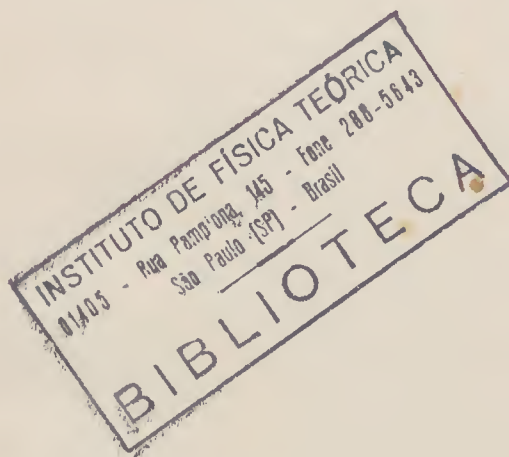


C Á L C U L O V A R I A C I O N A L E X T E R I O R

POR

ROBERTO ANDRÉ KRAENKEL



Tese de doutorado
apresentada no
Instituto de Física
Teórica.

Orientador :
Ruben Aldrovandi



São Paulo
março de 1988

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Ruben Aldrovandi pela orientação e amizade,
aos colegas , professores e funcionários do IFT , pelo dia
a dia
a FAPESP e a CAPES , pelo apoio financeiro ,
e a Andi , a quem esta tese é dedicada .

RESUMO

O formalismo do cálculo variacional exterior é introduzido. Discute-se o problema variacional inverso, a relação entre a não-unicidade da lagrangeana e integrabilidade completa na mecânica clássica e a quantização de teorias de campo não-lagrangeanas.

ABSTRACT

The formalism of exterior variational calculus is introduced. The inverse variational problem, the relation between the non-uniqueness of the lagrangian and complete integrability in classical mechanics and the quantization of non-lagrangian field theories are discussed.

INDICE

I -	INTRODUÇÃO.....	1
II -	CÁLCULO VARIACIONAL EXTERIOR	
	A - Idéias básicas.....	4
	B - Cálculo variacional exterior.....	8
	C - A fórmula de homotopia.....	22
	D - Exemplos.....	28
III -	MECÂNICA CLÁSSICA E FATORES INTEGRANTES	
	A - Mecânica clássica.....	39
	B - Não-unicidade da lagrangeana e integrabilidade.....	46
IV -	QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE CAMPO NÃO-LAGRANGEANAS.....	53
V -	COMENTÁRIOS FINAIS.....	62
	REFERÊNCIAS.....	64

I - INTRODUÇÃO

Os assuntos a serem tratados nesta tese estão , todos eles, de alguma forma relacionados com o que é conhecido por "problema variacional inverso " . Vamos então expô-lo logo de início : sejam dadas certas equações de movimento que descrevem algum sistema físico . Não importa , por enquanto , se as equações são a derivadas ordinárias ou a derivadas parciais. Ocorre frequentemente existir uma lagrangeana que tenha as dadas equações como equações de Euler -Lagrange a ela associadas. Isto, no entanto, não é uma propriedade geral de sistemas de equações diferenciais. Nem , tampouco , existem restrições físicas gerais que exijam que equações de movimento devam sempre ser deriváveis de um princípio variacional. Veja-se o caso da equação de Navier-Stokes, para a qual não existe uma lagrangeana, [F]. O problema variacional inverso consiste em determinar condições para que dadas equações de movimento sejam as equações de Euler-Lagrange de alguma lagrangeana . Caso estas condições sejam satisfeitas queremos também obter a lagrangeana.

A existência de uma lagrangeana para uma dada teoria é relevante sob vários aspectos . Por exemplo , lembremos que são às simetrias contínuas da lagrangeana , e não das equações de movimento , que podemos associar quantidades conservadas pelo teorema de Noether . Também na quantização canônica ou por

integrais de Feynman a lagrangeana é fundamental . Disto deriva uma certo aspecto "prático" do problema variacional inverso .

Esta tese apresenta uma abordagem do problema variacional inverso que tenta se ater ao aspecto prático mencionado : desejamos obter um método que permita decidir se dadas equações de movimento são ou não deriváveis de uma lagrangeana de uma forma simples, quase algorítmica. Assegurada a existência , queremos obter a lagrangeana explicitamente . O tema é, por si, formal e será necessário introduzir noções matemáticas apropriadas . O tratamento apresentado não é ,no entanto, totalmente rigoroso .Mostramos porém que o resultado central ,qual seja ,a condição que um sistema de equações deve satisfazer para que seja derivável de uma lagrangeana , é suficientemente poderoso para recuperar resultados clássicos sobre o assunto .

Uma questão correlata ao problema variacioanal inverso que aqui será discutida é quanto a unicidade da lagrangeana . Sabemos que lagrangeanas que diferem por derivadas totais levam às mesmas equações de movimento .Em alguns casos , porém, existem lagrangeanas que não diferem por derivadas totais e que mesmo assim levam às mesmas equações . Para cada uma das lagrangeanas e para cada uma das suas simetrias contínuas o teorema de Noether pode ser aplicado para gerar quantidades conservadas. A questão será examinada mais especificamente no contexto da mecânica

clássica onde o formalismo fornece um método para estabelecer a integrabilidade completa de alguns sistemas.

Outra questão a se discutir é quanto a possibilidade de se quantizar uma teoria não-lagrangeana. Trataremos a questão no contexto de teoria de campos, onde utilizamos o método de Källén - Yang - Feldman. O "defeito" da maioria das teorias não descritas por uma lagrangeana é a impossibilidade de uma definição coerente de regras de Feynman. Mostramos entretanto que existem algumas teorias em que tal definição é possível a despeito da não-lagrangeanidade da teoria.

A tese está organizada da seguinte forma: no capítulo II apresentamos o "cálculo variacional exterior", que será o instrumento a ser utilizado na discussão do problema variacional inverso. No capítulo III discute-se a relação entre não-unicidade da lagrangeana e integrabilidade completa na mecânica clássica. A discussão sobre quantização de teorias de campo não-lagrangeanas é apresentada no capítulo IV. No capítulo V fazemos alguns comentários finais. O material corresponde, a grosso modo, ao que se encontra nas referências [A - K a], [A - K b] e [Kr a].

II - CÁLCULO VARIACIONAL EXTERIOR

II.A - Idéias básicas

Nesta secção vamos expor de uma maneira informal as idéias básicas do que chamaremos de "cálculo variacional exterior". Trata-se aqui de mostrar ao leitor ,através de uma série de analogias, como a procura de uma solução do problema variacional inverso conduz à construção de um cálculo exterior. Para simplificar vamos começar situando-nos no contexto da mecânica clássica ,onde consideramos um sistema dado por uma lagrangeana $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$. As equações de Euler - Lagrange a ela associadas são :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{II.A.1}$$

Lembremos agora que o problema variacional inverso assume como dadas certas equações e busca saber se existe uma lagrangeana tal que as suas equações de Euler - Lagrange sejam as equações inicialmente dadas . Ou seja , o problema variacional inverso consiste em determinar se as dadas equações podem ser escritas na forma II.A.1 . Para abordar a questão vamos inicialmente fazer algumas analogias . Lembremos que a

lagrangeana é um funcional . Podemos introduzir um operador, chamado de " derivada de Euler - Lagrange ", atuando sobre funcionais e definido como

$$D_i^{EL} = \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad \text{II.A.2}$$

Assim ,o lado esquerdo das equações II.A.1 não é nada mais que a aplicação da derivada de Euler - Lagrange sobre o funcional $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$.Este poderia então ser pensado como um " gradiente de Euler - Lagrange " do funcional $\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$. Há aqui um abuso de linguagem ao chamarmos a expressão II.A.2 de derivada de Euler - Lagrange pois ela não tem as " boas " propriedades de uma derivada ,em particular $D_i^{EL} D_j^{EL} \neq D_j^{EL} D_i^{EL}$. Vamos ,no entanto , "esquecer " este fato por alguns instantes e continuar com as nossas analogias .

Lembremos que os " dados " do problema variacional inverso são as equações . Denotemos estas equações genericamente por

$$E^i(q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i) = 0 \quad \text{II.A.3}$$

Se pensamos no lado esquerdo desta expressão como sendo as componentes de um vetor (no caso,um vetor num espaço funcional) o problema variacional inverso consiste em determinar quando este

vetor é um gradiente de Euler - Lagrange de algum funcional

$\mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$. Ou seja, determinar quando

$$E^i = D^{EL}_i(\mathcal{L})$$

II.A.4

Este problema é portanto análogo ao seguinte: dado um vetor $\vec{v}$, determinar quando existe f , uma função, tal que $\vec{v} = \text{grad } f$. Sabemos que, neste caso, basta que $\text{rot } \vec{v} = 0$. Assim, ao procurarmos resolver o problema variacional inverso estamos procurando um análogo funcional da condição

Condições do tipo $\text{rot } \vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{grad } f$ são casos particulares do lema de Poincaré e do seu inverso no contexto do cálculo exterior. Exemplifiquemos esta afirmação rapidamente: seja um vetor $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ em $\mathbb{R}^3$. Queremos saber se $\vec{v}$ é gradiente de alguma função $f(x, y, z)$, ou seja, se

$$V = v_x dx + v_y dy + v_z dz = df$$

II.A.5

Se aplicarmos a diferencial exterior d em ambos os lados da expressão acima obteremos

$$dV = 0$$

II.A.6

que é uma condição necessária para que valha II.A.5 . Escrevendo explicitamente II.A.6 tem-se que

$$dV = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) dy \wedge dx + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \\ + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz$$

II.A.7

que é, por sua vez, equivalente a $\text{rot } \vec{V} = 0$.

De uma forma geral o lema de Poincaré nos diz que $d^2 = 0$ quando aplicado a qualquer p-forma . O lema de Poincaré inverso nos diz que se α for uma p-forma ,

$$d\alpha = 0 \implies \alpha = d\beta$$

II.A.8

para alguma $(p-1)$ - forma β . Devemos, no entanto, frisar que o lema de Poincaré inverso vale apenas localmente sobre a variedade em cujo fibrado cotangente estão definidas as formas diferenciais .

Tendo em vista as analogias descritas acima a construção de um cálculo exterior adaptado para funcionais e derivadas funcionais é um caminho natural pelo qual podemos esperar resolver o problema variacional inverso (pelo menos localmente). Na literatura matemática encontram-se menções a respeito de tal cálculo exterior, [A - D] , [N] . Não se encontra, no entanto,

uma formulação atendendo as exigências de praticidade expostas no capítulo anterior. O modo pelo qual introduziremos o cálculo variacional exterior na secção seguinte não é rigoroso de um ponto de vista matemático. Atemo-nos à analogia a formas diferenciais usuais visando um ganho em simplicidade que leve a um formalismo de fácil aplicação.

