

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE CIÊNCIAS – CÂMPUS BAURU
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA**

FERNANDO OLIVEIRA GARCIA

**ANÁLISE COMPLEXA: USO DE *SOFTWARE* NA INTERPRETAÇÃO
GRÁFICA**



**BAURU
2024**

FERNANDO OLIVEIRA GARCIA

ANÁLISE COMPLEXA: USO DE *SOFTWARE* NA INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor junto ao Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências, da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus de Bauru.

Orientador: Prof. Dr. Aguinaldo Robinson de Souza

Coorientadora: Dr.^a Emília de Mendonça Rosa Marques

**BAURU
2024**

G216a Garcia, Fernando Oliveira
Análise Complexa : uso de software na interpretação gráfica
/ Fernando Oliveira Garcia. -- Bauru, 2024
110 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Faculdade de Ciências, Bauru
Orientador: Aguinaldo Robinson de Souza
Coorientadora: Emília de Mendonça Rosa Marques

1. Panorama Analítico. 2. Educação. 3. Análise Complexa. 4.
Função. 5. Domínio de cores. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências, Bauru. Dados
fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Fernando Oliveira Garcia

Análise Complexa: uso de *software* na interpretação gráfica

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor junto ao programa de Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Câmpus de Bauru.

COMISSÃO EXAMINADORA

Data da defesa/entrega: 9/4/2024

MEMBROS COMPONENTES DA BANCA EXAMINADORA:

Presidente e Orientador: Dr. Aguinaldo Robinson de Souza
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru – SP

Membro Titular: Dr. Thiago Pedro Pinto
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS/Mato Grosso do Sul – MS

Membro Titular: Dra. Rosemeiry de Castro Prado
Faculdade de Tecnologia – Fatec/Ourinhos – SP

Membro Titular: Dr. Wilson Massashiro Yonezawa
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru – SP

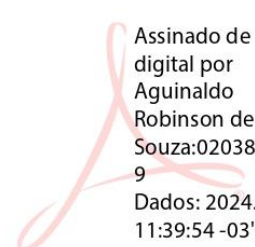
Membro Titular: Dr.^a Patrícia Fernanda de Oliveira Cabral
Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – Unesp/Bauru – SP

Local: Universidade Estadual Paulista
Faculdade de Ciências
Unesp – Câmpus de Bauru

ATA DA DEFESA PÚBLICA DA TESE DE DOUTORADO DE FERNANDO OLIVEIRA GARCIA, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO PARA A CIÊNCIA, DA FACULDADE DE CIÊNCIAS - CÂMPUS DE BAURU.

Aos 09 dias do mês de abril do ano de 2024, às 14:00 horas, por meio de Videoconferência, realizou-se a defesa de TESE DE DOUTORADO de FERNANDO OLIVEIRA GARCIA, intitulada **Análise Complexa: uso de software na interpretação gráfica**. A Comissão Examinadora foi constituída pelos seguintes membros: Prof. Assoc. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA (Orientador(a) - Participação Virtual) do(a) Departamento de Química / Faculdade de Ciências UnespCâmpus de Bauru, Prof. Dr. THIAGO PEDRO PINTO (Participação Virtual) do(a) Instituto de Matemática / Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Profa. Dra. ROSEMEIRY DE CASTRO PRADO (Participação Virtual) do(a) Departamento de Matemática / Faculdade de Tecnologia de São Paulo - Fatec câmpus Ourinhos, Prof. Dr. WILSON MASSASHIRO YONEZAWA (Participação Virtual) do(a) Departamento de Computação / Faculdade de Ciências - UNESP Bauru, Profa. Dra. PATRÍCIA FERNANDA DE OLIVEIRA CABRAL (Participação Virtual) do(a) Departamento de Química / Universidade Estadual Paulista. Após a exposição pelo doutorando e arguição pelos membros da Comissão Examinadora que participaram do ato, de forma presencial e/ou virtual, o discente recebeu o conceito final: **APROVADO**. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que após lida e aprovada, foi assinada pelo(a) Presidente(a) da Comissão Examinadora.

Prof. Assoc. AGUINALDO ROBINSON DE SOUZA



Assinado de forma
digital por
Aguinaldo
Robinson de
Souza:0203820983
9
Dados: 2024.04.10
11:39:54 -03'00'

Ao meu querido pai Gercino (*in memoriam*), que sempre me apoiou, incentivou e foi companheiro em todo o tempo, mas que, no início dessa jornada, teve que se ausentar para tomar sua morada no céu.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, pela dádiva da vida e por ter me mantido em pé, mesmo em meio às circunstâncias.

Sou grato à minha família, pelo carinho e paciência com que me apoiaram.

Deixo um agradecimento especial ao meu orientador, pelo incentivo, pela dedicação e também pela paciência com que me conduziu neste processo de pesquisa. E também à professora Emília, por toda ajuda com o *software*.

Também quero agradecer à Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP), local em que me formei e onde trabalho atualmente, pela possibilidade de afastamento enquanto desenvolvia minha tese.

Não posso deixar de agradecer também à empresa Embarcadero, pela colaboração com o Programa Acadêmico, na seção das licenças do *software* Delphi, que possibilitou o F(C): Funções Complexas e agora também no F(C): Análise Complexa.

“Ensinar não é transferir conhecimento,
mas criar as possibilidades para a sua
própria produção ou a sua construção”.

Paulo Freire
Pedagogia da Autonomia (1996)

GARCIA, Fernando Oliveira. Análise Complexa: uso de *software* na interpretação gráfica. 2024. 110f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Unesp, Faculdade de Ciências, Bauru, 2024.

RESUMO

A abordagem de conceitos dos números complexos parece ter ficado de lado à medida que documentos oficiais, como os PCNs e a BNCC, não definem com clareza certos parâmetros para o conteúdo. Dentro desse contexto, a matemática, mais especificamente esse assunto, pode ser algo confuso à compreensão dos estudantes, colaborando ao estigma de que a matemática é algo complicado de se aprender. A pergunta que norteou este trabalho foi: “Qual a relevância das ferramentas gráficas na representação de funções de variáveis complexas?” Na tentativa de encontrar respostas a essa pergunta, fez-se um levantamento em bases de dados científicas, intencionando relacionar convergências e divergências entre algumas pesquisas. A busca levou ao desenvolvimento de um *software* para a plotagem gráfica de funções de variável complexa e elementos de Análise Complexa. Os resultados indicam que a maioria das pesquisas analisadas utiliza o *software* Geogebra como principal ferramenta de plotagem gráfica de funções; o domínio colorido ocorre em poucas pesquisas, sendo o uso do plano de Argand-Gauss a forma mais comum de representação gráfica apresentada. As pesquisas apontam que há relevância na utilização de *softwares* de plotagem gráfica nos ambientes de aprendizado de funções. Uma sequência didática foi elaborada para abordagem do tema. O *software* desenvolvido viabiliza a representação gráfica de funções de variável complexa, e suas possíveis derivadas, em que o usuário pode interagir com gráficos baseados no mapa de cores e em Panoramas Analíticos.

Palavras-chave: Panorama Analítico. Educação. Análise Complexa. Função. Domínio de cores.

GARCIA, Fernando Oliveira. Complex Analysis: use of software in graphic interpretation. 110f. Dissertation (Ph.D. in Education for Science) – São Paulo State University (Unesp), School of Sciences, Bauru, SP, 2024.

ABSTRACT

The approach to complex number concepts seems to have been left aside as official documents such as the PCNs and the BNCC do not clearly define certain parameters for the content. Within this context, mathematics, more specifically this subject, can be confusing for students to understand, contributing to the stigma that mathematics is something complicated to learn. The question that guided this work was: "What is the relevance of graphical tools in representing functions of complex variables? In an attempt to find answers to this question, a survey was carried out in scientific databases, intending to relate convergences and divergences between some research. This search led to the development of software for the graphical plotting of complex variable functions and Complex Analysis elements. The results indicate that the majority of research analyzed uses the Geogebra software as the main software for graphical plotting of functions, the colored domain occurs in few studies, with the use of the Argand-Gauss plane being the most common form of graphical representation presented. Research shows that there is relevance in using graphical plotting software in function learning environments. A didactic sequence is designed to approach the topic. The developed software enables the graphical representation of complex variable functions and their possible derivatives, in which the user can interact with graphics based on color maps and Analytical Landscape.

Keywords: Analytics Landscape. Education. Complex Analysis. Function. Domain of colors.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Interface do <i>software</i> SageMath.....	44
Figura 2 – Ambiente <i>web</i> WolframAlpha	45
Figura 3 – <i>Software</i> Maple	46
Figura 4 – Interface Delphi 10.4	77
Figura 5 – Interface GLScene	78
Figura 6 – Representação gráfica das funções do <i>software</i>	79
Figura 7 – Mapa de cores	80
Figura 8 – Primeiros resultados da plotagem de derivadas	81
Figura 9 – Interface principal do <i>software</i> F(C): Análise Complexa.....	82
Figura 10 – Interface com plotagem de derivadas	82
Figura 11 – Interface com janela do Panorama Analítico	83
Figura 12 – Menu principal.....	84
Figura 13 – Janela do Panorama Analítico da função $\tan(z)$	84
Figura 14 – Panorama Analítico da função $\ln(z)$	86
Figura 15 – Programação derivada tangente	88

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Quantitativo por conteúdo.....	56
Gráfico 2 – Percentual do GeoGebra em relação a outros <i>softwares</i>	57
Gráfico 3 – Distribuição por nível escolar	58
Gráfico 4 – Distribuição por tipo de trabalho	61

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Oferta de disciplina relacionada às variáveis complexas	17
Quadro 2 – <i>Softwares</i> para abordagem de funções.....	41
Quadro 3 – Relação de <i>softwares</i> de plotagem de funções complexas	43
Quadro 4 – Comparativo entre os <i>softwares</i>	47
Quadro 5 – Comando de busca nas bases de dados.	51
Quadro 6 – Categorias de análise assumidas no estudo dos artigos da pesquisa. ..	52
Quadro 7 – Termos utilizados e quantitativo de trabalhos em Periódicos Capes.....	53
Quadro 8 – Termos utilizados e quantitativo de trabalhos em BDTD.....	54
Quadro 9 – Termos utilizados e quantitativo na Base de dados da UAB Portugal....	55
Quadro 10 – Total de trabalhos relacionados.....	55
Quadro 11 – Trabalhos selecionados que abordam números complexos.....	59
Quadro 12 – Trabalhos selecionados que abordam funções complexas	60

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	14
1.1 Justificativa da pesquisa.....	14
1.2 Relato da trajetória da pesquisa	20
1.3 Organização da tese	22
2. A MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS	23
2.1 O conjunto dos números complexos	23
2.1.1 Funções complexas.....	25
2.1.2 Análise Complexa	28
2.2 Educação matemática e tecnologia.....	29
2.2.1 Abordagem tecnológica	33
2.2.2 Utilização das tecnologias em sala de aula	37
2.2.3 Utilização das tecnologias no ensino de matemática.....	39
3 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO	48
3.1 Condução do levantamento	53
3.2 Apresentação e descrição dos dados	56
3.3 Análise dos dados	62
3.3.1 Análise dos trabalhos que abordam números complexos.....	63
3.3.2 Análise dos trabalhos que abordam funções complexas	66
3.3.3 Principais características de um <i>software</i> voltado para números e funções complexas	72
4 DESENVOLVIMENTO DO SOFTWARE.....	74
4.1 Embarcadero e o pacote GLScene	76
4.2 <i>Software</i>	79
4.3 Funcionalidades.....	84
4.4 Dificuldades para o desenvolvimento	86
4.4 Elaboração de uma sequência didática.....	89
4.5 Análise do <i>software</i> e seu desenvolvimento	93
CONSIDERAÇÕES FINAIS	100
REFERÊNCIAS.....	104

1 INTRODUÇÃO

A intenção de desenvolver esta tese surgiu primeiramente da vivência e das experiências como professor de matemática na Educação Básica e, atualmente, no curso de licenciatura em que leciono. Dessas vivências, foi possível observar como pode ser relevante o uso das ferramentas tecnológicas à promoção de um aprendizado mais produtivo e também como essas ferramentas viabilizam uma aula mais dinâmica, em contraponto ao habitual quadro e giz. Certa vez, em sala de aula, ao ser indagado por alguns licenciandos do primeiro ano do curso de matemática sobre a impossibilidade de obter uma solução dentro do conjunto dos números reais para uma determinada equação real, houve um despertar sobre como poderia se lançar luz sobre esse problema, desvencilhando-se da habitual resposta que se limita a dizer que: “Este problema não tem solução no conjunto real.”, como se apenas essa afirmação bastasse para o momento, desconsiderando as questões mais recorrentes como: “Se a equação não admite solução real, como obtenho a solução?”, “Qual o significado da afirmação: não admite solução real?”. Outrora, na Educação Básica, deparamo-nos com a dificuldade de compreensão dos estudantes sobre o porquê não existir raiz quadrada para número negativo. Essas situações corriqueiras de sala de aula despertaram o interesse em investigar novas formas de apresentação de elementos do conjunto dos números complexos.

Desse modo, esta pesquisa tem por objetivos desenvolver uma nova abordagem para o conjunto de números complexos e derivadas de funções complexas por meio de recursos de tecnologia; apresentar passos de como elaborar uma ferramenta tecnológica (*software*) que possibilite a visualização de elementos de funções e derivadas complexas; discutir as dificuldades no desenvolvimento de ferramentas de tecnologia por professores que detêm apenas conhecimento específico de sua área de formação, neste caso, a matemática, e analisar a ferramenta desenvolvida.

1.1 Justificativa da pesquisa

O conjunto dos números complexos é um tema não abordado de maneira integral durante a Educação Básica e os motivos podem ser os mais diversos, como:

a valorização de outros conteúdos em detrimento a este ou o pouco domínio do professor em relação ao assunto, entre outros. Conforme descreve Silveira (2002, p. 8), alguns professores da disciplina de matemática sugerem torná-la mais fácil, pressupondo “que ela seja difícil”. Observando manifestações de um grupo de estudantes que considera essa disciplina “chata e misteriosa, que assusta e causa pavor” (SILVEIRA, 2002, p. 8), a pesquisadora destaca o sentimento de medo desses sujeitos de não terem êxito no aprendizado. Em uma disciplina da área de Exatas, uma questão ou problema pode requerer uma resposta única e formalizada, exigindo conhecimento e domínio de todo um repertório de conceitos e também a mobilização de ideias para se chegar à resposta desejada, e essa imposição de se obter ou não tal resposta pode despertar esses sentimentos negativos.

Ao verificar os documentos oficiais que norteiam a Educação Básica, em busca de subsídios quanto à abordagem do conjunto dos números complexos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) preveem que esse tema pode ser flexibilizado, apoiando-se no fato de que, por não ter muitas aplicações, sua compreensão se torna sem sentido aos estudantes que não pretendem dar seguimento ao estudo nas áreas de exatas (BRASIL, 2002). Consecutivamente, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que é o documento vigente, nem mesmo descreve o conteúdo, assim como outros conteúdos matemáticos (BRASIL, 2017), deixando uma lacuna quanto à abordagem desse tema e corroborando para a ideia da pouca utilidade, pois, como afirma Amorim (2014):

[...] é necessária uma mudança na prática de ensino desse conteúdo, pois da maneira como ele é transmitido não só pelos profissionais do ensino, mas também pela maneira como se apresenta nos materiais didáticos, transmite ao aluno a ideia de que esse conteúdo não tem qualquer importância e seu estudo para nada serve, pois é totalmente desarticulado da própria matemática (AMORIM, 2014, p. 152).

Essa situação, em que não são previstos conteúdos de relevância à área de matemática, submete o professor e demais atores educacionais a uma posição pouco confortável, pois como é possível abordar conteúdos cujos documentos oficiais pouco exploram ou até mesmo mencionam? Como vão justificar a inclusão desses conteúdos se a documentação oficial trata com superficialidade? E, por consequência, parte dos estudantes da educação básica se forma sem o domínio desses conceitos, podendo ingressar em Instituições de Ensino Superior, levando

consigo um déficit de conteúdos. O pouco contato dos estudantes com esse conteúdo se reflete principalmente nos cursos superiores de Exatas, quando o aperfeiçoamento do conhecimento na área exige o resgate de elementos considerados fundamentais ao avanço nos estudos.

Ao fazer uma sondagem nas ementas dos cursos presenciais de matemática oferecidos pelas sete Universidades Estaduais do Estado do Paraná, observou-se que, dos 14 cursos de licenciatura oferecidos, apenas seis oferecem duas disciplinas obrigatórias, em que o conteúdo dos números complexos está previsto. Em oito desses cursos, tal conteúdo está previsto em uma única disciplina, ou seja, mais da metade dos cursos de licenciatura em matemática oferecidos nesse Estado disponibilizam somente uma disciplina com abordagem do tema, correspondendo a uma parcela pequena quando comparado ao conteúdo de cálculo diferencial e integral, por exemplo, que está vigente em 100% das grades, e levando-se em consideração também o tempo de formação, pois esses cursos têm média de duração de quatro anos.

Averiguando a grade curricular, os cursos de licenciatura aparecem em desvantagem em relação aos cursos de bacharelado, quanto à oferta de conteúdo relacionado às variáveis complexas. Observou-se que, dos cursos de licenciatura, em somente dois tal conteúdo é oferecido em disciplina regular (não optativa). A disciplina em modalidade optativa é oferecida em apenas três universidades. Em contrapartida, de acordo com o Quadro 1, dos quatro cursos de bacharelado em matemática existentes, todos oferecem disciplinas que abordam o tema “variáveis complexas”. Tal situação dá indícios de que poderá haver um despreparo profissional do professor de matemática quanto ao domínio dos elementos que constituem o tema, pois, se o professor em formação não entra em contato com esse conteúdo, como poderá desenvolvê-lo dentro da Educação Básica? E se o professor não detém esse conhecimento, o preparo do estudante que está sendo formado na Educação Básica, quanto a este conteúdo, pode ser limitado ou frustrado. Isso pode se refletir futuramente no fracasso desse estudante ao ingressar na Educação Superior, desencadeando, entre outros problemas, a desmotivação e até mesmo o abandono.

As sete universidades estaduais do Paraná oferecem, juntas, 14 cursos de licenciatura e 4 cursos de bacharelado em Matemática. Os cursos de bacharelado são ofertados na Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Estadual

de Maringá (UEM), Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG) e Universidade Estadual do Centro Oeste (UNICENTRO). As demais universidades ofertam somente o curso de licenciatura: Universidade Estadual do Oeste (UNIOESTE), Universidade Estadual do Norte do Paraná (UENP) e Universidade do Paraná (UNESPAR). Ocorre que, ao verificar a grade curricular dos cursos de licenciatura, em uma mesma universidade pode haver diferenças entre a grade curricular dos cursos, variando de acordo com o câmpus à qual o curso pertence.

Quadro 1 – Oferta de disciplina relacionada às variáveis complexas

Curso		Oferta
UEL	Bacharelado – curso único	Sim
UEM	Bacharelado – curso único	Sim
UEPG	Bacharelado – curso único	Sim
UNICENTRO	Bacharelado – curso único	Sim
UEL	Licenciatura – curso único	Não
UEM	Licenciatura – curso único	Sim
UEPG	Licenciatura – curso único	Não
UNIOESTE	Licenciatura – câmpus <i>Cascavel</i>	Sim
	Licenciatura – câmpus <i>Foz do Iguaçu</i>	Não
UNICENTRO	Licenciatura – câmpus Guarapuava	Sim (optativa)
	Licenciatura – câmpus Irati	Sim (optativa)
UENP	Licenciatura – câmpus Jacarezinho	Não
	Licenciatura – câmpus Cornélio Procópio	Sim (optativa)
UNESPAR	Licenciatura – câmpus Apucarana	Não
	Licenciatura – câmpus Campo Mourão	Não
	Licenciatura – câmpus Paranaguá	Não
	Licenciatura – câmpus Paranavaí	Não
	Licenciatura – câmpus União da Vitória	Não

Fonte: autor, baseado nas grades curriculares dos cursos selecionados.

Limitamo-nos a relacionar apenas os cursos de matemática oferecidos por universidades públicas estaduais no Estado do Paraná; dessa forma, não podemos fazer afirmações mais gerais. Observa-se um indício de como se configura a grade curricular dos cursos de licenciatura em matemática oferecidos em âmbito estadual, e a oferta de disciplinas relacionadas aos números complexos e às variáveis complexas. Há ainda que se considerar que foram encontrados Projetos Políticos de Curso anteriores a 2019; algumas universidades já disponibilizaram mais de uma

grade, indicando que o curso está promovendo adequações para atender às Diretrizes Curriculares Nacionais à Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e também à Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação) (2019). Esse movimento de adequação dos cursos de formação de professores indica que ainda poderá haver redução na carga horária destinada aos conceitos de números complexos e também de outras disciplinas e conteúdos de referência, visando atender a novas determinações, como a curricularização da extensão universitária¹.

Outros cursos da área de exatas como: os cursos de Engenharia, Física, Química, por exemplo, também oferecem disciplinas que utilizam números complexos ou funções de variável complexa. E, nesses casos, a lacuna pode ser ainda maior, se o professor responsável por lecionar tais disciplinas, formado em um curso de matemática com esta configuração, teve pouco ou quase nenhum contato com esse conteúdo em seu curso de formação.

A abordagem dos números complexos na Educação Básica é um tema relevante, principalmente quando se conjectura o preparo de estudantes que ingressarão nos cursos superiores da área de Exatas. Não é um conteúdo da matemática pura, visto de forma isolada e sem aplicação, está relacionado com diversos conceitos, especialmente com a trigonometria. Assim, pode ser utilizado em situações da vida cotidiana, em problemas que envolvam divisão, ou uma representação polinomial, relacionando o teorema de Pitágoras ou conceitos da Geometria Euclidiana. De acordo com Fassis e Gadotti (2021), as funções de variável complexa são elementos verdadeiramente importantes e aplicados nas mais diversas áreas do conhecimento, como o processamento de imagens, a dinâmica de fluídos, nas engenharias e diversas outras áreas em que a solução de problemas envolvendo geometria seja abordada. Os problemas mais familiares, explorados em nível básico, são os que tratam de otimização, com enunciados onde se procura obter a maior área construída com certa quantidade de material. Outros problemas, por exemplo, envolvem descobrir o maior perímetro a ser cercado com uma quantidade fixa de arame ou tela.

¹ curricularização da extensão universitária adequa o Projeto Pedagógico de Curso (PPC), visando garantir uma carga horária mínima para ações de extensão, atendendo à Resolução do Conselho Nacional de Educação (Resolução nº 7/2018).

Nesse sentido, a abordagem do tema na educação básica é necessária e relevante. Entretanto, como afirma Amorim (2014, p. 152), a “falta de contextualização e a maneira como eles são abordados” remetem a ideia de que esses conteúdos para pouco servem”. A autora sugere que a utilização de *softwares* como o Geogebra, possibilita construções geométricas que embasam o entendimento do assunto e são também ferramentas motivadoras do estudo. Ao analisar o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2010) e o Caderno do Aluno (SÃO PAULO, 2014), a autora considera que a forma como esses documentos tratam o assunto é insuficiente para possibilitar ao estudante a apropriação dos conhecimentos mínimos necessário, destacando que o foco está somente na manipulação de resoluções de equações polinomiais, desmerecendo os benefícios da manipulação geométrica.

A experiência de lecionar matemática no nível superior, especialmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), propiciou maior interesse em estudar maneiras variadas de abordagem dessa disciplina, que tantas vezes é vista como “pesada”, devido ao volume de informação, rígidos exercícios algébricos e visualizações geométricas.

Logo, uma ferramenta para maior interação com o conteúdo de funções complexas – proporcionando o acesso aos principais pontos de abordagem desse conteúdo de maneira dinâmica e que promova a inserção desse conteúdo nos mais diversos cursos de exatas, principalmente os cursos de licenciatura em matemática, viabilizando um aperfeiçoamento do estudante – pode ser bem-vinda no processo de ensino e aprendizagem.

As vivências na Educação Básica nos possibilitaram um olhar de maior interesse pelo uso das tecnologias, uma vez que essas ferramentas proporcionam interações, aproximações e a realização de atividades que seriam inviáveis somente com os recursos físicos de uma sala de aula tradicional, sobretudo, com a escassez de material, fato recorrente na educação pública do país. Partimos da premissa de que o uso das tecnologias pode trazer benefícios, quando empregado de maneira planejada, pois a tecnologia por si não resolve os problemas da educação, mas, como afirma Papert (2001), a educação sem tecnologia está condicionada a falhar. As oportunidades de explorar a tecnologia são diversas, como o construcionismo (termo criado por Papert), que sintetiza a teoria de Piaget e alia os recursos tecnológicos viabilizando a construção da aprendizagem por meio de elementos que

sejam significativos para o estudante (PAPERT, 1986, p. 8). A utilização dessas ferramentas tem sido foco de diversas pesquisas nos últimos tempos e o entendimento é que somente o emprego de ferramentas tecnológicas não garante a ascensão da educação a patamares mais elevados de qualidade, a figura do professor também é imprescindível nos ambientes de estudo (FREIRE, 1976; MORAN, 2017; PAPERT, 2001; SOFFNER, 2013).

1.2 Relato da trajetória da pesquisa

O plano inicial desta pesquisa era desenvolver uma ferramenta tecnológica no formato de *software*, que possibilitasse a plotagem gráfica de funções de variável complexa, suas derivadas, integrais e demais elementos que compõem o estudo dos principais rudimentos da Análise Complexa, promovendo maior interação desse tema nos cursos de nível superior. Todavia, deparamo-nos com a dificuldade quanto ao tempo de execução no momento inicial do desenvolvimento. De fato, esses assuntos demandam um conhecimento matemático aprofundado, o que exigiria longas horas de estudo e revisão de conteúdos e, em seguida, a implementação do algoritmo, que por sua vez, também exigiria muitas horas de programação. Dessa forma, foi preciso delimitar o tema e essa delimitação ocorreu após a observância sobre quais tópicos seriam mais relevantes para se implementar na ferramenta a ser desenvolvida.

Fez-se uma análise de alguns livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e Análise Complexa (SPIEGEL, 1973; CHURCHILL, 1975; LIMA, 1989; GUIDORIZZI, 2001; BERNARDES JR.; FERNANDEZ, 2006; SOARES, 2016) e se optou por trabalhar com funções e derivadas de funções complexas, pois são pontos que antecedem ao tema de Integral. A ordem condicionada na maioria dos livros se dá pela abordagem dos seguintes temas: funções, limites, derivadas, séries e somente então integrais. Desse modo, a opção por desenvolver uma ferramenta que abordasse apenas funções e derivadas permitiria ao usuário adentrar em tópicos como o limite de funções, continuidade, pontos singulares, zeros e demais assuntos que poderiam ser investigados com o auxílio da plotagem gráfica desse tipo de função.

Após a análise de livros que abordam o conteúdo de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Complexa, mais especificamente com funções de variável

complexa, surgiu a necessidade de averiguar quais são os *softwares* já existentes e que tipo de interação promovem. Outro ponto necessário de averiguação seria como as pesquisas científicas vêm tratando o tema números complexos e funções complexas e qual a relevância desse tema às pesquisas científicas e como o uso de recurso de tecnologia tem ganhado espaço nas aulas de matemática dos diversos níveis de ensino. Para tanto, elaborou-se um levantamento de dados sobre o estado da arte relacionado ao tema: *softwares*, números complexos e funções complexas. Esse levantamento levou em consideração apenas bases de dados científicas sem a restrição de período de publicação.

Um dos resultados do levantamento revela que são poucos os trabalhos que utilizam *software* para plotagem gráfica de números e funções complexas e a maioria das representações dos elementos relativos ao conjunto dos números complexos se resume ao plano de Argand-Gauss. Esse tipo de representação se limita à representação dos elementos do conjunto dos números complexos por um plano cartesiano, podendo ser um desafio para o estudante, pois, via de regra, há confusão na tentativa de se fazer relação entre as funções de variável complexa e as funções de variável real. Poucos foram os trabalhos que apresentam uma representação diferente da abordagem com o plano de Argand- Gauss. Dos poucos trabalhos que apresentam tipos diferentes de abordagem, destaca-se o de Silva (2006). Nesta pesquisa, o autor desenvolve um *software* de plotagem gráfica para representação de funções de variável complexa utilizando uma paleta de cores. Essa paleta de cores, elaborada por Thaller (2000), possibilita que um plano cartesiano possa representar um número complexo de maneira bidimensional permitindo uma maior visualização do resultado, já que adota elementos coloridos.

