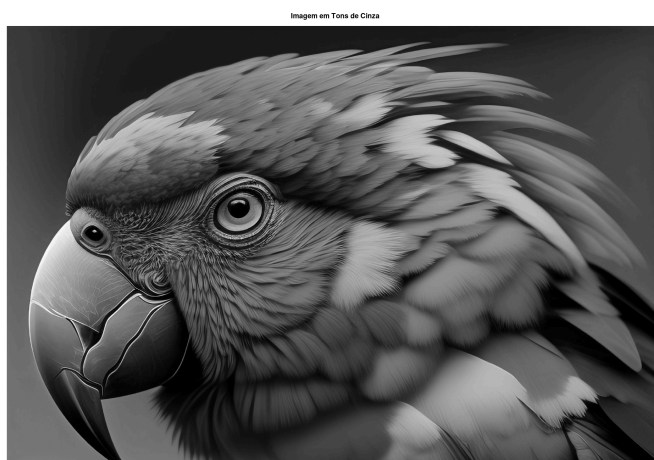
Fonte: Elaborada pelo autor.

Agora, passamos à conversão de uma imagem colorida para uma imagem em tons de cinza. No Octave, podemos utilizar uma média ponderada dos canais de cor através das linhas de comando:

```
>> img_gray = 0.2989*R+0.5870*G+0.1140*B; % Fórmula padrão de conversão
>> imshow(img_gray); title('Imagem em Tons de Cinza');
```

para obter a imagem da Figura 14.

Figura 14 – Leitura da imagem ilustrada na Figura 11 em tons de cinza



Fonte: Elaborada pelo autor.

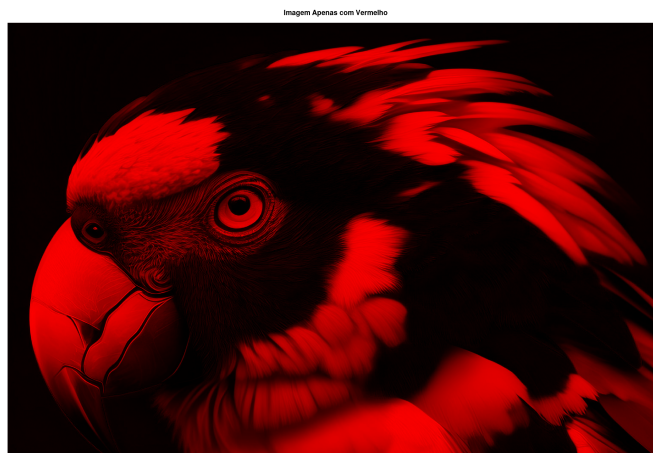
Se quisermos destacar apenas a cor vermelha da imagem e remover os outros canais, criamos uma máscara com as linhas de comando a seguir:

```
>> img_red = img;
>> img_red(:, :, 2) = 0; % Remove o verde
>> img_red(:, :, 3) = 0; % Remove o azul
>> imshow(img_red); title('Imagem Apenas com Vermelho');
```

Na prática, o Octave nos permite criar nossa própria imagem colorida. Por exemplo, suponha que precisamos criar uma imagem totalmente azul de dimensão 300×300 pixels. Para executar essa tarefa, recorreremos às linhas de comando no Octave:

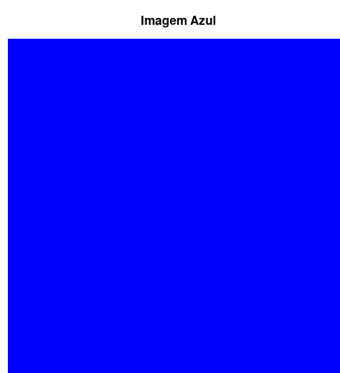
```
>> altura = 300;
>> largura = 300;
>> img_azul = zeros(altura, largura, 3, 'uint8'); % Cria uma matriz nul
>> img_azul(:, :, 3) = 255; % Define o canal azul como máximo
>> imshow(img_azul); title('Imagem Azul');
```

Figura 15 – Leitura da imagem da Figura 11 apenas com canal de cor vermelho



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 16 – Criando imagem com uso de matriz



Fonte: Elaborada pelo autor.

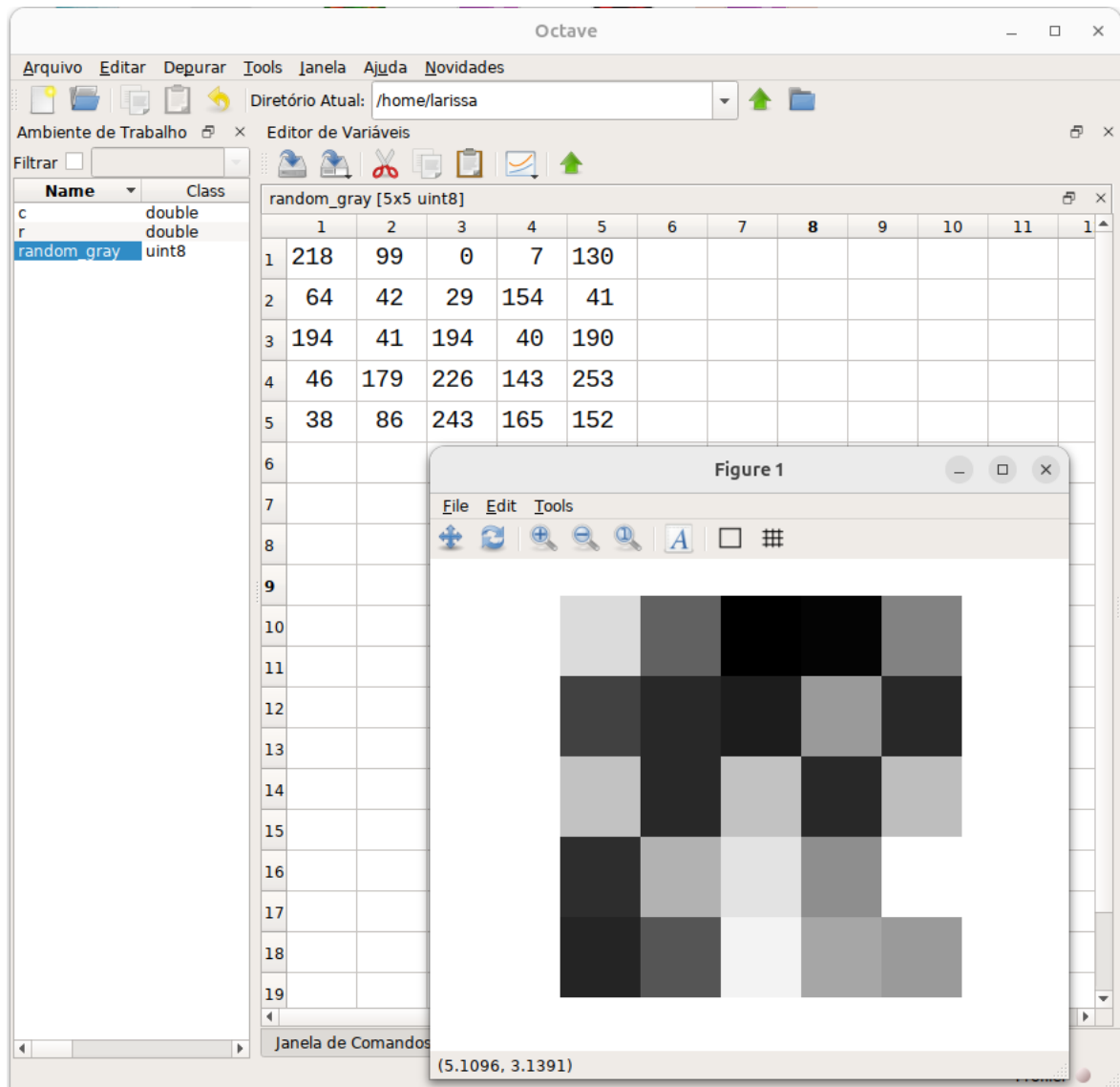
Para uma imagem em escala de cinza, cada pixel é um valor de intensidade que pode variar de 0 (preto) a 255 (branco). Assim, podemos criar no Octave, por exemplo, uma matriz randômica 5×5 , que represente uma imagem em tons de cinza. Para isso, recorreremos às linhas de comando a seguir:

```
>> r = 5; % Numero de linhas da matriz
>> c = 5; % Número de colunas da matriz
>> random_gray = uint8(rand(r,c)*255); % matriz randômica de ordem 5
>> imshow(random_gray)
```

As linhas de comando apresentadas anteriormente geram a matriz randômica de ordem 5, que visualmente representa a imagem em tons de cinza, ambas ilustradas na Figura 17.

