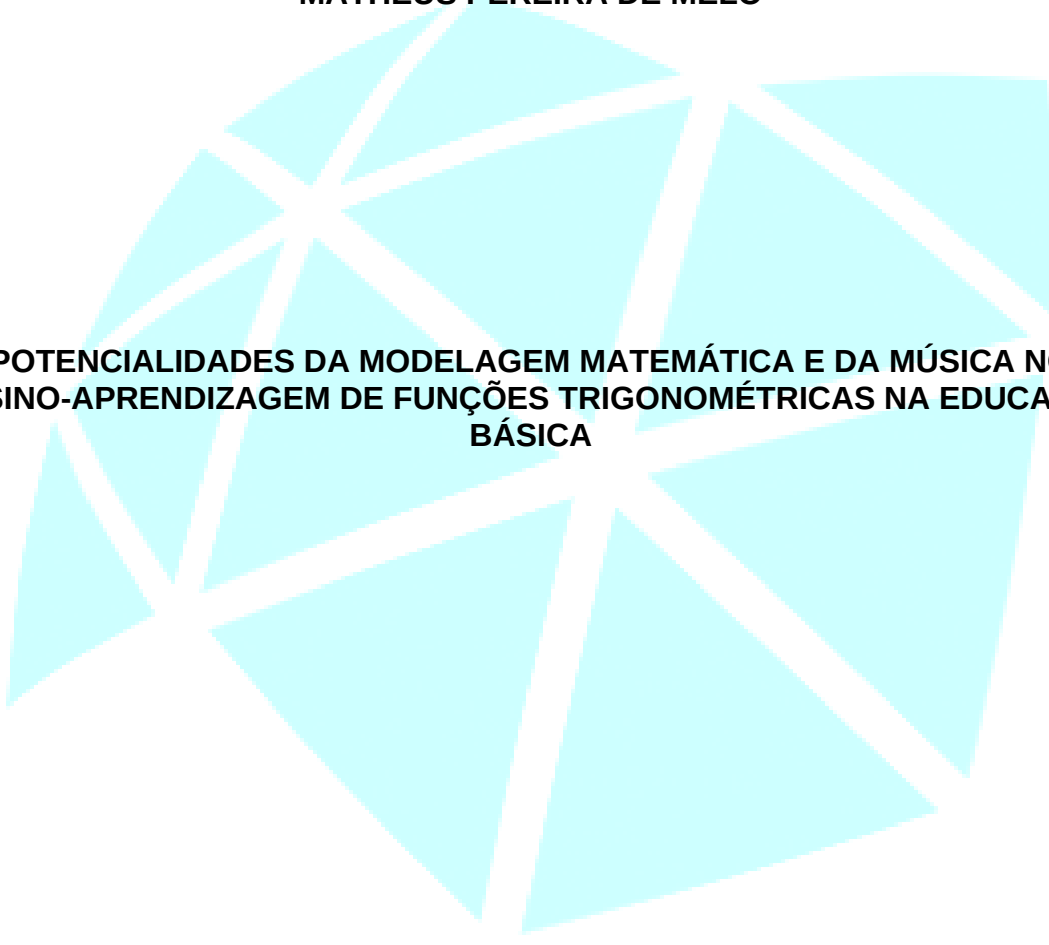


**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE CIÊNCIAS
CÂMPUS DE BAURU**

MATHEUS PEREIRA DE MELO



**POTENCIALIDADES DA MODELAGEM MATEMÁTICA E DA MÚSICA NO
ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO
BÁSICA**

**BAURU
2023**

MATHEUS PEREIRA DE MELO

**POTENCIALIDADES DA MODELAGEM MATEMÁTICA E DA MÚSICA NO
ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NA EDUCAÇÃO
BÁSICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Faculdade de Ciências, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de Bauru, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Professor Associado Rubens de Figueiredo Camargo

BAURU
2023

M528p

Melo, Matheus Pereira de

POTENCIALIDADES DA MODELAGEM MATEMÁTICA E DA MÚSICA NO
ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NA
EDUCAÇÃO BÁSICA / Matheus Pereira de Melo. -- Bauru, 2023
83 p.

Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura - Matemática) - Universidade
Estadual Paulista (Unesp), Faculdade de Ciências, Bauru

Orientador: Rubens de Figueiredo Camargo

1. Modelagem Matemática. 2. Música. 3. Funções Trigonométricas. I. Título.

ATA DE APRESENTAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

No dia 25 de Janeiro de 2023, às 15 horas, no auditório do Departamento de Matemática, o aluno **Matheus Pereira de Melo**, do Curso de Licenciatura em Matemática, tendo como Orientador o Professor Associado **Rubens de Figueiredo Camargo** e por banca a Professora Mestra **Micaeli Mendola Theodoro** e o Professor Doutor **Fabiano Borges da Silva**, apresentou o seu Trabalho de Conclusão de Curso intitulado: **Potencialidades da Modelagem Matemática e da Música no Ensino-Aprendizagem de funções Trigonométricas na Educação Básica** com a finalidade de cumprir uma das exigências do Curso de Licenciatura em Matemática.

O aluno, acima referido, comprometeu-se a realizar as correções necessárias e acatar as sugestões dos professores para completar o Trabalho, sob orientação do Professor Orientador.

Considerando o exposto acima e os critérios de avaliação que se encontram no verso desta ata, atribuímos as seguintes notas:

Professor Doutor Rubens de Figueiredo Camargo (Orientador)	Nota 10
Professora Mestra Micaeli Mendola Theodoro	Nota 10
Professor Doutor Fabiano Borges da Silva	Nota 10
	<u>Média Final 10</u>

Com parecer favorável ao TCC, condição de sua aprovação (X).



Professor Doutor Rubens de Figueiredo Camargo (orientador)



Professora Mestra Micaeli Mendola Theodoro



Professor Doutor Fabiano Borges da Silva

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, Lúcia, que sem medir esforços sempre fez o impossível para que eu pudesse trilhar essa caminhada dentro da Universidade. Ainda, a todos que ensinam matemática e lutam por uma educação de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, à minha família: mãe, padrasto e irmão, por todo o apoio e durante a graduação.

Agradeço ao meu orientador, professor Rubens de Figueiredo Camargo, que desde a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias tem acreditado no meu potencial como pesquisador e licenciando, e me orientou tanto na Iniciação Científica quanto neste trabalho de conclusão de curso, sempre disposto a me auxiliar nas dúvidas e dificuldades, o qual vejo como inspiração e tenho orgulho em dizer que é meu orientador.

Agradeço ao professor Fabiano Borges da Silva e à mestra Micaeli Mendola Theodoro – duas inspirações para mim dentro da licenciatura e da pesquisa – por aceitarem ser banca de defesa deste trabalho e pelas contribuições.

Agradeço à coordenadora do curso, professora Maria Ednéia Martins, por sempre se fazer presente na vida acadêmica dos alunos, nos dando total apoio, e por se dedicar principalmente na disciplina de Metodologias para a Pesquisa Educacional, a qual serviu de base para a elaboração desta pesquisa.

Agradeço a todos os meus colegas de turma, pelas trocas, apoio e amizade durante esta longa jornada.

E por fim, agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática que atuam em nosso curso, os quais levarei sempre no coração. Foi um privilégio e uma honra ouvir todos os ensinamentos dados, parte essencial para que eu chegasse até aqui. Tenho a certeza de que vocês inspiram a todos que passam por este curso e por suas vidas, e além disso, o amor com que exercem esta profissão tão linda tem grande poder de transformação.

EPÍGRAFE

"A música é o meio mais poderoso do que qualquer outro, porque o ritmo e a harmonia têm sua sede na alma. Ela enriquece esta última, confere-lhe a graça e ilumina aquele que recebe uma verdadeira educação."

Platão.

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo de caráter bibliográfico sobre o uso da Modelagem Matemática e da Música no ensino-aprendizagem de funções trigonométricas durante a educação básica. A presente monografia propõe uma análise de dados, onde foram compiladas pesquisas em um banco de dados para a compreensão das potencialidades do uso desta abordagem em sala de aula. Ao final foi elaborada uma proposta de atividade de modelagem do som no intuito de encaminhar ao professor uma forma, dentre as várias existentes, de trabalhar as funções trigonométricas usando a Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Música; Funções trigonométricas.

ABSTRACT

This work presents a bibliographical study on the use of Mathematical Modeling and Music in the teaching-learning of trigonometric functions during basic education. This monograph proposes a data analysis, where surveys were compiled in a database to understand the potential of using this approach in the classroom. At the end, a proposal for a sound modeling activity was created in order to provide the teacher with a way, among the many existing ones, of working with trigonometric functions using Mathematical Modeling.

Keywords: Mathematical Modeling; Music; Trigonometric functions.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	- Diagrama do processo de Modelagem Matemática segundo a matemática aplicada, produzido pelo autor.....	22
Figura 2	- Ciclo trigonométrico. Figura retirada de (GONÇALVES, 2018).....	28
Figura 3	- Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	29
Figura 4	- Gráfico de $f(x) = \text{cos}(x)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	30
Figura 5	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	31
Figura 6	- Gráfico de $f(x) = \frac{1}{4} + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	31
Figura 7	- Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2} + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	31
Figura 8	- Gráfico de $f(x) = 1 + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	32
Figura 9	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	33
Figura 10	- Gráfico de $f(x) = 0 + \frac{1}{2}\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	33
Figura 11	- Gráfico de $f(x) = 0 + \frac{1}{4}\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	33
Figura 12	- Gráfico de $f(x) = 0 - 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	34
Figura 13	- Gráfico de $f(x) = 0 + \frac{3}{2}\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	34
Figura 14	- Gráfico de $f(x) = 0 - \frac{3}{2}\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	34
Figura 15	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor	

	usando o software GeoGebra.....	35
Figura 16	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(2x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	36
Figura 17	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(-2x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	36
Figura 18	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(4x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	37
Figura 19	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(-4x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	37
Figura 20	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	38
Figura 21	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(1x + 1)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	38
Figura 22	- Gráfico de $f(x) = 0 + 1\text{sen}(1x - 1)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.....	38
Figura 23	- Sintetizador eletrônico. Figura produzida por MURTA (2018), disponível em (< encr.pw/88u7m >).....	40
Figura 24	- Elementos da onda. Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.....	45
Figura 25	- Som grave, médio e agudo. Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.....	46
Figura 26	- Som forte e fraco. Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.....	46
Figura 27	- Gráfico da nota Si tocada por um Trompete em Si Bemol, produzido pelo autor utilizando o aplicativo Sound Oscilloscope, disponível em (< l1nk.dev/JH1kh >).....	48
Figura 28	- Gráfico da nota Lá tocada por um Trompete em Si Bemol, produzido pelo autor utilizando o aplicativo Sound Oscilloscope, disponível em (< l1nk.dev/JH1kh >).....	48
Figura 29	- Gráfico da nota Sol tocada por um Trompete em Si Bemol, produzido pelo autor utilizando o aplicativo Sound Oscilloscope, disponível em (< l1nk.dev/JH1kh >).....	49

Figura 30	- Som fundamental (f_1), sons múltiplos (f_2, f_3, f_4, f_5) e timbre resultante (f). Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.....	50
Figura 31	- Viola de arco (à esquerda) e violino (à direita). Figura retirada do Blog Multisom, disponível em (https://blog.multisom.com.br/violino-viola-diferencas/).....	51
Figura 32	- Escala Diatônica de dó maior. Figura retirada do Portal do Professor, disponível em (www.portaldoprofessor.mec.gov.br).....	51
Figura 33	- Tela de busca da BDTD. Figura produzida pelo autor, utilizando a ferramenta Print Screen.....	55
Figura 34	- Tela do GeoGebra para a função $f(x) = A + B\sin(Cx + D)$, produzida pelo autor.....	66
Figura 35	- Tela do Geogebra para a função $f(x) = A + B\cos(Cx + D)$, produzida pelo autor.....	66
Figura 36	- Tela inicial do software Mathematica. Figura produzida pelo autor usando a ferramenta Print Screen....	68
Figura 37	- Partitura da Música Anunciação. Figura retirada do SCRIBD, disponível em (https://pt.scribd.com/doc/273716546/ANUNCIACAO).....	69
Figura 38	- Tela 1 do Mathematica durante a atividade Figura produzida pelo autor usando a ferramenta Print Screen....	71
Figura 39	- Tela 2 do Mathematica durante a atividade. Figura produzida pelo autor usando a ferramenta Print Screen....	72

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	-	Frequências da Escala de $Dó_3$, disponível em (MISURA, 2016)..	70
-----------------	---	--	----

LISTA DE QUADROS

Quadro 1	- Algumas concepções de Modelagem Matemática.....	23
Quadro 2	- Pesquisas encontradas na BDTD buscando por “Música e Funções Trigonométricas”	55
Quadro 3	- Etapas do processo de Modelagem Matemática Segundo Dionísio Burak.....	63

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	17
1.1	OBJETIVOS.....	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	20
2.1	O ENSINO TRADICIONAL DE MATEMÁTICA.....	20
2.1.1	O ENSINO DE FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.....	21
2.2	MODELAGEM MATEMÁTICA.....	22
2.3	MÚSICA E MATEMÁTICA.....	26
2.3.1	FUNÇÕES PERIÓDICAS: SENO E COSSENO.....	27
2.3.2	SÉRIE DE FOURIER.....	39
2.4	SOM E ONDAS SONORAS.....	43
2.4.1	CARACTERÍSTICAS DAS ONDAS SONORAS.....	44
2.4.2	FISIOLOGIA DO SOM.....	45
3	METODOLOGIA DE PESQUISA.....	52
4	LEVANTAMENTO E DESCRIÇÃO DOS DADOS.....	54
4.1	BANCO DE DADOS.....	54
4.2	PESQUISAS ENCONTRADAS.....	55
4.3	DESCRIÇÃO E ANÁLISE GERAL DAS PESQUISAS.....	62
5	ATIVIDADE DE MODELAGEM.....	63
5.1	ESCOLHA DO TEMA.....	63
5.2	PESQUISA EXPLORATÓRIA.....	64
5.3	LEVANTAMENTO DO PROBLEMA.....	65
5.4	RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	67
5.5	ANÁLISE CRÍTICA DAS SOLUÇÕES.....	68
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	73
	REFERÊNCIAS.....	67

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PÓS ATIVIDADE DE MODELAGEM..	70
APÊNDICE B – CÓDIGOS PARA A MÚSICA ANUNCIAÇÃO NO MATHEMATICA.....	71
ANEXO A – SUGESTÃO DE COMPOSIÇÃO DE HARMÔNICOS.....	74

1 INTRODUÇÃO

Muitas vezes, nos deparamos com visões sobre a matemática como uma disciplina complexa, cuja aprendizagem se dá por meio de um processo de repetição de técnicas e memorização de fórmulas, a qual baseia-se, geralmente, em um modelo de ensino tradicional, o qual, na maioria dos casos, é responsável por parte do desinteresse dos alunos (ANDRADE, 2013, p. 15 seg).

Além disso, são muitos os obstáculos que o professor encontra em sala de aula, como a falta de recursos, salas superlotadas, alunos com defasagem em relação aos conteúdos do ano que estão cursando, a falta de condições que os familiares podem ter em ajudar e incentivar os alunos, dentre outros percalços enfrentados pela comunidade escolar durante a educação básica (ANDRADE, 2013, p. 23 seg).

Para que possamos alcançar uma educação efetiva e transformadora da sociedade é necessário propiciar aos alunos um espaço de discussão, aprendizado e construção de novos conhecimentos, para que desta forma, tornem-se cidadãos críticos e com potencial investigativo e transformador (ANDRADE, 2013; BASSANEZI, 2002; BARBOSA, 2001).

Diante disso, algumas tendências e metodologias vão de encontro com uma reformulação do sistema de educação atual, onde por meio delas, os alunos ocupam um espaço de maior protagonismo durante todo o processo de ensino-aprendizagem (ANDRADE, 2013). Uma dessas tendências é a Modelagem Matemática, a qual está ligada a um crescente movimento dentro da área da Educação Matemática (BARBOSA, 2001), contando com diversos pesquisadores, como Rodney Carlos Bassanezi, Maria Salett Biembengut, Dinísio Burak, Jonei Cerqueira Barbosa, Ana Paula dos Santos Malheiros, Ubiratan D'Ambrósio (1932 – 2021), entre outros.

Por outro lado, são diversas as relações que podemos encontrar entre a matemática e a música, desde sua teoria até a emissão dos sons por meio dos instrumentos. Grandes matemáticos, como Leonhard Euler (1707-1783) e Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), deram importantes contribuições para estudos dentro da música e de toda a física-matemática por trás dela (BROMBERG, 2012). E além disso, é possível encontrar diversos trabalhos que relacionam o ensino de matemática com a música e a Modelagem Matemática do som, por meio de funções trigonométricas.

Desta forma, visando o contexto atual da matemática na educação básica, realizamos um estudo sistemático acerca da Modelagem Matemática, das relações entre a música e a matemática com enfoque nas funções trigonométricas e por fim um levantamento e análise de produções bibliográficas acerca do ensino de matemática utilizando a Modelagem Matemática do som e notas musicais por meio das funções trigonométricas, tendo como objetivo compreender e apontar as potencialidades do uso destas metodologias na aprendizagem das funções trigonométricas.

Na próxima seção, apresentamos a teoria que fundamenta este trabalho, passando por três principais tópicos: o ensino tradicional de matemática, onde trazemos um pouco de sua problemática e dos encaixes do ensino-aprendizagem de funções trigonométricas na educação básica; a Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática; e as relações entre a música e a matemática com enfoque nas funções trigonométricas.

Em seguida, na seção 3, explicitamos a metodologia utilizada na produção deste trabalho e na obtenção dos resultados.

Na seção 4, será apresentado de forma sistemática o levantamento acerca das produções e pesquisas sobre o ensino de funções trigonométricas utilizando a Modelagem Matemática e a Música, e além disso, faremos apontamentos gerais sobre essas produções e para qual caminho elas apontam.

Na seção 5 deixamos uma sugestão de atividade de Modelagem Matemática do som, onde os conceitos de altura, intensidade e timbre podem ser abordados para ensinar e introduzir o estudo das funções trigonométricas, e ao final, com o auxílio de um software, os alunos poderão reproduzir o trecho de uma música para validar seus conhecimentos.

Por fim, na seção 6, enfatizaremos as considerações finais e conclusões obtidas por meio deste trabalho e como acreditamos que o uso desta metodologia pode contribuir durante a prática docente e para evolução do ensino atual de matemática, principalmente para o ensino-aprendizagem das funções trigonométricas.

1.1 OBJETIVOS

Esta pesquisa teve como objetivo geral realizar um mapeamento das produções já existentes baseadas no ensino-aprendizagem das funções trigonométricas por meio da Modelagem Matemática e da Música, e identificar o potencial do uso desta metodologia apontando as possibilidades já abordadas e os direcionamentos dados pelos pesquisadores.

Em específico, buscou-se realizar uma contextualização e compreender a Modelagem Matemática aplicada ao ensino, a relação existente entre a música e a matemática com enfoque nas funções trigonométricas.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, apresentaremos de maneira sintetizada os conceitos que fundamentam esta pesquisa nos quais estão embasadas nossas discussões, onde trataremos: da problemática do ensino tradicional de matemática, da Modelagem Matemática voltada a Educação, de algumas relações existentes entre a música e a matemática, voltadas para as funções trigonométricas, além de abordar brevemente alguns conceitos musicais ligados ao som.

2.1 O ENSINO TRADICIONAL DE MATEMÁTICA

Geralmente o ensino de matemática na educação básica ainda se baseia em um modelo tradicional onde o professor é o detentor do conhecimento e os alunos são apenas reprodutores daquilo que o professor passa na lousa, e além disso, há toda uma preocupação com o rigor e o formalismo matemático, buscando sempre a exatidão e precisão dos resultados, fazendo com que as aulas se tornem cansativas e desestimulantes (OLIVEIRA, 2019).

O ensino tradicional de matemática ocorre por meio da memorização de técnicas e um processo de transmissão de conhecimento, de tal modo que, na maioria das vezes, o aluno torna-se apenas um reprodutor daquilo que foi feito e perde toda sua criticidade e capacidade de analisar dados na busca de soluções (ANDRADE, 2013; BASSANEZI, 2002; BURAK, 1992, 2010).

Para uma educação de qualidade e um processo de aprendizagem apropriado o professor precisa lançar mão de diferentes metodologias e práticas pedagógicas que tornem o aprender matemática atrativo ao mesmo tempo que trabalha todo seu rigor e formalismo, os quais não podem ser deixados de lado (ANDRADE, 2013; BASSANEZI, 2002; BURAK, 1992, 2010).