A lacuna da impossibilidade de visualizar o gráfico de uma função complexa mobilizou Silva (2006) no desenvolvimento de um *software* que facilitasse a visualização do gráfico de funções de uma variável complexa, por meio do domínio de cores. De acordo com o autor, o conceito pode ser abstrato aos estudantes, mesmo assim, é possível representá-lo de uma forma gráfica.

Motivado pela interação promovida por esse *software*, iniciou-se o desenvolvimento de um recurso tecnológico, baseado nas ideias de Silva (2006), para a representação de elementos e conteúdos relacionados aos elementos de Análise Complexa, com respaldo teórico no domínio de cores. Sendo assim, o resultado da construção da ferramenta tecnológica foi uma tentativa de produzir um

software baseado no *software* FC-Funções Complexas, implementando atualizações à abordagem de elementos da Análise Complexa, partindo-se da seguinte indagação: qual a relevância das ferramentas gráficas na representação de funções de variável complexa?

Considera-se aqui, que essas ferramentas gráficas, nomeadas aplicativos, *software* ou aplicações, possibilitem a plotagem gráfica de funções de variável complexa e com intenção de viabilizar uma maior interação do usuário com o conteúdo apresentado. A presente pesquisa descreve o desenvolvimento de uma ferramenta tecnológica, que sintetiza atributos, na expectativa de que proporcionem maior dinamicidade às aulas de matemática, principalmente as aulas que seguem os padrões tradicionais de ensino e ocorrem de forma monótona, cujo educador é detentor do conhecimento e o aprendiz passivo, e não se leva em conta os conhecimentos prévios dos educandos, tão pouco se considera discutir a sociedade do século 21 e suas transformações impulsionadas pelos avanços em tecnologia.

1.3 Organização da tese

Esta tese está organizada em cinco capítulos. O Capítulo 2 apresenta uma revisão de literatura sobre o tema “A matemática e as tecnologias”. No Capítulo 3, apresentamos um levantamento bibliográfico, a partir de trabalhos acadêmicos em bancos de dados de artigos, teses e dissertações. Apresentamos também uma breve descrição dos trabalhos e uma análise dos pontos negativos e positivos considerados mais relevantes pelas pesquisas selecionadas. O Capítulo 4 traz os pontos principais no desenvolvimento do *software*; algumas características são descritas na intenção de promover a ferramenta e também é feita uma análise do *software* e das dificuldades no seu desenvolvimento. Uma sequência didática é também apresentada neste capítulo. Por fim, o Capítulo 5 traz as últimas considerações.

2. A MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS

Neste capítulo, reunimos os conceitos matemáticos que basearam a construção do *software*, procurando relacionar os pontos mais relevantes em conformidade com autores da área. A primeira seção reúne elementos do conteúdo escolhido e, na sequência, discorreremos sobre os principais pontos de aproximação entre a área de educação matemática e uso de tecnologias.

2.1 O conjunto dos números complexos

O conceito de números complexos se desenvolve junto com a álgebra. A dificuldade em resolver problemas que envolviam raízes de equações polinomiais de grau superior a 2 desencadearam o interesse pelos números complexos. Primeiramente, equações do tipo $x^2+1=0$, que não admitiam solução no conjunto dos números reais, levaram a necessidade de se definir uma unidade imaginária i , raiz quadrada de -1 . Entretanto, durante o período histórico do Renascimento, a ideia de números complexos era vista com desconfiança ou até mesmo rejeição por alguns matemáticos proeminentes, como Descartes, o conceito era considerado "fictício" ou mesmo "impossível". Dados históricos indicam que a primeira publicação aceita como resolução para uma equação cúbica tenha ocorrido em 1545, pelo matemático italiano, Girolamo Cardano. Esta resolução ficou conhecida como Fórmula de Cardano, e foi propulsora do desenvolvimento dos números complexos, pois, até então, não havia método para solucionar as equações cúbicas (VIEIRA, 1999). O fato envolve ainda o nome do Niccolo Tartaglia, a quem se atribui a verdadeira solução para as equações cúbicas, entretanto, teria sido Cardano que, de posse da solução encontrada por Tartaglia, fez a publicação, levando o mérito pelo achado.

Mais tarde, o matemático Bombelli, também italiano, trouxe notáveis contribuições, principalmente quanto à linguagem simbólica utilizada. Em seu primeiro livro *L'Algebra*, são abordados princípios como a existência das raízes negativas e as definições de conceitos como potência e binômios. No final do século 18, Caspar Wessel, um matemático norueguês, e Jean-Robert Argand, um matemático suíço, desenvolveram uma representação geométrica, que permitiu uma compreensão mais intuitiva dos números complexos como pontos em um plano, onde um eixo representava a parte real e outro eixo representava a parte imaginária.

Mais à frente, o teorema fundamental da álgebra, provado por Gauss, estabeleceu que todo polinômio com coeficientes complexos tem pelo menos uma raiz complexa. Isso destacou a importância dos números complexos na teoria dos polinômios e análise (VIEIRA, 1999).

Os números complexos pertencem a um conjunto numérico que pode ser entendido como extensão do conjunto dos números reais. Todo número complexo é constituído de uma parte real e uma parte imaginária e são expressos na forma **$a + bi$** , onde **a** é a parte real, **b** é a parte imaginária, e **i** é a unidade imaginária, definida como a raiz quadrada de -1 . As operações matemáticas elementares de adição, subtração, multiplicação e divisão devem levar em consideração as duas partes (real e imaginária) do número complexo. A representação de um único número complexo no plano cartesiano, ou plano complexo, exige que o eixo x seja usado para representar a parte real e o eixo y usado para representar a parte imaginária. Isso possibilita que os números complexos sejam visualizados como pontos no plano e permite a compreensão de suas propriedades geométricas (SILVA, 2006).

Uma propriedade importante dos números complexos é a relação entre conjuntos, entendida como funções complexas. As funções complexas são aquelas que envolvem variável complexa, ou seja, tanto a variável de entrada quanto a de saída são números complexos. Essas funções desempenham um papel crucial na Análise Complexa, que é o estudo das funções complexas e suas propriedades. Uma das propriedades mais notáveis dos números complexos é o fato de que eles podem ser elevados a qualquer potência complexa. Isso significa que é possível calcular a raiz quadrada de um número complexo, bem como a raiz cúbica e outras raízes complexas. Essa propriedade é essencial na resolução de equações e na solução de problemas que envolvem números complexos (BERNARDES JR.; FERNANDEZ, 2006).

Não é possível comparar os números complexos da mesma forma que se faz com números reais, pois eles não obedecem a uma ordem natural. Por exemplo, o número complexo **$4 + 2i$** tem parte real **4** e parte imaginária **2** . Alguns conceitos importantes relacionados a números complexos incluem:

Conjugado: o conjugado de um número complexo **$(a + bi)$** é **$(a - bi)$** .

Módulo (ou Magnitude): o módulo de um número complexo é a distância do número complexo até a origem no plano complexo. Dado um número complexo $Z = (a + bi)$, denota-se o módulo como $|Z| = |(a + bi)|$. Dado por: $|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Argumento: o argumento de um número complexo $Z = (a + bi)$ é o ângulo $\varnothing$ que o vetor do número complexo faz com o eixo real positivo. Pode ser calculado usando a fórmula: $\tan \varnothing = \frac{a}{b}$.

Forma Polar: um número complexo $Z = (a + bi)$ pode ser representado na forma polar como $Z = r(\cos(\varnothing) + i\sin(\varnothing))$, onde r é o módulo e $\varnothing$ é o argumento.

Fórmula de Euler: A fórmula de Euler relaciona os números complexos com as funções trigonométricas, sendo dada por $e^{i\varnothing} = (\cos(\varnothing) + i\sin(\varnothing))$.

Os números complexos têm várias aplicações em Matemática, Física e Engenharia, sendo essenciais em áreas como Análise Complexa, teoria de circuitos elétricos e mecânica quântica.

2.1.1 Funções complexas

A função é a articulação matemática entre duas ou mais variáveis em que dessas articulações podem se obter gráficos, por meio da variabilidade de dados. O conceito de função pode ser entendido também como a representação da relação entre dois conjuntos, onde todo o elemento do primeiro conjunto tem uma relação singular com outro elemento do segundo conjunto (MAGARINUS, 2013). Essa relação entre dois conjuntos A e B , por exemplo, pode ser expressa pela representação $f: A \rightarrow B$ (lê-se que f é a função de A em B). Entende-se que f é o nome dado à função; A , o conjunto domínio; B , o conjunto contradomínio. Logo, uma relação entre dois conjuntos A e B só pode ser definida como função quando previamente definidos os conjuntos domínio e contradomínio e também a lei de formação, que relaciona um conjunto ao outro, normalmente representada pela expressão $y = f(x)$. No caso do exemplo adotado, x pertence ao conjunto A e y pertence ao conjunto B .

Observa-se, no entanto, que as principais funções aprendidas dentro da educação matemática escolar são as que envolvem o conjunto dos números reais. A aprendizagem das funções promove a aproximação com a linguagem algébrica, necessária ao entendimento da associação entre grandezas e para moldar

situações-problemas, elaborando representações de acontecimentos e consentindo múltiplas relações dentro e fora da própria matemática. Portanto, o destaque do estudo das díspares funções deve estar na definição de função e em suas características em relação às operações, na análise de seus gráficos e nas aplicações em contextos da realidade do estudante (BRASIL, 2002, p. 118).

Para Magarinus (2013, p. 12), no campo da matemática, “o estudo de funções relaciona-se diretamente à álgebra, no que se refere às expressões algébricas presentes nas leis de formação de funções e na relação entre variáveis”. Essa associação ao estudo de álgebra acontece devido aos algoritmos algébricos existentes nos princípios do desenvolvimento das funções e na articulação das variáveis.

As funções complexas são uma parte essencial da análise matemática e têm ampla gama de aplicações em várias áreas, desde a Física e a Engenharia até a Economia e Ciências da Computação. Definida no conjunto dos números complexos, uma função complexa leva um número complexo como entrada e produz outro número complexo como resultado. Esta pode ser representada por uma expressão algébrica ou por uma fórmula matemática. Basicamente, uma função complexa é uma regra que associa a cada número complexo z em um conjunto chamado domínio D (subconjunto do plano complexo), outro número complexo w em um conjunto denominado contradomínio (BERNARDES JR.: FERNANDEZ, 2006; LIMA, 1989). Comumente denotamos o valor de y como $f(z)$ e o valor de entrada com z . Suas propriedades básicas se constituem em:

Continuidade: uma função complexa $f(z)$ é contínua em um ponto z_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Derivabilidade: uma função complexa $f(z)$ é derivável em um ponto z_0 se o limite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existe.

Esse limite é chamado de derivada de $f(z)$ em z_0 e é denotado por $f'(z_0)$.

Integrabilidade: uma função complexa $f(z)$ é integrável em um intervalo $[a, b]$ se o limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \Delta x$$

existe. Esse limite é chamado de integral de $f(z)$ em $[a, b]$ e é denotado por

$$\int_a^b f(z) dz$$

Podem se relacionar como funções complexas elementares as seguintes funções:

A função exponencial complexa definida como e^z .

A função logaritmo complexa, inversa da função exponencial complexa $\ln e$.

As funções trigonométricas complexas, que podem também ser definidas pela relação de Euler como:

$$\text{i) } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\text{ii) } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\text{iii) } \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

As funções hiperbólicas complexas definidas como:

$$\text{i) } \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\text{ii) } \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\text{iii) } \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

A função complexa se conota como um conceito matemático chave ao estudo do Teorema Fundamental da Álgebra, que relaciona toda função polinomial complexa de grau n a um número m de raízes no plano complexo. O teorema de Cauchy-Goursat argumenta que: Seja $f(z)$ uma função complexa contínua em uma região simplesmente conexa D , então a integral de linha de $f(z)$ ao longo de qualquer curva fechada γ em D é igual a zero. Ou o teorema de Liouville fixa que: Seja $f(z)$ uma função complexa inteira e limitada, então $f(z)$ é constante (LIMA, 1989; SPIEGEL, 1973). As aplicações das funções complexas são vastas e abrangem várias áreas da matemática e ciências aplicadas. Essas funções desempenham um papel crucial na resolução de equações diferenciais parciais, no estudo de campos elétricos e na teoria dos números.

2.1.2 Análise Complexa

A Análise Complexa é uma área da matemática que se concentra no estudo das funções complexas e suas propriedades e implicações. Ela tem aplicações em diversas áreas, como Física, Engenharia e Ciência da Computação, sendo que, por meio da Análise Complexa, é possível entender melhor o comportamento das funções complexas. Envolve também o estudo de suas propriedades e comportamentos, como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade, sendo a diferenciabilidade uma das propriedades mais importantes das funções complexas. Uma função complexa é diferenciável em um ponto se suas derivadas parciais existirem e forem contínuas nesse ponto. Isso permite a aplicação de técnicas de cálculo diferencial complexo, como a regra de Cauchy-Riemann, que relaciona as derivadas parciais de uma função complexa com suas propriedades analíticas (SOARES, 2016).

A análise de funções complexas também envolve o estudo de suas singularidades, ou seja, pontos cuja função não é diferenciável. Há diferentes tipos de singularidades, como pontos singulares removíveis, polos e pontos essenciais. O estudo dessas singularidades é essencial para entender o comportamento das funções complexas no entorno de pontos específicos, sendo útil também no cálculo de integrais ao longo de curvas fechadas. Uma das aplicações mais relevantes é na resolução de equações diferenciais parciais. Muitas equações diferenciais parciais podem ser transformadas em equações diferenciais complexas usando técnicas da Análise Complexa. Essas transformações possibilitam a obtenção de soluções analíticas para problemas físicos e matemáticos. As funções complexas também são amplamente utilizadas na teoria de potencial, que estuda a distribuição de cargas elétricas e campos elétricos em um espaço tridimensional (SPIEGEL, 1973; SOARES, 2016).

A Análise Complexa fornece ferramentas ao cálculo de potenciais e campos elétricos, simplificando os cálculos e permitindo uma melhor compreensão desses fenômenos físicos. Outra aplicação importante das funções complexas está na teoria dos números. A Análise Complexa possibilita entender as propriedades dos números complexos e suas relações com os números reais e inteiros (SILVA, 2006). Ela também fornece uma base para a teoria dos números complexos, fundamental em criptografia e segurança de dados. Além de sua aplicação na mecânica quântica, na

descrição do comportamento da matéria em escala atômica e subatômica. A Análise Complexa permite entender e descrever fenômenos físicos e matemáticos complexos, fornecendo soluções analíticas.

2.2 Educação matemática e tecnologia

O que temos hoje é uma sociedade cada vez mais balizada pelo mercado, em que a matemática é frequentemente utilizada para aumentar vendas, reduzir despesas e produzir lucro, sem que o sujeito se sinta explorado ou enganado. Vivemos no auge das redes sociais, cujas informações sobre o sujeito e seus interesses têm um peso enorme e um valor até então impensado. A matemática empregada nesses sítios virtuais, registra, processa e aponta a melhor forma de vender e comprar, sem que o usuário ao menos tenha ciência de que está a todo momento sendo analisado e dissecado. O estudo da matemática deve viabilizar uma conexão com outros saberes e: “traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do estudante” (BRASIL, 2002, p. 108). São requisitos que se espera que o estudante alcance: entender e interpretar relações com o mundo; adequar-se aos vocabulários específicos e opiniões; verificar e saber avaliar; extrair considerações próprias, com tomadas de decisões; saber universalizar.

A educação também sofre influência histórica e social. E a educação matemática, embora tenha certa estrutura de conceitos matemáticos elementares, que em geral não se alteram, deve considerar as mudanças ocorridas na sociedade, a fim de não se distanciar da realidade. Alterações que estão mais no âmbito das abordagens do que no assentimento de conceitos. As experiências vivenciadas pela humanidade nesta era digital, a comunicação e a interação virtual viabilizam a aproximação entre os indivíduos e a troca de informações de maneira muito dinâmica e rápida (VALENTE, 2019).

No âmbito educacional, as Tecnologias de Informação e Comunicação (TICs) vão se admitindo de diferentes formas, como *software* e aplicativos, favorecendo uma aula mais dinâmica e contribuindo com a melhoria na aprendizagem. Ao utilizar as ferramentas tecnológicas como estratégia educacional, Gomes e Boursheld afirmam que esses recursos são ótimas ferramentas:

[...] pois não são apenas uma forma de divertimento, eles auxiliam e facilitam o desenvolvimento cognitivo, construindo através da experimentação e da interação uma assimilação e interpretação dos recursos linguísticos primordiais (GOMES; BOURSCHELD, 2017, p. 6).

Nesse contexto, não é intenção discutir se os recursos de tecnologia devem estar presentes nos ambientes educacionais, mas procurar entender os impactos e as possibilidades desses recursos na educação, partindo-se do entendimento de que a vivência em sociedade exige, a cada novo dia, maior domínio e entendimento dessas ferramentas (VALENTE, 1999). A sociedade se torna cada vez mais digital, e estar rodeado de aparatos de tecnologia não é mais ficção científica. Dessa forma, a falta de domínio dos recursos tecnológicos pode impactar na ascensão de postos de trabalho e até mesmo na interação do cidadão dessa nova sociedade.

A ausência de discernimento das notícias falsas e a opção de acesso à informação em canais com conteúdo duvidoso são reflexos desse despreparo nesse início de século. Logo, sendo os ambientes de aprendizagem capazes de oferecer ao sujeito conhecimentos sobre os avanços científicos, é fundamental que estes promovam também domínio e criticidade dos mesmos. Na perspectiva de Papert (2001), a abertura da escola aos processos de ensino e aprendizagem mediados com as tecnologias, tende a oferecer um ambiente motivador ao estudante e, por meio dessa abertura, a criticidade é também abordada para que o processo de aprendizagem esteja completo.

Essas ferramentas tecnológicas atuais proporcionam interações que antes não eram possíveis dentro de uma sala de aula tradicional. No caso da matemática, que, muitas vezes, pode ser encarada como complicada por professores e estudantes, esses recursos podem proporcionar novas interações com os conceitos abordados, facilitando a compreensão e derrubando crenças de que esta disciplina é para poucos ou classificada como uma matéria de difícil compreensão. Para Silveira (2002), a falta de ação, no sentido de melhorar a compreensão da matemática, corrobora para o mito de que a disciplina de matemática é difícil e, por ser uma matéria presente anualmente na grade curricular, esse bloqueio ou repulsa acaba se transformando em ódio.

O autor observou ainda que, no longo prazo, essa experiência negativa com a matemática pode impedir a assimilação dos conceitos matemáticos. Em contrapartida, para grupos que não enxergam dificuldades na matemática, pode ter

ocorrido um ensino menos efetivo, em que houve o desenvolvimento de habilidades de cálculos, mas pouca compreensão do seu significado para novas situações – o chamado aprendizado mecânico. Por isso as TICs são vistas como recursos capazes de fazer uma ponte entre o aprendiz e o conhecimento de modo mais dinâmico, porém, sem diminuição de conteúdos (SILVEIRA, 2002).

O conhecimento da matemática e o domínio de recursos de tecnologia são essenciais para o cidadão do século 21; a união deles pode ser uma forma de promover a ação do sujeito, pois, como afirma Papert (2001, p. 2), “a tecnologia por si não implica [...] uma boa educação, mas a falta de tecnologia automaticamente implica [...] uma má educação”. Recursos de tecnologia como programas computacionais podem tornar os processos de ensinar e aprender mais dinâmicos. Os *softwares* mais utilizados na área de matemática, especificamente para a abordagem de funções, são os de geometria dinâmica, pois são de fácil interação e manuseio (GARCIA, et al., 2021). Na atualidade, há uma gama de programas computacionais que podem ser utilizados em aulas de matemática, tornando as abordagens mais interessantes e inovadoras.

A abordagem dos conteúdos da matemática pode ser viabilizada de inúmeras maneiras utilizando recursos de tecnologia. Estão disponíveis na *internet sites*, como: Só Matemática; Khan Academy; Matematikên e diversos outros que reúnem variados tipos de *softwares* com conteúdos de matemática, para o uso dos docentes e estudantes, muitos deles disponíveis de forma gratuita. São diversos programas computacionais com conteúdos matemáticos variados, como: geometria, álgebra e funções. Entretanto, é fundamental citar que o uso da tecnologia precisa ser objetivo. Usar a tecnologia de forma aleatória pode fazer com que o indivíduo passe horas na frente dos dispositivos digitais sem uma real compreensão do que está fazendo e sem aproveitamento significativo desse tempo (VALENTE, 2019).

A proposta da BNCC para o uso de tecnologias foca no diálogo das diversas áreas do conhecimento, como Linguagens, Matemática, Ciências da Natureza, Ciências Humanas e Ensino Religioso. No documento, destaca-se a importância do desenvolvimento das competências digitais dos estudantes, atreladas ao uso crítico, responsável e criativo das tecnologias. Nesse sentido, a BNCC parece favorecer o uso de recursos como as redes sociais e aplicativos de interação humana, uma vez que incentiva o uso de tecnologias para criação, produção e compartilhamento de

produções individuais e coletivas, estimulando a inovação, a criatividade e a colaboração entre os estudantes (BRASIL, 2017).

O currículo brasileiro estabelece uma segmentação que pode afetar o bom desenvolvimento da aprendizagem, pois o estudo de função não tem uma continuidade e parece não haver relação de um ano escolar para o outro, já que no primeiro ano do Ensino Médio se estudam as funções afins e exponenciais, depois, no segundo ano, são trabalhadas as progressões geométricas e aritméticas. E, piorando esse cenário, são poucas as atividades que fazem uma articulação das aplicações matemáticas a outras disciplinas.

Silva (2013, p. 27) destaca que algumas vezes os docentes estão despreparados e desinteressados em verificar as orientações inseridas nos documentos oficiais, ministrando as matérias de maneira superficial e sem induzir o educando a ter empenho pelo conhecimento da matéria. Por consequência dessa metodologia, parte dos estudantes se forma sem o domínio desses conceitos, ingressando em instituições superiores de ensino com déficit nesses conteúdos. Esse acondicionamento dos fatores da grade curricular em repartições isoladas desencadeia muitas indagações e vem sendo reestruturado (BRASIL, 2006). Realçando que os PCNs não são mais os documentos oficiais, em âmbito federal, e está em vigência a BNCC homologada em 2017.

Os PCNs propõem para o estudo de funções, em sua primeira divisão, o ensino de álgebra de maneira diferente da que estava ocorrendo no ensino tradicional, com o manuseio algébrico e uma locução demasiadamente protocolada. Essa proposta visa ao foco no conceito e nos atributos, descrição gráfica e aplicabilidade (BRASIL, 2002). O documento apresenta conjunturas que podem auxiliar na contextualização do tema como: acontecimentos do cotidiano, plotagem de gráficos utilizados pelos meios de comunicação e demais recursos que outros campos do saber empregam para apresentar acontecimentos de conexão entre grandezas. Gravina e Cortiero (2011, p. 2) constatarem que: “o estudo de funções, na escola, se mantém fortemente associado à classificação dos diferentes tipos de funções – função afim, função quadrática, funções trigonométricas, função exponencial e logaritmo”.

A abordagem do tema pode abarcar além do conceito básico de função, como a relação entre conjuntos numéricos, as funções analíticas e não analíticas, aspectos, verificações gráficas, séries numéricas: progressões e conhecimento de

infinito, transformações exponenciais ou logarítmicas, funções seno, cosseno e tangente e percentual de transformação de grandezas. Essa prática pode desenvolver habilidades de distinção da linguagem álgebra, possibilitando a melhor compreensão do conceito de grandezas ou a modelagem, situações-problema com a elaboração de moldes representativos com vinculações que ocorram dentro e fora da matemática. O entendimento de função pode ocorrer relacionando-se a exemplos da vida diária, desvincilhando o processo de ensinar e aprender das recorrentes fórmulas matemáticas e repetição de exercícios. A educação não deve negligenciar essas conexões, possibilitando um olhar mais crítico e indutivo sobre circunstâncias cotidianas que envolvam esses conceitos matemáticos (SILVA, 2013, p. 28).

2.2.1 Abordagem tecnológica

As TICs cooperam para o desenvolvimento humano e viabilizam abordagens diferenciadas de ensino e aprendizado, como a aprendizagem mediada por computador, ambientes interativos, desenvolvimento do pensamento computacional, jogos computacionais, ambientes de programação, sem considerar as mais variadas possibilidades que podem ser desenvolvidas com os avanços tecnológicos que surgirão com o passar do tempo, como os avanços na inteligência artificial. Destaque para o ensino a distância, modalidade que mais se aperfeiçoou com esses avanços, principalmente com a facilidade do uso das tecnologias móveis e sem fio (VALENTE, 2019).

Com o advento das TICs, os óbices temporais e espaciais passaram a ser mitigados. A tráfego de dados *online* funciona como conexão dessas tecnologias, facilita o desenvolvimento de atividades *online*, cursos a distância, construindo ocasiões nas quais o educador e os educandos podem se deparar para cambiar opiniões, por exemplo, em um *chat*, chamada de vídeo, bate-papo *online*.

O distanciamento temporal passou a significar a possibilidade ou não de realizar atividades simultâneas ou síncronas. Mesmo a separação espacial foi sendo minimizada por intermédio da alta interação que pode existir na troca entre professor e estudante, criando as condições para o “estar junto virtual” (VALENTE, 2019, p. 2).

O atributo mais comum dessas diferentes táticas é o fato de as tecnologias móveis e sem fio, quando conectadas à internet, facilitarem o acesso à informação em qualquer local e a qualquer hora. Com a compreensão de que a construção do

saber não se reduz ao acesso à informação, as tecnologias promovem a troca de diálogo com educadores ou outros, que podem ajudar o aprendiz na construção de seu conhecimento. As metodologias ativas vêm gradualmente sendo inseridas nos cursos do Ensino Superior, principalmente, após o impacto da pandemia de COVID-19, e propiciam alocar esse estudante na circunstância de protagonista do seu aprendizado. Elas compõem possibilidades pedagógicas em que o foco do ensino esteja totalmente no estudante, colocando-o na aprendizagem por descobrimento, verificação ou solução de problemas. Essas metodologias divergem do ensino tradicional, cujo foco é o educador e não o estudante (VALENTE, 2019, p. 3).

Entretanto, o uso de tecnologias não pode ser pensado como a resposta mais viável para todos os problemas da área educacional. Há inúmeros percalços que precisam ser considerados nas abordagens que utilizam recursos de tecnologia, como a mecanização do aprendizado, a repetição é um dos problemas que podem levar o aprendiz a uma situação parecida com a do ensino tradicional, a exigência de manutenção frequente das máquinas também é outro fator, visto que a utilização desses recursos nas escolas precisa de suporte especializado. Pondera-se ainda, que o professor precisa de capacitação e tempo para estudar e avaliar para só então dominar e fazer uso desses recursos. Corroborando com essa ideia, Papert (2001, p. 2) afirma que a “tecnologia não é a solução, é somente um instrumento”.

É imprescindível que se considere a chegada da tecnologia como um avanço no conhecimento humano que não possibilita retrocesso. As tecnologias viabilizam mudanças na estrutura da sociedade, a começar pelo acesso ao conhecimento. Surgem novas maneiras de pensar, revitalizando as relações do homem com a realidade. Entretanto, isso não quer dizer que essa transformação aconteça imediatamente (FREIRE, 1976, p. 10-11).

Se o meu compromisso é realmente com o homem concreto, com a causa de sua humanização, de sua libertação, não posso por isso mesmo prescindir da ciência, nem da tecnologia, com as quais me vou instrumentando para melhor lutar por esta causa. (FREIRE, 1976, p. 11).

A problemática dessa percepção é fatídica como o erro da sua antagônica, a falsa percepção do humanismo que percebe na tecnologia o motivo dos problemas dos homens contemporâneos. E a falha principal de ambas, que não conseguem ofertar a seus usuários qualquer contorno real, ocorre que os indivíduos “não percebem o óbvio: que humanismo e tecnologia não se excluem” (FREIRE, 1976, p.

11). Não percebem que o humanismo e a tecnologia andam juntos, se o compromisso é com o homem real e sua razão e defesa de sua humanização, de seu livramento. Devido a isso, não se pode abstrair do conhecimento, nem da tecnologia, na qual o indivíduo vai se instrumentando para melhor resistir por essa causa.

A educação não se reduz à técnica, mas não se faz educação sem ela. Utilizar computadores na educação, em lugar de reduzir, pode expandir a capacidade crítica e criativa de nossos meninos e meninas. Dependendo de quem o usa, a favor de quem e para quê. O homem concreto deve se instrumentar com o recurso da ciência e da tecnologia para melhor lutar pela causa de sua humanização e de sua libertação (FREIRE, 2001, p. 98).