II.B - O cálculo variacional exterior

Na secção anterior esboçamos quais resultados do cálculo exterior "usual" desejamos adaptar para o cálculo variacional. O lema de Poincaré e o seu inverso terão um papel fundamental. Eles são, por sua vez, consequências da comutatividade das derivadas parciais. Tomemos, por exemplo, uma função $f(x,y)$. Sua diferencial exterior será

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad \text{II.B.1}$$

e portanto

$$\begin{aligned} d^2f &= \frac{\partial f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial y \partial x} \right) dx \wedge dy \end{aligned} \quad \text{II.B.2}$$

que se anula devido a comutatividade

$$\frac{\partial}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y \partial x}$$

II.B.3

Assim, para que possamos adaptar o lema de Poincaré para o cálculo variacional será necessário introduzir derivadas variacionais comutantes entre si. Isto descarta a "derivada de Euler - Lagrange", II.A.2, pois como já dissemos, $D_i^{\text{EL}} D_j^{\text{EL}} \neq D_j^{\text{EL}} D_i^{\text{EL}}$. A derivação a ser introduzida será a de Fréchet.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n , com coordenadas locais $\{x^\mu\}$. Sejam φ^i , $i=1, \dots, N$, um conjunto de campos definidos sobre M . Vamos denotar por $\varphi_{;\mu}^i$ a derivada de φ com respeito a x^μ . Introduzimos um funcional

$$J = \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi^i, \varphi_{;\mu}^i, \dots) d^n x$$

II.B.4

A derivada de Fréchet na direção i com incremento η^i , $D_{\varphi^i} J(\eta^i)$, é definida por (sem convenção de soma)

$$D_{\varphi^i} J(\eta^i) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \mathcal{L}(\varphi^1, \dots, \varphi^i + \varepsilon \eta^i, \varphi^N, \varphi_{;\mu}^1, \dots, \varphi_{;\mu}^i + \varepsilon \eta_{;\mu}^i, \dots) - \mathcal{L}(\varphi^1, \dots, \varphi^N, \varphi_{;\mu}^1, \dots, \varphi_{;\mu}^N, \dots) \right\}$$

II.B.5

Supõe-se que η^i é igual a zero na fronteira da região de integração Ω , $\partial\Omega$. A definição II.B.5 é o análogo funcional de uma derivada direcional. Podemos agora fazer uma expansão em série de Taylor e obter:

$$D_{\varphi^i} J(\eta^i) = \int_{\partial \Omega} d^2 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} \eta^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{;\mu}} \eta^i_{;\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{;\mu;\nu}} + \dots \right\}$$

II.B.6

Note-se que nesta definição tratamos φ^i e $\varphi^i_{;\mu}$ como se fossem independentes. Ademais, observe-se que $D_{\varphi^i} J(\eta^i)$ é uma expressão linear em η^i . Chamaremos de *derivada de Fréchet na direção $\hat{i}$* , ou também *derivada de Fréchet com relação a φ^i* , ao operador linear $D_{\varphi^i} J$, (operador este que atua sobre incrementos η^i). O interessante é que as derivadas de Fréchet com relação a φ^i e φ^j comutam, fato que pode ser verificado diretamente a partir de II.B.5. O leitor verá que uma integração por partes em II.B.6 e o fato de se supor η^i nulo na fronteira $\partial \Omega$ reduz a derivada de Fréchet à derivada de Euler - Lagrange. A não comutatividade das derivadas de Euler - Lagrange vem do fato de, ao calcularmos o comutador, primeiro tomarmos a derivada de Fréchet, fazermos uma integração por partes, descartarmos os termos de fronteira e depois tomarmos a outra derivada. Tal procedimento não é justificado. É necessário tomar em primeiro lugar ambas as derivadas de Fréchet e depois fazer as integrações por partes.

Se, por um lado, obtivemos derivadas funcionais que comutam, dando assim um passo para a construção de um cálculo exterior, não dissemos ainda qual é a relação destas derivadas com o cálculo variacional. Para que esta relação resulte clara

vamos definir a *diferencial de Fréchet*, $DJ(\eta)$. Esta será simplesmente

$$DJ(\eta) = \sum_i D_{\varphi^i} J(\eta^i) \quad \text{II.B.7}$$

onde introduzimos um "vetor de incrementos"

$\eta = (\eta^1, \dots, \eta^N)$. Passaremos agora a utilizar a convenção de soma sobre índices repetidos. A expressão II.B.7 pode ser reescrita como :

$$DJ(\eta) = \int_{\Omega} d^N x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} \eta^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \eta^i_{; \mu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu; \nu}} \eta^i_{; \mu; \nu} \right) \quad \text{II.B.8}$$

Uma integração por partes permite escrever

$$DJ(\eta) = \int_{\Omega} d^N x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \right) + \frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu; \nu}} \right) + \dots \right\} \eta^i +$$

+ termos de fronteira

II.B.9

Os termos de fronteira podem ser desprezados lembrando que supomos η^i igual a zero na fronteira. Tendo isto em mente obtemos

$$DJ(\eta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \right) + \frac{d^2}{dx^\mu dx^\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu; \nu}} \right) + \dots = 0 \quad \text{II.B.10}$$

Ou seja, $DJ(\eta) = 0$ são as próprias equações de Euler - Lagrange para a lagrangeana L .

Vamos agora definir os seguintes operadores lineares que atuam sobre vetores de incremento

$$\delta \varphi^i(\eta) = \eta^i$$

$$\delta \varphi^i_{;\mu}(\eta) = \eta^i_{;\mu}$$

$$\delta \varphi^i_{;\mu;\nu}(\eta) = \eta^i_{;\mu;\nu}$$

II.B.11

Podemos então reescrever II.B.7 como:

$$DJ(\eta) = (D_{\varphi^i} J \delta \varphi^i)(\eta)$$

II.B.12

Os operadores definidos em II.B.11 são exemplos de 1-formas exteriores variacionais. Entre elas definimos um produto exterior denotado por $\wedge$:

$$(\delta \varphi^i \wedge \delta \varphi^j)(\eta, \lambda) = \eta^i \lambda^j - \eta^j \lambda^i$$

II.B.13

$$(\delta \varphi^i \wedge \delta \varphi^j_{;\mu})(\eta, \lambda) = \eta^i \lambda^j_{;\mu} - \lambda^i \eta^j_{;\mu}$$

II.B.14

$$(\delta \varphi^i_{;\mu} \wedge \delta \varphi^j_{;\nu})(\eta, \lambda) = \eta^i_{;\mu} \lambda^j_{;\nu} - \lambda^i_{;\mu} \eta^j_{;\nu}$$

II.B.15

....

Das definições acima segue-se que

$$\delta \varphi^i \wedge \delta \varphi^j = -\delta \varphi^j \wedge \delta \varphi^i$$

II.B.16

$$\delta\varphi^i \wedge \delta\varphi^j_{; \mu} = - \delta\varphi^j_{; \mu} \wedge \delta\varphi^i$$

II.B.17

$$\delta\varphi^i_{; \mu} \wedge \delta\varphi^j_{; \nu} = - \delta\varphi^j_{; \nu} \wedge \delta\varphi^i_{; \mu}$$

II.B.18

As expressões acima são exemplos de 2 -formas exteriores variacionais. Em geral uma 1 - forma exterior variacional será um objeto do tipo $a_i \delta\varphi^i + b_i \delta\varphi^i_{; \mu} + c_i \delta\varphi^i_{; \mu; \nu} + \dots$. Analogamente se definem p - formas exteriores variacionais. Por exemplo, $\delta\varphi^i \wedge \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^k_{; \mu}$ é uma 3 - forma exterior variacional, $\delta\varphi^i \wedge \delta\varphi^j_{; \mu} \wedge \delta\varphi^k \wedge \delta\varphi^l_{; \nu; \mu}$ é uma 4 - forma exterior variacional, etc. É natural introduzir agora uma diferenciação exterior, denotada por δ , e que leva p - formas exteriores variacionais em (p+1) - formas exteriores variacionais:

$$\delta J = (D_{\varphi^i} J) \delta\varphi^i = \int_{\Omega} \frac{\partial L}{\partial \varphi^i} \delta\varphi^i + \frac{\partial L}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \delta\varphi^i_{; \mu} + \dots$$

II.B.19

$$\delta(w_i \delta\varphi^i) = (D_{\varphi^i} w^i \delta\varphi^i) \wedge \delta\varphi^i = \int_{\Omega} \frac{\partial w^i}{\partial \varphi^j} \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^i + \frac{\partial w^i}{\partial \varphi^j_{; \mu}} \delta\varphi^j_{; \mu} \wedge \delta\varphi^i$$

II.B.20

etc

Deve-se ficar atento ao fato de que $\delta\varphi^i$ e $\delta\varphi^i_{; \mu}$ não são independentes: podemos sempre fazer uma integração por partes e

desprezar termos de fronteira. Assim uma expressão do tipo $\delta\varphi^i_{;\mu} \wedge \delta\varphi^j$ é equivalente a $\delta\varphi^i_{;\mu} \wedge \delta\varphi^j_{;\mu}$. De fato vamos sempre dizer que são iguais.

Um importante resultado do cálculo exterior "usual" que se generaliza para o cálculo variacional exterior é a nilpotência de δ , $\delta^2 = 0$. A demonstração do resultado segue diretamente das definições anteriores. Exemplifiquemo-la aqui para uma 1-forma exterior variacional $a_i \delta\varphi^i$, onde a_i é suposto depender de φ^i e $\varphi^i_{;\mu}$:

$$\delta(a_i \delta\varphi^i) = \frac{\partial a_i}{\partial \varphi^j} \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^i + \frac{\partial a_i}{\partial \varphi^j_{;\mu}} \delta\varphi^j_{;\mu} \wedge \delta\varphi^i$$

$$\delta^2(a_i \delta\varphi^i) = \frac{\partial a_i}{\partial \varphi^k \partial \varphi^j} \delta\varphi^k \wedge \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^i +$$

$$+ \frac{\partial a_i}{\partial \varphi^k_{;\mu} \partial \varphi^j} \delta\varphi^k_{;\mu} \wedge \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^i + \frac{\partial a_i}{\partial \varphi^k \partial \varphi^j_{;\mu}} \delta\varphi^k \wedge \delta\varphi^j_{;\mu} \wedge \delta\varphi^i +$$

$$+ \frac{\partial a_i}{\partial \varphi^k_{;\nu} \partial \varphi^j_{;\mu}} \delta\varphi^k_{;\nu} \wedge \delta\varphi^j_{;\mu} \wedge \delta\varphi^i = 0$$

Ou ainda de modo mais sintético:

$$\delta(a_i \delta\varphi^i) = (D_{\varphi^j} a^i) \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^i$$

$$\delta^2(a_i \delta\varphi^i) = (D_{\varphi^k} D_{\varphi^j} a^i) \delta\varphi^k \wedge \delta\varphi^j \wedge \delta\varphi^i = 0$$

Nesta última expressão podemos notar o uso da comutatividade das derivadas de Fréchet explicitamente.