Segundo Bassanezi (p.15, 2002):

Na própria atividade de ensino, elementar e médio, o porquê de se ensinar matemática deve ser questionado. Os conhecimentos básicos de cálculo, geometria e estruturas algébricas seriam meros “jogos” destinados a desenvolver habilidades intelectuais (como ocorre com frequência em nossas escolas) ou deveriam ser instrumentos aplicáveis aos usos cotidianos? Esta pergunta é ainda mais relevante se considerarmos que a grande maioria dos alunos, mais tarde, saberá utilizar ou se lembrará de apenas uma pequena parcela dos conhecimentos matemáticos ensinados no estágio de formação e que, mesmo no ambiente de sala de aula, nem todos se divertem com os “jogos” aprendidos.

Desta forma, acredita-se que para uma evolução do modelo atual da educação na tentativa de torná-la cada vez menos alienada e mais comprometida com a realidade dos indivíduos e da sociedade, faz-se necessário o uso de instrumentos matemáticos por meio dos quais a matemática seja inter-relacionada com outras áreas do conhecimento, e ainda é necessário a valorização da matemática ensinada em sala de aula de modo que ela seja interessante, por sua utilidade, e estimulante, por ser agradável (ANDRADE, 2013; BASSANEZI, 2002; BURAK, 1992, 2010).

2.1.1 O ensino de funções trigonométricas

A trigonometria tem sua origem ligada ao estudo de grandes distâncias com inviabilidade de serem medidas fisicamente. Com o passar do tempo se desenvolveu e tornou-se uma teoria muito importante, desde as relações encontradas estudando lados e ângulos de um triângulo, até seu estudo na circunferência trigonométrica, a qual deu origem as chamadas funções trigonométricas circulares (TAVARES, 2022).

Assim como na matemática em geral, o ensino de trigonometria e principalmente de funções trigonométricas encontra diversas dificuldades devido a sua abstração, visualização e até mesmo sua conexão entre Álgebra e Geometria, fazendo-se necessário o uso de diferentes práticas pedagógicas as quais permitam uma contextualização e tornem mais “palpáveis” os conceitos que constituem as funções trigonométricas (TAVARES, 2022).

Este tipo de função tem grande importância, principalmente devido as suas aplicações na modelagem de fenômenos periódicos, e além disto, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018, p. 535-536) e as habilidades e competências nela descritas, é necessário conectar este estudo ao cotidiano dos alunos, sendo possível trabalhar, por exemplo, com ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, e até mesmo conectar o ensino destas funções com pautas além da matemática, que envolvem desde a sustentabilidade até questões de saúde dos alunos.

Diante do exposto, é possível o trabalho com as funções trigonométricas de uma forma diferenciada, pensando em todo o viés cultural e na importância que a música tem atualmente no mundo.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Segundo as concepções da matemática aplicada, a Modelagem Matemática trata do ato de descrever fenômenos por meio de equações ou sistemas de equações matemáticas, através dos quais se obtém soluções e conclusões na linguagem do mundo real (BASSANEZI, 2002). O diagrama da Figura 1 sintetiza este processo de Modelagem.

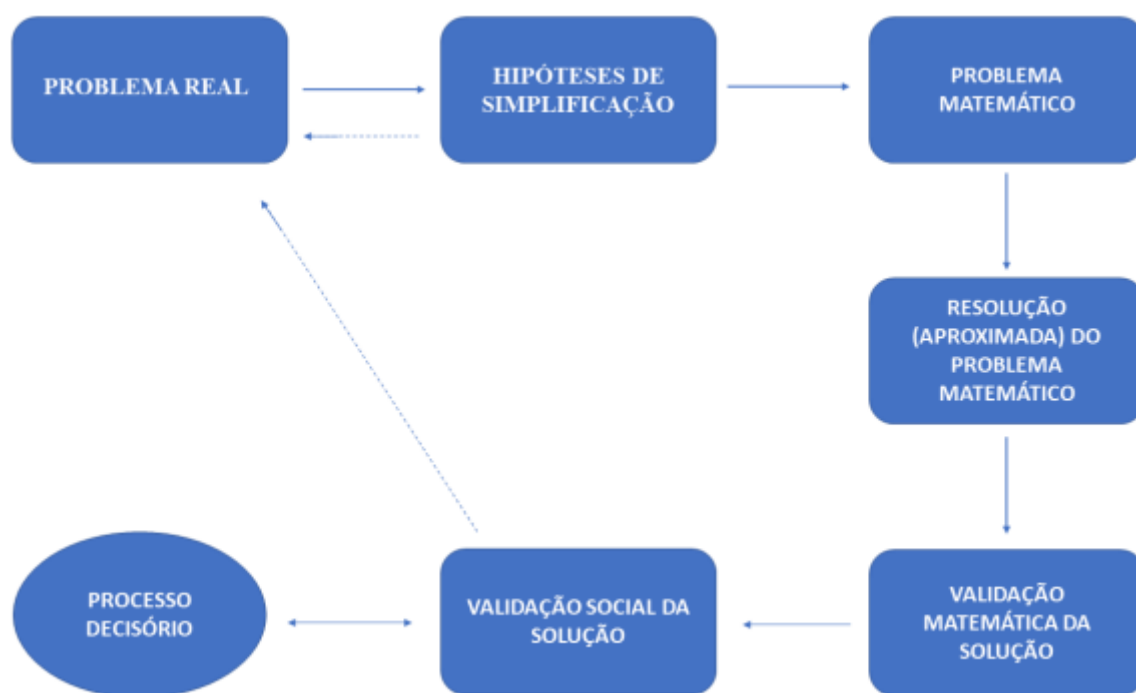


Figura 1 – Diagrama do processo de Modelagem segundo a matemática aplicada, produzido pelo autor.

No âmbito da Educação Matemática, a modelagem tem se tornado uma importante abordagem didática e pedagógica vinculando a matemática à realidade, a teoria à prática e integrando as diferentes áreas do conhecimento, que é um dos objetivos propostos na BNCC (BRASIL, 2018, p. 470), onde as disciplinas devem articular-se de maneira a realizar um trabalho de caráter interdisciplinar, trazendo significado para a matemática fora da escola e trabalhando a capacidade crítica do aluno (BARBOSA, 2001; BIEMBENGUT, 2000; BURAK, 1992, 2010; BURAK e KLÜBER, 2008), proporcionando momentos de construção de conhecimentos para que possam interpretar situações dentro e fora da sala de aula.

O processo de modelagem – apesar das diferentes concepções advindas de diferentes autores – pode ser descrito em três tópicos: a percepção, onde são captadas as ideias, informações e dados para entendê-los e relacionar com o

proposto, tratando-se assim da seleção do que será estudado e especificação da situação problema, fenômeno ou assunto que será trabalhado; compreensão e explicitação, tratando-se da formulação e resolução do modelo, classificando a relevância das informações, simplificando as hipóteses necessárias e identificando as variáveis envolvidas na descrição do objeto estudado; por fim, a significação e expressão, onde baseado nos resultados obtidos na fase anterior, é feita a interpretação e validação dos mesmos, verificando se atendem e se adequam as leis empíricas do fenômeno observado (GRAMS, 2014, p. 42-43).

O uso da modelagem possibilita ao aluno a testagem e validação de hipóteses incentivando o caráter pesquisador e trabalhando a matemática aplicada em sala de aula de tal modo que se torne cada vez mais prazerosa e interessante de se trabalhar (BARBOSA, 2001; BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT, 2000; BURAK, 1992, 2010).

Apesar das diversas concepções de Modelagem Matemática que podemos encontrar, neste trabalho vamos tomar por base as definições e conceitos de acordo com a visão dos autores Rodney Carlos Bassanezi, Maria Sallet Biembengut, Dinísio Burak e Jonei Cerqueira Barbosa devido a ligação entre os autores. No Quadro 1 apresentamos de forma resumida as concepções de cada autor acerca da modelagem matemática no campo da Educação matemática, e as respectivas obras de onde retiramos tais concepções.

Quadro 1 – Algumas concepções de Modelagem Matemática.

AUTOR	CONCEPÇÃO	OBRA
RODNEY CARLOS BASSANEZI	A modelagem matemática é a arte de traduzir a realidade e seus fenômenos por meio de equações matemáticas sistematizadas, buscando resolvê-las para obter conclusões na linguagem do mundo real. Segundo o autor, usualmente seleciona-se as hipóteses, formalizando-as por intermédio de um sistema artificial, o modelo, o qual é um conjunto de símbolos e relações	Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia

	matemáticas que representam o fenômeno estudado.	
DINÍSIO BURAK	A modelagem matemática é um conjunto de procedimentos com objetivo de construir um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos do cotidiano do ser humano, ajudando a fazer previsões e tomar decisões. O autor inicialmente tinha sua visão fundamentada pela matemática aplicada, porém para romper com a visão de ciência mencionada e buscar maior significado ao que é ensinado e ao que é aprendido, baseou-se em dois princípios de desenvolvimento da modelagem matemática: o interesse do grupo e a obtenção de dados do ambiente em que se localiza o interesse do grupo.	Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem
MARIA SALLET BIEMBENGUT	Considera que a modelagem é um procedimento que envolve a criação de um modelo, o qual é visto como uma ponte que liga a matemática e a realidade e traduz o fenômeno estudado. Nesta concepção a matemática e a realidade são conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir.	Modelagem matemática no ensino
JONEI CERQUEIRA	A modelagem matemática se constitui como um ambiente de aprendizagem	Modelagem na Educação

BARBOSA	no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas. Não há inicialmente a necessidade de a temática ter relação direta com a matemática. Este fato pode proporcionar a formulação de problemas que não tenham como resolução cálculos matemáticos elaborados. Os conceitos matemáticos a serem explorados dependem do desenvolvimento e encaminhamento realizado, portanto, só se saberá à medida que as atividades avançarem, propiciando o que é considerado pelo autor como atividade de natureza aberta, impossibilitando garantir a presença de um modelo matemático propriamente dito na abordagem dos alunos. O termo ambiente diz respeito ao lugar que os cerca e que os envolve, o qual estimula a investigação de situações oriundas de outras áreas, por meio da matemática. A partir do momento em que os alunos se sentem parte deste lugar e se interessam pela indagação e investigação, passam a desenvolver o trabalho com modelagem. O ambiente de aprendizagem da modelagem, segundo o autor, se	Matemática: contribuições para o debate teórico
----------------	--	--

	configura em três casos, os quais indicam o grau de abertura da atividade, que aumenta no decorrer das práticas realizadas e neste caso os alunos assumem a responsabilidade pela atividade.	
--	--	--

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3 MÚSICA E MATEMÁTICA

Desde a antiguidade fala-se da relação entre matemática e música e o “mais popular” exemplo se deu na Grécia Antiga, onde Pitágoras percebeu através de experimentos, que o som de instrumentos musicais é representado por relações de razões e de números inteiros (BROMBERG, 2012). Na época, pela primeira vez foi estabelecida a relação entre intervalos musicais, ou seja, a distância entre as alturas de um som e razões de cordas, principalmente para a mistura de sons consonantes (agradáveis) de intervalos de oitava ($1/2$), de quinta ($2/3$) e de quarta ($3/4$), e este experimento levou a criação de um sistema musical que se baseia na relação simples de números inteiros (BROMBERG, 2012; COMUNE, 2014; DEPIZOLI, 2015; RODRIGUES, 1999).

Já no período clássico, Arquitas de Tarento (430-360 a.C), teve grande importância para o desenvolvimento da música, trabalhando principalmente ligado ao estudo das proporções musicais onde acredita-se que possivelmente tenha sido ele quem trocou a denominação de média subcontrária para média harmônica. Segundo Arquitas, a harmonia entre dois ou mais sons ocorria quando os mesmos eram ouvidos como se fossem um único (DEPIZOLI, 2015).

A partir da percepção de que o som era produzido decorrente de pulsações de ar, onde as rápidas geravam um som agudo e as lentas um som grave, isto é, que a altura musical tem relação com a frequência de um som, foi que o elemento básico de estudo da acústica passou a ser o de compreender de que forma o som se propaga no ar como onda (ABDOUNUR, 2006, IAZZETTA, 2006).

Para gerar suas notas musicais, em contrapartida a Pitágoras que utilizava apenas o percurso das quintas, Arquitas lançava mão do uso das médias aritméticas e harmônicas, obtendo assim frações diferentes (DEPIZOLI, 2015).

Marcado por um intenso período de matematização de processos naturais, no Renascimento se passou a buscar explicações racionais para a ciência matemática-música, e desta forma, tem início a física da música, a busca pela compreensão dos harmônicos musicais e a explicação quantitativa do timbre. Nesta época, foram diversos os estudiosos que se destacaram, como Taylor (1685-1731), Leonhard Euler (1707-1783), Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), Daniel Bernoulli (DEPIZOLI, 2015).

A partir do pressuposto de que a vibração de um corpo sonoro poderia ser observada como superposição de seus modos simples com distintas amplitudes, D'Alembert utilizou o Teorema de Fourier (Lei de Ohm da Acústica) – que dentre outras coisas transformou-se no fundamento para análise de harmônicos – para demonstrar suas afirmações (DEPIZOLI, 2015).

No decorrer do tempo, os estudos sobre a música de um ponto de vista físico-matemático foram avançando e tornando-se mais fortes, principalmente com a criação de sintetizadores e da música eletrônica, o que estreitou ainda mais a relação existente entre a música e a matemática desde a época de Pitágoras (DEPIZOLI, 2015; IAZETTA, 2006).

2.3.1 FUNÇÕES PERIÓDICAS: SENO E COSSENO

Nesta seção apresentamos alguns conceitos matemáticos sobre as funções trigonométricas, que serão úteis em nossa compreensão das relações abordadas neste trabalho sobre a matemática e o som.

Função Periódica. Uma função real f é dita periódica se, existe, um número real positivo T , denominado período, tal que $f(x + T) = f(x)$. O período pode ser compreendido como o tempo necessário para que a função comece a apresentar repetições (no caso das funções trigonométricas circulares, é o tempo para que elas completem uma volta no ciclo trigonométrico).

Monotonicidade da Função. Uma função f é dita monótona em $[a, b]$ se para todo $x_n \in [a, b]$ tem-se:

- a. $x_{n+1} \geq x_n \rightarrow f(x_n) \geq f(x_{n+1})$, a função é não crescente.
- b. $x_{n+1} \geq x_n \rightarrow f(x_{n+1}) \geq f(x_n)$, a função é não decrescente.

Função Par. Uma função é dita par, se $f(-x) = f(x)$, para todo x .

Função Ímpar. Uma função é dita ímpar, se $f(-x) = -f(x)$, para todo x .

Função Limitada. Uma função é dita limitada se existe um número $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K \rightarrow -K \leq f(x) \leq K$.

Como dito anteriormente, a trigonometria tem sua origem ligada ao estudo das relações entre os lados e ângulos de um triângulo, onde as razões trigonométricas mais utilizadas hoje em dia são seno, cosseno e tangente.

O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada, centrada na origem do plano cartesiano e tomada com raio unitário, onde toma-se um ponto fixo P como origem de todos os arcos. Este ciclo é dividido em quatro regiões, chamadas quadrantes.

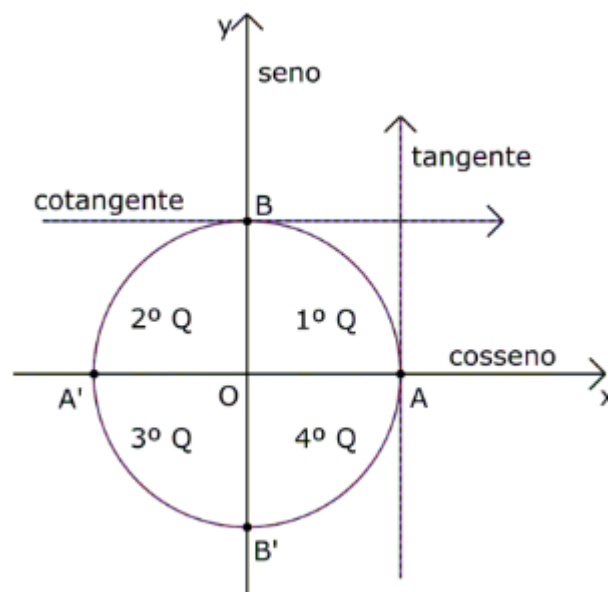


Figura 2 – Ciclo trigonométrico.
Figura retirada de (GONÇALVES, 2018).

Conforme a Figura 2, são associados quatro eixos, sobre os quais estão centrados os estudos acerca das funções seno, cosseno, tangente e cotangente. As outras relações, secante e cossecante, são estudadas sobre o eixo dos cossenos e dos senos.

Como o foco deste trabalho está nas funções trigonométricas e em suas propriedades que tem relação com o som e a música, aqui introduziremos os conceitos enquanto funções, sem discorrer mais a fundo sobre os estudos citados acima, os quais dão origem a estas funções. Além disso, daremos enfoque as

funções seno e cosseno por serem as mais comuns durante a educação básica e as que mais se relacionam com os conceitos abordados na maioria das pesquisas de nossa temática.

Função Seno. A função seno é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde a cada x dentro do domínio associa-se um único $y = \text{sen}(x)$, isto é, $f(x) = \text{sen}(x)$. Esta função é limitada, pois $|\text{sen}(x)| \leq 1$, e sua imagem é dada por $\text{Im}(\text{sen}(x)) = [-1, 1]$, e desta forma, a função seno não é sobrejetora, pois $\text{Im}(\text{sen}(x)) \neq \text{Cd}(\text{sen}(x))$.

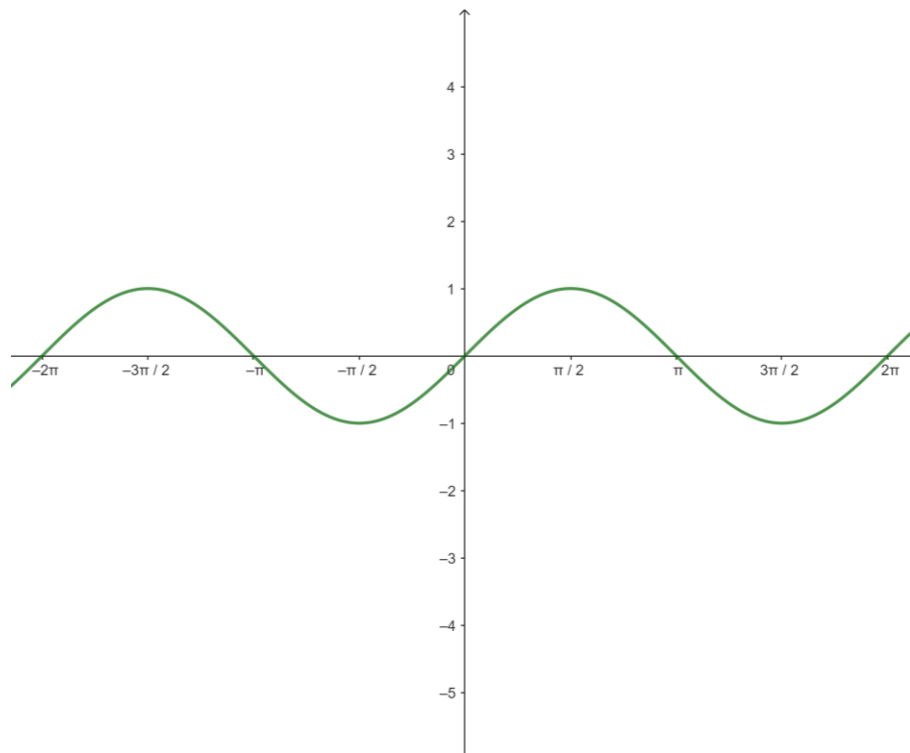


Figura 3 – Gráfico de $f(x) = \text{sen}(x)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

Algumas propriedades da função seno:

- I. Periodicidade: $\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)$, onde $k \in \mathbb{Z}$.
- II. Paridade: $\text{sen}(x) = -\text{sen}(x)$.

Função Cosseno. A função cosseno é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ onde a cada x dentro do domínio associa-se um único $y = \cos(x)$, isto é, $f(x) = \cos(x)$. Esta função é limitada pois $|\cos(x)| \leq 1$, e sua imagem é dada por $\text{Im}(\cos(x)) = [-1, 1]$, e desta forma, a função cosseno não é sobrejetora, pois $\text{Im}(\cos(x)) \neq \text{Cd}(\cos(x))$.