Para Freire (2001), a educação não pode ser reduzida à técnica, nem tampouco se pode excluir a técnica da educação, pois há indício de que a utilização desses recursos pode estimular a criatividade e a criticidade, tendo o homem que se munir destes para melhor compreender sua existência e, assim, poder lutar pela sua humanização e libertação das mazelas sociais.

É preciso repensar as ações a partir do momento em que se almeja implementar as TICs em sala de aula; as atividades precisam estar de acordo com as inovações tecnológicas propostas e não podem continuar estagnadas como se estivessem no mesmo modelo de sala de aula tradicional.

Já no campo da educação, as possibilidades de emprego da tecnologia e as consequentes preocupações pedagógicas e epistemológicas associadas derivam, basicamente, dos problemas advindos de aulas que permanecem essencialmente as mesmas mesmo após a introdução da tecnologia (SOFFNER, 2013, p. 4).

A estrutura educacional precisa ser repensada, para que o uso dos recursos de tecnologia seja mais bem aproveitado, pois a simples aquisição desses recursos não significa melhoria educacional. Para Soffner (2013), em certas ocasiões, é válido pensar que é melhor ensinar tecnologias ao estudante do que ensinar usando as tecnologias.

Assim, computadores que deveriam ser instrumentos de mudança e inovação na estrutura tradicional de educação tornam-se um fim em si mesmos, gerando interesse puramente técnico; o ensino da tecnologia parece, em determinado momento, valer mais do que o ensino com tecnologia (SOFFNER, 2013, p. 4).

A utilização da tecnologia, para Paulo Freire, não pode ocorrer de forma despretensiosa ou sem alguma preparação. Na proposta de Freire, o primeiro

elemento para a práxis tecnológica discorre da utilização com intenção, política e tecnológica. A utilização da tecnologia está influenciada de ideologia, não se deve descuidar-se disso (ALENCAR, 2005, p. 3).

Essa atitude crítica em relação à utilização de tecnologia precisa estar focada na melhoria da educação como um todo, repensando a sociedade com a intenção de promover avanços sociais como: igualdade, acesso à informação, formação profissional, justiça social, etc. Entender os mecanismos tecnológicos possibilita ao sujeito sua humanização, facilitando uma transformação que não é somente do sujeito, mas é também social e oposta ao processo de alienação (FREIRE, 1976). O domínio da tecnologia não pode promover uma condição de mecanização no sujeito, transformando-o também em uma máquina, pois “não podem ser máquinas que somente realizam movimentos repetitivos, sem a mínima noção do que fazem ou do que produzem, trabalhadores hiperespecialistas” (ALENCAR, 2005, p. 3-4).

Espera-se do indivíduo o desenvolvimento das capacidades de interpretar, controlar e saber usar a tecnologia. O ser humano não deveria imitar a máquina, com movimentos estáticos e robóticos, mas agir com criticidade, procurando entender o porquê da sua utilização. “Por isso, também não posso reduzir o homem a um simples objeto da técnica, a um autômato manipulável” (FREIRE, 1976, p. 11).

Dessa forma, é fundamental entender o processo, para que os homens se encaminhem à humanização. E esse processo precisa ser entendido e idealizado pelo sujeito:

Freire teme e acredita que, em diversas circunstâncias, as inovações tecnológicas têm sido impostas de cima para baixo ou de fora para dentro, caracterizando uma verdadeira invasão cultural. Para ele, a tecnologia além de ser compreendida, dominada, deve ser contextualizada – contextualizar a tecnologia em si própria, sua gênese e utilização, desvelando os interesses e a ideologia implícita, os benefícios e as limitações do uso –, em seguida, identificá-la com o contexto local, discutindo suas implicações na vida dos usuários ativos e a melhor forma de incorporá-la para o bem daquele grupo naquele contexto (ALENCAR, 2005, p. 4).

Freire destaca que é importante contextualizar a tecnologia em sua essência, exibindo, assim, seu uso, interesses, ideologia, benefícios e limitações de utilização. Logo após, percebê-la a partir do contexto social, discutindo suas problemáticas na vida dos indivíduos que fazem seu uso. Como último elemento, para uma proposta de práxis tecnológica, é o caráter que se deve adotar perante a tecnologia. O indivíduo deve ser “criticamente curioso, indagador, crítico, vigilante”, devendo por si mesmo examiná-la (ALENCAR, 2005, p. 4).

Na proposta construcionista de Papert, o educando, utilizando o computador, imagina suas edificações mentais conectando o abstrato e o concreto por meio de um método interativo que promove a elaboração do saber. Um dos fundamentos da teoria de Papert é a elaboração de locais ativos de ensino que concedam ao estudante colocar em prática suas opiniões e teorias ou suposições (PAPERT, 1986, p. 3).

Papert percebe na informática a oportunidade de concretizar seu desejo de construir situações de mudanças essenciais no desenvolvimento mental dos indivíduos. Criando uma linguagem de programação, intitulada *Logo*, com facilidade de acesso, entendimento e manuseio por crianças ou sujeitos leigos em computação e sem conhecimento da matemática. O *Logo* tem as características de uma linguagem de programação, constituindo-se de um conjunto de regras sintáticas e semânticas (PAPERT, 1986, p. 3). Por meio dos estudos efetivados com a linguagem de programação, constituíram-se cinco dimensões que formam o alicerce do construcionismo.

A dimensão pragmática discute as condições de aproveitamento imediato do conteúdo pelo aprendiz, mobilizando novos conceitos para alcançar os objetivos propostos. A dimensão sintônica é um contraponto com a sala de aula tradicional, primando pela sintonia com o que o estudante considera interessante. A dimensão sintática se relaciona aos auxílios didáticos e ambientes de aprendizagem, como a disponibilidade de instrumentos facilitadores na construção do conhecimento. A dimensão semântica se relaciona à importância do manuseio do aprendiz e aos significados provenientes da interação midiática. E a última, que é dimensão social, valoriza a cultura local e afinidades com o ambiente em que o aprendiz é nativo. Juntas, essas cinco dimensões servem de apoio à elaboração de ambientes de aprendizagem fundamentados na teoria construcionista, possibilitando ao professor parâmetros para melhor fundamentar sua prática, pautada na aquisição de tecnologia em suas aulas.

2.2.2 Utilização das tecnologias em sala de aula

Pensar a escola como um local formador de cidadãos críticos e indivíduos conscientes do seu próprio destino é uma concepção ingênua. A sala de aula é concebida nos alicerces de concepções educacionais passadas, com barreiras que muitas vezes freiam o essencial de ensinar para a cidadania. A escola não considera a participação do educando na elaboração da ciência e do próprio convívio (SILVA, 2001).

As TICs são cada vez mais essenciais ao cotidiano da sociedade e, diante desse cenário, é fundamental que a instituição de ensino esteja aparelhada para enfrentar as influências de uma população que está cada vez mais rodeada das mídias digitais (VOGEL et al., 2016, p. 2). Suas características são relevantes na customização do processo de ensino e aprendizagem, na construção de itinerários particulares, que os estudantes possam ter acesso e aprender conforme seu próprio ritmo. Essa versatilidade, consente que cada educando possa prosperar e se desenvolver de acordo com sua aptidão, cadência ou circunstância e até mesmo se sinta apto a realizar sua avaliação quando se julgar preparado (MORAN, 2017, p. 3).

Quanto à utilização das tecnologias como um auxílio ao estudante a aprender de maneira ativa, em moldes híbridos, para que ele se torne protagonista do processo de ensino aprendizagem, Moran (2017, p. 1) afirma que: “As tecnologias digitais hoje são muitas, acessíveis, instantâneas e podem ser utilizadas para aprender em qualquer lugar, tempo e de múltiplas formas”. E pondera que é necessário primeiro compreender essas ferramentas para que se possa aplicá-las na educação, afirmando que: “O que faz a diferença não são os aplicativos, mas estarem nas mãos de educadores, gestores (e estudantes) com uma mente aberta e criativa, capaz de encantar, de fazer sonhar, de inspirar” (MORAN, 2017, p. 1).

A capacitação profissional implica o sucesso da educação utilizando tecnologia, o usuário (estudante, professor e gestor) deve saber o potencial dessas ferramentas para que as utilize de maneira consciente, com uma mentalidade crítica e inventiva, assim, cativando e inspirando os demais.

As tecnologias mais interessantes estão hoje integradas nos smartphones, celulares conectados à Internet. Estão nas mãos de muitos gestores, professores, estudantes e famílias. Celulares, *tablets* e *notebooks* nos ajudam a acessar as informações que precisamos, a desenvolver projetos, a conversar de várias formas, a compartilhar nosso conhecimento, a tirar dúvidas, participar de discussões, falar em público, escrever melhor. (MORAN, 2017, p. 1).

Os recursos inclusos nos celulares, *tablets*, *notebooks* e computadores que têm conexão à internet auxiliam os indivíduos no acesso às respostas de dúvidas, possibilitando a construção de algo novo, a comunicação entre pessoas distantes, o compartilhamento de informações e saberes, estudar e se graduar. Atualmente, há tantas possibilidades de aprendizado e troca de ideias, viabilizadas pelas tecnologias, que é difícil listar todas (MORAN, 2017). Com essa diversidade de escolhas e utilidades que as TICs possibilitam para a sociedade, o foco na utilização deve estar centrado na avaliação dos benefícios e dispêndios que a utilização pode trazer a todos os sujeitos envolvidos, procurando sempre trazer sentido e significado nessa utilização.

Não é apenas questão de se levar a tecnologia até a escola para que se obtenham melhorias na qualidade da educação, como parecem pensar alguns governos. O emprego inovador de tecnologia no dia-a-dia, por estudantes e professores, pode ser a grande diferença para que se mude radicalmente a centralização do processo educativo no professor. O estudante torna-se responsável pelo processo de seu desenvolvimento e, portanto, de sua educação. (SOFFNER, 2013, p. 4).

A utilização das tecnologias na educação deve atingir os objetivos propostos, como: o professor pede para que os estudantes criem um trabalho audiovisual, em que cada grupo faz o seu e, como finalização, apresenta o projeto para seus pares; outro exemplo seria a utilização de *softwares* ou aplicativos em determinada atividade para gerar uma dinâmica diferenciada proporcionando interatividade. A utilização de jogos educativos também se encaixa perfeitamente nesse quadro, enquanto jogam, os estudantes são levados a interagir e aprender de forma mais participativa e lúdica.

As tecnologias de informação e comunicação, além de afetarem o contexto em que a educação tem lugar e de fornecerem à educação excelentes ferramentas de aprendizagem, estruturam novos ambientes de aprendizagem e servem de mediadoras da relação pedagógica. Estes novos ambientes de aprendizagem estruturados por essas tecnologias destroem os limites espaciais e temporais da escola atual e forçam a reformulação de sua proposta pedagógica, nas áreas de currículo, metodologia e avaliação (SOFFNER, 2013, p. 5).

As tecnologias são extraordinárias e o indivíduo que tem uma mente aberta e criativa conseguirá engendrar novos recursos e delinear atividades encantadoras para um ensino significativo e emancipador (MORAN, 2017, p. 7).

2.2.3 Utilização das tecnologias no ensino de matemática

A educação matemática deve dar a direção sob um aspecto curricular que beneficie o desenvolvimento de aptidões dos sujeitos para que eles possam se conhecer e se direcionar nesse mundo do saber em transformação constante, pelas tecnologias (SILVA, 2013, p. 25).

Todas as áreas da sociedade atual são impactadas pelas TICs e a inserção dessas tecnologias em seu cotidiano é inevitável, fazendo com que a capacitação para o seu uso de forma satisfatória seja uma exigência. Por outro lado, nessas tecnologias, encontram-se ferramentas capazes de facilitar o processo de ensino e aprendizagem na disciplina de matemática. É preciso então considerar uma formação escolar a partir desses dois segmentos, a matemática como subsídio para compreender a tecnologia e a tecnologia como subsídio para compreender a matemática (SOUSA; SANT'ANA, 2013).

Ao considerar a matemática voltada à tecnologia, pode-se pensar no ensino que habilita para a utilização de calculadoras e planilhas eletrônicas, duas ferramentas comuns em diversos ramos de trabalho atualmente. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias apontam que, para se alcançar resultados com a utilização de calculadoras, antes de tudo, o indivíduo precisa saber conhecer essa ferramenta fazendo uso das operações de forma certa e precisa. Consequentemente, para isso, necessita conhecer e compreender conhecimentos matemáticos. Mais especificamente, no uso das calculadoras gráficas, o indivíduo deve ter o conhecimento de função para verificar se os gráficos atendem aos objetivos, por exemplo, de uma modelagem matemática (BRASIL, 2006, p. 87).

As planilhas eletrônicas são *softwares* de computador, na maioria das vezes, usados na confecção de tabelas interativas, cujas células se inter-relacionam por algoritmos matemáticos. Para atuar com esse tipo de planilha, em um nível basilar, o indivíduo precisa do mesmo conhecimento matemático aplicado no uso da calculadora, porém, com requisições mais específicas em relação à notação de trabalho. De tal modo, é preciso saber bem a notação matemática utilizada para divulgar conceitos díspares, e, principalmente, o conceito de função. Também, a construção de planilhas mais otimizadas, solicita entendimento característico dos problemas que determinam um processo de solução em diferentes fases e até mesmo uma noção elementar de lógica de programação (BRASIL, 2006, p. 87-88).

Na utilização da tecnologia para o ensino de matemática, a ação de escolha por um *software* pode ser o fator significativo na qualidade do aprendizado. *Softwares* que oportunizam ferramentas para a análise de conceitos e opiniões matemáticas aparentam ser bons recursos de tecnologia para a aprendizagem da matemática. Nessa ocasião, o docente necessita estar aparelhado para possíveis surpresas: é a multiplicidade de resoluções que pode ser ofertada para uma mesma problemática, possibilitando diversas maneiras de pensar dos estudantes; a percepção da capacidade criadora de seus educandos, ao ser o docente pego de surpresa com resoluções que não eram esperadas por ele, quando refletiu na dificuldade indicada; o aprimorado engajamento dos estudantes nos trabalhos, elaborando discussões e trocas de opiniões que manifestam uma enorme atividade intelectual (BRASIL, 2006, p. 89-90).

Uma opção para professores da educação básica que pretendem utilizar as TICs no âmbito escolar é o *site* de Educação Matemática e Tecnologia Informática (Edumatec), criado em 2000, sob a coordenação da Prof.^a Maria Alice Gravina, tendo como propósito a construção de material de apoio para a disciplina de mesmo nome, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (SOUSA; SANT'ANA, 2013). Na atualidade, há múltiplos *softwares* matemáticos, divididos a partir de temas discutidos em sala de aula e possibilitam o estudo de funções, equações e desigualdades na geometria analítica, como: retas, círculos, cônicas e superfícies. As ferramentas disponibilizadas nesses programas promovem que o usuário faça análises algébricas e gráficas, de maneira concomitante, auxiliando a compreender o conceito de função e a definição geométrica do “conjunto-solução de uma equação – inequação”.

Para a elaboração do Quadro 2, foram levantadas informações a partir do *site* Edumatec, que relaciona algumas TICs em uma perspectiva educativa para a disciplina de matemática, apresentando uma seleção de *softwares* como alternativas para quem procura desenvolver práticas pedagógicas que aloquem os estudantes na função de ativos no processo de ensino.

Quadro 2 – *Softwares* para abordagem de funções

SOFTWARE	CARACTERÍSTICAS
CABRI-GEOMETRY	Programa de elaboração em geometria, que disponibiliza régua e compassos digitais, com interface gráfica com menu de elaboração em locução clássica da Geometria.
CINDERELLA	Programa para uso em geometria, que disponibiliza régua e compasso digital. Mas, diferente dos outros <i>softwares</i> que já fazem isso, deixa que o usuário trabalhe com geometria hiperbólica e esférica, com um adendo que permite que se salve o <i>software</i> como página da internet (<i>web</i>) de forma automática.
GEOGEBRA	Programa de elaboração e análise em geometria que discute as temáticas, formas geométricas e de trigonometria e também carrega elementos algébricos.
GRAPHEQUATION	Viabiliza a construção de gráficos de regiões e curvas no plano. Admite o uso de coordenadas polares ou cartesianas.
GRAPHMATICA	Possibilita a construção de gráficos de funções elementares. Admite coordenadas cartesianas, polares e escalas logarítmicas.
MATHGV	Permite a construção de gráficos de funções elementares em duas e três dimensões e em coordenadas polares.
WINPLOT	Programa que admite a elaboração de gráficos por meio de funções elementares. Possibilita a construção de gráficos em dois volumes e que se trabalhe também com operações de funções.

Fonte: autor, baseado no *site* Edumatec, 2022

Os *softwares* listados podem ser utilizados no ensino e na aprendizagem de matemática, mais especificamente no conteúdo de funções. O *software* Geogebra é um dos mais usados pelos educadores em sala de aula, dotado de algumas características que o tornam atrativo aos ambientes de ensino. Observa-se uma preferência pelo Geogebra na prática de muitos professores que, ao utilizarem os *softwares* matemáticos em sala de aula, quase de forma unânime, acabam escolhendo o *software* Geogebra. Algumas características são específicas de um *software* dinâmico, como a interface intuitiva e os elementos gráficos interativos que se vinculam a elementos algébricos, podendo ser o maior atrativo do *software*, além de ser oferecido de forma gratuita (GRAVINA; CONTIERO, 2011).

Atualmente, há diversos *softwares* de plotagem gráfica de funções. Podem-se relacionar alguns mais conhecidos no meio da educação matemática, pois estão há mais tempo disponíveis, como: Winplot, CabriGéomètre, Gnuplot, LabPlot e GeoGebra. O *software* de plotagem gráfica consiste em um programa de

computador que possibilita ao usuário inserir dados relativos a uma função matemática e gerar uma representação de seu comportamento gráfico, viabilizando a visualização dos conjuntos domínio, imagem, contradomínio e também de possíveis pontos em que o gráfico sofra descontinuidade. Os *softwares* de plotagem gráfica mais conhecidos e explorados em pesquisa são geralmente os de geometria dinâmica, e, entre eles, o mais utilizado é o GeoGebra (GARCIA et al., 2021). Entretanto, a grande maioria desses *softwares* possibilita a visualização gráfica de funções de variável real.

Quanto à plotagem gráfica de funções de variável complexa, o Quadro 3 reúne alguns *softwares* disponíveis para utilização.

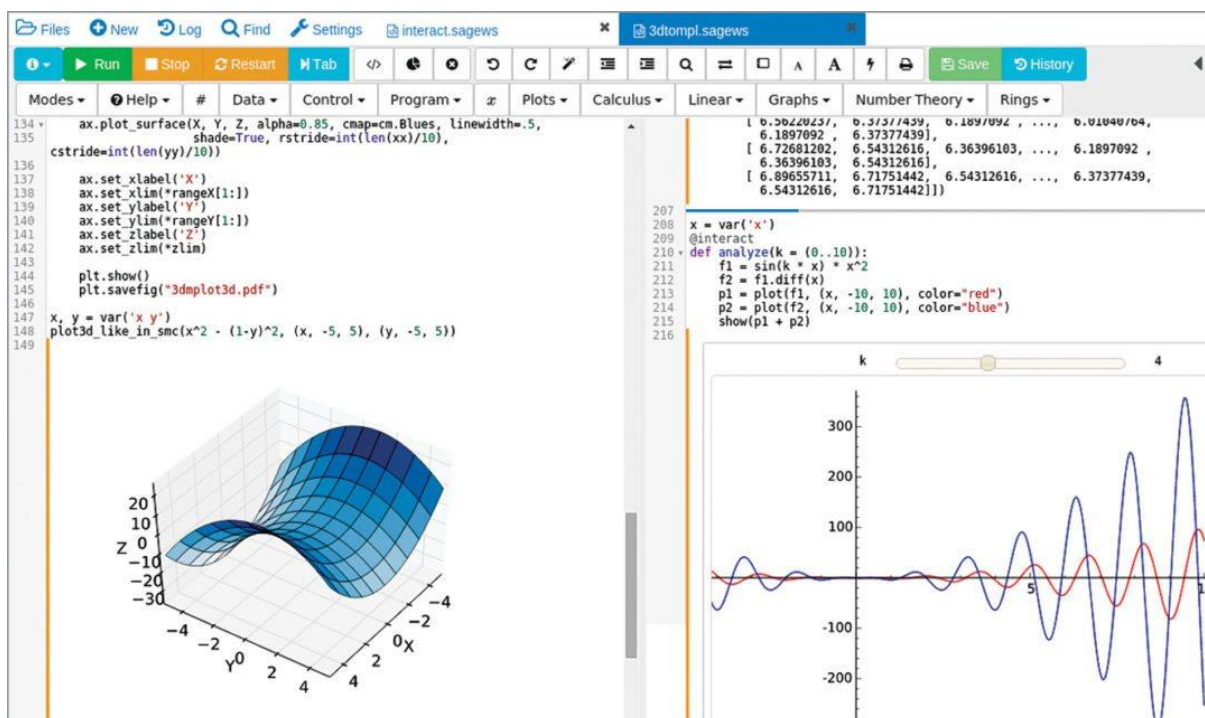
Quadro 3 – Relação de *softwares* de plotagem de funções complexas

Software	Descrição	Disponível
SageMath	<i>Software OpenSource</i>	https://www.sagemath.org
Wolfram Alpha	<i>Site/Aplicativo</i>	https://www.wolframalpha.com
Maple	<i>Software</i>	https://www.maplesoft.com

Fonte: autor

O *software* SageMath é um sistema que disponibiliza diversos recursos para a educação matemática, relacionando áreas como: análise combinatória, álgebra, análise numérica, e cálculo. É um *software* de código, aberto baseado na linguagem Python, difundido de forma gratuita pelo *site* de seu desenvolvedor. Tem interface gráfica que dá suporte a números complexos e Análise Complexa, álgebra e diversas outras ferramentas matemáticas. O manuseio desse *software*, exige alguma noção de lógica de programação, para que o usuário possa criar rotinas e elaborar gráficos com precisão. Por esse motivo, pode ser uma boa saída em disciplinas de cursos mais avançados ou de nível superior. Além disso, o programa está em língua inglesa e não disponibiliza versão em língua portuguesa. A Figura 1 ilustra o ambiente de interação do programa.

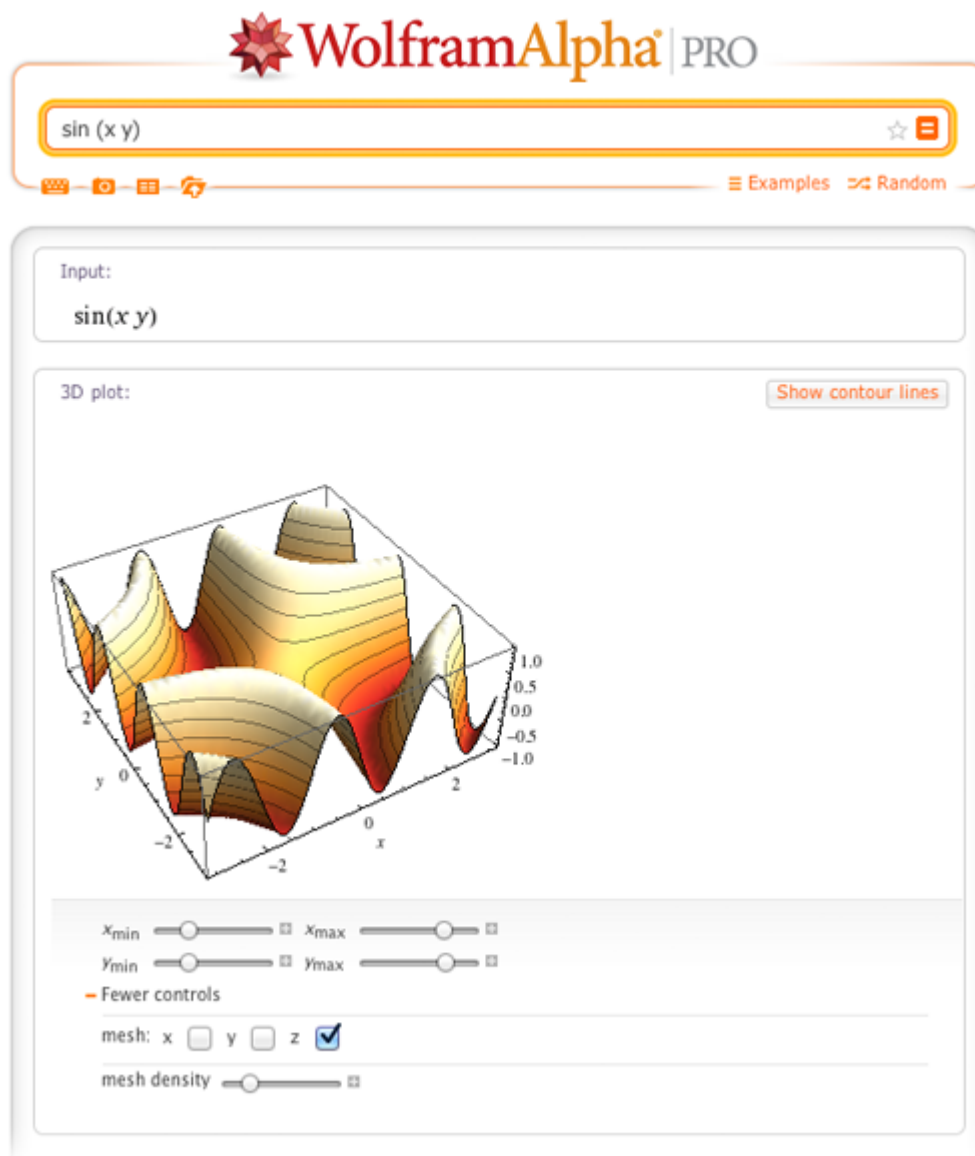
Figura 1 – Interface do software SageMath



Fonte: <https://labs.library.concordia.ca/blog/sagemath-an-open-source-alternative-to-mathematica-maple/>

O WolframAlpha é uma plataforma digital que reúne diversas funcionalidades matemáticas que fazem cálculos, plotagens gráficas e conteúdos que podem ser utilizados tanto para a educação quanto como suporte ao desenvolvimento de pesquisas aplicadas, indústrias e serviços. Consiste em um ambiente parecido com o sistema Maple, que requer do usuário alguma noção de programação e elementos matemáticos para sua utilização. Boa parte de seus conteúdos podem ser acessados de maneira gratuita; entretanto, para ter acesso irrestrito, é preciso adquirir a versão completa. É possível ter acesso ao conteúdo por meio de aplicativo do próprio desenvolvedor, que também pode ser comprado nas lojas virtuais dos sistemas Android ou IOS. A Figura 2 reúne os principais elementos do ambiente de interação do programa. Este é disponibilizado por meio de página *web* e não precisa ser baixado ou instalado em computadores, tornando, assim, sua utilização mais rápida e dinâmica.