O desenvolvimento matemático acima corresponde à construção básica de um cálculo exterior. Vamos fazer um rápido resumo de como fica reescrito o cálculo variacional neste formalismo. A lagrangeana (ou a ação, como se queira) é vista como uma 0 - forma exterior variacional. A sua equação de Euler - Lagrange será simplesmente a sua diferencial exterior igualada a zero. De fato :

$$J = \int_{\Omega} d^n x \mathcal{L}$$

$$\delta J = \int_{\Omega} d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} \delta \varphi^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \delta \varphi^i_{; \mu} + \dots \right) =$$

$$= \int_{\Omega} d^n x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \right) + \dots \right) \delta \varphi^i$$

$$\delta J = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i} - \frac{d}{dx^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^i_{; \mu}} \right) = 0$$

II.B.21

Não será demasiado repetir que não podemos considerar

$\delta \varphi^i$ e $\delta \varphi^i_{; \mu}$ independentes. Caso o fizéssemos não

obteríamos sequer as equações de Euler - Lagrange. Convém aqui

introduzir a seguinte nomenclatura : uma p - forma exterior variacional ω , será chamada de *fechada* se $\delta\omega = 0$ e de *exata* se $\omega = \delta u$, para alguma $(p - 1)$ - forma exterior variacional u .

Introduziremos agora uma simplificação na notação : omitiremos os sinais de integração. Escreveremos, por exemplo, δL ao invés de δJ .

Até aqui a introdução do cálculo variacional exterior levou apenas a uma reformulação do cálculo variacional clássico. Para atacar o problema inverso devemos inicialmente notar que às equações de movimento , os " dados " do problema inverso , deve corresponder uma 1 - forma exterior variacional . Isto porque, quando uma lagrangeana existe obtemos as equações de movimento como a diferencial exterior desta lagrangeana. Como a lagrangeana é uma 0 - forma exterior variacional , as equações são uma 1 - forma exterior variacional. Formamos então , a partir das equações de movimento , a seguinte 1 - forma exterior variacional :

$$E = E_i \delta \varphi^i \quad \text{II.B.22}$$

Desejamos saber se existe um funcional L tal que

$$E = \delta L \quad \text{II.B.23}$$

Observamos inicialmente que nos contentaremos com uma resposta válida localmente. Certamente dada a nilpotência de δ ($\delta^2=0$), para que II.B.23 seja válida é necessário que

$$\delta E = 0$$

II.B.24

Tendo em vista as analogias com o cálculo exterior "usual" é de se esperar que II.B.24 seja suficiente para a existência local de uma lagrangeana. A demonstração deste fato será deixada para a secção II.C, onde mostraremos um resultado que também leva a uma fórmula para obter a lagrangeana. No entanto, vejamos se a condição II.B.24 leva a resultados esperados. Tomemos o exemplo da equação de Korteweg - de Vries:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

II.B.25

Usamos aqui a notação $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$. É conhecido que a equação acima não admite uma formulação lagrangeana em termos do campo u . Se porém introduzimos um campo φ através de $u = \varphi_x$ é possível obter uma formulação lagrangeana. Dentro do formalismo desenvolvido tais resultados aparecem facilmente. Lembremos que às equações correspondem 1 - formas exteriores variacionais. No caso esta 1 - forma será:

$$E = (u_t - 6u u_x + u_{xxx}) \delta u \quad \text{II.B.26}$$

Calculemos a sua diferencial exterior

$$\delta E = \delta u_t \wedge \delta u - 6u \delta u_x \wedge \delta u + \delta u_{xxx} \wedge \delta u \quad \text{II.B.27}$$

Observe que nenhum dos termos é nulo e nem podemos fazer integrações por partes que levem a cancelamentos entre eles. Assim $\delta E \neq 0$, neste caso. Se introduzimos porém $u = \varphi_x$ a equação de Korteweg - de Vries fica

$$\varphi_{tx} - 6\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{xxxx} = 0 \quad \text{II.B.28}$$

Devemos então considerar a seguinte 1-forma exterior variacional

$$E = (\varphi_{tx} - 6\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{xxxx}) \delta \varphi \quad \text{II.B.29}$$

e calcular a sua diferencial exterior. Obtém-se

$$\begin{aligned} \delta E = & \delta \varphi_{tx} \wedge \delta \varphi - 6\varphi_x \varphi_{xx} \wedge \delta \varphi - 6\varphi_{xx} \delta \varphi_x \wedge \delta \varphi + \\ & + \delta \varphi_{xxxx} \wedge \delta \varphi \end{aligned} \quad \text{II.B.30}$$

Analisemos os vários termos desta expressão. Se fizermos uma integração por partes no segundo termo obteremos

$$6\varphi_x \delta \varphi_{xx} \wedge \delta \varphi = -6\varphi_{xx} \delta \varphi_x \wedge \delta \varphi - 6\varphi_x \delta \varphi_x \wedge \delta \varphi_x$$

que cancela o terceiro termo. Da mesma forma, para o quarto termo:

$$\delta\varphi_{xxxx} \wedge \delta\varphi = -\delta\varphi_{xxx} \wedge \delta\varphi_x = \delta\varphi_{xx} \wedge \delta\varphi_{xx} = 0$$

Resta - nos examinar o primeiro termo:

$$\delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi = -\delta\varphi_t \wedge \delta\varphi_x = \delta\varphi \wedge \delta\varphi_{tx} = -\delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi$$

ou seja,

$$\delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi = -\delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi \Rightarrow \delta\varphi_{tx} \wedge \delta\varphi = 0$$

Mostramos assim que a diferencial exterior de II.B.29 é zero e deve existir portanto uma lagrangeana para esta equação. Não há contradição alguma entre afirmar-se que E dada por II.B.26 não é fechada enquanto que E dada por II.B.29 é fechada. No primeiro caso o campo "fundamental" em relação ao qual todas as diferenciações são feitas é u . No segundo caso é φ . Assim uma lagrangeana deve existir em termos deste campo φ , e não em termos de u . É importante também notar que a 1ª forma exterior variacional II.B.29 não é simplesmente II.B.26 reescrita em termos de φ .

O exemplo acima ilustra um pouco o uso do cálculo variacional exterior e a atenção que se deve dispensar às integrações por partes. Mostra também a importância que um ansatz do tipo $u = \varphi_x$ tem na solução do problema variacional inverso.

Vimos assim que a condição II.B.24 recupera um resultado conhecido. Vamos agora mostrar que a partir de II.B.24 podemos obter um resultado clássico a respeito do problema variacional inverso : o teorema de Vainberg [V] . Começemos por reescrever II.B.24 :

$$\delta E = 0 \Rightarrow \delta(E, \delta\varphi^i) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta E, \wedge \delta\varphi^i = 0 \quad \text{II.B.31}$$

Se η e ν são dois vetores de incrementos podemos escrever

$$\begin{aligned} (\delta E, \wedge \delta\varphi^i)(\eta, \nu) &= \delta E,(\eta) \nu^i - \delta E,(\nu) \eta^i = \\ &= D_{\eta^i} E,(\eta^i) \nu^i - D_{\nu^i} E,(\nu^i) \eta^i \end{aligned}$$

Introduzindo a notação $D_{\eta^i} E,(\eta^i) = (\partial_{(\eta)} E)^i$ e um produto escalar $\langle \alpha, \beta \rangle = \alpha_i \beta^i$, a expressão acima fica

$$\langle \partial_{(\eta)} E, \nu \rangle - \langle \partial_{(\nu)} E, \eta \rangle$$

ou seja, II.B.24 é equivalente a

$$\langle \partial_{(\eta)} E, \nu \rangle = \langle \partial_{(\nu)} E, \eta \rangle \quad \text{II.B.32}$$

Esta é exatamente a condição obtida por Vainberg para que o operador E seja lagrangeano , (veja a pg 56 da referência [V]). Assim sendo, mostramos que a condição

$\delta E = 0$ é de fato suficiente para a existência de uma lagrangeana para as equações $E_i = 0$. Na secção seguinte uma demonstração que não apela para resultados outros que os aqui apresentados será dada, de modo que o formalismo do cálculo variacional exterior resulta completo .

Antes de encerrar esta secção cabem alguns comentários. Todo o formalismo apresentado dispensa qualquer hipótese sobre a ordem das derivadas que aparecem nas equações . A condição II.B.24 , além de se apresentar escrita de uma forma compacta , é de fácil verificação na maioria dos problemas . Esperamos convencer o leitor deste fato através dos exemplos que serão apresentados mais adiante . Sugerimos também ao leitor a consulta da referência [A - K a] onde se encontra uma outra apresentação do cálculo variacional exterior.

Cabe também uma observação cujas consequências se mostrarão bastante importantes . A suficiência da condição $\delta E = 0$ está assegurada pela demonstração do teorema de Vainberg que fizemos a partir dela . Sobre a sua necessidade há, no entanto, alguns poréns : uma vez dada a 1 - forma exterior variacional $E_i \delta \varphi_i$, a condição $\delta E = 0$ é de fato necessária . Mas poderíamos ter muito bem introduzido a forma

$E^* = h^1_j E_i \delta \varphi^j$, onde h^1_j são componentes de uma matriz. Se esta não for degenerada, $E^* = 0$ implica em $E_i = 0$. Ou seja, E^* é uma 1 - forma exterior variacional tão "boa" quanto E e portanto a condição $\delta E^* = 0$ implica também na existência de uma lagrangeana. Ou seja, há uma ambiguidade na definição da 1 - forma exterior variacional para a qual a condição II.B.24 deve valer. Não podemos portanto dizer que a solução do problema variacional inverso esteja completa, fato que é verdadeiro para todos os tratamentos conhecidos. O que veremos mais adiante é que em muitos casos podemos nos convencer da impossibilidade de encontrar uma matriz h^1_j tal que

$$\delta(h^1_j E_i \delta \varphi^j) = 0.$$

II.C - A fórmula de homotopia

Esta secção tem um carácter um pouco mais técnico. Visamos aqui demonstrar a chamada "fórmula de homotopia". Esta será uma forma de justificar o fato de que $\delta E = 0$ implica em $E = \delta \mathcal{L}$ localmente. Ao mesmo tempo fornecerá uma expressão para a lagrangeana a partir das equações de movimento. A demonstração segue as linhas usuais da demonstração do lema de Poincaré inverso como pode ser encontrada em [L - R] ou [W]. Na realidade vamos ater - nos a um caso particular, que será o de nosso interesse.