Entre as diversas possibilidades de manipulação de imagens no Octave, encerraremos esta seção abordando a rotação de imagens.

Figura 17 – Matriz randômica x Imagem em tons de cinza



Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma das formas de rotacionar uma imagem no Octave é através da função `imrotate` do Octave. Essa função realiza a rotação de uma imagem em um determinado ângulo. Para entender o que acontece por trás do `imrotate`, precisamos analisar alguns aspectos principais:

- **Transformação Geométrica**

O `imrotate` utiliza uma transformação afim baseada em uma *matriz de rotação*:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa matriz é aplicada a cada pixel da imagem para determinar suas novas coordenadas.

- **Interpolação**

Como a rotação pode levar a coordenadas fracionárias, o Octave precisa interpolar os valores dos pixels. Ele suporta diferentes métodos de interpolação, como:

- (i) *nearest* (*vizinho mais próximo*): é o mais rápido, mas pode causar pixelização.
- (ii) *bilinear*: suaviza a imagem interpolando valores entre pixels adjacentes.
- (iii) *bicubic*: possui melhor qualidade, mas é mais lento.

- **Tratamento de Dimensões**

Ao rodar a imagem, pode ser necessário aumentar o tamanho da matriz para evitar o corte de partes da imagem. O Octave pode:

- Ajustar automaticamente o tamanho da matriz resultante. -
- Manter o mesmo tamanho e cortar os pixels excedentes.

- **Preenchimento de Fundo**

Áreas vazias criadas pela rotação são preenchidas por um valor padrão (normalmente 0, resultando em fundo preto) ou um valor personalizado.

```
>> img = imread('imagem.png');  
>> img_rot = imrotate(img, 90, 'bilinear');  
>> imshow(img_rot);
```

A Figura 18 apresenta a imagem original, apresentada na Figura 11, seguida de diferentes rotações, obtidas a partir da função `imrotate` do GNU Octave.

Figura 18 – Rotação de uma imagem sob diferentes ângulos



(a) Imagem original



(b) Imagem original rotacionada em 180°



(c) Imagem original rotacionada em 90°



(d) Imagem original rotacionada em 270°

4 O ensino de matrizes sob um ponto de vista computacional

Esta seção tem como propósito explorar as atividades desenvolvidas em uma turma da 3ª série do Ensino Médio, destacando como elas contribuem para a compreensão dos conceitos matemáticos por meio do uso de tecnologias. A escolha de atividades baseadas em ferramentas digitais, como o Octave, busca proporcionar aos alunos uma experiência mais dinâmica e interativa, estimulando seu engajamento e assimilação do conteúdo. O êxito no aprendizado dos estudantes, independentemente da abordagem pedagógica adotada, está atrelado não apenas à teoria, mas também à sua aplicação efetiva em sala de aula.

A *Base Nacional Comum Curricular* - BNCC (BRASIL. Ministério da Educação, 2017) destaca a relevância da formação integral do aluno, promovendo uma aprendizagem significativa que engloba tanto o desenvolvimento cognitivo quanto o socioemocional.

É comum ouvirmos estudantes questionando a utilidade de determinados conteúdos: "Para que aprender isso?". Muitos não conseguem estabelecer conexões entre os temas abordados em sala de aula, o que dificulta a compreensão de sua aplicabilidade. Nem sempre é fácil demonstrar a relevância prática de um conceito matemático, porém, quando o ensino é contextualizado, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver conceitos e habilidades essenciais para sua formação.

Conforme os *Parâmetros Curriculares Nacionais* - PCN (BRASIL, 2002):

Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.

No entanto, quando os estudantes compreendem a aplicação e a utilidade de determinados conteúdos, desenvolvem competências e habilidades essenciais para sua formação integral, além de ampliar sua compreensão de diversas situações do cotidiano.

Segundo BROUSSEAU (2002), a estruturação de situações didáticas possibilita uma interação progressiva e contextualizada com os conceitos matemáticos, tornando sua assimilação e aplicação mais acessíveis.

A sequência didática do conteúdo de matrizes foi implementada na Escola Estadual Doutor José Foz, localizada no município de Presidente Prudente, a 568 km da capital paulista. As atividades envolveram a participação de 30 alunos da 3ª série do Ensino Médio, matriculados no período da manhã. A aplicação dessa sequência foi estruturada em duas etapas. Em um primeiro momento, o conteúdo de matrizes foi abordado de forma conceitual, onde foram apresentados os conceitos fundamentais e as principais definições desse conteúdo, incluindo suas operações, exemplos e exercícios. A segunda etapa foi caracterizada por uma abordagem computacional,

realizada na sala de informática da escola, onde os alunos tiveram contato com o software de computação matemática, Octave, para definir e operar com as matrizes, de forma dinâmica e interativa. Para concluir essa etapa, tiveram a oportunidade de explorar uma das diversas aplicações da teoria de matrizes por meio do processamento de imagens.

4.1 O ENSINO DE MATRIZES: UMA ABORDAGEM CONCEITUAL

Na primeira etapa do desenvolvimento da sequência didática, o objetivo principal foi conceituar e aprimorar a compreensão e a aplicação das operações com matrizes, capacitando os estudantes a resolver problemas matemáticos e a empregar esse conhecimento em diferentes áreas, como álgebra linear e processamento de imagens.

Figura 19 – Sala de aula da Escola Estadual Doutor José Foz



Fonte: Elaborada pelo autor.

Conforme ilustrado na Figura 19, a aula foi ministrada com o auxílio de um televisor, permitindo uma apresentação mais dinâmica do conteúdo. Além disso, os estudantes receberam material impresso com o plano de aula utilizado nessa etapa da atividade.

A aula teve início com a apresentação de uma situação cotidiana comum em sala de aula. Foi exibido no televisor um quadro contendo as notas bimestrais de algumas disciplinas de alunos

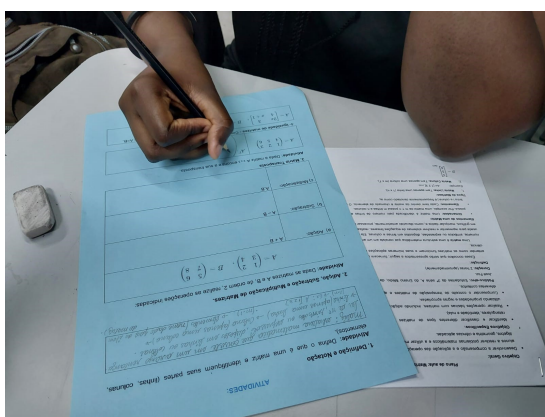
fictícios. Em seguida, fez-se a seguinte pergunta: “Já perceberam que muitas situações no nosso dia a dia, como tabelas, horários de jogos, classificação de times de futebol, e até as fotos que tiramos com o celular, podem ser organizadas em uma ‘tabela’ de números ou informações?” Isso está relacionado ao armazenamento de dados. Hoje, estaremos diante de uma poderosa ferramenta matemática, chamada de matrizes, cuja aplicabilidade se estende nas mais diversas áreas do conhecimento.