Figura 2 – Ambiente web WolframAlpha

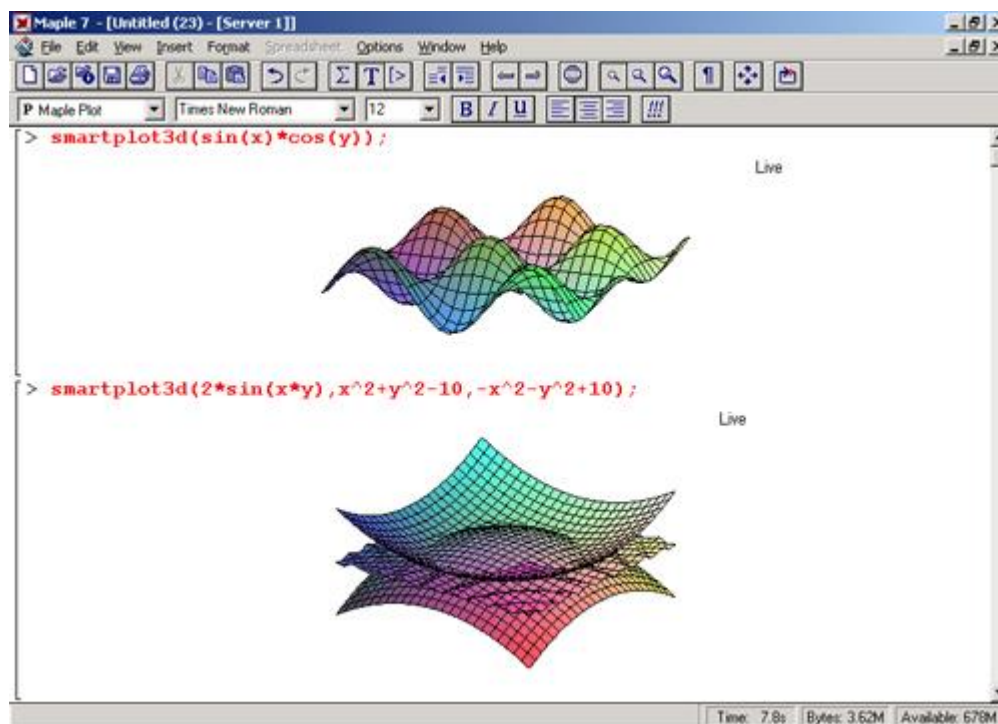


Fonte: <https://www.wolframalpha.com/>

O Maple é um *software* bastante difundido nos meios acadêmicos, em especial, em cursos de matemática, e é comercializado pela empresa Maplesoft, possibilitando ao usuário a manipulação gráfica e algébrica de expressões matemáticas que envolvam: cálculo, equações diferenciais, estatística, projeto de controle, álgebra linear, física, otimização, geometria diferencial, processamento de sinais, funções especiais, modelagem, etc. A empresa disponibiliza versões de demonstração que permitem ao usuário conhecer as principais ferramentas disponíveis no programa. Normalmente, são versões com prazo para utilização e, caso o interessado queira ter acesso completo, pode adquirir uma versão integral,

mediante compra pelo *site* do desenvolvedor. A Figura 3 ilustra o ambiente de interação do *software* Maple, sendo possível visualizar a plotagem gráfica de algumas funções trigonométricas.

Figura 3 – *Software* Maple



Fonte: <http://bourabai.ru/cm/le11.htm>

Um ponto comum entre esses programas é o fato de que todos estão disponíveis apenas em língua inglesa, portanto, o usuário que pretende realizar experimentos ou plotagem gráfica vai precisar de um conhecimento básico dessa língua estrangeira. O Quadro 4 reúne as principais características dos *softwares* aqui apresentados em uma ação comparativa.

Quadro 4 – Comparativo entre os *softwares*

Caraterísticas	SageMath	Wolfram Alpha	Maple
Gratuidade	Gratuito/Código aberto	Exige compra de licença/ Tem versão de testes	Exige compra de licença
Interação	Conhecimento avançado de programação	Conhecimento básico de programação	Conhecimento avançado de programação
Idioma	Inglês	Inglês	Inglês
Mapa Colorido	Disponibiliza	Não disponibiliza	Não disponibiliza
Versão para dispositivos móveis	Não disponibiliza	Possui	Não possui
Elementos algébricos	Disponibiliza	Disponibiliza	Não disponibiliza

Fonte: autor

Consideramos que podem haver outros *softwares* com as mesmas finalidades desses apresentados neste tópico e não foram apresentados aqui. Entretanto, no momento de desenvolvimento da pesquisa, estes foram os *softwares* com que tivemos contato fazendo uma pesquisa em buscadores por meio eletrônico. Outros foram mencionados por professores que trabalham com Análise Complexa ou foram encontrados em trabalhos científicos que não estavam na língua vernácula. Entende-se também, que esses *softwares* reúnem características importantes para a abordagem de funções complexas e/ou da Análise Complexa.

3 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Esta ação investigativa se deu no início do desenvolvimento da tese, em que a inquietação em entender como as pesquisas que abordam *softwares* voltados para a plotagem gráfica de funções, em especial de funções de variáveis complexas, têm se desenvolvido no Brasil. Movido por esse interesse, procurou-se fazer um levantamento da área da educação matemática buscando identificar trabalhos com esse enfoque. Dessa forma, neste tópico, propomo-nos a desenvolver um estudo dos trabalhos que abordam *softwares* de plotagem gráfica para funções de variável complexa dentro da área de educação matemática, apresentados no formato de teses, dissertações e artigos científicos.

A metodologia de pesquisa empregada nesse levantamento está apoiada nos pressupostos da análise de conteúdo de Bardin (1977). Levando em consideração o posicionamento do pesquisador em se colocar na observância dos dados e no movimento de categorização, considerando algumas categorias primárias e outras, que surgem no decorrer desse processo. Os aportes metodológicos desta pesquisa estão vinculados à pesquisa exploratória qualitativa que, segundo Triviños (1987, p. 131), adota uma: “rota ao realizar uma investigação. Isto é, existe uma escolha de um assunto ou problema, uma coleta e análise das informações”, indicando que a constituição dos dados pode desencadear a uma nova busca. Nesse modelo de pesquisa, não necessariamente pretende-se testar hipóteses, visto que no seu desenvolvimento, permite-se que as hipóteses sejam reformuladas e novas hipóteses surjam, delineando os próximos passos da pesquisa.

Buscou-se explorar a área de educação matemática e as produções científicas que abordem *softwares* de plotagem gráfica e estejam disponíveis em bases de dados relevantes à comunidade científica. Foram escolhidas as seguintes bases de dados: o portal de periódicos disponibilizado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), que reúne as principais revistas científicas indexadas do país, e a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), que integra os sistemas de informação de teses e dissertações desenvolvidas em território nacional. Optou-se pelo levantamento de trabalhos que estejam disponíveis no formato digital, pois o período de desenvolvimento desta pesquisa ocorreu durante a pandemia de COVID19, impossibilitando a ida em bibliotecas físicas. Outro ponto que motivou a escolha de

trabalhos disponíveis em formato digital foi também a facilidade de acesso e a possibilidade de um desenvolvimento da pesquisa de maneira mais dinâmica.

O material bibliográfico analítico relacionado abrange trabalhos científicos disponibilizados em forma de teses, dissertações e artigos no formato digital, levando em consideração trabalhos produzidos e disponibilizados nas bases de dados aqui citadas.

O Portal de Periódicos da Capes reúne e disponibiliza de forma gratuita pesquisas científicas produzidas nacionalmente e também tem contrato com editoras internacionais. De acordo com dados disponíveis no próprio portal, são mais de 49 mil periódicos e 455 bases de dados de conteúdos diversos, como referências, patentes, estatísticas, material audiovisual, normas técnicas, teses, dissertações, livros e obras de referência. O portal tem como objetivo principal reduzir as assimetrias regionais no acesso à informação científica e é considerado um dos maiores acervos científicos virtuais do País.

Desenvolvida pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciência e Tecnologia (IBICT), a BDTD relaciona teses e dissertações provenientes de instituições de ensino e pesquisa do Brasil, estimulando o registro e a publicação de teses e dissertações em meio eletrônico. A BDTD é uma parceria do Governo Federal junto às instituições de ensino e pesquisa brasileiras, possibilitando a publicação e a divulgação de teses e dissertações produzidas no País, gerando visibilidade à produção científica nacional.

A opção por essas bases de dados se deu em razão da excelência em disseminação, em meio eletrônico, de pesquisas científicas realizadas em âmbito nacional, pelo fato de essas plataformas reunirem um número expressivo de pesquisas científicas e por propositalmente constituir um *corpus* de pesquisa com diversos trabalhos publicados nos últimos tempos. Considerando que o desenvolvimento de *softwares* tenha se dado principalmente com início na década de 1990, e também pelo fato de que podem existir trabalhos publicados apenas em meio físico e que ainda não foram disponibilizados em meio digital, optou-se por não fazer um recorte temporal.

Dessa forma, o objetivo desse movimento de investigação de trabalhos científicos publicados é identificar um panorama dos trabalhos publicados até o desenvolvimento desta pesquisa. Os procedimentos de busca dos trabalhos aqui relacionados se deram por meio da utilização de palavras-chave/comandos de busca

nos referidos bancos de dados disponíveis no *website* Periódicos Capes (<https://www.periodicos.capes.gov.br>) e na base de teses e dissertações (<https://www.bdtb.ibict.br>). Os termos escolhidos foram palavras-chave que pudessem aparecer ao longo do texto. Para essa busca, foram utilizados somente vocábulos da língua vernácula. As referidas palavras-chaves foram: *software*, função, funções, variável, variáveis, complexa, complexas e matemática.

A partir de um levantamento preliminar, buscando reunir dados sobre trabalhos que versam sobre a utilização de *software* para a plotagem gráfica de elementos da Análise Complexa, as metodologias aplicadas e os principais resultados, observou-se um baixo número de produções encontradas. Dessa forma, na intenção de obter uma constituição mais ampla sobre os trabalhos desenvolvidos com a temática proposta, buscou-se analisar também as pesquisas desenvolvidas dentro da área de educação matemática em bases de dados lusófonas. Incorporou-se então, a base do Repositório institucional da Universidade Aberta (UAB) de Portugal, que reúne dados de pesquisas realizadas em diversas universidades portuguesas.

A adição dessa nova base de dados, que tem como principal fator a contiguidade à língua portuguesa, se dá pela observância de poucas pesquisas que versam sobre o uso de *software* de plotagem gráfica de elementos de Análise Complexa e apresentam *software* em língua portuguesa. E, procurando uma maior amplitude de trabalhos, optou-se por utilizar também as palavras-chave: número, números, complexo, complexos. Os procedimentos de busca dos trabalhos novamente foram realizados por meio da utilização de palavras-chave/comandos de busca nos referidos bancos de dados disponíveis e também na base do Repositório institucional da Universidade Aberta (UAB) de Portugal (<https://portal.uab.pt/dsd/bases-de-dados-a-d/>).

Esse levantamento se deu pelo formulário de busca avançado, atentando-se às especificações de cada base de dados, sobre o uso de caracteres curinga e expressões booleanas. Sobre o uso de caracteres curinga, optou-se pelo uso do caractere *, para casos de expressões que podem aparecer no modo singular ou modo plural, que possibilita recuperar termos com terminações distintas. Como exemplo, na utilização do termo de busca *funç**, o caractere curinga pode retornar palavras como: *função* ou *funções*.

Os termos “*software*” e “matemática” foram utilizados nas buscas em alternância com os demais termos elegidos como: *funç**, *complex**, *variav** e *análise*. Optou-se pelo operador booleano AND em todas as buscas, que possibilita a procura pelos termos de forma geral em qualquer campo do registro ou posição do texto. Não foi feita qualquer exclusão por campo de registro, ficando selecionada a opção todos os campos, considerando que as plataformas compartilham basicamente os campos: título, resumo, corpo do texto, autor. Especificamente, sobre plataforma de dados da UAB Portugal, em consonância com as especificações de busca dessa plataforma, a varredura foi realizada com a utilização de palavras no plural. O Quadro 5 relaciona os termos utilizados nas bases de dados.

Quadro 5 – Comando de busca nas bases de dados.

Base de dados	Comando de busca
Periódicos Capes e BDTD	<i>software</i> AND <i>funç*</i> <i>complex*</i> AND matemática <i>software</i> AND <i>númer*</i> <i>complex*</i> AND matemática <i>software</i> AND <i>variav*</i> <i>complex*</i> AND matemática <i>software</i> AND <i>análise</i> <i>complexa</i> AND matemática
Repositório UAB Portugal	<i>software</i> AND <i>funções</i> <i>complexas</i> AND matemática <i>software</i> AND <i>números</i> <i>complexos</i> AND matemática <i>software</i> AND <i>variáveis</i> <i>complexas</i> AND matemática <i>software</i> AND <i>análise</i> <i>complexa</i> AND matemática

Fonte: O autor.

Com a finalidade de selecionar os trabalhos que emergiram dessa busca, fez-se uma leitura do título, do resumo e das palavras-chave de cada trabalho. Essa prática foi realizada com a pretensão de identificar se as pesquisas selecionadas estavam no escopo da proposta, ou seja, apresentavam pesquisas com *software* de plotagem gráfico de elementos da Análise Complexa. O processo aqui descrito tem sido comumente aplicado em pesquisas bibliográficas, documentais, modalidades de estado da arte na área de educação matemática.

Foram então consideradas, para este levantamento, pesquisas apresentadas em língua portuguesa, inglesa e/ou espanhola, vinculadas ao campo científico da educação matemática, disponíveis nas bases de dados previamente escolhidas e apresentadas neste tópico.

Analisou-se previamente o resumo, fazendo-se uma leitura para avaliar se estavam em consonância com a proposta deste levantamento. Dessa forma, quando não foi possível identificar se o trabalho deveria ou não ser selecionado apenas pela leitura do resumo, fez-se então uma leitura “flutuante”, para identificar a natureza do trabalho e se estaria no escopo desse levantamento. Para Bardin (1977), a leitura “flutuante” é um primeiro contato do pesquisador com o documento analisado, revelando as primeiras impressões a respeito do exposto naquele documento.

Elegeram-se algumas categorias *a priori* empregadas na análise do material relacionado ao estudo (i) *software*, (ii) nível escolar (iii) natureza do trabalho, (iv) ano de publicação, relacionadas no Quadro 6.

Quadro 6 – Categorias de análise assumidas no estudo dos artigos da pesquisa.

Categoria de análise	Descrição/subcategorias
(i) <i>software</i>	Nome/tipo de <i>software</i> .
(ii) Nível escolar	Ensino Fundamental; Ensino Médio; Ensino Superior; outro.
(iii) Natureza do trabalho	Teórico; prático; formativo; outro.
(iv)	Ano de publicação.

Fonte: O autor.

Ao realizar um estudo baseado na análise de conteúdo de Bardin (1977), são previstos três momentos: o desenvolvimento da pesquisa: uma análise prévia, momento de estruturação da pesquisa; a exploração do material, momento de administrar as decisões tomadas; tratamento dos resultados, momento em que se realiza, propõe inferências e se interpreta os dados.

3.1 Condução do levantamento

O objetivo inicial desse levantamento foi identificar os principais *softwares* de plotagem de gráfico de funções de variáveis complexas e relacionar pontos de convergências ou divergências entre as pesquisas. O Quadro 7 relaciona os termos utilizados na plataforma Periódicos Capes, resultados da busca e trabalhos que foram selecionados após a leitura dos resumos e, quando necessária, a leitura flutuante.

Quadro 7 – Termos utilizados e quantitativo de trabalhos em Periódicos Capes

Termos combinados	Resultado	Selecionados
<i>software</i> AND funç* complex* AND matemática	257	4
<i>software</i> AND númer* complex* AND matemática	293	2
<i>software</i> AND variav* complex* AND matemática	18	1
<i>software</i> AND análise complexa AND matemática	19	1
Total	587	8

Fonte: autor

Após a leitura dos resumos dos primeiros trabalhos relacionados na busca, optou-se por criar novas categorias que pudessem reportar dados como a nacionalidade da pesquisa, a abordagem de funções complexas ou se há relação com Análise Complexa. O Quadro 8 apresenta os resultados da seleção dos trabalhos disponíveis na BDTD; os termos combinados são os mesmos utilizados na busca dentro da base de Periódicos Capes.

Quadro 8 – Termos utilizados e quantitativo de trabalhos em BDTD

Termos combinados	Resultado	Selecionados
<i>software</i> AND func* complex* AND matemática	220	1
<i>software</i> AND númer* complex* AND matemática	244	6
<i>software</i> AND variav* complex* AND matemática	113	0
<i>software</i> AND análise complexa AND matemática	372	1
Total	949	8

Fonte: autor

Ao realizar a procura na plataforma de dados da UAB Portugal, atentou-se para as especificações de busca e se optou por fazer a varredura utilizando as palavras no plural. De acordo com as especificações ao realizar a busca, o mecanismo de pesquisa retorna automaticamente à versão singular do termo. Outro ponto, é que a utilização do caractere curinga, neste caso, retornou um número muito elevado de textos, selecionados pela busca por conter termos com sufixos indesejados, como: funcional, complexidade, numeral, etc. A relação entre o número de trabalhos resultantes da busca e o número de trabalhos selecionados é apresentada no Quadro 9, resultante da leitura dos resumos e eventualmente de leituras flutuantes.

Quadro 9 – Termos utilizados e quantitativo na Base de dados da UAB Portugal

Termos combinados	Resultado	Selecionados
<i>software</i> AND funções complexas AND matemática	273	1
<i>software</i> AND números complexos AND matemática	210	16
<i>software</i> AND variáveis complexas AND matemática	356	4
<i>software</i> AND análise complexa AND matemática	19	1
Total	858	22

Fonte: autor

Ao término dessa varredura, analisou-se também a possibilidade de uso dos termos “número imaginário”, mas, ao fazer a busca com esses termos, o número de resultados foi muito pequeno, entre 2 ou 3 para cada plataforma, tendo como resposta trabalhos que já haviam sido escolhidos. Ao todo, foram selecionados 38 trabalhos, cuja distribuição é relacionada no Quadro 10.

Quadro 10 – Total de trabalhos relacionados

Base de dados	Selecionados
Periódicos Capes	8
BDTD	8
UAB Portugal	22
Total	38

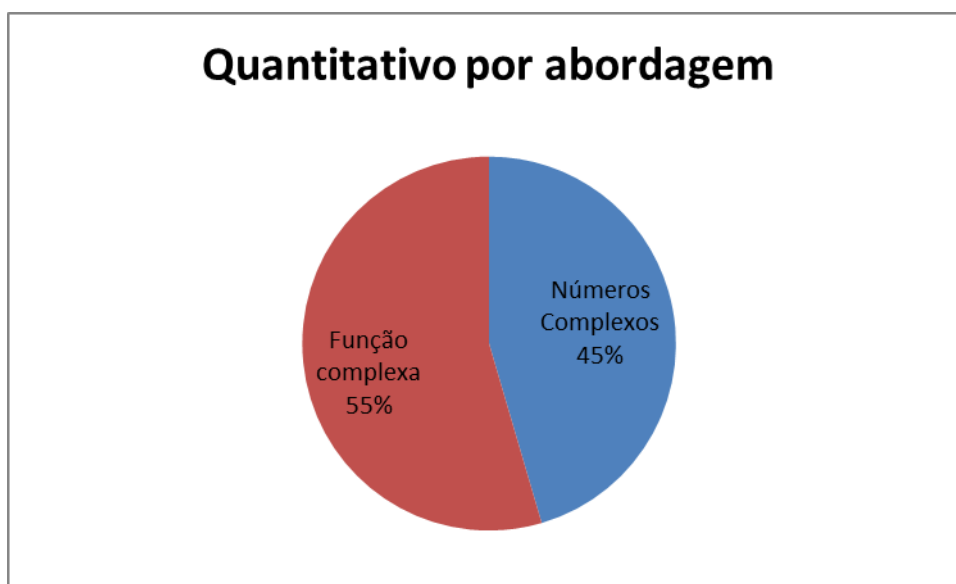
Fonte: autor

Embora houvesse a possibilidade de expandir esse levantamento a alguns eventos da área de matemática e educação matemática, optou-se por não fazê-lo, devido aos prazos a serem cumpridos. A apresentação e descrição dos trabalhos selecionados se dão no tópico seguinte.

3.2 Apresentação e descrição dos dados

Após estabelecermos essa primeira relação de trabalhos, fez-se uma nova leitura dessas obras. Em seguida, cinco trabalhos foram descartados, por estarem fora do escopo desse levantamento, e ficaram então 33 trabalhos. Relacionando os trabalhos, observou-se que 15 deles realizam uma abordagem dos números complexos e suas atribuições. O Gráfico 1 expressa este quantitativo em percentual.

Gráfico 1 – Quantitativo por conteúdo



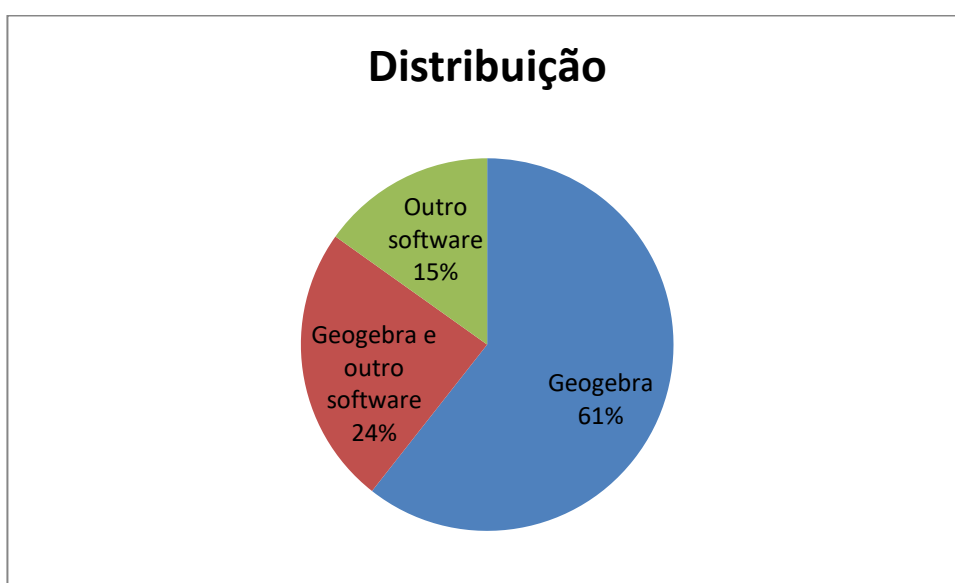
Fonte: autor

Esses 15 trabalhos representam 45% do total, e foi possível observar que a maior parte aborda a representação gráfica dos números complexos utilizando o plano de Argand-Gauss. Entre as estratégias de abordagem também estão a utilização da representação geométrica por meio da utilização de trigonometria, e da

forma polar ou vetorial, e ainda aqueles trabalhos que fazem a abordagem algébrica aliada a essas representações.

Outra constatação importante está em relação ao *software* mais utilizado nessas pesquisas. Relacionou-se um maior número de pesquisas envolvendo o *software* GeoGebra, que foi citado em 28 dos 33 trabalhos selecionados. O Gráfico 2 apresenta a proporção de trabalhos que relacionam o GeoGebra em suas investigações.

Gráfico 2 – Percentual do GeoGebra em relação a outros *softwares*



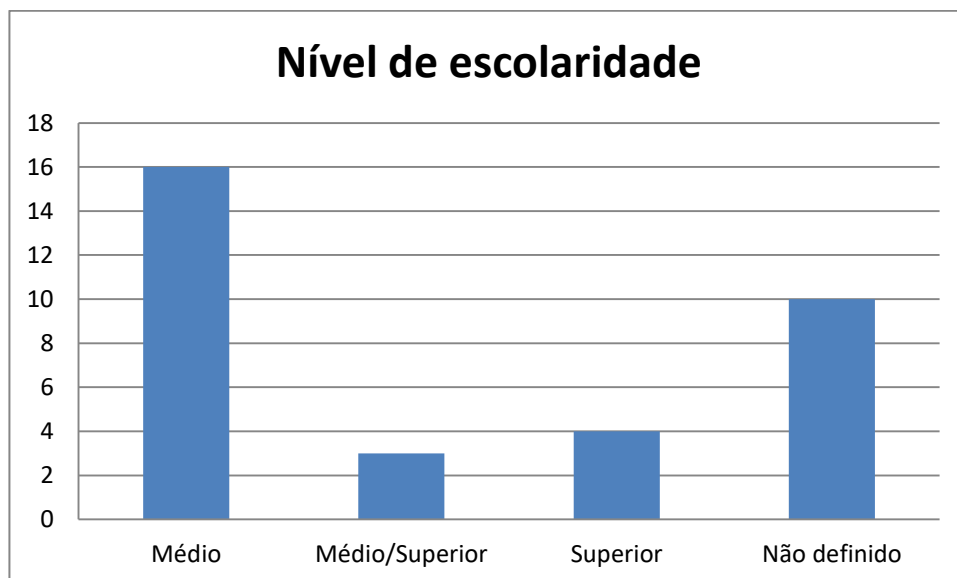
Fonte: autor

Note-se que 85% dos trabalhos relacionam o uso do *software* GeoGebra à abordagem de conceitos de números complexos ou funções complexas. Os demais *softwares* mencionados nas pesquisas são: Cabri-géomètre; Winplot; Maple; Quaternion; MatLab; Movimentos Complexos; Maxima; Mathematica; wxMaxima; Planilha Eletrônica. Não foi possível observar qualquer ocorrência da utilização do domínio de cores nesses *softwares* e abordagens. A representação gráfica dos números ou funções complexas, quando ocorre, recorre ao uso da forma cartesiana, por meio do plano de Argand-Gauss.

Quanto ao nível de escolaridade, os trabalhos contemplam os níveis médio ou superior, não sendo possível encontrar trabalhos em outros níveis de escolaridade. No Gráfico 3, apresenta-se a distribuição de trabalhos por nível de escolaridade, e

se percebe também um número elevado de trabalhos que não especificam o nível escolar para o qual se propõem.

Gráfico 3 – Distribuição por nível escolar



Fonte: autor

Optou-se por dividir os trabalhos em dois agrupamentos. No primeiro agrupamento, estão os trabalhos com foco na abordagem do conjunto dos números complexos e, no segundo agrupamento, os trabalhos com foco em funções complexas. Dessa forma, dos 33 trabalhos analisados, 15 foram relacionados pela primeira característica, que é o foco na abordagem de números complexos, ficando então, 18 pesquisas relacionadas pela segunda característica, a abordagem de funções complexas.

O Quadro 11 relaciona as pesquisas agrupadas pela primeira característica, indicando o título e autor, o tipo de produção (artigo, dissertação ou tese) e ano de publicação.

Quadro 11 – Trabalhos selecionados que abordam números complexos

Índice	Título/ Autor	Tipo	Ano
1	Números complexos e Geogebra/ Leonardo de Mattos Bastos	Dissertação	2013
2	Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos/ Elaine Veloso Fernandes Pereira	Dissertação	2021
3	Números complexos, polinômios e equações algébricas/ Ferdinando Caíque Genghini Dantas Lobo	Dissertação	2017
4	Números complexos: aspectos teóricos geométricos e computacionais/ Rafael Rodrigo Ottoboni	Dissertação	2015
5	Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos/ Rafael dos Reis Paulo	Dissertação	2019
6	Grafos e seu polinômio característico/ Gustavo Feltrin Rossini	Dissertação	2017
7	Sobre números complexos e abordagens no ensino médio/ Thúlio José de Oliveira	Dissertação	2020
8	Construção do Aerofólio de Joukowski assimétrico por meio da Transformação de Karman-Trefftz, para $n=2$, utilizando o GeoGebra 5.0/ João Jefferson Faria Marinho; Raphael Francisco Gomes dos Santos; Luciana Santos da Silva Martino	Artigo	2020
9	Mathematical software tools For teaching of complex numbers/ Brayan Esguerra-Prieto; Natalia González-Garzón; Alberto Acosta-López	Artigo	2018
10	Quatérnios: generalização dos números complexos na perspectiva do uso do software educativo Geogebra e o <i>software on-line</i> livre quaternion/ Alessandro Ribeiro da Silva, Renato César da Silva, Edivaldo Romanini	Artigo	2021
11	Introdução ao estudo dos números complexos e sua aplicação nos circuitos elétricos/ Segundo Aurélio Chuquilin Cabanillas	Dissertação	2016
12	Uma proposta de abordagem dos números complexos com o uso do Geogebra/ José Gleisson da Costa Germano	Dissertação	2016
13	Software Geogebra: uma ferramenta na prática docente para o ensino dos números complexos no ensino médio/ Isabel do Socorro Lobato Beltrão; Cláudio Barros Vítor; Ierecê dos Santos Barbosa	Artigo	2017
14	Números complexos: de Gauss às aplicações no Geogebra/ Marta Maria de Azevedo Silva; Jéssica Santos Pereira; Enne Karol Venâncio de Sousa	Artigo	2018
15	Motivações para o Ensino dos Números Complexos/ Jocimar Montanha	Dissertação	2017

Fonte: autor

O Quadro 12 relaciona as pesquisas agrupadas pela segunda característica, indicando também o título e autor, o tipo de produção (artigo, dissertação ou tese) e ano de publicação.

Quadro 12 – Trabalhos selecionados que abordam funções complexas

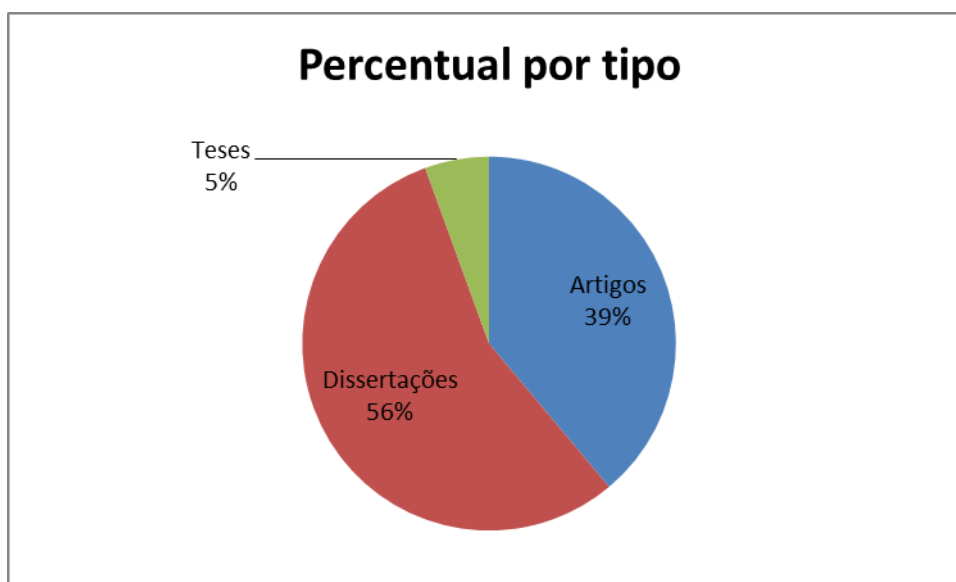
Índice	Título/ Autor	Tipo	Ano
1	Funções complexas de uma variável complexa: uma abordagem via <i>software</i> Mathematica / Laudo Claumir Santos	Dissertação	1998
2	As equações algébricas no ensino médio: um estudo de uma sequência didática utilizando <i>software</i> gráfico/ Júlio K. Inafuco	Dissertação	2006
3	As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas/ Pablo Vinicius Almeida Azevedo	Dissertação	2009
4	Números complexos: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos / Carlos Nely Clementino de Oliveira	Dissertação	2010
5	Instabilidade e bifurcação num problema de $N+1$ corpos/ Gersonilo Oliveira da Silva	Tese	2011
6	A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres humanos-com-mídias / Fábio Luiz de Oliveira	Dissertação	2017
7	O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do geogebra / Tânia Mara Amorim	Dissertação	2014
8	Uma proposta pedagógica: usando o <i>software</i> Geogebra na rotação vectores complexos/ Agner Lopes Bitencourt, Paulo Roberto Vargas, Vera Lucia Felicetti	Artigo	2014
9	A esfera de riemann: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio / Euderley de Castro Nunes	Dissertação	2015
10	Estudo da série de Laurent com recurso ao Geogebra: contributo da Engenharia Didática / Monique Rafaela Monteiro Marinho, Francisco Regis Vieira Alves	Artigo	2016
11	Conjunto de Mandelbrot / Márcio Vaiz dos Reis	Dissertação	2016
12	Uma Proposta Didática para o Ensino de Funções de Variável Complexa no Ensino Médio Usando Planilha Eletrônica / Gabriela Gimenes Pereira	Dissertação	2017
13	Uma nova abordagem dos Complexos para o Ensino Médio: o estudo dos fractais e do caos na composição do Conjunto Preenchido de Julia e o Conjunto de	Dissertação	2017

	Mandelbrot / Daniel de Carvalho Mendes Júnior		
14	Engenharia Didática no contexto da Transição Complexa do Cálculo – TCC: o caso da série de Laurent / Francisco Regis Vieira Alves, Monique Rafaela Monteiro Marinho	Artigo	2017
15	Análise visual complexa: gráficos e diferenciabilidade de funções / Francisco Regis Vieira Alves, Mairton Cavalcante Romeu	Artigo	2017
16	Engenharia didática para o ensino de variável complexa: visualização de conceitos relacionados ao processo matemático de integração / Francisco Regis Vieira Alves	Artigo	2018
17	Funções complexas: uma abordagem geométrica / Maria Júlia Fassis; Marta Cilene Gadotti	Artigo	2021
18	Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Historical Research in Brazil on Recurring Number Sequences / Francisco Regis Vieira Alves	Artigo	2022

Fonte: autor

Observa-se que, desse conjunto, apenas um trabalho é do tipo tese. A seguir, o Gráfico 4 descreve o percentual de trabalhos por tipo.

Gráfico 4 – Distribuição por tipo de trabalho



Fonte: autor

Quanto aos trabalhos que envolvem números complexos, dez dissertações compõem este agrupamento, sendo oito provenientes do programa de Mestrado Profissional em rede Nacional (PROFMAT) (considerar Quadro 11 – índices 1, 2, 3,

4, 6, 7, 11 e 15), duas dissertações foram desenvolvidas em mestrados Acadêmicos, uma na área de Ensino de Ciências e Matemática (considerar Quadro 11 – índice 12) e outra na área de Educação Matemática, (considerar Quadro 11 – índice 5). Essas dissertações se originam de sete universidades federais, e três universidades estaduais do Estado de São Paulo.

Ao considerarmos o foco na abordagem de funções complexas, temos dez dissertações e a tese, destaca-se que a tese foi desenvolvida no programa de doutorado em Matemática na Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). Quanto às dissertações, quatro (considerar Quadro 12 – índices 2, 4 e 7) foram desenvolvidas em programas de Mestrado Acadêmico em ensino ou educação nas áreas de matemática, ciências exatas ou tecnológicas; três foram desenvolvidas em mestrados acadêmicos na área de matemática ou matemática aplicada (considerar Quadro 12 – índices 1 e 3) e quatro (considerar Quadro 12 – índices 6, 9, 11, 12 e 13) são oriundas de mestrados profissionais em matemática. As dissertações são provenientes de nove universidades federais, uma estadual e uma particular.

Tomando o total de 33 trabalhos selecionados, não se descarta a possibilidade da existência de mais pesquisas disponíveis em outras plataformas ou bibliotecas, que tenham como foco os objetivos aqui propostos. Entretanto, para esta pesquisa, seguiremos os protocolos de busca previamente definidos.

3.3 Análise dos dados

Os avanços tecnológicos, especificamente as TICs como principais produtos a serem consumidos pela população mundial, ocorreram principalmente nas últimas quatro décadas. Dos primeiros computadores pessoais aos recursos atuais, há muitos pontos a se destacar.

Observou-se que as pesquisas selecionadas foram publicadas nas últimas duas décadas, e esse ponto parece interessante a ser destacado, pois embora o aprimoramento dos componentes e recursos tecnológicos físicos (*hardwares*) tenha ocorrido de maneira ascendente nesse período, a implementação de recursos não físicos, como *softwares* ou a capacitação profissional, também precisavam acompanhar os avanços em nível de *hardware*. Há de se considerar que os recursos

de tecnologia têm características emancipadoras para a vida humana, considerando os apontamentos de Moran (2017).

O processo de análise se deu pela classificação e aproximação entre as unidades por similaridade, resultando em algumas categorias temáticas e subcategorias adjacentes. A categorização se assenta nos conhecimentos teóricos dos pesquisadores em alinhamento com os objetivos da pesquisa.

3.3.1 Análise dos trabalhos que abordam números complexos

Ao analisar esses textos, observou-se um movimento quase unânime no sentido de valorizar as representações geométricas dos números complexos, frente ao ensino balizado apenas na manipulação de equações algébricas. Esse movimento revelou que a maioria dos trabalhos utiliza *softwares* de plotagem gráfica, em especial os *softwares* de geometria dinâmica. Essas ferramentas de tecnologia possibilitam, além da plotagem dos gráficos, o interesse e o estímulo da ciência de forma geral, quando os envolvidos passam a questionar e se inteirar de maneira mais imersiva nos assuntos propostos.

Foram duas as principais categorias que emergiram dessa análise: dificuldades enfrentadas e pontos positivos. Das dificuldades mencionadas nos textos, destacam-se três subcategorias relacionadas em: representação gráfica; metodologias empregadas; mobilização de conceitos. Da categoria pontos positivos, emergiram três subcategorias relacionadas: motivação; visualização; experimentação.

Quanto à representação gráfica, Paulo (2019), ao aplicar questionário junto a um grupo de professores que lecionam matemática e física na educação básica, observou nesse grupo que uma das principais dificuldades que ocorrem na abordagem de números complexos está em ensinar a representação por meio da forma polar e nas operações de potenciação e divisão. Em pesquisa realizada por Pereira (2021), estudantes de nível de graduação relatam a limitação de explorar o gráfico de funções complexas apenas com o uso do lápis e papel quadriculado. Outro ponto, destacado por Marinho, Santos e Matino (2020), está na dificuldade de

trabalhar assuntos como a transformação, conforme os autores relatam as dificuldades de utilizar o *software* Geogebra para fazer a plotagem gráfica de funções que envolvem esse assunto, apontando para uma lacuna nos *softwares* disponíveis para esse tipo de interação, em que, na maioria das vezes, é desenvolvido para a plotagem gráfica apenas de funções de variável real.

Sobre a adequação da metodologia, Beltrão, Vítor e Barbosa (2017) indicam a necessidade de metodologias diversas que possibilitem maior compreensão do estudante quanto ao tema. E afirmam que, ao observarem um grupo de estudantes do Ensino Médio, “foi possível perceber que os números complexos são abordados de forma abstrata por meio de metodologias inadequadas que contribuem para que o aluno tenha dificuldades em identificar suas relações com a geometria” (2017, p. 144). Alguns autores apontam como uma saída metodológica viável e interessante a adoção de elementos gráficos, na intenção de promover a geometria do número complexo. Para Oliveira (2020), a forma como o conteúdo é apresentado, em boa parte dos livros didáticos, parece priorizar a abordagem algébrica em detrimento à abordagem geométrica, afirmando que se deve dar destaque: “principalmente às formas geométricas e trigonométricas, uma vez que essas representações possibilitam ao professor estabelecer uma abordagem mais dinâmica para os estudantes” (2020, p. 86).

Um dos pontos negativos que mais aparecem nos relatos das pesquisas está na mobilização de conceitos, por parte dos estudantes, no momento de execução das atividades que envolvam números complexos. Ao realizar atividade para aplicação no ensino médio sobre a teoria dos grafos, Rossini (2017) indica haver grande dificuldade dos discentes na compreensão do tema e isso fica evidente principalmente quando o estudante precisa determinar as raízes de um polinômio, podendo ser um indício de que alguns dos conceitos anteriores necessários à realização dessa atividade ainda não estão bem fundamentados. Outro ponto a que se deve lançar um olhar mais crítico está no pouco contato com o conteúdo de números complexos dos professores de matemática que lecionam na Educação Básica. Germano (2016) relata haver críticas por parte de alguns professores ao ensino dos números complexos no Ensino Médio e alguns professores admitem ter dificuldades com o tema, por falta de domínio, assumindo não entender e não conhecer aplicações. Ressalta-se ainda, que parece haver um interesse em suprimir

esse conteúdo do ensino médio, já que não consta mais em provas importantes de ingresso em universidades e no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

Ao fazer pesquisa com estudantes do Ensino Médio e de nível de graduação, Pereira (2021) relata que os estudantes do ensino básico sentiram obstáculos no momento de relacionar assuntos que antecedem o conceito de números complexos, como mínimos e múltiplos.

Da categoria pontos positivos, destaca-se que os *softwares* têm atributos motivadores. As ferramentas de tecnologia podem proporcionar maior interação do estudante com o conceito abordado, pois têm características que promovem a curiosidade e também o envolvimento. Nesse sentido, Rossini (2017) afirma que os participantes de sua pesquisa se sentiram motivados e desafiados ao participar das atividades propostas com uso de *software*. Para Beltrão, Vítor e Barbosa (2017), *softwares* de geometria dinâmica, referindo-se especialmente ao Geogebra, são dotados de recursos que auxiliam o professor e têm características motivadoras e dinâmicas quando empregadas no processo de ensino dos números complexos e também de outros conceitos matemáticos.

Outro destaque positivo esteve ligado à característica do *software* em viabilizar a visualização dos conceitos. De acordo com Beltrão, Vítor e Barbosa (2017), entre principais atributos, o *software* utilizado possibilitou dinamismo, “tendo como característica principal a visualização dos objetos matemáticos. Talvez esse seja um entre tantos fatores que corroboram para que em vários países a tecnologia seja uma ferramenta que ganhou ênfase no contexto pedagógico” (2017, p. 152). Os achados de Pereira (2021) corroboram nesse sentido. Ao promover atividade com estudantes de Ensino Médio, a autora relata a boa interação dos sujeitos da pesquisa com a ferramenta tecnológica, e afirma que, dos dez participantes, nove “relataram que o GeoGebra proporcionou uma boa visualização e melhor compreensão da atividade” (2021, p. 77). De acordo com Paulo (2019), alguns elementos da abordagem dos números complexos somente ficam evidentes mediante a interação com recursos tecnológicos que possibilitam um desvelar desses elementos. Para o estudante, alguns termos e definições podem não parecer tão evidentes. Um exemplo é que “somente no registro gráfico os estudantes

perceberam que as distintas representações algébricas correspondem ao mesmo afixo no plano, isto é, o mesmo número complexo” (2019, p. 133).

Embora na maior parte dos textos o termo “experimentação” não ocorra, as ferramentas de tecnologia possibilitam essa ação de experimentar, ou seja, testar certos conceitos matemáticos. Muitos professores também se esquivam do método de tentativa e erro, que é atitude inerente aos escolares, pois a curiosidade e, muitas vezes, a criatividade estimulam a indagação. Junto com a indagação vem a investida de se alterar resultados, lançar mão da prova aquilo que está sendo posto e tudo isso é permitido na experimentação. Pereira (2021) propõe que os sujeitos da pesquisa experimentassem sozinhos uma descoberta, e os resultados foram motivadores para os estudantes, corroborando com os achados de Oliveira (2020) que, ao promover que os participantes de sua pesquisa, estudantes de nível médio, realizem atividades experimentais utilizando o *software* para perceber a relação geométrica entre um número complexo e seu conjugado, obteve bons resultados. Na verdade, o termo experimentação não é muito corriqueiro entre as pesquisas em educação matemática e nem entre os próprios professores de matemática, entretanto, ao possibilitar a experimentação matemática por meio de *software*, a concepção de elementos gráficos pode ser mais intuitiva, como afirma Garcia et al. (2021).

3.3.2 Análise dos trabalhos que abordam funções complexas

A análise desses trabalhos se fundamenta em duas principais categorias elegidas *a priori*: desenvolvimento de *softwares*; testagem de *softwares*. Da categoria desenvolvimento de *software* emergiu a subcategoria inovação, pela averiguação de quais *softwares* e componentes podem ser considerados inovadores e rompem paradigmas e obstáculos impostos em uma situação de sala de aula tradicional. Da categoria testagem de *software* emergiu a subcategoria informatização, que visa destacar a digitalização do ensino, ou seja, quando a utilização de uma ferramenta tecnológica não consegue atingir patamares de inovação ou pode ser considerada apenas uma reprodução digital de uma aula tradicional.

Averiguou-se que dois trabalhos se enquadram na categoria desenvolvimento de novas ferramentas, especificamente quanto ao desenvolvimento de um *software* para a abordagem de funções de variável complexa e aprofundamento, quanto à elementos de Análise Complexa. Destes, o texto de Santos (1998) procura explorar as várias faces da abordagem das funções complexas, contrapondo-se à lei de que a matemática não deve ser visualizada. E se propõe a, em suas palavras, “desobedecer esta lei perturbadora” (SANTOS, 1998, p. 10). O trabalho consiste em realizar visualizações, experimentos matemáticos com funções e elementos da análise utilizando o *software* Mathematica, que tem características similares ao *software* Maple, também bastante explorado no início do século em aulas de cálculo diferencial e foi previamente descrito aqui no Capítulo 2. No *software* Mathematica, o autor desenvolve uma rotina de programação e pode compilar algoritmos para a realização de diversos cálculos matemáticos e inclusive plotagem gráfica. Segundo o autor, diversos temas podem ser explorados a partir das programações apresentadas, mudando a ideia de que a matemática não pode ser visualizada (1998, p. 11).

O trabalho de Azevedo (2009) também se trata de uma dissertação que discorre sobre a representação gráfica em superfícies, com formatos menos comuns na plotagem gráfica, como superfícies de toro ou irregulares explorando a periodicidade das funções. O desenvolvimento do trabalho se apoia no tratamento dos dados pelo *software* Matlab, de cunho interativo com ferramentas que possibilitam ao usuário a exploração de elementos matemáticos, em especial o cálculo numérico, além da possibilidade gráfica, cálculo de matrizes e análise numérica. Esse trabalho explora as relações matemáticas aprofundadas do cálculo, mas não se propõe a realizar intervenções ou aplicações reais ou didáticas, considerando-se um trabalho teórico.

É importante ressaltar que, embora as propostas desses dois trabalhos relatados estejam em conformidade com um dos objetivos principais de nossa tese, que é o desenvolvimento de um *software* para a plotagem gráfica de funções de variável com complexa com elementos de Análise Complexa, nenhum deles discute ou explora a ideia do domínio de cores. Na questão do desenvolvimento, ambos se relacionam ao desenvolvimento de uma aplicação que utiliza os programas mencionados como recurso inicial, ou seja, mesmo que o usuário tenha acesso a

essas aplicações, precisará da licença dos *softwares* em cujas aplicações foram desenvolvidas. Há também a necessidade de conhecimento do *software* para que se possa compilar ou executar os comandos requeridos.

Quanto à categoria testagem de *softwares* de plotagem gráfica, Alves e Marinho (2017) exploram as potencialidades da representação gráfica com a utilização do *software* CAS Maple e também o Geogebra. O trabalho descreve uma interessante aplicação desses *softwares* na prática docente, com cinco estudantes do Instituto Federal de Educação, no Estado do Ceará. Os autores exploram a visualização gráfica propiciada por esses *softwares* com o aporte teórico da engenharia didática². Em um dos apontamentos mais relevantes, os autores destacam que há “um quadro de escassez e um quadro de conhecimentos científicos, no que concerne ao ensino e à aprendizagem da teoria das funções na variável complexa, ainda de modo deficitário no Brasil” (2017, p. 87). Esse ponto é de suma importância, pois parece ressaltar o quanto o ensino deste e de outros temas aparenta ter sido deixado de lado, uma vez que os próprios PCNs (BRASIL, 2002), que até pouco eram as diretrizes no país, não estimulavam o aprofundamento na abordagem efetiva dos conteúdos.

Em outro trabalho, os mesmos autores desenvolvem o tema com aporte da Teoria das Situações Didáticas³, do qual foram participantes três estudantes de um curso de licenciatura (MARINHO; ALVES, 2016). Embora os autores tenham desenvolvido três trabalhos com foco na representação de funções de variável complexa (MARINHO; ALVES, 2016; ALVES; MARINHO, 2017; ALVES, 2018) e fizeram aplicações consistentes do tema, não ocorreu o desenvolvimento de um *software* próprio e não foi explorado o domínio de cores.

Da subcategoria inovação, do total de 18 trabalhos que abordam funções complexas, três (REIS, 2016; MENDES JÚNIOR, 2017; ALVES, 2022) apresentam alguma menção à abordagem de funções complexas com base em planos coloridos. Entretanto, nesses três trabalhos, o foco está na abordagem de fractais. Por se tratar

² Engenharia Didática é uma abordagem metodológica, primando por um esquema experimental que tem como base as realizações didáticas de sala de aula, sua concepção, realização, observação e análise das etapas de ensino, podendo incluir tecnologias educacionais.

³ A Teoria das Situações Didáticas foi proposta pelo pesquisador e matemático francês Guy Brousseau e se concentra na análise das práticas educacionais em sala de aula. Trata de uma

de um assunto pouco abordado na educação básica, Mendes Júnior (2017) pontua que é um desafio transpor esse assunto para estudantes do Ensino Médio. Em sua dissertação, o autor desenvolveu uma atividade com estudantes de nível médio para abordagem desses conceitos, utilizando os *softwares* Geogebra e wxMaxima. O relato aponta que a abordagem desse tema deve ser bem estruturada para que possa promover o interesse pelos fractais, por meio de uma linha de raciocínio que possibilite a compreensão e a reelaboração dos conceitos.

O trabalho de Reis (2016) apresenta proximidade com os achados de Mendes Júnior (2017), todavia, não é aplicado. As propostas de atividade são apresentadas no formato de uma sequência didática bem estruturada, podendo ser aplicada com turmas de estudantes que tenham algum conhecimento sobre o *software* GeoGebra. Nas palavras de Reis (2016), a união de *software* à aula de matemática pode fazer com que se tenha maior facilidade no desenvolvimento do ensino e ainda “possibilita uma maior interação do estudante com o conteúdo, proporcionando a evolução em sua capacidade visual e abstração de conceitos geométricos, além de ser uma ferramenta que é de interesse dos estudantes” (REIS, 2016, p. 67).

No terceiro estudo, Alves (2022) apresenta um levantamento de obras desenvolvidas entre 2017 e 2020, e, embora faça uma relação de obras voltadas à formação de professores de matemática, com aporte teórico da engenharia didática, o trabalho apenas menciona a possibilidade de utilização do *software* GeoGebra com recursos coloridos, na abordagem de elementos dos conjuntos complexos. O autor indica que essas pesquisas contribuem na formação de professores de matemática, proporcionando melhorias na prática educacional. Um ponto importante destacado nos achados de Alves (2022) está no fato de que as pesquisas relacionadas parecem estar afastadas da sala de aula, sendo um achado interessante que corrobora com esse levantamento, já que cerca de 50% das pesquisas aqui relacionadas são de cunho teórico. Outro ponto está na aproximação dos recursos de tecnologia com metodologias já consolidadas, como é o caso da engenharia didática. De acordo com o pesquisador, é necessário o provimento de mais recursos de tecnologia aos professores e também a ampliação de pesquisas que contemplem essa temática.

proposta estruturada pelo professor e consiste nos problemas que estimulem os estudantes a reflexão, discussão, investigação e no apoio à construção de conceitos matemáticos.

Os achados de Alves (2022) reforçam que há a necessidade de um emprego inovador das tecnologias, e vai ao encontro ao proposto por Soffner (2013), que elucida que, para a educação, não basta apenas despejar dispositivos tecnológicos sem antes repensar a escola atual. O estudante precisa conciliar o seu agir e seu pensar nas necessidades que a vida lhe impõe, pensando a tecnologia como instrumento emancipador. De outra forma, o emprego de tecnologia não se torna emancipador, tão pouco humanizador, como propõe Freire (1976).

Da subcategoria informatização, observou-se que dez trabalhos abordam a ideia da representação de funções da variável complexa partindo da representação do plano de Argand-Gauss. Esse sistema consiste na representação por um plano cartesiano e não leva em consideração a utilização de domínio de cores. Embora esse método possa ser bem conhecido e explorado pelos professores e sua aplicação por meios tecnológicos não represente tão grande inovação, é importante destacar que esses trabalhos estimulam a compreensão dos conceitos de funções complexas e está em alinhamento com o proposto pela BNCC (BRASIL, 2017), no que tange a uma formação mais ampla, promovendo um domínio mais geral de diversas áreas do saber. Isso corrobora com o que coloca Valente (1999) sobre a possibilidade de enriquecimento nos ambientes de aprendizado com uso dos recursos tecnológicos.

Ao desenvolver atividades com o uso do GeoGebra em uma turma do segundo ano do Ensino Médio, Pereira (2017) constatou que as ações consideradas alternativas, por utilizarem tecnologias, supriram uma necessidade do estudante, por terem características que “permitam que os próprios estudantes conjecturem suas próprias definições e conclusões de conteúdos matemáticos” (2017, p. 78). Nesse sentido, pode-se destacar que a adesão aos recursos de tecnologia vão ao encontro dos pressupostos de Freire (2022), e os momentos de interação possibilitados por esses recursos também estimulam outras interações com demais estudantes, professores e comunidade.

Quanto à natureza dos trabalhos aqui relacionados, classificou-se 54% como trabalhos teóricos, a maioria abordando o tema funções complexas no *software* Geogebra. Esses trabalhos abordam temas mais pontuais ou problemas específicos, desde tópicos mais elementares que podem ser abordados na educação básica,

como também tópicos mais aprofundados para disciplinas de nível superior. Embora nenhum trabalho, dentre estes 54%, faça menção a uma área específica para abordagem do tema. Os outros 46% abordaram o tema em algum nível escolar, fazendo uma pesquisa de campo para isso e, destes, quatro descrevem sequências didáticas de abordagem do tema.

A maior parte dessas pesquisas relaciona o saber matemático como objetivo final nas atividades que envolvem estudantes. Parecem indicar ainda uma mobilização no entorno desse saber, indicando certa estagnação quanto aos objetivos centrais, principalmente na formação profissional, que refletem na prática docente. Esses achados parecem entrar em conformidade com o exposto por Passos, Nardi e Arruda (2009), indicando uma tendência de melhoria na discussão sobre a capacitação profissional dos professores de matemática, mas que precisa priorizar a formação integral destes e não apenas o conhecimento aprofundado do assunto. Isso aponta para a ideia de que diversos saberes devem ser considerados para uma formação do professor que leciona matemática e não apenas o saber matemático.

Nesse sentido, é imprescindível a promoção de novas formas de capacitação profissional, principalmente para professores, uma vez que essa emancipação não ocorre somente quando o sujeito se coloca como usuário de uma nova ferramenta de tecnologia, para facilitar o seu dia a dia. Mas também de outra forma, como na modalidade em que o sujeito interage com os recursos disponíveis para promover melhorias no seu cotidiano e também no de outrem, de forma a gerar facilidades que atinjam toda uma comunidade, que se beneficiará de facilidades pensadas por aqueles que conhecem as reais necessidades. Ocorre assim, um empoderamento tecnológico, no qual o sujeito é agente da transformação e não apenas usuário ou reprodutor dos mecanismos que lhe foram disponibilizados. Ao analisar a BNCC (BRASIL, 2017), é visível a preocupação em estimular o uso das tecnologias nos ambientes de aprendizagem, entretanto, parece ter faltado o estímulo de promover uma formação mais aprofundada do estudante e do professor, e não apenas o preparo para assunção de novos postos de trabalho gerados pelas redes sociais ou pela automação e mecanização.

3.3.3 Principais características de um *software* voltado para números e funções complexas

Relacionaremos aqui, alguns itens que identificamos nessas 33 pesquisas e podem revelar pontos norteadores para produção de um *software* mais eficiente. Tais características são proeminentes das discussões apresentadas nos textos quanto à utilização de *software* para a abordagem do tema números e funções complexas. Partindo das dificuldades relacionadas nos textos científicos levantados, estão: a representação; as metodologias; a mobilização de conceitos.

Sobre a representação gráfica, entende-se que o *software* precisa reunir elementos que possibilitem a interação, a fim de alcançar o objetivo principal: despertar interesse e também favorecer o entendimento dos conceitos. Sendo assim, os *softwares* que possibilitam a representação gráfica e algébrica viabilizam maior entendimento dos conceitos dos números e funções complexas. Quanto à metodologia, foi possível identificar que o emprego de recursos geométricos e trigonométricos possibilita maior entendimento, em contraponto ao emprego apenas de atividades que levam em conta a mobilização de estruturas algébricas e a execução de cálculos.

Quanto à mobilização de conceitos, os *softwares* poderiam trazer apêndices e recursos de resgate de elementos conceituais basilares à manipulação das atividades envolvendo números complexos. Dessa forma, há a possibilidade de resgate de elementos e conceitos já esquecidos ou com os quais o sujeito tenha pouco contato.

Ao relacionar os pontos positivos mencionados nos textos, temos como base: a motivação; a visualização; a experimentação. Quanto à motivação, é evidente que surja a motivação, ao possibilitar que o estudante tenha acesso a um ferramental tecnológico possibilitando situações de interação não acessíveis em uma sala de aula comum, cujos principais recursos de tecnologia são quadro e um instrumento de escrita manual (caneta ou giz). Todavia, não basta colocar o estudante frente a um recurso tecnológico sem antes elaborar um bom roteiro para a aula. Nesse sentido, a motivação é válida quando o professor estipula os devidos termos para sua aula e os recursos tecnológicos a serem utilizados.

A possibilidade de experimentação também é uma característica bastante interessante para um *software* de plotagem gráfica. Juntamente com a possibilidade de visualização, a experimentação deve ser dinâmica, intuitiva e atrelada ao fácil manuseio da ferramenta tecnológica.

Desse modo, considerando esses achados, a proposta de desenvolvimento de uma ferramenta tecnológica, no formato de *software*, será descrita no Capítulo 4. Para tanto, pretende-se elaborar essa ferramenta procurando proporcionar recursos que viabilizem atenuar pontos descritos como negativos nas pesquisas e elaborar recursos baseados nos pontos descritos como positivos.

4 DESENVOLVIMENTO DO SOFTWARE

A visualização do gráfico de uma função, que envolve variáveis complexas, é uma tarefa difícil de realizar em um plano cartesiano XY, visto que o número complexo carrega mais de uma informação, diferente dos números contidos no conjunto dos números reais. Desse modo, na intenção de realizar a plotagem gráfica de funções que envolvam variáveis complexas, possibilitando maior entendimento do comportamento das funções e estudo de conceitos da Análise Complexa, desenvolveu-se um *software* de plotagem de funções e suas respectivas derivadas de até terceira ordem.

O objetivo com o desenvolvimento desse *software* é possibilitar a visualização de pontos de singularidades e demais elementos das funções, que muitas vezes não estão acessíveis em uma forma convencional, como a utilização de lápis e papel, e também nem sempre são visíveis utilizando um plano cartesiano tridimensional, considerando também que recursos tecnológicos, como o *software* em questão, podem viabilizar um enriquecimento de informações e dados nas aulas e ambientes de aprendizagem, facilitando a construção do saber.

A plataforma de desenvolvimento escolhida foi a Embarcadero Delphi (2022). A linguagem de programação Delphi, muito popular no início do século 21, tem sido bem utilizada no desenvolvimento de *softwares* para *desktop*, podendo ser aplicada em diversos modelos de desenvolvimento de projeto, com acesso a banco de dados e aplicações *web*. Atualmente, a empresa Embarcadero disponibiliza algumas versões para estudantes e desenvolvedores de forma gratuita.

Embora haja diversas plataformas de desenvolvimento de *software* disponíveis para uso, a opção pela linguagem de programação C++ e Object Pascal, disponível no Delphi, dá-se pelo fato do domínio da ferramenta por parte do pesquisador. Esse conhecimento prévio sobre essas linguagens viabiliza que o trabalho se desenvolva de forma mais eficaz e célere. Optou-se pela plataforma de compilação disponibilizada pela Embarcadero, por ser uma das mais conhecidas no desenvolvimento de aplicações para *software desktop*, pelo acesso à plataforma ser de modo gratuito e também por ser uma plataforma que está sempre em atualização.

Ao desenvolver o *software*, nomeado de F(C): Análise Complexa, o critério principal a ser seguido é criar possibilidades de visualização dos elementos que

compõem uma função complexa por meio de um mapa de cores. Esse mapa, descrito por Silva (2006) como Mapa do Plano Complexo, permite a associação de cada ponto no plano complexo com uma cor distinta. A plotagem do gráfico enlaça os conjuntos domínio e imagem, resultando em um mosaico de cores, representando a associação entre os valores desses dois conjuntos, constituída das principais características dos números complexos, a forma polar com argumento e módulo (THALLER, 2000).

Parte do *software* que aborda a Análise Complexa é composta pela obtenção dos gráficos das funções derivadas que utiliza a mesma constituição de cores. As funções derivadas têm sua lei de formação escrita no formato de algoritmo, e são utilizadas para gerar o gráfico a partir da escolha da função primitiva pelo usuário. Para cumprir os prazos de entrega do *software* e do estudo em andamento, optou-se pelo desenvolvimento das derivadas até a terceira ordem. Outro ponto é a visualização dos elementos da função em gráficos cartesianos de três dimensões, cuja técnica gera o Panorama Analítico, possibilitando uma análise gráfica mais detalhada dos pontos de singularidade. Esses pontos podem passar despercebidos em gráficos de duas dimensões, por sua proximidade com valores infinitos (WEGERT, 2009).

O emprego do domínio de cores na representação de números complexos representa uma das contribuições que o uso de tecnologias pode prover ao desenvolvimento da ciência e à facilitação do entendimento de conceitos mais elaborados na educação matemática. O trabalho de Silva (2006) desenvolve um *software* que possibilita a visualização de funções de uma variável complexa, fazendo uso do domínio de cores, apontando como um conceito que pode, muitas vezes, parecer abstrato aos estudantes ser apresentado também de forma gráfica.

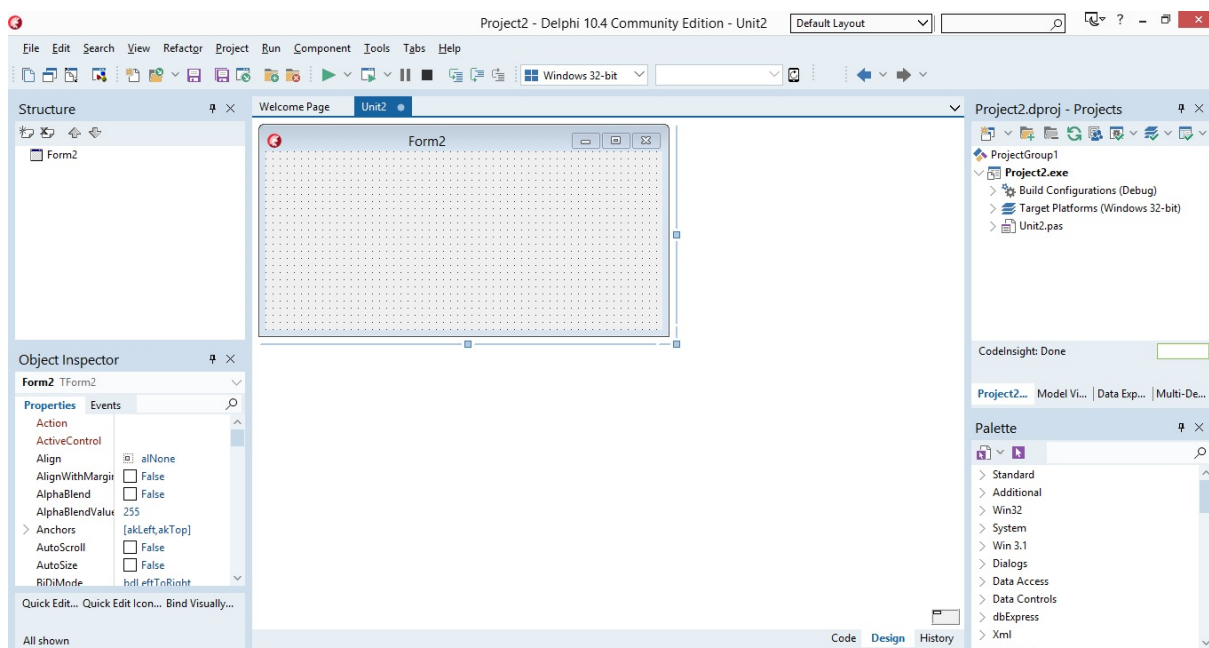
Essa ferramenta propicia a visualização de pontos de singularidades, além de oportunizar que os estudantes possam construir suas próprias inferências sobre o comportamento das funções. Entendemos que os recursos de tecnologia, como o computador, quando utilizados com atividades planejadas, em sala de aula, possibilitam o enriquecimento dos ambientes de aprendizagem e auxiliam o estudante na construção de seu próprio saber (VALENTE, 1999).

4.1 Embarcadero e o pacote GLScene

A empresa norte-americana Embarcadero Technologies, com sede no Estado do Texas, desenvolve e dá suporte a uma série de produtos e serviços relacionados a *softwares*, construindo-os para desenvolvedores e profissionais de bancos de dados. De acordo com dados disponíveis no próprio *site* da empresa, são mais de três milhões de usuários em todo o mundo. A empresa disponibiliza treinamentos e promove eventos de capacitação profissional para programadores e estudantes, inclusive no idioma português. O compilador Delphi foi lançado em 1993 e até hoje se mantém no mercado como uma boa opção para desenvolvedores. Embora, seu uso tenha sido mais voltado para aplicações *desktop*, o Delphi também possibilita desenvolvimento para outras plataformas. Entretanto, há outras opções similares no mercado, como o compilador Lazarus, *software opensource* disponibilizado gratuitamente, que pode ser instalado em Linux e Windows.

A Embarcadero disponibiliza novas versões com frequência durante o ano, além de boa assistência dos diversos recursos encontrados no compilador. Mas, para o desenvolvimento dos recursos tridimensionais, houve certa dificuldade em encontrar nas ferramentas e funcionalidades disponibilizadas no Delphi alguma que servisse ao proposto. Algumas bibliotecas adicionais tiveram que ser instaladas junto ao desenvolver Delphi, considerando as versões disponibilizadas durante o desenvolvimento desse *software*, desde a versão 10.1 até a versão 10.4 *Community Edition*, a mais recente disponível no *site* do desenvolvedor. A Figura 4 apresenta a interface da versão 10.4, até então a mais atual disponível.

Figura 4 – Interface Delphi 10.4



Fonte: Autor

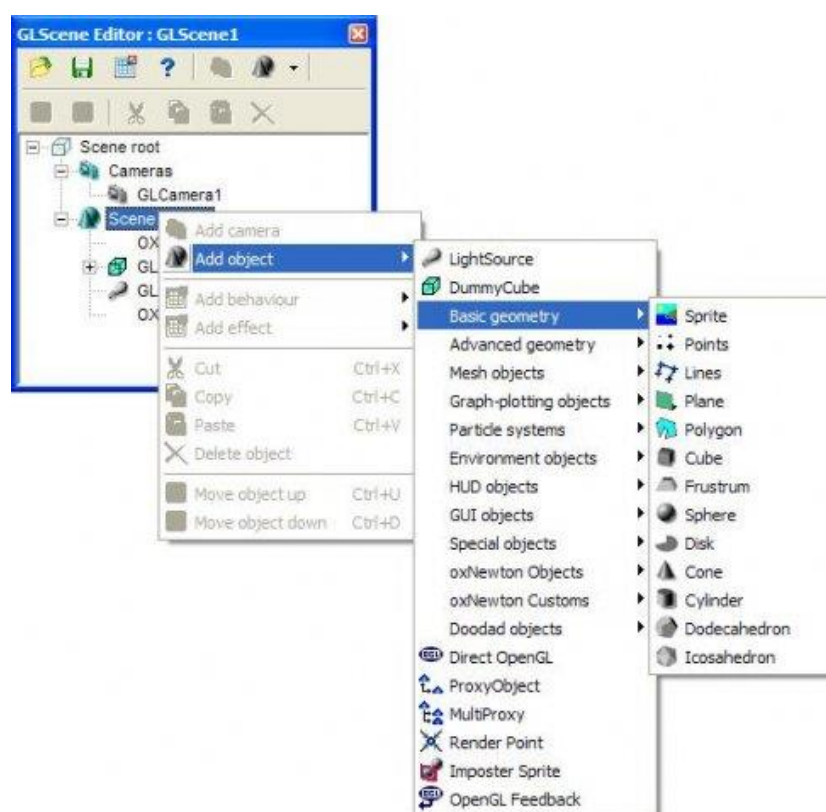
Optou-se, primeiramente, pela instalação da biblioteca adicional *Tchart* ou *Teechart*, que possibilita a visualização e a plotagem de gráficos em três dimensões, utilizando elementos com uma programação predefinida, ideal para um rápido desenvolvimento de sistemas que utilizem gráficos. Entretanto, para o desenvolvimento de nosso *software*, essa biblioteca não se mostrou viável, pois não possibilitou a adequação do plano tridimensional à paleta de cores. Outro ponto que precisa ser destacado é que, embora a Embarcadero tenha disponibilizado o *Tchart* de maneira gratuita em uma das versões anteriores do Delphi, a *Community Edition* era apenas uma versão demonstrativa, portanto, limitada. O desenvolvedor que tem interesse em utilizar os recursos dessa biblioteca precisa adquirir a versão integral, que não é gratuita.

Outra possibilidade para desenvolvimento da plotagem em modo tridimensional foi a utilização da biblioteca *OPENGL*, que disponibiliza elementos que possibilitam a criação de aplicações gráficas e ainda:

[..] existem implementações destas bibliotecas e de suas APIs em outras linguagens de programação, como Delphi, Ada e Modula-3. Além disso, a interoperabilidade natural entre C e C++ possibilita o desenvolvimento de aplicações em C++ utilizando a OpenGL (BICHO et al., 2002, p. 36).

Dessa forma, a opção mais viável encontrada para a utilização da biblioteca OpenGL foi a 3D GLScene, baseada no *software* livre OpenGL para a linguagem Delphi. Essa biblioteca disponibiliza componentes e ferramentas visuais, possibilitando a criação de cenas e objetos 3D OpenGL em execução na interface do Delphi. Embora, ela não disponibilize atualização frequente, o ponto positivo na sua escolha se deu pelo fato de ser difundida de forma gratuita. Desenvolvida em 1999, por Mike Lischke, tornou-se (*Open Source*) um *software* de código aberto após algumas versões. O GLScene traz alguns aplicativos de demonstração e exemplos que possibilitam ao programador compreender e agilizar a programação 3D que pretende implementar. A partir da versão 1.2, passou a suportar o C++Builder e o Lazarus IDE para Free Pascal. A Figura 5 apresenta a interface do GLScene aplicada ao Delphi:

Figura 5 – Interface GLScene



Fonte: Site do desenvolvedor⁴

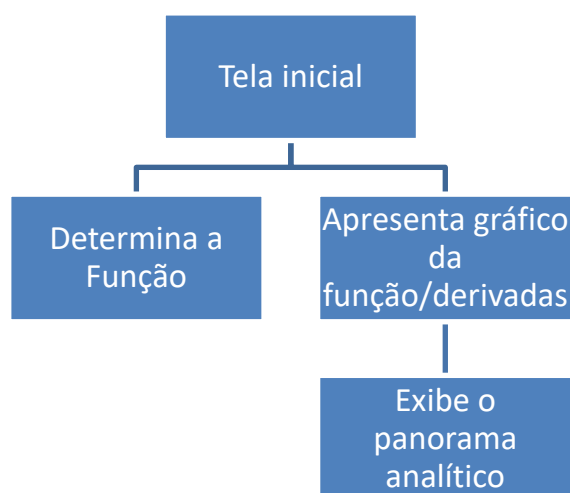
⁴ Disponível no endereço eletrônico: <https://glscene.sourceforge.net/wikka/>

Devido à pouca frequência nas atualizações, a instalação do pacote GLScene se torna um pouco trabalhosa, demandando que seu utilizador tenha afinidade com linguagens de programação, pois disponibiliza diversas ferramentas que possibilitam a arquitetura de elementos 3D. Este se mostrou muito útil ao *software* em desenvolvimento, reunindo desde ferramentas mais elementares até a criação de animações em 3D. A elaboração dessa ferramenta tecnológica leva em consideração algumas etapas de desenvolvimento, baseadas na proposta de Campos, Campos e Rocha (1996), e descritas na sequência.

4.2 Software

O passo inicial ao desenvolvimento foi determinar o objetivo do *software*. Estabeleceu-se que ele possibilitaria a plotagem gráfica de funções de variável complexa, a plotagem gráfica das funções derivadas e a plotagem gráfica dos Panoramas Analíticos Coloridos, obedecendo-se à representação gráfica pré-estabelecida, de acordo com a Figura 6.

Figura 6 – Representação gráfica das funções do *software*.



Fonte: autor

Para a plotagem gráfica dos elementos das funções de variável complexa, lançamos mão de um recurso que vem sendo utilizado por pesquisadores e desenvolvedores de ferramentas de plotagem gráfica, o Mapa de Cores ou Mapa do Plano Complexo, que possibilita criar um domínio de cores, relacionando a cada

valor no domínio da função uma cor dentro de um espectro multivariado (THALLER, 2000).

Partindo do Mapa do Plano Complexo (Figura 7) descrito por Silva (2006), onde cada ponto no plano complexo pode ser associado a uma cor única, ao gerar uma plotagem gráfica com domínio e imagem constituídos no conjunto dos números complexos, a figura resultante apresenta um mosaico colorido, em que cada valor de imagem está associado a um respectivo valor de domínio. Este plano, baseado em Thaller (2000), compõe as características elementares dos números complexos, representadas pela forma polar com argumento e módulo.

Figura 7 – Mapa de cores

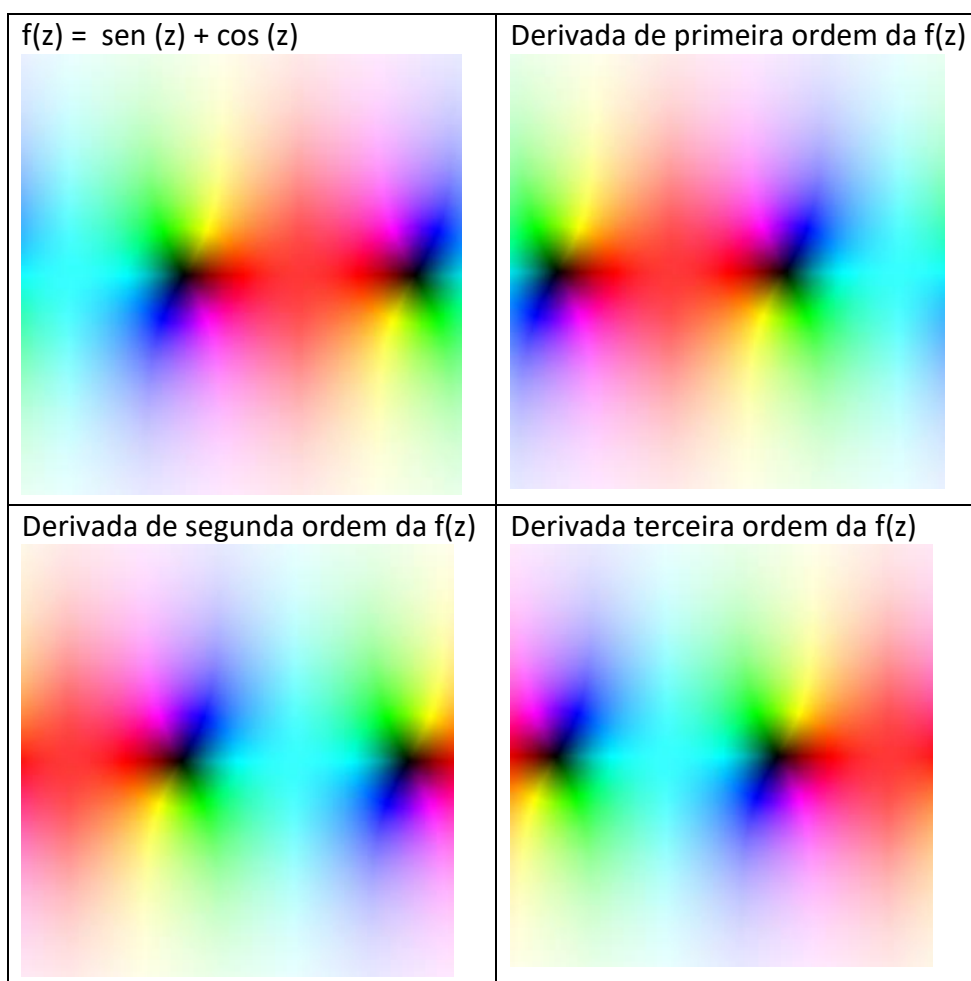


Fonte: autor

Para a obtenção das derivadas sucessivas, foi preciso encontrar cada lei de formação a partir da função primitiva. Dessa forma, partindo de uma função $f(z)$, primeiro foi preciso identificar a lei de formação de sua derivada de primeira ordem $f'(z)$ (aplicamos as regras de derivação pertinente para cada caso), para daí então determinar a lei de formação da derivada de segunda ordem $f''(z)$ e só então obter a lei de formação da derivada de terceira ordem $f'''(z)$. Devido ao respeito ao prazo para término do trabalho e do extenso volume de códigos de programação, optamos por limitar a obtenção das derivadas até a terceira ordem.

Na Figura 8, como exemplo, apresentam-se alguns resultados de testes com plotagem de derivadas até terceira ordem.

Figura 8 – Primeiros resultados da plotagem de derivadas

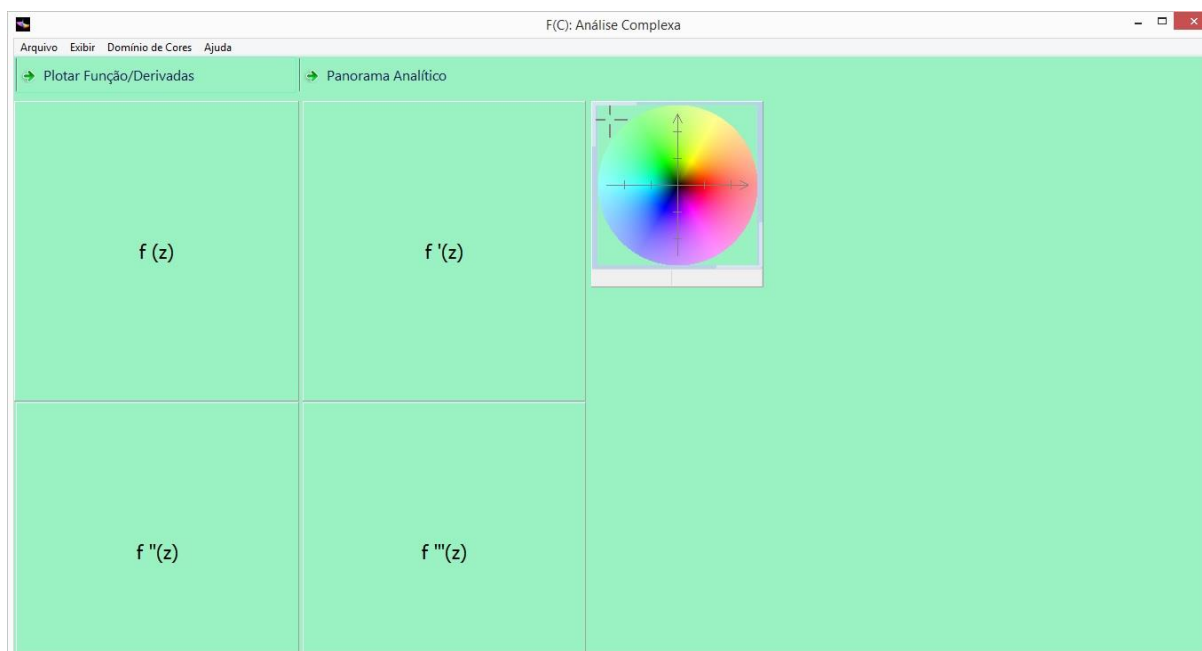


Fonte: autor

De posse das primeiras imagens geradas, foram desenvolvidas as linhas de programação para cada função escolhida. As funções disponibilizadas pelo *software* possibilitam a alteração de seus coeficientes, gerando maior número de gráficos familiares àquela função.

Buscou-se um leiaute inicial com poucos botões e uma interface com poucos recursos, intentando facilitar a utilização por parte do usuário. No leiaute inicial, ilustrado na Figura 9, estão disponíveis para interação apenas os botões na barra de menu e o botão “Plotar Função/Derivadas”, em que o usuário deve clicar para obter o formulário de opções de funções.

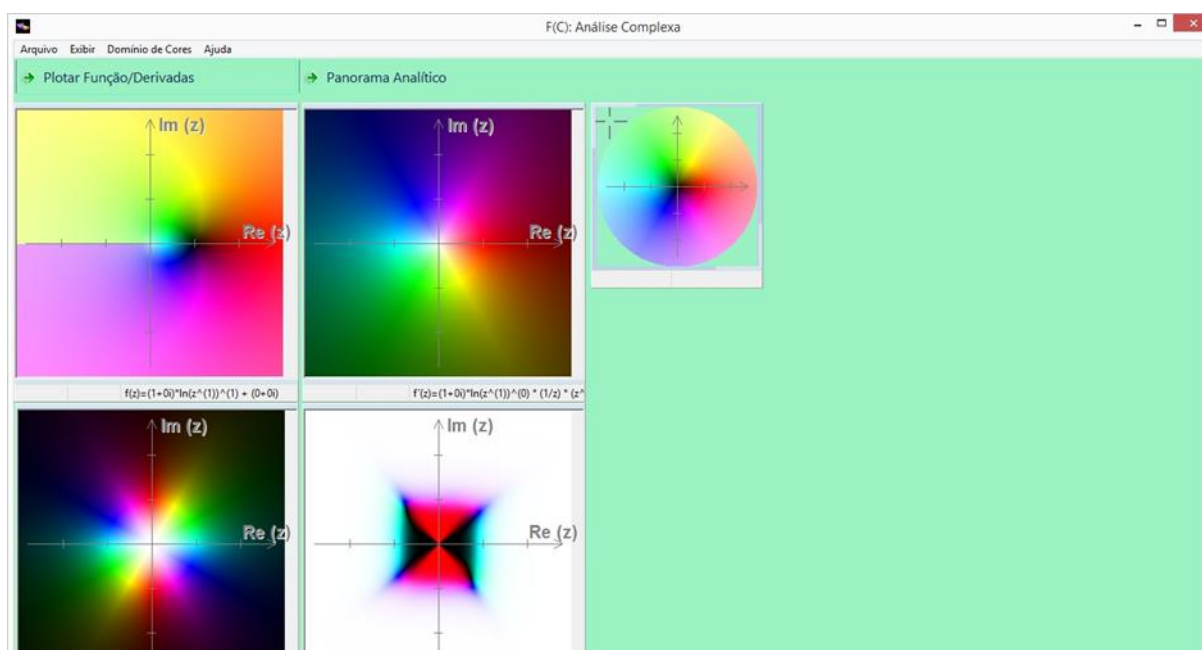
Figura 9 – Interface principal do *software* F(C): Análise Complexa



Fonte: autor

Somente depois da escolha da função e do coeficiente o *software* gerará o gráfico, montando um mosaico com a função inicial e respectivas derivadas de até terceira ordem.

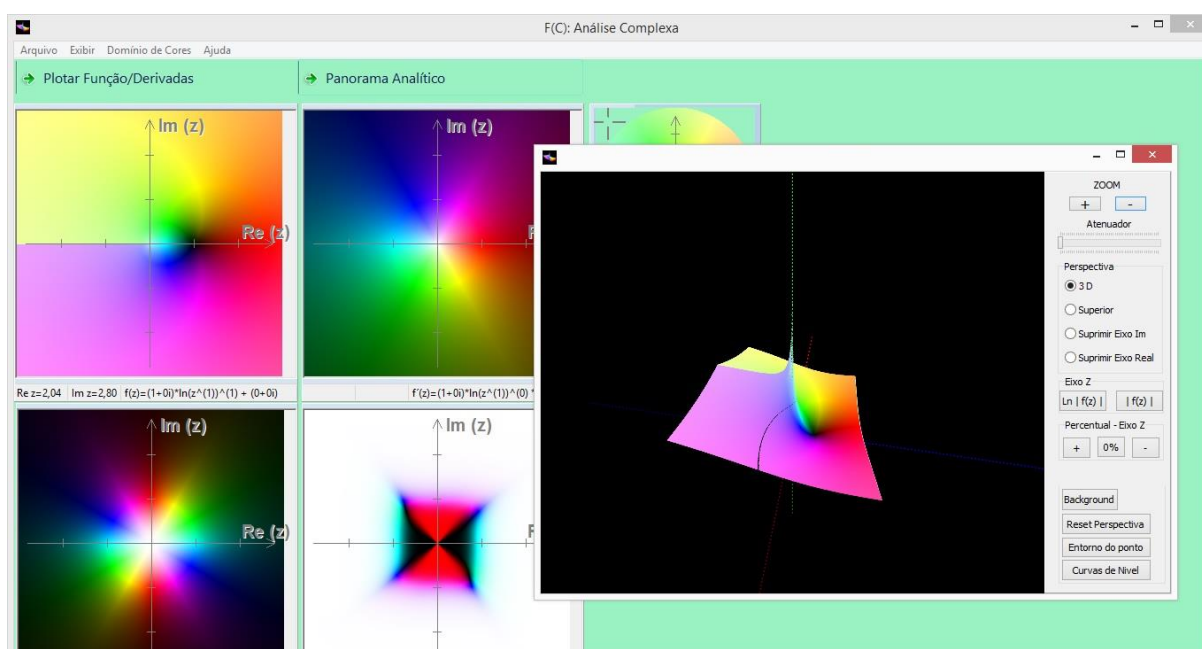
Figura 10 – Interface com plotagem de derivadas



Fonte: autor

Ao clique no botão “Panorama Analítico”, uma segunda janela é chamada, descrevendo o Panorama Analítico da função do respectivo quadro selecionado, função ou derivada, possibilitando outra perspectiva da função plotada partindo de uma visão tridimensional. A Figura 11 representa essa ação, observando-se à direita a janela que descreve o Panorama Analítico. A interação com o *software* não exige conhecimentos específicos na área de programação, basta que o usuário tenha interesse ou curiosidade em visualizar o gráfico de funções complexas para poder interagir. Observa-se, no entanto, que, para interpretar os gráficos, é necessário conhecer o conjunto dos números complexos e funções.

Figura 11 – Interface com janela do Panorama Analítico



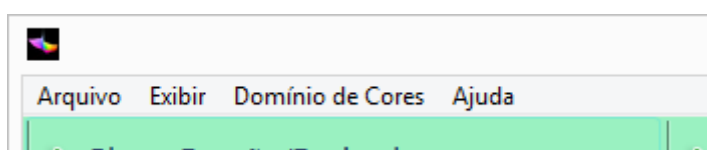
Fonte: autor

O Panorama Analítico com cores não envolve apenas a informação do módulo da $f(z)$, mas também seu argumento. Os dados para que se possam obter os valores que serão representados no eixo z são apenas os valores do módulo da $f(z)$, relativos a cada valor do domínio. Já o argumento obedece ao valor do *phase* ($e^{i\phi}$), em substituição ao valor do ângulo ϕ , que pode, muitas vezes, ser multivalorado, extrapolando-se em múltiplos de 2π . Os pontos coloridos obedecem então ao intervalo do círculo unitário em que a fórmula de Euler se mantém. Os pontos em um círculo são substituídos por cores, que se tornam a quarta dimensão na representação do Panorama Analítico.

4.3 Funcionalidades

A barra de menu principal reúne opções com salvamento das informações do gráfico no formato .jpeg, alteração no domínio de cores, modificar as informações do gráfico como exibir ou não as retas numéricas do plano, além da opção ajuda. A maior parte destas funcionalidades estará disponível apenas após a escolha da função a ser plotada (Figura 12).

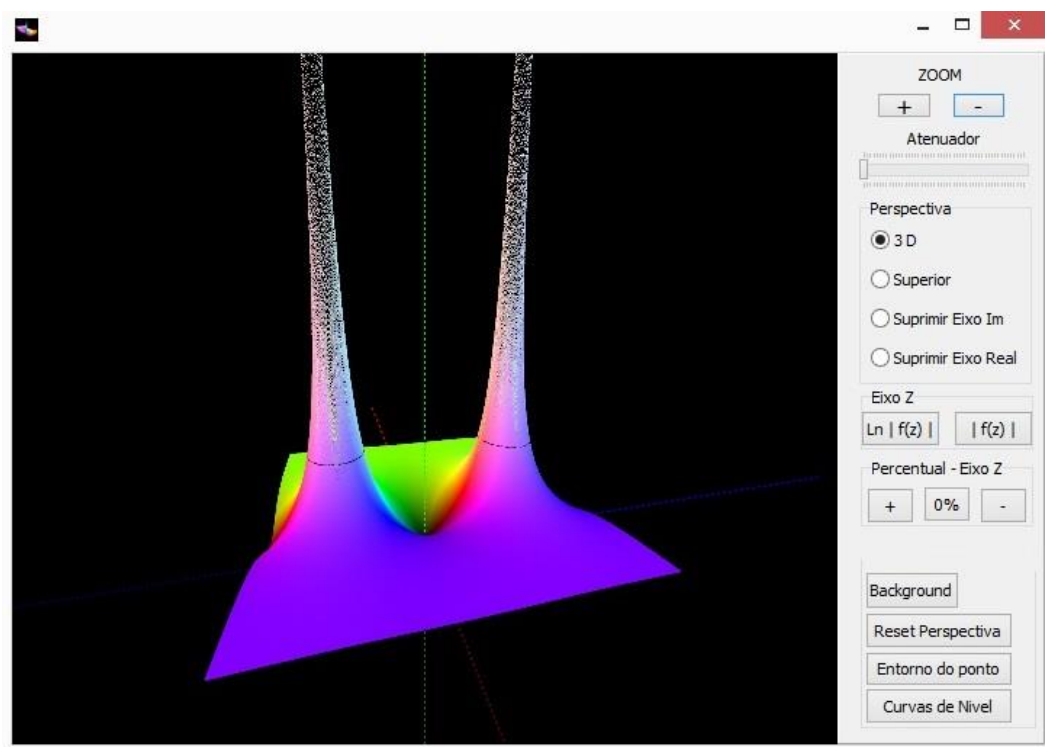
Figura 12 – Menu principal



Fonte: autor

A janela que descreve o Panorama Analítico apresenta funcionalidades para melhorar a interpretação gráfica e visual da plotagem. Localizada à direita da janela, a paleta de opções traz alguns botões com funcionalidades bem específicas (Figura 13).

Figura 13 – Janela do Panorama Analítico da função $\tan(z)$



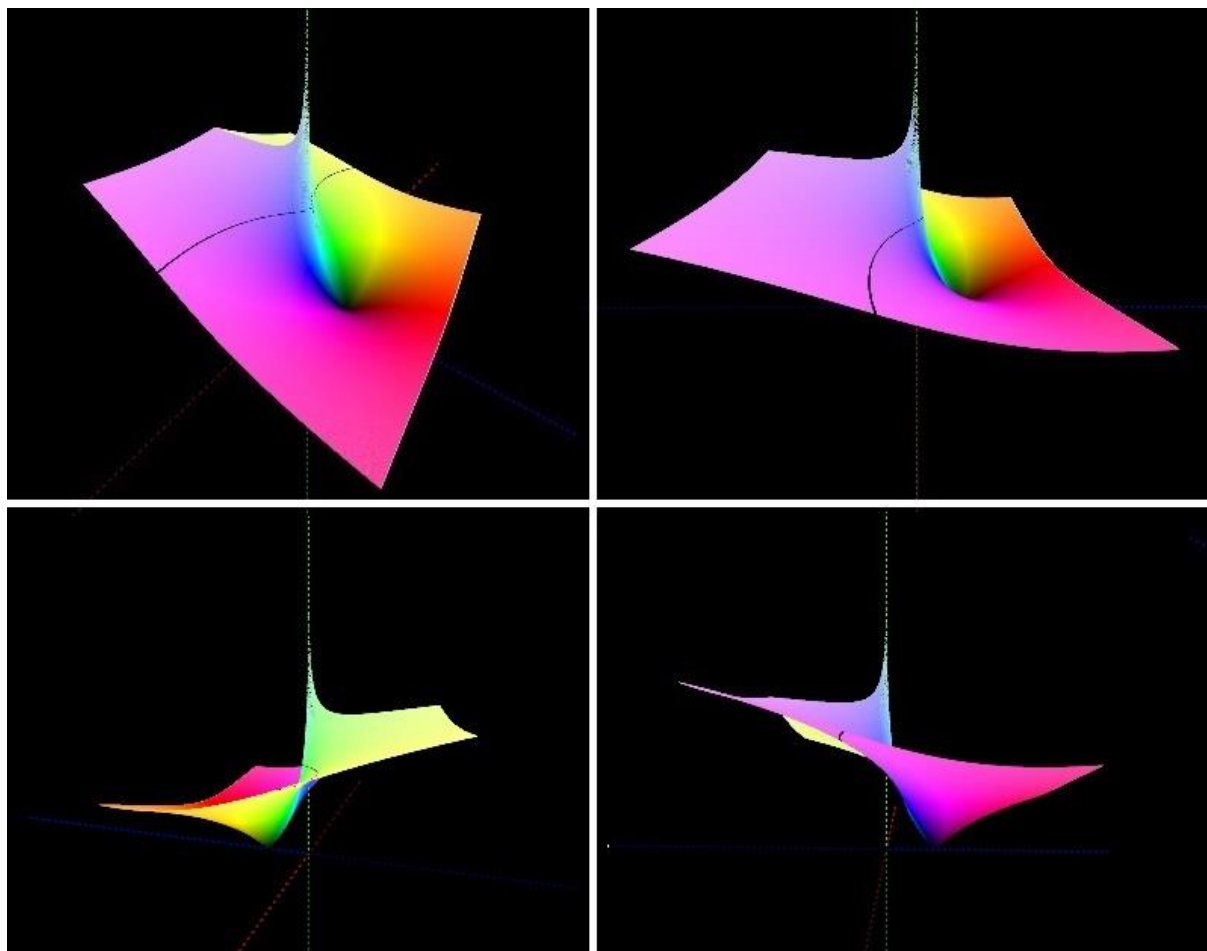
Fonte: autor

A palheta de funcionalidades dentro da janela de exibição do Panorama Analítico reúne a opção de aumentar e reduzir o *Zoom* da perspectiva de visualização por meio dos botões + e -. Considerando que a plotagem desse gráfico é gerada ponto a ponto, e nos valores de domínio em que ocorrem polos ou pontos de singularidade a imagem pode ficar pontilhada, e buscando melhorar essa visualização, foi disponibilizado um botão no formato de potenciômetro, que possibilita atenuar esse espaçamento.

Em perspectiva, o usuário poderá optar por fazer a visualização em três dimensões, ou suprimir o eixo Z, obtendo uma visualização em duas dimensões do domínio, e até mesmo suprimir um dos eixos do domínio.

É possível alterar o *phase*, a função imagem, de acordo com o módulo da função ou módulo do logaritmo neperiano da função. Normalmente, funções analíticas têm um crescimento rápido para o infinito, nas singularidades ou extremidades dos domínios. Sendo assim, é conveniente usar o gráfico de $\ln |f|$ em vez de $|f|$ para construir a superfície do Panorama Analítico. Uma vez que $\ln |f|$ e $\arg f$ são funções conjugadas harmônicas, a representação logarítmica também é mais natural (WEGERT, 2009). São ações que possibilitam ao usuário uma melhora na perspectiva para funções que crescem de maneira muito rápida, em pontos que tendem ao infinito. E com essa mesma funcionalidade, o campo alterar o percentual do eixo Z possibilita uma melhoria na visualização e inferência quanto ao entorno ou ponto em que a função cresce muito rápido.

Há a possibilidade de alterar a cor do plano de fundo do gráfico por meio do botão *background*. Essa funcionalidade pode ser útil para funções que tenham muitos pontos em cores escuras. O botão *reset* de perspectiva possibilita retornar à perspectiva inicial, sem que o usuário precise rotacionar todo o plano de visualização. O clique no entorno do ponto dentro da região plotada, possibilita uma visualização aproximada de certo ponto escolhido pelo usuário, e é possível visualizar as curvas de nível, caso o gráfico permita esta ação (Figura 14).

Figura 14 – Panorama Analítico da função $\text{Ln}(z)$ 

Fonte: autor

É possível visualizar a superfície plotada de diversos ângulos, pois esta funcionalidade é pensada na intenção de possibilitar ao usuário interação com o gráfico e, consequentemente, a obtenção de mais informações sobre a função que foi plotada.

4.4 Dificuldades para o desenvolvimento

O primeiro passo no desenvolvimento desse *software* foi determinar o modo como descrever cada função. Para criar o gráfico de cores, foi necessário criar rotinas para a plotagem gráfica em que o *software* realize o cálculo do valor de cada ponto da função a ser descrita, para daí montar o gráfico dessa função. Desse modo, a plotagem gráfica realizada por este *software* atua do mesmo modo que uma tela de computador ou televisão, *pixel a pixel*, ou seja, ponto a ponto.

As funções são descritas por uma lei de formação, e essa lei precisa ser transformada em linguagem de máquina, ou seja, uma linguagem mais próxima dos cálculos binários realizados pelo computador. Na verdade, o computador não entende a maioria das funções matemáticas, basicamente, a programação precisa codificar a função matemática a ser plotada em uma cadeia de funções mais elementares e são baseadas nas quatro operações básicas de: soma, subtração, multiplicação e divisão. Isso acontece, principalmente, no caso de operações com números complexos, cujos processos que ocorrem nessas operações básicas não são exatamente iguais aos processos de quatro operações com números no conjunto dos números reais.

É preciso também “criar” as funções, por meio de “rotinas de programação”, assim, fica mais fácil o realizar do cálculo, pois a medida que é necessário requerer uma função não elementar, basta chamar o processo de “rotina”, sem ter que reescrever todo o código novamente. A programação, então, trilhou o seguinte caminho: determinar as funções derivadas da função; escrever a programação sobre essa função derivada. A Figura 15 ilustra a programação da derivada da função tangente. Note-se que potência, cosseno e tangente são rotinas previamente criadas dentro da programação para realizar o cálculo da função que a nomeia.

Figura 15 – Programação derivada tangente

```

6://if FormFuncao.EscolherFuncao.Text='f(z) = A*tan^C(z^B) + D' then
begin
    {A(C*B) onde, a=a*k já definido}
    xinicial:=x1;
    yinicial:=y1;
    {[A(C*B)]* [(tan(z^b))^c-1]}
    potencia(x1, y1, b);
    tangente(x1, y1);
    potencia(x1, y1, c-1);
    multiplica(x1, y1, a, a1);
    {}
    xpermuta:= x1;
    ypermuta:= y1;
    {Início da função [sec(z)^b]^2}
    x1:= xinicial;
    y1:= yinicial;
    potencia(x1, y1, b);
    cosseno (x1, y1);
    x1:=1/x1;
    y1:=1/y1;
    potencia(x1, y1, 2);
    {Término da função -sen(z)^b}
    {[A(C*B)]* [(cos(z^b))^c-1]* -sen(z)^b}
    multiplica(x1, y1, xpermuta, ypermuta);
    xpermuta:= x1;
    ypermuta:= y1;
    {Início da função Z^(b-1)}
    x1:=xinicial;
    y1:=yinicial;
    potencia(x1, y1, b-1);
    {Término da função z^(b-1)}
    multiplica(x1, y1, xpermuta, ypermuta);
    xinicial:= 0;
    yinicial:= 0;
    xpermuta:=0;
    ypermuta:=0;

end;

```

Fonte: autor

Ao escolher essa função, o usuário determina seus coeficientes e, na sequência, o *software* determina o gráfico da função derivada por meio de uma programação que obedece à lei de formação da função derivada.

Outro ponto que destacamos como dificuldade no processo de desenvolvimento foram as poucas atualizações da biblioteca GLScene, embora a opção por essa biblioteca tenha sido uma saída que possibilitou o desenvolvimento das visualizações em 3D, sendo um pacote disponibilizado de forma gratuita e com ótimos recursos. Percebeu-se que, ao passo que a plataforma Embarcadero lançava novas atualizações, a biblioteca GLScene não manteve o ritmo, e isso gerava algumas instabilidades na plataforma, exigindo que executássemos novas

instalações, limpeza de cache e outras ações para normalizar o acesso à biblioteca GLScene na utilização da plataforma Embarcadero.

4.4 Elaboração de uma sequência didática

De acordo com Teixeira e Passos (2013), uma sequência didática pode ser descrita como uma série de operações a serem realizadas em aula, visando ao ensino e à aprendizagem e o desenvolver de habilidades e conhecimentos específicos em determinado tema. Basicamente, é um plano de ação, com etapas e objetivos educacionais. A teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, é uma abordagem pedagógica que intenciona promover a aprendizagem significativa nos estudantes. Ela considera que a aprendizagem ocorre por meio de situações-problema, atividades e desafios relacionados a um determinado conceito matemático. Uma situação didática, baseada nessa teoria, leva em consideração elementos que compõem uma atividade matemática, incluindo o contexto, os materiais utilizados, as instruções dadas pelo professor e as ações realizadas pelo estudante, visando confrontar o estudante com desafios e estimulando a reflexão e a construção de conhecimento matemático.

Essa sequência didática foi elaborada para uma abordagem do conceito de funções complexas e derivadas, em uma turma de licenciandos de um curso de matemática, porém, considerando o contexto de pandemia e as implicações desse período no planejamento didático em que esta ação deveria ocorrer, optamos por suspender a aplicação. Entretanto, deixamos aqui a sequência preparada para que o professor interessado em trabalhar com esse *software* possa fazer uso, ou tomá-la como uma ideia para aplicação e abordagem do tema em sala de aula ou laboratório de informática. Cada atividade descrita tem duração prevista de uma aula de 50 minutos. Ao todo, apresentamos quatro atividades, elaboradas para serem aplicadas em ordem.

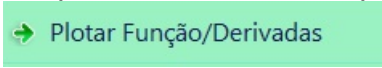
A turma escolhida para aplicação dessa sequência didática era composta por estudantes do último ano do curso de licenciatura em matemática do período noturno. Optou-se por escolher essa turma justamente pelo fato de o curso não prever o tema de funções complexas em sua grade curricular. Nesse sentido, o objetivo principal aqui é a promoção do conteúdo funções de variável complexas, com aporte do uso de tecnologias educacionais, especificamente do *software* FC:

Análise Complexa. Os conceitos prévios mobilizados são pertinentes aos temas: funções e suas propriedades, gráficos, domínio, contradomínio, imagem, limite, singularidades, continuidade e derivadas.

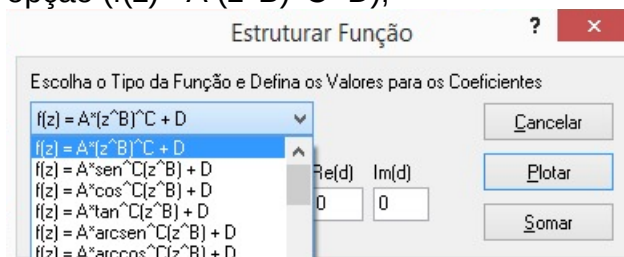
Atividade 1:

O objetivo dessa atividade foi proporcionar a familiarização do estudante com o *software* e suas principais ferramentas. Os passos adotados devem propiciar a plotagem de um gráfico de uma função potência e possibilitar a visualização das particularidades e propriedade do gráfico baseado num mapa de cores.

PASSO PARA A PLOTAGEM:

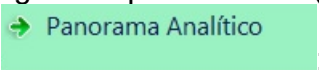
- a) Abra o *software* F(C): Análise Complexa e no menu superior clique no botão (Plotar Função/Derivadas) ;

- b) Uma pequena janela intitulada “Estruturar função” irá se abrir, selecione a opção $f(z) = A(z^B)^C + D$;



- c) Insira valores numéricos para os parâmetros: A, B, C e D;

Re(a)	Im(a)	B	C	Re(d)	Im(d)	
1	0	1	1	0	0	Plotar Somar

- d) Clique no botão: (Plotar);
- e) Descreva suas impressões;
- f) Agora clique no botão (Panorama Analítico) ;
- g) Registre suas impressões.

Procedimentos:

Adotar a divisão em grupos: duplas ou trios. Cada grupo deverá ficar com o roteiro de execução.

Os estudantes deverão ler o roteiro, em seguida adotar as ações descritas, analisando os resultados obtidos no computador.

Após a plotagem do gráfico, deverão discutir o processo de elaboração, considerar hipóteses e formular conjecturas.

Atividade 2:

Construa um gráfico. O grupo deve adotar uma das funções complexas disponíveis no *software*. Em seguida devem identificar: zeros da função, pontos de descontinuidade, singularidade, domínio e imagem.

Essa segunda atividade também objetiva proporcionar aos estudantes a familiarização com o *software*. Observa-se que nessa etapa não é fornecido um roteiro com os comandos a serem seguidos.

Procedimentos:

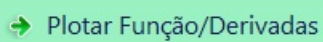
Mobilização dos conceitos prévios sobre funções. Viabilizar maior interação com *software* e destacar conceitos que envolvem a leitura gráfica de funções complexas e o Mapa de cores.

Atividade 3:

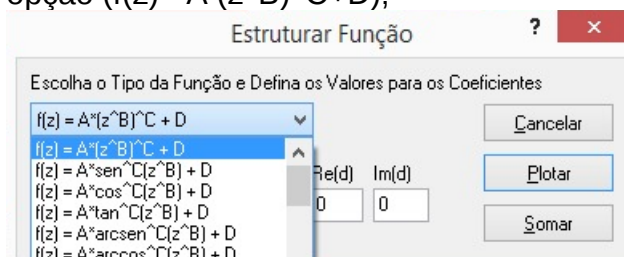
O objetivo desta atividade é que os estudantes possam conhecer as famílias de funções. Para tanto, deverão investigar as variações gráficas quando alterados alguns parâmetros da lei de formação.

PASSOS PARA A PLOTAGEM:

- a) No menu superior clique no botão (Plotar Função/Derivadas)

 Plotar Função/Derivadas

- b) Uma pequena janela intitulada “Estruturar função” irá se abrir, selecione a opção $f(z) = A(z^B)^C + D$;



- c) Insira valores numéricos para os parâmetros: A, B, C e D;

Re(a)	Im(a)	B	C	Re(d)	Im(d)	
1	0	1	1	0	0	Plotar Somar

- d) Clique no botão: (Plotar);
- e) Descreva suas impressões;
- f) Agora repita os passos a, b e c;
- g) Considere outros valores para o item d;
- h) Identifique as mudanças e registre suas impressões.

Procedimentos:

Levantar questionamentos sobre a construção de famílias de funções.

Promover discussões em grupo a respeito das conclusões em torno do processo de mudanças nos parâmetros das funções.

Os grupos deverão compartilhar com todos os participantes, por meio de apresentação oral, suas impressões e um resumo das conclusões após o processo interativo com o *software*.

Atividade 4

Faça a plotagem do gráfico de um das funções trigonométricas seno ou cosseno. Em seguida, analise os gráficos gerados. O que foi possível observar? Quais são as implicações gráficas geradas nas funções derivadas? O grupo deverá fazer uma reflexão sobre as investigações e anotar as conclusões.

Objetivo desta atividade é investigar padrões e similaridades entre as funções e suas derivadas.

Embora o público-alvo seja de estudantes de matemática, essa sequência pode ser adaptada de acordo com tema proposto e nível/área da turma em que será adotada. Após a aplicação da sequência didática, indicamos empregar um instrumento para coleta de dados, podendo ser uma entrevista estruturada ou formulário a ser respondido, de acordo com o método de avaliação escolhido.

4.5 Análise do *software* e seu desenvolvimento

Considerando o desenvolvimento dessa ferramenta de tecnologia, a intenção é que, de posse das impressões e interações proporcionadas pelo *software*, seja possível que o usuário, em especial o professor e o estudante, façam inferências sobre o comportamento das funções, possam identificar quais as relações entre uma família de funções e trabalhem com conceitos mais elaborados de outras áreas, como a Física ou Química, que possibilitem relacionar as funções e suas derivadas. O desenvolvimento levou em consideração, facilitar o acesso à plotagem gráfica. Portanto, considera-se para a interação com essa ferramenta não ser necessário um conhecimento de programação ou conhecimento aprofundado do *software*.

Para Moran (2017), o desenvolvimento de ferramentas de tecnologia, em especial *softwares* para a educação, tem sido uma área em constante crescimento e repleta de avanços. A ascendente integração da tecnologia na sala de aula promoveu inúmeras oportunidades à criação de *softwares* educacionais inovadores e eficazes. Um aspecto que precisa de destaque na produção dessas ferramentas educacionais é a adaptação às necessidades individuais do estudante. A elaboração

de *software* teve como parâmetros viabilizar recursos que possibilitem impactar a interação de usuário, promovendo elementos baseados nas principais dificuldades discutidas nas pesquisas que fizeram parte do levantamento descrito na seção anterior: a representação; as metodologias; a mobilização de conceitos. Entretanto, o entendimento é que as ações educacionais são ineficazes quando se utiliza tecnologia sem que haja um planejamento norteador e sem a implementação de metodologias próprias para sua utilização. A mobilização dos conceitos também enfrenta obstáculos quando o estudante não teve acesso aos conteúdos considerados básicos. Nesse sentido, somente a interação com tecnologia produz pouco ou nenhum efeito no desenvolvimento cognitivo do sujeito.

Quanto à representação, o *software* reúne recursos que possibilitam a plotagem de gráficos estáticos e interativos, permitindo ao usuário diversas perspectivas de visualização e modos de interação com a estrutura gráfica gerada. Foram elaborados botões que possibilitam melhorar a visualização dos elementos gráficos, por meio de ampliação e afastamento do campo de visão, atenuador para pontos plotados. E também há a possibilidade de mudança no conjunto domínio. Entretanto, o fato de o *software* proporcionar a plotagem do gráfico de uma função complexa por meio de um plano tridimensional com domínio colorido, o Panorama Analítico permite gerar uma infinidade de possibilidades de interação e inferenciais.

Em uma aprendizagem personalizada, é possível criar programas que se ajustam ao ritmo e estilo de aprendizagem de cada aprendiz, analisando o desempenho do estudante e fornecendo orientações personalizadas de conteúdo e atividades. O desenvolvimento de programas à educação tem se tornado cada vez mais diversificado e adaptado às necessidades de quem aprende. Com o uso da tecnologia, é possível criar experiências de aprendizado envolventes, personalizadas e inclusivas, que promovam o sucesso educacional e o desenvolvimento dos discentes. Ao propor que o professor desenvolva ferramentas de tecnologia voltadas à sua realidade de sala de aula, é possível personalizar o aprendizado do estudante. A palavra contextualização parece ser ideal para retratar esse tipo de ação inovadora, no entanto, ações desse tipo são possíveis mediante muito investimento na carreira profissional do professor e valorização do trabalho docente.

No caso específico desta pesquisa, a aprendizagem foi percebida pelo professor/pesquisador. Ao fazer a ação de desenvolvimento, foram diversos

conteúdos revisados, como: conceito de funções, domínio, intervalo, pontos críticos, continuidade, derivação, integração, números complexos, plano de Argand-Gauss, etc. Outros conteúdos que ainda não haviam sido vistos, tiveram que ser aprendidos, como: funções complexas, singularidades, representações gráficas de funções complexas, Panoramas Analíticos, mapa de cores, Análise Complexa, etc. Destacamos ainda que a formação para o desenvolvimento de ferramentas tecnológicas desse tipo pode ocorrer durante a formação inicial ou de forma continuada. Aceitamos esse desafio de desenvolvimento de um *software*, mediante um conhecimento prévio de linguagem de programação. Mesmo que esse conhecimento tenha sido baseado em linguagens como C++ ou Pascal, o conhecimento prévio das sintaxes de programação pode ser readequado para outra linguagem, não exigindo um conhecimento novo, mas uma complementação do aprendizado.

O desenvolvimento de *software* educacional para visualização gráfica é uma área empolgante e valiosa, principalmente para a educação. Esse *software* teve seu desenvolvimento embasado no objetivo de auxiliar os estudantes a compreenderem conceitos complexos por meio de representações gráficas e poderá ser uma ferramenta útil a eles para que possam compreender melhor conceitos abstratos por meio de representações visuais dinâmicas.

No caso do *software* aqui desenvolvido, a ideia é explorar um ramo da Matemática pouco abordado, talvez justamente devido à pouca facilidade de contextualização e visualização dos conceitos. Assim, é importante a aproximação do aprendiz com ferramentas educacionais elaboradas, para possibilitar interações que promovam uma melhoria no aprendizado e maior interesse nos assuntos abordados. Nesse sentido, é imprescindível que a sociedade entenda que a interação computacional não precisa ser vista apenas como uma ação horizontal, na qual o sujeito apenas interage com os recursos que lhe são disponibilizados e foram pensados por outros. O domínio das ferramentas de tecnologia precisa ser pleno, no sentido de que o sujeito possa repensar a ferramenta, adequá-la às suas necessidades e, principalmente, promover maior interação social. Esta pesquisa é resultado desse movimento de interação, pois, ao desenvolver tal ferramenta, o pesquisador/professor precisou mobilizar conhecimentos de sua área de formação e também da área de tecnologia, que é uma área correlata, no entanto, não é uma área de afinidade do pesquisador/professor.

Ao analisar o *software* em si, é possível reunir diversos pontos positivos, como a possibilidade de gerar gráficos em três dimensões e a interação com Panoramas Analíticos, possibilitando maior compreensão de assuntos, como continuidade e pontos de singularidade. Nesse quesito, pode-se dizer que o objetivo foi alcançado ao elaborar tal ferramenta tecnológica. Ao comparar com outros *softwares* de plotagem gráfica como o Geogebra, em que até a finalização desta pesquisa ainda não tinha uma versão que disponibilizasse a interação por meio do domínio colorido, este *software* desenvolvido se sobressai nesse quesito. Outro ponto de comparação com o Geogebra ou o *software* Maple é que o usuário não precisa digitar um comando em *prompt* específico para a plotagem gráfica, pois a interação nesse quesito ocorre por meio de botões específicos.

Ao fazer um comparativo com *softwares* como o SageMath, Mathematica e WolframAlpha, esses *softwares* se sobressaem no quesito biblioteca, por permitirem maior variedade de funções previstas em sua biblioteca e não limitam o usuário em interações com funções complexas compostas por uma variedade de leis de formação, haja vista que essa foi uma das dificuldades relatadas no desenvolvimento, na qual a maioria das bibliotecas disponíveis no Delphi não detinham todos os recursos necessários ao desenvolvimento desse *software*.