Seja dada uma p - forma exterior variacional :

$$W = W_{i_1 \dots i_p}(a) da^{i_1} \wedge \dots \wedge da^{i_p}$$

II.C.1

Nesta expressão a^i pode tanto ser um campo φ como qualquer das suas derivadas. Definimos o operador T , agindo sobre W como sendo a $(p-1)$ - forma exterior variacional

$$TW = \sum_{j=1}^p (-1)^{j-1} \int_0^1 d\lambda \lambda^{p-j} W_{i_1 \dots i_p}(\lambda a) a^{i_1} \delta a^{i_2} \wedge \dots$$

$$\delta a^{i_{j-1}} \wedge \delta a^{i_{j+2}} \dots \delta a^{i_p}$$

II.C.2

O operador recebe muitas vezes o nome de "operador de homotopia", outras vezes o de "operador de transgressão" (ou simplesmente "transgressão"). A seguinte identidade local é válida e é chamada de fórmula de homotopia :

$$W = \delta TW + T\delta W$$

II.C.3

A demonstração que daremos será para o caso em que W é a 1 - forma exterior variacional II.B.22, $W=E = E_i \delta \varphi^i$, e será feita por uma simples verificação. Assim, dado

$$E = E_i \delta \varphi^i \quad \text{calculemos } \delta TE \text{ e } T\delta E :$$

$$TE = \int_0^1 d\lambda E_i(\lambda\varphi) \varphi^i$$

$$\begin{aligned} \delta TE &= \int_0^1 d\lambda E_i(\lambda\varphi) \delta\varphi^i + \int_0^1 d\lambda \varphi^i \left(\frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial \varphi^j} \delta\varphi^j + \frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} \delta(\partial_\mu \varphi_j) \right) = \\ &= \int_0^1 d\lambda E_i(\lambda\varphi) \delta\varphi^i + \int_0^1 d\lambda \lambda \varphi^i \left(\frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial (\lambda\varphi^j)} \delta\varphi^j + \frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial (\partial_\mu \lambda\varphi_j)} \delta(\partial_\mu \varphi_j) \right) = \\ &= \int_0^1 d\lambda E_i(\lambda\varphi) \delta\varphi^i + \int_0^1 d\lambda \lambda \varphi^i \left(\frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial \varphi^j} \delta\varphi^j + \frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} \delta(\partial_\mu \varphi_j) \right) \quad \text{II.C.4} \end{aligned}$$

$$\delta E = \frac{\partial E_i}{\partial \varphi_j} \delta\varphi_j \wedge \delta\varphi^i + \frac{\partial E_i}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} \delta(\partial_\mu \varphi_j) \wedge \delta\varphi^i$$

$$\begin{aligned} \delta TE &= \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{\partial E_i}{\partial \varphi_j} (\lambda\varphi) \varphi_j \delta\varphi^i - \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{\partial E_i}{\partial \varphi_j} (\lambda\varphi) \varphi_i \delta\varphi_j + \\ &+ \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{\partial E_i}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} (\lambda\varphi) \partial_\mu \varphi_j \delta\varphi^i - \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{\partial E_i}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} (\lambda\varphi) \varphi^i \delta(\partial_\mu \varphi_j) \quad \text{II.C.5} \end{aligned}$$

Calculando agora II.C.4 + II.C.5 obtemos

$$\begin{aligned} \delta TE + T\delta E &= \int_0^1 d\lambda E_i(\lambda\varphi) \delta\varphi^i + \\ &+ \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{\partial E_i}{\partial \varphi_j} (\lambda\varphi) \varphi^i \delta\varphi^j + \int_0^1 d\lambda \lambda \frac{\partial E_i}{\partial (\partial_\mu \varphi_j)} (\lambda\varphi) \varphi^i \delta(\partial_\mu \varphi_j) \end{aligned}$$

II.C.6

Note - se agora que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} (E_i(\lambda\varphi)) &= \frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial(\lambda\varphi^j)} \varphi^j + \frac{\partial E_i(\lambda\varphi)}{\partial(\lambda_{,\mu}(\lambda\varphi^j))} \partial_{\mu} \varphi^j = \\ &= \frac{\partial E_i}{\partial \varphi^j} (\lambda\varphi) \varphi^j + \frac{\partial E_i}{\partial(\lambda_{,\mu} \varphi^j)} (\lambda\varphi) \partial_{\mu} \varphi^j \end{aligned} \quad \text{II.C.7}$$

Assim podemos reescrever II.C.6 como

$$STE + T\delta E = \int_0^1 d\lambda \frac{d}{d\lambda} (\lambda E_i(\lambda\varphi)) \quad \text{II.C.8}$$

Segue - se que

$$STE + T\delta E = \lambda E_i(\lambda\varphi) \Big|_0^1 = E_i(\varphi) \quad \text{II.C.9}$$

Fica portanto demonstrado que

$$E = STE + T\delta E \quad \text{II.C.10}$$

O leitor terá notado que assumimos uma dependência de E_i em apenas as primeiras derivadas $\partial_{\mu} \varphi^j$. Isto deve - se apenas a uma conveniência quanto ao tamanho das expressões

envolvidas na demonstração . Pode - se assumir perfeitamente uma dependência em qualquer ordem de derivadas . Além disto , vale notar que a demonstração pode ser feita para qualquer p - forma exterior variacional , não apenas para a forma E . Ou seja , a identidade II.C.3 é também válida , sendo a demonstração análoga a que demos acima . Voltemos também a frisar que este resultado é local (no caso , no espaço dos φ) .

A expressão II.C.10 tem embutida a seguinte consequência : se vale $\delta E = 0$ então podemos escrever $E = \int \mathcal{L} dx$. Ou seja $\mathcal{L}$ é uma lagrangeana para as equações $E_i = 0$. Podemos portanto encarar II.C.10 como sendo uma justificativa da condição de lagrangeanidade II.B.24 . Se esta for satisfeita a lagrangeana procurada será dada por

$$\mathcal{L} = \int_0^1 dx E_i(x\varphi) \varphi^i \quad \text{II.C.11}$$

Esta expressão é a procurada fórmula que permite obter a lagrangeana a partir das equações de movimento .

Como uma primeira ilustração destes resultados voltemos agora à equação de Korteweg - de Vries , II.B.25 . Já mostramos que se introduzimos a 1 - forma exterior variacional II.B.26 esta resulta em $\delta E \neq 0$, mas se fazemos $\mu = \varphi_x$ a 1 - forma exterior variacional correspondente , II.B.26 , resulta fechada.

Ou seja, se

$$E = (\varphi_{tx} - 6\varphi_x \varphi_{xx} + \varphi_{xxxx}) \delta \varphi$$

então $\delta E = 0$. A lagrangeana correspondente será

$$\mathcal{L} = \int_0^1 d\lambda [\lambda(\varphi_{tx} + \varphi_{xxxx}) - \lambda^2 6\varphi_x \varphi_{xx}] \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} \varphi \varphi_{tx} + \frac{1}{2} \varphi \varphi_{xxxx} - \frac{1}{3} 6\varphi_x \varphi_{xx} \varphi =$$

$$= -\frac{1}{2} [\varphi_t \varphi_x - (\varphi_{xx})^2 + 4\varphi_x \varphi_{xx} \varphi]$$

II.C.12

Pode - se verificar facilmente que a equação de Euler - Lagrange correspondente é II.B.28 . Por outro lado , tomando a 1 - forma exterior variacional correspondente à equação de Korteweg - de Vries original , II.B.26 e calculando a sua transgressão obteremos :

$$\mathcal{L}^* = \frac{1}{2} u_t u - 2u^2 u_x + \frac{1}{2} u_{xxx} u$$

cuja equação de Euler - Lagrange é identicamente nula e portanto

$\mathcal{L}^*$ não é uma lagrangeana para a equação de Korteweg - de Vries , como esperávamos . A lagrangeana $\mathcal{L}$ não pode ser reescrita em termos de u : o princípio variacional resultante deve ser completamente formulado em termos do campo φ . É importante ressaltar que muitas vezes a introdução de campos "auxiliares" pode envolver suposições físicas adicionais .

Com a demonstração da fórmula de homotopia II.C.3 terminamos a exposição do formalismo do cálculo variacional exterior . Estamos agora aptos a discutir alguns exemplos .

II.D - Exemplos

Nesta secção pretendemos expor alguns exemplos de aplicações do cálculo variacional exterior . Visamos assim mostrar um pouco do seu " funcionamento " . Convém notar que a maioria dos resultados a serem apresentados encontram - se dispersos na literatura científica e foram obtidos por técnicas das mais variadas , envolvendo procedimentos muito mais extensos que os nossos .

II.D.a - A equação de Navier - Stokes

A equação de Navier - Stokes :

$$\rho v^j \partial_j v^i + \partial^i p - \mu \partial^j \partial_j v^i = 0$$

II.D.1

juntamente com

$$\partial_j v^j = 0$$

II.D.2

descreve o comportamento de um fluido de densidade ρ , incompressível, e de coeficiente de viscosidade μ . Os campos físicos de interesse são as componentes da velocidade v^i e a pressão p . Introduzimos agora a 1ª forma exterior variacional

$$E = -(\rho v^j \partial_j v^i + \partial^i p - \mu \partial^j \partial_j v^i) \delta v_i + (\partial_j v^j) \delta p$$

II.D.3

calculamos então δE :

$$\begin{aligned} \delta E = & -\rho \partial_j v^i \delta v^j \wedge \delta v_i - \rho v^j \delta(\partial_j v^i) \wedge \delta v_i - \\ & - \delta(\partial^i p) \wedge \delta v_i - \mu \delta(\partial^j \partial_j v^i) \wedge \delta v_i + \\ & + \delta(\partial_j v^j) \wedge \delta p \end{aligned}$$

Observamos agora que

$$\delta(\partial^j \partial_j v^i) \wedge \delta v_L = -\delta(\partial^j v_i) \wedge \delta(\partial_j v_i) = 0$$

$$\delta(\partial_j v^j) \wedge \delta p - \delta(\partial^i p) \wedge \delta v_i = -\delta v^j \wedge \delta(\partial_j p) - \delta(\partial^i p) \wedge \delta v_i = 0$$

Resta portanto

$$\delta E = -\int \partial_j v^i \delta v^j \wedge \delta v_L - \int v^j \delta(\partial_j v^i) \wedge \delta v_i =$$

$$= \delta(\int v^j \partial_j v^i) \wedge \delta v_L \neq 0$$

II.D.4

Como $\delta E \neq 0$ segue - se que a equação de Navier - Stokes não é derivável de uma lagrangeana . Não é também difícil verificar que se tivéssemos introduzido uma outra forma $E^* = H^{ij} E_i \delta v_j$ nada obteríamos de novo . Isto vem , em última análise , de que para " consertar " a não - lagrangeanidade do primeiro termo da equação acabaríamos tornando os outros não - lagrangeanos .

A demonstração da inexistência de uma lagrangeana para a equação de Navier - Stokes foi exposta pela primeira vez na referência [M]. Veja - se também [F] , onde uma demonstração usando o teorema de Vainberg é dada . Esta é consideravelmente complicada . Neste exemplo podemos ver a maior concisão obtida pelo uso do cálculo variacional exterior .