Os estudantes não conseguiram responder às questões iniciais, pois justificaram que nunca haviam estudado sobre matrizes. Foi, então, apresentado aos alunos o conceito de matriz, explicado como uma estrutura matemática composta por um arranjo retangular de números, símbolos ou expressões dispostos em linhas e colunas.

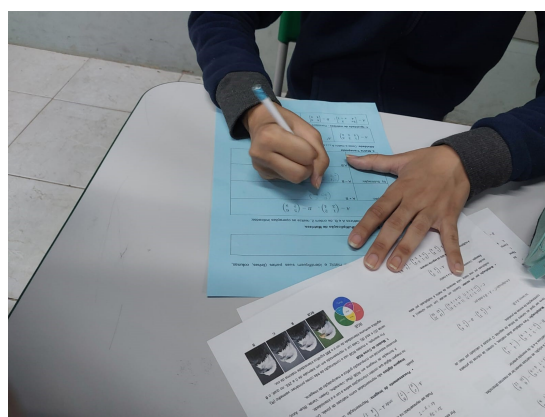
As matrizes são amplamente utilizadas para representar e resolver sistemas de equações lineares, realizar transformações gráficas, manipular dados e, como mencionado anteriormente, processar imagens. Seguiram-se as explicações sobre a representação dos elementos de uma matriz, sua disposição, e os diferentes tipos de matrizes: linha, coluna, quadrada, nula e identidade, além da igualdade entre matrizes, sempre acompanhadas de exemplos. Em seguida, foram abordadas as operações de adição, subtração, e a multiplicação de uma matriz por um número escalar, com suas respectivas propriedades. Por fim, a operação de multiplicação de matrizes foi definida, seguida de suas propriedades, enfatizando a não comutatividade desta operação.

Ao longo das aulas, os estudantes mostraram um grande interesse e envolvimento, realizando várias perguntas. Observou-se que a maior dificuldade de entendimento esteve relacionada à operação de multiplicação de matrizes, algo bastante comum quando se trata dessa teoria.

Figura 20 – Registro da realização das atividades propostas



(a) Aluno A



(b) Aluno B

Fonte: Elaborada pelo autor.

Após essa etapa de aula dialogada, os estudantes tiveram a oportunidade de aplicar o que aprenderam por meio de uma atividade proposta, cujo objetivo era resolver problemas relacionados às habilidades trabalhadas durante a aula. Durante a realização da atividade, os estudantes

Figura 21 – Registro da atividade realizada por um estudante da turma

ATIVIDADES:

1. Definição e Notação
Atividade: Defina o que é uma matriz e identifiquem suas partes (linhas, colunas, elementos).

Matriz é uma estrutura matemática que consiste em um arranjo retangular de números, símbolos ou expressões dispostos em linha e coluna.

2. Adição, Subtração e Multiplicação de Matrizes.
Atividade: Dada as matrizes A e B, de ordem 2, realize as operações indicadas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Adição: $A + B =$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$

b) Subtração: $A - B =$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

c) Multiplicação: $A \cdot B =$
 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 35 & 50 \end{pmatrix}$

3. Matriz Transposta
Atividade: Dada a matriz A 2×3 encontre a sua transposta.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Igualdade de matrizes - Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o valor de x para que $A=B$.

$$\begin{aligned} 2x &= 8 & x+1 &= 5 \\ x &= 4 & x &= 4 \end{aligned}$$

Fonte: Elaborada pelo autor.

tiveram a oportunidade de esclarecer suas dúvidas. Após finalizarem, as questões propostas foram corrigidas na lousa.

Continuamos os estudos sobre matrizes, explorando algumas de suas aplicações, como a resolução de sistemas lineares e o processamento de imagens, incluindo a representação de imagens como uma matriz de pixel. Quando questionados sobre a relação entre imagens e matrizes, alguns alunos responderam que já haviam ouvido falar em pixel, mas não sabiam que as imagens digitais do cotidiano podem ser representadas como matrizes de pixel. Nesse contexto, o pixel foi definido como um ponto na imagem digital que contém informações sobre sua cor e intensidade. Em seguida, foi feita uma breve explicação sobre a formação de imagens no modelo RGB (Red (Vermelho), Green (Verde), Blue (Azul)), destacando que esse processo é essencial em computação gráfica. Em resumo, o modelo RGB utiliza a combinação das três cores primárias: vermelho (R), verde (G) e azul (B), sendo que cada cor é representada em um intervalo de 0 a 255, onde 0 indica ausência de intensidade e 255 representa a intensidade máxima da cor.

A primeira etapa foi concluída com a apresentação do software Octave, onde foram demonstradas algumas de suas funcionalidades, o ambiente de programação, comandos básicos e a criação de matrizes aleatórias em cores e tonalidades de cinza. O objetivo foi despertar o

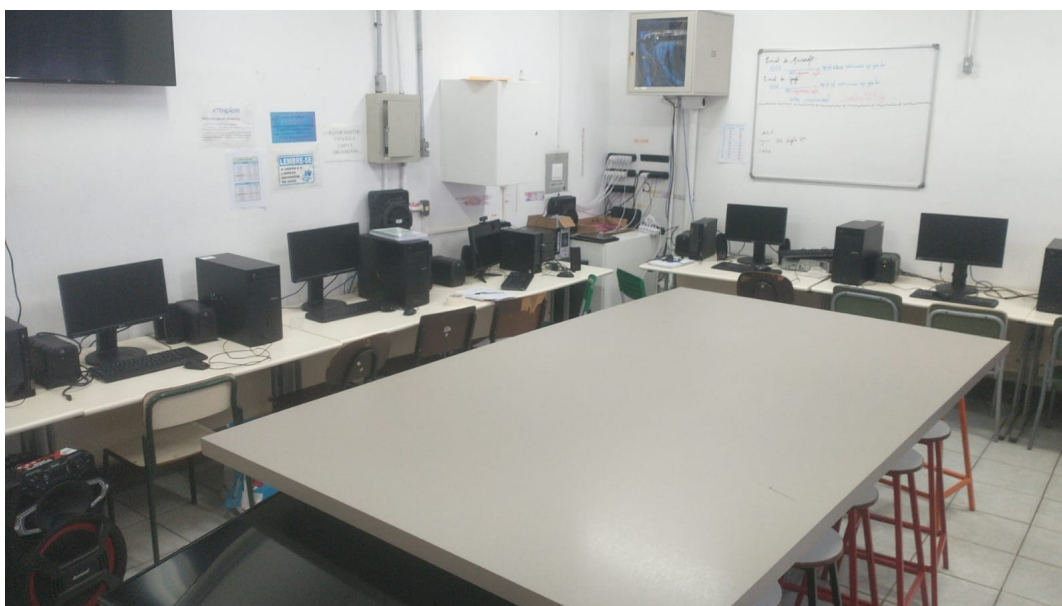
interesse dos estudantes para a segunda etapa desta sequência didática, caracterizada por uma abordagem computacional.

4.2 O ENSINO DE MATRIZES: UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL

O segundo momento da sequência didática começou com uma revisão das habilidades adquiridas na etapa anterior e a apresentação dos objetivos para esta nova fase. Entre os objetivos, destacam-se a introdução do Octave como ferramenta para manipulação numérica, a revisão da teoria das matrizes por meio da execução de comandos no Octave, o uso do software para carregar e manipular imagens como matrizes, e a realização de operações matriciais em imagens, como rotação e escala.

Os estudantes, então, se dirigiram à sala de informática para o primeiro contato com o software. Vale ressaltar que, previamente, o professor responsável pelo “*Projeto de Apoio à Tecnologia e Inovação*” - PROATEC, um programa do Governo do Estado de São Paulo voltado para o incentivo ao uso de tecnologias educacionais e práticas pedagógicas inovadoras, já havia instalado o software nos computadores. Nesta sala, contamos ainda com o auxílio de um televisor, que viabilizou a projeção para a explicação dos comandos que seriam utilizados.

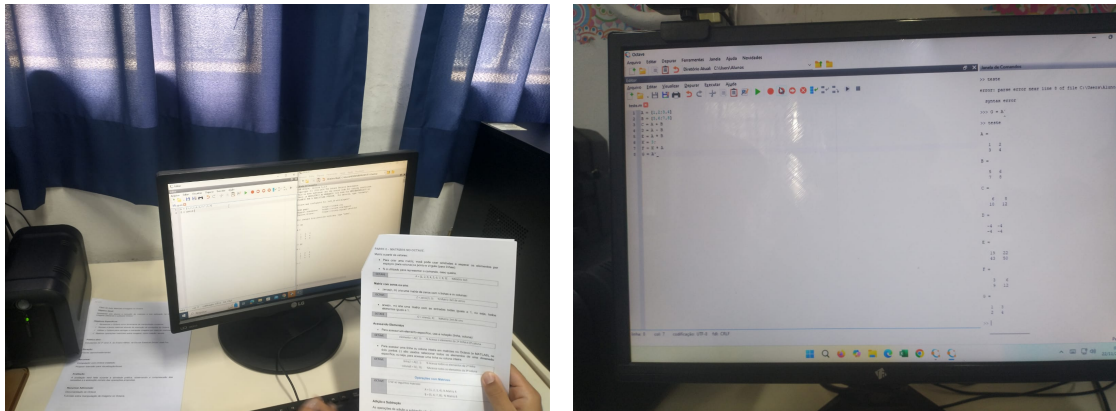
Figura 22 – Sala de informática da Escola Estadual “Doutor José Foz”



Fonte: Elaborada pelo autor.

Os estudantes receberam um material impresso com uma série de comandos para serem executados no Octave, com o intuito de familiarizá-los com o software. Nesse momento, tiveram a oportunidade de revisar a abordagem teórica da primeira etapa da sequência didática, utilizando o Octave para definir matrizes de diferentes ordens e tipos, como uma matriz nula de ordem 4×3 ; acessar elementos específicos de uma determinada matriz; e realizar operações como adição, subtração, multiplicação e multiplicação por escalar.

Figura 23 – Atividade realizada por um estudante da turma

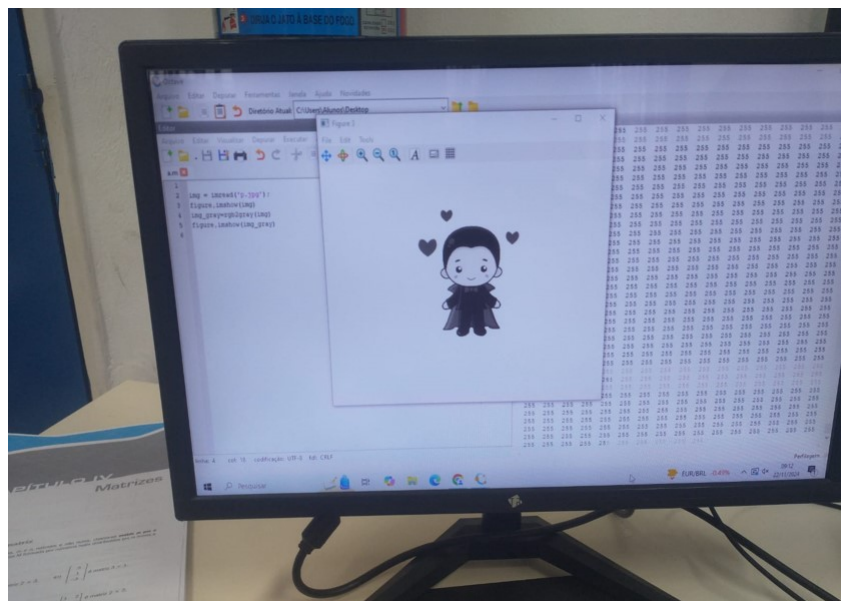


(a) Roteiro da atividade proposta

(b) Atividade sendo executada no Octave

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 24 – Atividade realizada por um estudante da turma



Fonte: Elaborada pelo autor.

Após o primeiro contato com o Octave, no qual os alunos exploraram a teoria de matrizes sob uma perspectiva computacional, foram introduzidos a novos comandos do software, essenciais para a manipulação de imagens, como os comandos `imread` e `imshow`. O principal objetivo desse momento foi demonstrar aos alunos a aplicabilidade da teoria de matrizes no processamento de imagens, permitindo-lhes explorar a matriz de pixels que sustenta cada uma delas. Foi gratificante vê-los descobrindo conceitos matemáticos aplicados no cotidiano, os quais não imaginavam existir.

Na segunda etapa da sequência didática, foram explorados diferentes comandos com base no sistema RGB de cores. Os estudantes criaram matrizes para representar imagens coloridas

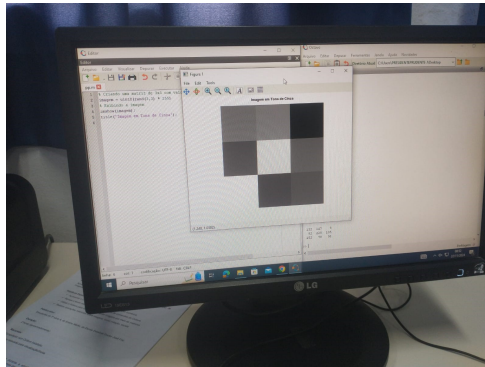
e aprenderam a converter imagens para tons de cinza. Com o objetivo de apresentar uma das matrizes que representa uma transformação linear e desempenha um papel fundamental no processamento de imagens, foi definida também a matriz de rotação, cuja funcionalidade foi demonstrada por meio da aplicação de diferentes ângulos de rotação.

Foi evidente o envolvimento e o engajamento dos estudantes, muitos dos quais não possuíam experiência prévia com linguagens de programação. Eles ficaram impressionados com a rapidez e eficácia do computador ao receber comandos e executar cálculos matemáticos, especificamente matriciais, em frações de segundo. As atividades realizadas possibilitaram aos estudantes uma compreensão prática dos conceitos de matrizes, por meio do uso de ferramentas tecnológicas como o Octave. Observou-se um grande engajamento e facilidade na visualização das aplicações reais do conteúdo matemático.

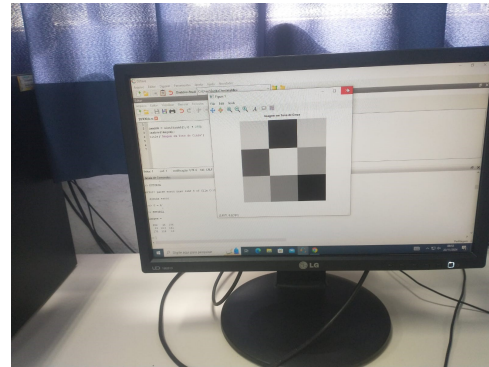
Embora o resultado tenha sido amplamente positivo, alguns desafios surgiram, como a dificuldade inicial dos estudantes em manusear o software Octave. Contudo, o uso das orientações fornecidas foi eficaz para superar essas dificuldades. O feedback dos estudantes indicou que a abordagem prática proporcionou uma compreensão mais clara das matrizes sob a perspectiva computacional. Muitos relataram que a conexão do conteúdo ao processamento de imagens tornou o aprendizado mais interessante e relevante.

De modo geral, as atividades alcançaram seus objetivos, evidenciando que o uso de tecnologias no ensino de matemática pode tornar o aprendizado mais dinâmico e significativo, ressaltando a importância de inovar nas estratégias pedagógicas ao integrar teoria e prática. A Figura 25 a seguir ilustra a execução de uma sequência de atividades, proposta no plano de aula anexado no Anexo A.