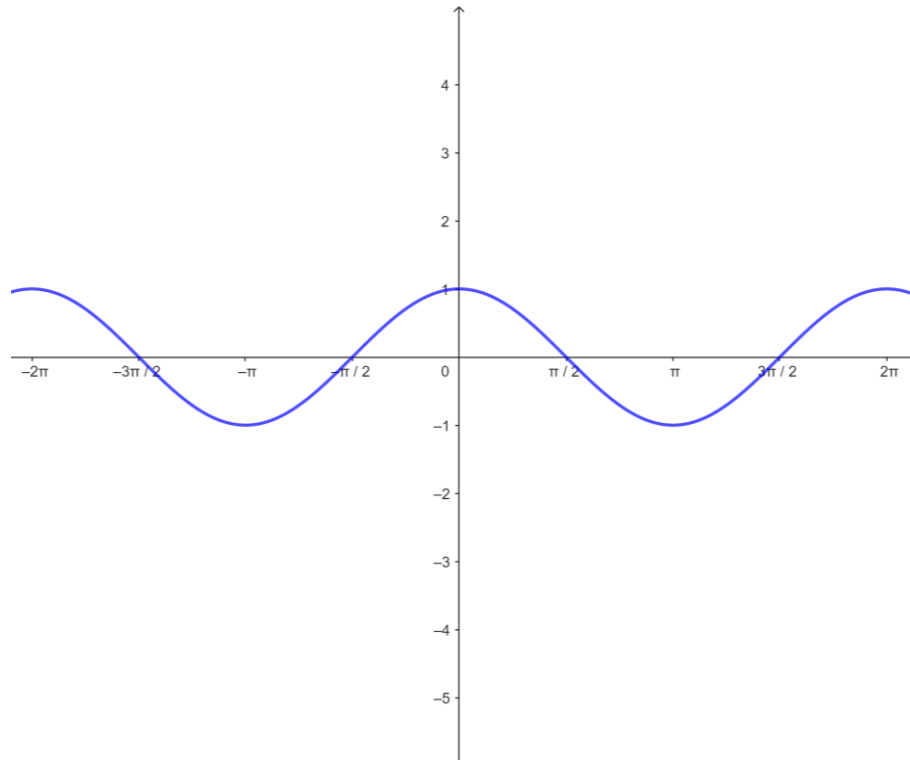


Figura 4 – Gráfico de $f(x) = \cos(x)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

Algumas propriedades da função seno:

- I. Periodicidade: $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$, onde $k \in \mathbb{Z}$.
- II. Paridade: $\cos(-x) = \cos(x)$.

Note que $\sin(x) = 0 + 1\sin(1x)$ e $\cos(x) = 0 + 1\cos(1x)$, desta forma, podemos pensar nestas funções com um comportamento mais geral, isto é, escritas em uma forma mais geral.

Forma Geral da Função Seno. Considere $f(x) = A + B\sin(Cx + D)$, onde A , B e C são constantes.

Vamos analisar, graficamente, o que cada coeficiente provoca na curva da função f . Primeiramente, vamos manter B e C e D fixos e modificar o coeficiente A .

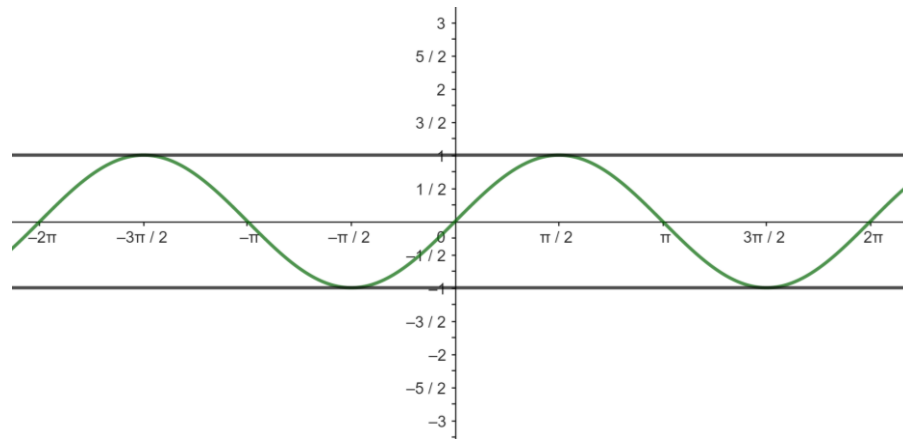


Figura 5 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

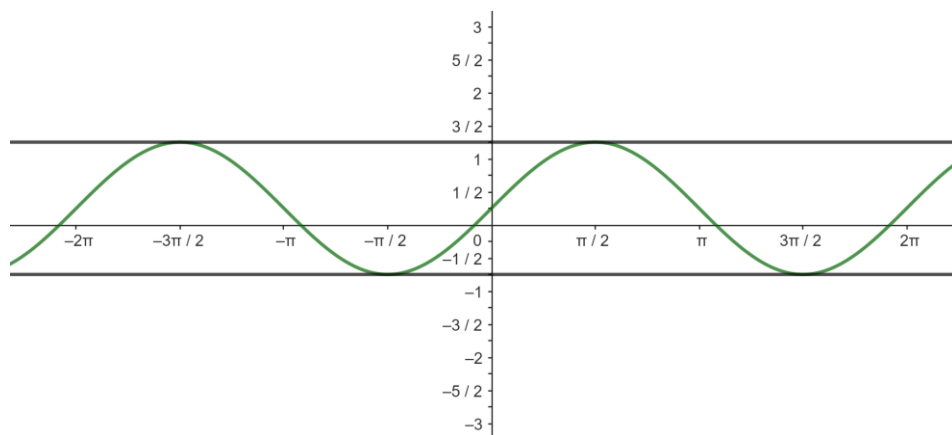


Figura 6 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{4} + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

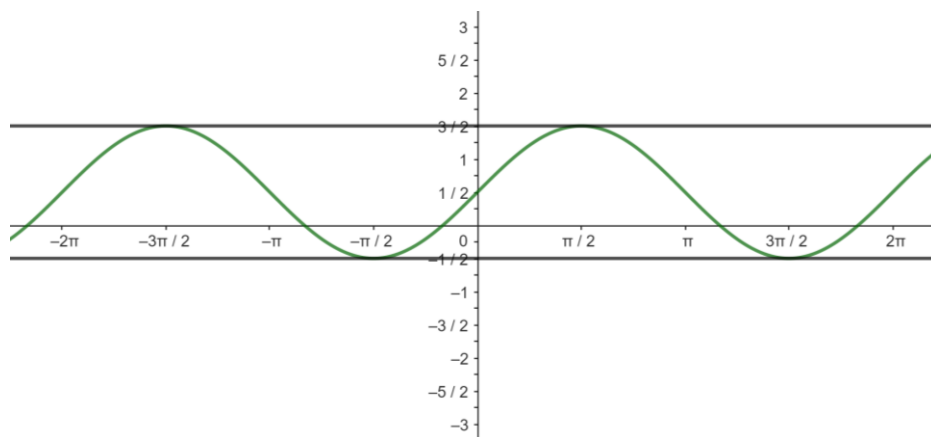


Figura 7 – Gráfico de $f(x) = \frac{1}{2} + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

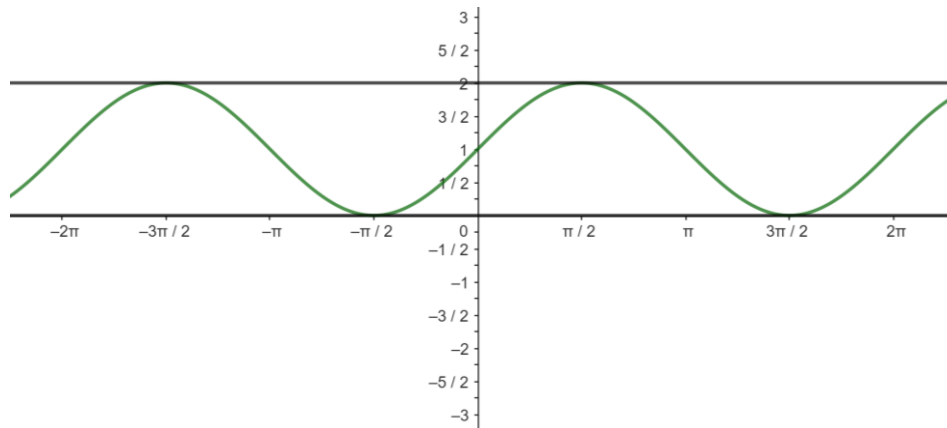


Figura 8 – Gráfico de $f(x) = 1 + 1\text{sen}(1x + 0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

Analisando os gráficos, podemos notar que a alteração no valor do coeficiente A causa um deslocamento vertical na curva de $f(x)$, de modo que $A < 0$ desloca a curva para baixo e $A > 0$ desloca a curva para cima, isto é, altera o valor para o qual a curva irá interceptar o eixo y (vertical).

Por exemplo, na Figura 5 temos a curva passando por $(0,0)$, na Figura 6 por $(0, \frac{1}{4})$, na Figura 7 por $(0, \frac{1}{2})$ e na Figura 8 por $(0,1)$. Podemos generalizar então que a curva irá interceptar o eixo y exatamente no ponto da forma $(0,A)$, desde que $D = 0$.

Além disso, outra alteração notável é de que a imagem de f depende também do coeficiente A . Note que, em todos os gráficos temos duas retas paralelas ao eixo x ($x = A + (-1)$ e $x = A + 1$), e conforme alteramos o valor de A a curva e as retas deslocam-se em relação a este eixo, e desta forma, podemos ver facilmente que a imagem é alterada. Por exemplo, na Figura 5 temos $\text{Im}(f) = [-1,1]$, na Figura 6 $\text{Im}(f) = [-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$, na Figura 7 $\text{Im}(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ e na Figura 8 $\text{Im}(f) = [0,2]$, e desta forma, identificamos que neste caso a imagem é dada por $\text{Im}(f) = A + [-1,1]$.

Agora vejamos o que acontece quando alteramos o coeficiente B .

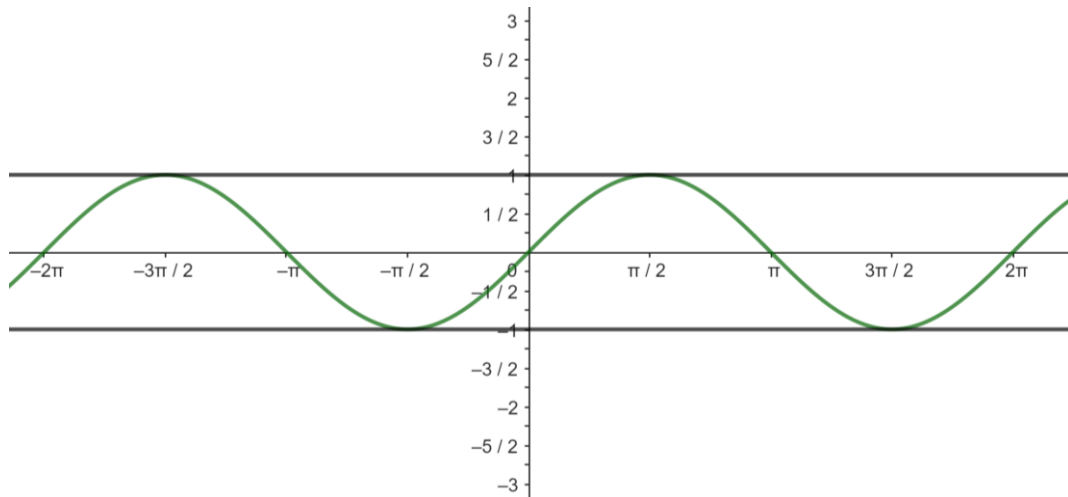


Figura 9 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

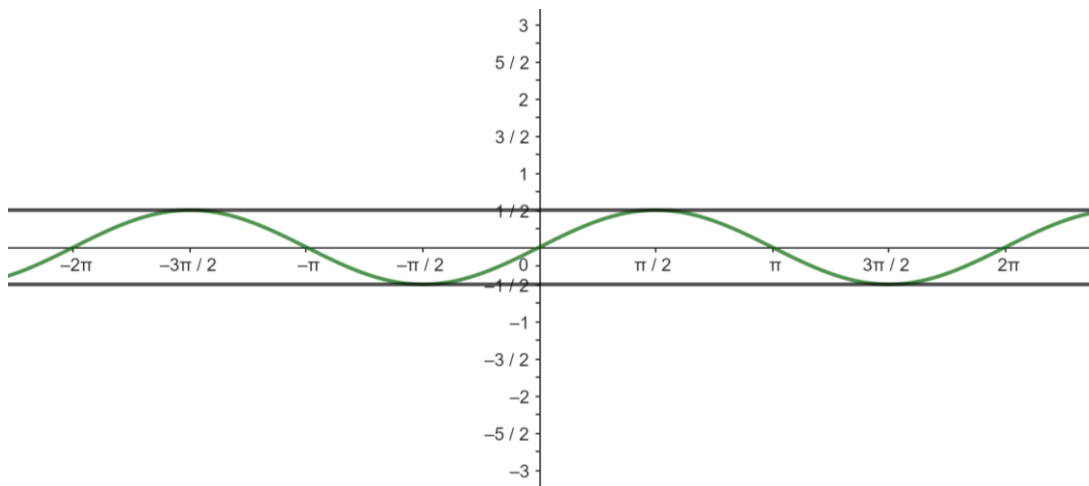


Figura 10 – Gráfico de $f(x)=0+\frac{1}{2}\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

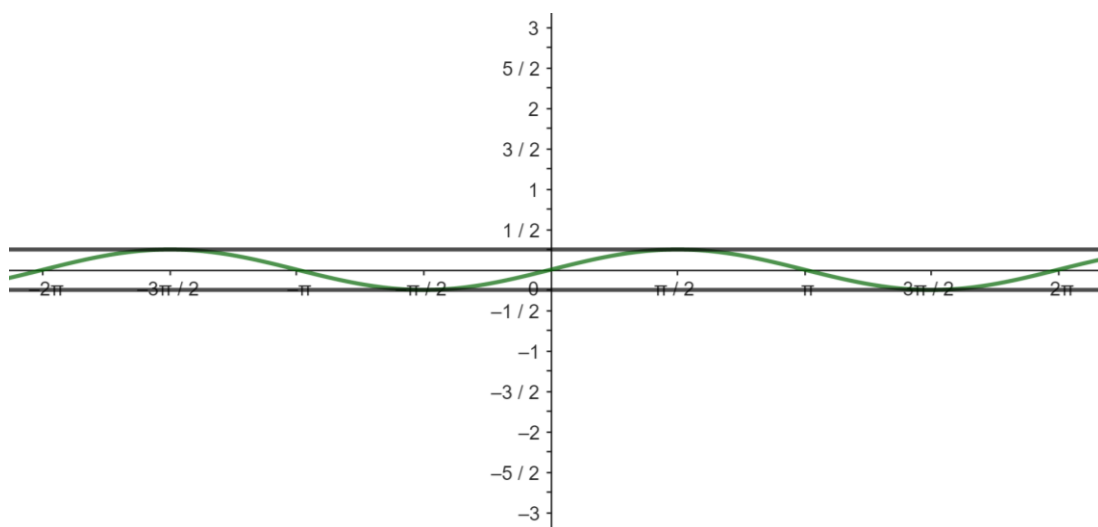


Figura 11 – Gráfico de $f(x)=0+\frac{1}{4}\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

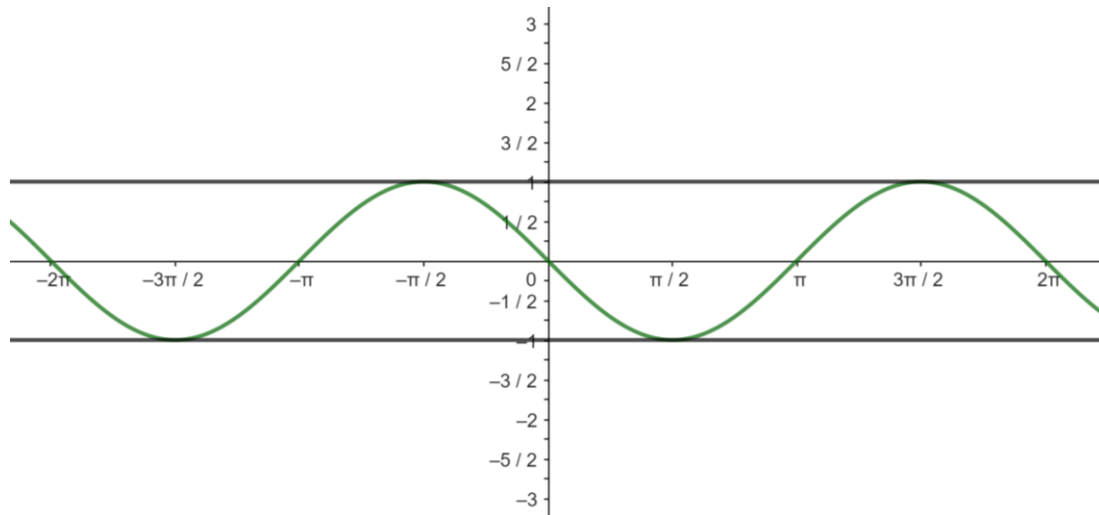


Figura 12 – Gráfico de $f(x)=0-1\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

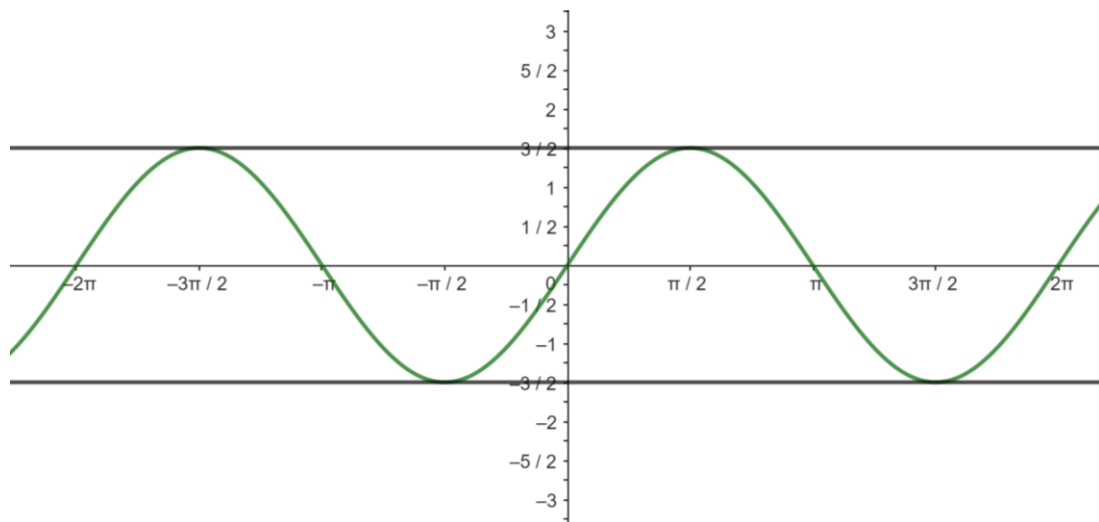


Figura 13 – Gráfico de $f(x)=0+\frac{3}{2}\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

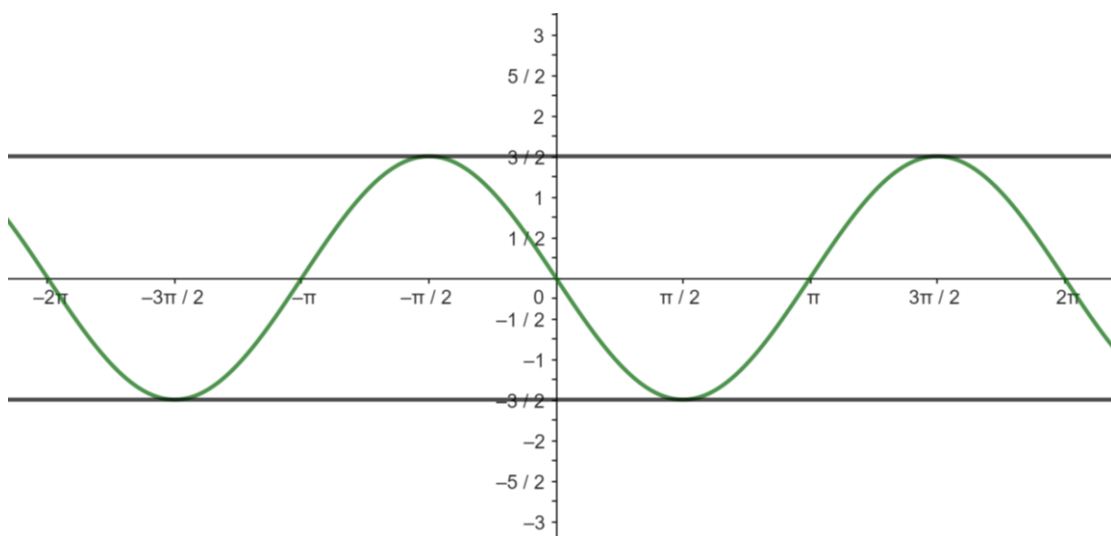


Figura 14 – Gráfico de $f(x)=0-\frac{3}{2}\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

Analisando os gráficos, podemos notar que o coeficiente B causa um achatamento na curva para $-1 < B < 1$ e um esticamento para $B < -1$ e $B > 1$, isto é, ele altera a amplitude da curva, e desta forma, podemos ver que, assim como o A , o coeficiente B altera a imagem.