Outro ponto negativo no desenvolvimento desse *software* é que ainda não foi possível elaborar uma versão para dispositivos móveis, devido ao tempo e à plataforma de desenvolvimento escolhida. Uma versão no formato de aplicativo seria muito interessante ao processo de inserção dessa ferramenta em uma sala de aula, visto a facilidade de disponibilidade desse equipamento comparando-se com computadores pessoais. Um aspecto importante dos dispositivos móveis está no acesso aos aplicativos por meio das lojas oficiais de cada sistema operacional (Android, IOS, Windows e demais), pois garante um acesso remoto e instantâneo, dando maior visibilidade para o *software* que foi produzido.

Uma das limitações do trabalho é que não foi possível validar essa ferramenta. Entende-se que o desenvolvimento de *software* não é um processo simples, pois envolve várias etapas e aspectos. A definição de parâmetros adequados é fundamental para garantir o sucesso do projeto, fato que leva diversos autores a discutir e elaborar as etapas essenciais no desenvolvimento de *software*, mas, basicamente há um consenso de que o desenvolvimento precisa avançar passando por algumas etapas em uma progressão ascendente.

Para Campos, Campos e Rocha (1996), o desenvolvimento de um *software* educacional exige dez etapas: 1) Definição do ambiente de aprendizagem; 2) Análise de viabilidade; 3) Seleção do tipo de documento (específico para desenvolvimento de *software* hipermídia); 4) Seleção do método de autoria; 5) Planejamento da interface; 6) Planejamento do documento (específico para desenvolvimento de *software* hipermídia); 7) Seleção do sistema de autoria e das ferramentas; 8) Implementação; 9) Avaliação; 10) Validação. Esses são alguns dos muitos parâmetros que podem ser considerados no desenvolvimento de um *software* educacional. Cada projeto pode ter requisitos específicos, e a flexibilidade para se adaptar a essas necessidades é fundamental. Entretanto, as etapas de planejamento, implementação e validação são as mais recorrentes nas pesquisas.

Para o desenvolvimento do *software* em questão, essas etapas foram seguidas. Entretanto, uma avaliação de desempenho e uma validação ainda são necessárias, para que se possa fechar esse ciclo. Diante disso, a compreensão é que a ação de validação deverá ser realizada em uma etapa futura, dando continuidade ao processo de pesquisa iniciado nesta tese. Destacam-se também as dificuldades enfrentadas pelo pesquisador no desenvolvimento dessa ferramenta, pois muitos foram os obstáculos a serem transpostos, a começar pelo fato de o desenvolvimento desta pesquisa ter se desenrolado durante o período de Pandemia da SARS-COV – 2 (COVID, 2019). Foram inúmeras incertezas, dúvidas, inquietações, perdas e tudo isso ampliado pelas redes sociais e diversos tipos de formas de comunicação não regulamentadas que permitiram a circulação de diversas notícias falsas.

Vencendo essa fase de pandemia, ainda ficaram dois principais obstáculos ao desenvolvimento do *software*. O primeiro, estava na formação do professor/pesquisador ou pesquisador/professor. O conjunto dos números complexos é um tema que foi pouco visto durante minha formação básica e na sequência, mesmo tendo ingressado em um curso de licenciatura em matemática, somente duas disciplinas contemplavam o tema “números complexos e funções complexas”. O ingresso no mestrado de matemática em rede, Profmat, proporcionou o resgate do assunto, mas também pouco aprofundado. Dessa forma, a elaboração deste *software* exigiu deste professor/pesquisador um empenho significativo na busca de reunir e resgatar conceitos da Análise Complexa.

O segundo ponto de maior dificuldade enfrentado, foi quanto ao atendimento aos prazos. O desenvolvimento de um *software* não é tarefa que se executa “da noite para o dia”. Há um consenso entre diversos pesquisadores e desenvolvedores de que o desenvolvimento de tais ferramentas deve ser executado por equipes multidisciplinares, devido ao volume de informações e tarefas a realizar (CAMPOS; CAMPOS; ROCHA, 1996). Nesse sentido, o desenvolvimento dessa ferramenta de tecnologia (*software*), viabilizado por poucas mãos foi um grande desafio.

No transcorrer desse desafio de desenvolvimento de uma ferramenta tecnológica para minha área de conhecimento, pude vislumbrar como os recursos e meios tecnológicos disponíveis ao cidadão deste século possibilitam avanços e podem viabilizar ferramentas otimizadas para resolver problemas do espaço em que cada indivíduo atua. Entretanto, fazer uso de tais recursos tecnológicos exige um bom preparo e empenho, e muito tempo de dedicação, seja na capacitação do sujeito para dominar a ferramenta, seja pela questão do desafio de gerar novos recursos.

Nesse sentido, é interessante ao professor desenvolver ferramentas de tecnologia para sua prática em sala de aula, ainda mais sendo o professor um dos maiores conhecedores do cotidiano escolar. Entretanto, considerando a atual conjuntura social, rodeada de tecnologia, que estímulo os professores têm recebido para desenvolver tais ações? Na verdade, não sobra tempo na rotina da maioria desses profissionais para que possam se dedicar a tal empreendimento. Quais os cursos de formação? E como as esferas governamentais enxergam esse movimento, que pode ser crucial no desenvolvimento socioeconômico do país para os próximos anos? Esses questionamentos precisam ser tomados como ponto de partida, para que a área educacional se desenvolva com maior solidez diante das mudanças que a tecnologia tem provocado na sociedade nos tempos atuais.

Por fim, a programação também se tornou desafiadora, pelo fato de que, embora seja uma área de bastante interesse a este professor/pesquisador, dominar uma linguagem de programação, fazendo uso de recursos de tecnologia que estão em constante atualização, exige tempo de preparo e capacitação, o qual ocorreu por meio de fóruns, páginas, grupos de discussão em redes sociais, sempre buscando aperfeiçoar e manter o ritmo de desenvolvimento. Esse movimento, que foi, sem dúvida, desafiador, também foi emancipador, pois, na visão de Freire (1976), é um

movimento libertador do sujeito, possibilitando o pensar e analisar de seu estado e do ambiente que o rodeia.

Freire ainda menciona um caráter humanizador e, nesse sentido, a ideia de gerar uma nova ferramenta que propicie avanços, facilite o entendimento de conceitos avançados de matemática, e mesmo a promoção do conhecimento, tem características transformadoras, emancipadoras e revolucionárias. Mesmo sendo repetitivo, é preciso afirmar que, no âmbito da educação, o professor é quem melhor conhece a sala que leciona, seus anseios e necessidades.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa intencionou desenvolver recursos de tecnologia como instrumento educacional à abordagem do conjunto dos números complexos, funções e derivadas complexas. O desenvolvimento de uma ferramenta, como um *software*, é uma ação que leva tempo e exige do desenvolvedor conhecimento e interesse pela área a que está relacionada. Embora os avanços tecnológicos tenham se acentuado recorrentemente, há uma necessidade de que as pessoas detenham domínio sobre as ferramentas de tecnologia para utilizá-las de forma eficaz e adequá-las às suas realidades. O desenvolvimento de *softwares* específicos para abordagem de assuntos em sala de aula ainda parece ser um pouco distante da realidade do professor; dessa forma, é importante ressaltar que, em países como o Brasil, onde o investimento em educação é escasso, faz-se demasiadamente importante rever as ferramentas que os discentes e docentes dispõem para suas aulas. O desenvolvimento do *software* apresentado possibilitou o alcance do objetivo proposto, permitindo a reflexão sobre a responsabilidade e as ações do professor diante da sociedade e da turma com a qual está lecionando. Nesse sentido, pudemos ultrapassar tais objetivos traçados, no sentido de apresentar alguma reflexão sobre a importância do professor frente ao uso de tecnologia e sua importância aos avanços da sociedade na direção da igualdade entre os sujeitos.

Na Educação Básica, o professor passa cerca de um ano lecionando para a mesma turma, assim, entende-se que ele tem maior dimensão das necessidades e dos anseios de cada estudante e, se ele for capacitado ao desenvolvimento ou à habilidade de manuseio de *softwares*, pode ter mais chances de melhorar sua didática, criando oportunidades para aproximar o estudante do aprendizado tecnológico, proporcionando interações e um melhor preparo, para que este sujeito possa exercer com maior habilidade sua responsabilidade cidadã.

Promover ações diversificadas, como a proposição de um *software*, dão indícios aos estudantes da dimensão que essas ferramentas podem alcançar e de que há possibilidades de viabilizar ações globais como, a produção de um *software* que faça consultas públicas, para que se possa aumentar a participação coletiva em assuntos políticos, que são decididos apenas por uma pequena classe, ou explorar a matemática financeira praticada pelas instituições bancárias e inferir sobre os impactos sociais dessa prática.

Ao incentivar a manipulação e o desenvolvimento de novas tecnologias, o professor pode melhor visualizar as mazelas às quais aquele estudante está sujeito, entender melhor as dificuldades que este enfrenta e lhe propor novos desafios. Entretanto, se o professor não está preparado para promover ações com o uso de tecnologia, motivando o estudante a enfrentar novos desafios, tampouco o estudante poderá, por si, conseguir extrapolar os conceitos que lhe são ensinados e colocá-los em ação na transformação de uma sociedade justa e igualitária. A promoção e o uso de tecnologias nos ambientes de aprendizagem podem produzir, de muitas formas, efeitos benéficos na sociedade. Apenas partindo de um melhor entendimento de como é o funcionamento das redes sociais e de toda a matemática por trás de pequenas ações ali realizadas, é possível permitir que o cidadão tenha um melhor entendimento dessa avalanche tecnológica que invade seu cotidiano.

Ao lançar um olhar sobre os *softwares* voltados à abordagem de funções e números complexos, observou-se que *softwares* de geometria dinâmica, em especial o Geogebra, são os que mais figuram nas pesquisas com essa temática. Observou-se que o plano de Argand-Gauss é o meio mais utilizado para representar gráficos de funções e números complexos, inferindo-se que, por se tratar de uma representação cartesiana, seja uma maneira mais circunjacente à representação de funções, por ser um conceito mais revisto nas escolas. Nesse sentido, as pesquisas – objetos de análise deste trabalho – apontam que há certa relevância na utilização de *softwares* de plotagem gráfica nos ambientes de aprendizado de funções, em especial funções complexas.

Destaca-se, ainda, que a valorização dos elementos gráficos que compõem o tema números e funções complexas é pertinente na abordagem, representando um contraponto em relação às tentativas de ensino embasadas apenas na apresentação do conteúdo pelo método baseado na representação algébrica e cálculos envolvendo equações. Nesse ponto, o *software* desenvolvido tem um diferencial, ao proporcionar a plotagem gráfica por meio de elementos tridimensionais e bidimensionais, de maneira interativa e intuitiva, podendo motivar o usuário, estudante ou professor, a fazer inferências e atribuir maior significado aos diversos fenômenos estudados.

O conjunto dos números complexos é um assunto com pouco destaque na educação básica e, por vezes, deixado para outro momento. A utilização de *software* de plotagem gráfica, entretanto, pode trazer à tona o aprendizado desses conceitos

que são, por vezes, considerados muito avançados. A produção de um *software* que facilite a visualização de elementos gráficos de funções de variáveis complexas, com aporte da paleta de cores e de um Panorama Analítico pode, por exemplo, oportunizar também avanços em pesquisas tecnológicas, não só na área educacional, possibilitando um melhor ajuizar da realidade da sala de aula e também da realidade e das necessidades científicas, promovendo aportes metodológicos e gerando novas formas de ensino e aprendizado. Logo, acredita-se que este trabalho pode contribuir com a área de ensino da matemática, principalmente quanto à reflexão sobre temas que por vezes são pouco explorados, como o conjunto dos números complexos e sua importância para a formação fundamentada do estudante.

Não é pretensão deste trabalho propor como tarefa do professor o desenvolvimento de ferramentas de tecnologia. O entendimento está no fato de que o professor é conhecedor da realidade cognitiva de seus estudantes e por ter domínio de sua área de conhecimento; portanto, o incentivo para que o professor possa desenvolver ferramentas de tecnologia é substancial para agregar de forma positiva elementos de tecnologia na Educação Básica. Isso, entretanto, só pode ocorrer se houver a valorização do professor e de sua mão de obra. É preciso valorizar a capacitação, a melhoria do salário, o tempo de preparo de sua atividade e prover subsídios para o material didático.

Entende-se que o desenvolvimento da ferramenta aqui apresentada enfrentou desafios não esperados, comprometendo o alcance das ações pretendidas. Identificamos como limitações deste trabalho a não aplicação em sala de aula, na intenção de compreender se a ferramenta apresenta um bom leiaute e boa interação entre os recursos implementados. Seria importante ouvir a impressão de professores e também de estudantes quanto à utilização do *software*. Uma avaliação da ergonomia e a validação seriam essenciais à difusão imediata do *software*, entretanto, esses feitos não foram realizados. Pretende-se que esta ferramenta seja disponibilizada, de forma gratuita, via página profissional em provedores das universidades que participaram desta pesquisa. Dessa forma, surge um novo desafio: viabilizar a capacitação para manipulação do *software*. Essa capacitação poderá ocorrer pela disponibilização de vídeos instrutivos e fóruns de discussão digital. É importante também a composição de um material instrucional quanto aos recursos e ao ferramental disponíveis no *software* para melhor interação dos

interessados. Esses pontos aqui destacados ficarão para ações futuras, destacando a possibilidade de realização de pesquisas futuras.

REFERÊNCIAS

- ALENCAR, Anderson Fernandes de. **O pensamento de Paulo Freire sobre a tecnologia**: traçando novas perspectivas. V Colóquio Internacional Paulo Freire – Recife, 19 a 22-setembro 2005. Disponível em: https://www.academia.edu/download/57194406/O_PENSAMENTO_DE_PAULO_FREIRE SOBRE_A_TECNOLOGIA_TR.pdf. Acesso em: 23 ago. 2022.
- ALVES, Francisco Régis Vieira. Engenharia didática para o ensino de variável complexa: visualização de conceitos relacionados ao processo matemático de integração. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 11, n. 2, p. 3-29, 2018. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6812491>. Acesso em: 17 mar. 2022.
- ALVES, Francisco Regis Vieira. Didactic Engineering (DE) and Professional Didactics (PD): A Proposal for Historical Eesearch in Brazil on Recurring Number Sequences. **The Mathematics Enthusiast**, v. 19, n. 1, p. 239-274, 2022. Disponível em: <https://search.proquest.com/openview/710e516e6f5d5ae21bd10709f433b3af/1?pq-origsite=gscholar&cbl=2030106>. Acesso em: 22 jan. 2023.
- ALVES, Francisco Regis Vieira; ROMEU, Mairton Cavalcante. Análise visual complexa: gráficos e diferenciabilidade de funções. **Revista Thema**, v. 14, n. 4, p. 114-127, 2017. Disponível em: <https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/555>. Acesso em: 20 jan. 2023.
- ALVES, Francisco Regis Vieira; MARINHO, Monique Rafaela Monteiro. Engenharia Didática no contexto da Transição Complexa do Cálculo-TCC: o caso da série de Laurent. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 12, n. 2, p. 1-28, 2017. Disponível em: <http://www.scielo.org.ar/pdf/reiec/v12n2/v12n2a05.pdf>. Acesso em: 29 jan. 2023.
- AMORIM, Tânia Mara. **O estudo dos números complexos no ensino médio: uma abordagem com a utilização do Geogebra**. 2014. Dissertação. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/4475>. Acesso em: 29 jan. 2023.
- AZEVEDO, Pablo Vinicius Almeida. **As Superfícies de Costa Triplamente Periódicas**. 2009. Universidade Federal do ABC. Dissertação. Disponível em: http://biblioteca.ufabc.edu.br/index.php?codigo_sophia=6235. Acesso em: 23 mar. 2023.
- BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo**. Lisboa: Edições 70, 1977.
- BELTRÃO, Isabel do Socorro Lobato; VÍTOR, Cláudio Barros; DOS SANTOS BARBOSA, Irecê. Software Geogebra: uma ferramenta na prática docente para o ensino dos números complexos no ensino médio. **Educitec-Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, v. 3, n. 05, 2017.

BERNARDES JR., Nilson da Costa; FERNANDEZ, Cecília de Souza – **Introdução às Funções de Variáveis Complexas**. Coleção Textos Universitários, Publicação SBM, Rio de Janeiro, 2006.

BICHO, Alessandro de Lima; SILVEIRA, Luiz Gonzaga Junior; CRUZ, Adailton José Alves; RAPOSO, Alberto Barbosa. Programação gráfica 3D com OpenGL, Open Inventor e Java 3D. **Revista Eletrônica de Iniciação Científica – REIC**. 2002. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/2938>. Acesso em: 3 de mar 2022.

BITENCOURT, Lopes Agner; VARGAS, Paulo Roberto; FELICETTI, Vera Lucia. Uma proposta pedagógica: usando o software Geogebra na rotação vectores complexos. **Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas**, v. 11, n. 21, p. 5-15, 2014. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5893184>. Acesso em: 12 dez. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira Versão. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 23 set. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (Semtec). **PCN + Ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/Semtec, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em: 21 ago. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio – Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2). Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf. Acesso em: 22 ago. 2022.

BRASIL. Resolução CNE/CP n.2, de 20 de dezembro de 2019. **Define as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial de Professores para a Educação Básica e institui a Base Nacional Comum para a Formação Inicial de Professores da Educação Básica (BNC-Formação)**, 2019b. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/dezembro-2019-pdf/135951-rcp002-19/file>. Acesso em: 12 dez. 2023.

CAMPOS, Fernanda; CAMPOS, Gilda; ROCHA, Ana Regina. **Dez etapas para o desenvolvimento de software educacional do tipo hipermídia**. In: CONGRESSO IBEROAMERICANO DE INFORMÁTICA EDUCATIVA. Barranquilla. Colômbia. 1996. Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Gilda-Campos/publication/228724840_Dez_etapas_para_o_desenvolvimento_de_software_educacional_do_tipo_hipermidia/links/0c9605179390c760e4000000/Dez-etapas-para-o-desenvolvimento-de-software-educacional-do-tipo-hipermidia.pdf. Acesso em: 2 jan. 2024.

CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis complexas e suas aplicações**. Tradução: Tadaí Yoshika; Revisão técnica: Alfredo Alves de Farias. São Paulo, McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

EDUMATEC (Educação Matemática e Tecnologia Informática). **Softwares**. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~edumatec/softwares/softwares_index.php. Acesso em: 18 ago. 2022.

EMBARCADERO. Embarcadero Tecnologias: Delphi11.2. Disponível em: <https://www.embarcadero.com/br/products/delphi>. Acesso em: 25 de set. de 2022.

FASSIS, Maria Júlia; GADOTTI, Marta Cilene. **Funções complexas**: uma abordagem geométrica. CQD-Revista Eletrônica Paulista de Matemática, 2021. Disponível em: <https://sistemas.fc.unesp.br/ojs/index.php/revistacqd/article/view/245>. Acesso em: 12 dez. 2022.

FREIRE, Paulo. **A Educação na Cidade**. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2001.

FREIRE, Paulo. **Educação e Mudança**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1976.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido**. 81. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2022.

GARCIA, Fernando Oliveira; Filho, Moacir Pereira de Souza; Souza, Aguinaldo Robinson de; Marques, Emília de Mendonça Rosa. O GeoGebra na experimentação matemática: um levantamento bibliográfico em periódicos indexados na plataforma da capes. **Tecné, Episteme y Didaxis**: TED, (50), 221236, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.17227/ted.num50-10582>. Acesso em: 2 mar. 2023.

GERMANO, José Gleisson da Costa. **Uma proposta de abordagem dos Números Complexos com o uso do Geogebra**. 2016. 132f. 2016. Tese de Doutorado. Dissertação (Mestrado Profissional). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. Disponível em: <https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/21536>. Acesso em: 2 mar. 2023.

GOMES, Julia Alves; BOURSCHELD, Jacinta Lourdes Weber. **Utilização de aplicativos educacionais como recurso didático-pedagógico durante os processos de alfabetização e letramento**. Curso de Especialização em Linguagens e Tecnologias em Educação do Instituto Federal Sul-rio-grandense, Campus Passo Fundo, na cidade de Passo Fundo, 2017. Disponível em: <https://painel.passofundo.ifsul.edu.br/uploads/arq/201807021803311579237863.pdf>. Acesso em: 30 ago. 2022.

GRAVINA, Maria Alice; CONTIERO, Lucas de Oliveira. Modelagem com o GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar?. **RENOTE**, v. 9, n. 1, 2011. Disponível em: <https://www.seer.ufrgs.br/renote/article/view/21917>. Acesso em: 2 dez 2022.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo**. v. 2 e 3. LTC, 2001.

INAFUCO, Julio K. **As equações algébricas no ensino médio: um estudo de uma sequência didática utilizando software gráfico**. 2006. Dissertação. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/89445>. Acesso em: 12 dez. 2022.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise**. Vol. 2. Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1989.

MAGARINUS, Renata. **Uma proposta para o ensino de funções através da utilização de objetos de aprendizagem**. Universidade Federal de Santa Maria - Centro de Ciências Naturais e Exatas. Santa Maria – RS, 2013 Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/bitstream/handle/1/10933/MAGARINUS%2C%20RENATA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 14 ago. 2022.

MARINHO, Monique Rafaela Monteiro; ALVES, Francisco Regis Vieira. Estudo da série de Laurent com recurso ao Geogebra: contributo da Engenharia Didática. **Indagatio Didactica**, v. 8, n. 5, p. 165-196, 2016. Disponível em: <https://proa.ua.pt/index.php/id/article/view/2497>. Acesso em: 14 dez. 2022.

MARINHO, João Jefferson Faria; SANTOS, Raphael Francisco Gomes dos; MARTINO, Luciana Santos da Silva. Construção do Aerofólio de Joukowski Assimétrico por meio da Transformação de Karman-Trefftz, para $n=2$, utilizando o GeoGebra 5.0. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 6, n. 2, p. e4001-e4001, 2020.

MENDES JÚNIOR, Daniel de Carvalho. **Uma nova abordagem dos complexos para o Ensino Médio**: o estudo dos fractais e do caos na composição do conjunto preenchido de Julia e o conjunto de Mandelbrot. 2017. 109 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2017. Disponível em: <https://bit.ly/38YiXv0>. Acesso em: 20 abr. 2022.

MORAN, José Manuel. **Tecnologias digitais para uma aprendizagem ativa e inovadora**. MORAN, José. A Educação que Desejamos: novos desafios e como chegar lá, v. 5, p. 1-232, 2017. Papirus, 5. ed, cap. 4. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2017/11/tecnologias_moran.pdf. Acesso em: 15 ago. 2022.

NUNES, Euderley de Castro. **A esfera de Riemann**: projeção estereográfica e aplicações, uma abordagem para o ensino médio. 2015. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4247>. Acesso em: 12 dez. 2022.

OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **Números Complexos**: Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. Dissertação Disponível em: <https://repositorio.pucsp.br/handle/handle/11449>. Acesso em: 23 mar. 2023.

OLIVEIRA, Fabio Luiz de. **A produção de conhecimento matemático acerca de funções de duas variáveis em um coletivo de seres-humanos-com-mídias**. 2017. Dissertação. Disponível em:

https://www.repositorio.ufop.br/bitstream/123456789/10023/1/LIVRO_Produ%C3%A7%C3%A3oConhecimentoMatem%C3%A1tico.pdf. Acesso em: 22 fev. 2023.

OLIVEIRA, Thúlio José de. **Sobre números complexos e abordagens no ensino médio**. 2020. Dissertação. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/handle/123456789/27748>. Acesso em: 12 dez. 2023.

PAPERT, Seymour. **LOGO: Computadores e Educação**. São Paulo: Brasiliense, 1986.

PAPERT, Seymour. **Education for the knowledge society: a Russia-oriented perspective on technology and school**. IITE Newsletter. UNESCO, Nº 1, janeiro-março 2001.

PASSOS, Marinez Meneghello; NARDI, Roberto; ARRUDA, Sergio de Mello. **A Formação de Professores: uma revisão das últimas décadas em revistas brasileiras da área de Educação Matemática**. Ensino de Ciência e Matemática I: temas sobre formação de professores. São Paulo: Cultura Acadêmica, p. 193-207, 2009. Disponível em: <https://books.scielo.org/id/g5q2h/pdf/nardi-9788579830044-13.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2023.

PAULO, Rafael dos Reis. **Ambiente de geometria dinâmica e seu potencial semiótico: uma abordagem no ensino dos números complexos**. 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pelotas. Disponível em: <https://repositorio.ufpel.edu.br/handle/prefix/4585>. Acesso em: 5 dez. 2023.

PEREIRA, Elaine Veloso Fernandes. **Sobre números escritos como soma de dois quadrados e uma atividade de ensino que relaciona ternos pitagóricos e números complexos**. 2021. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/13174>. Acesso em: 15 out. 2023.

PEREIRA, Gabriela Gimenes. **Uma proposta didática para o ensino de funções de variável complexa no ensino médio usando planilha eletrônica**. 2017. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/7755>. Acesso em: 15 out. 2022.

REIS, Márcio Vaiz dos. **Conjunto de Mandelbrot**. 2016. Dissertação de mestrado. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/6343/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20M%C3%A1rcio%20Vaiz%20dos%20Reis%20-%202016.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2023.

ROSSINI, Gustavo Feltrin. **Grafos e seu polinômio característico**. 2017. Dissertação de Mestrado. Disponível em: <https://repositorio.ufsm.br/handle/1/13500>. Acesso em: 15 out. 2023.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Caderno do aluno: 3.^a série do Ensino Médio, Matemática**. São Paulo: SEE, 2014.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática – Ensino Fundamental II e Ensino Médio**. São Paulo, SEE: 2010.

SANTOS, Laudo Claumir. **Funções complexas de uma variável complexa**: uma abordagem via software Mathematica. 1998. Dissertação. [sn]. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/Busca/Download?codigoArquivo=502551>. Acesso em: 23 mar. 2023.

SILVA, Edvaldo Lima da. **Construção e Validação de um Objeto Tecnológico de Aprendizagem em Matemática para Funções de uma Variável Complexa**. 126 f. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista 'Júlio de Mesquita Filho, 2006. Disponível em: <http://wwwp.fc.unesp.br/BibliotecaVirtual/DetalhaDocumentoAction.do?idDocumento=12#>. Acesso em: 25 set. 2022.

SILVA, Gersonilo Oliveira da. **Instabilidade e bifurcação num problema de $N+1$ corpos**. 2011. Tese. Disponível em: <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/7137>. Acesso em: 13 nov. 2022.

SILVA, José Marcos da. **O ensino do conteúdo Funções na escola de Ensino Médio José Paulo de França da cidade de Mari – PB**: o que dizem os professores? Universidade Aberta do Brasil Centro de Ciências Exatas da Natureza. Mari- PB 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/bitstream/123456789/773/1/JMS26082014.pdf>. Acesso em: 13 ago. 2022.

SILVA, Marcos. **Sala de aula interativa**: a educação presencial e a distância em sintonia com a era digital e com a cidadania. Rio de Janeiro: Quartec. 2001. Disponível em: <http://www.portcom.intercom.org.br/pdfs/80725539872289892038323523789435604834.pdf>. Acesso em: 16 ago. 2022.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Matemática é difícil**: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002, Caxambu. Anais... ANPED, 2002. Disponível em: http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_25/matematica.pdf. Acesso em: 2 jan. 2024.

SOARES, Márcio Gomes. **Cálculo em uma Variável Complexa**. Coleção Matemática Universitária. Publicação IMPA, Rio de Janeiro, 2016.

SOFFNER, Renato. **Tecnologia e educação: um diálogo Freire – Papert**. Centro de Educação – UFPE. Revista Tópicos Educacionais - UFPE, Recife, v.19, n.1, jan/jun. 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufpe.br/revistas/topicoseducacionais/article/viewFile/22353/18549#:~:text=Para%20Freire%2C%20o%20emprego%20da,%2C%20inicialmente%2C%20imbu%C3%ADdo%20de%20ideologia>. Acesso em: 24 ago. 2022.

SOUSA, Adriana Santos; SANT'ANA, Claudinei de Camargo. **Formação de professores e a inserção de recursos didáticos digitais nas aulas de**

matemática. VII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA – VII CIBEM - Caderno de Resumos (pp. 6359-6366). Uruguai. 2013. Disponível em: <http://funes.uniandes.edu.co/17945/>. Acesso em: 1 nov. 2022.

SPIEGEL, Murray Ralph. **Variáveis Complexas**. