

UNESP
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá

Guaratinguetá
2001



1110000477



***"Análises Teórica e Experimental de
Frequências Naturais e Modos de
Vibração de Placas com
Comportamentos Geometricamente
Linear e Não-Linear"***

AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

162



**CARO LEITOR NÃO
RISQUE O LIVRO**

**ANÁLISES TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE FREQUÊNCIAS
NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DE PLACAS COM
COMPORTAMENTOS GEOMETRICAMENTE LINEAR E NÃO-LINEAR**

AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

**FACULDADE DE ENGENHARIA
DE GUARATINGUETÁ**

BIBLIOTECA

Tese apresentada à Faculdade de
Engenharia de Guaratinguetá da
Universidade Estadual Paulista, para
a obtenção do título de Doutor em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Araildo Lima Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide

**Guaratinguetá
2001**

477



Miyazima, Américo Tetuo
M685a Análises teórica e experimental de freqüências naturais e modos de vibração de placas com comportamentos geometricamente linear e não-linear / Américo Tetuo Miyazima. Guaratinguetá : [s.n.], 2001 145f. : il.

Bibliografia: f.141-145

Inclui anexo

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2001.

Orientador: Prof. Dr. Araildo Lima da Silva

Co-orientador: Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide

1- Elementos finitos 2 - Vibrações I. Título

CDU 519.6

**“ANÁLISES TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE FREQUÊNCIAS NATURAIS E
MODOS DE VIBRAÇÕES DE PLACAS COM COMPORTAMENTOS
GEOMETRICAMENTE LINEAR E NÃO-LINEAR”**

AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
“DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA”**

**ESPECIALIDADE: ENGENHARIA MECÂNICA
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: PROJETOS E MATERIAIS**

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. Dr. José Luz Silveira
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. ARAILDO LIMA DA SILVA
Orientador / Unesp-Feg



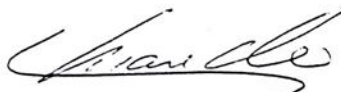
Prof. Dr. TAMOTSU HIRATA
Unesp-Feg



Prof. Dr. JOSÉ ELIAS TOMAZINI
Unesp-Feg



Prof. Dr. MÁRCIO TADEU DE ALMEIDA
EFEI



Prof. Dr. ANDRÉ GARCIA CHIARELLO
EFEI

Dezembro de 2001

DADOS CURRICULARES
AMÉRICO TETUO MIYAZIMA

NASCIMENTO	15/12/1954 – RINÓPOLIS - SP
FILIAÇÃO	José Miyazima Hisako Mori Miyazima
1977/1982	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia Civil de Itajubá. FEPI
1985	Curso de Especialização em "Estruturas", na Escola Politécnica de São Paulo - Campus de São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos. EESC.
1984/1989	Curso de Pós-Graduação em Mecânica, nível de Mestrado, na Escola Federal de Engenharia de Itajubá. EFEI.
1997/2001	Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, nível de Doutorado na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá. FEG - UNESP

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus, fonte da vida e da graça. Agradeço pela minha vida, minha família, meus amigos e colegas,

aos meus orientadores, *Prof. Dr. Araildo Lima da Silva e Prof. Dr. Paulo Shigueme Ide*, que jamais deixaram de me incentivar. Sem as orientações, dedicações e auxílios, o estudo aqui apresentado seria praticamente impossível.

aos meus pais *José e Hisako*, que apesar das dificuldades enfrentadas, sempre incentivaram meus estudos.

ao funcionário João Carlos Fernandes, nas realizações de ensaios no laboratório de *vibrações e acústica* da EFEI,

às funcionárias da Biblioteca do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, presteza e principalmente pela vontade de ajudar,

às secretárias da pós-graduação Regina e Elisa pela dedicação e alegria no atendimento.



SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

Resumo

Abstract

1 INTRODUÇÃO.....	26
1.1 Relatos sobre o método de elementos finitos	26
1.2 Importância da análise de vibrações numa estrutura	27
1.3 Trabalhos anteriores	28
1.4 Problemas de placas geometricamente linear e não-linear	31
1.5 Objetivo do trabalho	32
2 FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO.....	33
2.1 Introdução.....	33
2.2 Movimento no plano.....	34
2.2.1 Equilíbrio de forças na direção x	34
2.2.2 Equilíbrio de forças na direção y	34
2.2.3 Equações constitutivas.....	35
2.2.4 Relações de deformações-deslocamentos	35
2.2.5 Condições de contorno	36
2.3 Equilíbrio de forças na direção transversal à placa (eixo z).....	38
2.3.1 Equilíbrio de momentos em torno do eixo x.....	41
2.3.2 Equilíbrio de momentos em torno do eixo y	42
2.3.3 Condições de contorno	43
2.3.4 Condições iniciais.....	45

3 DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	46
3.1 Introdução.....	46
3.2 Movimento no plano.....	46
3.2.1 Método de Galerkin (método dos resíduos ponderados).....	46
3.2.2 Método dos elementos finitos	47
3.2.3 Formulação matricial	51
3.3 Movimento transversal	54
3.3.1 Método de Galerkin (método dos resíduos ponderados).....	54
3.3.2 Método dos elementos finitos	55
3.3.3 Formulação matricial	56
3.3.4 Matriz de rigidez secante	57
3.3.5 Matriz de rigidez tangente	58

4 CÁLCULOS TEÓRICOS COMPUTACIONAIS E ENSAIOS

EXPERIMENTAIS	63
4.1 Cálculos teóricos das placas em balanço geometricamente linear	63
4.1.1 Programa MEFLINEAR.EXE	64
4.1.2 Programa JACOBI.EXE	65
4.1.3 Programa MATLAB.....	65
4.2 Cálculos teóricos das placas em balanço geometricamente não-linear	66
4.2.1 Programa MEFNLIN.EXE	67
4.2.2 Programa JACOBI.EXE	69
4.2.3 Programa MATLAB.....	69
4.3 Ensaios experimentais da placa em balanço geometricamente linear	70
4.4 Ensaios experimentais da placa em balanço geometricamente não-linear	71

5 RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS DE PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE LINEAR.....

73

6. MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE LINEAR.....	75
7 RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS DE PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR.....	81
7.1 Carregamento no meio da placa em balanço geometricamente não-linear.....	81
7.1 Carregamento na extrem. da placa em balanço geometricamente não-linear....	87
8. MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR	94
8.1 Carga do dispos. atuando no meio da placa de $F=28N$	94
8.2 Carga do dispos. mais a força aplicada no meio da placa de $F=1000N$	99
8.3 Carga do dispos. mais a força aplicada no meio da placa de $F=2000N$	103
8.4 Carga do dispos. mais a força aplicada no meio da placa de $F=3000N$	107
8.5 Carga do dispos. mais a força aplicada no meio da placa de $F=3500N$	111
8.6 Carga do dispos. aplicada na extremidade da placa de $F=28N$	115
8.7 Carga do dispos. mais a força aplicada na extremidade da placa de $F=800N$	119
8.8 Carga do dispos. mais a força aplicada na extremidade da placa de $F=1000N$	123
8.9 Carga do dispos. mais a força aplicada na extremidade da placa de $F=1400N$	127
9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	131
9.1 Conclusões.....	132
9.2 Sugestões para trabalhos futuros.....	133
ANEXO A – SIMPLIFICAÇÃO PROPOSTA.....	134
A.1 Introdução.....	134
A.2 Elemento utilizado	134
A.3 Simplificação proposta	135



ANEXO B – APARELHOS UTILIZADOS NOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS NA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DAS PLACAS GEOMETRICAMENTE LINEAR E NÃO-LINEAR	138
B.1 Acelerômetro da Brüel & Kjaer	138
B.2 Analisador de sinais SR780, aparelho similar ao da Brüel & Kjaer	138
B.3 Martelo de impacto da Brüel & Kjaer tipo 8202	138
B.4 Gerador de função gf-03 da LABO	139
B.5 Amplificador da Brüel & Kjaer tipo 2712	139
B.6 Célula de carga da LOCKHEED ELECTRONICS COMPANY, modelo 3000 para capacidade de 2000 lb	139
B.7 Ponte extensiométrica da MENSUREMENTS GROUP, modelo P3500, para registrar a força que atua na célula de carga	140
B.8 Alojamento da célula de carga com detalhe de parafuso e porca.	140
B.9 Excitador da Brüel & Kjaer tipo 4808	140
BIBLIOGRAFIA	141
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA	142



LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1 –	Ponte Tacoma Narrows sofrendo oscilação torcional devido à ação do vento	27
FIGURA 1.2 –	O movimento torcional violento persistiu por volta de 45 minutos até ao colapso da ponte Tacoma Narrows	27
FIGURA 1.3 –	Placa em balanço geometricamente linear e não-linear	31
FIGURA 2.1 –	Equilíbrio dinâmico de um elemento de chapa	34
FIGURA 2.2 –	Domínio da chapa	37
FIGURA 2.3 –	Forças cortantes por unidade de comprimento	37
FIGURA 2.4 –	Momentos fletores e de torção por unidade de comprimento	37
FIGURA 2.5 –	Corte transversal à placa	38
FIGURA 2.6 –	Domínio da placa	43
FIGURA 3.1 –	Definição de rigidez tangente	59
FIGURA 4.1 –	Especificação dos nós e elementos da malha 7 x 7.	64
FIGURA 4.2 –	Modo 6 de vibração da placa em balanço geometricamente linear	65
FIGURA 4.3 –	Especificação dos nós da malha 6 x 6 e posição das forças atuantes	66
FIGURA 4.4 –	Especificação dos elementos da malha 6 x 6.	67
FIGURA 4.5 –	Modo 3 de vibração da placa geometricamente não-linear	69
FIGURA 4.6 –	Esquema de ensaio experimental da placa geometricamente linear	70
FIGURA 4.7 –	Ensaio experimental para obter modo de vibração da placa geometricamente linear	71
FIGURA 4.8 –	Esquema de ensaio experimental da placa geometricamente não-linear	71
FIGURA 4.9 –	Ensaio experimental para obter modo de vibração da placa geometricamente não-linear	72

FIGURA 5.1 –	Freq. naturais de placa retangular em balanço	74
FIGURA 6.1 –	TESE(L) modo 1 - Freq. natural de 5,17 Hz	75
FIGURA 6.2 –	Experimental(L) modo 1 - Freq. natural de 5,20 Hz	75
FIGURA 6.3 –	TESE(L) modo 2 - Freq. natural de 13,03 Hz	76
FIGURA 6.4 –	Experimental(L) modo 2 - Freq. natural de 13,20 Hz	76
FIGURA 6.5 –	TESE(L) modo 3 - Freq. natural de 32,26 Hz	77
FIGURA 6.6 –	Experimental(L) modo 3 - Freq. natural de 32,40 Hz	77
FIGURA 6.7 –	TESE(L) modo 4 - Freq. natural de 42,06 Hz	78
FIGURA 6.8 –	Experimental(L) modo 4 - Freq. natural de 41,20 Hz	78
FIGURA 6.9 –	TESE(L) modo 5 - Freq. natural de 47,12 Hz	79
FIGURA 6.10 –	Experimental(L) modo 5 - Freq. natural de 46,00 Hz	79
FIGURA 6.11 –	TESE(L) modo 6 - Freq. natural de 82,05 Hz	80
FIGURA 6.12 –	Experimental(L) modo 6 - Freq. natural de 80,40 Hz	80
FIGURA 7.1 –	Esquema de carregamentos no meio da placa geometricamente não-linear	81
FIGURA 7.2 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo de 28N	82
FIGURA 7.3 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 1000N	83
FIGURA 7.4 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 2000N	84
FIGURA 7.5 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 3000N	85
FIGURA 7.6 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 3500N	86
FIGURA 7.7 –	Esquema de carregamentos na extremidade da placa geometricamente não-linear	87
FIGURA 7.8 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo de 28N	88

FIGURA 7.9 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 800N	89
FIGURA 7.10 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 1000N	90
FIGURA 7.11 –	Freq. naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE(L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 1400N	91
FIGURA 7.12 –	Freq. naturais de TESE(NL) com $F=28N$ e TESE(NL) com $F=3500N$	92
FIGURA 7.13 –	Freq. naturais de Exper.(NL) com $F=28N$ e Exper.(NL) com $F=3500N$	92
FIGURA 7.14 –	Freq. naturais de TESE(NL) com $F=28N$ e TESE(NL) com $F=1400N$	93
FIGURA 7.15 –	Freq. naturais de Exper.(NL) com $F=28N$ e Exper.(NL) com $F=1400N$	93
FIGURA 8.1 –	TESE(NL) modo 1 – Freq. natural de 4,94 Hz – $F=28N$	94
FIGURA 8.2 –	Exper.(NL) modo 1 – Freq. natural de 4,75 Hz - $F=28N$	94
FIGURA 8.3 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 12,94 Hz - $F=28N$	95
FIGURA 8.4 –	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 14,00 Hz - $F=28N$	95
FIGURA 8.5 –	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 30,68 Hz - $F=28N$	95
FIGURA 8.6 –	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 33,00 Hz - $F=28N$	95
FIGURA 8.7 –	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 40,50 Hz - $F=28N$	96
FIGURA 8.8 –	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 41,50 Hz - $F=28N$	96
FIGURA 8.9 –	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 45,61 Hz - $F=28N$	96
FIGURA 8.10 –	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 46,70 Hz- $F=28N$	96
FIGURA 8.11 –	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 80,04 Hz - $F=28N$	97
FIGURA 8.12 –	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 79,50 Hz - $F=28N$	97
FIGURA 8.13 –	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 87,70 Hz - $F=28N$	97
FIGURA 8.14 –	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 85,50 Hz- $F=28N$	97
FIGURA 8.15 –	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 96,00 Hz - $F=28N$	98

FIGURA 8.16 –	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 95,20 Hz- F=28N	98
FIGURA 8.17 –	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,71 Hz-F=1000N	99
FIGURA 8.18 –	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,75 Hz- F=1000N	99
FIGURA 8.19 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 11,12 Hz- F=1000N	99
FIGURA 8.20 –	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 10,00 Hz-F=1000N	99
FIGURA 8.21 –	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 28,96 Hz- F=1000N	100
FIGURA 8.22 –	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 26,37 Hz-F=1000N	100
FIGURA 8.23 –	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 37,36 Hz- F=1000N	100
FIGURA 8.24 –	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 37,87 Hz-F=1000N	100
FIGURA 8.25 –	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 42,76 Hz- F=1000N	101
FIGURA 8.26 –	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 42,75 Hz-F=1000N	101
FIGURA 8.27 –	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 75,22 Hz- F=1000N	101
FIGURA 8.28 –	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 75,75 Hz-F=1000N	101
FIGURA 8.29 –	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 84,07 Hz- F=1000N	102
FIGURA 8.30 –	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 84,70 Hz-F=1000N	102
FIGURA 8.31 –	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 90,38 Hz- F=1000N	102
FIGURA 8.32 –	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 90,20 Hz-F=1000N	102
FIGURA 8.33 –	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,94 Hz- F=2000N	103
FIGURA 8.34 –	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 5,00 Hz- F=2000N	103
FIGURA 8.35 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 10,59 Hz- F=2000N	103
FIGURA 8.36 –	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 10,20 Hz-F=2000N	103
FIGURA 8.37 –	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 29,99 Hz- F=2000N	104
FIGURA 8.38 –	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 28,50 Hz-F=2000N	104
FIGURA 8.39 –	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 37,46 Hz- F=2000N	104
FIGURA 8.40 –	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 38,50 Hz-F=2000N	104
FIGURA 8.41 –	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 44,35 Hz- F=2000N	105
FIGURA 8.42 –	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 44,50 Hz-F=2000N	105
FIGURA 8.43 –	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 77,67 Hz- F=2000N	105
FIGURA 8.44 –	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 74,00 Hz-F=2000N	105

FIGURA 8.45 –	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 87,70 Hz- F=2000N	106
FIGURA 8.46 –	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 87,20 Hz-F=2000N	106
FIGURA 8.47 –	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 93,00 Hz- F=2000N	106
FIGURA 8.48 –	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 92,50 Hz-F=2000N	106
FIGURA 8.49 –	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,96 Hz- F=3000N	107
FIGURA 8.50 –	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 5,20 Hz- F=3000N	107
FIGURA 8.51 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 9,64 Hz- F=3000N	107
FIGURA 8.52 –	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 10,50 Hz-F=3000N	107
FIGURA 8.53 –	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 29,57 Hz- F=3000N	108
FIGURA 8.54 –	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 28,50 Hz-F=3000N	108
FIGURA 8.55 –	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 36,12 Hz- F=3000N	108
FIGURA 8.56 –	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 35,20 Hz-F=3000N	108
FIGURA 8.57 –	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 44,07 Hz- F=3000N	109
FIGURA 8.58 –	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 44,50 Hz-F=3000N	109
FIGURA 8.59 –	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 76,89 Hz- F=3000N	109
FIGURA 8.60 –	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 76,20 Hz-F=3000N	109
FIGURA 8.61 –	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 87,78 Hz- F=3000N	110
FIGURA 8.62 –	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 86,10 Hz-F=3000N	110
FIGURA 8.63 –	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 91,68 Hz- F=3000N	110
FIGURA 8.64 –	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 91,60 Hz-F=3000N	110
FIGURA 8.65 –	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 5,03 Hz- F=3500N	111
FIGURA 8.66 –	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 5,00 Hz- F=3500N	111
FIGURA 8.67 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 9,48 Hz- F=3500N	111
FIGURA 8.68 –	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 10,50 Hz-F=3500N	111
FIGURA 8.69 –	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 29,52 Hz- F=3500N	112
FIGURA 8.70 –	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 29,70 Hz-F=3500N	112
FIGURA 8.71 –	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 35,52 Hz- F=3500N	112
FIGURA 8.72 –	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 37,70 Hz-F=3500N	112
FIGURA 8.73 –	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 44,23 Hz- F=3500N	113

FIGURA 8.74 –	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 44,50 Hz- $F=3500N$	113
FIGURA 8.75 –	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 76,78 Hz- $F=3500N$	113
FIGURA 8.76 –	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 74,70 Hz- $F=3500N$	113
FIGURA 8.77 –	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 87,88 Hz- $F=3500N$	114
FIGURA 8.78 –	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 89,00 Hz- $F=3500N$	114
FIGURA 8.79 –	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 91,20 Hz- $F=3500N$	114
FIGURA 8.80 –	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 95,70 Hz- $F=3500N$	114
FIGURA 8.81 –	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 5,09 Hz - $F=28N$	115
FIGURA 8.82 –	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 3,75 Hz - $F=28N$	115
FIGURA 8.83 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 14,74 Hz - $F=28N$	115
FIGURA 8.84 –	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 14,50 Hz - $F=28N$	115
FIGURA 8.85 –	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 31,41 Hz - $F=28N$	116
FIGURA 8.86 –	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 32,00 Hz - $F=28N$	116
FIGURA 8.87 –	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 45,04 Hz - $F=28N$	116
FIGURA 8.88 –	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 46,00 Hz - $F=28N$	116
FIGURA 8.89 –	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 50,01 Hz - $F=28N$	117
FIGURA 8.90 –	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 50,25 Hz - $F=28N$	117
FIGURA 8.91 –	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 87,46 Hz - $F=28N$	117
FIGURA 8.92 –	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 86,75 Hz - $F=28N$	117
FIGURA 8.93 –	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 89,96 Hz - $F=28N$	118
FIGURA 8.94 –	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 88,75 Hz - $F=28N$	118
FIGURA 8.95 –	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 101,37 Hz - $F=28N$	118
FIGURA 8.96 –	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 101,50 Hz - $F=28N$	118
FIGURA 8.97 –	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,79 Hz- $F=800N$	119
FIGURA 8.98 –	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 3,75 Hz- $F=800N$	119
FIGURA 8.99 –	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 12,20 Hz- $F=800N$	119
FIGURA 8.100–	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 11,60 Hz- $F=800N$	119
FIGURA 8.101–	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 31,22 Hz- $F=800N$	120
FIGURA 8.102–	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 32,50 Hz- $F=800N$	120

FIGURA 8.103–	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 41,06 Hz- F=800N	120
FIGURA 8.104–	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 43,70 Hz- F=800N	120
FIGURA 8.105–	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 49,43 Hz- F=800N	121
FIGURA 8.106–	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 47,50 Hz- F=800N	121
FIGURA 8.107–	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 85,75 Hz- F=800N	121
FIGURA 8.108–	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 84,00 Hz- F=800N	121
FIGURA 8.109–	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 89,19 Hz- F=800N	122
FIGURA 8.110–	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 87,50 Hz- F=800N	122
FIGURA 8.111–	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 98,04 Hz- F=800N	122
FIGURA 8.112–	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 96,00 Hz- F=800N	122
FIGURA 8.113–	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,61 Hz-F=1000N	123
FIGURA 8.114–	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 3,75 Hz-F=1000N	123
FIGURA 8.115–	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 11,52 Hz-F=1000N	123
FIGURA 8.116–	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 11,50 Hz-F=1000N	123
FIGURA 8.117–	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 31,20 Hz-F=1000N	124
FIGURA 8.118–	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 33,50 Hz-F=1000N	124
FIGURA 8.119–	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 39,88 Hz-F=1000N	124
FIGURA 8.120–	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 38,20 Hz-F=1000N	124
FIGURA 8.121–	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 49,27 Hz-F=1000N	125
FIGURA 8.122–	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 50,20 Hz-F=1000N	125
FIGURA 8.123–	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 85,17 Hz-F=1000N	125
FIGURA 8.124–	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 82,00 Hz-F=1000N	125
FIGURA 8.125–	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 89,10 Hz-F=1000N	126
FIGURA 8.126–	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 91,00 Hz-F=1000N	126
FIGURA 8.127–	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 97,07 Hz-F=1000N	126
FIGURA 8.128–	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 97,00 Hz-F=1000N	126
FIGURA 8.129–	TESE(NL) modo 1 - Freq. natural de 4,19 Hz-F=1400N	127
FIGURA 8.130–	Exper.(NL) modo 1 - Freq. natural de 3,75 Hz-F=1400N	127
FIGURA 8.131–	TESE(NL) modo 2 - Freq. natural de 10,87 Hz- F=1400N	127

FIGURA 8.132–	Exper.(NL) modo 2 - Freq. natural de 11,70 Hz-F=1400N	127
FIGURA 8.133–	TESE(NL) modo 3 - Freq. natural de 31,37 Hz-F=1400N	128
FIGURA 8.134–	Exper.(NL) modo 3 - Freq. natural de 32,20 Hz-F=1400N	128
FIGURA 8.135–	TESE(NL) modo 4 - Freq. natural de 37,55 Hz-F=1400N	128
FIGURA 8.136–	Exper.(NL) modo 4 - Freq. natural de 38,50 Hz-F=1400N	128
FIGURA 8.137–	TESE(NL) modo 5 - Freq. natural de 49,21 Hz-F=1400N	129
FIGURA 8.138–	Exper.(NL) modo 5 - Freq. natural de 45,70 Hz-F=1400N	129
FIGURA 8.139–	TESE(NL) modo 6 - Freq. natural de 83,83 Hz-F=1400N	129
FIGURA 8.140–	Exper.(NL) modo 6 - Freq. natural de 81,75 Hz-F=1400N	129
FIGURA 8.141–	TESE(NL) modo 7 - Freq. natural de 88,89 Hz-F=1400N	130
FIGURA 8.142–	Exper.(NL) modo 7 - Freq. natural de 89,50 Hz-F=1400N	130
FIGURA 8.143–	TESE(NL) modo 8 - Freq. natural de 95,27 Hz-F=1400N	130
FIGURA 8.144–	Exper.(NL) modo 8 - Freq. natural de 94,20 Hz-F=1400N	130
FIGURA 9.1 –	Modo 1 - TESE(L) – Freq. natural de 5,17 Hz	132
FIGURA 9.2 –	Modo 1 - TESE(NL) – Freq. natural 4,19 Hz - F=1400N	132
FIGURA 9.3 –	Modo 1 – Exper.(L) - Frequência natural de 5,20 Hz	132
FIGURA 9.4 –	Modo 1 Exper.(NL) – Freq. natural 3,75 Hz – F=1400N	133
FIGURA A.1 –	Elemento triangular	134

LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1 –	Frequências naturais em Hz de Leissa, ANSYS, TESE(L) e Experimental(L) - Placa retangular em balanço geometricamente linear	73
TABELA 5.2 –	Desvio percentual de TESE(L) com Leissa, ANSYS e Experimental(L) – Placa retangular em balanço geometricamente linear	74
TABELA 7.1 –	Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com atuação da carga do dispositivo de 28N	82
TABELA 7.2 –	Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com carga de 28N	82
TABELA 7.3 –	Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N	83
TABELA 7.4 –	Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N	83
TABELA 7.5 –	Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 2000N	84
TABELA 7.6 –	Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 2000N	84
TABELA 7.7 –	Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3000N	85
TABELA 7.8 –	Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3000N	85
TABELA 7.9 –	Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3500N	86
TABELA 7.10 –	Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3500N	86

TABELA 7.11 – Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a carga de 28N	88
TABELA 7.12 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a carga de 28N	88
TABELA 7.13 – Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 800N	89
TABELA 7.14 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 800N	89
TABELA 7.15 – Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N	90
TABELA 7.16 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N	90
TABELA 7.17 – Freq. naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1400N	91
TABELA 7.18 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1400N	91

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Romanas Maiúsculas

A, B, C	matriz que dependem do vetor Φ
A^e, B^e, C^e	matrizes A, B, C para o elemento e
$\bar{A}^e, \bar{B}^e, \bar{C}^e$	matrizes A^e, B^e, C^e simplificadas
C_d	contorno essencial da chapa-placa
C_σ	contorno natural da chapa-placa
C^0	funções que garantem a continuidade dos deslocamentos considerados
C^1	funções que garantem a continuidade dos deslocamentos considerados
D	rigidez da placa à flexão
E	módulo de elasticidade longitudinal
F_i^x, F_i^y, F_i^z	forças nodais equivalentes para o sistema de eixos originais
G	matriz componente de ΔK_0
$\bar{G}$	matriz G simplificada
H	matriz componente de ΔK_0
$\bar{H}$	matriz H simplificada
K	matriz de rigidez secante
$\bar{K}$	matriz K simplificada
K_T	matriz de rigidez tangente
K_0^p	matriz de rigidez de primeira ordem de chapa
K_0^b	matriz de rigidez de primeira ordem de placa
ΔK_0	matriz de correção de coordenadas
$\Delta \bar{K}_0$	matriz ΔK_0 simplificada
K_g	matriz de rigidez geométrica
$\bar{K}_g$	matriz K_g simplificada
K_g^b	matriz componente de K_g
$\bar{K}_g^b$	matriz K_g^b simplificada
L_1, L_2, L_3	coordenadas naturais ou locais do triângulo
M^p	matriz de massa de chapa
M^b	matriz de massa de placa
M_i^x, M_i^y	momentos nodais equivalentes para o sistema de eixos originais
M_n, M_{nt}	momento de flexão e torção por unidade de comprimento em C_σ
M_x, M_y, M_{xy}	momentos fletores e de torção solicitantes
N_x, N_y, N_{xy}	forças de membrana no elemento infinitesimal

N_x^e, N_y^e, N_{xy}^e	forças de membrana no elemento e
$\bar{N}_x^e, \bar{N}_y^e, \bar{N}_{xy}^e$	forças de membrana N_x^e, N_y^e, N_{xy}^e feitas constantes
P_z	carga concentrada vertical
Q_x, Q_y, Q_{xy}	forças cortantes em planos perpendiculares ao plano indeformado da placa
V_n	carga vertical de borda por unidade de comprimento em C_σ
$\bar{V}_n$	carga vertical de borda conhecida por unidade de comprimento em C_σ
X, Y	forças por unidade de volume
X^e, Y^e	forças por unidade de volume no elemento e
$\bar{X}, \bar{Y}$	forças de superfície aplicadas em C_σ

Letras romanas minúsculas

a	vetor de parâmetros nodais
a^b	vetor de parâmetros nodais de placa
a^p	vetor de parâmetros nodais de chapa
da	vetor de acréscimos dos deslocamentos nodais
df	vetor dos incrementos dos esforços nodais
f	vetor de esforços nodais equivalentes
f^b	vetor de esforços nodais equivalentes de placa
f^p	vetor de esforços nodais equivalentes de chapa
h	espessura da placa
$\vec{n}$	normal externa ao contorno da chapa
q	carga transversal por unidade de área
$\vec{t}$	versor tangente ao contorno da placa
u, v, w	deslocamentos dos pontos do plano médio da placa
u_i, v_i, w_i	deslocamentos u, v, w do nó i
x, y	eixos originais

Letras Gregas Maiúsculas

Γ	função contínua e derivável
Δ	área do triângulo
Δ^e	área do elemento e
Λ	função contínua e duas vezes deriváveis
Σ	somatória estendida a todos os elementos finitos
Ω	domínio da placa
Ω^e	domínio do elemento e

Letras Gregas Minúsculas

α	ângulo que a normal faz com o eixo x
β	ângulo que a normal faz com o eixo y
γ	função contínua e derivável
γ_i	função de forma correspondente a u_i e v_i
γ_{xy}	distorção (deformação angular)
δ	ângulo de $\vec{n}$ e $\vec{i}$ (contorno)
ϵ_x, ϵ_y	alongamentos ou encurtamentos (deformações lineares) em x e y respectivamente
η_i	funções de forma correspondente a θ_i^y
θ_i^x, θ_i^y	rotações de nó i
ν	coeficiente de Poisson
Φ_i^e	vetor contendo as funções de forma ϕ_i, ψ_i, η_i para o nó i do elemento e
ψ_i	função de forma correspondente a θ_i^x
ϕ_i	função de forma correspondente a w_i
ρ	massa específica
ω	frequência
λ	autovalor
ϵ	adimensional

MIYAZIMA, A. T. *Análises teórica e experimental de freqüências naturais e modos de vibração de placas com comportamentos geometricamente linear e não-linear*. 2001. 145p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

RESUMO

Um estudo comparativo entre as freqüências naturais e modos de vibração de uma placa retangular em balanço com comportamento geométrico linear e não-linear é apresentado. Os resultados teóricos obtidos pelo método de elementos finitos via resíduos ponderados são comparados com ensaios experimentais. Para se realizar os ensaios experimentais, uma placa retangular com dimensões de 0,72m, 0,7m e 0,003m foi fixada a uma base de concreto. A condição de não linearidade geométrica foi obtida através de um tensionador que é um dispositivo para aplicar carga. Utilizou-se uma célula de carga conectada à ponte extensiométrica para controlar uma determinada força a ser aplicada. As cargas, com intensidades de 28N a 3500N, convenientemente espaçadas, foram aplicadas com direção paralela ao plano, enquanto que, perpendicularmente ao plano da placa, atuava o peso do tensionador e célula de carga. Para obter as freqüências naturais, utilizou-se de um acelerômetro ligado ao analisador de sinais, e excitou-se a placa. Utilizando o programa de elementos finitos desenvolvido, e com os mesmos dados e condições de contorno da bancada de ensaios, obtiveram-se resultados para comparação com os ensaios experimentais, com boa correlações.

PALAVRAS-CHAVE: Freqüências naturais, elementos finitos, vibrações



MIYAZIMA, A. T. *Theoretical and experimental analyses of the natural frequencies and vibrations modes of plates with geometrically linear and non-linear behavior.* 2001. 145p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.

ABSTRACT

A comparative study of a bending plate natural frequencies, with geometrically linear and non-linear behavior is carried out. The finite element method via weighted residuals was employed and compared to experimental results. The experimental setup used a rectangular bending plate of 0.72 x 0.70 m and 0.003m thickness fixed to a solid base. The geometrically non-linear condition was achieved through the application of forces in the plane of the plate which was measured by using a regular force transducer. The forces with intensity of 28N to 3500N were applied at the middle and at the plate. A shaker and accelerometer set-up coupled with a signal analyzer were used to calculate the plate natural frequencies. Using the developed finite element program and the same boundary conditions, the analytical and experimental results were compared, showing good agreement.

KEYWORDS: Natural frequencies, finite element, vibrations



1 INTRODUÇÃO

1.1 Relatos sobre o método de elementos finitos.

Na área de cálculo estrutural, o engenheiro deve garantir que a estrutura, objeto de análise não estará sujeito a falhas sob as diversas condições. Este assunto está vinculado à área de resistência dos materiais, que trata de resistência e rigidez dos elementos das estruturas.

As chapas e placas que são amplamente utilizadas em engenharia estrutural, aviação, construção naval, mecânica automobilística, construção civil, etc. são estudadas pela teoria geral de placas e cascas, que utilizam intensamente o recurso matemático das equações diferenciais. Com base nelas, são desenvolvidas soluções para diversas configurações geométricas, tais como: retangulares, quadradas, circulares, etc. e incluem diversas condições de fixações nas bordas como apoio simples, engastadas, e para diversas condições de carregamentos como pressão uniforme, carga concentrada, etc.

A maioria das estruturas de importância prática são muito complexas para serem analisadas pelas técnicas clássicas. Para estruturas de forma arbitrária, a solução analítica, torna-se impossível, e o problema requer grandes e excessivas simplificações se quisermos aplicá-las as tais expressões analíticas fechadas, resultando em cálculo pouco preciso.

O método analítico clássico permite o cálculo da resposta exata dos deslocamentos, deformações e tensões na estrutura em todos os pontos, isto é, nos seus infinitos pontos, porém estas soluções são somente conhecidas para alguns casos, que fogem na maioria das aplicações práticas que se encontram.

É interessante desenvolver procedimentos aproximados, que possam ser aplicados em caráter geral, independente da forma da estrutura e da condição de carregamento, dentro da precisão aceitável do problema de engenharia. Esse caminho alternativo ao procedimento analítico e clássico



constitui o foco central do estudo que deu a origem ao método dos elementos finitos.

1.2 Importância da análise de vibrações numa estrutura.

Uma ponte suspensa Tacoma Narrows foi construída e inaugurada no dia 1 de julho de 1940 e no dia 7 de novembro do mesmo ano ocorreu o colapso.

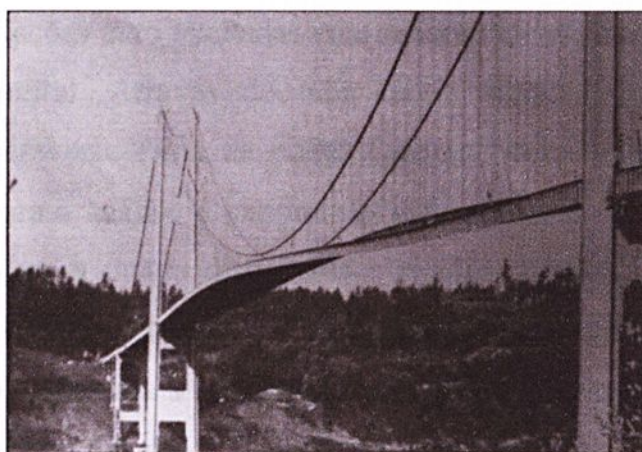


FIGURA 1.1 – Ponte Tacoma Narrows sofrendo oscilação torcional devido à ação do vento.



FIGURA 1.2 – O movimento torcional violento persistiu por volta de 45 minutos até ao colapso da ponte Tacoma Narrows.

Um vento forte atingiu a ponte que causou uma oscilação torcional violenta, e assim a estrutura que era flexível entrou em ressonância causada pelo vórtice ao redor da estrutura da ponte e se rompeu. Este fato verídico foi observado e documentado pelo professor Farquharson (1950), da Universidade de Washington.

A falha catastrófica da ponte Tacoma Narrows, tem-se criado considerável controvérsia e interesse entre os engenheiros como por Billah e Scanlan (1991). Como na falha de flap de asa de avião, estruturas flexíveis submetidas à alta excitação aerodinâmica, frequentemente desenvolvem oscilações auto excitadas com amortecimento negativo que leva à destruição estrutural. Através de uma teoria simples de ressonância, é insuficiente descrever a falha da ponte Tacoma Narrows, a importância de criar modelos para a análise é importante. A ponte suspensa é uma estrutura muito flexível com a massa distribuída e rigidez. Embora o piso da ponte geralmente é uniforme ao longo do seu comprimento, os cabos que suportam a estrutura do piso fornecem a maior parte de rigidez que variam com ângulo e tensão entre as torres. Os dados de Tacoma Narrows, foram obtidos em várias publicações como de Thomson (1941).

1.3 Trabalhos anteriores

Costa (1986) apresentou um trabalho que consistiu no estudo das placas elásticas delgadas, através do Método dos Resíduos Ponderados na variante de Galerkin. A única diferença residiu na escolha das funções de ponderação, que no Método dos Elementos Finitos passam a ser as funções de forma ou de interpolação.

Inicialmente o estado plano de tensão para estudo de chapa foi abordado, dentro da hipótese da teoria de primeira ordem; e o comportamento estrutural das chapas é regida pelas equações de Navier.



Apresentou a teoria de primeira ordem das placas, correspondendo ao problema clássico das placas regida pela equação de Lagrange.

Elaborou uma teoria simplificada de Segunda ordem das placas, quando se mostrará a interação que existe entre os efeitos de membrana e os de flexão. Foram deduzidas as matrizes de rigidez geométrica, de rigidez secante e de rigidez tangente. A natureza do estudo feito permitiu o esclarecimento da questão da flambagem de chapas. O problema da membrana flexível foi examinado como um caso particular dentro da teoria de Segunda ordem das placas, com importantes simplificações. Finalmente, propôs-se uma conduta notavelmente simplificada, que facilitou a construção da matriz de rigidez tangente. Esta simplificação está apresentada no Anexo A.

Por último abordou a construção das matrizes de rigidez geométrica, de rigidez secante e de rigidez tangente de uma barra de pórtico plano, em relação ao sistema local. A razão para isso é a de enfatizar a analogia existente entre as formulações correspondentes às teorias de Segunda ordem das placas e das estruturas reticuladas.

Segundo Garzeri (1991) a teoria do Método dos Elementos Finitos é ainda obscura para a maioria dos seus usuários; o emprego do Cálculo Variacional e a vultosa quantidade de publicações dedicadas à dedução de elementos de crescente complexidade acabam por desestimular o seu estudo. No caso da análise dinâmica linear de placas finas, as equações aproximadas do movimento podem ser obtidas por meio do Método dos Resíduos Ponderados. Tal abordagem torna o estudo mais brando do ponto de vista matemático, pois utiliza exclusivamente o Cálculo Diferencial e Integral, bem como conceitos de ajustes de funções.

Efetuuou-se a análise dinâmica de placas finas de comportamento linear, empregando o Método dos Resíduos Ponderados na obtenção das equações do movimento aproximadas, com posterior discretização via Método dos Elementos Finitos.



Pappalardo (1992) apresentou um trabalho para avaliar os efeitos da simplificação de se tornarem constantes as forças de membrana dentro de cada elemento finito da análise de Segunda ordem de placas. Perante essa simplificação, converteu-se o cálculo da matriz de rigidez tangente em uma forma muito mais simples e que se reduz o tempo gasto em sua avaliação.

Distingue-se como um trabalho prático e concisamente teórico. É também um complemento da publicação de Costa (1986). Diz-se um complemento, porque não foi implementada a idéia do autor e não se pode conferir os efeitos de tal simplificação.

O problema de Segunda ordem das placas elásticas delgadas é formulado pelo Método dos Elementos Finitos (via resíduo ponderados - variante Galerkin). O sistema resultante é resolvido pelo método de Newton-Raphson com incremento de carga constantes.

Num estudo comparativo, sempre com o rigor de serem feitas as mesmas considerações entre uma avaliação numérica simplificada e outra consistente (força de membrana variáveis dentro de cada elemento finito), estimam-se os efeitos de se tornarem constantes as forças de membrana para as mais diversas formas geométricas submetidas aos mais variados tipos de carregamento.

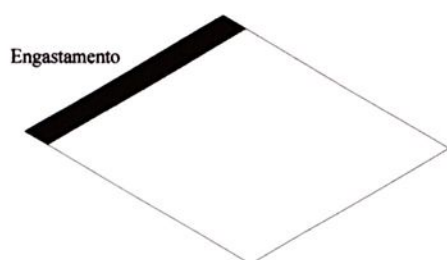
Comparou-se os resultados obtidos com Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), que representa uma formulação que despreza a deformação da superfície média da placa aplicadas às rotações muito pequenas, e com o programa ANSYS, que leva em conta a teoria das grandes deflexões e rotações. Ambas consideram o efeito da rigidez geométrica, com diferentes hipóteses de aproximação das relações deformação-deslocamento. Essas comparações permitiram estabelecer os dois extremos de deslocamentos que delimitam a aplicação do trabalho na engenharia de estruturas.



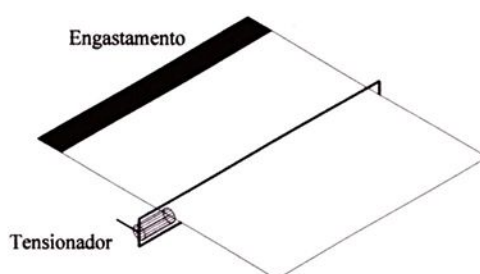
Ide (1995) abordou a análise numérica de vibrações livres em torno de uma configuração deformada devido ao carregamento estático aplicado tanto paralelo como transversal ao plano de placas delgadas de comportamento geometricamente não-linear e reologia elástica linear, por meio de Método dos Elementos Finitos com formulação via Resíduos Ponderados, hipótese de Galerkin.

1.4 Problemas de placas geometricamente linear e não-linear

A Figura 1.3, mostra-se uma placa em balanço. Com a ausência de carga ou força aplicada à placa é considerada geometricamente linear. Quando uma carga ou força é aplicada através de um tensionador (dispositivo que comprime ou traciona uma placa), como se ilustra na figura, é considerada a placa geometricamente não-linear, pois esta se deflete, e assim haverá mudança de rigidez da estrutura. Assim, para ambos casos, foram realizados os cálculos teóricos e ensaios experimentais obtendo-se as frequências naturais e seus modos de vibração.



Placa geometricamente Linear



Placa geometricamente Não-linear

FIGURA 1.3 – Placa em balanço geometricamente linear e não-linear.

1.5 Objetivo do trabalho

Obter frequências naturais e modos de vibração de uma placa em balanço geometricamente linear e não-linear.

Comparar frequências naturais e seus modos correspondentes.

2 FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE MOVIMENTO

2.1 Introdução

Neste capítulo, apresentam-se as equações diferenciais que governam o problema das vibrações não-lineares de placas (Ide, 1995). Considera-se a não-linearidade geométrica, assim como a inércia da rotação, com as seguintes hipóteses da Teoria de segunda ordem das placas:

- a) a placa em estudo é fina, ou seja, a espessura h é menor que o menor dentre dois lados L , assim: $\left(\frac{h}{L} < \frac{1}{20}\right)$;
- b) a deflexão w , é da mesma ordem de grandeza da espessura h ;
- c) as tensões normais que atuam em planos paralelos ao plano médio podem ser desprezadas em relação às demais tensões;
- d) as normais à superfície média indeformada se conservam normais à superfície média deformada e não há variação de espessura durante a deformação;
- e) as rotações θ_x e θ_y são da ordem de raiz quadrada do módulo das deformações (rotações pequenas) e as rotações relativas ao eixo z são desprezíveis, assim se pode admitir $\text{sen } \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$ e se truncará o desenvolvimento em série de $\cos \theta$ em $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

2.2 Movimento no plano

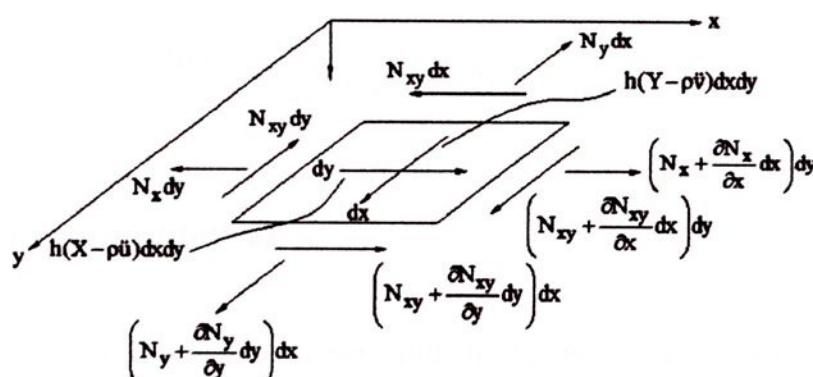


FIGURA 2.1 – Equilíbrio dinâmico de um elemento de chapa.

Baseado na Figura 2.1, onde as faces do elemento são perpendiculares ao plano indeformado, em que X e Y são forças por unidade de volume, obtém-se:

2.2.1 Equilíbrio de forças na direção x

$$\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + h(X - \rho \ddot{u}) dx dy - N_x dy - N_{xy} dx = 0$$

Donde:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + h(X - \rho \ddot{u}) = 0 \quad (2.1)$$

2.2.2 Equilíbrio de forças na direção y

$$\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy \right) dx + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) dx + h(Y - \rho \ddot{v}) dx dy - N_y dx - N_{xy} dy = 0$$

Donde:

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + h(X - \rho \ddot{v}) = 0 \quad (2.2)$$

2.2.3 Equações constitutivas

As forças de membrana por unidade de comprimento, em função das deformações são dadas por:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{hE}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ N_y &= \frac{hE}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ N_{xy} &= \frac{hE}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (2.3)$$

2.2.4 Relações de deformações-deslocamentos

Considerando-se as relações de deformações-deslocamentos não-lineares

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

e introduzindo a Equação (2.4) na Equação (2.3), tem-se as forças de membrana em função dos deslocamentos:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{hE}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} \\ N_y &= \frac{hE}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \\ N_{xy} &= \frac{hE}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2.5 Condições de contorno

- a) Em C_d (região de apoio da chapa) os deslocamentos são conhecidos como condições essenciais ou geométricas.

$$u = \bar{u}(x, y, t) \quad (2.6)$$

$$v = \bar{v}(x, y, t) \quad (2.7)$$

- b) Em C_σ as forças de membrana se equilibram com o carregamento externo.

Conforme a Figura 2.2., tem-se:

$$lN_x + mN_{xy} = h\bar{X}(x, y, t) \quad (2.8)$$

$$mN_y + lN_{xy} = h\bar{Y}(x, y, t) \quad (2.9)$$

Estas são as condições de contorno naturais ou estáticas.

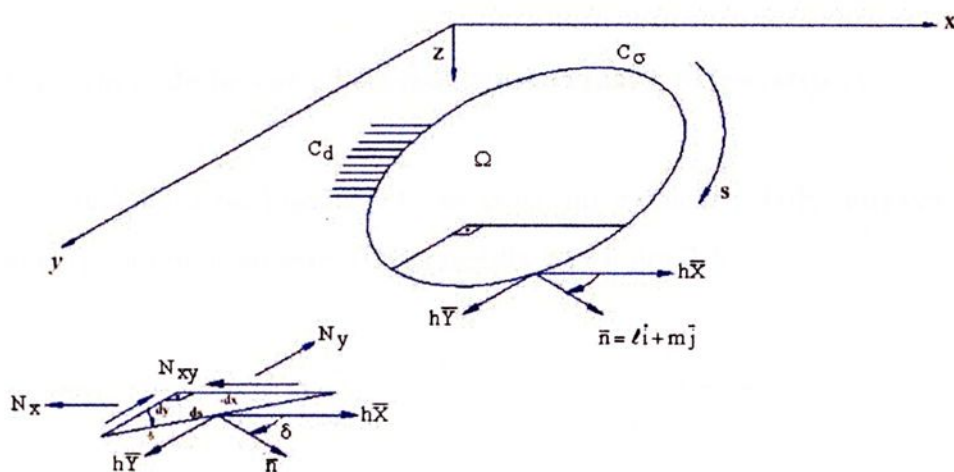


FIGURA 2.2 – Domínio da chapa

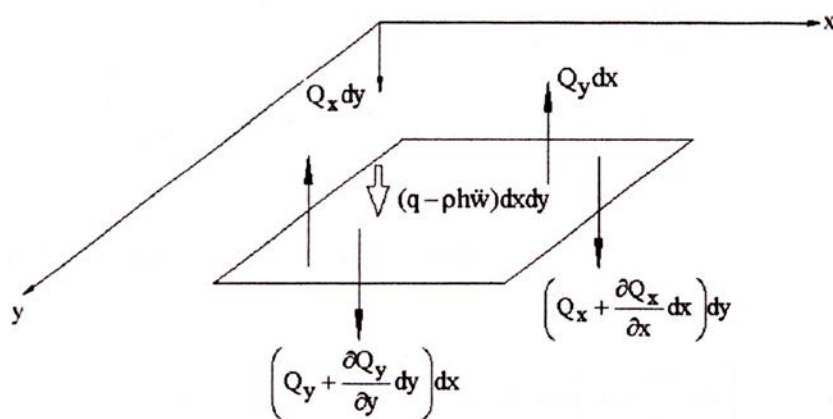


FIGURA 2.3 - Força cortante por unidade de comprimento

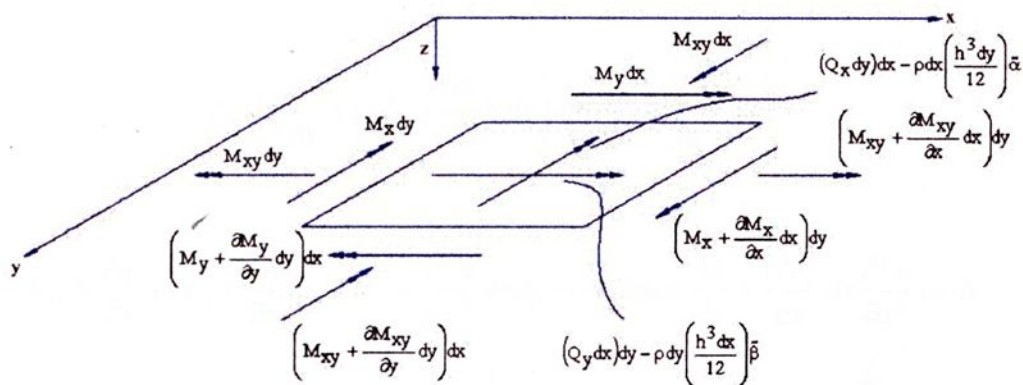


FIGURA 2.4 – Momentos fletores e de torção por unidade de comprimento.

2.3 Equilíbrio de forças na direção transversal à placa (eixo z)

Seja feito na Figura 2.1 um corte no elemento $dx dy$, através de um plano perpendicular ao eixo y, que resulta na Figura 2.5.

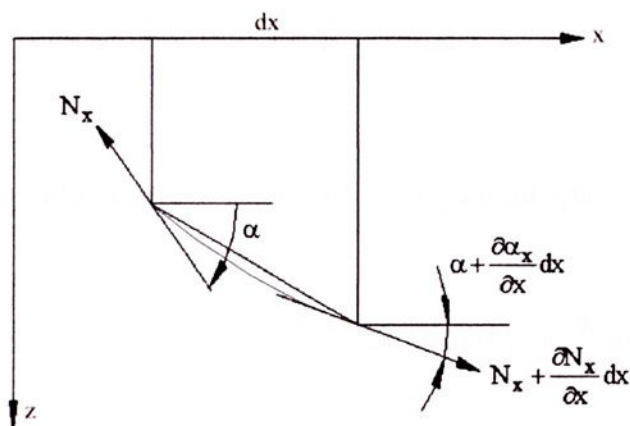


FIGURA 2.5 – Corte transversal à placa.

A projeção das forças N_x na direção z produz:

$$- N_x dy \operatorname{sen} \alpha + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \right)$$

Como $\alpha \cong \operatorname{sen} \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial w}{\partial x}$, tem-se:

$$- N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) =$$

$$- N_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + N_x + \frac{\partial w}{\partial x} dx + N_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{N_x}{\partial x} dx dy \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy$$

Desprezando-se os termos de ordem superior, a expressão fica:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (2.10)$$

Analogamente, a projeção das forças N_y na direção vertical reduz-se:

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.11)$$

Por outro lado, a projeção das forças N_{xy} na direção z, tem-se:

$$- N_{xy} dy \operatorname{sen} \beta + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \operatorname{sen} \left(\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \right)$$

Como $\beta \cong \operatorname{sen} \beta \cong \operatorname{tg} \beta \cong \frac{\partial w}{\partial y}$, tem-se:

$$- N_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \operatorname{sen} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior, a expressão fica:

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (2.12)$$

Uma expressão análoga pode ser obtida para a projeção das forças $N_{yx} = N_{xy}$ na direção vertical. A soma das projeções das forças $N_{yx} = N_{xy}$ fornece o seguinte resultado:

$$2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dxdy \quad (2.13)$$

Fazendo-se o equilíbrio na direção vertical para a carga transversal, obtém-se:

$$\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_x dy - Q_y dx = -(q - \rho h \ddot{w}) dxdy \quad (2.14)$$

Simplificando, tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = \rho h \ddot{w} \quad (2.15)$$

As expressões (2.10), (2.11) e (2.13) devem ser adicionadas à expressão (2.14).

Fazendo-se isso, a equação de equilíbrio resultante será:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dxdy + q dxdy + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dxdy + \frac{\partial N_x}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} dxdy + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy + \\ & + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dxdy + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy + \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) dxdy = m_e \ddot{w} = \\ & = \rho h dxdy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Simplificando-se, tem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} + \\ + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} = \rho h \ddot{w} \end{aligned} \quad (2.16)$$

2.3.1 Equilíbrio de momentos em torno do eixo x

Pela segunda Lei de Newton, tem-se que:

$$\Sigma M = I \cdot \theta$$

onde:

θ = aceleração angular, é dada por:

$$\theta = \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y}$$

$$\text{com } \beta = \frac{\partial w}{\partial y}$$

Com base nas Figuras (2.3) e (2.4), o equilíbrio de momentos em torno do eixo x produz:

$$-\frac{\partial M_y}{\partial y} dx dy + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy = I \cdot \theta = \frac{m h^2}{12} \theta = \rho dx dy h \frac{h^2}{12} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y}$$

Simplificando-se vem:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \quad (2.17)$$

2.3.2 Equilíbrio de momentos em torno do eixo y

De maneira análoga ao equilíbrio em torno do eixo x, obtém-se:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial M_x}{\partial x} + Q_x = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \quad (2.18)$$

Derivando-se as expressões (2.18) e (2.17), em relação a x e y, respectivamente, tem-se:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \quad (2.20)$$

Considerando-se as expressões (2.19) e (2.20), a expressão (2.16) se torna:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + q + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = \rho h \ddot{w} \end{aligned}$$

Simplificando essa expressão vem:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - \left[q - \rho h \ddot{w} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \right. \\ \left. - h(X - \rho \ddot{u}) \frac{\partial w}{\partial x} - h(Y - \rho \ddot{v}) \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\rho h^3}{12} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right] \quad (2.21)$$

2.3.3 Condições de contorno

Serão apresentadas aqui as condições de contorno relativas à equação (2.21)

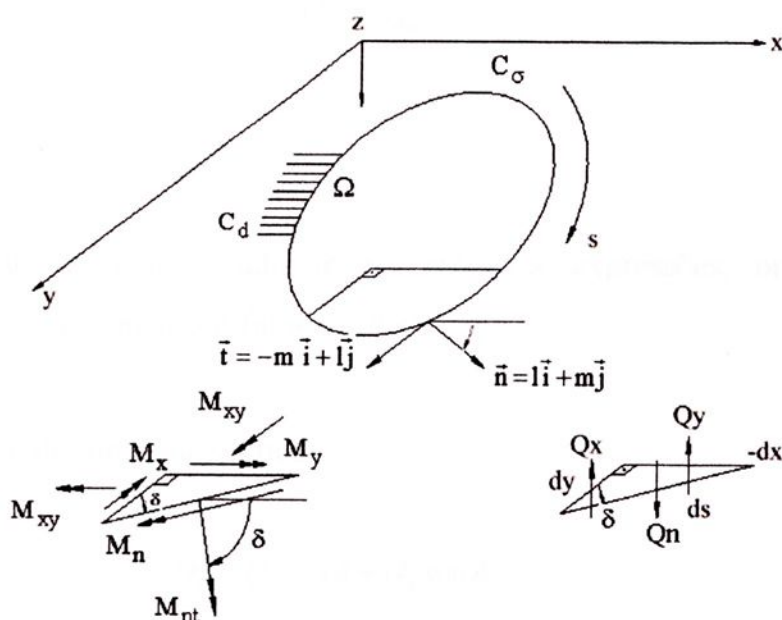


FIGURA 2.6 – Domínio da placa

a) Em C_d existem as condições de contorno geométricas:

$$w = \bar{w}(x, y, t) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\theta}(x, y, t) \quad (2.23)$$

b) Em C_σ , há as condições de contorno estáticas:

$$Mn = \bar{M}n(s, t) \quad (2.24)$$

$$Vn = \bar{V}n(s, t) - h\bar{X} \frac{\partial w}{\partial x} - h\bar{Y} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.25)$$

sendo:

$$Vn = Qn - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \quad (2.26)$$

Observação:

Serão úteis mais adiante as seguintes expressões, oriundas do equilíbrio de um elemento infinitesimal em C_σ :

- Equilíbrio de forças na vertical:

$$Q_n = Q_x \cos \delta + Q_y \sin \delta \quad (2.27)$$

- Equilíbrio de momentos em torno do eixo x:

$$M_{nt} \cos \delta - M_n \sin \delta = M_{xy} \cos \delta - M_y \sin \delta \quad (2.28)$$

- Equilíbrio de momentos em torno do eixo y.

$$M_n \cos \delta - M_m \sin \delta = M_x \cos \delta - M_{xy} \sin \delta \quad (2.29)$$

2.3.4 Condições iniciais

No instante inicial ($t=0$) devem ser conhecidos ao longo do domínio Ω da placa, os deslocamentos e rotações:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= u_0(x, y) \\ v(x, y, 0) &= v_0(x, y) \\ w(x, y, 0) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\theta_0^y = \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$\theta_0^x = \frac{\partial w_0}{\partial y}$$

assim como as velocidades lineares e angulares.

$$\begin{aligned} \dot{u}(x, y, 0) &= \dot{u}_0(x, y) \\ \dot{v}(x, y, 0) &= \dot{v}_0(x, y) \\ \dot{w}(x, y, 0) &= \dot{w}_0(x, y) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\dot{\theta}_0^y = \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x}$$

$$\dot{\theta}_0^x = \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y}$$

3 DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introdução

O método dos elementos finitos é um procedimento para discretização de sistemas contínuos. A solução analítica das equações diferenciais é substituída por uma aproximação de superposição de funções de coordenadas, cujos coeficientes multiplicativos são determinados aplicando-se princípios variacionais ou o Método dos Resíduos Ponderados.

Neste trabalho aplicou-se o Método dos Resíduos Ponderados às equações diferenciais deduzidas no Capítulo 2, levando-se em consideração a hipótese de Galerkin com relação a função peso. Em seguida o problema é discretizado pelo Método dos Elementos Finitos, resultando nas equações diferenciais ordinárias do movimento.

3.2 Movimento no plano

3.2.1 Método de Galerkin (método dos resíduos ponderados)

As equações (2.1) e (2.2) referem-se a um elemento infinitesimal de área. É necessário transformá-las em equações integrais que, além de incorporarem as condições de contorno naturais (2.8) e (2.9), traduzem o mesmo fenômeno representado pelas equações diferenciais, mas referida agora para toda chapa. Para isso considera-se $\gamma = \gamma(x, y, t)$, uma função arbitrária no espaço e no tempo, contínua e derivável no domínio da chapa, e tal que $\gamma = 0$ na fronteira C_d em todo e qualquer instante. Multiplicando-se as equações diferenciais (2.1) e (2.2) pela função $\gamma(x, y, t)$, e em seguida, pela integração no domínio da chapa, obtém-se as seguintes expressões, respectivamente:

$$\iint_{\Omega} \gamma \left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + h(X - \rho \ddot{u}) \right] dx dy = 0 \quad (3.1)$$

$$\iint_{\Omega} \gamma \left[\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + h(Y - \rho \ddot{v}) \right] dx dy = 0 \quad (3.2)$$

Foi demonstrado por Costa (1986), que se as equações integrais (3.1) e (3.2) se cumprem para qualquer função $\gamma(x, y, t)$, então as equações diferenciais (2.1) e (2.2), respectivamente, serão cumpridas em todo e qualquer ponto de Ω , em qualquer instante a recíproca é imediata.

Integrando-se por partes as duas parcelas da equação (3.1) conforme obtido por Ide (1995), tem-se:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} N_x + \frac{\partial \gamma}{\partial y} N_{xy} \right) dx dy = h \iint_{\Omega} \gamma (X - \rho \ddot{u}) dx dy + h \int_{C_{\sigma}} \gamma \bar{X} ds \quad (3.3)$$

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial y} N_y + \frac{\partial \gamma}{\partial x} N_{xy} \right) dx dy = h \iint_{\Omega} \gamma (Y - \rho \ddot{v}) dx dy + h \int_{C_{\sigma}} \gamma \bar{Y} ds \quad (3.4)$$

As equações integrais (3.3) e (3.4) são conhecidas como as formas fracas de (3.1) e (3.2) respectivamente, por serem menos rigorosas na ordem de continuidade na determinação das funções N_x , N_y e N_{xy} , embora exijam por outro lado maior ordem de continuidade ao se definirem as funções γ .

3.2.2 Método dos elementos finitos

Na técnica dos elementos finitos o domínio da chapa é dividido em pequenas regiões poligonais com elementos finitos, separados entre si pelos seus lados. Os vértices desses elementos são os pontos nodais e são numerados

de 1 a n . Até o momento não houve aproximações. Parte-se agora para a discretização do problema com a introdução das aproximações dos campos de deslocamentos. As variáveis u e v serão aproximadas em função de seus deslocamentos nodais u_j e v_j através das funções de forma γ_j de classe C^0 .

Em notação indicial, a seguinte solução aproximada será considerada:

$$u = u_j \gamma_j \quad (3.5)$$

$$v = v_j \gamma_j \quad (3.6)$$

Usa-se o elemento triangular de deformação constante de chapa em que as funções de forma variam linearmente e se confundem com as coordenadas naturais L_1 , L_2 e L_3 .

Para a variável w , tem-se um outro conjunto de parâmetros nodais e suas respectivas funções de forma de classe C^1 , que foram obtidos por Ide (1995). Será utilizado o elemento de placa proposto por Zienkiewicz, que tem três deslocamentos nodais por nó, ou seja um deslocamento na direção z e duas rotações segundo os eixos x e y .

Assim o campo de deslocamentos w será aproximado por:

$$w = (\mathbf{a}^b)^T \Phi = \Phi^T \mathbf{a}^b \quad (3.7)$$

onde

$$\mathbf{a}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^b \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^b \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

o vetor dos parâmetros nodais é:

$$\mathbf{a}_j^b = \begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_j^x \\ \theta_j^y \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

é um subvetor genérico, em que $\theta_j^y = \frac{\partial w}{\partial x}$ e $\theta_j^x = \frac{\partial w}{\partial y}$ também:

$$\Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

é o vetor das funções de forma e o subvetor genérico é:

$$\Phi_j = \begin{Bmatrix} \Phi_j \\ \Psi_j \\ \eta_j \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

Introduzindo-se as equações (3.5), (3.6) e (3.7) na expressão (2.5), obtém-se:

$$N_x = \frac{hE}{1-\nu^2} \left[u_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + w_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^b)^T \mathbf{A} \mathbf{a}^b + \frac{\nu}{2} (\mathbf{a}^b)^T \mathbf{B} \mathbf{a}^b \right] \quad (3.12)$$

$$N_y = \frac{hE}{1-\nu^2} \left[v_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + w_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^b)^T \mathbf{B} \mathbf{a}^b + \frac{\nu}{2} (\mathbf{a}^b)^T \mathbf{A} \mathbf{a}^b \right] \quad (3.13)$$

$$N_{xy} = \frac{hE}{1-\nu^2} \frac{1-\nu}{2} \left[u_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + v_j \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^b)^T \mathbf{C} \mathbf{a}^b \right] \quad (3.14)$$

onde se definem:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \quad (3.17)$$

Substituindo-se as interpolações das equações (3.5) e (3.6), bem como as expressões (3.12), (3.13) e (3.14), nas formas fracas (3.3) e (3.4), fazendo-se nestas últimas, sucessivamente, a função de ponderação γ , igual a cada uma das funções de forma γ_i , que é a hipótese de Galerkin, usadas para interpolar os deslocamentos no plano, que trata-se de equilíbrio no plano, e obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{hE}{1-\nu^2} \left[\iint_{\Omega} u_j \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Omega} v_j \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} \right) dx dy \right] + \\ & + \frac{hE}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} (\mathbf{a}^b)^T \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \mathbf{a}^b + \nu \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} (\mathbf{a}^b)^T \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \mathbf{a}^b + \right. \\ & \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} (\mathbf{a}^b)^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) \mathbf{a}^b \right] dx dy = \\ & = h \iint_{\Omega} \gamma_i X dx dy + h \int_{c\sigma} \gamma_i \bar{X} ds - \rho h \iint_{\Omega} \gamma_i \gamma_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} dx dy \end{aligned} \quad (3.18)$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{hE}{1-\nu^2} \left[\iint_{\Omega} u_j \left(\nu \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} \right) dx dy + \iint_{\Omega} v_j \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} \right) dx dy \right] + \\
& + \frac{hE}{2(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial y} (\mathbf{a}^b)' \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \mathbf{a}^b + \nu \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} (\mathbf{a}^b)' \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \mathbf{a}^b + \right. \\
& \left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} (\mathbf{a}^b)' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) \mathbf{a}^b \right] dx dy = \\
& = h \iint_{\Omega} \gamma_i Y dx dy + h \int_{C_{\sigma}} \gamma_i \bar{Y} ds - \rho h \iint_{\Omega} \gamma_i \gamma_j \frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} dx dy \quad (3.19)
\end{aligned}$$

3.2.3 Formulação matricial

O resultado na forma matricial, será um sistema de $2n$ equações diferenciais ordinárias e $5n$ incógnitas:

$$\mathbf{M}^p \ddot{\mathbf{a}}^p + \mathbf{K}_0^p \mathbf{a}^p + \mathbf{G} \mathbf{a}^b = \mathbf{f}^p \quad (3.20)$$

sendo $\mathbf{K}_0^p$, conhecida como matriz de rigidez do estado plano de tensões dada por:

$$\mathbf{K}_0^p = \frac{hE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_0^p)_{11} & \dots & (\mathbf{K}_0^p)_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{K}_0^p)_{n1} & \dots & (\mathbf{K}_0^p)_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

com

$$(\mathbf{K}_0^p)_{ij} = \begin{bmatrix} (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{11} & \dots & (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{12} \\ \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{21} & \dots & (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{22} \end{bmatrix}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{11} &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} \right) dx dy \\
 (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{12} &= \iint_{\Omega} \left(\nu \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} \right) dx dy \\
 (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{21} &= \iint_{\Omega} \left(\nu \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} \right) dx dy \\
 (\mathbf{K}_0^p)_{ij}^{22} &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \frac{\partial \gamma_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \frac{\partial \gamma_j}{\partial x} \right) dx dy
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por outro lado:

$$\mathbf{a}^p = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^p \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^p \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{a}_j^p = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

$$\mathbf{a}^b = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^b \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^b \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{a}_j^b = \begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_j^x \\ \theta_j^y \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

Também:

$$\mathbf{f}^p = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^p \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^p \end{Bmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{f}_i^p = \begin{Bmatrix} F_i^x \\ F_i^y \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

$$F_i^x = h \iint_{\Omega} \gamma_i X dx dy + h \int_{c_{\sigma}} \gamma_i \bar{X} ds \tag{3.27}$$

$$F_i^y = h \iint_{\Omega} \gamma_i Y dx dy + h \int_{C_{\sigma}} \gamma_i \bar{Y} ds \quad (3.28)$$

A matriz $\mathbf{G}$ é dada por:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \cdots & \mathbf{G}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{G}_{m1} & \cdots & \mathbf{G}_{mn} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

com

$$\mathbf{G}_{ij} = \frac{hE}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} (\mathbf{a}_k^b)^T \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial x} (\mathbf{A}_{k_j} + \nu \mathbf{B}_{k_j}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial y} \mathbf{C}_{k_j} \right] dx dy \\ (\mathbf{a}_k^b)^T \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \gamma_i}{\partial y} (\mathbf{B}_{k_j} + \nu \mathbf{A}_{k_j}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} \mathbf{C}_{k_j} \right] dx dy \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{kj} &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j'}{\partial x} \\ \mathbf{B}_{kj} &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j'}{\partial y} \\ \mathbf{C}_{kj} &= \frac{\partial \Phi_k}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j'}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_k}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j'}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.31)$$

são submatrizes de ordem 3x3 de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.