No exemplo acima podemos observar que o termo que

" obstrui " a existência de uma lagrangeana é o termo $\int v^\dagger \partial_j v^i$. É claro que se ele for suposto igual a zero desde o princípio a equação que resta

$$\partial^i p - \mu \partial^j \partial_j v^i = 0$$

II.D.5

$$\partial_j v^\dagger = 0$$

será derivável de uma lagrangeana. Esta será obtida pela fórmula de transgressão II.C.11 e é conhecida por lagrangeana de Helmholtz - Korteweg :

$$\mathcal{L} = p \partial_i v^i - (\mu/2) (\partial_j v_i)(\partial^j v^i)$$

II.D.6

II.D.b -Eletrodinâmica de Born - Infeld

Numa teoria não-polinomial , como é o caso da eletrodinâmica de Born - Infeld ,[B - I], o uso da fórmula da transgressão constitui uma forma prática de obter a lagrangeana a partir das equações de movimento. Consideremos as seguintes equações:

$$E_\nu = \partial^\mu \left(\frac{F_{\mu\nu}}{\left(1 - \frac{F^2}{2\kappa}\right)^{1/2}} \right)$$

II.D.7

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $F^2 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

k é uma constante .Introduzindo a 1 - forma exterior variacional :

$$E = E_\nu \delta A^\nu$$

II.D.8

podemos verificar que $\delta E = 0$. A transgressão de II.D.8 leva a:

$$\mathcal{L} = A^\nu \partial^\mu \left\{ \int_0^1 d\lambda \lambda F_{\mu\nu} \left(1 - \frac{\lambda^2 F^2}{2k} \right)^{-1/2} \right\}$$

que resulta finalmente em

$$\mathcal{L} = k \left\{ 1 - \frac{F^2}{2k} \right\}^{1/2}$$

II.D.9

II.D.c - As equações de Einstein

As equações de Einstein fornecem - nos um exemplo ,por vários motivos ,interessante .As equações de Einstein no vácuo são :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) = 0$$

II.D.10

Se introduzimos simplesmente

$$E = \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right] \delta g^{\mu\nu}$$

II.D.11

verifica-se que $\delta E \neq 0$. Se porém introduzimos

$$E = (-g)^{1/2} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right] \delta g^{\mu\nu} \quad \text{II.D.12}$$

obtem-se que $\delta E = 0$. O fator $(-g)^{1/2}$, onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$, faz o papel de um fator integrante. Outro fato que torna este exemplo interessante é que, usando alguns resultados simples que podem ser encontrados em [L - L], podemos demonstrar a existência de uma lagrangeana e obtê-la sem recorrer à fórmula da transgressão explicitamente. Observe-se que

$$\delta(-g)^{1/2} = -\frac{1}{2} (-g)^{1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \quad \text{II.D.13}$$

$$\delta R = \delta g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad \text{II.D.14}$$

Usando-se estas relações é fácil reescrever II.D.12 como:

$$E = \delta \left[(-g)^{1/2} (R + \Lambda) \right] - (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \quad \text{II.D.15}$$

O último termo é uma divergência, [L - L] pg 361, e portanto escrevemos como a diferencial exterior de uma 0-forma

exterior variacional (segue - se portanto que $\delta E = 0$). Esta
 $\emptyset$ - forma exterior variacional é a lagrangeana procurada :

$$\mathcal{L} = (-g)^{1/2} (R + \Lambda)$$

II.D.16

II.D.d - As equações de Yang - Mills

As equações de Yang - Mills para um grupo cuja álgebra
 de Lie tem constantes de estrutura f_{ab}^c são :

$$\begin{aligned} & \partial_\mu \partial_\nu A_\rho^i - \partial_\nu \partial_\mu A_\rho^i + A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^b f_{ab}^i - \\ & - A_\nu^a \partial_\mu A_\rho^b f_{ab}^i + A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c f_{bc}^d f_{ad}^i - \\ & - \partial_\mu A_\nu^a A_\rho^b f_{ab}^i - A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^b f_{ab}^i = 0 \end{aligned} \quad \text{II.D.17}$$

Não supomos na equação acima qualquer simetria sobre f_{ab}^c (a não
 ser ,é claro , que $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$). Consideramos agora a 1 -
 forma exterior variacional $E = E_\nu^i \delta A_\nu^i$, onde E_ν^i é
 a expressão do lado esquerdo de II.D.17 . Vamos calcular δE .
 Começemos notando que os termos que não envolvem as constantes de
 estrutura não podem se cancelar com os outros , bem como os que
 envolvem as constantes de estrutura ao quadrado não se cancelam
 com aqueles que as envolvem linearmente . O cálculo de
 δE separa - se assim em tres etapas . Inicialmente para os

termos que não envolvem as constantes de estrutura temos :

$$\begin{aligned} & \delta(\partial_\mu \partial_\nu A_\rho^i - \partial_\nu \partial_\mu A_\rho^i) \wedge \delta A_\nu^i = \\ & = -\delta(\partial_\mu A_\nu^i) \wedge \delta(\partial_\mu A_\nu^i) + \delta(\partial_\mu A_\nu^i) \wedge \delta(\partial_\nu A_\mu^i) = \\ & = 0 \end{aligned} \quad \text{II.D.18}$$

Passemos agora aos termos lineares nas constantes de estrutura :

$$\begin{aligned} & \delta(A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^b f_{ab}^i) \wedge \delta A_\nu^i - \delta(A_\rho^a \partial_\mu A_\nu^b f_{ab}^i) \wedge \delta A_\nu^i - \\ & - \delta(\partial_\mu A_\rho^a A_\nu^b f_{ab}^i) \wedge \delta A_\nu^i - \delta(A_\mu^a \partial_\nu A_\rho^b f_{ab}^i) = \\ & = f_{ab}^i A_\mu^a \delta(\partial_\nu A_\rho^b) \wedge \delta A_\nu^i + f_{ab}^i \partial_\nu A_\rho^b \delta A_\mu^a \wedge \delta A_\nu^i - \\ & - f_{ab}^i A_\mu^a \delta(\partial_\rho A_\nu^b) \wedge \delta A_\nu^i - f_{ab}^i \partial_\mu A_\nu^b \delta A_\rho^a \wedge \delta A_\nu^i - \\ & - f_{ab}^i A_\nu^b \delta(\partial_\mu A_\rho^a) \wedge \delta A_\nu^i - f_{ab}^i \partial_\mu \partial_\rho A^a \delta A_\nu^b \wedge \delta A_\nu^i - \\ & - f_{ab}^i A_\rho^a \delta(\partial_\mu A_\nu^b) \wedge \delta A_\nu^i - f_{ab}^i \partial_\mu A_\nu^b \delta A_\rho^a \wedge \delta A_\nu^i = \\ & = -f_{ab}^i \partial_\nu A_\rho^a \delta(A_\mu^b) \wedge \delta A_\nu^i - f_{ab}^i A_\mu^a \delta A_\rho^b \wedge \delta(\partial_\nu A_\rho^a) \\ & + f_{ab}^i \partial_\nu A_\rho^b \delta A_\mu^a \wedge \delta A_\nu^i + f_{ab}^i \partial_\mu A_\rho^a \delta A_\nu^b \wedge \delta A_\nu^i \\ & + f_{ab}^i A_\rho^a \delta A_\nu^b \wedge \delta(\partial_\mu A_\nu^i) - f_{ab}^i \partial_\mu A_\nu^b \delta A_\rho^a \wedge \delta A_\nu^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_{ia}{}^b A_r{}^a \delta A_r{}^b \wedge \delta(\partial_\nu A_\nu{}^i) - f_{ab}{}^i \partial_\mu A_r{}^a \delta A_\nu{}^b \wedge \delta A^i{}_\nu \\
& + f_{ai}{}^b A_r{}^a \delta A_\nu{}^b \wedge \delta(\partial_\mu A_\nu{}^i) - f_{ab}{}^i \partial_\mu A_\nu{}^b \delta A_r{}^a \wedge \delta A^i{}_\nu
\end{aligned}$$

Na expressão acima os termos sublinhados cancelam - se restando então :

$$\begin{aligned}
& (f_{ia}{}^b - f_{ab}{}^i) A_r{}^a \delta(A_r{}^b) \wedge \delta(\partial_\nu A_\nu{}^i) + \\
& + (f_{ab}{}^i - f_{ai}{}^b) A_r{}^a \delta A_r{}^b \wedge \delta(\partial_\mu A_\nu{}^i) + \\
& + 2 f_{ab}{}^i \partial_\nu A_r{}^b \delta A_r{}^a \wedge \delta A^i{}_\nu - 2 f_{ab}{}^i \partial_\mu A_\nu{}^b \delta A_r{}^a \wedge \delta A^i{}_\nu = \\
& = (f_{ia}{}^b - f_{ab}{}^i) A_r{}^a \delta A_r{}^b \wedge \delta(\partial_\nu A_\nu{}^i) + \\
& + (f_{ab}{}^i + f_{ai}{}^b) A_r{}^a \delta A_r{}^b \wedge \delta(\partial_\mu A_\nu{}^i) + \\
& + 2(f_{ab}{}^i + f_{ib}{}^a) \partial_\nu A_r{}^b \delta A_r{}^a \wedge \delta A^i{}_\nu
\end{aligned}$$

A expressão acima não é sempre nula . Para que se anule precisamos de $f_{ab}{}^i = -f_{ai}{}^b$. Examinemos , por fim , os termos quadráticos nas constantes de estrutura :

$$f_{bc}{}^d f_{ad}{}^i \delta(A_r{}^a A_r{}^b A_\nu{}^c) \wedge \delta A^i{}_\nu =$$

$$= f_{bc}^d f_{ad}^i (A_r^b A_v^c \delta A_r^a \wedge \delta A_v^i + \\ + A_r^a A_v^c \delta A_r^b \wedge \delta A_v^i + A_r^a A_r^b \delta A_v^c \wedge \delta A_v^i)$$

Para que esta expressão se anule é necessário que :

$$A_r^b A_v^c f_{bc}^d f_{ad}^i = A_v^b A_r^c f_{bc}^d f_{ad}^a$$

$$A_r^a A_r^i f_{ic}^d f_{ad}^b = A_r^a A_v^i f_{bc}^d f_{ad}^i$$

$$A_r^a A_r^a f_{bc}^d f_{ad}^i = A_r^a A_r^b f_{bi}^d f_{ad}^c$$

Novamente, se $f_{ab}^i = -f_{ai}^b$ então as condições acima serão satisfeitas. Conclui-se portanto que as equações de Yang - Mills são deriváveis de uma lagrangeana somente para grupos tais que $f_{ab}^i = -f_{ai}^b$. Tal resultado foi demonstrado, por outros meios, em [A - P b], onde também se mostra que a condição $f_{ab}^i = -f_{ai}^b$ é satisfeita somente para grupos semi-simples ou abelianos ou pelo produto direto de um semi-simples por um abeliano. Deve-se notar que entre estes não se inclui o grupo de Poincaré que é o produto semi-direto do grupo Lorentz pelo das translações. Este grupo seria o candidato natural a uma teoria de gauge para a gravitação e o resultado acima mostra que

tal teoria não seria " usual " : se insistirmos que a dinâmica da teoria seja dada pelas equações de Yang - Mills a teoria deverá ser desenvolvida sem o uso de uma lagrangeana [A - P a]. Por outro lado, insistindo - se em uma formulação lagrangeana há de se abandonar as equações de Yang -Mills .

A lagrangeana para as equações de Yang - Mills será a usual

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_a^{\mu\nu}$$

II.D.19

quando existir . Na expressão acima , os índices são levantados ou baixados através da métrica de Killing - Cartan sobre o grupo em consideração . Note - se que , por exemplo , no caso do grupo de Poincaré tal métrica é degenerada , o que vem a ser uma outra forma de encarar a não - lagrangeanidade da teoria .