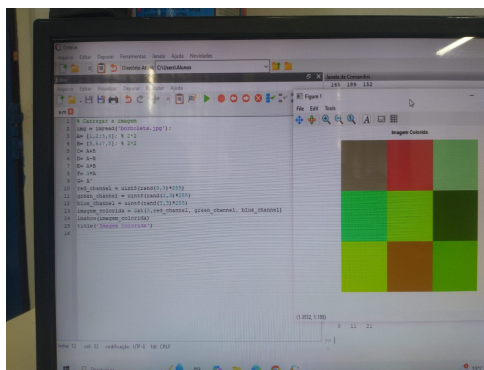
Figura 25 – Registro da realização das atividades dos alunos



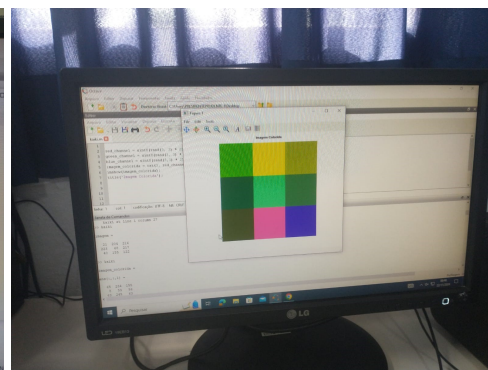
(a)



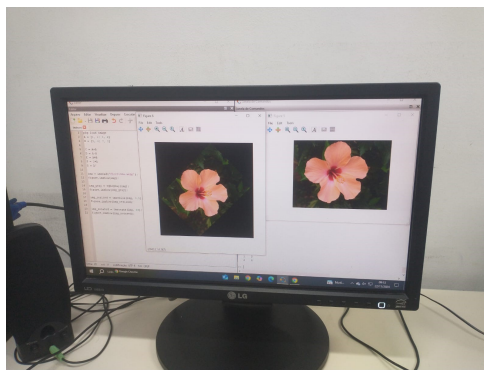
(b)



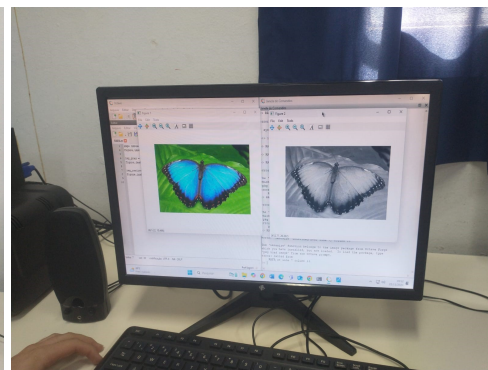
(c)



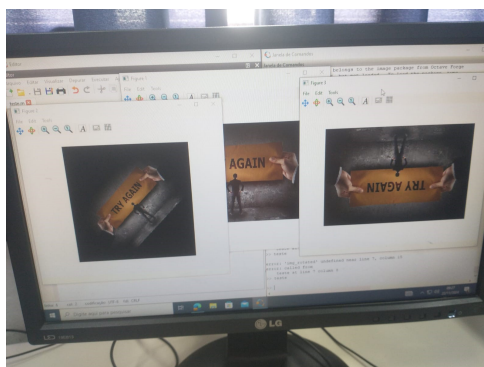
(d)



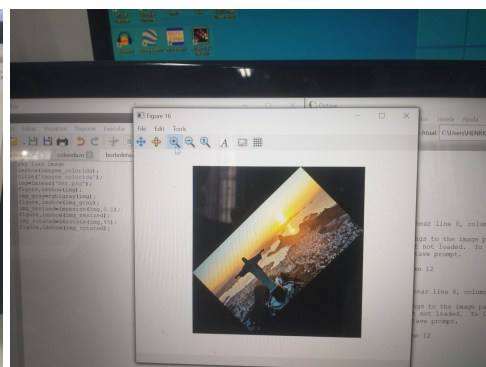
(e)



(f)



(g)



(h)

Fonte: Elaborada pelo autor.

5 Conclusão

Este trabalho foi dedicado ao estudo das matrizes sob uma perspectiva computacional, abordando um tema presente no Currículo de Matemática do Ensino Médio. Vale ressaltar que o estudo das matrizes, quando relacionado ao processamento de imagens digitais, possui diversas aplicações em diferentes áreas do conhecimento, tais como economia, engenharia, física e computação.

O objetivo central deste estudo foi investigar como uma sequência didática, que aborda o estudo, por meio da análise das matrizes de pixels em imagens do cotidiano dos alunos, pode contribuir para a aprendizagem desse conteúdo.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi aplicada uma sequência didática sobre Matrizes aos estudantes da 3ª série do Ensino Médio da Escola Estadual "Doutor José Foz", com o objetivo de ensinar o conteúdo e demonstrar sua aplicação prática em imagens digitais. A análise dos resultados obtidos na execução das atividades da sequência didática demonstrou que o Octave se apresenta como uma excelente alternativa ao MATLAB, especialmente para estudantes e profissionais que buscam uma solução gratuita e de código aberto para computação matemática.

Do ponto de vista pedagógico, as atividades realizadas mostraram-se eficazes no desenvolvimento do pensamento crítico e na aplicação prática de conceitos matemáticos no contexto do processamento de imagens. Espera-se que este trabalho sirva como um recurso de apoio para o estudo de matrizes aplicadas ao processamento de imagens digitais, bem como para o uso de plataformas como o Octave, beneficiando professores, alunos e demais interessados no tema.

Nesta dissertação, a aplicação de atividades envolvendo matrizes e imagens no Octave revelou-se como uma abordagem eficaz e acessível para o ensino de álgebra linear e processamento de imagens. Estudos futuros poderão ampliar essa abordagem para outros conteúdos da Matemática, tais como, teoria de grafos, transformadas de Fourier, equações diferenciais, e métodos numéricos. Concluímos, portanto, que os objetivos de cada etapa deste trabalho foram atingidos e que os alunos conseguiram compreender a aplicação das matrizes no processamento de imagens. Essa conclusão resume os resultados obtidos e as contribuições do estudo, além de indicar possíveis caminhos para pesquisas futuras.

Referências

- ANTON, H. **Álgebra Linear**. 7ª ed.. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2001.
- ANTON, H. **Álgebra Linear**. 11. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013.
- Brasil. **Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em: <https://www.gov.br/mec/pt-br>. Acesso em: 11 fev. 2025.
- BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, 2002.
- Brasil Escola. **Imagem de uma borboleta**. 2025. Acessado em: 09 fev. 2025. Disponível em: [https://s1.static.brasilecola.uol.com.br/be/e/borboleta\(1\).jpg](https://s1.static.brasilecola.uol.com.br/be/e/borboleta(1).jpg).
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2017. <http://www.bncc.mec.gov.br/>. Acesso em: 9 fev. 2025.
- BROUSSEAU, G. **Theory of Didactical Situations in Mathematics**. Dordrecht: Springer, 2002. Edição traduzida.
- CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 6ª ed. reform.. ed. São Paulo: Atual, 1990.
- CAYLEY, A. A memoir on the theory of matrices. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, Royal Society of London, London, v. 148, p. 17–37, 1858.
- FERR, L. **Citações Filosóficas: Transformando Conversação em Arte**. [S.l.]: Ahzuria Publishing, 2024.
- GONZALEZ, R. C.; WOODS, R. E. **Processamento Digital de Imagens**. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 644 p. ISBN 978-85-8143-586-2.
- IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Álgebra Linear**. 1ª ed.. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 1977.
- LUDVIG, Z. P. S. I. R. **Informática: Uma ferramenta para educação matemática**. São Paulo, 2016. Disponível em: https://www2.faccat.br/portal/sites/default/files/INFORMATICA_UMA%20FERRAMENTA%20PARA.pdf. Acesso em: 12 fev. 2025.
- MORAIS, C.; PALHARES, P. Tecnologias no desenvolvimento de perspectivas para o estudo da matemática. In: **Elementary Mathematics Education. 2nd International Meeting Proceedings**. Viana do Castelo: Escola Superior de Educação, 2006. ISBN 978-972-99970-5-1.
- OPEN, A. **ChatGPT (Mar 14 version)[Large language model]**. 2023.
- SIQUEIRA, A. F. de. **Octave: Seus primeiros passos na programação científica**. São Paulo: Casa do Código, 2018. Disponível em formato PDF.
- SYLVESTER, J. J. On the theory of matrices. **Philosophical Magazine**, v. 1, p. 366–370, 1852.