Portanto, $\mathbf{G}_{ij}$ é da ordem de 2x3. A submatriz $\mathbf{G}_{ij}$ será diferente de zero apenas nos elementos que contenham P_i e P_j simultaneamente. Por outro lado, em cada elemento finito onde $\mathbf{G}_{ij} \neq 0$, o índice k que aparece na expressão de $\mathbf{G}_{ij}$, assume apenas os valores correspondentes aos nós do elemento.

Finalmente a matriz $\mathbf{M}^p$ é a conhecida matriz de massa do estado plano de tensão:

$$\mathbf{M}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11}^p & \cdots & \mathbf{M}_{1n}^p \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}_{n1}^p & \cdots & \mathbf{M}_{nn}^p \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

com:

$$\mathbf{M}_{ij}^p = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ij}^p & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{ij}^p \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

e

$$\mathbf{M}_{ij}^p = \rho h \iint_{\Omega} \gamma_i \gamma_j dx dy \quad (3.34)$$

3.3 Movimento Transversal

3.3.1 Método de Galerkin (método dos resíduos ponderados)

A aplicação do método dos elementos finitos exige, como condição prévia, a transformação da equação diferencial (2.20) do movimento em uma equação integral equivalente conforme Ide (1995), tem-se:

$$D \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] dx dy = \iint_{\Omega} \psi q dx dy - \int_{c\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial n} \overline{M}_n ds + \\
& \int_{c\sigma} \psi \overline{V}_n ds - \iint_{\Omega} \psi \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy - \frac{\rho h^3}{12} \iint_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} dx dy - \frac{\rho h^3}{12} \iint_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} dx dy \quad (3.35)
\end{aligned}$$

3.3.2 Método dos elementos finitos

Utilizando-se das interpolações abaixo:

$$u = u_j \gamma_j$$

$$v = v_j \gamma_j$$

$$w = (\mathbf{a}^b)^T \Phi = \Phi \mathbf{a}^b$$

tem-se:

$$\ddot{u} = \ddot{u}_j \gamma_j \quad (3.36)$$

$$\ddot{v} = \ddot{v}_j \gamma_j \quad (3.37)$$

$$\ddot{w} = \Phi^T \ddot{\mathbf{a}}^b \quad (3.38)$$

Introduzindo-se as interpolações acima na equação (3.35), seguindo-se da aplicação da Hipótese de Galerkin, onde as funções de ponderação são as mesmas que foram usadas para interpolar os deslocamentos transversais, ou seja $\psi \equiv \Phi$, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& D \iint_{\Omega} \mathbf{a}^b \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x \partial y} \right] dx dy + \\
& + \iint_{\Omega} \mathbf{a}^b \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial \Phi'}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial \Phi'}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial \Phi'}{\partial x} \right) \right] dx dy = \iint_{\Omega} \Phi q dx dy - \int_{c\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \overline{M} n ds + \\
& + \int_{c\sigma} \Phi \overline{V} ds - \iint_{\Omega} \ddot{\mathbf{a}}^b \Phi \rho h \Phi' dx dy - \frac{\rho h^3}{12} \iint_{\Omega} \ddot{\mathbf{a}}^b \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi'}{\partial y} dx dy \quad (3.39)
\end{aligned}$$

3.3.3 Formulação matricial

O resultado obtido no formato matricial será um sistema de $3n$ equações que são justamente as que faltam para que o sistema possa ser resolvido:

$$\mathbf{M}^b \ddot{\mathbf{a}}^b + (\mathbf{K}_0^b + \mathbf{K}_g^b) \mathbf{a}^b = \mathbf{f}^b \quad (3.40)$$

A matriz $\mathbf{K}_0^b$ é dada por:

$$K_0^b = D \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \nu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} \right) + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3.41)$$

A equação (3.41) representa a matriz de rigidez da placa em teoria de primeira ordem.

Por outro lado a matriz $\mathbf{K}_g^b$ é a matriz de rigidez geométrica da placa e vem expressa por:

$$\mathbf{K}_g^b = \iint_{\Omega} (N_x \mathbf{A} + N_y \mathbf{B} + N_{xy} \mathbf{C}) dx dy \quad (3.42)$$

As forças de membrana são calculadas pelas equações (3.12), (3.13) e (3.14) e as matrizes **A**, **B** e **C** são as mesmas definidas nas equações (3.15), (3.16) e (3.17).

O vetor $\mathbf{f}^b$, caracterizado pelos esforços nodais equivalentes referentes ao carregamento transversal é:

$$\mathbf{f}^b = \iint_{\Omega} \Phi q dx dy + \int_{c\sigma} \left(\Phi \bar{V} n - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \bar{M} n \right) ds \quad (3.43)$$

que constitui em uma força vertical e dois momentos aplicados nas direções x e y, respectivamente. Assim:

$$\mathbf{f}_i^b = \begin{Bmatrix} F_i^z \\ M_{ii}^x \\ M_{ii}^y \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

A matriz $\mathbf{M}^b$ é a matriz massa da placa é dada por:

$$\mathbf{M}^b = \rho h \iint_{\Omega} \Phi \Phi' dx dy + \frac{\rho h^3}{12} \iint_{\Omega} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) dx dy \quad (3.45)$$

Na expressão acima a segunda parcela do lado direito se refere, evidentemente a contribuição da inércia à rotação.

3.3.4 Matriz de rigidez secante

Os dois sistemas de equações dados pela expressões (3.20) e (3.15), são acoplados. De forma concisa, é possível escrevê-los como:



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.46)$$

O acoplamento dos sistemas (3,20) e (3.40) é devido á existência da matriz $\mathbf{G}$, e também ao fato de que $\mathbf{K}_g^b$, sendo função de N_x , N_y e N_{xy} , depende, consequentemente não apenas de $\mathbf{a}^b$, mas também de $\mathbf{a}^p$.

A matriz de rigidez secante de estrutura é dada por:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^p & \mathbf{G} \\ 0 & \mathbf{K}_0^b + \mathbf{K}_g^b \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^p \\ \mathbf{a}^b \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{f} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}^p \\ \mathbf{f}^b \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

A matriz $\mathbf{M}$ é a matriz de massa da estrutura, dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^p & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_0^b \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

3.3.5 Matriz de rigidez tangente

A aplicação do Método dos Elementos Finitos, via resíduos ponderados via Galerkin, ao problema dinâmico das placas não-lineares geometricamente, levou ao sistema (3.46) de equações não-lineares, abaixo reescrito:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f} \quad (3.51)$$

Para se definir o conceito de matriz de rigidez tangente, considere o seguinte problema estático, ou seja, $\ddot{\mathbf{a}} \approx 0$:

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f}$$

Uma das formas de solução para o sistema de equações acima é o da iteração direta. Tomando-se outro caminho para se obter a resposta do problema definiremos o conceito de matriz de rigidez tangente. Considere-se então o problema de um grau de liberdade para um carregamento crescente a partir de zero.

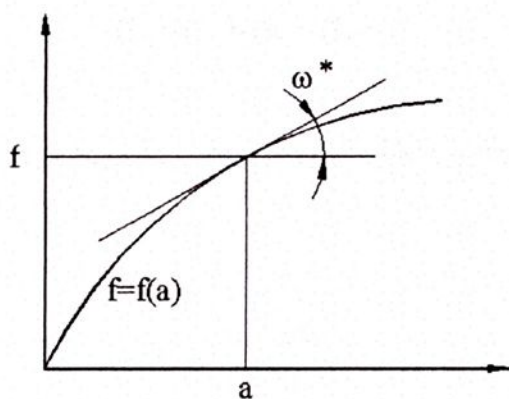


FIGURA 3.1 – Definição de rigidez tangente

Define-se rigidez tangente para o nível f de carga, a expressão:

$$\mathbf{K}_T = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{a}} = \operatorname{tg} \omega^* \quad (3.52)$$

Essa idéia pode ser estendida a um problema com vários graus de liberdade. Tem-se então, o conceito de matriz de rigidez tangente:

$$\mathbf{K}_T d\mathbf{a} = d\mathbf{f} \quad (3.53)$$

Portanto, a matriz de rigidez tangente relaciona os incrementos de carga com os acréscimos de deslocamentos. Para se utilizar o método de Newton-Raphson é necessário se determinar a matriz de rigidez tangente. Isto é o que será feito a seguir.

Diferenciando-se a equação $\mathbf{K}\mathbf{a}=\mathbf{f}$, tem-se:

$$\mathbf{K}d\mathbf{a} + d\mathbf{K}\mathbf{a} = d\mathbf{f} \quad (3.54)$$

Comparando-se (3.53) com (3.54), tem-se:

$$\mathbf{K}_T d\mathbf{a} = \mathbf{K}d\mathbf{a} + d\mathbf{K}\mathbf{a} \quad (3.55)$$

Considera-se agora apenas a parcela $d\mathbf{K}\mathbf{a}$, e tendo a (3.47), pode-se escrever:

$$d\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & d\mathbf{G} \\ 0 & d\mathbf{K}_g^b \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

pois $\mathbf{K}_0^p$ e $\mathbf{K}_0^b$ são constantes.

Considerando (3.39), vem:

$$d\mathbf{K}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} d\mathbf{G}\mathbf{a}^p \\ d\mathbf{K}_g^b \mathbf{a}^b \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

demonstrou-se Costa em (1986) que:

$$d\mathbf{G}\mathbf{a}^b = \mathbf{G}d\mathbf{a}^b \quad (3.58)$$

Por outro lado, também Costa (1986), demonstrou que:

$$d\mathbf{K}_g^b \mathbf{a}^b = 2\mathbf{G}' d\mathbf{a}^p + \mathbf{H}d\mathbf{a}^b \quad (3.59)$$

onde $\mathbf{H}$ é dada por:

$$\mathbf{H} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \iint_{\Omega} \left\{ \mathbf{A}\mathbf{a}^b(\mathbf{a}^b) \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{a}^b(\mathbf{a}^b) \mathbf{B} + \nu \left[\mathbf{B}\mathbf{a}^b(\mathbf{a}^b) \mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{a}^b(\mathbf{a}^b) \mathbf{B} \right] + \frac{1-\nu}{2} \mathbf{C}\mathbf{a}^b(\mathbf{a}^b) \mathbf{C} \right\} dx dy \quad (3.60)$$

As expressões (3.58) e (3.59) substituindo-se na (3.57), resulta:

$$d\mathbf{K}\mathbf{a} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{G}d\mathbf{a}^b \\ 2\mathbf{G}' d\mathbf{a}^p + \mathbf{H}d\mathbf{a}^b \end{array} \right\}$$

que também pode ser escrita como:

$$d\mathbf{K}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G} \\ 2\mathbf{G}' & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\mathbf{a}^p \\ d\mathbf{a}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G} \\ 2\mathbf{G}' & \mathbf{H} \end{bmatrix} d\mathbf{a}$$

Finalmente substituindo-se a expressão acima em (3.54) e comparando o resultado com (3.53), tem-se:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K} + \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{G} \\ 2\mathbf{G}' & \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

relembrando (3.47), que:

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^p & 2\mathbf{G} \\ 2\mathbf{G}' & \mathbf{K}_0^b + \mathbf{K}_g^b + \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Costuma-se desmembrando $\mathbf{K}_T$ em três parcelas simétricas:

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^p & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_0^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbf{G} \\ 2\mathbf{G}' & \mathbf{H} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_g^b \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

ou

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_g \quad (3.63)$$

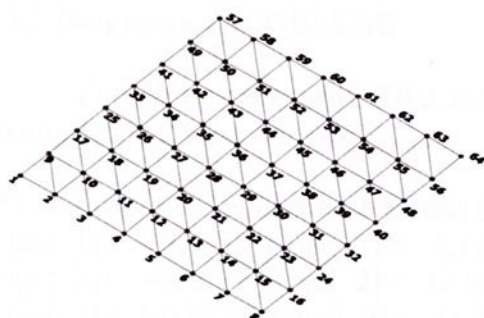
A expressão (3.62) representa a matriz de rigidez tangente, que é simétrica e composta de três parcelas conhecidas respectivamente, como matriz de rigidez de primeira ordem, matriz de correção de coordenadas e matriz de rigidez geométrica.

4 CÁLCULOS TEÓRICOS COMPUTACIONAIS E ENSAIOS EXPERIMENTAIS

Nesta seção serão apresentadas as seqüências de cálculos teóricos com o uso de programas computacionais desenvolvido por Ide (1995), um programa elaborado em linguagem FORTRAN e depois também o uso do programa comercial Matlab. Também, descrever as montagens e instrumentações dos ensaios experimentais para se obterem freqüências naturais e seus modos de vibração.

4.1 Cálculos teóricos das placas em balanço geometricamente linear

No cálculo de freqüências naturais utilizando o Método de Elementos Finitos foi utilizado um programa desenvolvido em linguagem Pascal por Ide (1995). Uma placa de aço com as dimensões: 0,72m, 0,70m e 0,003m foi utilizada para o cálculo teórico. Com um elemento triangular e malha de 7x7, montou-se um arquivo de dados de entrada do programa MEFLINEAR (Método de Elementos Finitos Linear). Pela condição de contorno, os nós 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49, e 57 foram considerados fixos. A massa específica de aço foi de 7800 Kg/m^3 e coeficiente de Poisson $\nu=0,30$. O módulo de elasticidade de $E=206,8 \text{ GPa}$. Assim, com o programa MEFLINAR, obteve-se matriz de rigidez e matriz massa. Utilizando um programa FORTRAN, chamado JACOBI.EXE, que faz a leitura dos arquivos matriz de rigidez e massa obtido pelo programa anterior, calcula-se autovalor e autovetor. Desta forma encontra-se as freqüências naturais da placa. Em seguida utilizando o programa Matlab, que lê as coordenadas da placa e o arquivo de autovetor.dat aonde estão armazenados os deslocamentos dos nós na direção do eixo z. Assim, plota-se os modos de vibração teóricos.



Numeração dos nós



Numeração dos elementos

FIGURA 4.1 – Especificação dos nós e elementos da malha 7 x 7.

4.1.1 Programa MEFLINEAR.EXE

Arquivo de entrada dos dados: DADOS

Placa 7 x 7 linear	74
Numero de pontos na horizontal	75
8	97
Numero de pontos na vertical	98
8	99
Comprimento na horizontal	121
0.720	122
comprimento na vertical	123
0.70	145
Numero de condicoes de contorno	146
24	147
Condicoes	169
1	170
2	171
3	Ro
25	7800.0
26	V
27	0.3
49	T
50	.003
51	E
73	206.8E9

Saida do resultado são os arquivos: RIGIDEZ.DAT e MASSA.DAT

4.1.2 Programa JACOBI.EXE

Entrada de dados: RIGIDEZ.DAT e MASSA.DAT. A saída dos resultados do arquivo autovalor.dat são:

*** Autovalor e Frequências Naturais (Hz)***

```
Eigv[ 1]= 1057.55 F.nat[ 1]= 5.18
Eigv[ 2]= 6653.27 F.nat[ 2]= 12.98
Eigv[ 3]= 40389.55 F.nat[ 3]= 31.99
Eigv[ 4]= 70474.07 F.nat[ 4]= 42.25
Eigv[ 5]= 87134.14 F.nat[ 5]= 46.98
Eigv[ 6]= 269319.60 F.nat[ 6]= 82.60
Eigv[ 7]= 332915.70 F.nat[ 7]= 91.83
Eigv[ 8]= 396432.80 F.nat[ 8]= 100.21
Eigv[ 9]= 457843.40 F.nat[ 9]= 107.69
Eigv[10]= 788619.10 F.nat[10]= 141.34
```

Arquivo de saída gerado AUTOVETOR.DAT, neste arquivo estão armazenados os deslocamentos de cada nó nas direções x, y e z.

4.1.3 Programa MATLAB

Faz a leitura das coordenadas dos nós da placa e do arquivo AUTOVETOR.DAT, onde se encontram os deslocamentos na direção do eixo z para plotarem os modos de vibração da placa geometricamente linear. A Figura 4.2 é um dos exemplos de um modo de vibração.

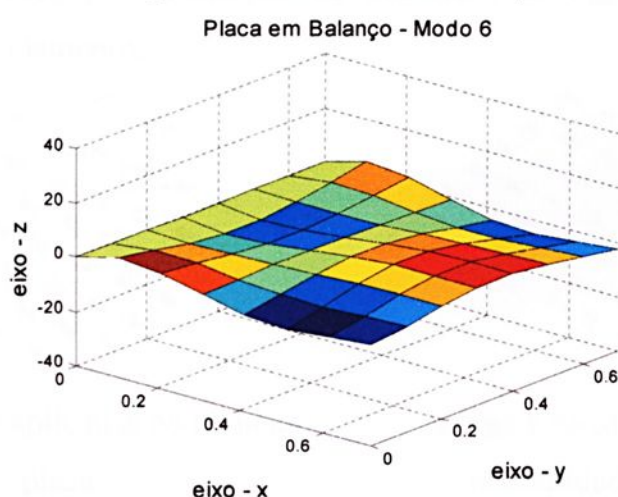
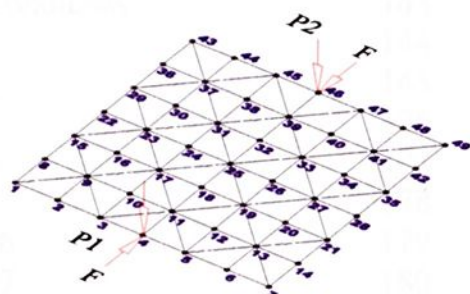


FIGURA 4.2 – Modo 6 de vibração da placa em balanço geometricamente linear.

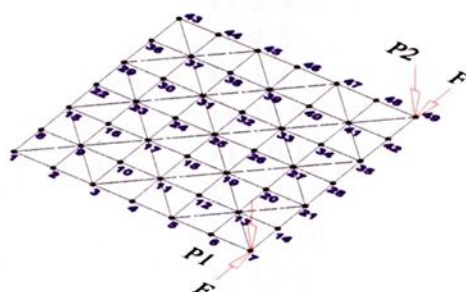
4.2 Cálculos teóricos das placas em balanço geometricamente não-linear

Para o cálculo teórico de frequências naturais utilizou-se programa MEFNLIN.EXE, (Método de Elementos Finitos Não-Linear), desenvolvido por Ide (1995). Os dados são semelhantes utilizados no programa anterior do caso geometricamente linear. Agora, existem atuações de duas forças: uma carga que atua no sentido perpendicular ao plano da placa; e outra força que atua no sentido paralela ao plano da placa.

A Figura 4.3, mostra o esquema de carregamentos das cargas atuantes no meio e outro caso na extremidade da placa. As cargas P1 e P2 são do dispositivo tensionador que atuam perpendicularmente à placa. Estas cargas são $P1=4,05\text{N}$ e $P2=24,60\text{N}$ que entram em todos ensaios experimentais. Para simular uma placa com comportamento geometricamente não-linear aplica-se uma força paralela ao plano da placa. As forças aplicadas foram de 1000N, 2000N, 3000N e 3500N no meio da placa. As forças de 800N, 1000N e 1400N aplicadas na extremidade da placa. Para controlar a força de compressão desejada, utilizou-se de um tensionador com uma célula de carga ligada ao aparelho com a ponte extensiométrica. A especificação dos nós das malhas 6x6, está mostrada na Figura 4.3. Os nós 1, 8, 15, 22, 29, 36 e 43 são considerados fixos pela condição de contorno. A Figura 4.4, mostra a numeração dos elementos.



Carga e força aplicadas no meio da placa



Carga e força aplicadas na extremidade da placa

FIGURA 4.3 – Especificação dos nós da malha 6 x 6 e posição das forças atuantes.

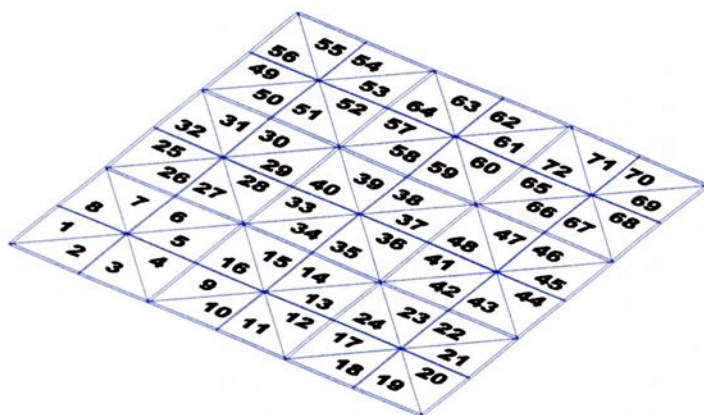


FIGURA 4.4 – Especificação dos elementos da malha 6 x 6.

4.2.1 Programa MEFNLIN.EXE

Este exemplo é o caso da força $F=1000N$ e aplicada no meio da placa.

Leitura dos dados de entrada: DADOS

Placa 6x6 branco	74	9 8 1
Numero total de nos	75	9 1 2
49	106	9 2 3
Numero de	107	9 3 10
elementos	108	9 10 17
72	109	9 17 16
Numero de condicoes	110	9 16 15
de contorno	141	9 15 8
35	142	11 10 3
Condicoes	143	11 3 4
1	144	11 4 5
2	145	11 5 12
3	176	11 12 19
4	177	11 19 18
5	178	11 18 17
36	179	11 17 10
37	180	13 12 5
38	211	13 5 6
39	212	13 6 7
40	213	13 7 14
71	214	13 14 21
72	215	13 21 20
73	Incidencia Nodal	13 20 19

13 19 12	41 34 35	0.12 0.58333
23 22 15	41 35 42	0.24 0.58333
23 15 16	41 42 49	0.36 0.58333
23 16 17	41 49 48	0.48 0.58333
23 17 24	41 48 47	0.60 0.58333
23 24 31	41 47 40	0.72 0.58333
23 31 30	Coordenadas Nodais	0.00 0.70000
23 30 29	0.00 0.00000	0.12 0.70000
23 29 22	0.12 0.00000	0.24 0.70000
25 24 17	0.24 0.00000	0.36 0.70000
25 17 18	0.36 0.00000	0.48 0.70000
25 18 19	0.48 0.00000	0.60 0.70000
25 19 26	0.60 0.00000	0.72 0.70000
25 26 33	0.72 0.00000	Ro
25 33 32	0.00 0.11667	7800.00
25 32 31	0.12 0.11667	V
25 31 24	0.24 0.11667	0.30
27 26 19	0.36 0.11667	Espessura da chapa-
27 19 20	0.48 0.11667	placa
27 20 21	0.60 0.11667	0.003
27 21 28	0.72 0.11667	Modulo de
27 28 35	0.00 0.23333	elasticidade
27 35 34	0.12 0.23333	206.8e9
27 34 33	0.24 0.23333	Numero de cargas
27 33 26	0.36 0.23333	concentradas
37 36 29	0.48 0.23333	4
37 29 30	0.60 0.23333	Posicao Valor
37 30 31	0.72 0.23333	17 1000.0
37 31 38	0.00 0.35000	18 -24.60
37 38 45	0.12 0.35000	227 -1000.0
37 45 44	0.24 0.35000	228 -4.05
37 44 43	0.36 0.35000	Carga distribuida de
37 43 36	0.48 0.35000	placa
39 38 31	0.60 0.35000	0
39 31 32	0.72 0.35000	Numero de carga
39 32 33	0.00 0.46667	distribuida de chapa
39 33 40	0.12 0.46667	0
39 40 47	0.24 0.46667	No1 No2 Valor
39 47 46	0.36 0.46667	Angulo
39 46 45	0.48 0.46667	Numero de divisoes
39 45 38	0.60 0.46667	1
41 40 33	0.72 0.46667	
41 33 34	0.00 0.58333	

Saída dos resultados são os arquivos criados: RIGIDEZ.DAT e MASSA.DAT

4.2.2 Programa JACOBI.EXE

Entrada dos dados: RIGIDEZ.DAT e MASSA.DAT. Saída dos resultados do arquivo autovalor.dat são:

*** Autovalor e Frequências Naturais (Hz) ***

```
Eigv[ 1]= 875.73 F.nat[ 1]= 4.71
Eigv[ 2]= 4880.26 F.nat[ 2]= 11.12
Eigv[ 3]= 33104.97 F.nat[ 3]= 28.96
Eigv[ 4]= 55107.45 F.nat[ 4]= 37.36
Eigv[ 5]= 72196.16 F.nat[ 5]= 42.76
Eigv[ 6]= 223344.80 F.nat[ 6]= 75.22
Eigv[ 7]= 279052.70 F.nat[ 7]= 84.07
Eigv[ 8]= 322503.00 F.nat[ 8]= 90.38
Eigv[ 9]= 381917.80 F.nat[ 9]= 98.36
Eigv[10]= 649117.30 F.nat[10]= 128.23
```

Arquivo de saída gerado: AUTOVETOR.DAT, é um arquivo de matriz que contém deslocamentos de cada nó nas direções x, y e z.

4.2.3 Programa MATLAB

Faz-se a leitura do arquivo AUTOVETOR.DAT, e as coordenadas dos nós e assim plota-se o modo de vibração da placa geometricamente não-linear.

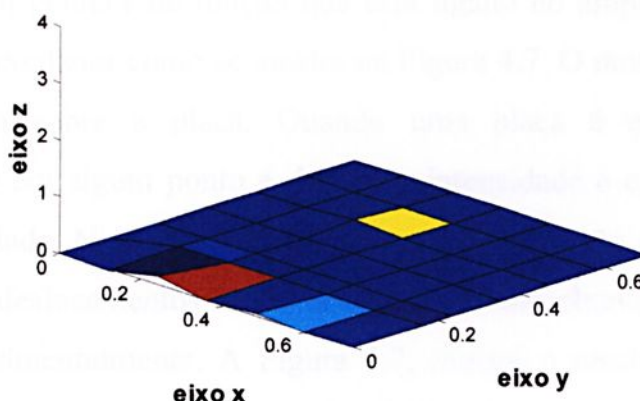


FIGURA 4.5 – Modo 3 de vibração da placa geometricamente não-linear.

4.3 Ensaios experimentais da placa em balanço geometricamente linear

Para se obter as frequências naturais através de ensaios experimentais, primeiramente coloca-se o acelerômetro sobre a placa, que está conectado ao analisador de sinais. Com um martelo de impacto, excita-se a placa, e registra-se as frequências naturais e posteriormente faz-se a leitura das frequências naturais no analisador de sinais.

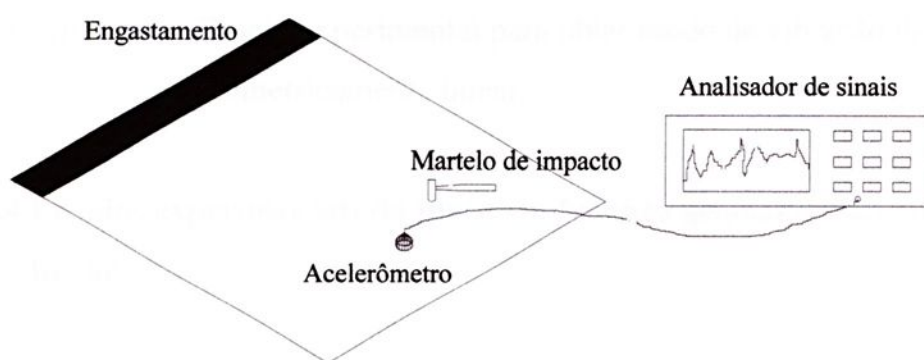


FIGURA 4.6 – Esquema de ensaio experimental da placa geometricamente linear.

Com a frequência natural obtida anteriormente, sintoniza-se esta frequência num gerador de função que está ligado no amplificador e este se interliga com excitador como se mostra na Figura 4.7. O modo é formado pela areia colocada sobre a placa. Quando uma placa é excitada, ocorrem vibrações, que em algum ponto é de maior intensidade e em outro ponto de menor intensidade. Neste local ou região aonde a vibração ocorre com maior intensidade há deslocamentos de areia e desta forma obteve-se os modos de vibração experimentalmente. A Figura 4.7, mostra o resultado de modo de vibração de placa em balanço geometricamente linear.



FIGURA 4.7 – Ensaio experimental para obter modo de vibração da placa geometricamente linear.

4.4 Ensaios experimentais da placa em balanço geometricamente não-linear

Para simular uma placa com comportamento geometricamente não-linear, utilizou-se um tensionador para aplicar a força que causa uma tensão de compressão na placa. Assim a força desejada foi controlada pela célula de carga e registrada na ponte extensiométrica para sua leitura da força. O passo seguinte é colocar o acelerômetro sobre a placa que se liga ao analisador de sinais. Com um martelo de impacto excita-se a placa e em seguida faz-se a leitura das frequências naturais da placa geometricamente não-linear.

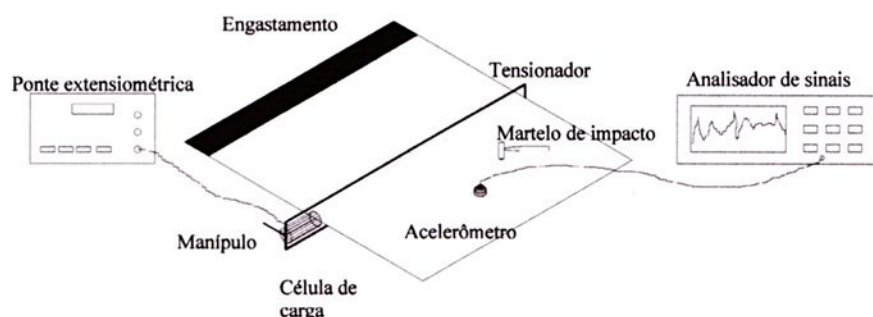


FIGURA 4.8 – Esquema de ensaio experimental da placa geometricamente não-linear.

Neste caso a placa geometricamente não-linear é semelhante ao de caso linear. Apenas um tensionador irá introduzir força de compressão na placa. A força aplicada paralela à placa é obtida com o aperto de parafuso que atua sobre a célula de carga que comprime a placa. Para conhecer a força que atua sobre a placa é feita através da ponte extensiométrica, que está ligada à célula de carga como se mostra na Figura 4.9. A formação do modo segue o mesmo procedimento do caso da placa geometricamente linear. A Figura 4.9, mostra o modo de vibração obtido através de ensaio experimental. No Anexo B estão as fotografias dos equipamentos utilizados nos ensaios experimentais.

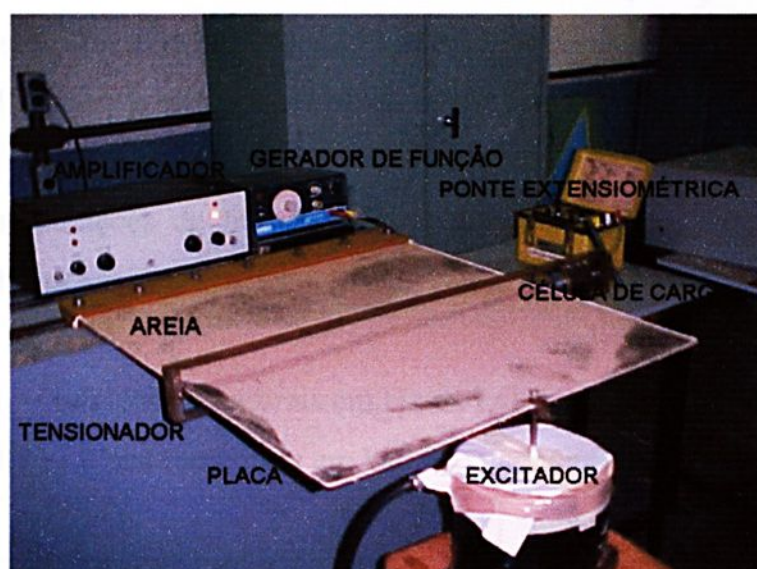


FIGURA 4.9 – Ensaio experimental para obter modo de vibração da placa geometricamente não-linear.

5 RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS DE PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE LINEAR

Para o cálculo teórico de freqüências naturais utilizou-se programa MEFLINEAR.EXE de Ide (1995). O programa lê arquivo DADOS que contém informações da placa. A saída são dois arquivos criados: rigidez.dat e massa.dat. Em seguida utiliza programa JACOBI.EXE, que lê os dois arquivos: rigidez.dat e massa.dat. A saída é autovalor (freqüências naturais em Hz) e um arquivo autovetor.dat Estes resultados de freqüências naturais, para placa em balanço geometricamente linear chamou-se de TESE(L), e de ensaio experimental como Experimental(L) ou Exper.(L). Comparou-se os resultados de freqüências naturais obtidos com as fontes de Leissa (1969), e programa comercial ANSYS. Para se efetuar as comparações de freqüências naturais montou-se tabela e gráfico. O gráfico possibilita uma comparação visual.

TABELA 5.1 - Freqüências naturais em Hz de Leissa, ANSYS, TESE(L) e Experimental(L) - Placa retangular em balanço geometricamente linear.