Na Figura 9 $Im(f) = [-1,1]$, na Figura 10 $Im(f) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, na Figura 11 $Im(f) = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, na Figura 12 $Im(f) = [-1,1]$, na Figura 13 $Im(f) = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ e na Figura 14 $Im(f) = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Nestes casos temos que $Im(f) = B[-1,1]$.

O coeficiente B altera também a monotonicidade de f nos intervalos, como por exemplo, na Figura 13, dentro do intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ a função é não decrescente, já na Figura 14 podemos ver que dentro do mesmo intervalo a função é não crescente. De maneira geral, ao analisar cada intervalo, podemos notar a alteração da monotonicidade da função.

Alterando o coeficiente C obtemos os seguintes gráficos.

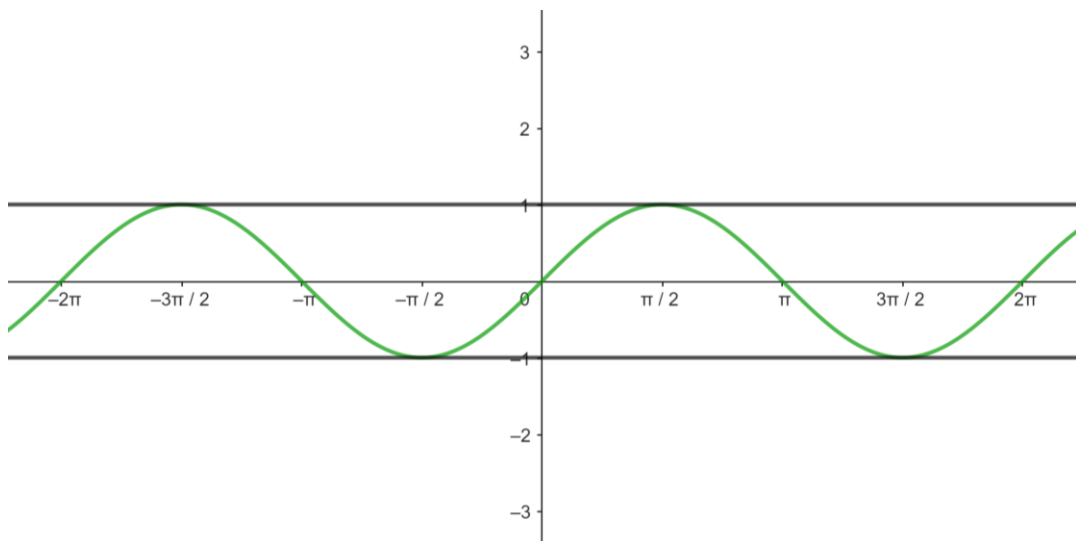


Figura 15 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra

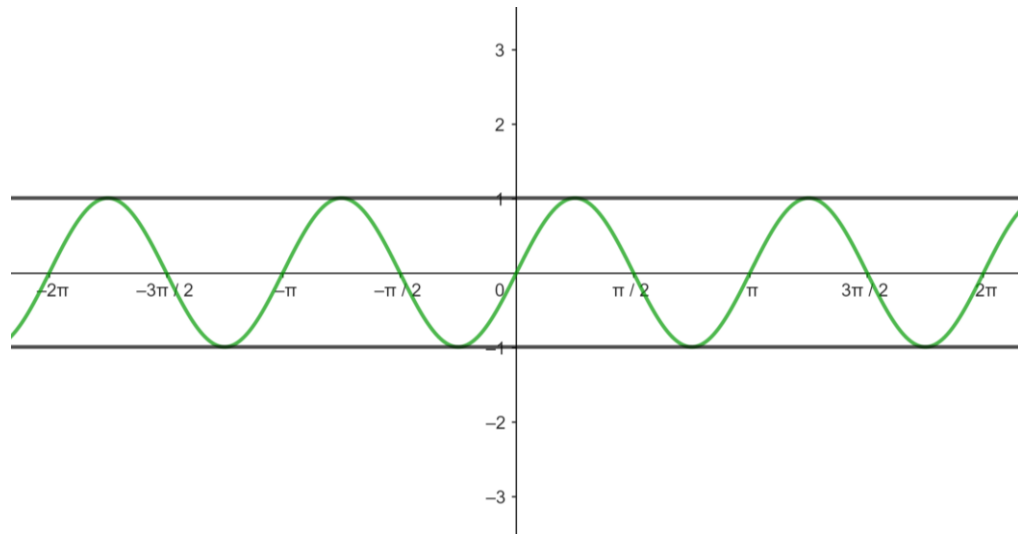


Figura 16 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(2x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

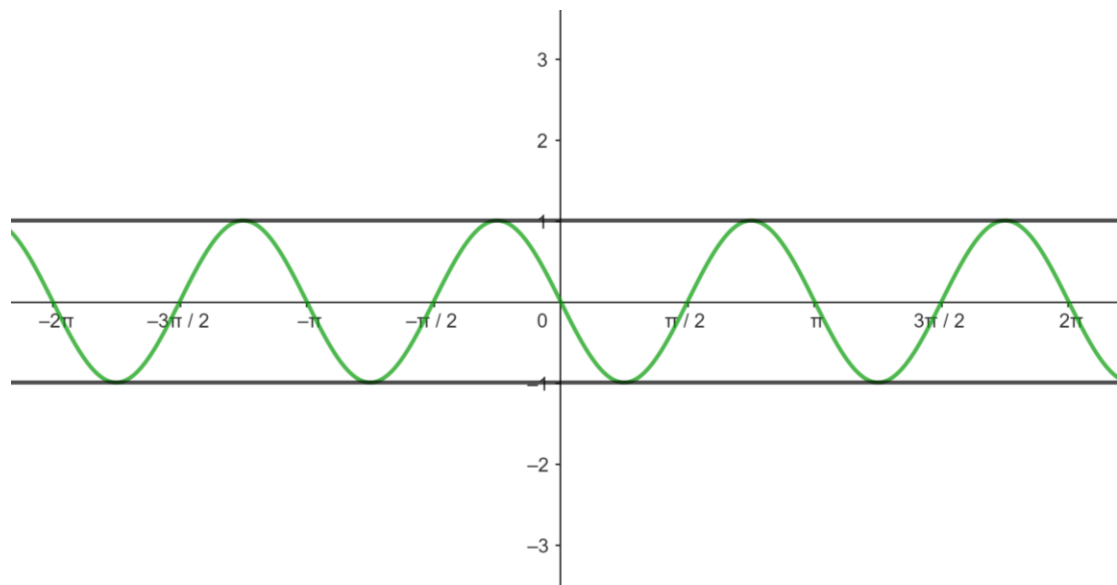


Figura 17 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(-2x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

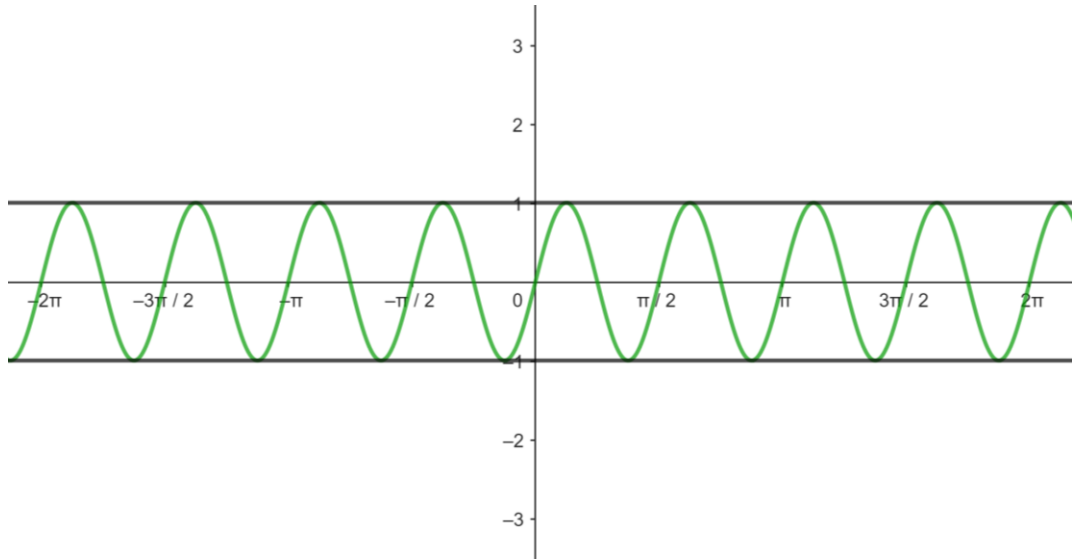


Figura 18 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(4x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

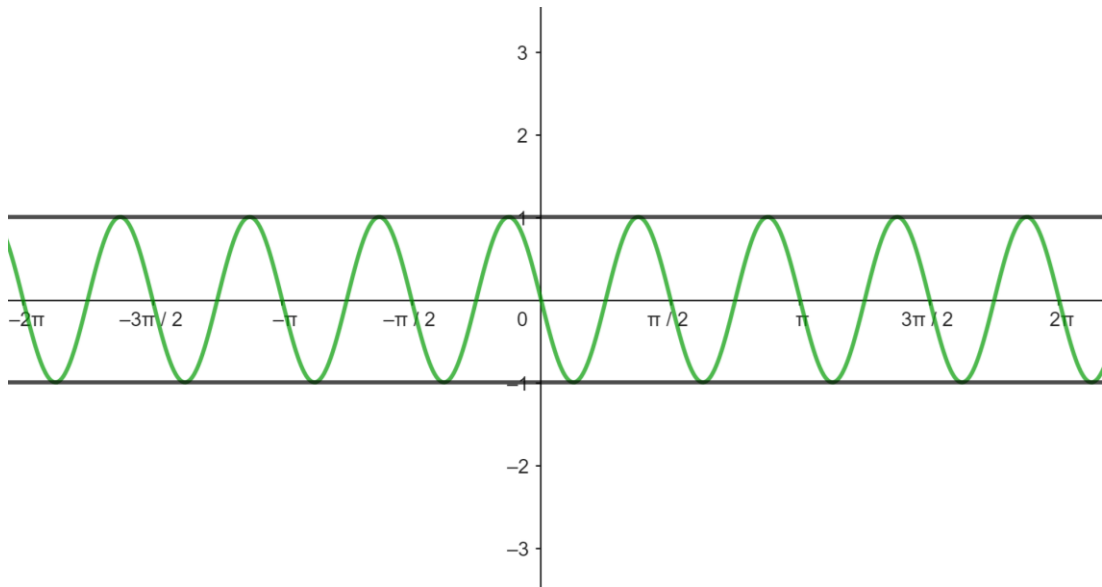


Figura 19 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(-4x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

Ao analisarmos os gráficos, podemos notar que o coeficiente C causa alterações no período da função, onde na Figura 15 temos f com período 2π , nas Figuras 16 e 17 f tem período π , porém, como a função seno é uma função ímpar, então há uma alteração na monotonicidade dos intervalos pois $0 + 1\text{sen}(-2x + 0) = 0 - 1\text{sen}(2x + 0)$, e nas Figuras 18 e 19 f tem período $\frac{\pi}{2}$.

Percebemos que ocorre também alteração na monotonicidade da função conforme o sinal de C é alterado. De maneira geral, podemos notar que C altera o período da função seno, de tal forma que pode ser expressado por $p = \frac{2\pi}{C}$.

Por fim, vamos analisar o que ocorre com f conforme alteramos o coeficiente D .

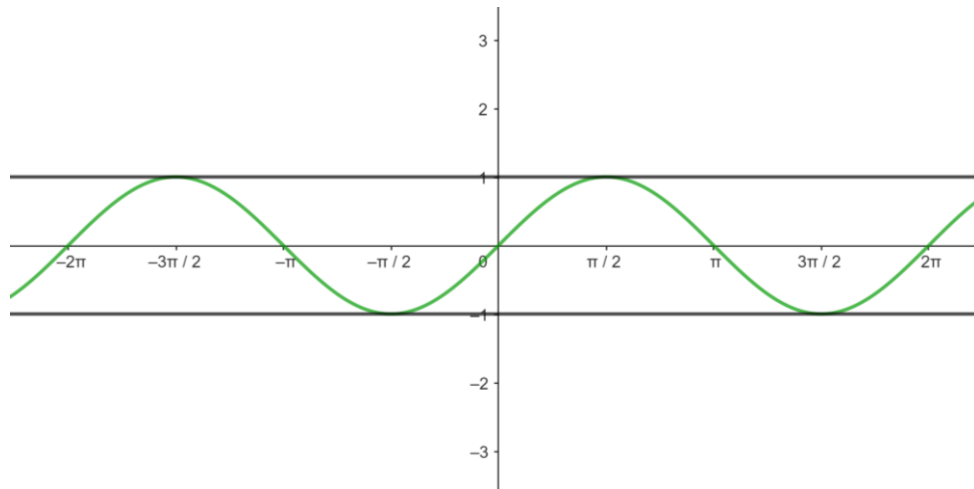


Figura 20 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(1x+0)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

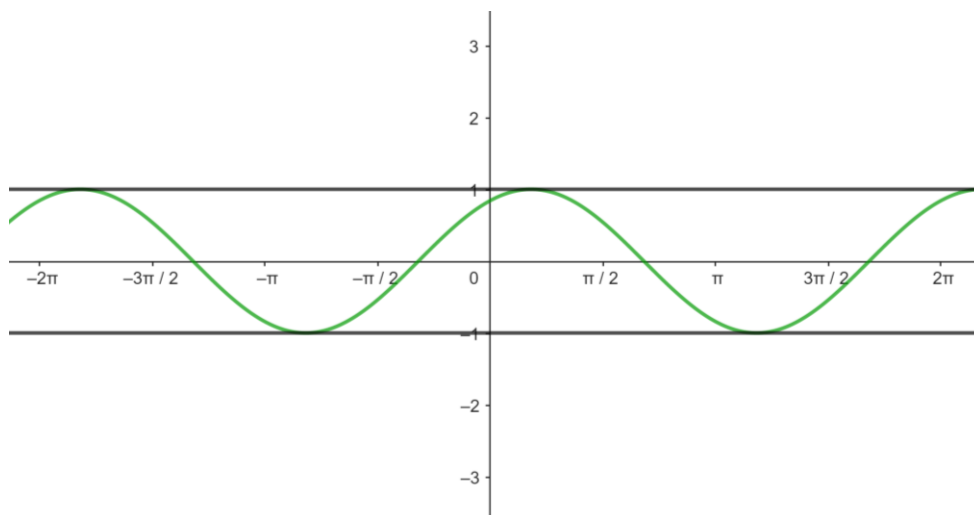


Figura 21 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(1x+1)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

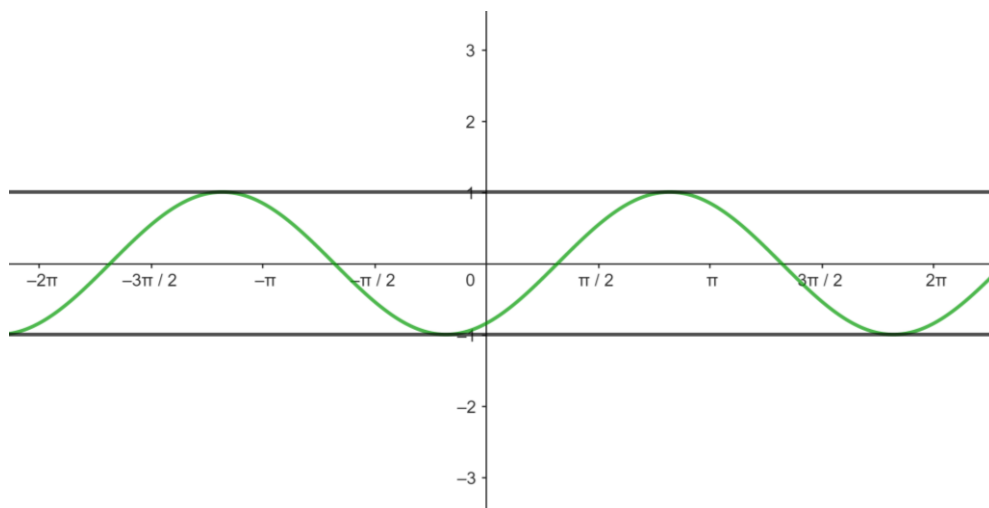


Figura 22 – Gráfico de $f(x)=0+1\text{sen}(1x-1)$, produzido pelo autor usando o software GeoGebra.

Analisando os gráficos das Figuras 20, 21 e 22 é possível notar que conforme alteramos o coeficiente D houve um deslocamento do gráfico horizontalmente. Desta forma, de maneira geral, nota-se que $D < 0$ provoca um deslocamento da curva para a esquerda e $D > 0$ provoca um deslocamento da curva para a direita.

Forma Geral da Função Cosseno. Considere $f(x) = A + B\cos(Cx + D)$, onde A , B e C são constantes.

Da mesma forma como fizemos para a função seno, é possível analisar os gráficos para verificar o que ocorre com a curva conforme cada coeficiente é alterado. Em suma, as alterações provocadas por cada coeficiente são as mesmas, com algumas pequenas variações.

O coeficiente A também desloca a curva do cosseno verticalmente, de modo que $A < 0$ desloca a curva para baixo e $A > 0$ desloca a curva para cima, fazendo com que a curva intercepte o eixo y no ponto da forma $(0, A + 1)$, desde que $D = 0$. O coeficiente B ocasiona também alterações na amplitude da curva. O coeficiente C altera o período, onde $p = \frac{2\pi}{C}$, porém, como a função cosseno é par, então $A + B\cos(-Cx + D) = A + B\cos(Cx + D)$ e portanto não altera a monotonicidade da curva em intervalos. Por fim, assim como para a função seno, o coeficiente D desloca horizontalmente a curva da função cosseno, onde $D < 0$ a desloca para a esquerda e $D > 0$ a desloca para a direita.

Analisando todos estes aspectos, uma última consideração a ser feita é de que tanto para o seno quanto para o cosseno temos que $Im(f) = A + B[-1, 1]$.

2.3.2 SÉRIE DE FOURIER

Assim como acontece com a série de Taylor, a série de Fourier pode ser utilizada para expressar funções periódicas complicadas em termos de funções elementares (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020). Desta forma, além de ser bastante útil na resolução de alguns problemas envolvendo equações diferenciais parciais (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020), a série de Fourier pode ser utilizada para a representação de timbres emitidos por instrumentos, voz humana, entre outros, e mais especificamente a série de Fourier quantizada, é comumente utilizada na representação de sinais sonoros (timbres) emitidos por sintetizadores eletrônicos – Figura 23 – os quais foram criados justamente para a emissão de timbres de

instrumentos ou até mesmo de outros (RATTON, 2002, apud, DEPIZOLI, 2015, p. 57).



Figura 23 – Sintetizador Eletrônico.

Figura produzida por MURTA (2019), disponível em (<encr.pw/88u7m>).

Hoje, graças aos estudos iniciados por Joseph Fourier, fenômenos que envolvem a propagação de ondas em um meio contínuo, podem ser modelados de acordo com uma Equação Diferencial Parcial muito importante dentro da Matemática Aplicada (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020, p. 340), a equação da onda, dada por

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

em que $u(x, t)$ representa o deslocamento vertical da corda do ponto x no instante t e $a^2 = \frac{T}{\rho}$ onde T é a tensão exercida sobre a corda e ρ é a massa por unidade de comprimento do material da corda. Esta equação relaciona-se aos estudos de ondas acústicas, ondas de água, ondas eletromagnéticas e ondas sísmicas (BOYCE, DIPRIMA e MEADE, 2020, p. 340). De certa forma, a solução da equação (1) está ligada ao método da separação de variáveis e a Série de Fourier, sendo assim, alguns conceitos importantes sobre ela estão apresentados abaixo.

Série de Fourier. A série de Fourier de uma função $f(x)$ em um determinado conjunto de pontos é dada na forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right]. \quad (2)$$

desde que ela convirja em nestes pontos. Onde a_0 , a_m e b_m são os coeficientes, respectivamente, das funções $\cos(\frac{0\pi x}{L})$, $\cos(\frac{m\pi x}{L})$ e $\sin(\frac{m\pi x}{L})$.

Ortogonalidade de Funções. O conceito de ortogonalidade de vetores pode ser estendido para funções, onde duas funções $f(x)$ e $g(x)$ são ortogonais no intervalo $[a, b]$ desde que o produto interno padrão dessas funções seja nulo, isto é

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \quad (3)$$

Para o caso da função seno e cosseno, temos que são ortogonais no intervalo $[-L, L]$ pois satisfazem as seguintes relações:

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0, \text{ para todo } m, n \quad (5)$$

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ L, & \text{se } m = n \end{cases} \quad (6)$$

Fórmulas de Euler-Fourier. Para o cálculo dos coeficientes a_n , b_n é pode-se utilizar as seguintes fórmulas

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (7)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (8)$$

Teorema de Convergência de Fourier. Dada f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $[-L, L[$, onde f está definida fora do do intervalo $[-L, L[$ de modo que possui período $2L$, então a função f tem uma série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right] \quad (9)$$

em que seus coeficientes são dados pelas Fórmulas de Euler-Fourier. Desta forma, onde f é contínua a Série de Fourier converge para $f(x)$ e onde é descontínua converge para $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$. Este teorema expressa condições suficientes para que a série de Fourier seja convergente, porém não são condições necessárias.

Já definimos anteriormente o que são funções pares e ímpares, sendo assim, abaixo destacamos algumas propriedades importantes destas funções:

- A. A soma ou diferença de duas funções pares é par; o produto ou quociente de duas funções pares é par.
- B. A soma ou diferença de duas funções ímpares é ímpar; o produto ou quociente de duas funções ímpares é par.
- C. A soma ou diferença de uma função ímpar e uma função par não é par nem ímpar; o produto ou quociente de uma função ímpar e uma função par é ímpar.
- D. Se f é par

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (10)$$

- E. Se f é ímpar

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (11)$$

Série em Cossenos. Dadas f e f' seccionalmente contínuas em $[-L, L]$, onde f é par e tem período $2L$. Das propriedades A e C, temos que $f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})$ é par e que $f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})$ é ímpar. Desta forma, pelas equações (10) e (11) os coeficientes da série de Fourier são

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad (12)$$

$$b_n = 0. \quad (13)$$

Portanto,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (14)$$

Série em Senos. Dadas f e f' seccionalmente contínuas em $[-L, L[$, onde f é ímpar e tem período $2L$. Das propriedades B e C, temos que $f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})$ é ímpar e $f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L})$ é par. Logo, os coeficientes de Fourier são

$$a_n = 0 \quad (15)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (16)$$

Portanto,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (17)$$

2.4 SOM E ONDAS SONORAS

Claramente, é possível perceber que a matéria prima da música é o som, onde a sobreposição harmoniosa de diferentes sons permite que as músicas sejam produzidas. O som, por sua vez, é um elemento físico, o qual faz parte do nosso cotidiano e é perceptível ao nosso ouvido, sendo estudado principalmente por meio da matemática.

As ondas sonoras são aquelas que se dão por meio da propagação de perturbações em meios mecânicos líquidos, sólidos e gasosos (HALLIDAY et al., 2022), as quais são detectadas por nosso tímpano com frequência e amplitude

definidas e desta forma são convertidas em estímulo nervoso que ao alcançar nosso cérebro produz a sensação auditiva (som) (HALLIDAY et al., 2022; RAMALHO et al., 2014).

Abaixo apresentaremos alguns conceitos importantes relacionados as ondas sonoras, os quais serão importantes para relacionar o estudo das funções trigonométricas com as ondas sonoras e consequentemente com a música.

2.4.1 CARACTERÍSTICAS DAS ONDAS SONORAS

Frequência. A frequência é dada pelo número de oscilações completas apresentadas pela onda dentro de um determinado intervalo de tempo, geralmente, é dada em (Hz/s). Este número de oscilações tem relação com o período (T) da onda, e é descrita por:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (18)$$

Crista. A crista de uma onda é definida como sua parte mais alta.

Vale. O vale de uma onda é definido como sua parte mais baixa.

Comprimento de Onda. É dado pela distância de uma crista até outra crista (ou vale até vale) e é denotado por λ .

Velocidade da Onda. É a velocidade de propagação da onda, dada por:

$$v = f\lambda. \quad (19)$$

Amplitude da Onda. É a distância entre a crista (ou o vale) e o eixo x, ou seja, a metade da distância entre a crista e o vale da onda e é denotada por A .

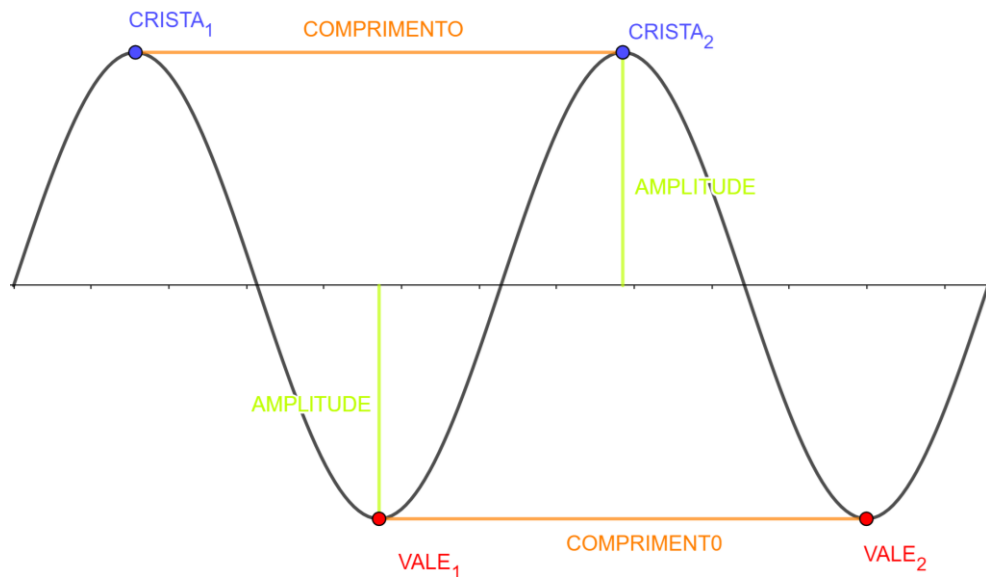


Figura 24 – Elementos da onda.

Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.

2.4.2 FISILOGIA DO SOM

Muitas vezes, as pessoas, em seu conhecimento popular, ao ouvir um som, como por exemplo a voz de uma pessoa, costumam diferenciá-los por ser uma voz mais “fina” ou mais “grossa”.

Esta característica fisiológica do som é denominada altura, que é a propriedade de um som ser agudo, médio ou grave (GUSMÃO, 2012; MED, 1996). Fisicamente falando, é o quão rápidas ou lentas são as compressões de ar que produzem este som, ou seja, a altura de um som é determinada por sua frequência, onde as ondas sonoras com menor frequência produzem um som mais grave (baixo), e as com maior frequência produzem um som mais agudo (alto) (DEPIZOLI, 2015).

A Figura 25 mostra um exemplo de como seriam ondas que produzem sons graves (baixa frequência), médios (média frequência) e agudos (alta frequência).

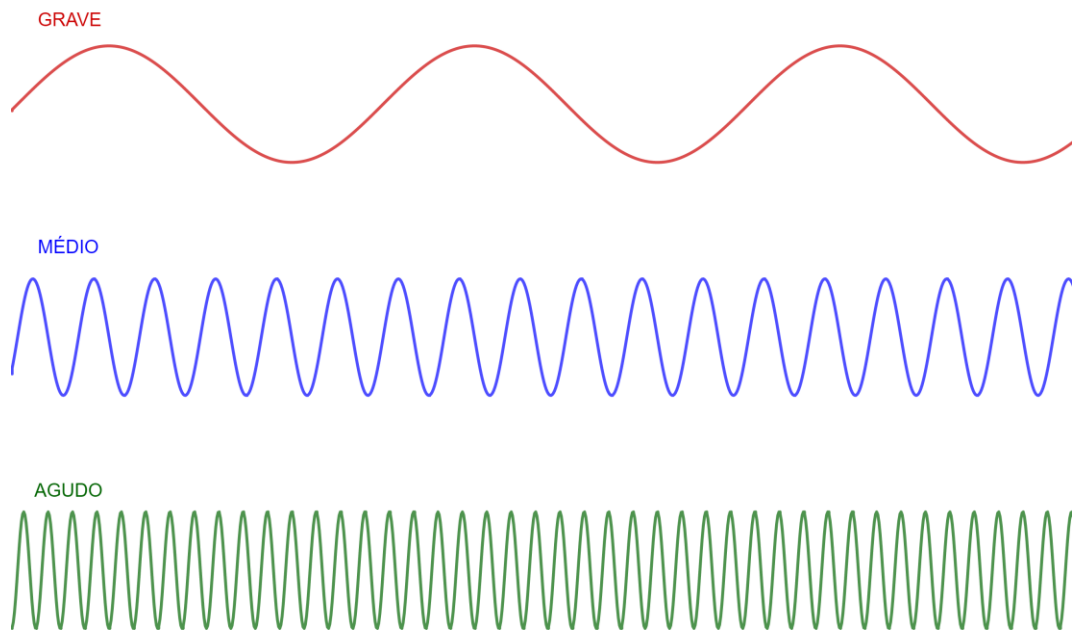


Figura 25 – Som grave, médio e agudo.
Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.

Outra característica, é aquela que comumente denominamos erroneamente de volume baixo e volume alto, quando na verdade estamos nos referindo a intensidade do som, a qual é a propriedade do som ser forte ou fraco, e está ligada respectivamente, com a alta amplitude da onda ou baixa amplitude da onda (DEPIZOLI, 2015; GUSMÃO, 2012; MED, 1996).

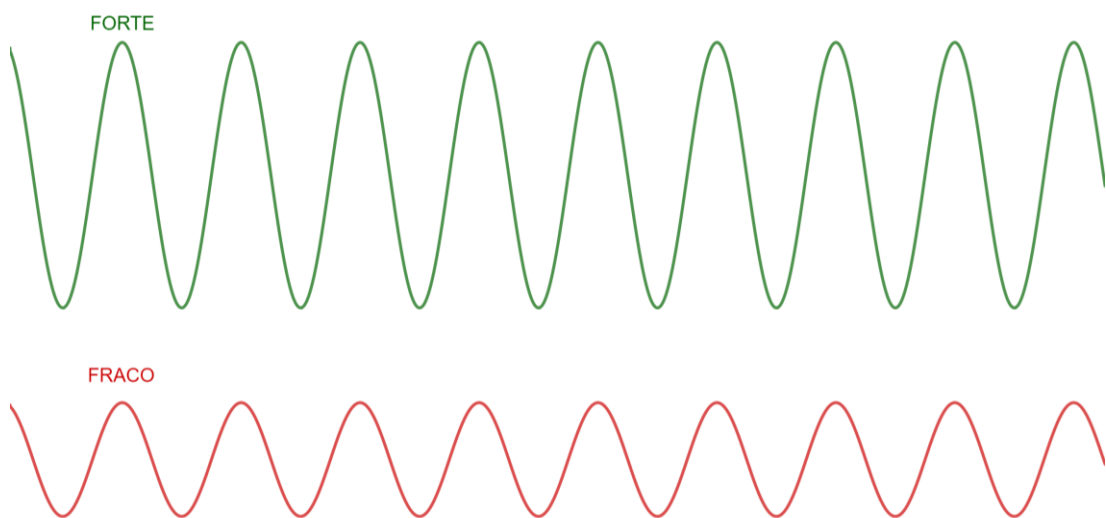


Figura 26 – Som forte e fraco. Figura produzida pelo autor usando o software GeoGebra.

Por fim, outra característica importante nesta diferenciação dos sons é o timbre, onde a partir de um som fundamental, o qual é formado pela superposição de sons com frequências diferentes, obtém-se um som (MED, 1996). Por exemplo, quando uma nota é tocada em um instrumento, ela é composta por diferentes ondas sonoras com frequências e amplitude relacionadas, onde um deles possui a frequência fundamental e os outros possuem frequências múltiplas dela. Segundo Pereira (2013, apud, OLIVEIRA, 2021, p. 39) essa soma de harmônicos pode ser representada por uma soma de funções seno da forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \text{sen}(2\pi k f_1 x) \quad (20)$$

onde f_1 é a frequência fundamental, $k f_1$ são seus múltiplos, e a_k determina a amplitude da onda, isto é, a intensidade do harmônico. Cada harmônico é representado por uma função seno da Série na equação (20) e a soma destes harmônicos produz o timbre, podendo ser uma soma parcial ou até mesmo uma soma infinita, isto é, com $n \rightarrow \infty$.

Segundo SOUZA, CINTRA e OLIVEIRA (2005, p. 272), em todos os instrumentos musicais o som é constituído de uma nota fundamental e um certo número de harmônicos que o caracterizam, isto é, independente do instrumento, por exemplo, a nota dó que possui frequência de aproximadamente 262Hz terá esta frequência como sendo a fundamental, porém, a composição harmônica do som emitido por cada instrumento é diferente.

Os coeficientes da equação (20) têm grande importância, pois é a partir deles e de combinações entre eles que os diferentes timbres são produzidos (OLIVEIRA, 2021; SOUZA, CINTRA e OLIVEIRA 2005).

Nas Figuras 27, 28 e 29 podemos ver a representação gráfica do timbre de três notas emitidas por um Trompete em Si Bemol, note que as curvas apresentam características apontadas durante todo nosso estudo sobre as funções periódicas e a série de Fourier.

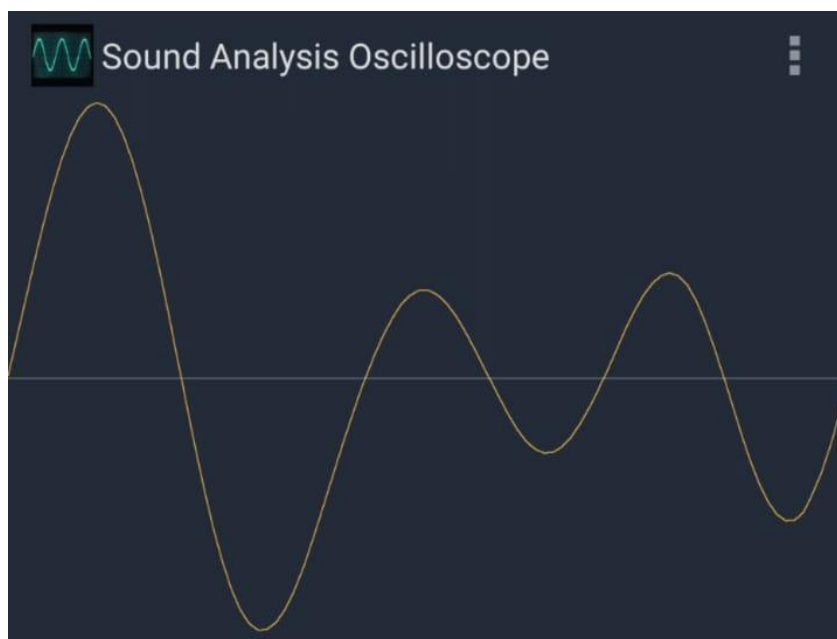


Figura 27 – Gráfico da nota Si tocada por um Trompete em Si Bemol, produzido pelo autor utilizando o aplicativo Sound Analysis Oscilloscope, disponível em (<link.dev/JH1kh>).

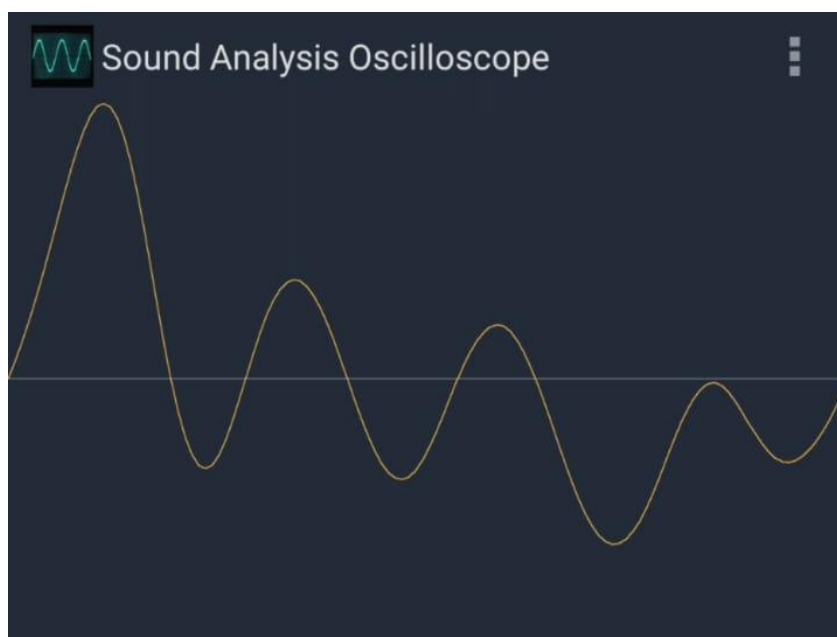


Figura 28 – Gráfico da nota Lá tocada por um Trompete em Si Bemol, produzido pelo autor utilizando o aplicativo Sound Analysis Oscilloscope, disponível em (<link.dev/JH1kh>).

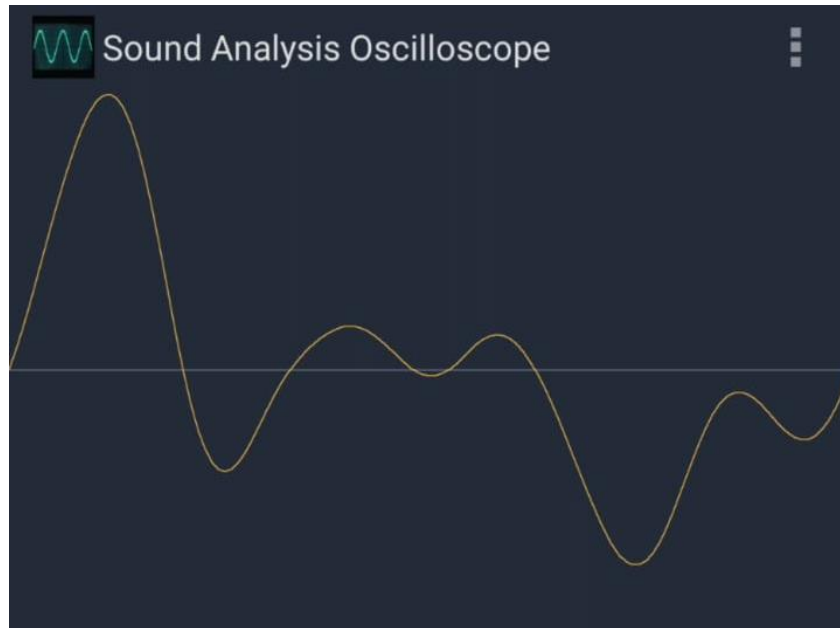


Figura 29 – Gráfico da nota Sol tocada por um Trompete em Si Bemol, produzido pelo autor utilizando o aplicativo Sound Analysis Oscilloscope, disponível em (<l1nk.dev/JH1kh>).

Para uma aproximação das curvas acima, é possível utilizar métodos numéricos e computacionais voltados para a estimação harmônica de sinais, assim como a abordagem proposta em SOUZA, CINTRA e OLIVEIRA (2015), que segundo o autor, trata-se de uma abordagem com base em aproximações quantizadas do modelo clássico de Fourier.

O importante a se entender aqui, é que a relação existente entre a série de Fourier e a música está justamente no timbre, pois, geralmente, este apresenta comportamento de uma função periódica a qual pode ser aproximada por meio da série de Fourier.

Ainda, é possível representar determinados timbres por meio de somas parciais de uma série de Fourier de modo que se tenha um erro mínimo e aceitável, em que a diferença seja imperceptível ao ouvido humano, e além disso, alguns instrumentos como por exemplo a Flauta Doce, possuem som mais puro, exigindo menor conteúdo de harmônicos (SOUZA, CINTRA e OLIVEIRA, 2005). Desta forma, quanto mais puro o som do instrumento, menor a quantidade de harmônicos (termos da série) para representá-lo.

Na Figura 30 temos a composição de harmônicos a partir de um harmônico fundamental $f_1(x) = 5\text{sen}(x)$, onde $f_2(x) = 0.33 * 5\text{sen}(3x)$, $f_3(x) = 0.2 * 5\text{sen}(5x)$, $f_4(x) = 0.14 * 5\text{sen}(7x)$, $f_5(x) = 0.11 * 5\text{sen}(9x)$ e $f(x) = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5$.

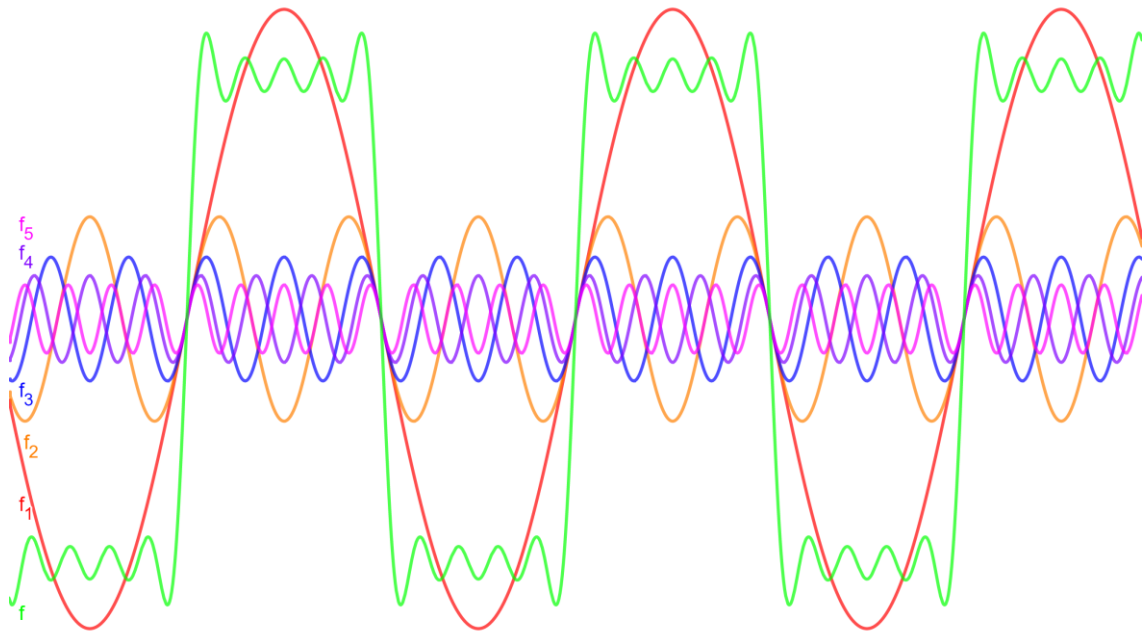


Figura 30 – Som fundamental (f_1), sons múltiplos (f_2, f_3, f_4, f_5) e timbre resultante (f).
Figura produzida pelo autor usando o software Geogebra.

Para exemplificar melhor o timbre, pense em dois instrumentos, como por exemplo, uma viola de arco e um violino. Ao olhar para ambos, uma pequena diferença que podemos notar é de que a viola de arco tem um tamanho relativamente maior que o violino (Figura 28), e aos nossos olhos pode parecer a única, porém, quando tocamos uma determinada nota no violino e a mesma nota na viola de arco, é possível notar que apesar de estarem produzindo a mesma nota – por exemplo, a nota sol da escala diatônica de dó maior (Figura 29) – o som emitido é diferente, onde o do violino é mais agudo que o da viola de arco, que por sua vez emite sons mais graves (GUSMÃO, 2012; MED, 1996).



Figura 31 – Viola de arco (à esquerda) e violino (à direita).
Figura retirada do Blog Multisom, disponível em
(<<https://blog.multisom.com.br/violino-viola-diferencas/>>).



Figura 32 – Escala diatônica de dó maior.
Figura retirada do Portal do Professor, disponível em
(<www.portaldoprofessor.mec.gov.br>).

3 METODOLOGIA DE PESQUISA

Trata-se de um estudo de cunho qualitativo, onde buscamos por meio da análise da bibliografia já existente sobre o ensino-aprendizagem de matemática e das funções trigonométricas utilizando a Modelagem Matemática e a música como recurso pedagógico compreender as potencialidades desta abordagem, devidamente preocupados com a subjetividade dos conceitos (ARAÚJO e BORBA, 2022).

De maneira geral, compreendemos que esta pesquisa adentra uma abordagem fenomenológica-hermenêutica, onde busca-se a compreensão do fenômeno de pesquisa buscando principalmente entender os significados atribuídos pelos sujeitos (pesquisadores) analisando as conclusões e considerações finais apontadas acerca do uso da Modelagem Matemática e da Música em sala de aula (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

De certo modo, classificamos nossa pesquisa segundo dois aspectos: o objetivo e o processo de coleta de dados. Quanto ao primeiro, entendemos que trata-se de uma pesquisa exploratória, onde por meio do levantamento bibliográfico e estudo da teoria realizamos discussões para compreender e levantar dados mais esclarecedores acerca do fenômeno estudado; quanto ao processo de coleta de dados, trata-se de uma metodologia bibliográfica, pois estamos realizando uma análise descritiva de publicações já existentes acerca da temática de pesquisa (FIORENTINI e LORENZATO, 2006).

Como já colocado, este trabalho tem ênfase na análise qualitativa dos dados, pois não estamos apenas preocupados com a quantidade, mas sim nos significados e possibilidades atribuídos pelos autores em seus trabalhos, desta forma, focaremos em uma metodologia de análise de conteúdo (BARDIN, 2009).

Para a escolha das dissertações e teses que foram analisadas para responder nossa pergunta de pesquisa, foi realizada uma busca na plataforma Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações - BDTD, utilizando os termos Música e Funções Trigonômétricas, e dentre as produções encontradas selecionamos aquelas que tratavam do ensino-aprendizagem de matemática e da Modelagem Matemática.

Esta pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso engloba tópicos já estudados durante minha Iniciação Científica intitulada “Derivadas de Ordem Não

Inteira e Aplicações em Modelagem”, onde estudei conceitos sobre a Modelagem Matemática e busquei o entendimento sobre todo o processo na construção de modelos, mantendo o enfoque nas equações diferenciais, e principalmente, na Modelagem Fracionária. Além disto, outro tópico estudado por mim, foi a resolução de equações diferenciais parciais de segunda ordem por meio do método da redução e utilizando as séries de Fourier, chegando a estudar a equação do calor e a equação da onda.

Estes estudos, de certa forma se conectaram ao meu TCC, desde a escolha do tema, pois queria muito entender mais sobre as séries de Fourier (tanto seus conceitos como as aplicações) e também de estudar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino, até a própria pesquisa onde toda a bagagem trazida da IC foi aproveitada de alguma forma, seja nos conteúdos, formatação do trabalho, como agir e caminhar durante a pesquisa em direção aos meus objetivos, etc.

Além disso, o fato de ser músico (trompetista) e de já ter estudado parte da teoria musical, facilitaram o processo de compreensão das relações existentes entre os conceitos musicais e a matemática, como por exemplo, o conhecimento das escalas diatônicas, dos termos mais teóricos envolvidos na música, de algumas definições relacionadas ao som.

É importante ressaltar que nosso entendimento da palavra potencialidade durante esta pesquisa foi um aspecto relevante para que pudéssemos obter conclusões, pois entendemos a palavra potencialidade como aquilo que é potencial/relevante no fenômeno estudado e além disso, o fato de haver possibilidades de trabalho com a tendência em Educação Matemática estudada – Modelagem Matemática – e com a música, para nós já foi considerado uma potencialidade.

Por fim, destacamos que nossas análises foram feitas levando em consideração as diferentes concepções de Modelagem Matemática apontadas em nossa fundamentação teórica, as quais permitiram nossas conclusões em um âmbito mais geral.

4 LEVANTAMENTO E DESCRIÇÃO DOS DADOS

Nesta seção apresentaremos de forma sucinta o levantamento de dados realizado, apontando as características das teses e dissertações encontradas para que pudéssemos analisar seus conteúdos buscando responder nossa questão direcionadora. Além disso, descreveremos brevemente o processo realizado durante este levantamento.

4.1 BANCO DE DADOS

A Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), é um portal de busca que integra e dissemina gratuitamente o acesso aos textos completos de teses e dissertações defendidas em Instituições de Ensino Brasileiras, sendo concebida e mantida pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT). Para este projeto colaboram representantes de instituições como o Ministério da Educação (MEC), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Universidade de São Paulo (USP), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RIO) e Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), tendo como uma das linhas de atuação: desenvolver um sistema de publicação eletrônica de teses e dissertações pra atender aquelas instituições de ensino e pesquisa que não possuíam sistemas automatizados para implantar suas bibliotecas digitais.

A escolha deste portal de busca foi feita por alguns motivos: diminuir o conteúdo a ser analisado, devido aos prazos estipulados para entrega dos resultados desta pesquisa; inicialmente, a ideia era realizar a procura no repositório da própria UNESP, porém, não foram encontradas publicações que satisfaziam nossa temática; e por fim notamos que as pesquisas que relacionam o ensino de matemática utilizando a Modelagem e a Música estão distribuídas e não tem um foco particular, não sendo possível usar por exemplo, o repositório de uma única Universidade para a busca dos textos.

4.2 PESQUISAS ENCONTRADAS

Durante o processo de levantamento das Teses e Dissertações a serem analisadas realizamos a busca pelos termos “Música e Funções trigonométricas” (na Figura 30 está a tela de busca da BDTD), e foram encontrados 6 textos produzidos a partir de pesquisas, as quais estão brevemente descritas no Quadro 2, onde consta título, instituição na qual foi defendida e o resumo disponível em cada uma delas.



Figura 33 – Tela de busca da BDTD.

Figura produzida pelo autor, utilizando a ferramenta Print Screen.

Quadro 2 – Pesquisas encontradas na BDTD buscando por Música e Funções Trigonométricas.

Quadro produzido pelo autor.

TÍTULO	AUTOR	INSTITUIÇÃO	RESUMO
Relacionando as funções trigonométricas com a música	Michelangelo dos Santos Rodrigues	Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)	De acordo com o resumo disponível em RODRIGUES (2017, p. 6): “Este trabalho apresenta uma proposta de investigação acerca de um aspecto, dentre vários possíveis, envolvendo a intrínseca relação dos estudos matemáticos com a música, tendo como ponto de apoio o seguinte tripé analítico: ondas sonoras, escalas musicais e funções trigonométricas. A

			pesquisa objetiva averiguar, por meio da utilização de um conjunto de atividades sequenciais, a relevância da aplicação e do uso de ferramentas de construção de sentido no âmbito do ensino-aprendizagem da matemática nas aulas da referenciada disciplina. Tal estudo enveredase nos moldes de uma pesquisa-ação, desenvolvida tendo como base a confecção de oficinas de matemática realizadas numa turma de 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede pública estadual, no município de Panelas-PE. Como referenciais teóricos da pesquisa, utilizamos, entre outros, principalmente os postulados de Benson (2006), Kammeler (2000), Wright (2009) e Rousseau e Saint (2015), no intuito de promover e, também, de reavivar uma discussão sobre a relação envolvendo os processos e/ou mecanismos temáticos de interação supracitados. Assim sendo, os resultados da pesquisa serviram para demonstrar que, por meio da aplicação das oficinas de matemática focadas na conjunção dos procedimentos matemáticos aqui verificados, faz-se possível aproximar o aluno dos ensinamentos da matemática. Ficou constatado, portanto, que, com o contato mediado pelo professor tendo em vista a congruência matemáticomusical em sala de aula, o aluno pode ser estimulado a ter uma melhor compreensão acerca das interações existentes entre funções trigonométricas, ondas sonoras, escalas musicais e, mais especificamente, a Série de Fourier, vivenciando, assim, e
--	--	--	---

			com satisfatórias percepções de usufruto prático, o desenvolvimento de uma melhor consciência matemática.”
Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas	Carlos Antonio Depizoli	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFRP)	De acordo com o resumo disponível em DEPIZOLI (2015, p. 5): “Utilizando-se da relação entre a Matemática e a Física e tendo a música como fonte de recursos associados a conceitos matemáticos, este trabalho objetiva contribuir com o desenvolvimento de habilidades nos estudantes na aprendizagem de conteúdos matemáticos como as funções trigonométricas. Conceitos importantes relacionados à acústica são apresentados, mostrando a importância da Série de Fourier Contínua no desenvolvimento de sintetizadores analógicos aditivos e seu uso no ensino de trigonometria.
O gráfico dos sons	Marcos Assumpção Martins	Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)	De acordo com o resumo disponível em MARTINS (2014, p. 9): “Este trabalho apresenta uma proposta de aula diferenciada baseada na análise de espectros sonoros, com o intuito de estudarmos gráficos de funções, sobretudo trigonométricas. Após breve discussão histórica sobre estudos e pesquisas das relações entre Matemática e Música, em sua introdução, propõe-se um estudo básico sobre os principais métodos de análise destes espectros. Entre tais métodos - o banco de filtros harmônicos (Vocoder de fase) e o método de rastreamento de frequência (mq) - também são úteis para síntese de sinais sonoros monofônicos, sendo baseados no modelo de somas

			de senóides e muito dependentes das Transformadas de Fourier implementadas no formato digital de um computador. Este estudo permite que o leitor tenha uma noção das principais técnicas e seus principais métodos, de modo que possa decidir sobre a sua aplicação em salas de aula dos mais variados níveis de discernimento. Ele, também, tem por objetivo apresentar as aplicações matemáticas nesse processo, principalmente o emprego de séries de Fourier. Num segundo momento, mais importante, temos uma apresentação da proposta pedagógica do trabalho: o estudo de gráficos produzidos em sala de aula, através de sons emitidos por alunos voluntários ou gravações pré-existentes. A aplicação da atividade é norteada a buscar uma gravação sonora feita em sala, preferencialmente por alunos, gerando seu gráfico, possibilitando explorar características, tais como máximos e mínimos e formatos desses espectros. De posse disso, cada professor terá em mãos uma gama maior de ferramentas para explorar diversos assuntos dentro da Matemática, bem como entender, conhecer e aproximar-se um pouco mais da Música.”
Matemática e música: uma proposta de aprendizagem	Rafayane Barros Cabral	Universidade Federal de Goiás (UFG)	De acordo com o resumo disponível em CABRAL (2015, p. 9): “Investigamos assuntos envolvendo matemática e música, sugerindo resolução de problemas musicais com o auxílio da matemática, de modo que os alunos possam

			estabelecer relações entre a Matemática e Música. Abordaremos Frações, funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas, Progressão Geométrica (P.G.) e Mínimo Múltiplo Comum (m.m.c.), propondo um trabalho diversificado. A música é envolvente e dificilmente não despertará curiosidade e interesse, atraindo os mais variados grupos, desde virtuosos musicais a simples ouvintes. Através deste estudo, foi possível perceber o quanto a matemática está ligada a música e como é interessante essas conexões, de modo que o aluno aprenderá melhor matemática quando se insere a música no contexto. Estudos de comprovam que através da música pode-se até curar determinadas doenças, ajudar o aluno a melhorar sua autoestima, socializar-se melhor, contribuir para o seu aprendizado nas mais variadas disciplinas (não só a matemática), aumentar sua capacidade de concentração, dentre outros benefícios. Destacamos também alguns fatos históricos, relacionamos o Som e a Trigonometria, a Matemática e a Música, de reunimos alguns elementos básicos da Teoria musical, ressaltamos algumas contribuições de Euler no campo da Matemática e a Teoria Musical e naturalmente, sugerimos uma estratégia de trabalho em sala de aula utilizando a Teoria musical como motivação.”
Um olhar sobre os modelos matemáticos da	Camilo Misura	Universidade Federal do ABC (UFABC)	De acordo com o resumo disponível em MISURA (2016, p. 5):

música			“Nesta dissertação são abordadas as relações e modelos matemáticos existentes na música. Enunciando as noções de acústica e psicofísica para explicar o som. São utilizada as Funções Periódicas e Teoria de Fourier para construir as relações de harmônicos. A partir de conhecimentos físicos sobre mecânica, faz-se a construção de modelos matemáticos para explicar o comportamento dos instrumentos de cordas, sopro e membranas (percussão), utilizando equações diferenciais. Estuda-se as relações entre os comprimentos de corda, as notas musicais e as escalas musicais, mostrando três escalas historicamente relevantes (Pitagórica, Justa e Temperada). Conhecendo-as, é possível perceber as relações modulares que elas possuem. É feita a construção algébrica que justifica a aritmética modular para classificar a escala cromática (escala de 12 semitons) e apresentadas as transformações geométricas no plano, além de como elas são usadas em composições. Ao término é sugerida uma atividade didática com o intuito de enriquecer a prática escolar na educação básica, usando a música no ensino de Funções Trigonométricas.”
MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA	Rodovlas Fabiano dos Santos	Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)	De acordo com o resumo disponível em SANTOS (2015, p. 5): “A música é sem dúvida uma das principais formas de manifestação cultural, de

EXPLORAR CONCEITOS MUSICAIS PARA ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E FUNDAMENTAL			gêneros e gostos diversos a música ocidental tem em geral uma mesma base musical e esta base tem seu cerne em conceitos matemáticos simples. Esse trabalho objetiva trazer esses conceitos matemáticos ao conhecimento de alunos do ensino médio e fundamental através da história da música. Propõe-se uma revisão bibliográfica da importância e das contribuições de Pitágoras na construção da escala Diatônica e da influência que os estudos pitagóricos exerceram na escala Temperada, que é atualmente utilizada. O estudo apresenta-se norteado por documentos oficiais como PCN e PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais e Parâmetros Curricular Nacionais do Ensino Médio) e diretrizes curriculares a respeito do estudo da matemática, aliando conteúdos matemáticos a conceitos do cotidiano, nesse caso a conceitos musicais. Nesse trabalho, são tratadas atividades que podem ser reproduzidas por professores de matemática sem que o mesmo necessite de conhecimentos avançados sobre música, tais como o estudo de frações na construção de um monocórdio e com auxílio do programa GeoGebra é explorado conceitos de sons descritos através de funções exponenciais e trigonométricas."
--	--	--	---

Todas as pesquisas relacionadas no Quadro 2 referem-se a Dissertações, não foram encontradas na BDTD Teses que contenham os termos pesquisados.

4.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE GERAL DAS PESQUISAS

Abaixo descrevemos brevemente as pesquisas para deixar o leitor contextualizado, porém recomendamos o acesso a cada uma para ver com mais detalhes como cada oficina foi elaborada e aplicada nas escolas.

De certo modo, as 6 pesquisas encontradas ao final estão relacionadas ao ensino, aprendizagem ou ensino e aprendizagem de funções trigonométricas, sendo possível encontrar nestas dissertações sequências didáticas com possível aplicação na escola.

Quanto a fundamentação teórica, numa visão geral, todas elas estão apontando na mesma direção elencando conceitos acerca da modelagem do som e notas musicais, onde podemos encontrar as relações matemáticas presentes na escala pitagórica, escala temperada e ainda na modelagem de diferentes timbres. Além disso, os autores enunciam conceitos musicais como altura, intensidade e timbre, explicando-os de um ponto de vista físico-matemático, sendo possível notar desde toda a fundamentação teórica a presença da interdisciplinaridade no trabalho com a música dentro da matemática.

Outro ponto importante, é a presença do uso de softwares para realizar as atividades propostas em cada dissertação, os quais possibilitam a representação gráfica de ondas sonoras por meio de curvas senoidais as quais podem ser reproduzidas como som. Além disso, fica evidente a possibilidade de tratar conceitos musicais, visto que, são abordadas as escalas e as características sonoras da emissão de notas por instrumentos.

Nota-se a presença da Modelagem Matemática, quando nas atividades propostas ao final, os alunos buscam por meio de um modelo – o qual aqui podemos considerar tanto a função seno, quanto a superposição de funções seno com diferentes amplitudes e frequências – representar uma determinada nota e timbre, e que ao final, realizando as alterações nos coeficientes das funções, os alunos obtêm conclusões matemáticas e podem traduzi-las de volta ao mundo real. Além disso, todo o procedimento e as conjecturas propostas nas oficinas e sequências didáticas que cada autor descreve pode ser levado em conta como sendo uma atividade de modelagem.

5 ATIVIDADE DE MODELAGEM

Aqui deixaremos uma sequência didática para possível aplicação em sala de aula trabalhando com as funções trigonométricas seno e cosseno e sua relação com a música.

Destacamos que para esta atividade, estaremos fundamentados na visão de Modelagem Matemática segundo Dionísio Burak, a qual já foi apresentada no Quadro 1. Além disso, algumas etapas serão seguidas, de acordo com a concepção do autor, as quais estão dispostas no Quadro 3. Ao final da atividade sugerimos que seja aplicado um questionário aos alunos (APÊNDICE A).

Quadro 3 – Etapas do processo de Modelagem Matemática segundo Burak, 2010.

ESCOLHA DO TEMA	Esta escolha parte do interesse do grupo ou dos grupos de estudantes envolvidos.
Pesquisa exploratória	Busca de dados sobre o tema, podendo ser uma pesquisa bibliográfica ou de campo.
Levantamento do(s) problemas	Nesta etapa ocorrem as conjecturas de relações entre o problema pesquisado e a matemática, sustentados pela coleta de dados, onde podem ser propostos problemas simples ou complexos que permitam a utilização dos conhecimentos.
Resolução do(s) problema(s)	Uso do conhecimento matemático em que os conteúdos se mostram relevantes e significativos, priorizando a ação do estudante na sua elaboração.
Análise crítica das soluções	Momento de debate e reflexão sobre as intenções e descobertas, que auxilia na formação de um cidadão mais participativo. É o ponto forte da modelagem.

Fonte: Compilação do autor.

5.1 ESCOLHA DO TEMA

Como o objetivo deste trabalho é abordar as potencialidades do ensino-aprendizagem das funções trigonométrica por meio da Modelagem Matemática e da Música, já temos um tema predefinido e vamos supor inicialmente que o interesse do grupo ao qual iremos trabalhar é a música.

5.2 PESQUISA EXPLORATÓRIA

Nesta etapa, o professor deverá iniciar indagações aos alunos sobre as propriedades do som: altura, intensidade e timbre. Abaixo colocamos algumas sugestões de perguntas, as quais podem tomar caminhos diferentes de discussão, e que não necessariamente devem ser seguidas, pois o professor pode instigar a sala a pensar nestes conceitos com outras perguntas ou de outras formas.

O importante, é que ao final, os alunos realizem uma pesquisa sobre estes conceitos para entender as definições de cada um, e além de tudo, é imprescindível que haja uma socialização do que foi encontrado e que o professor explique os conceitos físicos que os alunos encontraram.

Vocês já notaram uma diferença da voz de um homem para a voz de uma mulher? Qual diferença? Tente explicar essa diferença.

Nesta questão o esperado, é que os alunos acabem respondendo que já notaram e que geralmente a voz do homem é mais grossa que a voz da mulher, que por sua vez, é fina. As explicações que os alunos podem dar são diversas e podem abrir pauta para discussões além do âmbito musical ou matemático, como por exemplo fatores biológicos como os hormônios sexuais, fatores sociais, como por exemplo, a não obrigatoriedade de a voz de um homem ser relacionada a sua sexualidade, entre outros assuntos importantes que podem ser trabalhados pelo professor em sala de aula.

O que você entende por altura de um som?

Nesta questão, devido a provável falta de conhecimento musical ou físico-acústico, podem surgir respostas relacionando a altura com o volume (intensidade) do som, e é uma boa questão para que os alunos reflitam se realmente isso está correto e para discutir as questões relacionadas as propriedades do som de um ponto de vista musical e físico.

Você acha que a altura de um som pode ter relação com a matemática?

Esta questão é uma questão mais geral, onde teremos respostas que “sim”, “não”, alguns podem justificar o porquê.

Para você, o que seria intensidade do som?

O que pode acontecer aqui, é de os alunos não saberem responder a questão, ou comecem a questionar-se se a resposta que deram sobre a altura do som estava correta, visto que a intensidade pode ser por eles associada também ao volume.

Você já notou uma diferença entre o som de dois instrumentos? Se sim, quais? Como você explicaria essa diferença?

Nesta questão, provavelmente os alunos responderão que já notarão, e podem até dizer quais instrumentos, mas algo bem difícil, principalmente se não tiverem um conhecimento musical e físico, é de que consigam explicar a diferença de uma forma consistente.

5.3 LEVANTAMENTO DO PROBLEMA

Realizada a pesquisa exploratória, nesta etapa, serão levantadas as conjecturas entre os dados obtidos e a matemática, ou seja, entre as definições encontradas pelos alunos sobre altura, intensidade e timbre e suas relações com a matemática, em específico as funções trigonométricas.

O professor pode novamente instigar os alunos com questões que propiciem aos alunos um momento de reflexão sobre a presença da matemática nestes conceitos musicais.

Além disso, é importante que o professor neste momento comece a introduzir as funções trigonométricas apresentando suas definições, domínio, contradomínio, imagem, propriedades, forma geral e gráficos (conceitos como amplitude, período e frequência deverão ser abordados aqui), pois com base nestes conteúdos e com o que foi encontrado pelos alunos quanto à altura, intensidade e timbre os alunos poderão modelar o som.

Espera-se que neste momento, os alunos identifiquem termos que aparecem tanto no estudo das funções trigonométricas quanto nas propriedades do som, como

por exemplo, amplitude e frequência. Caso isto não aconteça, o professor deve dar direcionamentos para que esta relação seja notada.

Após isso, os alunos abrirão o GeoGebra, e deverão plotar, sucessivamente, as funções $f(x) = A + B\sin(Cx + D)$ e $f(x) = A + B\cos(Cx + D)$.

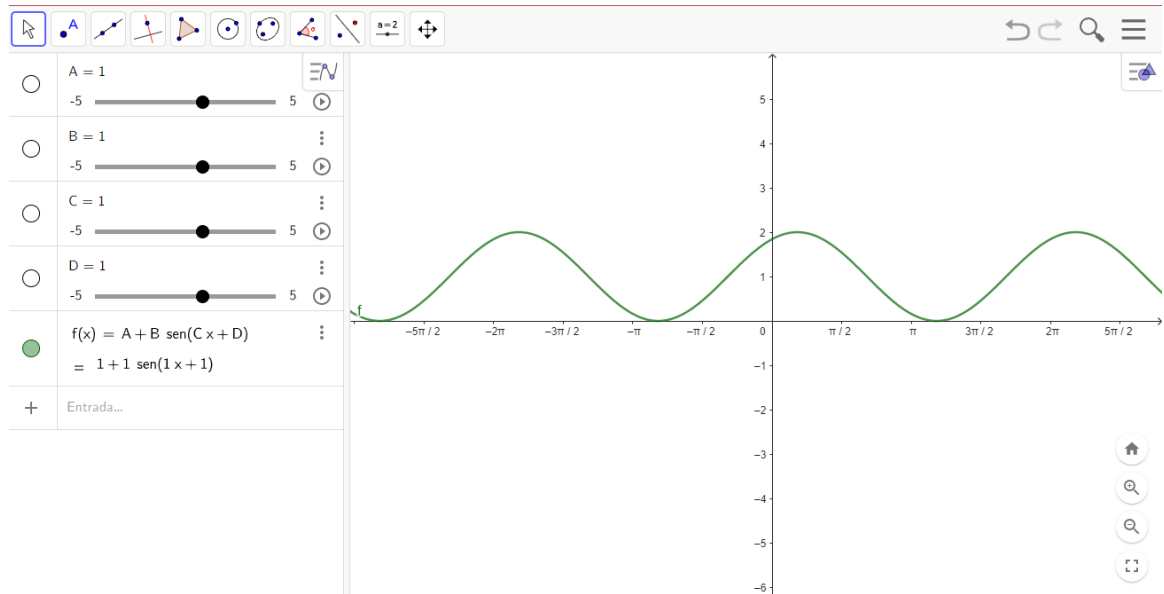


Figura 34 – Tela do GeoGebra para a função $f(x) = A + B\sin(Cx + D)$, produzida pelo autor.

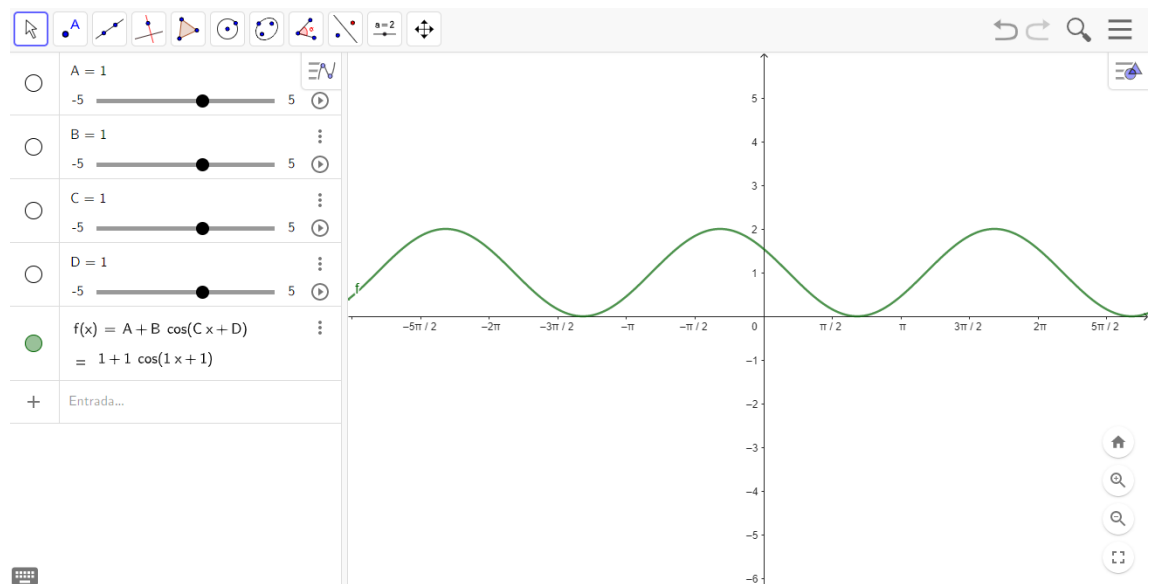


Figura 35 – Tela do GeoGebra para a função $f(x) = A + B\cos(Cx + D)$, produzida pelo autor.

Neste momento o professor deverá pedir para que os alunos façam alterações nos coeficientes das funções plotadas, e façam conjecturas acerca da

influência dessas alterações no gráfico das funções, e que ainda, tentem relacionar essas alterações com o que foi encontrado por eles sobre as propriedades do som.

Espera-se que ao final desta etapa, os alunos tenham compreendido as relações existentes entre a amplitude (coeficiente A) e a intensidade do som, entre o período e frequência (coeficiente C) e a altura do som.

Ao final desta etapa, caso nenhum aluno levante a questão, o professor deve perguntar para a sala onde está a relação do timbre com essas funções ou o que seria verdadeiramente o timbre, visto que a altura é relacionada com a frequência da curva e a intensidade é relacionada com a amplitude.

5.4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Aqui, o professor deverá pesquisar uma música breve, tocada por dois instrumentos diferentes, o instrumento A e o instrumento B. Após reproduzir a música tocada pelos instrumentos A e B, deverá pedir aos alunos que diferenciem o som de cada instrumento, fazendo apontamentos com os conhecimentos matemáticos que foram vistos até o momento. Em seguida, após os apontamentos, o professor deverá indagar os alunos sobre o que eles acham acerca da curva que representa o som emitido pelo instrumento A ao tocar, por exemplo, a nota lá, e a curva que representa o som emitido pelo instrumento B ao tocar a mesma nota. A principal questão aqui é “As curvas são as mesmas?”. A partir disso, espera-se que parte dos alunos apontem que provavelmente não são a mesma curva, pois caso fosse, o som seria exatamente o mesmo, e desta forma, iniciará uma nova investigação para tentar conjecturar o que seria o timbre.

Para encaminhar a atividade, o professor poderá pedir para que desta vez os alunos tentem por exemplo, combinar a função seno de diferentes formas, como por exemplo, somando, subtraindo, multiplicando, dividindo, fazendo diferentes combinações entre as operações e os coeficientes.

Os resultados obtidos poderão ser abordados pelo professor de acordo com o que foi obtido pelos alunos, e por fim o professor deverá explicar o conceito de timbre do ponto de vista físico matemático, como sendo a superposição de harmônicos, onde o primeiro é o som fundamental (que possui a frequência fundamental) e os outros são múltiplos dele (com frequências múltiplas da fundamental), abordando o fato de que matematicamente isto pode ser visto como a

uma soma parcial ou infinita de funções seno ou cosseno. Um exemplo de gráfico da superposição de harmônicos está na Figura 24, já apresentada anteriormente. No Apêndice B deixamos uma sugestão de como pode ser construída essa superposição.

5.5 ANÁLISE CRÍTICA DAS SOLUÇÕES

Nesta etapa é onde os alunos farão a análise dos resultados obtidos de forma crítica, por isso, será proposta uma atividade na qual os conhecimentos e conjecturas feitas até o momento serão usados na produção de um trecho da música “Anunciação”, de Alceu Valença. Para isso, o software Mathematica deverá ser utilizado, onde por meio de uma função por partes, composta de funções seno com diferentes frequências, e da ferramenta “Play”, os alunos irão reproduzir o trecho da música.

Para isso, deve-se abrir o software Mathematica e na tela inicial clicar em *new document*.

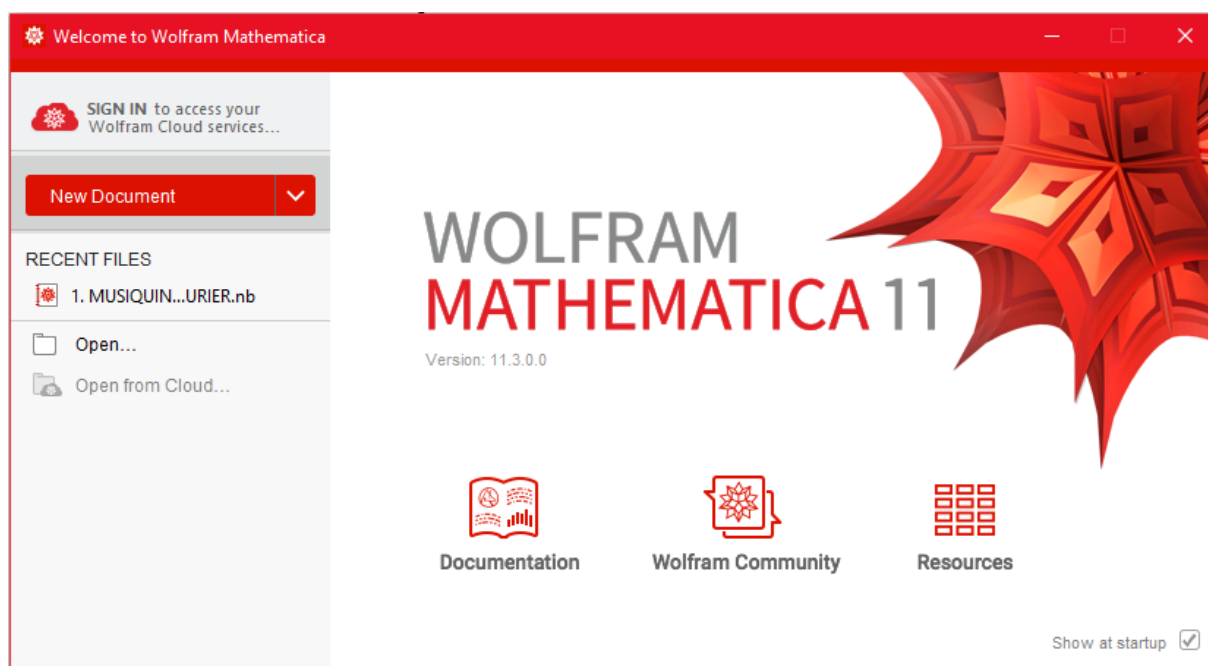


Figura 36 – Tela inicial do software Mathematica.

Figura produzida pelo autor usando a ferramenta Print Screen.

Na tela que aparecerá, os alunos deverão digitar primeiro a função por partes que comporá o trecho musical e isto será feito através do comando *Piecewise*. Para

isto, o aluno deverá usar uma partitura da música e junto uma tabela com as frequências das notas da escala diatônica (Tabela 1).

Anunciação

Score

Flute

SOL LÁ SI DÓ SI LÁ SOL MI SOL LÁ SOL LÁ LA SOL LÁ SI

4

SÓ SI LÁ SOL MI SI LÁ SOL SOL____ SOL LÁ SI DÓ SI LA SOL MI SOL LÁ SOL

7

LÁ LÁ SOL LÁ SI DÓ SI LÁ SOL MI SI LÁ SOL SOL SOL RÉ MI SI_____

12

____ LÁ DÓ SI MI SOL LÁ SOL SOL SOL RÉ MI SI_____

16

____ LÁ DÓ SI MI SOL LÁ SOL SOL____ SOL LA SI SOL_____

2.

Figura 37 – Partitura da Música Anunciação.

Figura retirada do SCRIBD, disponível em

(<<https://pt.scribd.com/doc/273716546/ANUNCIACAO>>).

Tabela 1 – Frequências da Escala de $DÓ_3$, disponível em (MISURA, 2016).

NOTA	NOME	FREQUÊNCIA (Hz)
C	Dó	262
C#	Dó sustenido	277
D	Ré	292
D#	Ré sustenido	311
E	Mi	330
F	Fá	349
F#	Fá sustenido	370
G	Sol	392
G#	Sol sustenido	415
A	Lá	440
A#	Lá sustenido	466
B	Sí	494

A função seno que irá representar cada nota será escrita na forma $\sin[f * 2 * \pi * t]$, onde f representa a frequência da nota que se quer reproduzir, por exemplo, para reproduzir a nota Dó deve-se usar $\sin[262 * 2 * \pi * t]$.

Para que a música seja tocada nota a nota, deve-se determinar um intervalo ao qual a função que corresponde a nota irá pertencer e ainda dar um espaço de 0.5 unidades de tempo (segundos), entre cada nota.

Uma sugestão é de que o professor explique cada figura musical que está presente na partitura e que peça que os alunos considerem a colcheia como valendo 0.25 e que as outras figuras são múltiplas dela, ou seja, a semínima irá valer 0.5 e a mínima 1, desta forma, a partir disso, os alunos poderão calcular qual intervalo corresponderá cada nota que comporá a função por partes. Por exemplo, a partitura começa com uma nota *sol* representada pela colcheia e em seguida tem uma nota *lá* representada também por uma colcheia, desta forma, para estas duas notas a

função ficaria $f = \text{Piecewise}[\{\{\text{Sin}[392 * 2 * \text{Pi} * t], 0 < t < 0.25\}, \{\text{Sin}[440 * 2 * \text{Pi} * t], 0.75 < t < 1\}\}$.

Para que o computador reproduza o som das notas, é necessário após digitar a função, executar o comando $\text{Play}[f, \{t, 0, 1\}]$ (o último valor para t é o mesmo da função f).

Toda esta atividade deverá ser feita pelos alunos, porém, se necessário o professor deve intervir e ajudá-los. Além disso, o professor deverá pedir para que os alunos usem os conhecimentos aprendidos durante todas as outras etapas, como por exemplo, pedir para que verifiquem o que acontece se a frequência da nota for multiplicada por 2, que no caso, a nota será tocada uma oitava acima, e caso seja multiplicada por 0.5 a nota será tocada uma oitava abaixo. Os alunos podem testar também outros valores para os intervalos das funções que compõe a função f , e verificar o que acontece por exemplo, com a velocidade de execução de cada nota.

A partir disso, os alunos verão e ouvirão os resultados de todo o processo de aprendizado até aqui ser colocado em prática.

Abaixo deixamos como exemplo como ficarão os códigos no Mathematica.

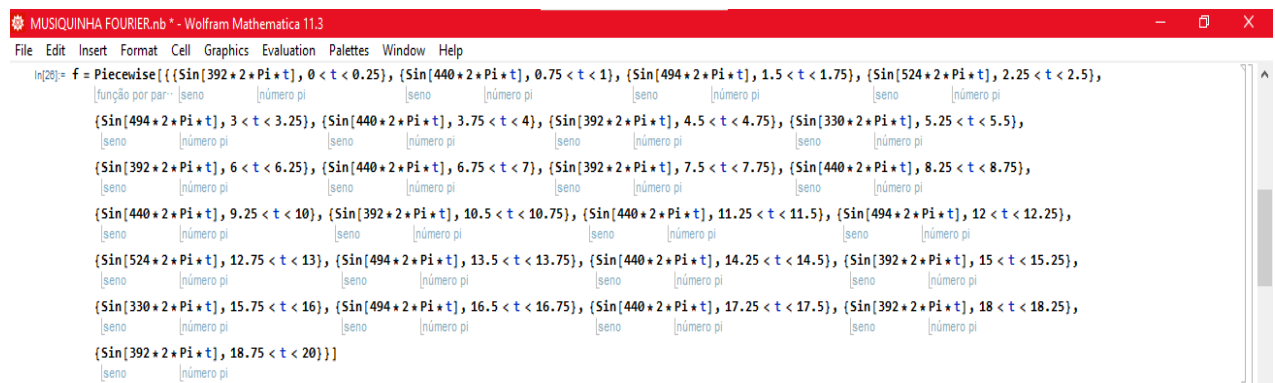


Figura 38 – Tela 1 do Mathematica durante a atividade.

Figura produzida pelo autor usando a ferramenta Print Screen.

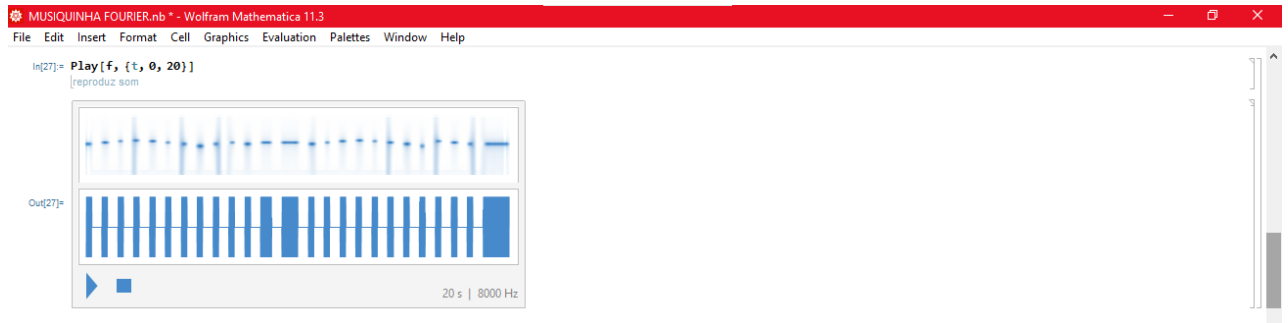


Figura 39 – Tela 2 do Mathematica durante a atividade.

Figura produzida pelo autor usando a ferramenta Print Screen.

No APÊNDICE B deixamos os códigos de parte da música digitados, bastando copiar e colar no Mathematica e compilar utilizando as teclas *Shift+Enter*.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A matemática e a música estão intimamente ligadas por diversos conceitos, e essa relação vem sendo estudada e consolidada desde a antiguidade com Pitágoras, até os dias de hoje, e durante todo este percurso, foram diversos os matemáticos que deram contribuições para que toda a teoria se constituísse. Além disso, é possível notar a presença de um caráter interdisciplinar nos estudos envolvendo a música, dando origem a um olhar físico-matemático dentro de seus conceitos.

O ensino tradicional vem cada vez mais sendo criticado e novas alternativas de metodologia de ensino vem sendo um crescente alvo de estudos dentro da Educação Matemática, no intuito de tornar os alunos cada vez mais atuantes em todo seu processo de ensino-aprendizagem, onde o professor é apenas um mediador. A Modelagem Matemática é uma tendência dentro do campo da Educação Matemática e das metodologias ativas de ensino-aprendizagem, onde é propiciado ao aluno um caráter mais atuante e um ambiente onde os conhecimentos e conjecturas possam partir dele.

Esta pesquisa teve por objetivo compreender as relações entre a matemática e a música a fim de apontar as potencialidades do uso da Modelagem Matemática e da música para o ensino de funções trigonométricas durante a educação básica, onde foi realizado um mapeamento das pesquisas nesta linha.

Apesar de termos nos restringido a um banco de dados, a BDTD, consideramos que os resultados aqui obtidos são de relevância, pois foi apontada a possibilidade de trabalho utilizando esta metodologia e seu papel de importância na vida dos estudantes, contribuindo além de tudo, para o entendimento do docente sobre sua atividade, seu papel na vida do aluno e sobre a relevância que tem este tipo de abordagem no ensino. Estes apontamentos ficam claros desde nossa fundamentação teórica até a análise dos dados e a proposta de atividade de Modelagem do Som, a qual permite ao professor, com materiais próprios, tomar por base o passo a passo sugerido para o trabalho com as funções trigonométricas em sala de aula, durante uma aula introdutória onde geralmente procura-se chamar a atenção e o foco dos alunos e garantir que eles se interessem por aquele conteúdo, tentando fazer com que a compreensão dos conceitos abordados torne-se significativa.

Além disso, é importante apontar para o caráter interdisciplinar que este trabalho pode atingir, estando de acordo com o que é proposto na BNCC (BRASIL, 2018, p. 470) e tornando o conteúdo mais útil ao aluno.

Esperamos ter contribuído por meio deste trabalho para o campo da pesquisa e para que mais pessoas se interessem por esta temática, podendo este ser um ponto inicial para outros trabalhos, sendo possível por meio dele compreender a grandeza da Modelagem Matemática e abrir espaço para novas temáticas nesta área.

Por fim, gostaríamos de deixar como sugestão para um trabalho futuro a aplicação da atividade de modelagem aqui proposta em uma sala de aula, onde por meio da observação e da pesquisa de campo será possível atribuir mais significados a esta abordagem.

REFERÊNCIAS

ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música: o pensamento analógico na construção de significados**. [S.l.]: Escrituras, 2006.

ANDRADE, C. C. **O Ensino da Matemática Para o Cotidiano**. 2013. 40 f. Monografia (Especialista na Pós Graduação em Educação: Métodos e Técnicas de Ensino) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR, Paranavaí, 2013. Disponível em: <http://riut.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/20861/2/MD_EDUMTE_2014_2_17.pdf>. Acesso em: 26 fev. 2022.

ARAÚJO, J. L.; BORBA, M. C. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Grupo Autêntica, 2007. E-book. ISBN 9788582179383. Disponível em: <<https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582179383/>>. Acesso em: 21 fev. 2022.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. IN: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio de Janeiro: ANPED, 2001. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/funcoes_modelagem/modulo_I/modelagem_barbosa.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2022.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 2009.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo, 2002.

BIBLIOTECA DIGITAL BRASILEIRA DE TESES E DISSERTAÇÕES, 2002. Disponível em: <<https://bdtd.ibict.br/vufind/>>.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Editora Contexto, 2000.

BLOG MULTISOM. **Diferenças do violino e viola clássica**. Imagem. 18 de fevereiro de 2020. Disponível em: <<https://blog.multisom.com.br/violino-viola-diferencas/>>. Acesso em: 16 dez. 2022.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C; MEADE, D. B. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2020.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 27 fev. 2022.

BROMBERG, C. Música e História da Matemática. **História da Ciência e Ensino: Construindo Interfaces**, São Paulo, v.6, p. 1-15, 2012. Disponível em:

<<https://revistas.pucsp.br/hcensino/article/download/12864/9436%E2%80%8E>>. Acesso em: 26 fev. 2022.

BURAK, D. **Modelagem matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem**. Tese (Doutor em Educação na área de concentração de Psicologia Educacional) – Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1992. Disponível em: <https://www.psiem.fe.unicamp.br/pf-psiem/burak_dionisio_d.pdf>. Acesso em: 28 fev. 2022.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010. Disponível em: <<https://proxy.furb.br/ojs/index.php/modelagem/article/view/2012/1360>>. Acesso em: 28 fev. 2022.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Concepções de modelagem matemática: contribuições teóricas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 10, n. 1, p. 17-34, 2008. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1642/1058>>. Acesso em: 28 fev. 2022

CABRAL, R. B. **Matemática e música: uma proposta de aprendizagem**. 2015. 62 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Goiás, Jataí, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.bc.ufg.br/tede/handle/tede/5438>>. Acesso em: 28 dez. 2022.

COMUNE, A. D. **Pitágoras e a harmonia**. jan. 2014. Disponível em: <<https://arquiteturaemusica.wordpress.com/2014/01/01/pitagoras-e-a-harmonia/>>. Acesso em: 14 mar. 2022

DEPIZOLI, C. A. **Matemática e música e o ensino de funções trigonométricas**. 2015. 87 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2015. Disponível em: <<http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1361>>. Acesso em: 26 dez. 2022.

FIORENTINI, D; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3ª Ed. Campinas: Autores Associados, 2006.

GRAMS, A. L. B. **Modelagem Matemática no Ensino Médio: Percepção Matemática por Meio da Música**. 2014. 124 p. Monografia (Mestre em Educação em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2014. Disponível em: <<https://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3470/1/459264.pdf>>. Acesso em: 27 fev. 2022.

GUSMÃO, Pablo. Teoria elementar da música. **Centro de Artes e Letras. Universidade Federal de Santa Maria**, 2012.

IAZZETTA, F. **Música e mediação tecnológica**. 2006. Tese (Livre Docência) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: <<https://repositorio.usp.br/item/001629823>>. Acesso em: 14 mar. 2022.

MED, Bohumil. **Teoria da música**. 4. Ed. Brasília: Musimed, 1996.

MURTA, J. G. A. LABORATÓRIO DE GARAGEM. **Sintetizador eletrônico**. Imagem. 10 de agosto de 2019. Disponível em: <encr.pw/88u7m>. Acesso em: 16 dez. 2022.

MARTINS, M. A. **O gráfico dos sons**. 2014. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em: <<http://www.bdtd.uerj.br/handle/1/4877>>. Acesso em: 27 dez. 2022.

MISURA, C. **UM OLHAR SOBRE OS MODELOS MATEMÁTICOS DA MÚSICA**. Dissertação (Mestrado em Matemática, Computação e Cognição) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2016. Disponível em: <<https://biblioteca.ufabc.edu.br/index.html>>. Acesso em 28. dez. 2022.

OLIVEIRA, K. W. M. **ONDAS MECÂNICAS UNIDIMENSIONAIS E MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADAS A MÚSICA**. TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (LICENCIADO EM MATEMÁTICA) - UNIVERSIDADE DO ESTADO DO AMAZONAS, MANAUS, 2021. Disponível em: <<http://repositorioinstitucional.uea.edu.br/bitstream/riuea/4022/1/Ondas%20mec%C3%A2nicas%20unidimensionais%20e%20modelagem%20matem%C3%A1tica%20aplicadas%20%C3%A0%20m%C3%BCsica.pdf>>. Acesso em: 30 nov. 2022.

OLIVEIRA, M. S. Uma reflexão sobre a ideia de superação do ensino tradicional na educação matemática: a dicotomia entre a abordagem clássica e abordagens inovadoras em foco. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 7, n. 14, p. 79-93, 2019. DOI: 10.5965/2357724X07142019079. Disponível em: <<https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/16816>>. Acesso em: 26 fev. 2022.

PORTAL DO PROFESSOR. **Escala Diatônica**. Imagem. s/d. Disponível em: <www.portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 23 dez. 2022.

RAMALHO, F.; FERRARO, N.; SOARES, P. **Os fundamentos da física 2**. 2ª. ed. [S.l.]: Centauro, 2014.

RODRIGUES, J. F. A matemática e a música. **Lisboa, PT**, v. 200, 1999.

RODRIGUES, M. S. **Relacionando as funções trigonométricas com música**. 2017. 90 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT)) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2017. Disponível em: <<http://www.tede2.ufrpe.br:8080/tede2/handle/tede2/7890>>. Acesso em: 24 dez. 2022.

SANTOS, R. F. **MATEMÁTICA E MÚSICA: UMA ABORDAGEM PARA EXPLORAR CONCEITOS MUSICAIS PARA ENSINAR MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO E**

FUNDAMENTAL. 2015. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA, Ponta Grossa, 2015. Disponível em: <<http://tede2.uepg.br/jspui/handle/prefix/1503>>. Acesso em: 29 dez. 2022.

SCRIBD. **ANUNCIAÇÃO**. s/d. Partitura. Disponível em: <<https://pt.scribd.com/doc/273716546/ANUNCIACAO>>. Acesso em: 05 jan. 2023.

SOUZA, D. F.; CINTRA, R. J. S; OLIVEIRA, H. M. Uma Ferramenta para Análise de Sons Musicais: A Série Quantizada de Fourier. IN: XXII SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES – SBT, 05., 2005. **Anais...** Campinas: [s.n.], 2005. Disponível em: <l1nq.com/CBeU6>. Acesso em: 10 fev. 2023.

TAVARES, J. A; *et. al*. O uso de metodologias ativas no ensino das funções trigonométricas: uma adequação para o novo Ensino Médio. **Revista Educação Pública**, Rio de Janeiro, v. 22, nº15, 26 de abril de 2022. Disponível em: <<https://educacaopublica.cecierj.edu.br/artigos/22/15/o-uso-de-metodologias-ativas-no-ensino-das-funcoes-trigonometricas-uma-adequacao-para-o-novo-ensino-medio>>. Acesso em: 02 mar. 2022.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO PÓS ATIVIDADE DE MODELAGEM

1. Antes da atividade, você achava que a música que ouvimos tinha relação com a matemática? E agora, após a atividade, você consegue compreender a importância da matemática para a música?
2. Antes da atividade qual era seu gosto pela matemática? E após a atividade?
3. Antes da atividade você conseguia entender a matemática? Se sim, você sabia que ela poderia ser útil em alguma coisa?
4. Durante a atividade você conseguiu entender o comportamento da função seno?
5. Você acha que além da música, a matemática pode estar presente em outras coisas? Se sim, cite algumas.
6. Você esperava que seria possível reproduzir uma música usando apenas funções matemáticas?
7. Classifique o quanto você gostou da atividade.

APÊNDICE B – CÓDIGOS PARA A MÚSICA ANUNCIAÇÃO NO MATHEMATICA

TONALIDADE COMUM

$$f = \text{Piecewise}[\{\{\sin[392 * 2 * \pi * t], 0 < t < 0.25\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 0.75 < t < 1\}, \{\sin[494 * 2 * \pi * t], 1.5 < t < 1.75\}, \{\sin[524 * 2 * \pi * t], 2.25 < t < 2.5\}, \{\sin[494 * 2 * \pi * t], 3 < t < 3.25\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 3.75 < t < 4\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 4.5 < t < 4.75\}, \{\sin[330 * 2 * \pi * t], 5.25 < t < 5.5\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 6 < t < 6.25\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 6.75 < t < 7\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 7.5 < t < 7.75\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 8.25 < t < 8.75\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 9.25 < t < 10\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 10.5 < t < 10.75\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 11.25 < t < 11.5\}, \{\sin[494 * 2 * \pi * t], 12 < t < 12.25\}, \{\sin[524 * 2 * \pi * t], 12.75 < t < 13\}, \{\sin[494 * 2 * \pi * t], 13.5 < t < 13.75\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 14.25 < t < 14.5\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 15 < t < 15.25\}, \{\sin[330 * 2 * \pi * t], 15.75 < t < 16\}, \{\sin[494 * 2 * \pi * t], 16.5 < t < 16.75\}, \{\sin[440 * 2 * \pi * t], 17.25 < t < 17.5\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 18 < t < 18.25\}, \{\sin[392 * 2 * \pi * t], 18.75 < t < 20\}\}]$$

$\text{Play}[f, \{t, 0, 20\}]$

UMA OITAVA ACIMA

$$f = \text{Piecewise}[\{\{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 0 < t < 0.25\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 0.75 < t < 1\}, \{\sin[2 * 494 * 2 * \pi * t], 1.5 < t < 1.75\}, \{\sin[2 * 524 * 2 * \pi * t], 2.25 < t < 2.5\}, \{\sin[2 * 494 * 2 * \pi * t], 3 < t < 3.25\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 3.75 < t < 4\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 4.5 < t < 4.75\}, \{\sin[2 * 330 * 2 * \pi * t], 5.25 < t < 5.5\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 6 < t < 6.25\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 6.75 < t < 7\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 7.5 < t < 7.75\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 8.25 < t < 8.75\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 9.25 < t < 10\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 10.5 < t < 10.75\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 11.25 < t < 11.5\}, \{\sin[2 * 494 * 2 * \pi * t], 12 < t < 12.25\}, \{\sin[2 * 524 * 2 * \pi * t], 12.75 < t < 13\}, \{\sin[2 * 494 * 2 * \pi * t], 13.5 < t < 13.75\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 14.25 < t < 14.5\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 15 < t < 15.25\}, \{\sin[2 * 330 * 2 * \pi * t], 15.75 < t < 16\}, \{\sin[2 * 494 * 2 * \pi * t], 16.5 < t < 16.75\}, \{\sin[2 * 440 * 2 * \pi * t], 17.25 < t < 17.5\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 18 < t < 18.25\}, \{\sin[2 * 392 * 2 * \pi * t], 18.75 < t < 20\}\}]$$

$\text{Play}[f, \{t, 0, 20\}]$

UMA OITAVA ABAIXO

$$\begin{aligned}
 f = \text{Piecewise}[\{ & \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 0 < t < 0.25\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 0.75 \\
 & < t < 1\}, \{\sin[0.5 * 494 * 2 * \pi * t], 1.5 < t \\
 & < 1.75\}, \{\sin[0.5 * 524 * 2 * \pi * t], 2.25 < t \\
 & < 2.5\}, \{\sin[0.5 * 494 * 2 * \pi * t], 3 < t \\
 & < 3.25\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 3.75 < t \\
 & < 4\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 4.5 < t \\
 & < 4.75\}, \{\sin[0.5 * 330 * 2 * \pi * t], 5.25 < t \\
 & < 5.5\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 6 < t \\
 & < 6.25\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 6.75 < t \\
 & < 7\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 7.5 < t \\
 & < 7.75\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 8.25 < t \\
 & < 8.75\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 9.25 < t \\
 & < 10\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 10.5 < t \\
 & < 10.75\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 11.25 < t \\
 & < 11.5\}, \{\sin[0.5 * 494 * 2 * \pi * t], 12 < t \\
 & < 12.25\}, \{\sin[0.5 * 524 * 2 * \pi * t], 12.75 < t \\
 & < 13\}, \{\sin[0.5 * 494 * 2 * \pi * t], 13.5 < t \\
 & < 13.75\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 14.25 < t \\
 & < 14.5\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 15 < t \\
 & < 15.25\}, \{\sin[0.5 * 330 * 2 * \pi * t], 15.75 < t \\
 & < 16\}, \{\sin[0.5 * 494 * 2 * \pi * t], 16.5 < t \\
 & < 16.75\}, \{\sin[0.5 * 440 * 2 * \pi * t], 17.25 < t \\
 & < 17.5\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 18 < t \\
 & < 18.25\}, \{\sin[0.5 * 392 * 2 * \pi * t], 18.75 < t < 20\} \}
 \end{aligned}$$

$\text{Play}[f, \{t, 0, 20\}]$

ANEXO A – SUGESTÃO DE COMPOSIÇÃO DE HARMÔNICOS

Para a criação de timbres pode-se proceder da seguinte forma:

- I. Produz-se o primeiro harmônico, com uma amplitude que corresponde a 100% e uma frequência f_1 .
- II. Produz-se o terceiro harmônico, com uma amplitude que corresponde a 33% da amplitude máxima e possui frequência $f_3 = 3f_1$.
- III. Produz-se o quinto harmônico, com uma amplitude que corresponde a 20% da amplitude máxima e possui uma frequência $f_5 = 5f_1$.
- IV. Produz-se o sétimo harmônico, com uma amplitude que corresponde a 14% da amplitude máxima e possui frequência $f_7 = 7f_1$.
- V. Produz-se o nono harmônico, com uma amplitude que corresponde a 11% da amplitude máxima e possui frequência $f_9 = 9f_1$.
- VI. Por fim, realizasse a soma de dos cinco harmônicos, obtendo o timbre.

Neste caso, pode-se usar $f_n(x) = A \sin(nf_1x)$, onde $n=1,3,5,7,9$ e A é a respectiva amplitude. Ou pode-se usar a função cosseno.