III - MECÂNICA CLÁSSICA E FATORES INTEGRANTES

III.A - Mecânica clássica

O leitor terá notado que não incluímos nos exemplos expostos no capítulo anterior questões relacionadas com a mecânica clássica. Pretendemos fazê-lo aqui. Na mecânica clássica os campos φ^i e as coordenadas x^μ introduzidos no capítulo anterior são simplesmente as coordenadas generalizadas (q^i) e o tempo t , respectivamente. Ademais vamos supor que as equações de movimento a considerar são da forma

$$\ddot{q}^i = F^i(q, \dot{q}) \quad \text{III.A.1}$$

onde o ponto em cima das coordenadas q^i representa a derivada temporal, q e $\dot{q}$ são a totalidade das coordenadas q^i e suas primeiras derivadas e F^i são funções de q e $\dot{q}$.

Introduzimos então a 1 - forma exterior variacional :

$$E = (\ddot{q}^i - F^i(q, \dot{q})) \delta q_i \quad \text{III.A.2}$$

Para procurar condições de lagrangeanidade para III.A.2 devemos examinar o que a condição $\delta E = 0$ impõe sobre $F'(q, \dot{q})$:

$$\begin{aligned} \delta E = \\ = \delta \ddot{q}^i \wedge \delta q - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta q_j \wedge \delta q_i - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}_j \wedge \delta q_i \quad \text{III.A.3} \end{aligned}$$

O primeiro termo é claramente igual a zero. Do terceiro termo obtemos a condição $\frac{\delta F^i}{\delta \dot{q}^i} = 0$, que vem dos termos $i = j$. Observe também que para um termo do tipo

$\delta \dot{q}_1 \wedge \delta \dot{q}_2$ existe um correspondente que vem da integração por partes de $\delta \dot{q}_2 \wedge \delta q_1$. Assim III.A.3 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \delta E = & - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta q_j \wedge \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q_j \wedge \delta q_i \Big|_{i > j} + \\ & + \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta q_j \wedge \delta \dot{q}_i \Big|_{i > j} - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}_j \wedge \delta q_i \Big|_{i < j} = \\ = & - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta q_j \wedge \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \right) \delta q_j \wedge \delta q_i \Big|_{i > j} + \\ & - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}_i \wedge \delta q_j \Big|_{i > j} - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j} \delta \dot{q}_j \wedge \delta q_i \Big|_{i < j} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\partial F^i}{\partial q_j} \delta q_j \wedge \delta q_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \wedge \delta q_i \Big|_{i>j} + \\ - \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_j \wedge \delta q_i \Big|_{j>i} - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \wedge \delta q_i \Big|_{i<j}$$

Fazendo $\delta E = 0$ obtém - se as seguintes condições :

$$\frac{\partial F^i}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial F^j}{\partial q_i} \quad \text{III.A.4}$$

$$\frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}_j} = - \frac{\partial F^j}{\partial \dot{q}_i} \quad \text{III.A.5}$$

As condições acima são também conhecidas por " condições de Tonti" , [T] . Para uma força independente das velocidades $\dot{q}^i$, as condições reduzem - se a :

$$\frac{\partial F^i}{\partial q_j} = \frac{\partial F^j}{\partial q_i} \quad \text{III.A.6}$$

que podem ser encontradas em textos clássicos de mecânica , por exemplo [G] .

A questão mais delicada que desejamos examinar diz respeito aos fatores integrantes . Nada nos impediria de introduzir , ao invés de III.A.2 ,

$$E = h^{ij} (\ddot{q}_i - F_i(q, \dot{q})) \delta q_j$$

III.A.7

conquanto $\det h^{ij} \neq 0$. Observe - se que ,a princípio, podemos assumir h^{ij} dependente de $t, q, \dot{q}$. No entanto ,a condição $\delta E = 0$ torna - se mais complicada : não obtemos uma condição geral sobre as forças, como III.A.4 e III.A.5 ,porém condições do tipo " existirá uma lagrangeana para as equações dadas se existir um h^{ij} tal que certas condições (envolvendo F_i e h^{ij}) sejam satisfeitas " . Assim uma solução completa torna - se impossível . Porém para cada caso particular é possível fazer uma análise que tem boas chances de resolver o problema . É esta situação que iremos exemplificar agora .

Tomemos o caso de um sistema com dois graus de liberdade descrito por

$$\ddot{X} + \dot{X} + X = 0$$

III.A.8

É fácil ver que a 1 - forma exterior variacional $E =$

$(\ddot{X} + \dot{X} + X) \delta X$ não satisfaz $\delta E = 0$ pois aparece um termo $\delta \dot{X} \wedge \delta X$. Podemos introduzir ,porém ,a 1 - forma exterior variacional

$$E = f(t) (\ddot{X} + \dot{X} + X) \delta X$$

III.A.9

onde $f(t)$ é uma função do tempo, e impor $\delta E = 0$, determinando assim uma equação para $f(t)$. Desenvolvendo esta condição encontraremos :

$$\begin{aligned}\delta E &= f(t) \delta \ddot{x} \wedge \delta x + f(t) \delta \dot{x} \wedge \delta x = \\ &= -\frac{df}{dt} \delta x \wedge \delta x + f(t) \delta \dot{x} \wedge \delta x\end{aligned}$$

Assim $\delta E = 0$ implica em

$$\frac{df}{dt} = f(t) \quad \text{III.A.10}$$

ou seja, $f(t) = a e^t$. A lagrangeana será (com $a = 1$) :

$$\mathcal{L} = \int_0^1 d\lambda \lambda (\ddot{x} + \dot{x} + x) e^t x = \frac{e^t}{2} (\ddot{x} x + \dot{x} x + x^2)$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{L} = e^t (-\dot{x}^2 + x^2) \quad \text{III.A.11}$$

Cabe observar que a lagrangeana acima não é simplesmente da forma $\dot{x}^2 + V(x, \dot{x})$, como é usual em muitos problemas.

Um outro exemplo de lagrangeana pouco "usual" aparece no caso da equação

$$\ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^2 = 0$$

III.A.12

Introduzimos a 1-forma exterior variacional

$$E = f(x) \left(\ddot{x} + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) dx$$

III.A.13

e impomos $\delta E = 0$. Segue-se que

$$\begin{aligned} \delta E &= f(x) d\ddot{x} \wedge dx + f(x) \dot{x} d\dot{x} \wedge dx = \\ &= -\frac{d}{dt} (f(x)) d\dot{x} \wedge dx + f(x) \dot{x} d\dot{x} \wedge dx = \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} d\dot{x} \wedge dx + f(x) \dot{x} d\dot{x} \wedge dx \end{aligned}$$

Assim $\delta E = 0$ implica em $f = e^x$. A lagrangeana que se obtém a partir da fórmula da transgressão é

$$L = \frac{1}{2} e^x \dot{x}^2$$

III.A.14

Nos dois exemplos anteriores usamos diferentes "ansätze" para a função f . No primeiro suposemos uma

dependência somente em $\dot{x}$. No segundo, somente em $\dot{y}$. É na escolha adequada de um "ansatz" que reside a "arte" de encontrar lagrangeanas.

Outra situação interessante é encontrada examinando - se o par de equações abaixo, [F - T] :

$$E_x = m \ddot{x} + R \dot{y} + kx = 0 \quad \text{III.A.15}$$

$$E_y = m \ddot{y} - R \dot{x} + ky = 0 \quad \text{III.A.16}$$

Observe que

$$E = E_x \delta y + E_y \delta x \quad \text{III.A.17}$$

é tal que $\delta E = 0$, resultando a seguinte lagrangeana :

$$\mathcal{L} = m \dot{x} \dot{y} + \frac{1}{2} R (x \dot{y} - \dot{x} y) - kxy \quad \text{III.A.18}$$

O termo cinético é da forma $m \dot{x} \dot{y}$. Neste caso a equação na variável x vem da variação da lagrangeana em relação a variável y e vice-versa. Este exemplo pode se visto como correspondendo a um fator integrante h^2 dado pela matriz :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Este tipo de situação será ainda encontrada com mais frequência na secção seguinte .

III.B - Não unicidade da lagrangeana e integrabilidade

Uma vez encontrada uma lagrangeana não há garantia alguma que esta seja a única lagrangeana para o sistema . É claro que podemos acrescentar derivadas totais a uma lagrangeana sem alterar as equações de movimento, mas não é este tipo de não unicidade que estamos interessados . Podem existir mais de uma lagrangeana que tenham as mesmas equações de Euler - Lagrange sem que elas difiram por uma derivada total [0] . Chamaremos tais lagrangeanas de *independentes* .

Não pretendemos tratar o problema da não-unicidade da lagrangeana de uma forma geral. Vamos ater - nos a sistemas mecânicos com dois graus de liberdade dados por uma lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\dot{y}^2}{2} - V(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \quad \text{III.B.1}$$

e procuraremos condições sobre $V(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ para que exista uma

outra lagrangeana, $\mathcal{L}'$, independente de $\mathcal{L}$ e que não dependa do tempo explicitamente. Tais sistemas serão chamados de bilagrangeanos. Nestes, para cada lagrangeana podemos calcular quantidades conservadas devido a invariância por translações temporais. Existindo duas lagrangeanas, há duas quantidades conservadas (do tipo "energia") e portanto, em se tratando de sistemas com dois graus de liberdade, o sistema é completamente integrável. Assim vemos que existe uma relação entre a não-unicidade da lagrangeana e a integrabilidade do sistema. Isto quer dizer que ao procurarmos sistemas bilagrangeanos estamos ao mesmo tempo procurando sistemas integráveis. Nem todo sistema completamente integrável é bilagrangeano, porém a condição de bilagrangeanidade que obteremos mais adiante mostra-nos que uma certa subclasse de todos os sistemas integráveis é bilagrangeana. Veja também [Kra].

As equações de Euler - Lagrange associadas a III.B.1 são, (supomos ademais que $V(x, y, \dot{x}, \dot{y})$ não é independente de x e y , visto que em tal caso o problema de integrabilidade seria trivial):

$$E_x \equiv \ddot{x} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad \text{III.B.2}$$

$$E_y \equiv \ddot{y} - \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{y}} \right) = 0 \quad \text{III.B.3}$$

Uma forma de procurar uma lagrangeana "alternativa" para as equações acima é simplesmente procurar por um fator integrante diferente da identidade. Ou seja, introduzir

$$E = h^{ij} E_i \delta q_j$$

III.B.4

onde

$$E_i = \ddot{q}_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

III.B.5

($i = x, y$) e impor $\delta E = 0$. Vamos começar supondo h^{ij} constante. Segue - se então que

$$\begin{aligned} \delta E = & h^{ij} \delta \ddot{q}_i \wedge \delta q_j + h^{ij} \delta \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \wedge \delta q_j - \\ & - \delta \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \wedge \delta q_j = \end{aligned}$$

$$= h^{ij} \delta \ddot{q}_i \wedge \delta q_j + h^{ij} \delta \left(\frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \wedge \delta q_j + h^{ij} \delta \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) \wedge \delta \dot{q}_j$$

Ao igualarmos esta expressão a zero devemos notar que o primeiro termo, $h^{ij} \delta \ddot{q}_i \wedge \delta q_j$, deve ser zero independentemente, o único cancelamento possível sendo com o termo

$$h^{ij} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \right) \delta \dot{q}_k \wedge \delta \dot{q}_j$$

no caso em que V é puramente quadrático nas velocidades, exatamente aquele em que não estamos interessados. Anular o primeiro termo significa impor $h^{ij} = h^{ji}$. Considerando esta condição satisfeita e efetuando as integrações por partes necessárias restam as seguintes condições :

$$h^{ij} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} = h^{ik} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \quad \text{III.B.6}$$

$$h^{ij} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} - h^{ij} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} = h^{ik} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} - h^{ik} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} \quad \text{III.B.7}$$

$$h^{ij} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} - h^{ij} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_i} \right) = h^{ik} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} - h^{ik} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} \right) \quad \text{III.B.8}$$

Vamos agora reescrever estas condições explicitamente em termos de q_1 e q_2 ($q_1 = x$, $q_2 = y$):

$$h^{12} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} \right) = (h^{11} - h^{22}) \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1} \quad \text{III.B.9}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1 \partial q_2} = \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial \dot{q}_2}$$

III.B.10

$$h^{12} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2 \partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1} - \frac{\partial V}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2} \right) \right) =$$

III.B.11

$$= (h^{11} - h^{22}) \frac{\partial V}{\partial q_2 \partial q_1} + h^{11} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2 \partial \dot{q}_1} \right) - h^{22} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2 \partial q_1} \right)$$

O detalhe interessante destas condições é que podemos verificar a sua validade explicitamente, dado um potencial $V(x, y, \dot{x}, \dot{y})$. Observe que III.B.10 não depende de h^{ij} . Para verificar III.B.9, supondo $h^{12} \neq 0$, devemos apenas verificar (K uma constante):

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_1 \partial \dot{q}_1} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_2} = K \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2 \partial \dot{q}_1}$$

III.B.12

e finalmente, substituindo III.B.12 em III.B.11, resta verificar

$$\frac{\partial V}{\partial q_2 \partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial q_1 \partial \dot{q}_1} - \frac{\partial V}{\partial q_2 \partial \dot{q}_2} \right) =$$

$$= K \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_2 \partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial q_2 \partial \dot{q}_1} \right) \right)$$

III.B.13

Como foi dito, estas condições podem ser verificadas a partir somente do potencial $V(x, y, \dot{x}, \dot{y})$

Deveríamos agora verificar o que acontece quando um h^{ij} dependente de q_i e $\dot{q}_i$ é permitido. Resulta após

o cálculo que não aparecem novos casos de bilagrangeanidade : obtém-se as mesmas condições que acima .O caso de um fator integrante dependendo do tempo não é de grande interesse visto que procuramos lagrangeanas independentes do tempo .

Satisfeitas as condições III.B.9 ,III.B.10 e III.B.11 a lagrangeana " alternativa " é obtida pela simples aplicação da fórmula da transgressão a III.B.4 :

$$\mathcal{L}' = \int_0^1 d\lambda \, h^{ij} E_i(\lambda q, \lambda \dot{q}) \dot{q}_j \quad \text{III.B.14}$$

Devido a independência temporal de $\mathcal{L}'$ a quantidade

$$h = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - \mathcal{L}' \quad \text{III.B.15}$$

é conservada . Como estamos tratando de sistemas com dois graus de liberdade isto é suficiente para assegurar a integrabilidade completa do sistema ,notando que $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$ não diferem por uma derivada total ,o que é simples de verificar comparando os termos cinéticos .

Se supomos o potencial independente das velocidades, $\dot{x}$ e $\dot{y}$, as condições de bilagrangeanidade reduzem - se a

$$\frac{\partial V}{\partial q_2 \partial q_2} - \frac{\partial V}{\partial q_1 \partial q_1} = K \frac{\partial V}{\partial q_2 \partial q_1} \quad \text{III.B.16}$$

Esta é uma condição de integrabilidade conhecida, [Th] e [D - G - R], sendo que podemos encarar as condições III.B.9, III.B.10, III.B.11 como uma extensão deste resultado, [Kra].

Há ainda um fato curioso a comentar. A quantidade conservada III.B.15 é uma quantidade conservada do "tipo Noether", ou seja, podemos obtê-la a partir do teorema de Noether aplicado à lagrangeana $\mathcal{L}'$. A energia "usual" do sistema é obtida também através do teorema de Noether, desta vez aplicado a $\mathcal{L}$. Assim, neste tipo de sistema, a invariância por translações temporais da equação de movimento tem à ela associada duas quantidades conservadas, uma através de cada lagrangeana.

IV - QUANTIZAÇÃO DE TEORIAS DE CAMPOS NÃO-LAGRANGEANAS

Do ponto de vista clássico a não existência de uma lagrangeana para as equações de movimento de uma teoria de campos não é uma "deficiência" que nos leve necessariamente a descartar a teoria. Sem dúvida, o uso do formalismo lagrangeano é, muitas vezes, de grande conveniência ou elegância. Uma teoria clássica não é porém inconsistente pelo fato de não podermos dar - lhe uma formulação lagrangeana.

A quantização de uma teoria de campos é usualmente feita a partir da lagrangeana, seja explicitamente, através da formulação de Feynman, ou implicitamente, na definição de momento conjugado no formalismo canônico. Na quantização de uma teoria não - lagrangeana devemos usar a formulação, menos usual, devida a Källén - Yang - Feldman, [K] e [Y - F]. Este método parte das equações de movimento para obter a teoria quântica.

Talvez pela pouca frequência com que o método de Källén - Yang - Feldman é usado, existe uma crença que teorias não - lagrangeanas não são quantizáveis; veja por exemplo [H et al]. Não pretendemos fazer aqui uma análise completa da questão. Vamos, no entanto, tentar procurar investigar quais sejam os "defeitos" de uma teoria não-lagrangeana quando quantizada. Mais especificamente, iremos analisar a possibilidade de se definir os

vértices da teoria coerentemente. Os resultados obtidos, [A - K a], mostram - nos que para certas teorias não - lagrangeanas não é, de fato, possível definir coerentemente os vértices. Existem porém algumas teorias não - lagrangeanas em que tal "patologia" está ausente, e não há razões para descartá - las a priori. Note que isto não tem relação alguma com a renormalizabilidade ou não da teoria, uma questão que não discutiremos aqui.

Suponha um conjunto de campos $\{\varphi^a\}$, $a=1, \dots, N$, governados por equações de movimento da forma

$$K^a[\varphi^a] = J^a[\varphi] \quad \text{IV.1}$$

onde $K^a[\varphi]$ é um operador cinemático (Klein - Gordon, Dirac, etc) agindo sobre φ^a . J^a são correntes de fonte, que podem ser funcionais de todos os campos da teoria. De todas as equações vamos considerar duas quaisquer

$$K^a[\varphi^a] = J^a[\varphi] \quad \text{IV.2}$$

$$K^b[\varphi^b] = J^b[\varphi] \quad \text{IV.3}$$

A expressão geral de um funcional que representa as correntes de

fonte envolvendo j_1 campos φ^1 , j_2 campos φ^2 ,
 j_p campos φ^p , num total de $k = \sum_i j_i$ será:

$$J^a[\varphi] = \int d^4x_1 \dots d^4x_k \varphi_1(x_1) \varphi_1(x_2) \dots \varphi_1(x_{j_1}) \varphi_2(x_{j_1+1}) \dots \\
\dots \varphi_2(x_{j_1+j_2}) \dots \varphi_3(x_{j_1+j_2+j_3}) \dots \varphi_p(x_{j_k}) C_{j_1 \dots j_p}^a(x_1, \dots, x_k)_{IV.4}$$

onde

$$C_{j_1 \dots j_p}^a = \frac{\delta^k J^a}{\delta \varphi_1(x_1) \dots \delta \varphi_2(x_{j_1+1}) \dots \delta \varphi_p(x_k)} \bigg|_{\varphi=0} \quad IV.5$$

que em geral é um produto de deltas de Dirac e de suas derivadas (usamos aqui derivadas funcionais usuais da teoria de campos) .
 Se a corrente for uma soma de termos envolvendo diferentes números de campos examinaremos cada termo separadamente .

O procedimento de Källén - Yang - Feldman diz - nos que devemos escrever soluções formais das equações IV.1 com a ajuda da função de Green do operador cinemático, $(K^a)^{-1}$, como :

$$\varphi_a = \varphi_a^{(in)} + (K^a)^{-1} J^a(\varphi) \quad IV.6$$

Para obter os elementos de matriz S devemos projetar cada uma dessas soluções formais, escritas como a soma de um campo livre (in) mais termos de interação, sobre um campo livre (out) do mesmo tipo. A solução perturbativa até uma certa ordem é obtida pela iteração das equações, ou seja, substituindo os campos nos termos de interação pelas soluções formais e retendo termos até a ordem desejada. Atuando sobre o operador de Green pela esquerda com um campo livre (out) nos dá novamente um campo livre. Segue-se que os vértices da teoria são obtidos como as primeiras contribuições nestas séries. Ou seja IV.6 leva a um vértice $\varphi^a J^a(\psi)$ (sem convenção de soma). Para que um vértice esteja bem definido é preciso que ele apareça multiplicado pelos mesmos fatores a partir de cada uma das equações. Isto acontece em todas as teorias lagrangeanas e será chamado de "coerência perturbativa". A incoerência perturbativa significaria que um tem aparência diferente quando "visto" por diferentes canais.

O que faremos logo a seguir é expressar matematicamente o que está dito em palavras acima, obtendo uma condição de coerência perturbativa. Antes porém vamos deter-nos em mais alguns comentários. A incoerência perturbativa de uma teoria não deve ser vista como uma demonstração final de inconsistência da teoria. Inicialmente, trata-se de um argumento envolvendo teoria de perturbações, trazendo consigo as limitações desta.

Além disto , a nossa intuição em teoria quântica de campos está baseada em teorias lagrangeanas , que são sempre coerentes . Uma teoria incoerente seria então uma teoria "estranha" , para a qual a maioria dos resultados usuais da teoria quântica de campos não se aplicam .

Projetando a equação IV.2 sobre um campo φ^a (out) e projetando IV.3 sobre um campo φ^b , obtemos a condição de coerência perturbativa (sem convenção de soma em IV.7) :

$$J^a[\varphi] \varphi_a = J^b[\varphi] \varphi_b \quad \text{IV.7}$$

Introduzindo uma notação compacta para IV.4 ,

$$J^a[\varphi] = C_{j_1 \dots j_p}^a \varphi_1^{j_1} \dots \varphi_a^{j_a} \dots \varphi_b^{j_b} \dots \varphi_p^{j_p} \quad \text{IV.8}$$

a condição IV.7 pode ser reescrita como

$$C_{j_1 \dots j_a \dots j_b \dots j_p}^a = C_{j_1 \dots (j_{a+1}) \dots (j_{b-1}) \dots j_p}^b \quad \text{IV.9}$$

É bom lembrar que os $C_{j_1 \dots j_p}^a$ incluem funções delta e derivadas de funções delta .

A condição acima deve valer para qualquer par de índices a, b . Usando a definição dos coeficientes $C_{j_1 \dots j_r}^a$, dada por IV.5, a condição IV.9 pode ser posta na forma :

$$\frac{\delta^{k-1}}{\delta \varphi_1^{j_1} \dots \delta \varphi_a^{j_a} \dots \delta \varphi_b^{j_b-1} \dots \delta \varphi_p^{j_p}} \left[\frac{\delta J^a}{\delta \varphi_b} - \frac{\delta J^b}{\delta \varphi_a} \right] = 0 \quad \text{IV.10}$$

Consequentemente toda teoria lagrangeana é coerente, visto que

$$\frac{\delta J^a}{\delta \varphi_b} = \frac{\delta J^b}{\delta \varphi_a} \quad \text{IV.11}$$

é a condição de lagrangeanidade reescrita em termos de derivada funcionais "comuns" (poderíamos dizer, em termos "operatoriais"). No entanto, IV.10 não implica necessariamente em IV.11. Podemos ainda dar uma forma mais compacta a IV.10. Se introduzimos a 1 - forma exterior variacional

$$N_{(j_1 \dots j_p)} = \sum_a \sum_{b \neq a} \frac{\delta^{k-1} J^a}{\delta \varphi_1^{j_1} \dots \delta \varphi_a^{j_a} \dots \delta \varphi_b^{j_b-1} \dots \delta \varphi_p^{j_p}} \quad \text{IV.12}$$

a condição de coerência IV.10 torna - se simplesmente :

$$\oint N_{(j_1, \dots, j_p)} = 0 \quad \text{IV.13}$$

Ou seja , para todo conjunto $(j_1, \dots, j_p)$ a 1 - forma exterior variacional $N_{(j_1, \dots, j_p)}$ deve ser fechada . A forma $N_{(j_1, \dots, j_p)}$ será chamada de "forma-coerência" . Vejamos agora alguns exemplos .

Tomemos as seguintes equações

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_1 = a \varphi_1 \varphi_2^2 \quad \text{IV.14}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_2 = b \varphi_2 \varphi_1^2 \quad \text{IV.15}$$

Se $a = b$ a teoria é lagrangeana ,correspondendo a um potencial

$$V = \frac{a}{2} \varphi_1^2 \varphi_2^2 \quad \text{IV.16}$$

mas se $a \neq b$ a teoria não é lagrangeana . As formas - coerência tem ,no caso , as seguintes expressões :

$$N_{(1,1)} = 2a \varphi_2 \delta \varphi_1 + 2b \varphi_1 \delta \varphi_2 \quad \text{IV.17}$$

$$N_{(2,0)} = 2b \varphi_2 \delta \varphi_2 \quad \text{IV.18}$$

$$N_{(2,0)} = 2a \varphi_1 \delta \varphi_1 \quad \text{IV.19}$$

E portanto a condição de coerência fica :

$$\delta N_{(1,1)} = 2(a-b) \delta \varphi_2 \wedge \delta \varphi_1 \quad \text{IV.20}$$

pois $\delta N_{(2,0)}$ e $\delta N_{(0,2)}$ são zero . Neste caso a condição de coerência é a mesma que a condição de lagrangeanidade , ou seja, $a = b$. Um caso de teoria não-lagrangeana coerente é dado por :

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_1 = \partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 \varphi_2 \quad \text{IV.21}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi_2 = \partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2 \varphi_1 \quad \text{IV.22}$$

A única condição de coerência não trivial é a seguinte :

$$N_{(1,1)} = 2 \delta(\partial^\mu \varphi_1 \partial_\mu \varphi_2) \quad \text{IV.23}$$

$$\delta N_{(1,1)} = 0$$

IV.24

e portanto o modelo é coerente . Vemos portanto que a condição de coerência pode satisfeita mesmo para uma teoria não-lagrangeana. Veja-se também a referência [A - K b].

É interessante mencionar que as equações de Yang - Mills satisfazem as condições de coerência apenas se forem lagrangeanas . Como foi dito na secção II.D ,este é o caso para modelos baseados em grupos semi-simples ou abelianos ou o produto direto de um semi-simples por um abeliano ,[A - K b].

Uma outra forma de abordar o problema de quantização de teorias não-lagrangeanas é considerar uma outra teoria da qual a teoria dada é o limite para o valor de um certo parâmetro . Se esta outra teoria for lagrangeana podemos quantiza-la por meio de integrais funcionais ,ou por quantização canônica , e tomar o limite no fim do processo .Não há , no entanto , garantia alguma que o processo de tomada de limite " commute " com o de quantização . Tal método foi utilizado em [A - P c] na quantização de uma teoria de gauge para o grupo de Poincaré,resultando na mesma incoerência perturbativa aqui apresentada .

V - COMENTÁRIOS FINAIS

Numa formulação clássica (não-quântica) de uma teoria a dinâmica pode ser dada pelas equações de movimento . Estas podem ou não ser deriváveis de uma lagrangeana . Neste sentido , a formulação a partir das equações de movimento tem um " status " mais fundamental que a formulação lagrangeana , pois esta pode não existir mesmo para teorias fisicamente aceitáveis . A existência de uma lagrangeana dá porém a uma teoria uma elegância maior . Teoremas como o de Noether , mesmo existindo generalizações para para teorias não - lagrangeanas , são bons exemplos da utilidade do formalismo lagrangeano .

Introduzimos neste trabalho um formalismo matemático para tentar responder a questão da existência de uma lagrangeana para dadas equações de movimento . Mesmo não tendo esgotado a questão , fornecemos um meio prático de trabalhar o problema . Isto levou , entre outras coisas, a uma abordagem construtiva do problema da não unicidade da lagrangeana. No caso particular de sistemas com dois graus de liberdade descritos pela mecânica clássica esta abordagem esclarece um pouco a estrutura subjacente à integrabilidade completa de alguns sistemas .

A quantização de uma teoria de campos não-lagrangeana foi aqui tratada de uma maneira que poderíamos chamar de " não-dogmática " . Tentamos analisar quais problemas surgem no processo de quantização e sob quais condições estes problemas

estão ausentes . Isto levou à definição de coerência perturbativa de uma teoria . Todas as teorias lagrangeanas resultam coerentes, podendo porém existir teorias não-lagrangeanas coerentes .

Cabe ,por fim , mencionar algumas questões não tratadas nesta tese . Todo o tratamento tem um carácter local , não tendo sido abordados problemas topológicos . A relação entre as simetrias das equações de movimento e as da lagrangeana foi tampouco tratada , não nos parecendo porém impossível que isto venha a ser feito dentro do formalismo aqui utilizado . O mesmo poderíamos dizer a respeito de uma possível extensão das idéias sobre integrabilidade completa para sistemas com mais graus de liberdade . Uma análise mais aprofundada da quantização de teorias não-lagrangeanas também está ainda por ser feita. Chamamos também a atenção do leitor para o nosso trabalho [Kr b] onde mostramos que a existência de uma lagrangeana para certas equações de movimento esta' ligada a invariância por um certo tipo de simetria anti-BRS na mecânica clássica , fornecendo, neste contexto , uma nova interpretação desta simetria .

REFERÊNCIAS

- [A - D] I.M.Anderson e T.Duchamp ; Amer.Jour. Math .
102 ,pg 781 , (1980) .
- [A - K a] R.Aldrovandi e R. A. Kraenkel ; "On exterior
Variational Calculus" , preprint IFT.P-04/87 , a
aparecer em J. Phys. A :Math .Gen. , (1988) .
- [A - K b] R. Aldrovandi e R.A.Kraenkel ; "Perturbative
Coherence in Field Theory" , preprint IFT.P-
21/87 , (1987) .
- [A - P a] R. Aldrovandi e J.G.Pereira ; Phys.Rev.D33,
pg 2788 , (1986) .
- [A - P b] R. Aldrovandi e J.G. Pereira ; "Existence of
Lagrangians for the Yang-Miils Equations" ,
preprint IFT.P-05/85 , a aparecer em Rep.
Math. Phys. , (1988) .
- [A - P c] R. Aldrovandi e J. G. Pereira ; "On the
Quantization of the Poincaré Gauge Model",
preprint IFT.P-07/86 , a aparecer em J.
Math. Phys. , (1988)
- [B - I] M. Born e L. Infeld ; Proc. Roy. Soc. A144 ,
pg 425 , (1934) .

- [D - G - R] B. Dorizzi , B. Grammaticos e A. Ramani ; J. Math. Phys. 24 , pg 2282 , (1983).
- [F] B. Finlayson ; Phys. Fluids 13 ,pg 963 , (1972).
- [F - T] H. Feshbach e Y. Tikochinsky ; Trans. N.Y.Acad. Sci. ,ser II ,vol 38 ,pg 44 , (1977) .
- [G] H.Goldstein ; "Classical Mechanics" , 2a ed.,Addison Wesley , (1980) .
- [H et al] A. Heifer , M. Hickman ,C. Kozameh ,C. Lucey E.T. Newman ; Phys.Rev. D36 , pg 1740 , (1987) .
- [K] G. Källén ; Ark. Fys. 2 ,pg 187 e 371 , (1950).
- [Kr a] R.A.Kraenkel ; "Many-lagrangian classical systems", preprint IFT.P-02/88 , (1987).
- [Kr b] R.A.Kraenkel ; "Anti-BRS invariance and lagrangeanity in classical mechanics" , preprint IFT.P-04/88 , (1988).
- [L - L] L.D.Landau e E. Lifchitz ; "Teoria do Campo", ed Mir , (1980).
- [L -R] D.Lovelock e J. Rund ; "Tensors, Differential Forms and Variational Principles" , J. Wiley , (1975).

- [M] C.B. Millikan ; Physl. Mag. 7 , 641 , (1929) .
- [N] S.F. Novikov ; Russ. Math. Sur . 37 : 5,pg
1, (1982) .
- [O] S. Okubo ; Phys. Rev. D22 , pg 919 , (1980).
- [S] R.M.Santilli ; Ann. Phys. 103 , pg 354 ,
(1977).
- [T] E. Tonti ; Bull.Class. Sci. Acad. Roy. Bel.
(5) , pg 55 , (1969). Veja-se também
[A - D].
- [Th] G. Thompson ; J. Phys. A : Math. Gen. 17 ,pg
985 , (1984) .
- [V] M.M. Vainberg ; "Variational Methods for the
Study of Nonlinear Operators" , Holden Day,
(1964) .
- [W] F. Warner ; "Foundations of Differential
Manifolds" ,Scott - Foresman , (1983) .
- [Y - F] C.N. Yang e D. Feldman ; Phys.Rev. 79 ,pg
972 , (1950) .