ANEXO A – Plano de Aula - Sequência Didática

PARTE 1 - O ensino de matrizes: abordagem conceitual

Objetivo Geral:

- ✓ Desenvolver a compreensão e a aplicação das operações com matrizes, capacitando os alunos a resolver problemas matemáticos e a utilizar matrizes em diversas áreas, como álgebra, geometria e ciências aplicadas.

Objetivos Específicos:

- ✓ Identificar e classificar diferentes tipos de matrizes (como matrizes quadradas, retangulares, identidade e nula).
- ✓ Realizar operações básicas com matrizes, incluindo adição, subtração e multiplicação, utilizando propriedades e regras apropriadas.
- ✓ Compreender o conceito de transposição de matrizes e aplicar essa operação em diferentes contextos.

Público-alvo: Estudantes da 3ª série A, do Ensino Médio, da Escola Estadual Doutor José Foz.

Duração: 2 horas (aproximadamente)

Desenvolvimento da aula:

Os conceitos que serão apresentados a seguir, fornecem uma base sólida para entender como as matrizes funcionam e suas inúmeras aplicações na matemática e na ciência.

Definição 1. Uma **matriz** é uma estrutura matemática que consiste em um arranjo retangular de números, símbolos ou expressões, dispostos em linhas e colunas. Ela é frequentemente usada para representar e resolver sistemas de equações lineares, realizar transformações em gráficos, manipular dados e, como discutido anteriormente, processar imagens.

Elementos de uma Matriz:

- **Dimensões:** Uma matriz é identificada pelo número de linhas e colunas que possui. Por exemplo, uma matriz de $m \times n$ possui m linhas e n colunas.
- **Elementos:** Cada item dentro da matriz é chamado de elemento. O elemento na linha i e coluna j é frequentemente denotado como a_{ij} .

Tipos de Matrizes

1. **Matriz Linha:** Tem apenas uma linha (1 x n).

Exemplo: $A = [1 \ 2 \ 3]_{(1 \times 3)}$

2. **Matriz Coluna:** Tem apenas uma coluna (m x 1).

$$B = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}_{(3 \times 1)}$$

3. **Matriz Quadrada:** Tem o mesmo número de linhas e colunas (n x n).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}$$

4. **Matriz Nula:** Todos os elementos são zero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

5. **Matriz Identidade:** Uma matriz quadrada onde todos os elementos da diagonal principal são 1, e os demais elementos são 0.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$$

Igualdade de Matrizes

A igualdade de matrizes ocorre quando duas matrizes têm as mesmas dimensões e todos os seus elementos correspondentes são iguais. Aqui estão alguns pontos importantes sobre a igualdade de matrizes:

- **Mesma Dimensão:** Duas matrizes A e B devem ter o mesmo número de linhas e colunas. Por exemplo, uma matriz 2×3 não pode ser igual a uma matriz 3×2.

- **Elementos Correspondentes Iguais:** Para que $A=B = B=A$, cada elemento da matriz A deve ser igual ao elemento correspondente da matriz B. Em termos matemáticos, se:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Então $A=B$ se e somente se: $a_{ij} = b_{ij}$ para todos i, j .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo: Se temos as matrizes: então $A = B$.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Porém, se temos: , então $A \neq C$, pois $4 \neq 5$.

Operações com Matrizes

- **Adição:** Matrizes podem ser somadas se tiverem as mesmas dimensões. A soma é feita elemento a elemento.

Exemplo: Dadas duas matrizes A e B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A soma $C = A + B$ é:

$$C = \begin{pmatrix} 1+5 & 2+6 \\ 3+7 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

- **Subtração:** Semelhante à adição, as matrizes devem ter as mesmas dimensões.

Usando as mesmas matrizes A e B, do exemplo anterior:

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \\ 3-7 & 4-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

- **Multiplicação:** Para multiplicar duas matrizes, o número de colunas da primeira deve ser igual ao número de linhas da segunda. O produto é calculado por meio de combinações de somas de produtos.

Se temos A e B :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

A multiplicação $C = A \times B$ é dada por:

$$C = \begin{pmatrix} (1 \cdot 5 + 2 \cdot 7) & (1 \cdot 6 + 2 \cdot 8) \\ (3 \cdot 5 + 4 \cdot 7) & (3 \cdot 6 + 4 \cdot 8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Multiplicação por um escalar:** Quando um escalar (um único número) é multiplicado por uma matriz, cada elemento da matriz é multiplicado por esse escalar.

Exemplo: Considere o escalar $c=3$ e a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A multiplicação de c por A é feita da seguinte maneira:

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

- **Transposição:** A matriz transposta é obtida trocando suas linhas por colunas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A matriz transposta A^T é:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicações:

- **Sistemas de Equações:** Resolução de sistemas lineares usando matrizes.

As matrizes são frequentemente usadas para resolver sistemas de equações lineares. Por exemplo, o sistema:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 8 \\ 4x + y &= 7 \end{aligned}$$

Pode ser representado na forma de matriz:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

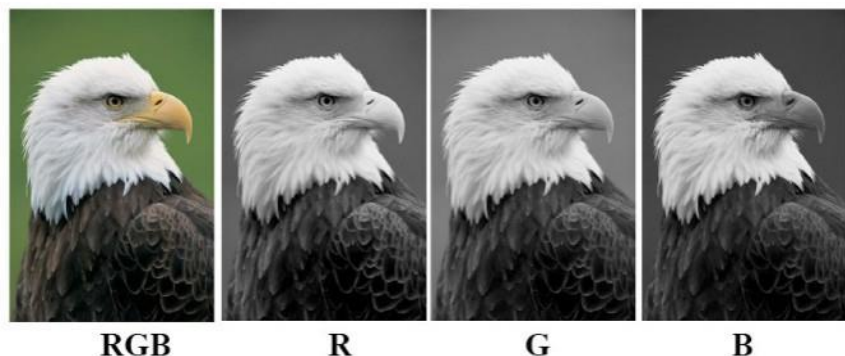
- **Processamento de Imagens:** Representação de imagens como matrizes de pixels.

Imagens digitais são representadas como matrizes de pixels. Um pixel é um ponto na imagem digital que contém informações sobre a cor e a intensidade.

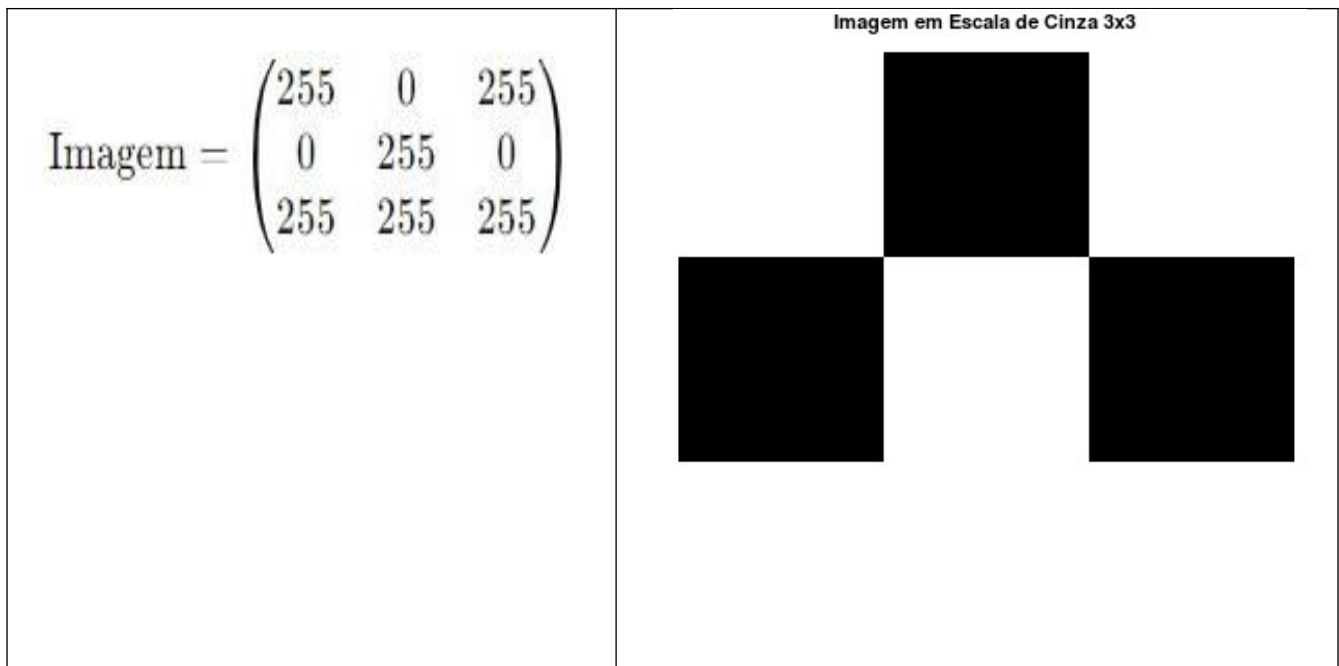
A formação de imagens em RGB (Red -Vermelho, Green- Verde, Blue- Azul) é um processo essencial em computação gráfica e manipulação de imagens.

1. Modelo de Cores RGB

Por exemplo, o modelo RGB usa a combinação de três cores primárias: vermelho (R), verde (G) e azul (B). Cada cor é representada em um intervalo de 0 a 255, no qual, o **0** significa nenhuma intensidade da cor e o **255** significa intensidade máxima da cor.

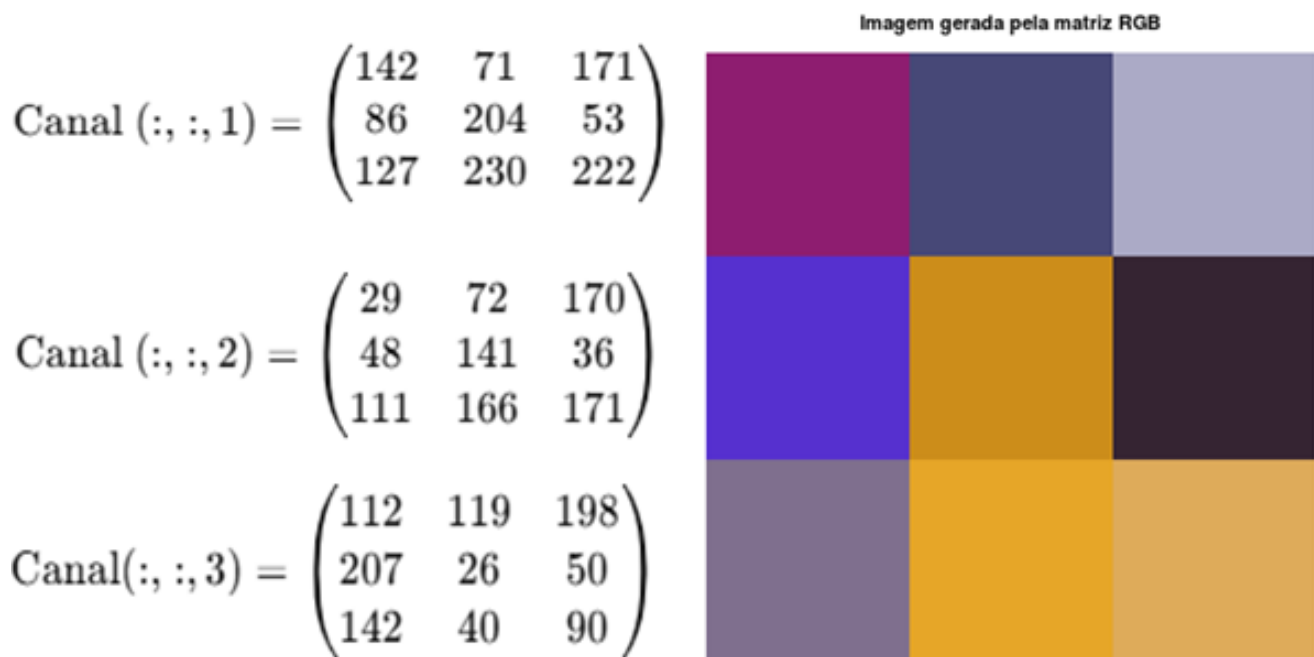


Para uma imagem em escala de cinza, cada pixel é um valor de intensidade que pode variar de 0 (preto) a 255 (branco). Por exemplo, uma matriz 3x3 pode ser representada como uma imagem:



Em imagens coloridas, cada pixel é composto por múltiplos valores que representam as intensidades dos canais de cor (geralmente vermelho, verde e azul - RGB).

Imagens Coloridas (RGB): Cada pixel é representado por três valores (R, G, B).



Transformações de Cores

As imagens em cores podem ser representadas usando três matrizes, uma para cada canal de cor (vermelho, verde e azul). A combinação dessas matrizes resulta na imagem

colorida. Cada canal pode ser manipulado individualmente para alterar a coloração da imagem.

Rotação de Imagens

A rotação de uma imagem é realizada através de uma matriz de transformação que altera a posição dos pixels de acordo com um ângulo específico. A matriz de rotação para um ângulo θ é:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Tamanho Original	Rotação de 45°
	
Rotação de 90°	Rotação 180°
	

ATIVIDADES PROPOSTAS:

1. Definição e Notação

Atividade: Defina o que é uma matriz e identifiquem suas partes (linhas, colunas, elementos).

2. Adição, Subtração e Multiplicação de Matrizes

Atividade: Dada as matrizes A e B, de ordem 2, realize as operações indicadas:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$	
a) Adição:	A + B
b) Subtração:	A – B
c) Multiplicação:	A.B

3. Matriz Transposta

Atividade: Dada a matriz A $_{2 \times 3}$ encontre a sua transposta.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	A^T
--	-------

4. Igualdade de matrizes

Atividade: Considere as matrizes:

$A = \begin{bmatrix} 2x & 3 \\ 4 & x+1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$	Determine o valor de x para que A=B.
---	--------------------------------------

PARTE 2 - O ensino de matrizes: abordagem computacional

Objetivo Geral:

- ✓ Apresentar aos alunos o conceito de matrizes e sua aplicação na manipulação de imagens utilizando o software Octave.

Objetivos Específicos:

- ✓ Apresentar o Octave como ferramenta de manipulação numérica.
- ✓ Revisar a teoria matricial através da execução de comandos do Octave.
- ✓ Utilizar o Octave para carregar e manipular imagens por meio de matrizes.
- ✓ Realizar operações matriciais sobre imagens, como rotação, escala

Público-alvo:

Estudantes da 3ª série A, do Ensino Médio, da Escola Estadual Doutor José Foz.

Duração:

2 horas (aproximadamente)

Recursos:

Computador com Octave instalado.

Projetor/ televisão para visualização/lousa.

Avaliação:

A avaliação será feita durante a atividade prática, observando a compreensão dos conceitos e a execução correta das operações propostas.

Recursos Adicionais:

Documentação do Octave

Tutoriais sobre manipulação de imagens no Octave.

Desenvolvimento da aula:

Matrizes no GNU Octave

- Para criar uma matriz, você pode usar colchetes e separar os elementos por espaços (para colunas) e ponto e vírgula (para linhas).
- % é utilizado para comentar no script, caso queira. Comentários são importantes para a documentação de códigos em qualquer linguagem computacional.

OCTAVE	<code>A = [1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9] %Matriz 3x3</code>
---------------	---

Matrizes especiais

Por exemplo, matriz nula ou matrizes cujas entradas são todas iguais a 1.

- `zeros(n, m)` cria uma matriz de zeros com n linhas e m colunas:

OCTAVE	<code>Z = zeros(3, 3) % Matriz 3x3 de zeros</code>
---------------	---

- `ones(n, m)` cria uma matriz com as entradas todas iguais a 1, ou seja, todos elementos iguais a 1.

OCTAVE	<code>O = ones(2, 4) %Matriz 2x4 de uns</code>
---------------	---

Acesso aos elementos de uma matriz

- Para acessar um elemento específico, use a notação (linha, coluna):

OCTAVE	<code>elemento = A(2, 3) % Acessa o elemento da 2ª linha e 3ª coluna</code>
---------------	--

- Para acessar uma linha ou coluna inteira em matrizes no Octave (e MATLAB), os dois pontos (:) são usados selecionar todos os elementos de uma dimensão específica, ou seja, para acessar uma linha ou coluna inteira:

OCTAVE	<code>linha2 = A(2, :) % Acessa todos os elementos da 2ª linha</code> <code>coluna3 = A(:, 3) %Acessa todos os elementos da 3ª coluna</code>
---------------	---

Operações com Matrizes

OCTAVE	<code>Criar as seguintes matrizes:</code> <code>A = [1, 2; 3, 4] % Matriz A</code> <code>B = [5, 6; 7, 8] % Matriz B</code>
---------------	---

Adição e Subtração

As operações de adição e subtração são diretas:

OCTAVE	<code>C = A + B % Adição</code> <code>D = A - B % Subtração</code>
---------------	---

Multiplicação

- Entre as matrizes A e B é feita usando o operador *:

OCTAVE	<code>E = A * B %Multiplicação de matrizes</code>
---------------	--

- Entre uma matriz e um escalar, usamos o operador .:

OCTAVE	<code>%Multiplicação de matriz por um escalar</code> <code>k = 3; % Definir um escalar</code> <code>F = k * A % Multiplicar o escalar pela matriz</code>
---------------	--

Transposição

- A transposição de uma matriz é feita com o apóstrofo ':

OCTAVE	<code>G = A' % Transposição de A</code>
---------------	--

Processamento de imagens como uma aplicação da teoria de matrizes:

- **Definição de imagem em tons de cinza através de matrizes:**

```
% Criando uma matriz de 3x3 com valores entre 0 e 255 (escala de cinza)

imagem = uint8(rand(3,3) * 255)

% Exibindo a imagem

imshow(imagem);

title('Imagem em Tons de Cinza');
```

Observações:

- ✓ Não digite ponto e vírgula no final do comando, dessa maneira você visualizará a matriz que gerará a imagem.
- ✓ `rand(3, 3)` gera uma matriz de 3x3 com valores aleatórios entre 0 e 1.
- ✓ Multiplicamos por 255 para transformar os valores em uma escala de 0 a 255, que é típica para imagens em tons de cinza.
- ✓ `uint8` é usado para garantir que os valores sejam do tipo inteiro de 8 bits, o que é necessário para representar corretamente uma imagem.
- ✓ `imshow(imagem)` exibe a imagem gerada.

- **Definição de imagem colorida através de matrizes:**

```
% Criando uma matriz de 3x3 para cada canal de cor

red_channel = uint8(rand(3, 3) * 255);
green_channel = uint8(rand(3, 3) * 255);
blue_channel = uint8(rand(3,3) * 255);

% Combinando os canais de cor em uma matriz 3D

imagem_colorida = cat(3, red_channel, green_channel, blue_channel)

% Exibindo a imagem colorida

imshow(imagem_colorida);

title('Imagem Colorida');
```

Observações:

- ✓ `cat(3, ...)` combina os canais de cor (vermelho, verde e azul) em uma matriz 3D.
- ✓ Cada camada (canal) tem uma matriz 2D de tamanho 256x256 com valores aleatórios entre 0 e 255.

No Octave, você pode realizar diferentes processamento de imagens por meio de matrizes. Vamos explorar algumas funções do Octave no processamento de imagens:

1. Funções para leitura e exibição de imagem

Para ler e exibir uma imagem, você pode usar as funções 'imread' e 'imshow':

OCTAVE	<pre>img = imread('caminho/para/imagem.jpg'); figure,imshow(img);</pre>
---------------	---

2. Função para conversão da imagem em tons de cinza

Você pode converter uma imagem colorida para escala de cinza :

OCTAVE	<pre>img_gray = rgb2gray(img); figure,imshow(img_gray);</pre>
---------------	---

3. Obter as dimensões da imagem

Você pode obter as dimensões de uma imagem usando a função 'size':

OCTAVE	<pre>[altura, largura, canais] = size(img) figure,imshow(img)</pre>
---------------	---

4. Salvar uma Imagem

Após realizar modificações, você pode salvar a imagem usando 'imwrite':

OCTAVE	<pre>imwrite(uint8(img_filtered), 'caminho/para/nova_imagem.jpg');</pre>
---------------	--

5. Redimensionar uma imagem

É possível redimensionar a imagem usando a função 'imresize':

OCTAVE	<pre>img_resized = imresize (img, 0.5); % Reduz a imagem pela metade figure,imshow(img_resized);</pre>
---------------	--

6. Rotação de imagem

Você pode aplicar transformações como rotação ou transposição:

OCTAVE	<pre>img_rotated = imrotate(img, 45); % Rotaciona a imagem em 45 graus figure,imshow(img_rotated); img_rotated = imrotate(img, 180); % Rotaciona a imagem em 180 graus figure,imshow(img_rotated);</pre>
---------------	---

7. Formação das cores - RGB

OCTAVE	<pre>% Carregar a imagem img_cor = imread('borboleta.jpg'); % Leitura da imagem (substitua com o nome correto da sua imagem) % Exibir a imagem original figure, imshow(img_cor); title('Imagem Original');</pre>
---------------	--

	<pre>% Extrair as bandas de cor (R, G e B) R = img_cor(:, :, 1); % Banda vermelha G = img_cor(:, :, 2); % Banda verde B = img_cor(:, :, 3); % Banda azul % Exibir cada uma das bandas separadamente figure, imshow(R); title('Banda R'); figure, imshow(G); title('Banda G'); figure, imshow(B); title('Banda B'); % Reconstruir a imagem a partir das bandas de cor img2 = cat(3, R, G, B); % 'cat' concatena as bandas R, G, B para formar a imagem colorida % Exibir a imagem reconstruída figure, imshow(img2); title('Imagem Reconstruída');</pre>
--	---

ATIVIDADE PROPOSTA:

Agora é com você!

Utilize o site de pesquisa “*Google Search*” para escolher uma imagem colorida e explore todos as funções do GNU Octave trabalhadas nesta aula para realizar processamento de imagens no seu objeto de estudo. Por exemplo, você deverá a princípio ler a sua imagem no Octave, e a partir daí, utilizar as funções estudadas para executar o processamento da mesma. Lembre-se! Por trás da sua imagem, existe uma matriz. Nesse momento, você é capaz de descobri-la por meio do recurso computacional que exploramos durante a aula.

Vamos lá, use a sua criatividade!!!