Modos	1	2	3	4	5	6
Leissa	5,20	12,72	31,98	40,96	46,49	-
ANSYS	5,17	13,01	31,93	42,41	47,15	83,59
TESE(L)	5,17	13,03	32,26	42,06	47,12	82,05
Exper.(L)	5,20	13,20	32,40	41,20	46,00	80,40

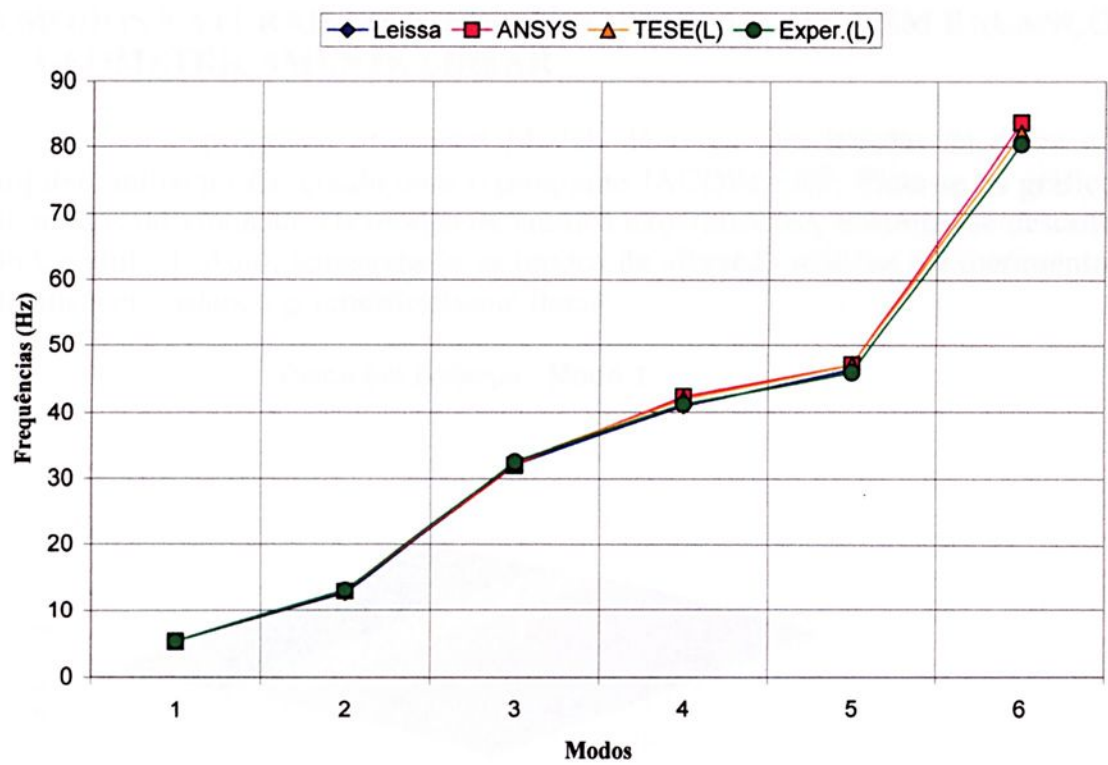


FIGURA 5.1 - Frequências naturais de placa retangular em balanço.

TABELA 5.2 - Desvio percentual de TESE(L) com Leissa, ANSYS e Experimental(L) – Placa retangular em balanço geometricamente linear.

Modos	1	2	3	4	5	6
TESE(L) x Leissa	0,58%	2,38%	0,87%	2,62%	1,34%	
TESE(L) x ANSYS	0,00%	0,15%	1,02%	0,83%	0,06%	1,88%
TESE(L) x Exper.(L)	0,58%	1,30%	0,43%	2,04%	2,38%	2,01%

6 MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE LINEAR

Com o programa comercial Matlab, lê-se as coordenadas da placa e o arquivo autovetor.dat criado com o programa JACOBI.EXE. Plota-se os gráficos de modos de vibração. Os modos de ensaios experimentais, encontra-se descritos no Capítulo 4. Aqui, apresenta-se os modos de vibração teóricos e experimentais da placa em balanço geometricamente linear.

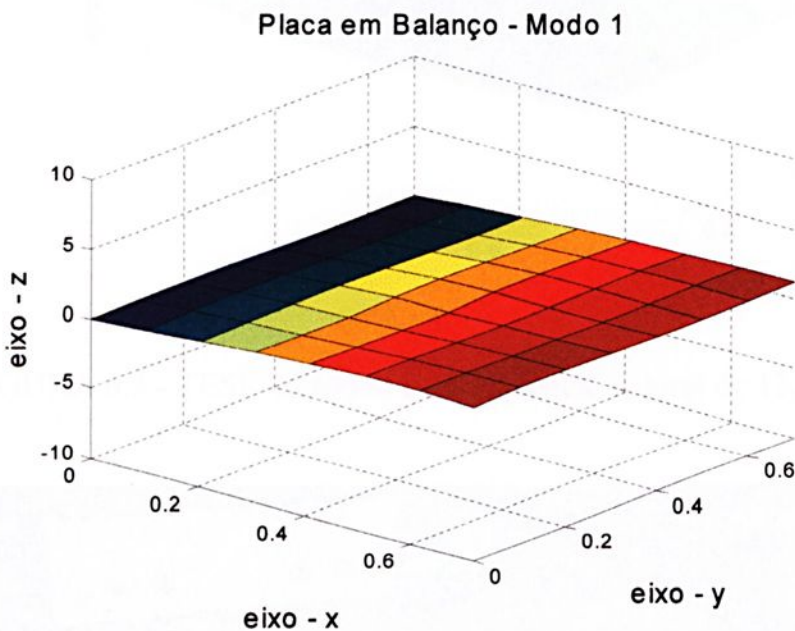


FIGURA 6.1 - TESE(L) modo 1 - Frequência natural de 5,17 Hz

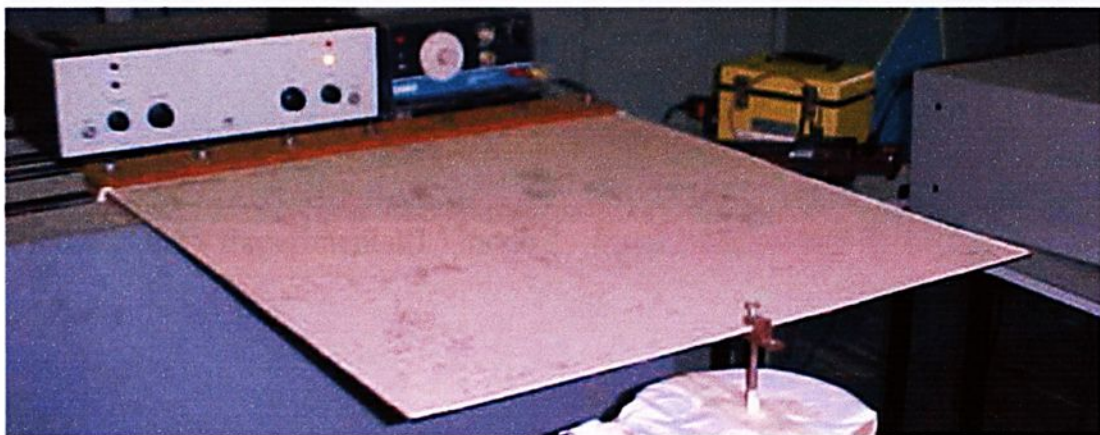


FIGURA 6.2 - Experimental(L) modo 1 - Frequência natural de 5,20 Hz

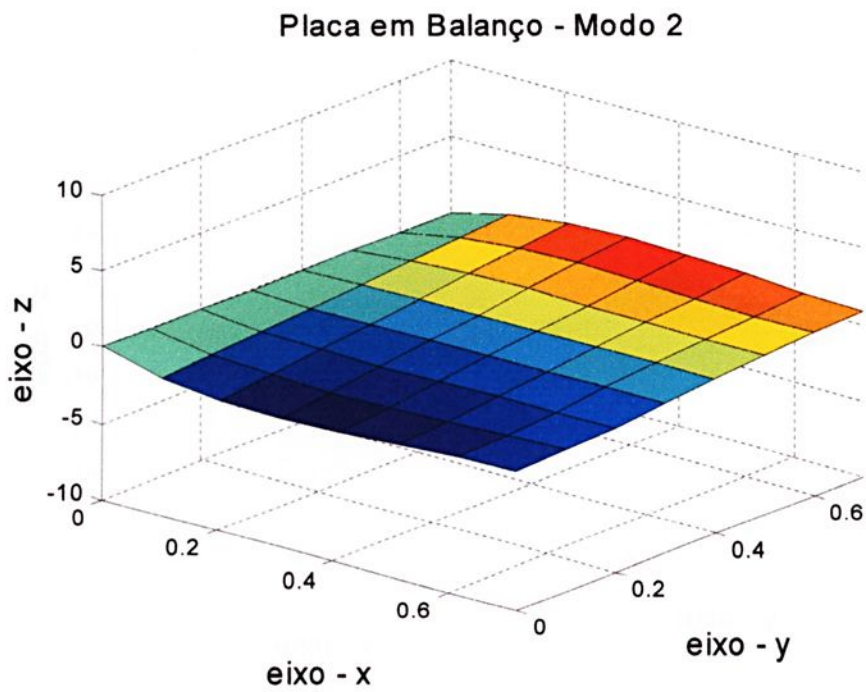


FIGURA 6.3 - TESE(L) modo 2 - Frequência natural de 13,03 Hz

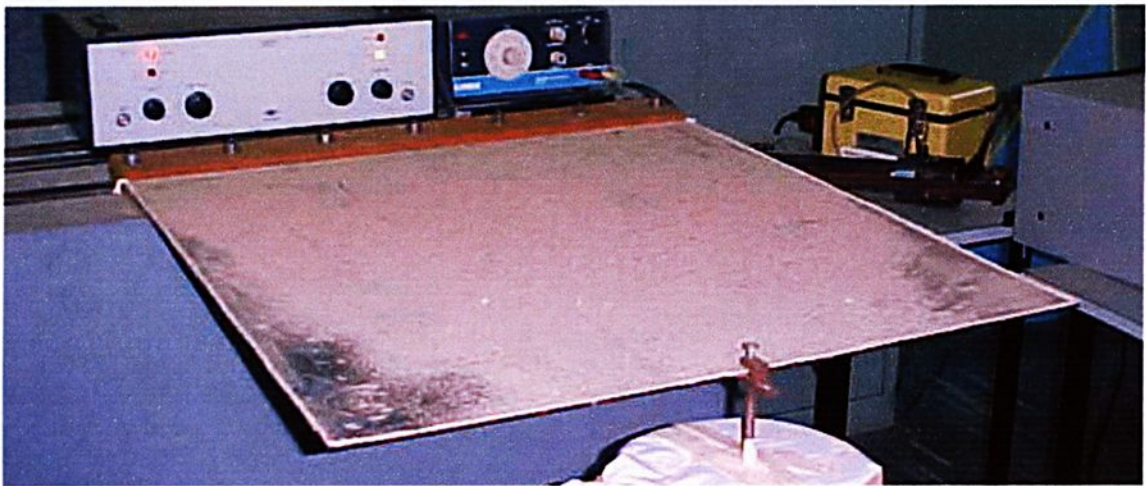


FIGURA 6.4 - Experimental(L) modo 2 - Frequência natural de 13,20 Hz

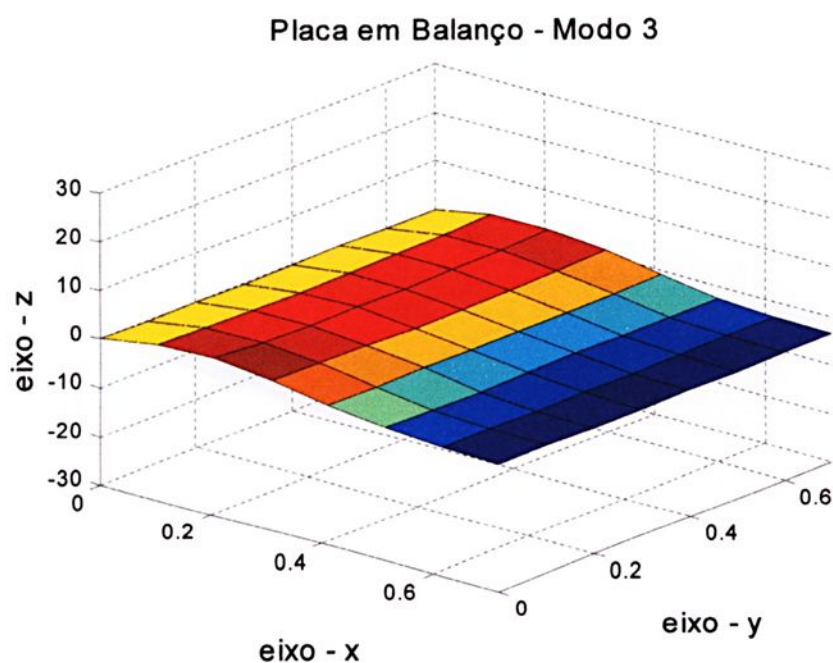


FIGURA 6.5 - TESE(L) modo 3 - Frequência natural de 32,26 Hz



FIGURA 6.6 - Experimental(L) modo 3 - Frequência natural de 32,40 Hz

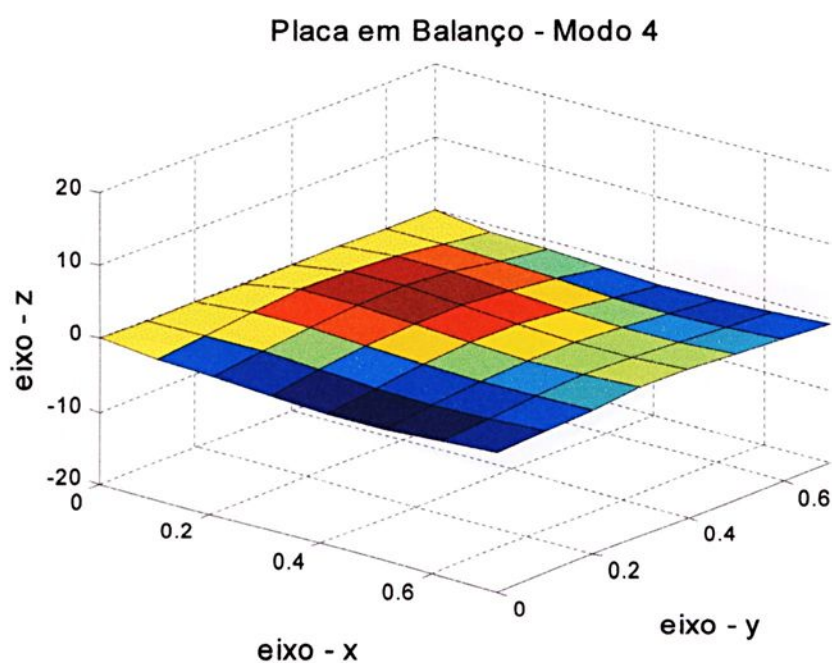


FIGURA 6.7 - TESE(L) modo 4 - Frequência natural de 42,06 Hz



FIGURA 6.8 - Experimental(L) modo 4 - Frequência natural de 41,20 Hz

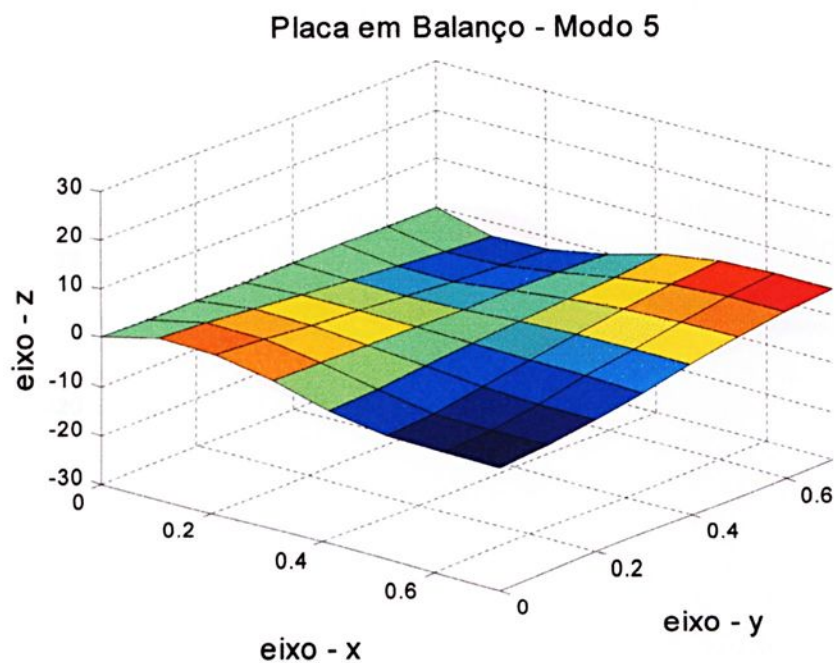


FIGURA 6.9 - TESE(L) modo 5 - Frequência natural de 47,12 Hz

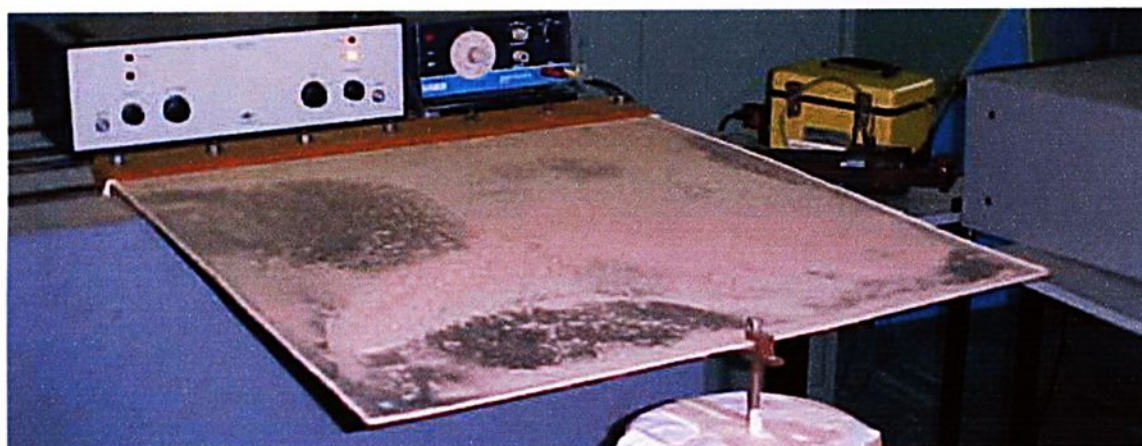


FIGURA 6.10 - Experimental(L) modo 5 - Frequência natural de 46,00 Hz

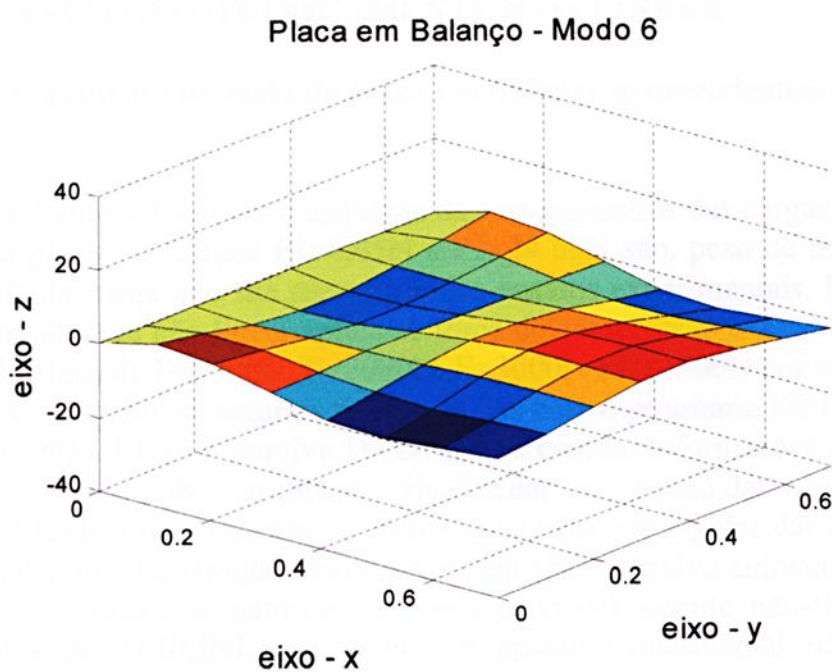


FIGURA 6.11 - TESE(L) modo 6 - Frequência natural de 82,05 Hz

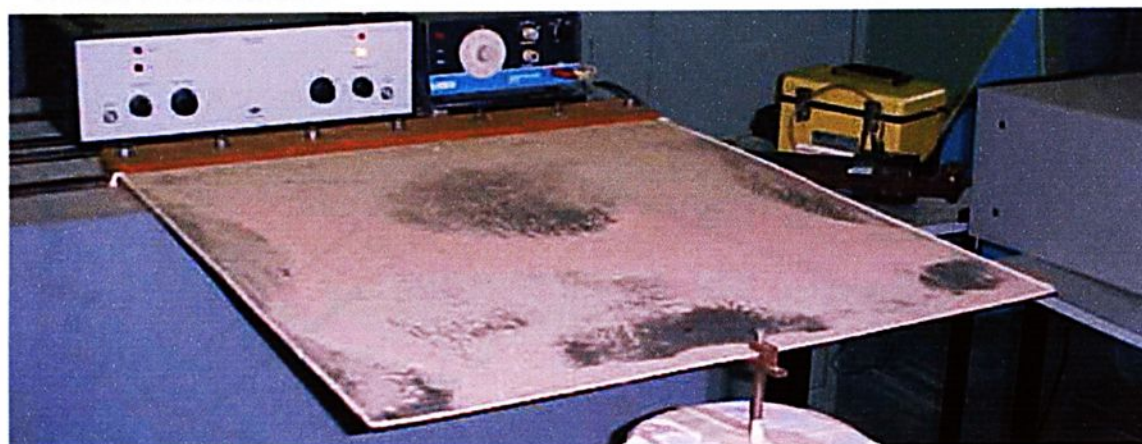


FIGURA 6.12 – Experimental(L) modo 6 - Frequência natural de 80,40 Hz

7 RESULTADOS TEÓRICOS E EXPERIMENTAIS DE PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR

7.1 Carregamento no meio da placa em balanço geometricamente não-linear

A figura 7.1 mostra o esquema de carregamentos das cargas atuantes no meio da placa. As cargas $P_1=4,05\text{N}$ e $P_2=24,60\text{N}$ são, peso de tensionador e da célula de carga que faz parte de todos ensaios experimentais. Para a placa geometricamente não-linear aplica-se força de compressão atuando paralela ao plano da placa de $F=1000\text{N}$, $F=2000\text{N}$, $F=3000\text{N}$ e $F=3500\text{N}$ por vez.

As frequências naturais foram obtidas com o programa MEFNLIN.EXE de Ide (1995). Lê-se o arquivo DADOS que contém informações da placa em balanço. Saída são arquivos: rigidez.dat e massa.dat. O programa JACOBI.EXE, como entrada de dados lê-se arquivos rigidez.dat e massa.dat. A saída é autovalor (frequências naturais em Hz) e arquivo autovetor.dat

As frequências naturais da placa geometricamente não-linear, foram chamados de TESE(NL) ou T(NL), o ensaio experimental não-linear de Experimental(NL) ou E(NL) e placa geometricamente linear de TESE(L) ou T(L). Apresenta-se tabelas e gráficos com três frequências naturais de casos citadas anteriormente.

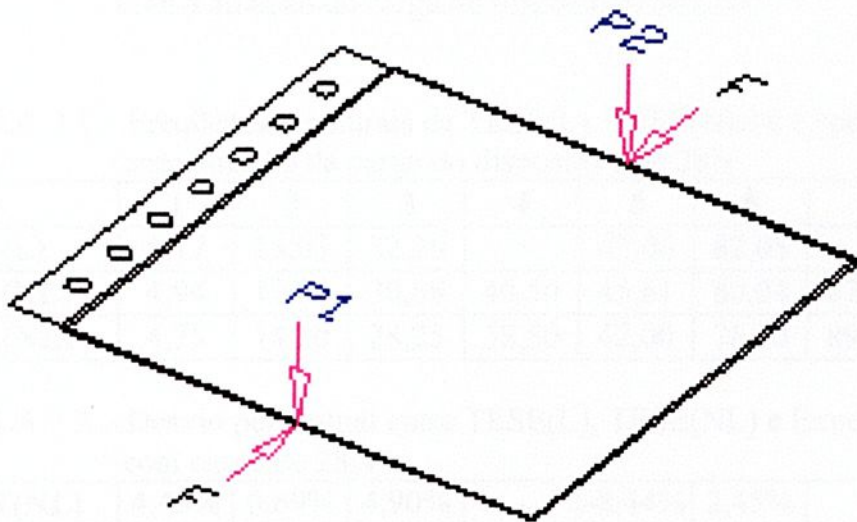


FIGURA 7.1 – Esquema de carregamentos no meio da placa geometricamente não-linear.

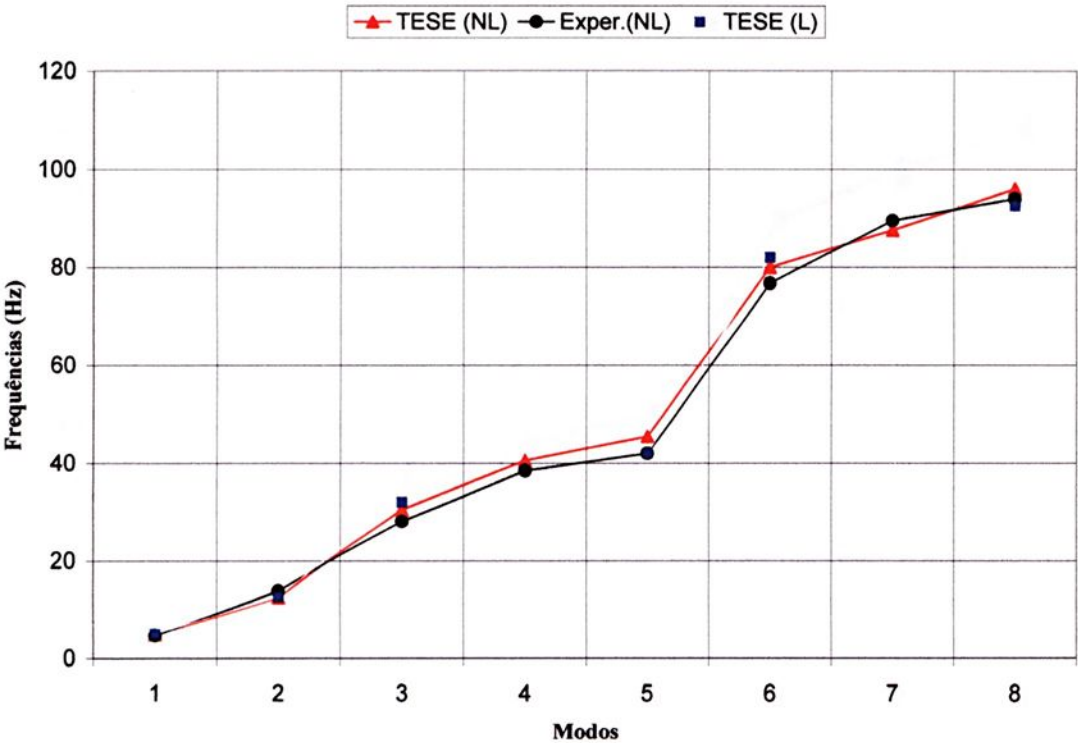


FIGURA 7.2 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo de 28N

TABELA 7.1 – Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com atuação da carga do dispositivo de 28N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	-	42,06	82,05	-	92,68
TESE (NL)	4,94	12,94	30,68	40,50	45,61	80,04	87,70	96,00
Exper.(NL)	4,75	14,20	28,25	38,50	42,00	76,80	89,60	94,00

TABELA 7.2 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com carga de 28N

T(L)xT(NL)	4,45%	0,69%	4,90%	-	-8,44%	2,45%	-	-3,58%
T(L)xE(NL)	8,12%	-8,98%	12,43%	-	0,14%	6,40%	-	-1,42%
T(NL)xE(NL)	3,85%	-9,74%	7,92%	4,94%	7,91%	4,05%	-2,17%	2,08%

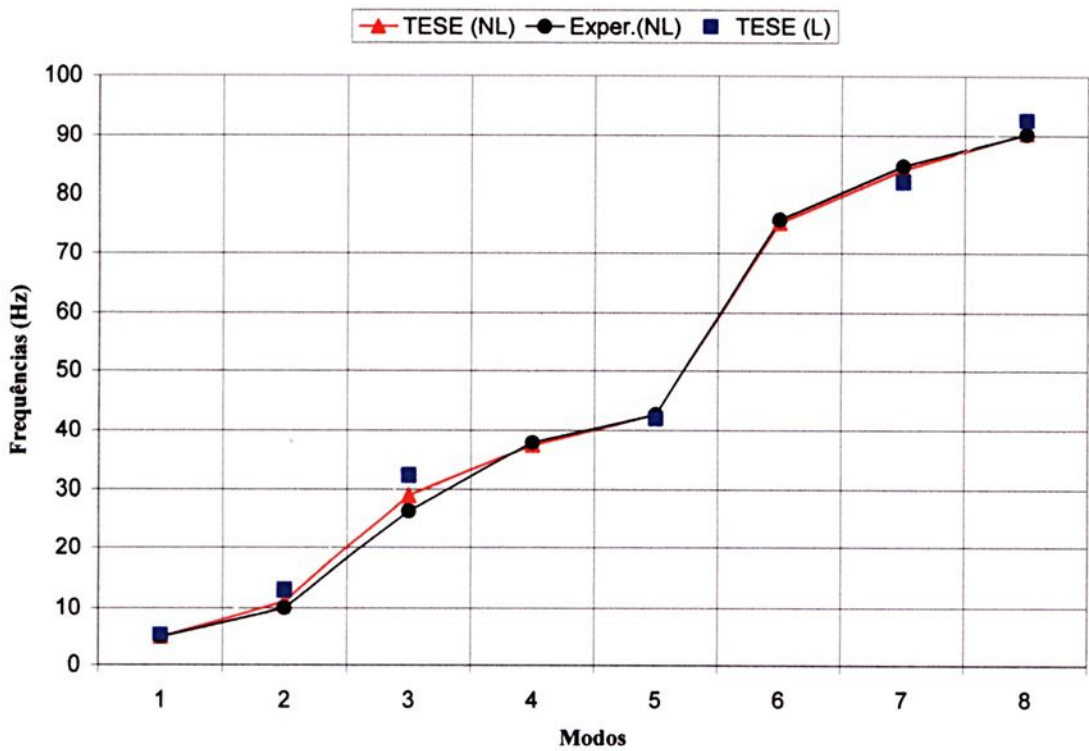


FIGURA 7.3 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 1000N.

TABELA 7.3 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	-	42,06	-	82,05	92,68
TESE (NL)	4,71	11,12	28,96	37,36	42,76	75,22	84,07	90,38
Exper.(NL)	4,75	10,00	26,37	37,87	42,75	75,75	84,70	90,20

TABELA 7.4 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N

T(L)xT(NL)	8,90%	14,66%	10,23%	-	-1,66%	-	-2,46%	2,48%
T(L)xE(NL)	8,12%	23,25%	18,26%	-	-1,64%	-	-3,23%	2,68%
T(NL)xE(NL)	-0,85%	10,07%	8,94%	-1,37%	0,02%	-0,70%	-0,75%	0,20%

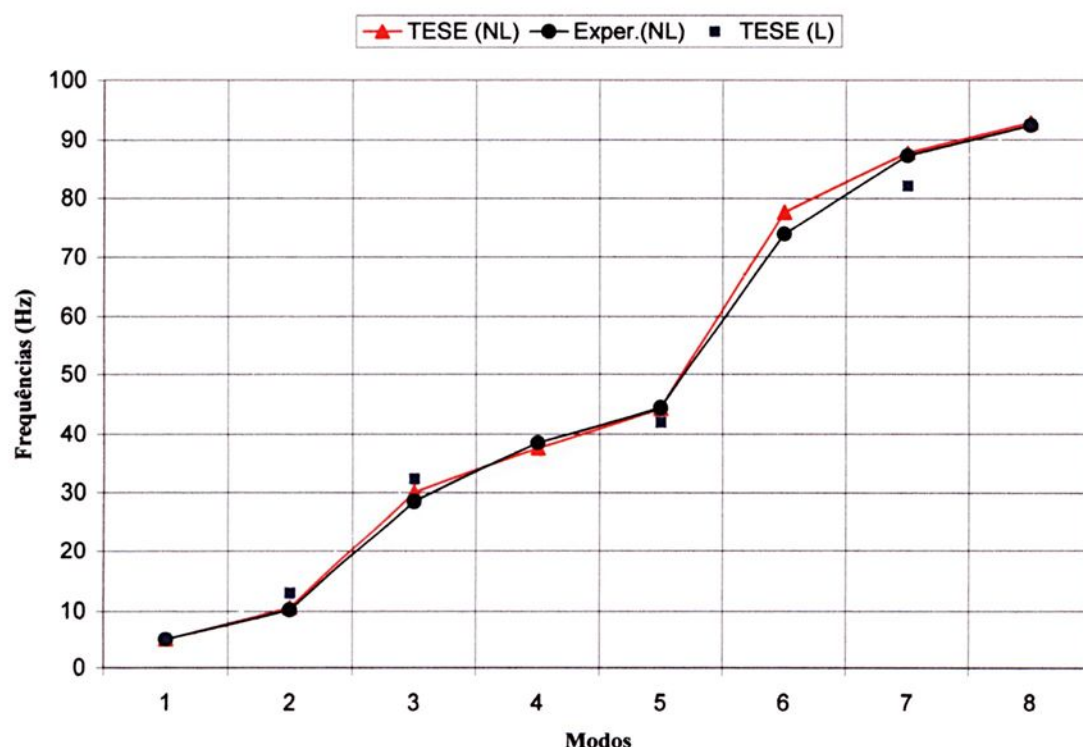


FIGURA 7.4 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 2000N.

TABELA 7.5 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 2000N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	-	42,06	-	82,05	92,68
TESE (NL)	4,94	10,59	29,99	37,46	44,35	77,67	87,70	93,00
Exper.(NL)	5,00	10,20	28,50	38,50	44,50	74,00	87,20	92,50

TABELA 7.6 – Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 2000N

T(L)xT(NL)	4,45%	18,73%	7,04%	-	-5,44%	-	-6,89%	-0,35%
T(L)xE(NL)	3,29%	21,72%	11,66%	-	-5,80%	-	-6,28%	0,19%
T(NL)xE(NL)	-1,21%	3,68%	4,97%	-2,78%	-0,34%	4,73%	0,57%	0,54%

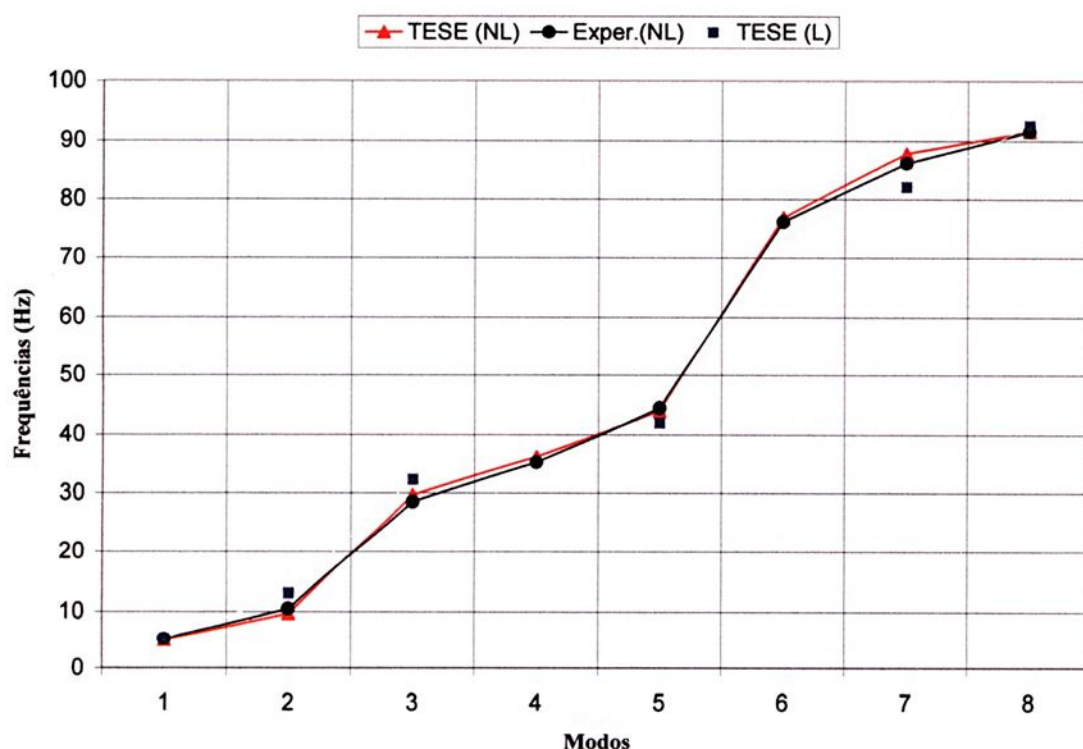


FIGURA 7.5 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 3000N.

TABELA 7.7 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), força de 3000N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	-	42,06	-	82,05	92,68
TESE (NL)	4,96	9,64	29,57	36,12	44,07	76,89	87,78	91,68
Exper.(NL)	5,20	10,50	28,50	35,20	44,50	76,20	86,10	91,60

TABELA 7.8 - Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3000N

T(L)xT(NL)	4,06%	26,02%	8,34%	-	-4,78%	-	-6,98%	1,08%
T(L)xE(NL)	-0,58%	19,42%	11,66%	-	-5,80%	-	-4,94%	1,17%
T(NL)xE(NL)	-4,84%	-8,92%	3,62%	2,55%	-0,98%	0,90%	1,91%	0,09%

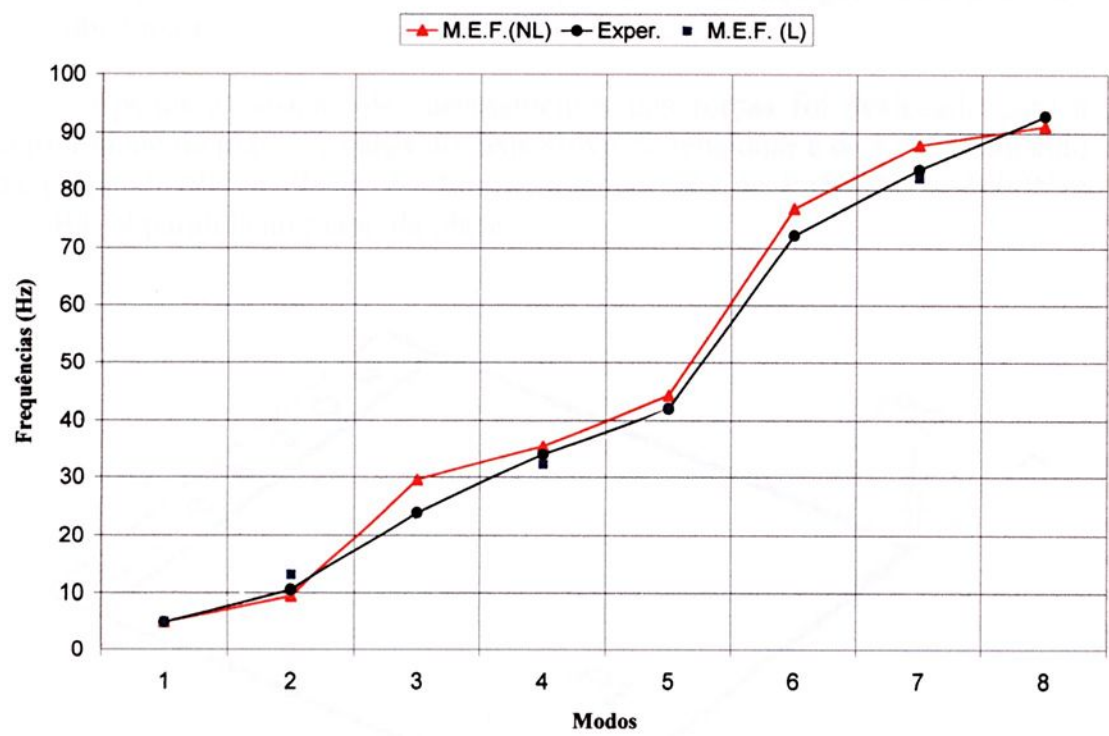


FIGURA 7.6 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 3500N.

TABELA 7.9 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3500N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	-	32,26	42,06	-	82,05	92,68
TESE (NL)	5,03	9,48	29,52	35,52	44,23	76,78	87,88	91,20
Exper.(NL)	5,00	10,50	24,00	34,00	42,00	72,20	83,50	93,00

TABELA 7.10 - Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 3500N

T(L)xT(NL)	2,71%	27,24%	-	-10,11%	-5,16%	-	-7,11%	1,60%
T(L)xE(NL)	3,29%	19,42%	-	-5,39%	0,14%	-	-1,77%	-0,35%
T(NL)xE(NL)	0,60%	-10,76%	18,70%	4,28%	5,04%	5,97%	4,98%	-1,97%

7.2 Carregamento na extremidade da placa em balanço geometricamente não-linear

Apenas a posição de carregamentos das forças foi deslocada para a extremidade da placa. A carga do dispositivo de tensionar é de $F=28\text{N}$ atuando na perpendicular à placa. As forças atuantes são de $F=800\text{N}$, $F=1000\text{N}$ e $F=1400\text{N}$ paralela ao plano da placa.

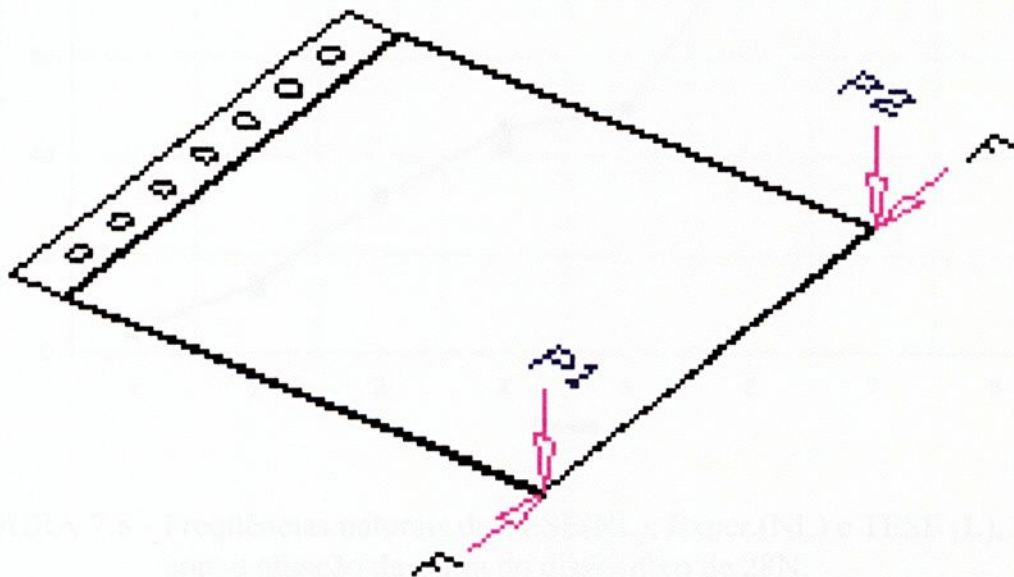


FIGURA 7.7 – Esquema de carregamentos na extremidade da placa geometricamente não-linear.

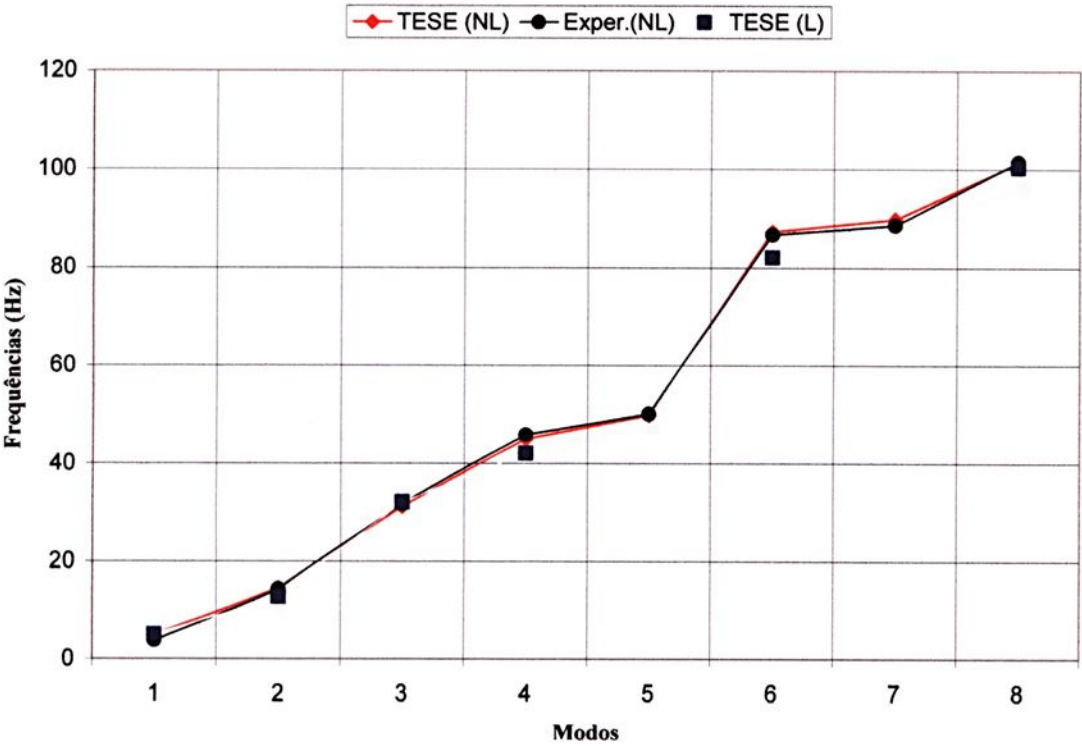


FIGURA 7.8 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo de 28N.

TABELA 7.11 – Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a carga de 28N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	42,06	-	82,05	-	100,4
TESE (NL)	5,09	14,74	31,41	45,04	50,01	87,46	89,96	101,29
Exper.(NL)	3,75	14,50	32,00	46,00	50,25	86,75	88,75	101,50

TABELA 7.12 - Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a carga de 28N

T(L)xT(NL)	1,55%	-13,12%	2,63%	-7,09%	-	-6,59%	-	-0,85%
T(L)xE(NL)	27,47%	-11,28%	0,81%	-9,37%	-	-5,73%	-	-1,06%
T(NL)xE(NL)	26,33%	1,63%	-1,88%	-2,13%	-0,48%	0,81%	1,35%	-0,21%

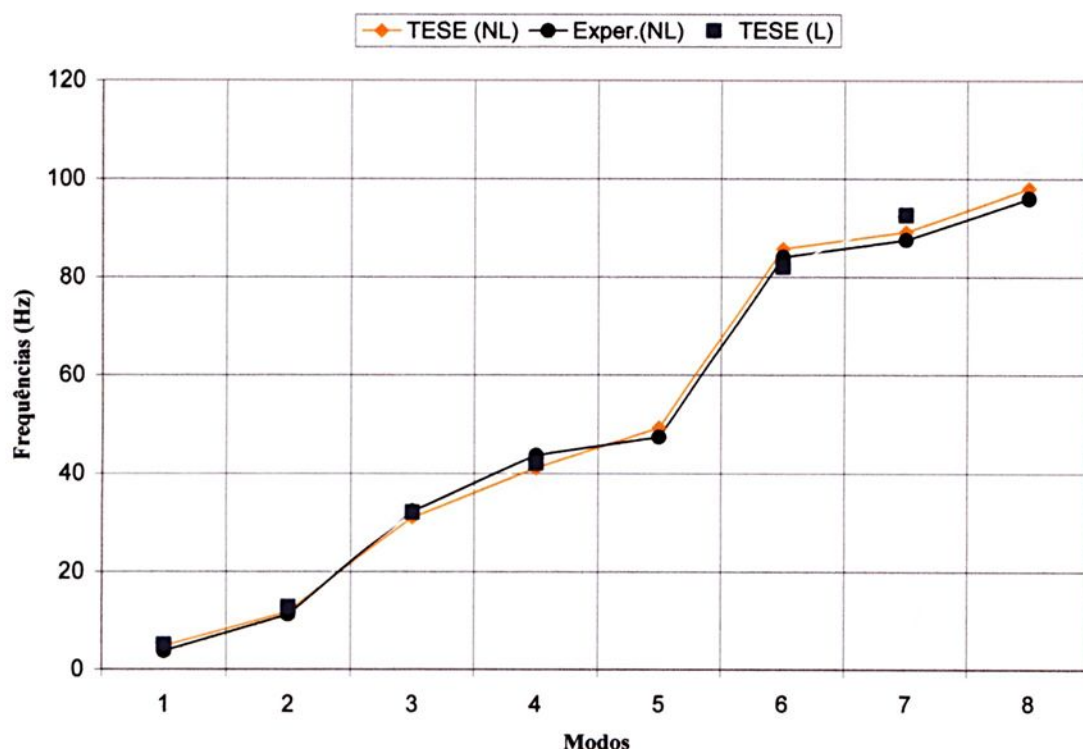


FIGURA 7.9 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 800N.

TABELA 7.13 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), força de 800N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	42,06	-	82,05	92,68	100,44
TESE (NL)	4,79	12,20	31,22	41,06	49,43	85,75	89,19	98,04
Exper.(NL)	3,75	11,60	32,50	43,70	47,50	84,00	87,50	96,00

TABELA 7.14 - Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 800N

T(L)xT(NL)	7,35%	6,37%	3,22%	2,38%	-	-4,51%	3,77%	2,39%
T(L)xE(NL)	27,47%	10,97%	-0,74%	-3,90%	-	-2,38%	5,59%	4,42%
T(NL)xE(NL)	21,71%	4,92%	-4,10%	-6,43%	3,90%	2,04%	1,89%	2,08%

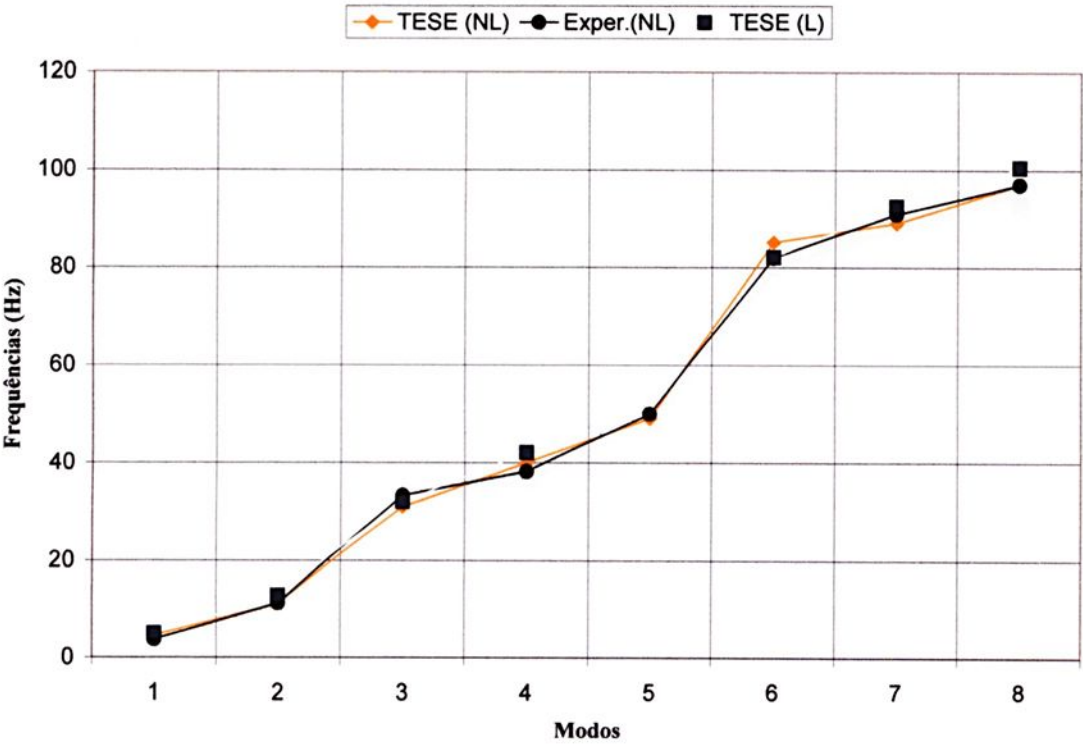


FIGURA 7.10 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 1000N.

TABELA 7.15 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), força de 1000N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	42,06	-	82,05	92,68	100,44
TESE (NL)	4,61	11,52	31,20	39,88	49,27	85,17	89,1	97,07
Exper.(NL)	3,75	11,50	33,50	38,20	50,20	82,00	91,00	97,00

TABELA 7.16 - Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1000N

T(L)xT(NL)	10,83%	11,59%	3,29%	5,18%	-	-3,80%	3,86%	3,36%
T(L)xE(NL)	27,47%	11,74%	-3,84%	9,18%	-	0,06%	1,81%	3,42%
T(NL)xE(NL)	18,66%	0,17%	-7,37%	4,21%	-1,89%	3,72%	-2,13%	0,07%

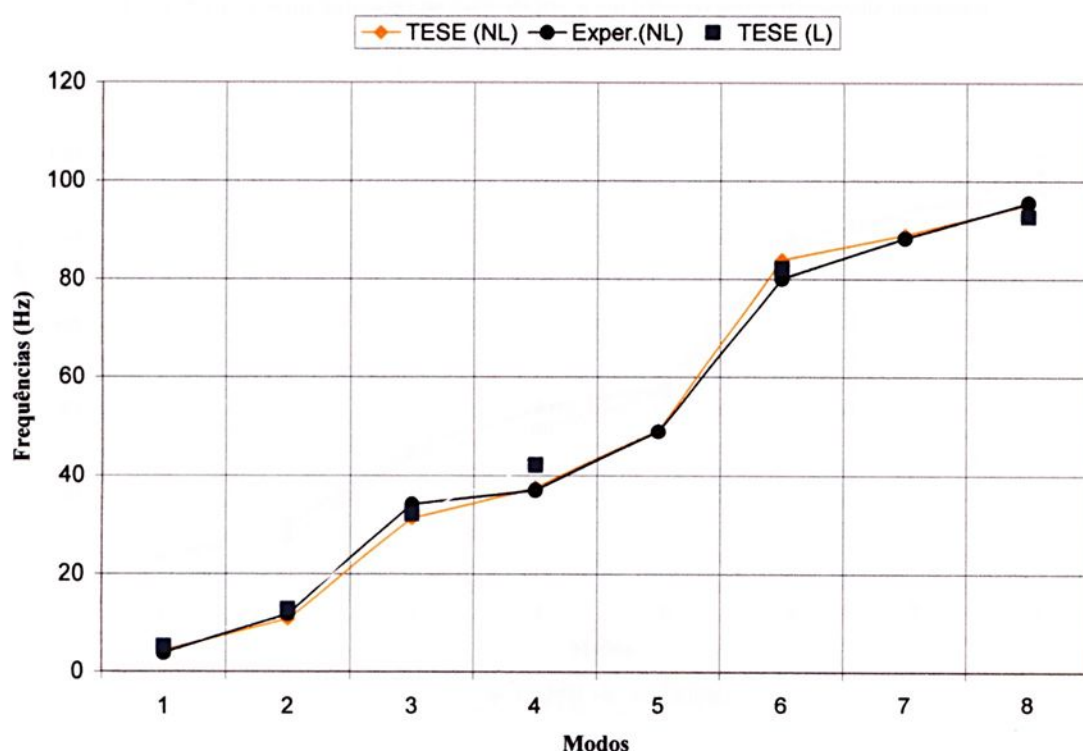


FIGURA 7.11 - Frequências naturais de TESE(NL), Exper.(NL) e TESE (L), com a atuação da carga do dispositivo mais a força de 1400N.

TABELA 7.17 - Frequências naturais de TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1400N

Modos	1	2	3	4	5	6	7	8
TESE (L)	5,17	13,03	32,26	42,06	-	82,05	-	92,68
TESE (NL)	4,19	10,87	31,37	37,55	49,21	83,83	88,89	95,27
Exper.(NL)	3,75	12,00	34,27	37,10	49,00	80,10	88,20	95,60

TABELA 7.18 - Desvio percentual entre TESE(L), TESE(NL) e Exper.(NL), com a força de 1400N

T(L)xT(NL)	18,96%	16,58%	2,76%	10,72%	-	-2,17%	-	-2,79%
T(L)xE(NL)	27,47%	7,90%	-6,23%	11,79%	-	2,38%	-	-3,15%
T(NL)xE(NL)	10,50%	-10,40%	-9,24%	1,20%	0,43%	4,45%	0,78%	-0,35%

TESE(NL) - Forças aplicadas no meio da placa em balanço geometricamente não-linear

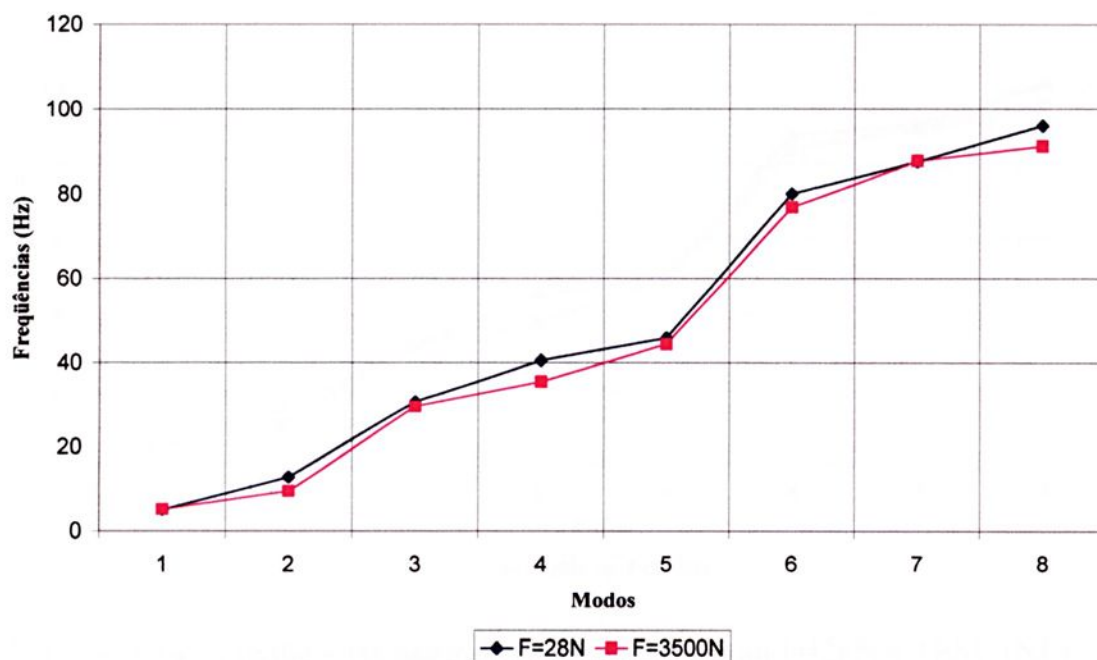


FIGURA 7.12 - Frequências naturais de TESE(NL) com $F=28\text{N}$ e TESE (NL) com $F=3500\text{N}$.

Experimental(NL) - Forças aplicadas no meio da placa em balanço geometricamente não-linear

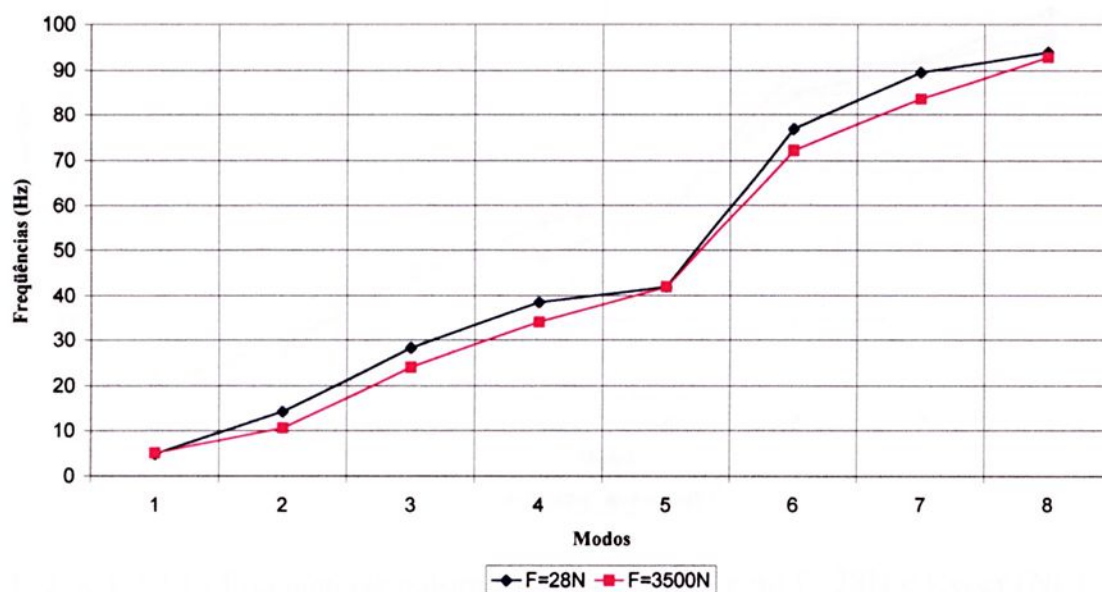
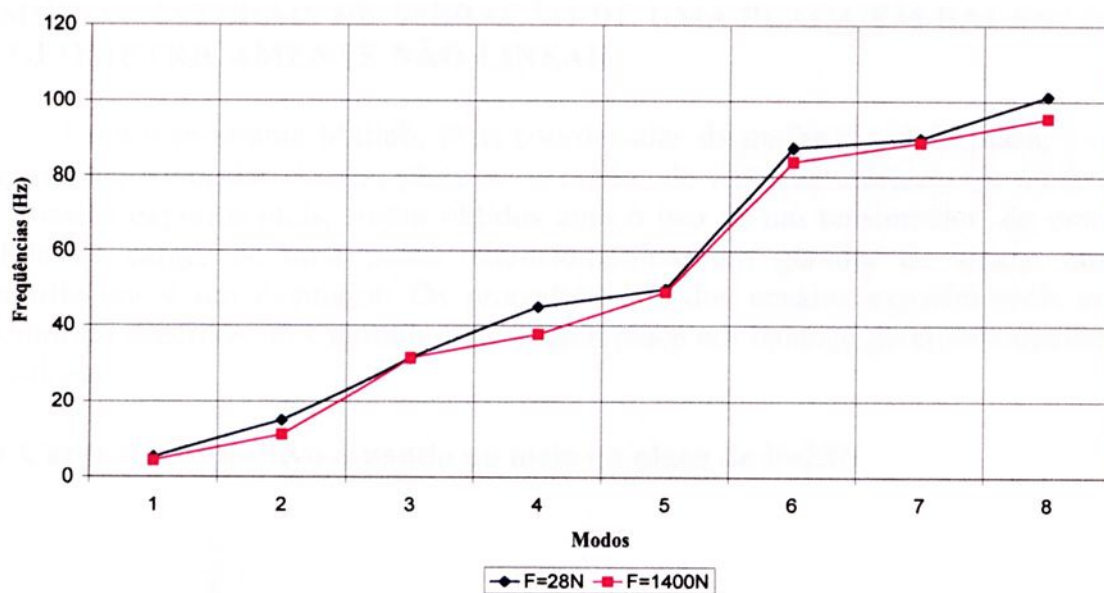
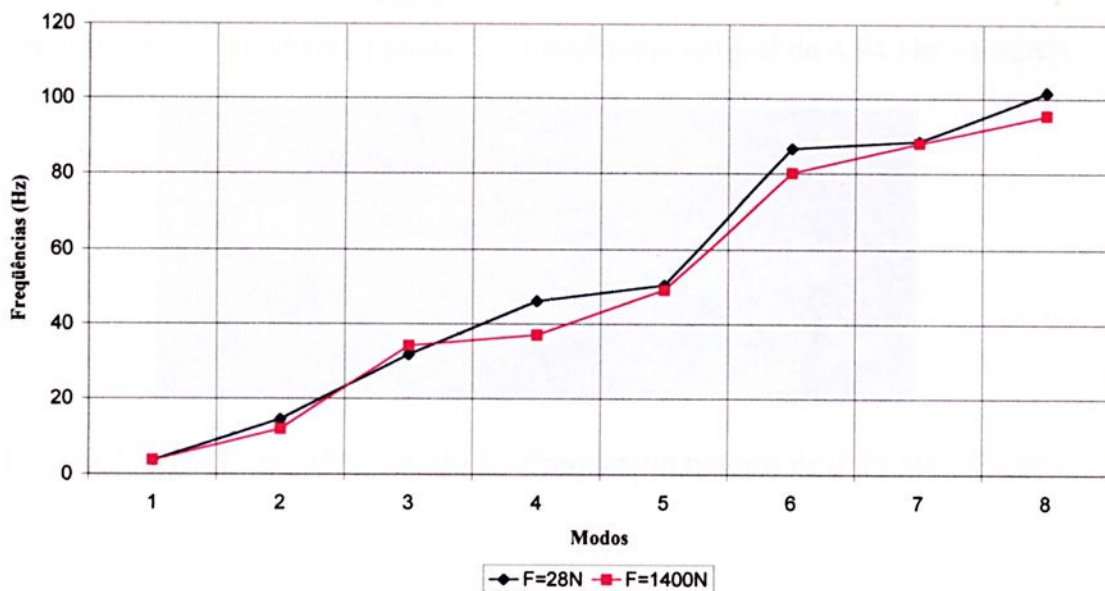


FIGURA 7.13 - Frequências naturais de Exper.(NL) com $F=28\text{N}$ e Exper.(NL) com $F=3500\text{N}$.

TESE(NL) - Forças aplicadas na extremidade da placa em balanço geométrico. Não-linear

FIGURA 7.14 - Frequências naturais de TESE(NL) com $F=28\text{N}$ e TESE (NL) com $F=1400\text{N}$.

Experimental(NL) - Forças aplicadas na extremidade da placa em balanço geométrico. não-linear

FIGURA 7.15 - Frequências naturais de Exper.(NL) com $F=28\text{N}$ e Exper.(NL) com $F=1400\text{N}$.

8 MODOS NATURAIS DE VIBRAÇÃO DE UMA PLACA EM BALANÇO GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEAR

Com o programa Matlab, lê as coordenadas da malha 6 x 6 da placa, e o arquivo autovetor.dat. Assim, plota-se os modos de vibração teóricos. Os modos de ensaios experimentais, foram obtidos com o uso de um tensionador, de uma célula de carga, de uma ponte extensiométrica, um gerador de sinais, um amplificador e um excitador. Os procedimentos dos ensaios experimentais se encontram descritos no Capítulo 4, para uma placa em balanço geometricamente não-linear.

8.1 Carga do dispositivo atuando no meio da placa de $F=28\text{N}$.

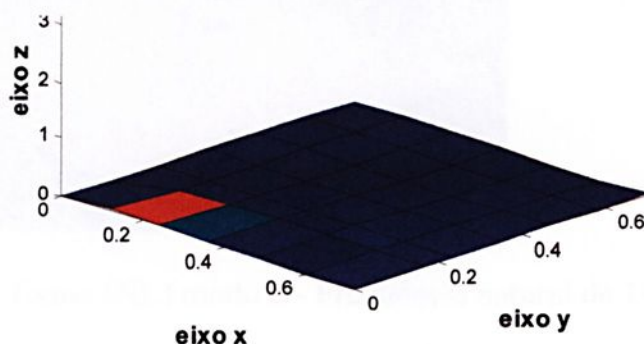


FIGURA 8.1 – TESE(NL) modo 1 – Frequência natural de 4,94 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.2 – Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural de 4,75 Hz - $F=28\text{N}$

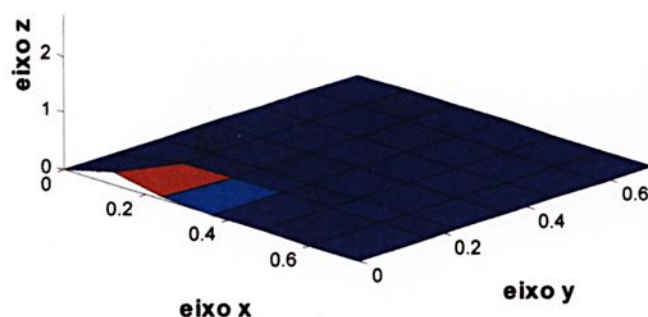


FIGURA 8.3 – TESE(NL) modo 2 – Frequência natural de 12,94 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.4 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural de 14,00 Hz – $F=28\text{N}$

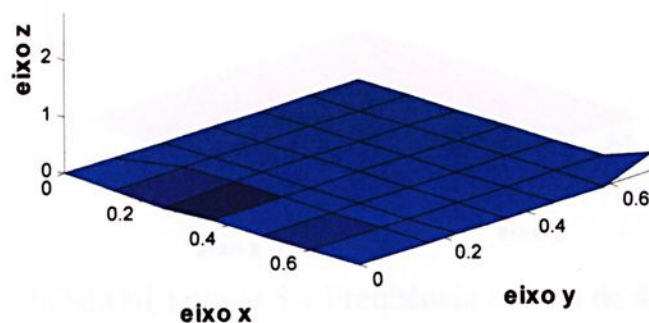


FIGURA 8.5 – TESE(NL) modo 3 – Frequência natural de 30,68 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.6 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural de 33,00 Hz – $F=28\text{N}$

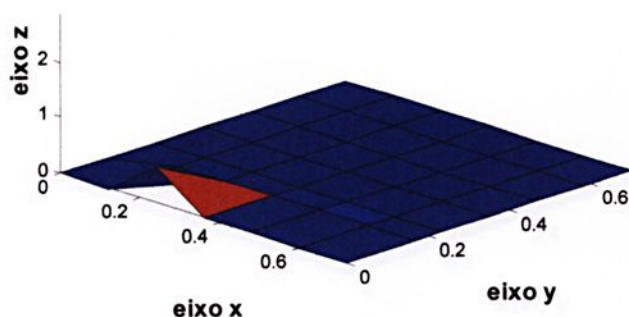


FIGURA 8.7 – TESE(NL) modo 4 – Frequência natural de 40,50 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.8 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural de 41,50 Hz – $F=28\text{N}$

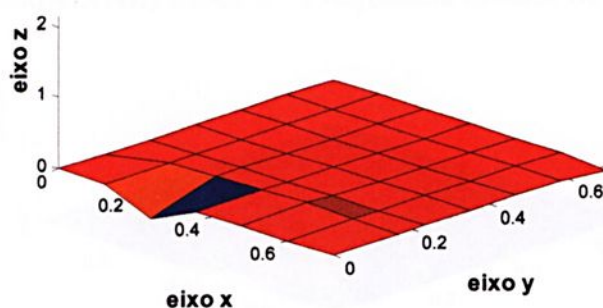


FIGURA 8.9 – TESE(NL) modo 5 – Frequência natural de 45,61 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.10 - Exper.(NL) modo 5 – Frequência natural de 46,70 Hz – $F=28\text{N}$

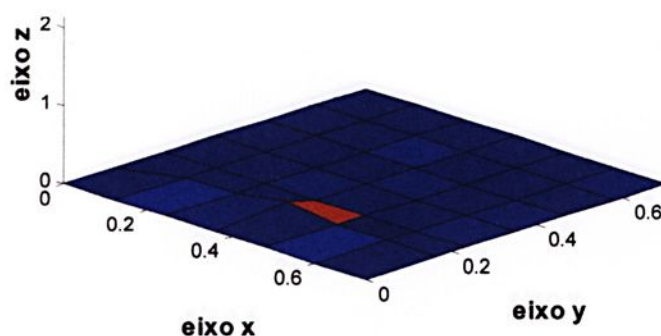


FIGURA 8.11 – TESE(NL) modo 6 – Frequência natural de 80,04 Hz – $F=28\text{N}$

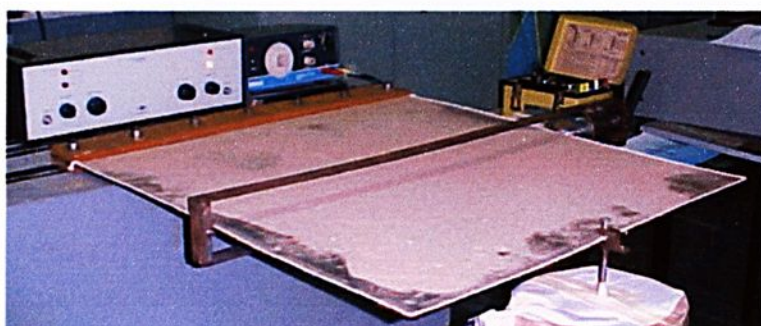


FIGURA 8.12 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural de 79,50 Hz – $F=28\text{N}$

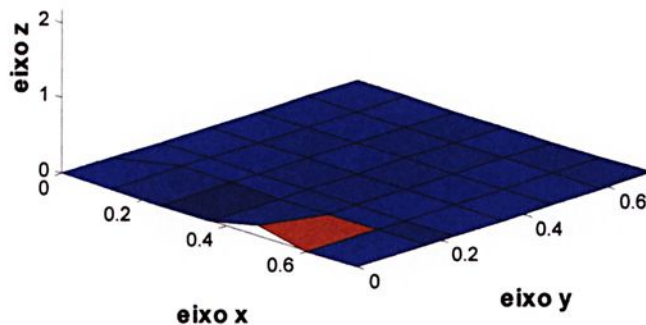


FIGURA 8.13 – TESE(NL) modo 7 – Frequência natural de 87,70 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.14 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural de 85,50 Hz – $F=28\text{N}$

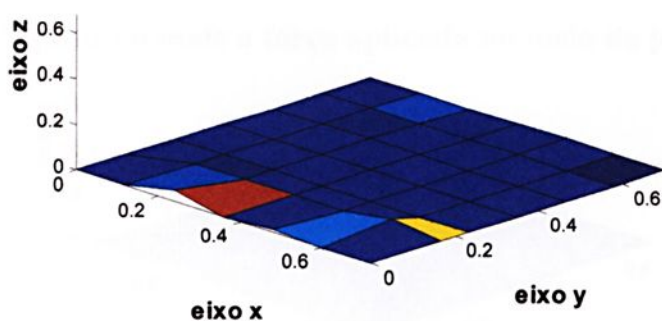


FIGURA 8.15 – TESE(NL) modo 8 – Frequência natural de 96,00 Hz – $F=28\text{N}$

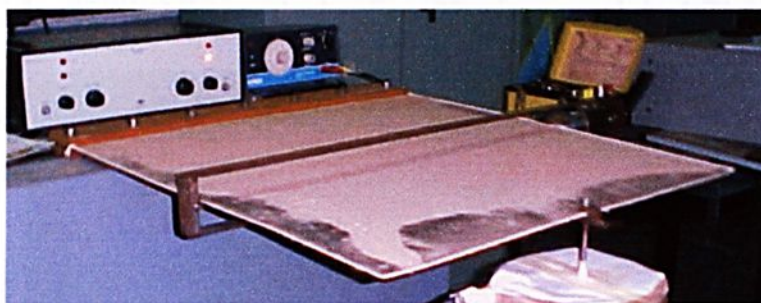


FIGURA 8.16 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural de 95,20 Hz – $F=28\text{N}$

8.2 Carga do dispositivo mais a força aplicada no meio da placa de $F=1000\text{N}$.

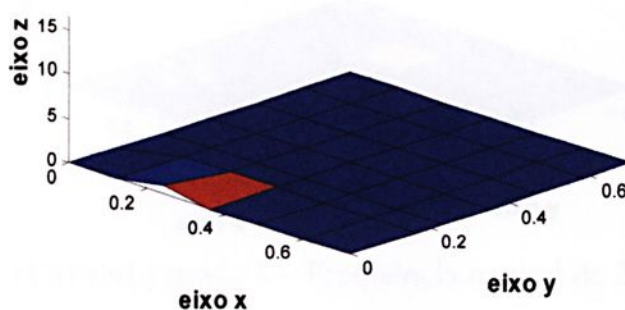


FIGURA 8.17 – TESE(NL) modo 1 – Frequência natural de 4,71 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.18 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural de 4,75 Hz - $F=1000\text{N}$

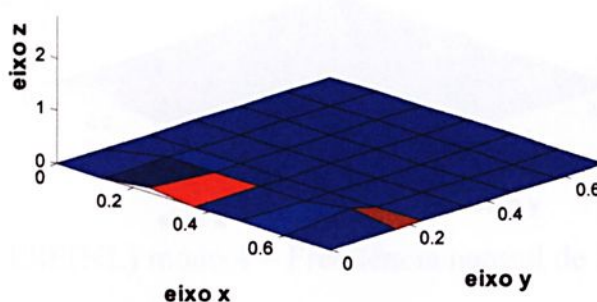


FIGURA 8.19 – TESE(NL) modo 2 – Frequência natural de 11,12 Hz - $F=1000\text{N}$

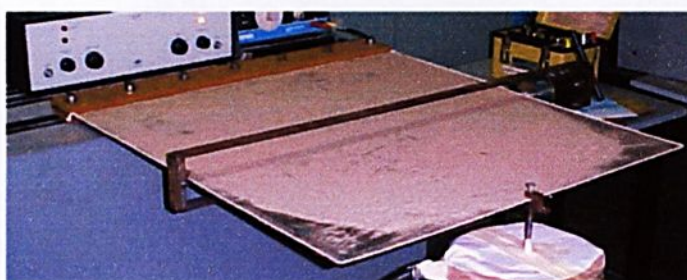


FIGURA 8.20 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural de 10,00 Hz - $F=1000\text{N}$

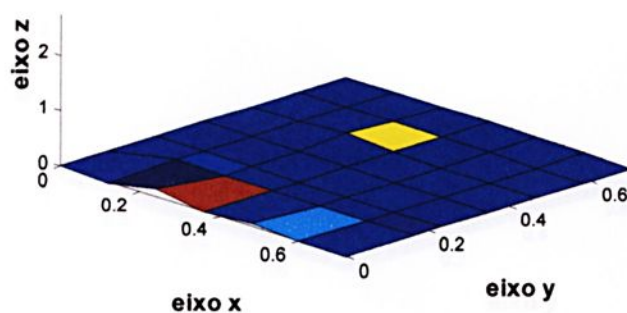


FIGURA 8.21 – TESE(NL) modo 3 – Frequência natural de 28,96 Hz - $F=1000\text{N}$

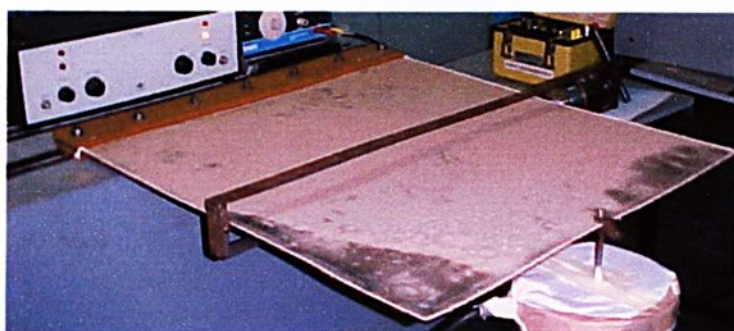


FIGURA 8.22 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural de 26,37 Hz - $F=1000\text{N}$

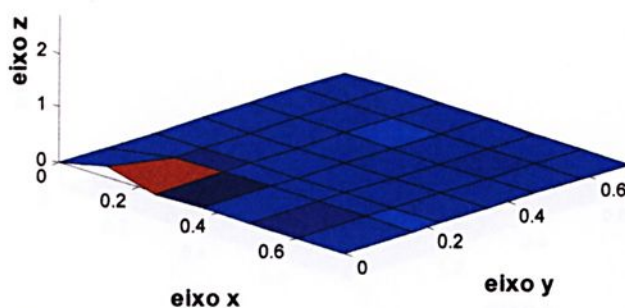


FIGURA 8.23 – TESE(NL) modo 4 – Frequência natural de 37,36 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.24 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural de 37,87 Hz - $F=1000\text{N}$

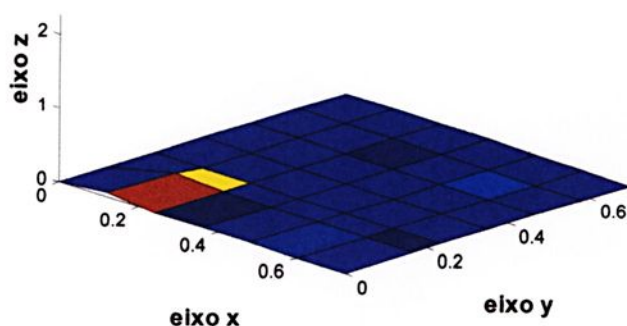


FIGURA 8.25 – TESE(NL) modo 5 – Frequência natural de 42,76 Hz - $F=1000\text{N}$

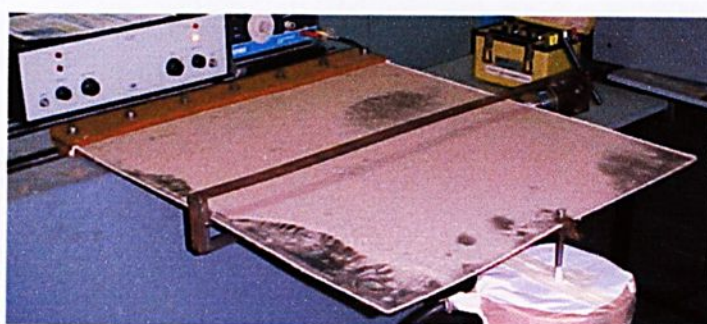


FIGURA 8.26 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural de 42,75 Hz - $F=1000\text{N}$

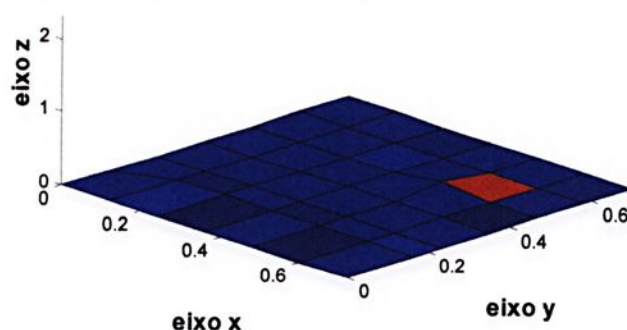


FIGURA 8.27 – TESE(NL) modo 6 – Frequência natural de 75,22 Hz - $F=1000\text{N}$

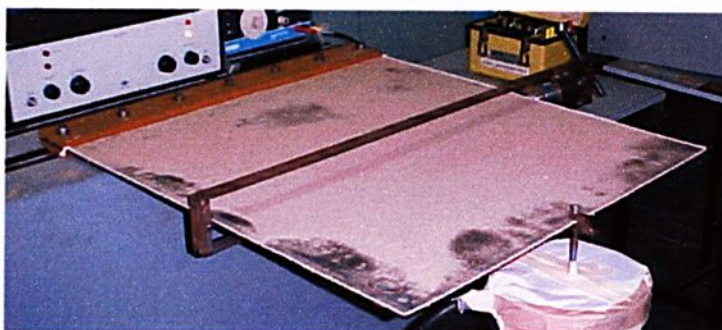


FIGURA 8.28 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural de 75,75 Hz - $F=1000\text{N}$

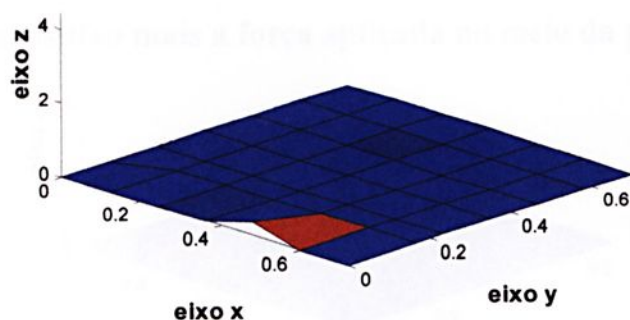


FIGURA 8.29 – TESE(NL) modo 7 – Frequência natural de 84,07 Hz - $F=1000\text{N}$

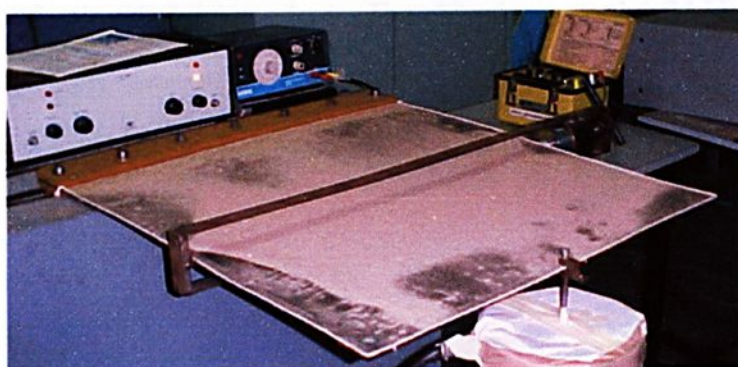


FIGURA 8.30 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural de 84,70 Hz - $F=1000\text{N}$

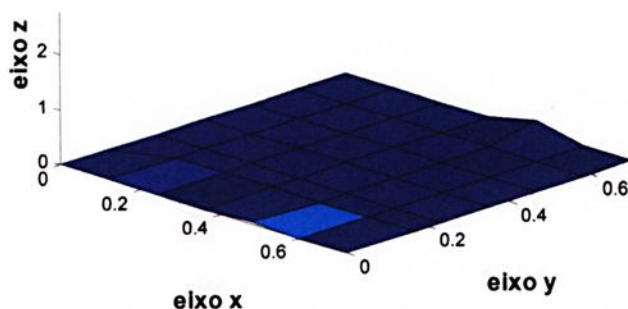


FIGURA 8.31 – TESE(NL) modo 8 – Frequência natural de 90,38 Hz - $F=1000\text{N}$

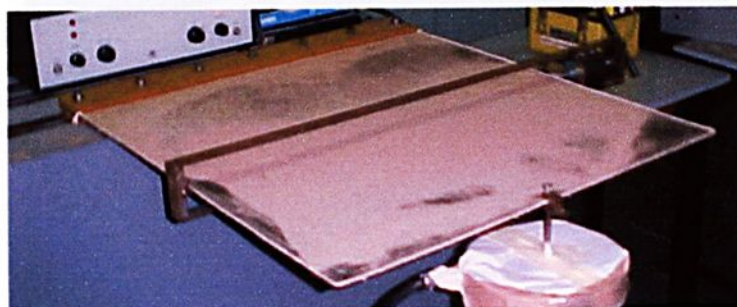


FIGURA 8.32 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural de 90,20 Hz - $F=1000\text{N}$

8.3 Carga do dispositivo mais a força aplicada no meio da placa de $F=2000\text{N}$.

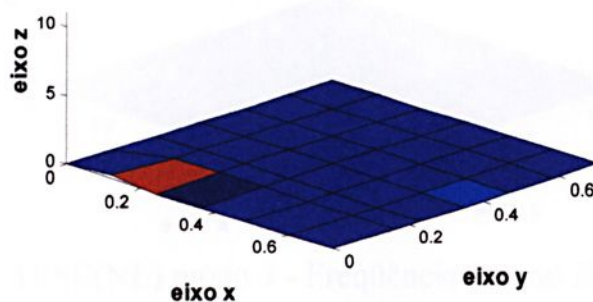


FIGURA 8.33 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 4,94 Hz - $F=2000\text{N}$



FIGURA 8.34 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 5,00 Hz - $F=2000\text{N}$

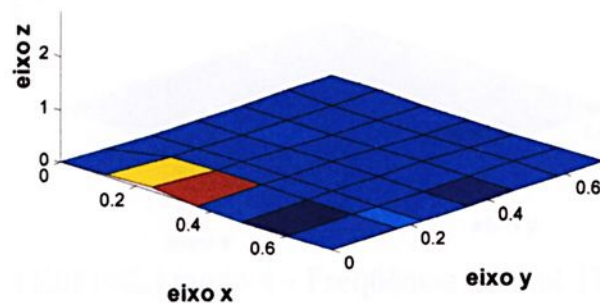


FIGURA 8.35 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 10,59 Hz - $F=2000\text{N}$

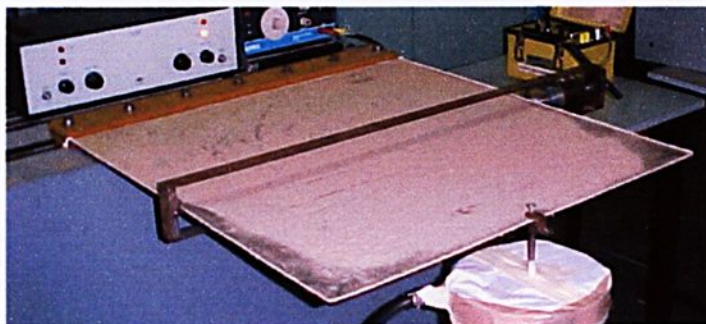


FIGURA 8.36 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 10,20 Hz - $F=2000\text{N}$

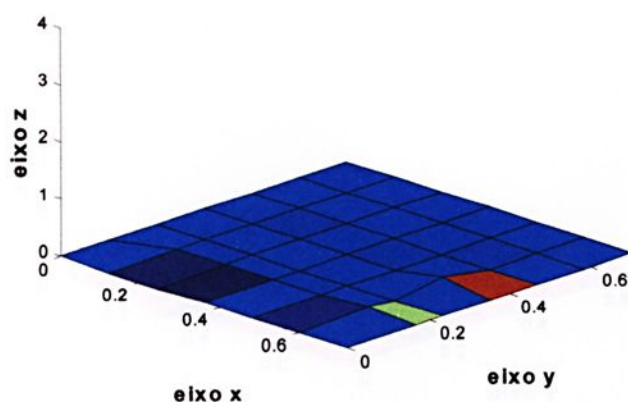


FIGURA 8.37 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 29,99 Hz - $F=2000N$



FIGURA 8.38 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 28,50 Hz - $F=2000N$

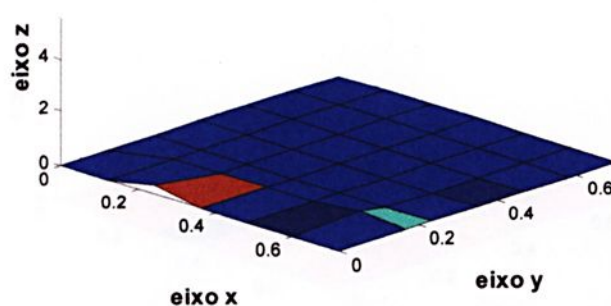


FIGURA 8.39 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 37,46 Hz - $F=2000N$



FIGURA 8.40 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 38,50 Hz - $F=2000N$

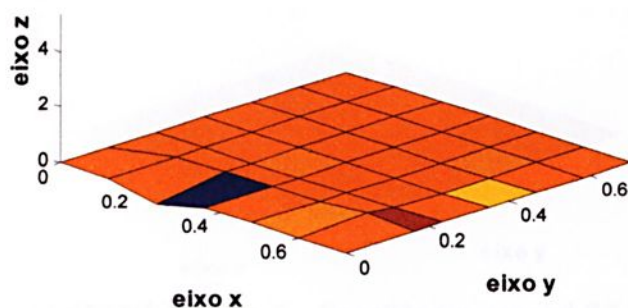


FIGURA 8.41 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 44,35 Hz - $F=2000N$



FIGURA 8.42 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 44,50 Hz - $F=2000N$

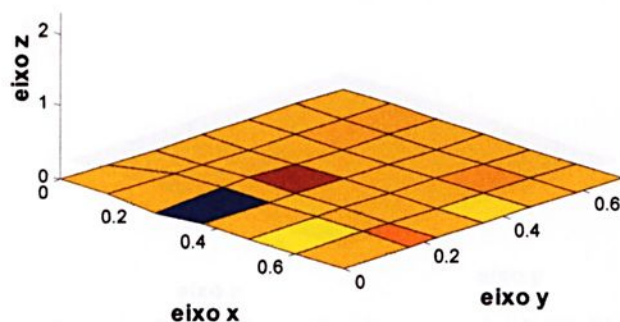


FIGURA 8.43 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 77,67 Hz - $F=2000N$

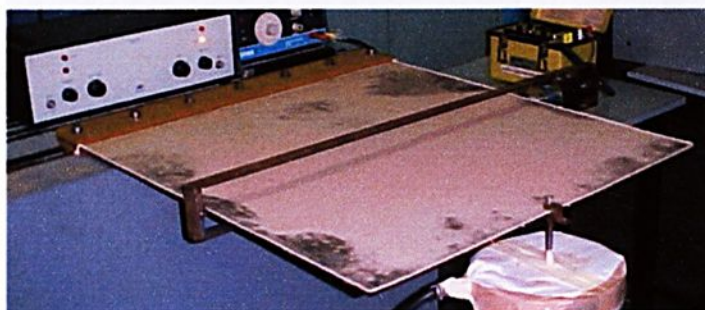


FIGURA 8.44 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 74,00 Hz - $F=2000N$

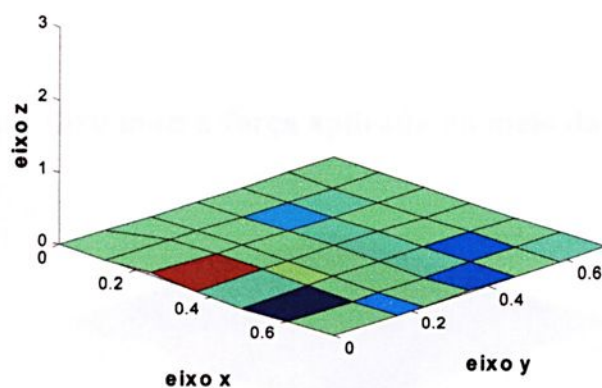


FIGURA 8.45 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 87,70 Hz - $F=2000\text{N}$



FIGURA 8.46 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 87,20 Hz - $F=2000\text{N}$

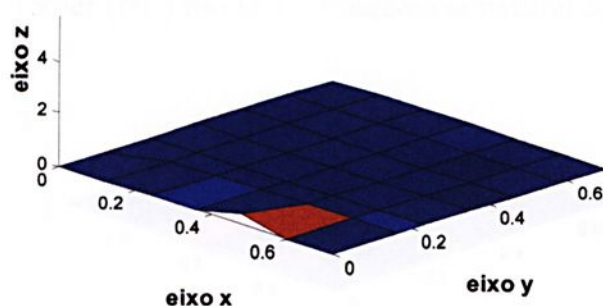


FIGURA 8.47 - Modo 8 - Frequência natural 93,00 Hz - $F=2000\text{N}$



FIGURA 8.48 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 92,50 Hz - $F=2000\text{N}$

8.4 Carga do dispositivo mais a força aplicada no meio da placa de $F=3000\text{N}$.

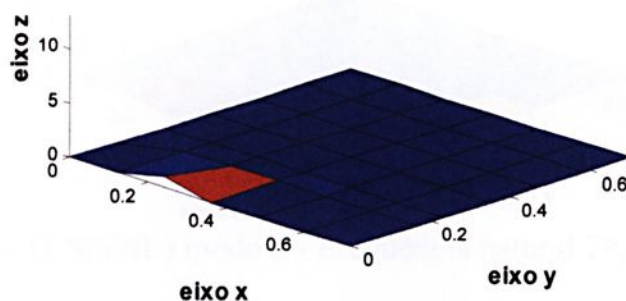


FIGURA 8.49 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 4,96 Hz – $F=3000\text{N}$



FIGURA 8.50 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 5,20 Hz – $F=3000\text{N}$

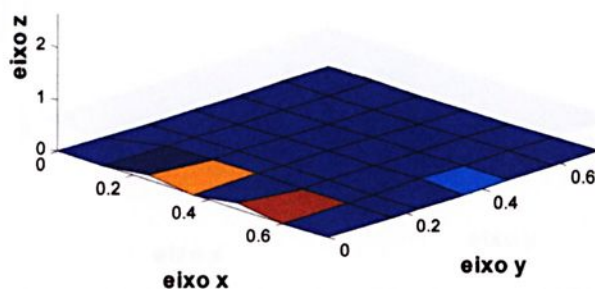


FIGURA 8.51 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 9,64 Hz – $F=3000\text{N}$



FIGURA 8.52 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 10,50 Hz – $F=3000\text{N}$

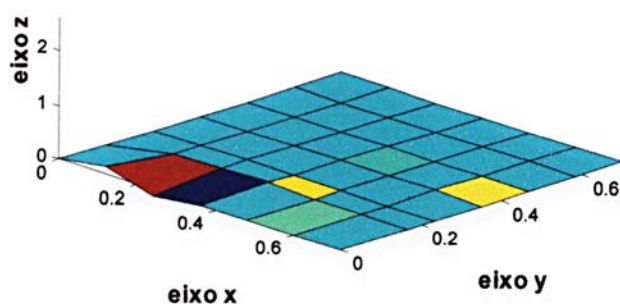


FIGURA 8.53 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 29,57 Hz – $F=3000N$



FIGURA 8.54 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 28,50 Hz – $F=3000N$

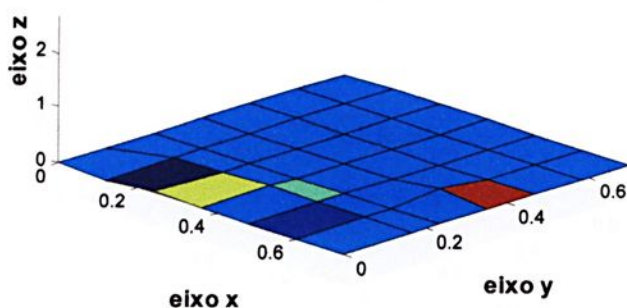


FIGURA 8.55 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 36,12 Hz – $F=3000N$



FIGURA 8.56 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 35,20 Hz – $F=3000N$

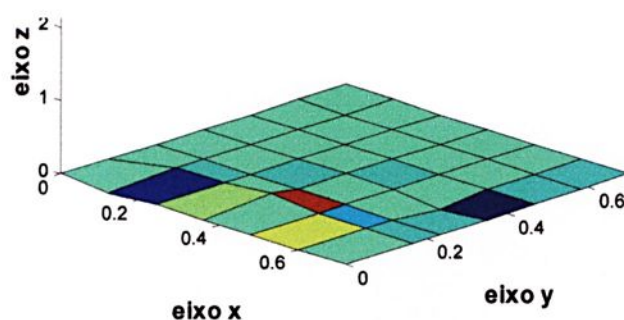


FIGURA 8.57 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 44,07 Hz – $F=3000\text{N}$



FIGURA 8.58 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 44,50 Hz – $F=3000\text{N}$

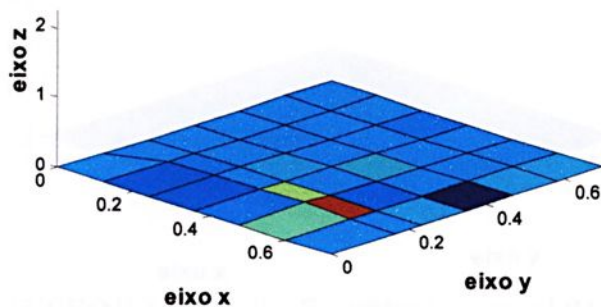


FIGURA 8.59 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 76,89 Hz – $F=3000\text{N}$



FIGURA 8.60 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 76,20 Hz – $F=3000\text{N}$

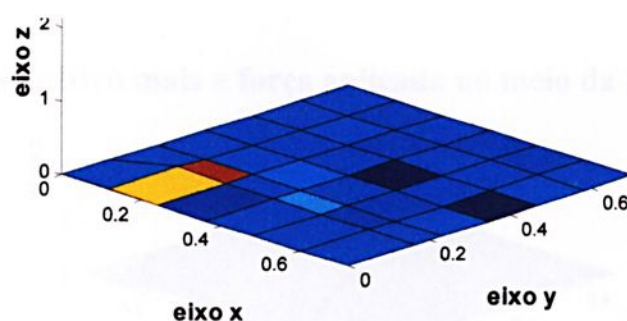


FIGURA 8.61 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 87,78 Hz – $F=3000N$



FIGURA 8.62 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 86,10 Hz – $F=3000N$

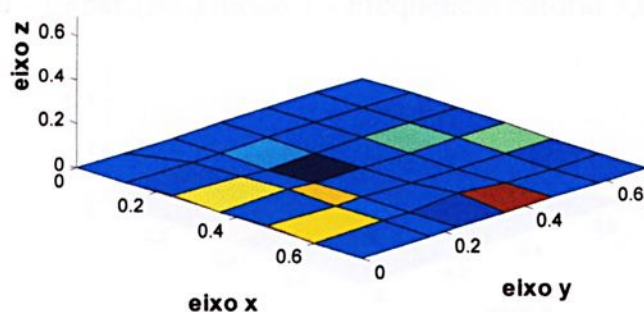


FIGURA 8.63 - TESE(NL) modo 8 - Frequência natural 91,68 Hz – $F=3000N$

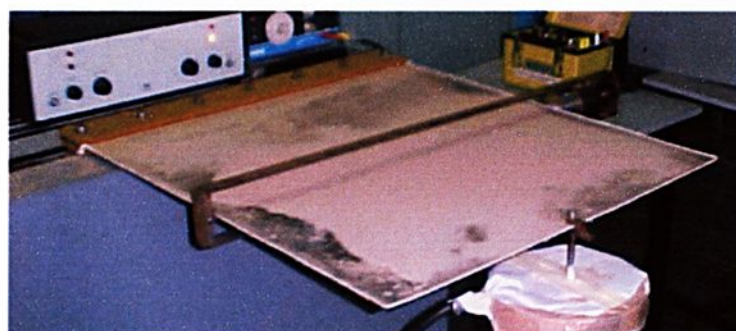


FIGURA 8.64 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 91,60 Hz – $F=3000N$

8.5 Carga do dispositivo mais a força aplicada no meio da placa de $F=3500\text{N}$.

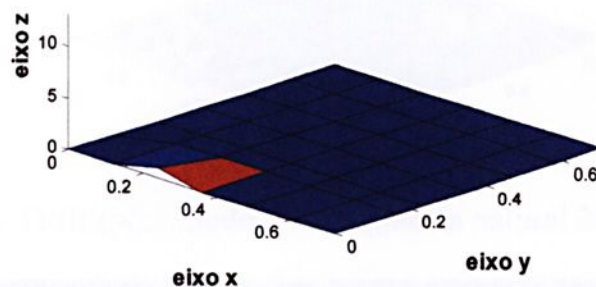


FIGURA 8.65 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 5,03 Hz – $F=3500\text{N}$



FIGURA 8.66 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 5,00 Hz – $F=3500\text{N}$

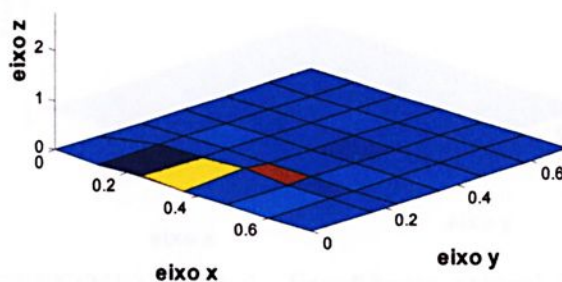


FIGURA 8.67 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 9,48 Hz – $F=3500\text{N}$



FIGURA 8.68 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 10,50 Hz – $F=3500\text{N}$

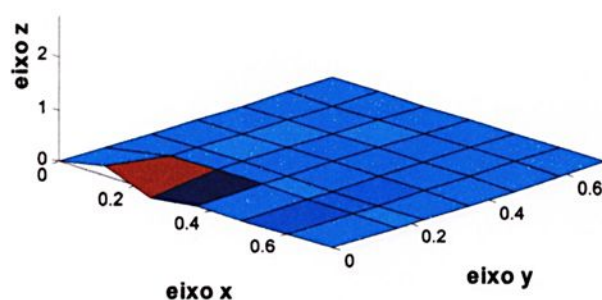


FIGURA 8.69 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 29,52 Hz – $F=3500N$



FIGURA 8.70 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 29,70 Hz – $F=3500N$

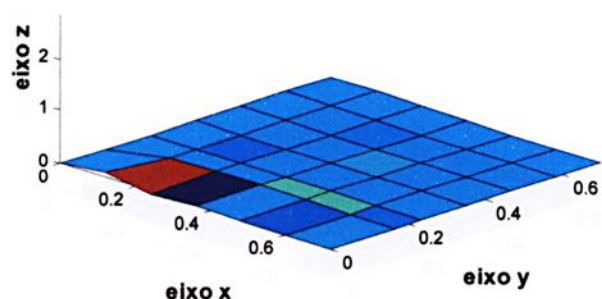


FIGURA 8.71 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 35,52 Hz – $F=3500N$



FIGURA 8.72 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 37,70 Hz – $F=3500N$

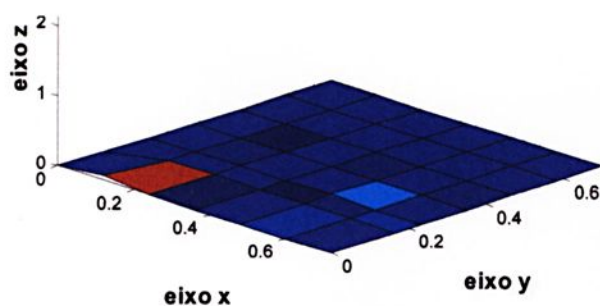


FIGURA 8.73 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 44,23 Hz – $F=3500\text{N}$



FIGURA 8.74 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 44,50 Hz – $F=3500\text{N}$

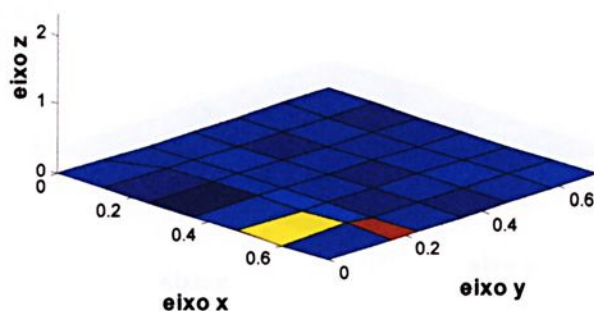


FIGURA 8.75 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 76,78 Hz – $F=3500\text{N}$

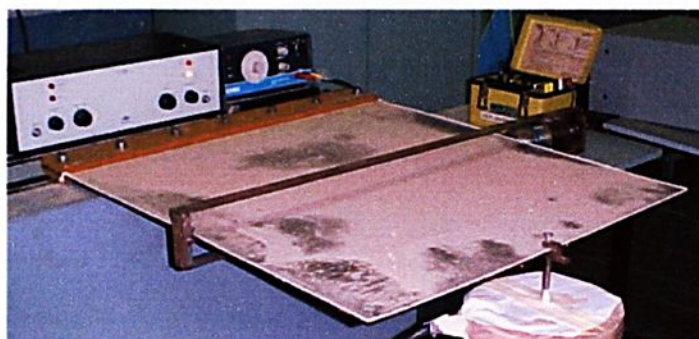


FIGURA 8.76 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 74,70 Hz – $F=3500\text{N}$

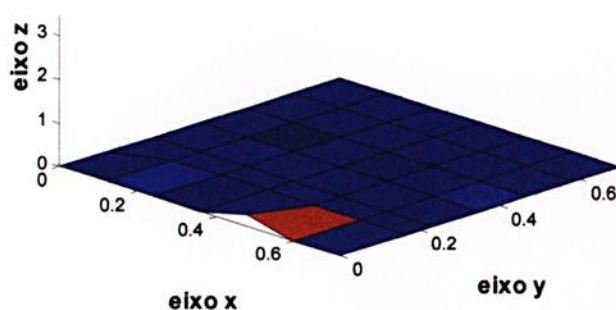


FIGURA 8.77 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 87,88 Hz – $F=3500N$

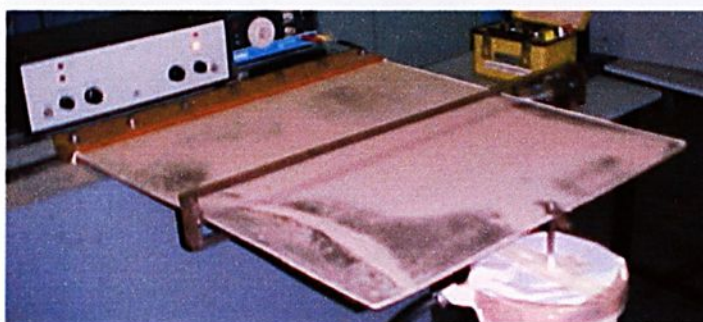


FIGURA 8.78 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 89,00 Hz – $F=3500N$

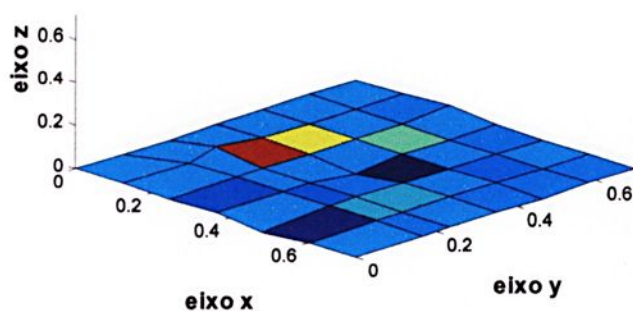


FIGURA 8.79 - TESE(NL) modo 8 - Frequência natural 91,20 Hz – $F=3500N$

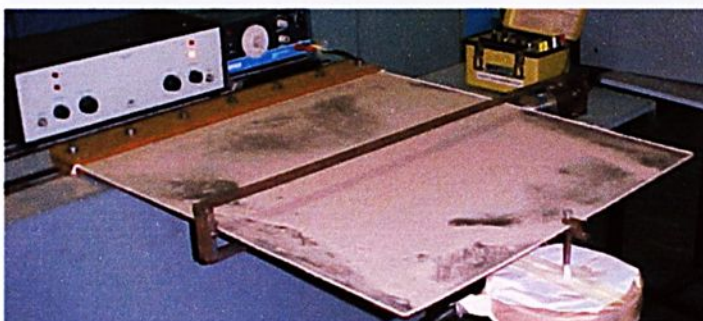


FIGURA 8.80 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 95,70 Hz – $F=3500N$

8.6 Carga do dispositivo aplicada na extremidade da placa de $F=28\text{N}$.

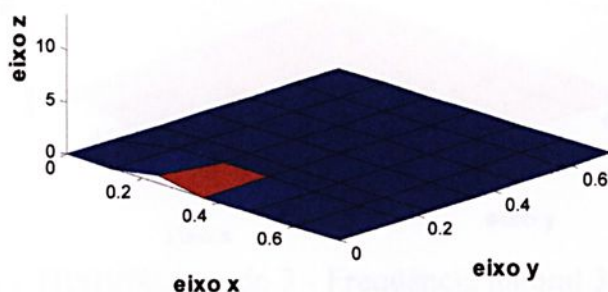


FIGURA 8.81 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 5,09 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.82 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 3,75 Hz – $F=28\text{N}$

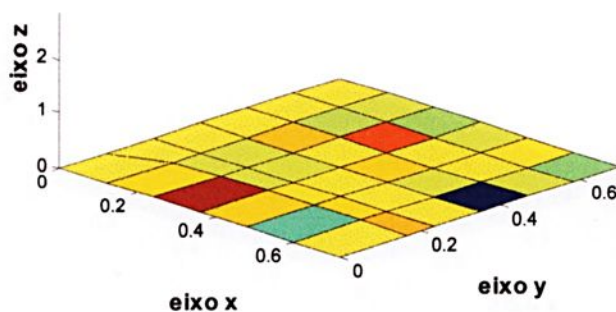


FIGURA 8.83 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 14,74 Hz – $F=28\text{N}$

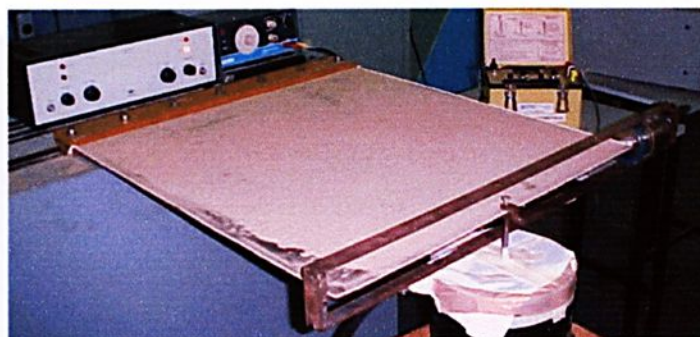


FIGURA 8.84 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 14,50 Hz – $F=28\text{N}$

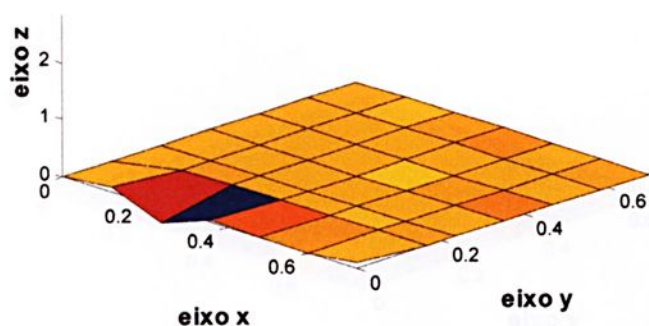


FIGURA 8.85 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 31,41 Hz – $F=28N$



FIGURA 8.86 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 32,00 Hz – $F=28N$

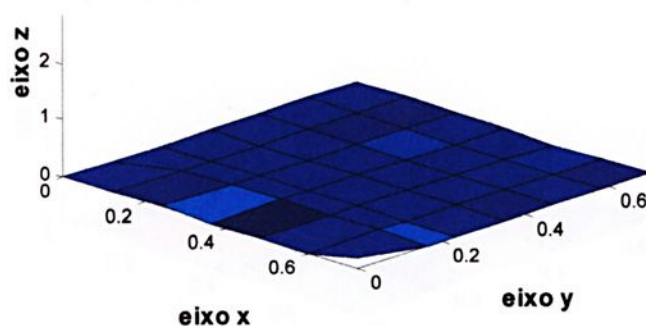


FIGURA 8.87 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 45,04 Hz – $F=28N$



FIGURA 8.88 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 46,00 Hz – $F=28N$

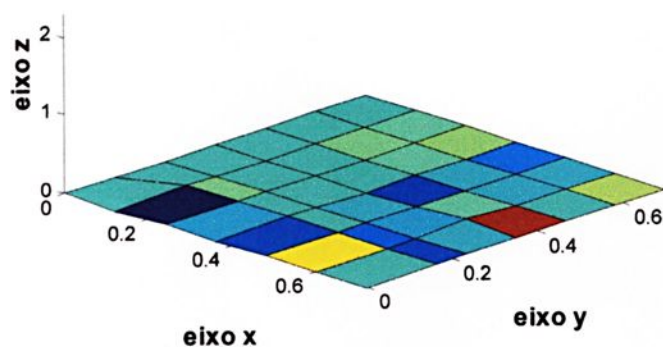


FIGURA 8.89 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 50,01 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.90 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 50,25 Hz – $F=28\text{N}$

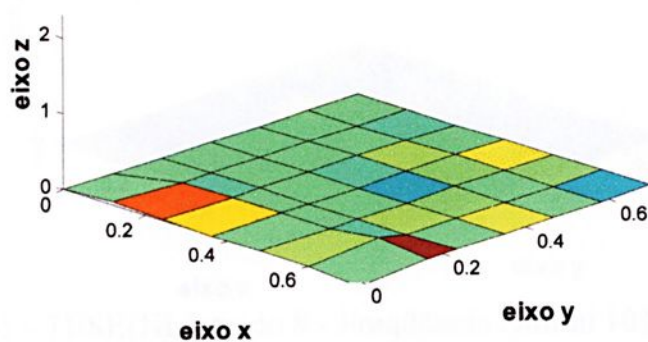


FIGURA 8.91 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 87,46 Hz – $F=28\text{N}$



FIGURA 8.92 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 86,75 Hz – $F=28\text{N}$

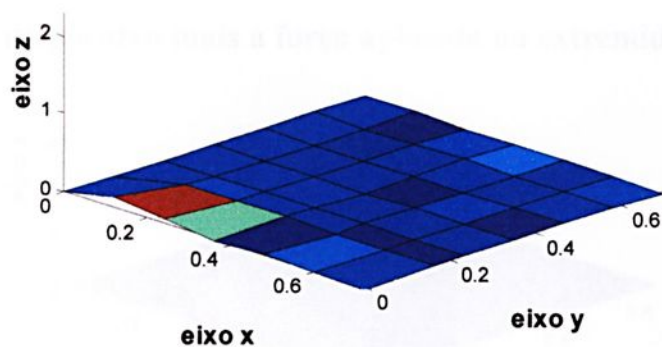


FIGURA 8.93 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 89,96 Hz – $F=28N$

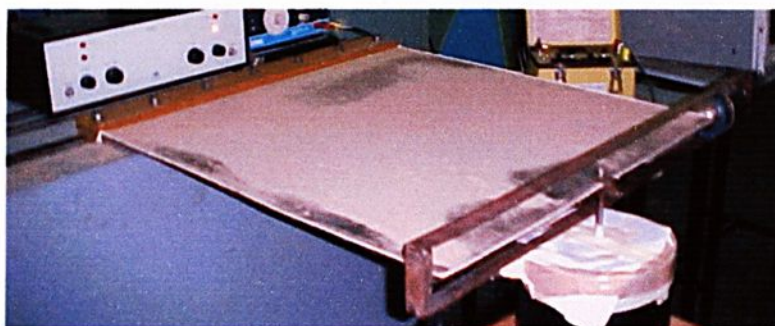


FIGURA 8.94 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 88,75 Hz – $F=28N$

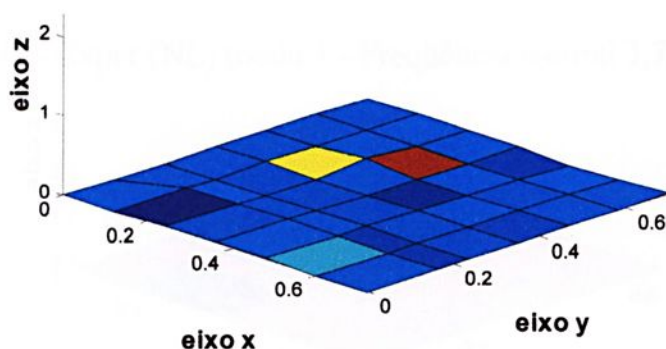


FIGURA 8.95 - TESE(NL) modo 8 - Frequência natural 101,37 Hz – $F=28N$



FIGURA 8.96 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 101,50 Hz – $F=28N$

8.7 Carga do dispositivo mais a força aplicada na extremidade da placa de $F=800\text{N}$

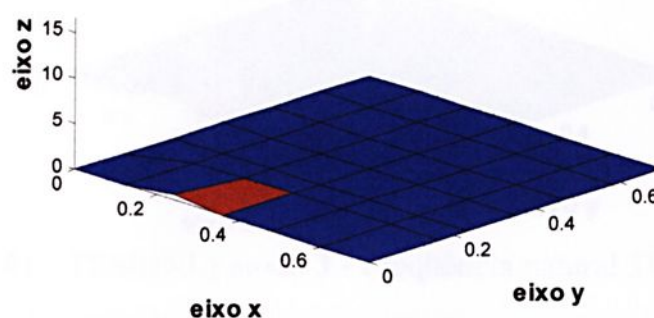


FIGURA 8.97 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 4,79 Hz - $F=800\text{N}$



FIGURA 8.98 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 3,75 Hz - $F=800\text{N}$

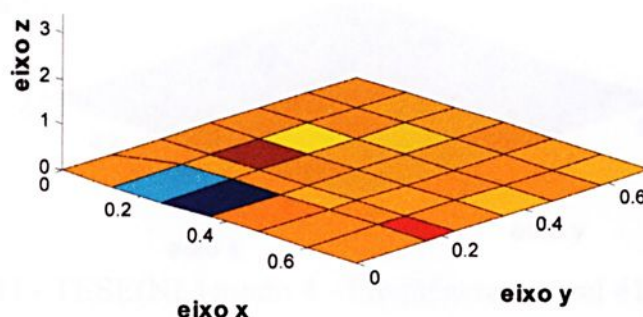


FIGURA 8.99 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 12,20 Hz - $F=800\text{N}$



FIGURA 8.100 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 11,60 Hz - $F=800\text{N}$

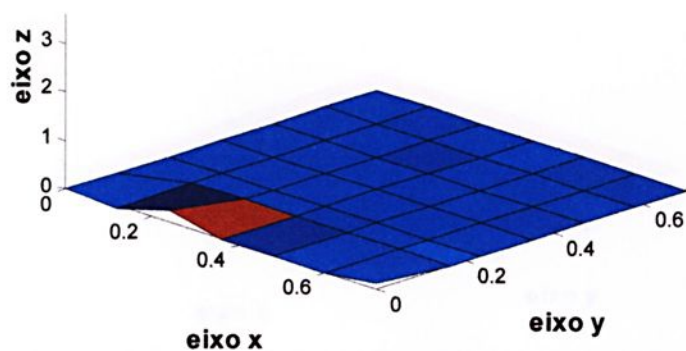


FIGURA 8.101 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 31,22 Hz - $F=800\text{N}$



FIGURA 8.102 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 32,50 Hz - $F=800\text{N}$

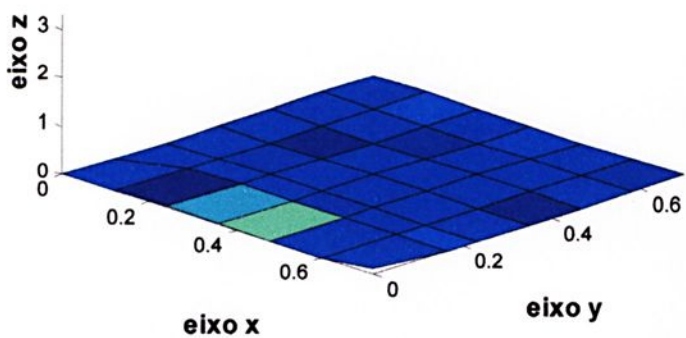


FIGURA 8.103 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 41,06 Hz - $F=800\text{N}$

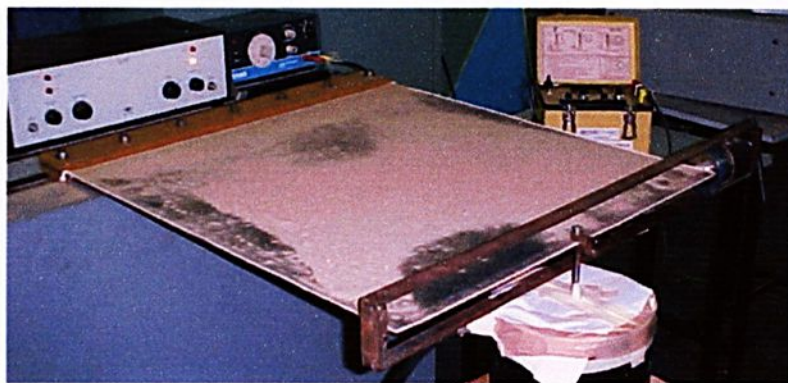


FIGURA 8.104 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 43,70 Hz - $F=800\text{N}$

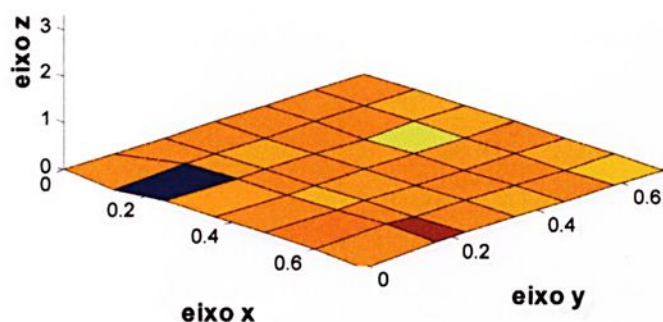


FIGURA 8.105 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 49,43 Hz - $F=800\text{N}$



FIGURA 8.106 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 47,50 Hz - $F=800\text{N}$

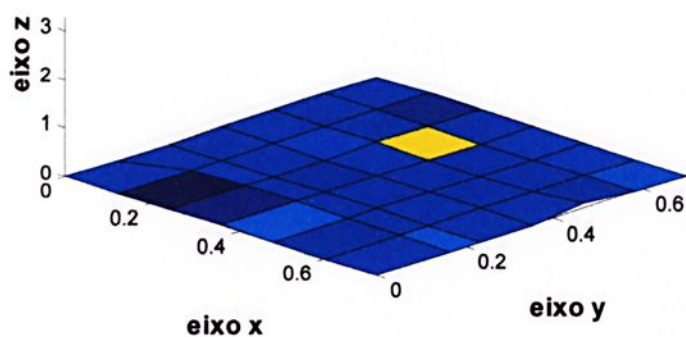


FIGURA 8.107 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 85,75 Hz - $F=800\text{N}$

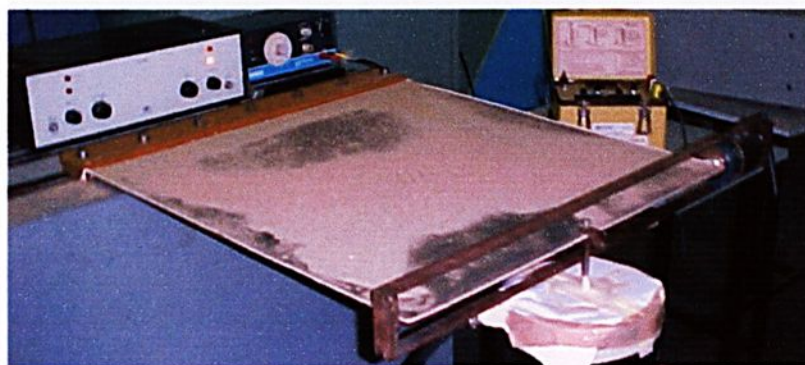


FIGURA 8.108 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 84,00 Hz - $F=800\text{N}$

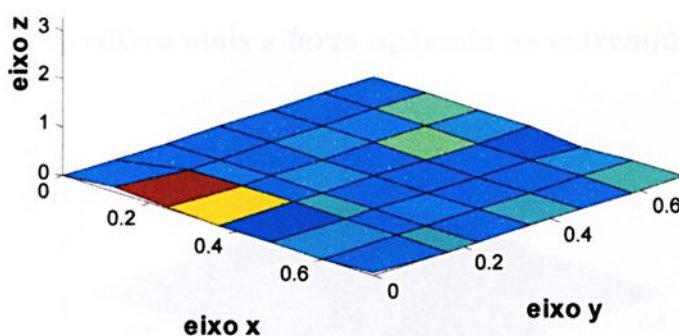


FIGURA 8.109 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 89,19 Hz - $F=800\text{N}$

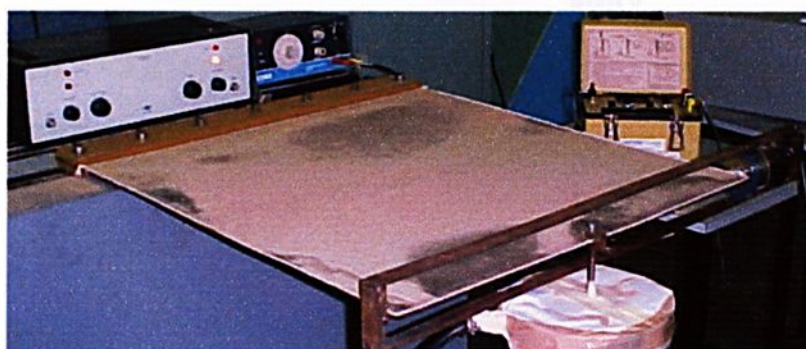


FIGURA 8.110 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 87,50 Hz - $F=800\text{N}$

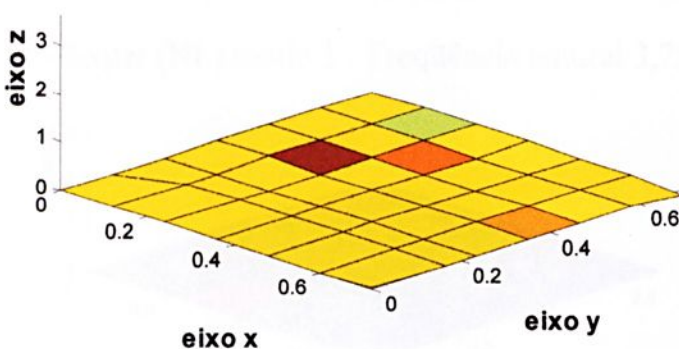


FIGURA 8.111 - TESE(NL) modo 8 - Frequência natural 98,04 Hz - $F=800\text{N}$

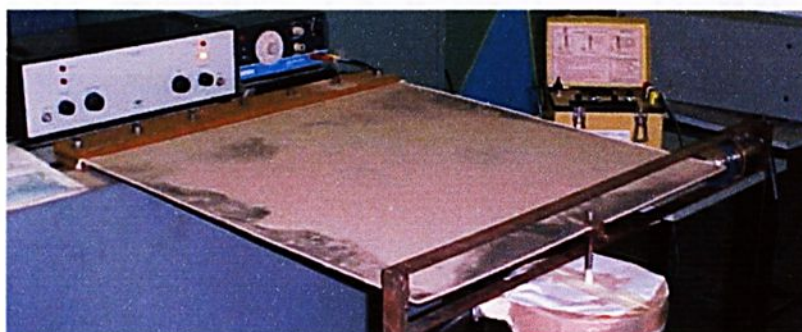


FIGURA 8.112 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 96,00 Hz - $F=800\text{N}$

8.8 Carga do dispositivo mais a força aplicada na extremidade da placa de $F=1000\text{N}$

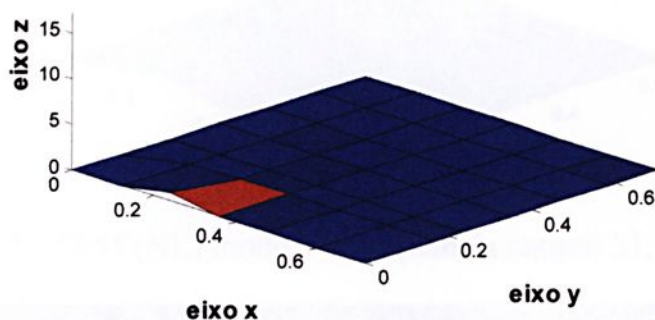


FIGURA 8.113 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 4,61 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.114 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 3,75 Hz - $F=1000\text{N}$

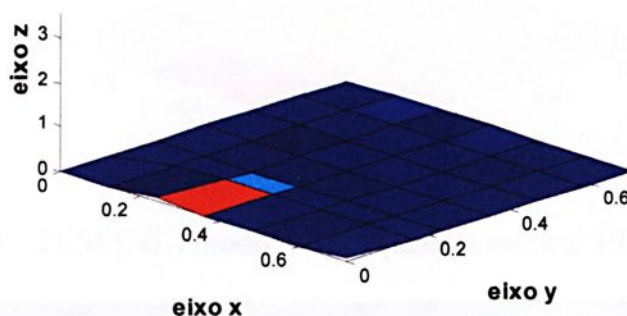


FIGURA 8.115 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 11,52 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.116 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 11,50 Hz - $F=1000\text{N}$

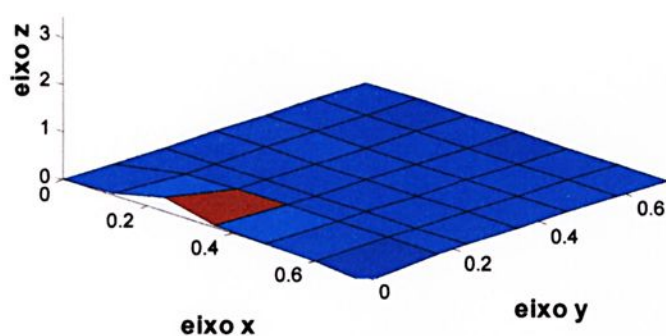


FIGURA 8.117 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 31,20 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.118 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 33,50 Hz - $F=1000\text{N}$

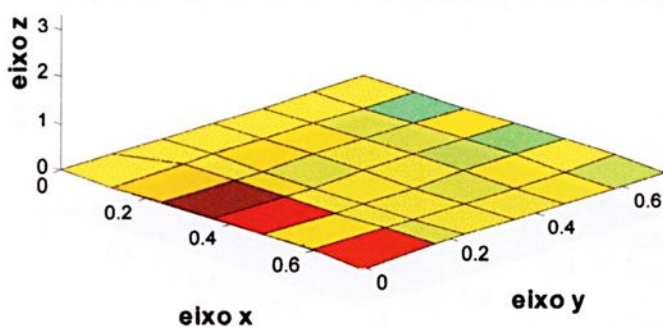


FIGURA 8.119 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 39,88 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.120 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 38,20 Hz - $F=1000\text{N}$

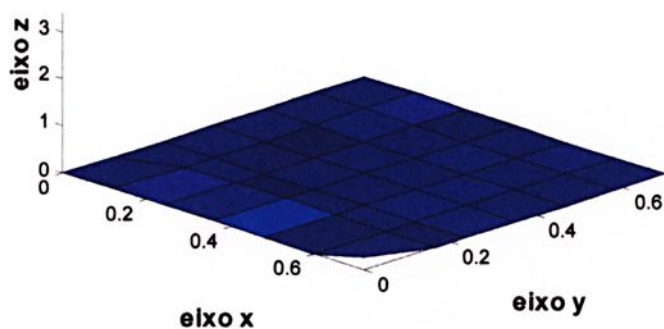


FIGURA 8.121 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 49,27 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.122 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 50,20 Hz - $F=1000\text{N}$

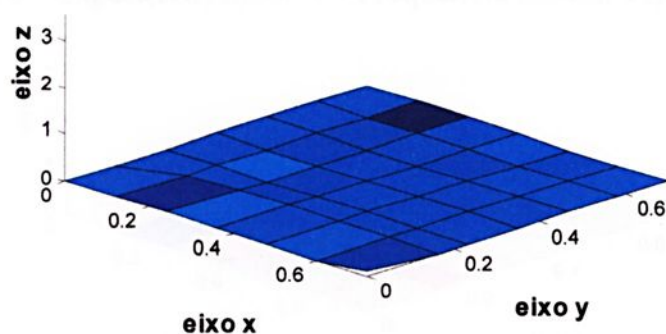


FIGURA 8.123 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 85,17 Hz - $F=1000\text{N}$

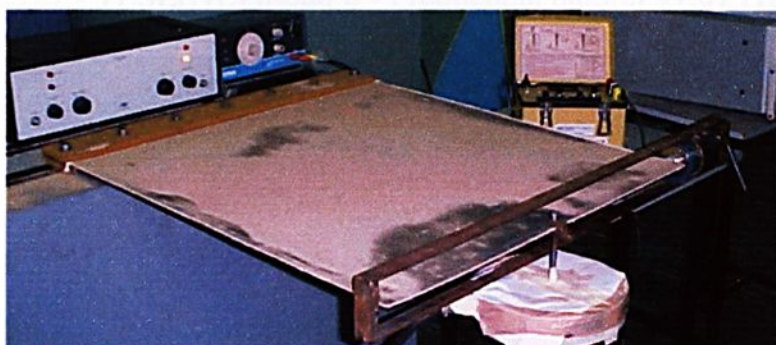


FIGURA 8.124 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 82,00 Hz - $F=1000\text{N}$

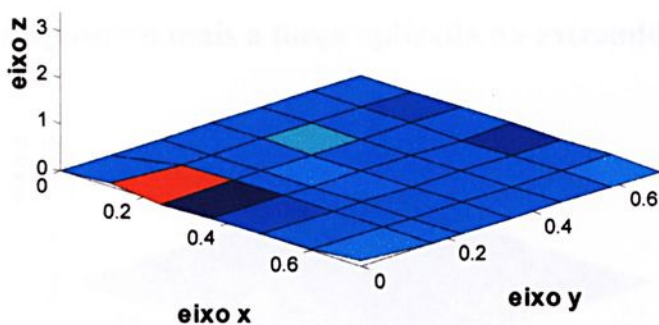


FIGURA 8.125 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 89,10 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.126 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 91,00 Hz - $F=1000\text{N}$

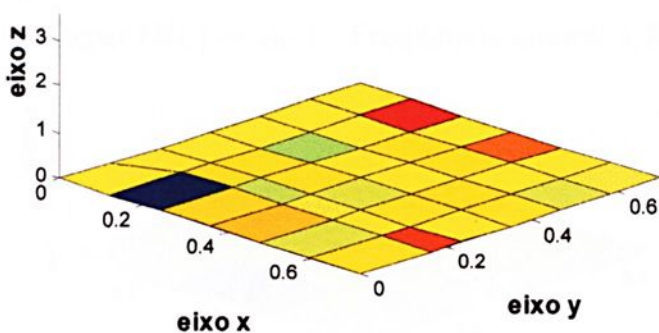


FIGURA 8.127 - TESE(NL) modo 8 - Frequência natural 97,07 Hz - $F=1000\text{N}$



FIGURA 8.128 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 97,00 Hz - $F=1000\text{N}$

8.9 Carga do dispositivo mais a força aplicada na extremidade da placa de $F=1400\text{N}$

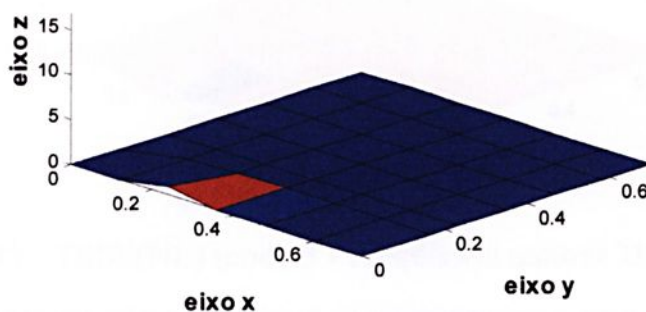


FIGURA 8.129 - TESE(NL) modo 1 - Frequência natural 4,19 Hz – $F=1400\text{N}$

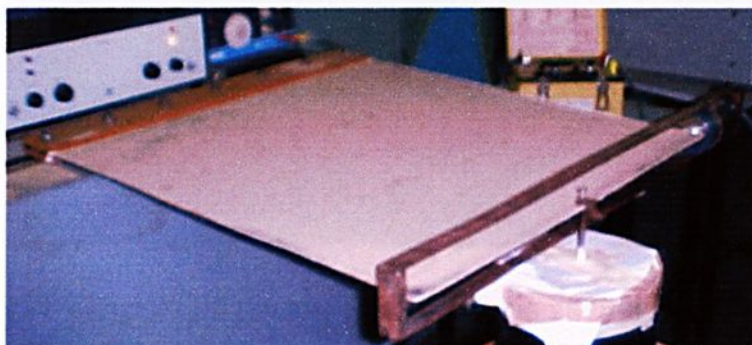


FIGURA 8.130 - Exper.(NL) modo 1 - Frequência natural 3,75 Hz – $F=1400\text{N}$

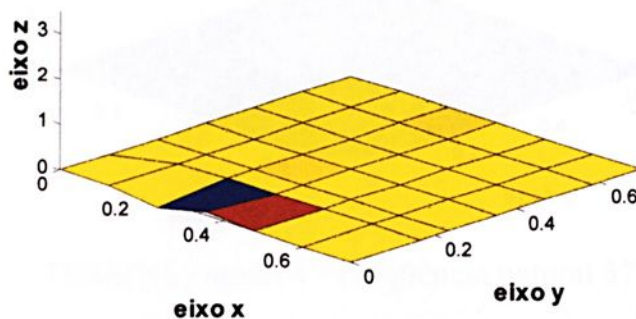


FIGURA 8.131 - TESE(NL) modo 2 - Frequência natural 10,87 Hz – $F=1400\text{N}$

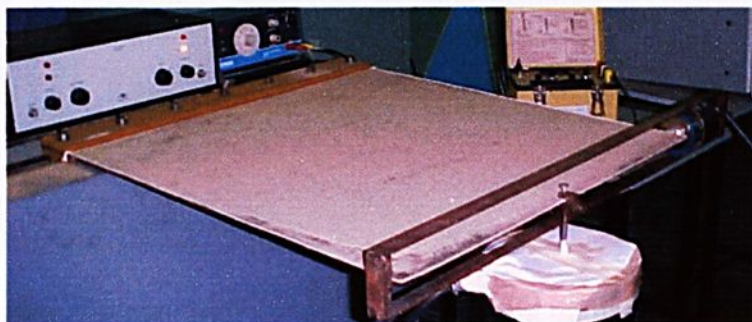


FIGURA 8.132 - Exper.(NL) modo 2 - Frequência natural 11,70 Hz – $F=1400\text{N}$

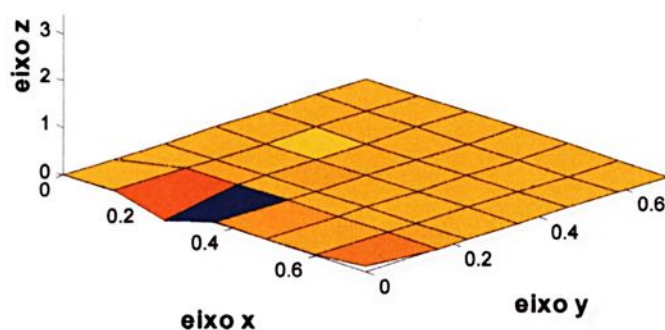


FIGURA 8.133 - TESE(NL) modo 3 - Frequência natural 31,37 Hz- $F=1400\text{N}$

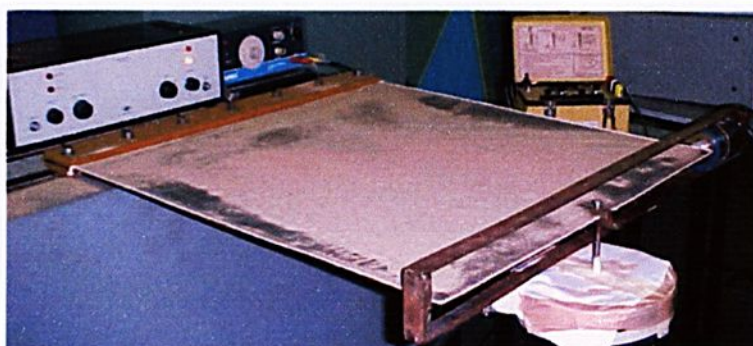


FIGURA 8.134 - Exper.(NL) modo 3 - Frequência natural 32,20 Hz- $F=1400\text{N}$

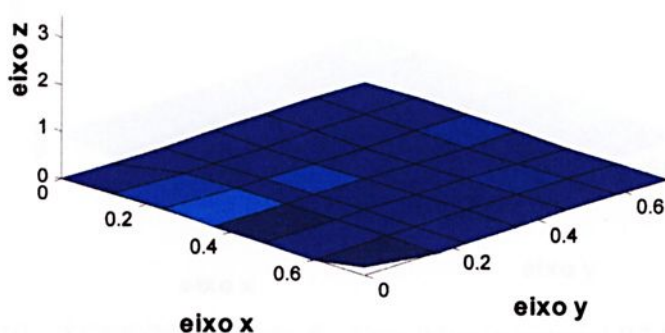


FIGURA 8.135 - TESE(NL) modo 4 - Frequência natural 37,55 Hz- $F=1400\text{N}$



FIGURA 8.136 - Exper.(NL) modo 4 - Frequência natural 38,50 Hz- $F=1400\text{N}$

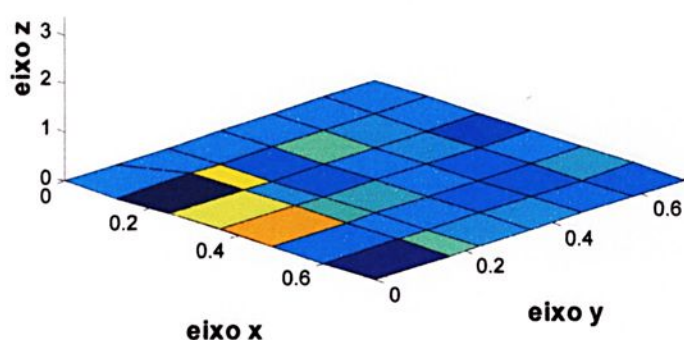


FIGURA 8.137 - TESE(NL) modo 5 - Frequência natural 49,21 Hz - $F=1400\text{N}$



FIGURA 8.138 - Exper.(NL) modo 5 - Frequência natural 45,70 Hz - $F=1400\text{N}$

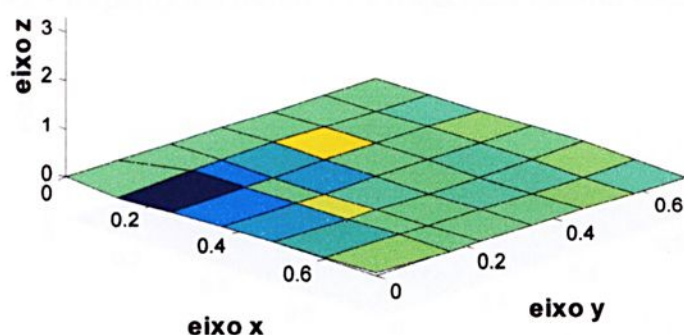


FIGURA 8.139 - TESE(NL) modo 6 - Frequência natural 83,83 Hz - $F=1400\text{N}$



FIGURA 8.140 - Exper.(NL) modo 6 - Frequência natural 81,75 Hz - $F=1400\text{N}$

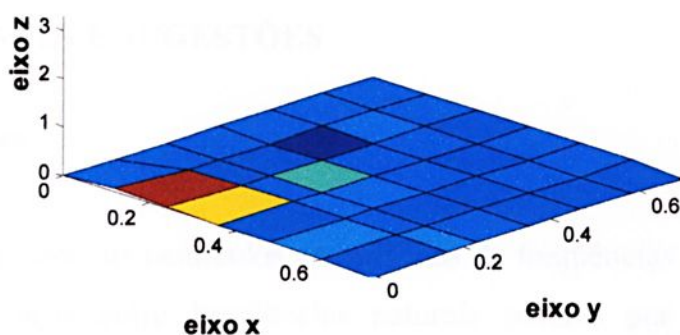


FIGURA 8.141 - TESE(NL) modo 7 - Frequência natural 88,89 Hz- $F=1400\text{N}$

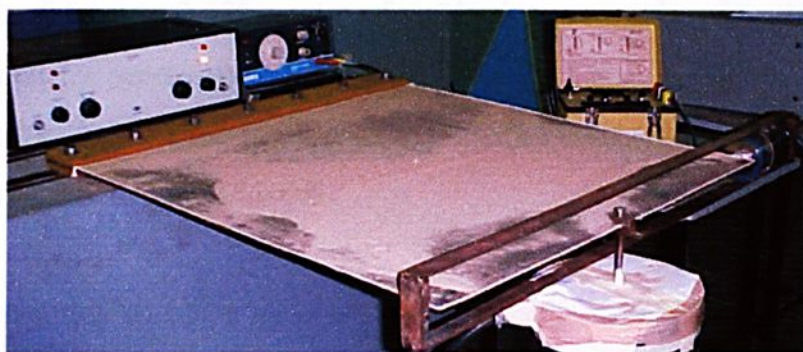


FIGURA 8.142 - Exper.(NL) modo 7 - Frequência natural 89,50 Hz- $F=1400\text{N}$

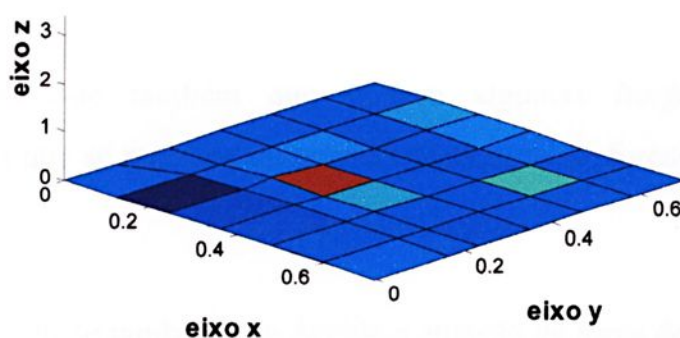


FIGURA 8.143 - TESE(NL) modo 8 - Frequência natural 95,27 Hz- $F=1400\text{N}$



FIGURA 8.144 - Exper.(NL) modo 8 - Frequência natural 94,20 Hz- $F=1400\text{N}$

9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

9.1 Conclusões

Observando os resultados encontrados de frequências naturais nota-se que as diferenças entre frequências naturais obtidos por Leissa (1969), ANSYS,, TESE(L) e Experimental(L) são muito pequenas. O maior desvio percentual foi de 2,62%. As frequências naturais de TESE(L) e Experimental(L) apresentaram resultados satisfatórios. Obsevou-se também que os modos de vibração obtidos pela TESE(L) concordaram com os modos obtidos em ensaios experimentais.

Em todos os casos da placa em balanço geometricamente não-linear, as frequências naturais teóricas TESE(NL) e experimentais Experimental(NL), também apresentaram resultados muito próximos.

Observou-se também que surgem algumas frequências naturais intermediárias que se manifestam quando da atuação de forças de compressão na placa.

Verificou-se também que devido a atuação da força de compressão, as frequências naturais diminuem entre $F=28\text{N}$ e $F=3500\text{N}$, isto quando a força era aplicada no meio da placa. Também notamos que as frequências naturais diminuem no caso em que a força é aplicada na extremidade da placa.

Os modos de vibração obtidos para a placa em balanço geometricamente não-linear, foram concordantes entre modos teóricos e experimentais. Notamos também que os modos teóricos quase sobrepõem aos modos obtidos pelos ensaios experimentais. Concluimos que comparando os modos teóricos e experimentais de vibração apresentam bons resultados.

Agora, se compararmos os modos de vibração da placa em balanço geometricamente linear e não-linear, não há semelhança entre os modos de vibração. Notamos que todos os modos diferem uma das outras. Apenas o primeiro modo há uma pequena semelhança entre modos teóricos e experimentais. Nas Figuras 9.1 a 9.4, as frequências naturais são baixas e os modos ficaram parecidos.

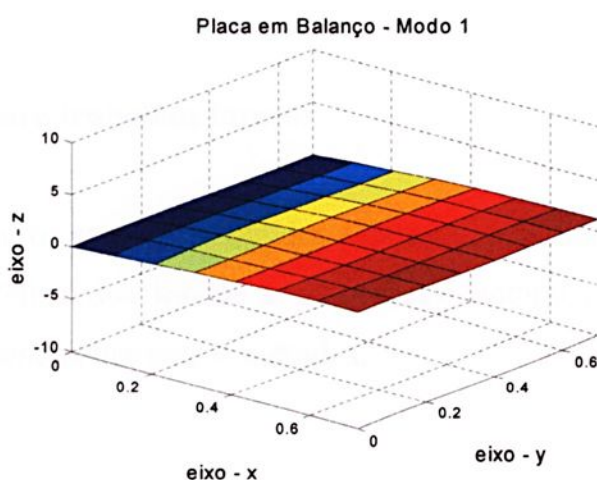


FIGURA 9.1 - Modo 1 - TESE(L) - Frequência natural de 5,17 Hz

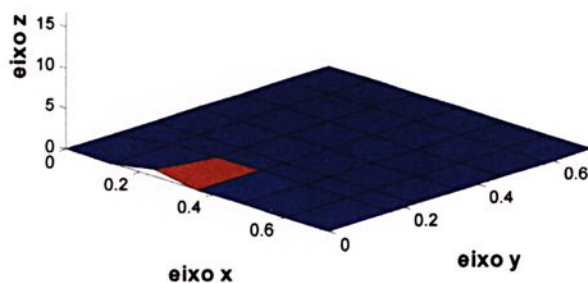


FIGURA 9.2 - Modo 1 - TESE(NL) - Frequência natural 4,19 Hz – $F=1400N$



FIGURA 9.3 - Modo 1 - Experimental(L) - Frequência natural de 5,20 Hz



FIGURA 9.4 - Modo 1 Exper.(NL) - Frequência natural 3,75 Hz – $F=1400N$

9.2 Sugestões para trabalhos futuros

Para que os resultados obtidos sejam comprovados e para confirmar sua validade efetiva dos modos e frequências naturais, sugerimos realizar ensaios experimentais por outros métodos.

ANEXO A

SIMPLIFICAÇÃO PROPOSTA

A.1 Introdução

A variabilidade das matrizes **A**, **B** e **C** em cada elemento torna o cálculo das matrizes $\mathbf{K}_g$ e $\Delta\mathbf{K}_0$ em cada incremento (ou iteração) extremamente laborioso.

Nesta seção apresentam-se as expressões matriciais que resultam da simplificação proposta por Costa (1986), cuja validade foi comprovada pelo Pappalardo (1992) e serão utilizadas neste trabalho.

A.2 Elemento utilizado

O elemento utilizado neste trabalho será o elemento triangular com três nós e com cinco graus de liberdade por nó, sendo três deslocamentos lineares (u, v, z) e dois deslocamentos angulares (θ_x e θ_y).

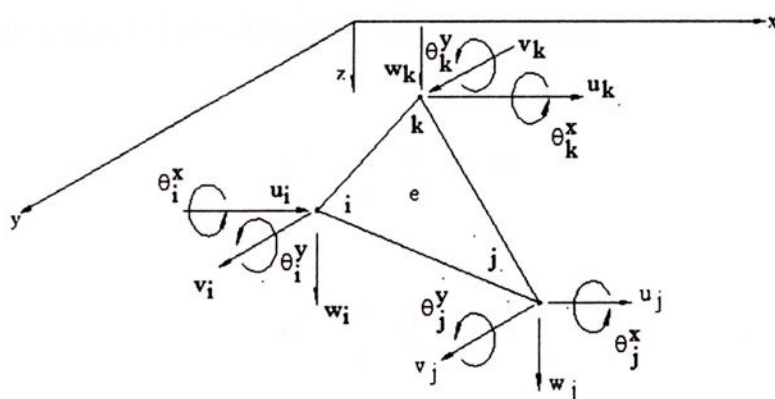


FIGURA A.1 – Elemento triangular

A escolha do referido elemento se deve ao comprovado fato dos seus bons resultados alcançados por Pappalardo (1992) e principalmente pela simplificação proposta por Costa (1986) que tornam as forças de membrana constantes no interior do elemento.

A.3 Simplificação proposta

No método dos elementos finitos, as funções de forma escolhida para o elemento triangular são funções de primeiro grau na interpolação dos deslocamentos u e v e são funções do terceiro grau na interpolação dos deslocamentos w_z , θ_x e θ_y .

A análise das expressões (3.12), (3.13) e (3.14) do Capítulo 3, mostra que as forças de membrana no elemento são variáveis de ponto para ponto, pois apesar de $\frac{\partial \gamma_j}{\partial x}$ e $\frac{\partial \gamma_j}{\partial y}$ serem constantes, as matrizes **A**, **B** e **C** para cada elemento não o são.

Para que as forças de membrana se tornem constantes dentro de cada elemento finito, Costa (1986) propõe que as matrizes **A**, **B** e **C** em cada elemento sejam substituídas pelas seguintes outras:

$$\bar{\mathbf{A}}^e = \frac{1}{\Delta^e} \iint_{\Omega^e} \mathbf{A}^e d\Omega \quad (\text{A.1})$$

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \frac{1}{\Delta^e} \iint_{\Omega^e} \mathbf{B}^e d\Omega \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\mathbf{C}}^e = \frac{1}{\Delta^e} \iint_{\Omega^e} \mathbf{C}^e d\Omega \quad (\text{A.3})$$

As forças de membrana no elemento passam a ser as seguintes:

$$\overline{N}_x^e = \frac{hE}{1-\nu^2} \left[u_j \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial x} + w_j \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial y} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^b)' \overline{\mathbf{A}}^e \mathbf{a}^b + \frac{\nu}{2} (\mathbf{a}^b)' \overline{\mathbf{B}}^e \mathbf{a}^b \right] \quad (\text{A.4})$$

$$\overline{N}_y^e = \frac{hE}{1-\nu^2} \left[v_j \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial x} + u_j \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial y} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^b)' \overline{\mathbf{B}}^e \mathbf{a}^b + \frac{\nu}{2} (\mathbf{a}^b)' \overline{\mathbf{A}}^e \mathbf{a}^b \right] \quad (\text{A.5})$$

$$\overline{N}_{xy}^e = \frac{hE}{2(1+\nu)} \left[u_j \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial y} + v_j \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial x} + \frac{1}{2} (\mathbf{a}^b)' \overline{\mathbf{C}}^e \mathbf{a}^b \right] \quad (\text{A.6})$$

As forças de membrana tornam-se constantes dentro de cada elemento, pois, além das matrizes $\overline{\mathbf{A}}^e$, $\overline{\mathbf{B}}^e$ e $\overline{\mathbf{C}}^e$ que por definição, são formadas de termos constantes, as funções de forma γ_j que correspondem ao triângulo de deformação constante, quando derivadas, também o são:

Redefinindo-se a matriz $\mathbf{K}_g^b$, se torna:

$$\overline{\mathbf{K}}_g^b = \sum \Delta^e \left(\overline{N}_x^e \overline{\mathbf{A}}^e + \overline{N}_y^e \overline{\mathbf{B}}^e + \overline{N}_{xy}^e \overline{\mathbf{C}}^e \right) \quad (\text{A.7})$$

Da mesma forma, a matriz $\mathbf{G}_{ij}$ da equação (3.30) do Capítulo 3, torna-se:

$$\overline{\mathbf{G}}_{ij} = \frac{hE}{2(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{l} (\mathbf{a}_K^b)' \sum \Delta^e \left[\frac{\partial \gamma_j^e}{\partial x} (\overline{\mathbf{A}}_{Kj}^e + \nu \overline{\mathbf{B}}_{Kj}^e) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial y} \overline{\mathbf{C}}_{Kj}^e \right] \\ (\mathbf{a}_K^b)' \sum \Delta^e \left[\frac{\partial \gamma_j^e}{\partial y} (\overline{\mathbf{B}}_{Kj}^e + \nu \overline{\mathbf{A}}_{Kj}^e) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \gamma_j^e}{\partial x} \overline{\mathbf{C}}_{Kj}^e \right] \end{array} \right] \quad (\text{A.8})$$

Com relação a matriz $\overline{\mathbf{H}}$, ela fica:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}} = & \frac{hE}{2(1-\nu^2)} \sum \Delta^e \left\{ \bar{\mathbf{A}}^e \mathbf{a}^b (\mathbf{a}^b)^t \bar{\mathbf{A}}^e + \bar{\mathbf{B}}^e \mathbf{a}^b (\mathbf{a}^b)^t \bar{\mathbf{B}}^e + \right. \\ & \left. + \nu \left[\bar{\mathbf{B}}^e \mathbf{a}^b (\mathbf{a}^b)^t \bar{\mathbf{A}}^e + \bar{\mathbf{A}}^e \mathbf{a}^b (\mathbf{a}^b)^t \bar{\mathbf{B}}^e \right] + \frac{1-\nu}{2} \bar{\mathbf{C}}^e \mathbf{a}^b (\mathbf{a}^b)^t \bar{\mathbf{C}}^e \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Portanto, verifica-se que nos sucessivos incrementos (ou iterações), o cálculo das matrizes $\bar{\mathbf{K}}_g^b$, $\bar{\mathbf{G}}$ e $\bar{\mathbf{H}}$ fica extraordinariamente simplificada.

Resumindo, o resultado é a seguinte matriz de rigidez tangente simplificada:

$$\bar{\mathbf{K}}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0^p & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_0^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{\mathbf{G}} \\ 2\bar{\mathbf{G}}^t & \bar{\mathbf{H}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{K}}_g^b \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Essa matriz $\bar{\mathbf{K}}_T$ de rigidez tangente é agora muito mais simples de se calcular em cada incremento (ou seja na iteração) do que sua expressão original $\mathbf{K}_T$, dada na equação (3.62) do Capítulo 3.

A matriz de massa da placa dada pela equação (3.45) do Capítulo 3, após essa simplificação torna-se:

$$\bar{\mathbf{M}}^b = \rho h \iint_{\Omega} \Phi \Phi^t dx dy + \frac{\rho h^3}{12} \Delta^e \sum (\bar{\mathbf{A}}^e + \bar{\mathbf{B}}^e) \quad (\text{A.11})$$

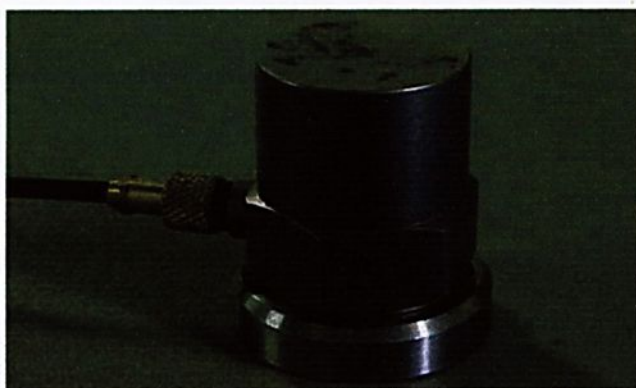
A matriz de massa do estado plano de tensões dada pela equação (3.32) do Capítulo 3, não se altera, assim a nova matriz de massa da estrutura será:

$$\bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^p & 0 \\ 0 & \bar{\mathbf{M}}^b \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

ANEXO B

APARELHOS UTILIZADOS NOS ENSAIOS EXPERIMENTAIS NA OBTENÇÃO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS E MODOS DE VIBRAÇÃO DAS PLACAS GEOMETRICAMENTE LINEAR E NÃO-LINEAR

B.1 Acelerômetro da Brüel & Kjaer



B.2 Analisador de sinais SR780, aparelho similar ao da Brüel & Kjaer

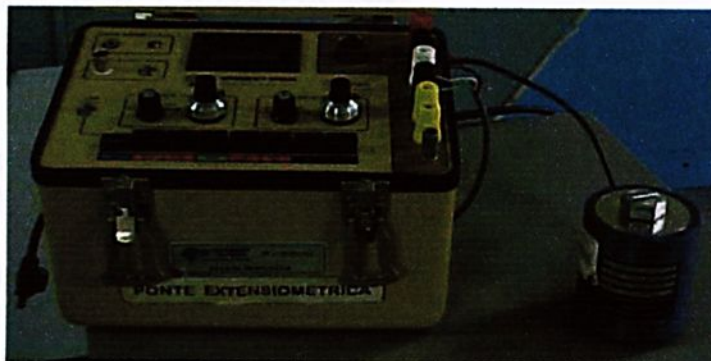


B.3 Martelo de impacto da Brüel & Kjaer tipo 8202

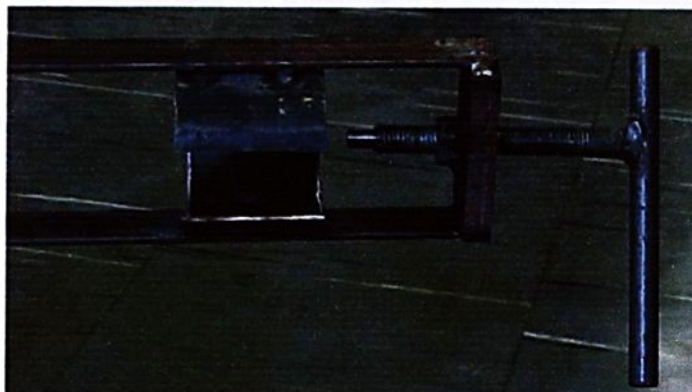


B.4 Gerador de função gf-03 da LABO**B.5 Amplificador da Brüel & Kjaer tipo 2712****B.6 Célula de carga da LOCKHEED ELETRONICS COMPANY, modelo 3000 para capacidade de 2000 lb**

B.7 Ponte extensiométrica da MENSUREMENTS GROUP, modelo P3500, para registrar a força que atua na célula de carga



B.8 Alojamento da célula de carga com detalhe de parafuso e porca.



B.9 Excitador da Brüel & Kjaer tipo 4808



BIBLIOGRAFIA

BILLAH, K.Y., SCANLAN, R.H. Resonance, Tacoma Narrows bridge failure, and undergraduate physics textbooks, *American Journal. Physics*, New York, v. 59, n. 2, p.118-124, 1991.

COSTA, H. B. *Elementos finitos (via resíduos ponderados) na resolução o problema de segunda ordem das placas*. 1986, 150p., Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

FARQUHARSON, F.B. Aerodynamic stability of suspension bridges, *Engineering Experiment Station Bulletin*, Washington, n. 116, Part 1, 1950.

GARZERI, F. J. *Elementos finitos (via resíduo ponderado) na análise dinâmica de placas de comportamento linear*. 1991, 145p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas e Fundações), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

IDE, P. S. *Análise de vibrações livres em torno de configurações deformadas em placas de comportamento geometricamente não-linear pelo método dos elementos finitos*. 1995. 142p., Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

LEISSA, A. W. *Rectangular plates. Vibration of plates*. Washington, D.C.: NASA SP-100, p.41-160, 1969.

PAPPALARDO, A. J. *Uma notável simplificação na análise de segunda ordem das placas pelo método dos elementos finitos*. 1992, 112p., Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas e Fundações), Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

THOMSON, W.T. Vibration periods at Tacoma Narrows, *Engineering News Record*, New York, v. P477, p.61-62, 1941.

TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of plates and shell*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1959.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- ALMEIDA, M. T. *Vibrações mecânicas para engenheiros*. São Paulo: Edgar Blucher, 1987. 400p.
- BARROS, I. Q. *Introdução ao calculo numérico*. Campinas: UNICAMP, 1970.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1982. 735p.
- BATHE, K. J., RAMASWAMY, S. An accelerated subspace iteration method. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, New York, v. 23, p.313-331, 1980.
- BATHOAZ, J. L., JURGEN, K. B., L. W. A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, New York, v. 15, p.1771-1812, 1980.
- BRASIL, R. M. L. R. F. *Análise dinâmica de estruturas apertada planas de comportamento geometricamente não-linear*. São Paulo, 1990. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- CAUGHEY, T. K. Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal Applied Mechanics*, New York, v. 27, p.269-271, Jun., 1960.
- CHEUNG, Y. K.; KING, I. P.; ZIENKIEWICZ, O. C. Slab bridges with arbitrary shape and support conditions: a general method of analysis based on finite elements. *Proc. Inst. Civ. Eng.*, New York, v. 40, p.9-36, 1968.
- CHIANG, C. K.; MEI, C.; GRAY, C. E. J. Finite element large - amplitude free and forced vibrations of rectangular thin compute plates. *Journal of Vibrations and Acoustics*, New York, v. 113, p.309-315, 1991.
- CHU, H. N.; HERRMANN, G. Influence of large amplitudes on free flexural vibrations of rectangular elastic plates. *ASME*, Reprinted from *J. Appl. Mech.*, New York, p.532-540, 1956.
- CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. *Dynamics of structures*. London: McGraw-Hill, 1975.
- CLOUGH, R. W., TOCHER, J. L. Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. In. *Proc. Conf. Mat. Math.*, AFIT, Wrigth-Patterson AF Base, Ohio, p.616-645, 1965.

- COOK, R. D. *Concepts and applications of finite element analysis*. New York: John Wiley, 1981. 402p.
- COSTA, H. B., LIMA, V. M. S. *Estudo das placas. resíduo ponderados ponderados e elementos finitos*. 1987. Boletim Técnico BT/PEF-8716, (Departamento de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- CRAIG, R. R. Direct integration methods for dynamic response. In: *Structural Dynamic*, New York: Wiley, p.447-466, 1981.
- CRANDALL, S. H. *Engineering analysis*. New York: McGraw-Hill, 1956.
- DAWE, D. J. *Finite elements for plate bending analysis in matriz and finite element displacement analysis of structures*. Oxford: Clarendon Press, p. 410-462, 1984.
- DHATT, G., TOUZOT, G. *Numerical procedures. in the finite element method displayed*. Toronto: McGraw-Hill, p. 240-355, 1984.
- DIOGO, L. A. C. *Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em placas pelo método dos elementos finitos*. 1984, Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- FATHY, A. AKL.; DIGER, W. H.; IRON, B. M. Acceleration of subspace iteration. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, West Sussex, v. 18, p.583-589, 1982.
- GORMAN, D. J. *Free vibration anlysis of retangular plates*. New York: Elsevier, 1982.
- HAGEDORN, P. *Oscilações não-lineares*. São Paulo: Edgard Blucher, 1984.
- HOLAND, I., BELL, K. *Finite element methods in stress analysis*. Tapir, Norway, 1972.
- JOSEPH, K. T., RAO, S. A fast algorithm for triangular plate bending elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, West Sussex, v. 14, p.1100-1103, 1979.
- MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Applied Mechanics*, New York, v. 73, p.31-38, 1951.

- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. *J. Eng. Mech.*, Div. ASCE, New York, v. 85, p.67-94, 1959.
- NOVOZHILOV, V. V. *Foundations of the non-linear theory of elasticity*. New York: Graylock Press, 1953.
- SEGERLIND, L. J. *Applied finite element analysis*. New York: John Wiley, 1984.
- SIQUEIRA, J. A. L. *Elementos finitos de placas: esforços solicitantes*. 1982. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- SLYPER, H. A. Development of explicit stiffness and mass matrices for a triangular plate element. *Int. J. Solids Structures*, New York, v. 5, p.241-249,
- SMITH, I. M., GRIFFITHS, D. V. *Programming the finite element method*. 2nd, New York: John Wiley, 1988.
- SOARES, C. A. *Teoria da elasticidade*. São Paulo, Departamento de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1992 (Notas de aulas)
- SOUZA LIMA, V. M. *Análise matricial de estruturas*. São Paulo, Departamento de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo., 1992. (Notas de aulas)
- SOUZA LIMA, V. M. *Método dos elementos finitos*. São Paulo, 1992. Notas de aulas. (Departamento de Estruturas e Fundações) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo., 1992. (Notas de aulas)
- TIMOSHENKO, S. P., GERE, J. M. *Theory of elastic stability*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1961.
- TIMOSHENKO, S. P., GOODIER, J. N. *Theory of elasticity*. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, 1970.
- VENANCIO FILHO, F. *Análise matricial de estruturas*. Rio de Janeiro: Almeida Neves, 1975. 256p.
- WEAVER, W. JR., JOHNSTON, P. R. *Finite elements for structural analysis*. New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1984.

- WEAVER, W. JR., JOHNSTON, P. R. *Plates and shells. structural dynamics by finite element*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, p.380-382, 1987.
- WILSON, E. L., PENZIEN, J. Evaluation of orthogonal damping matrices. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, New York, v. 4, p.5-10, 1972.
- ZAGOTTS, D. *Introdução a teoria das placas. pontes e grandes estruturas, introdução a teoria das placas e cascas*. São Paulo: EPUSP, 1979.
- ZIENKIEWICZ, O. C. *Bending of thin plates. the finite element method*. London: McGraw-Hill, p.226-267, 1977.
- ZIENKIEWICZ, O. C. A new look at Newmark, holbolt and other time stepping formulae. a weighted residual approach. *Earthq. Eng. Strutct. Dyn.*, New York, v. 5, p.413-418, 1977.
- ZIENKIEWICZ, O. C., PHILLIPS, D. V. An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric co-ordinates. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, New York, v. 3, p.519-528, 1971.



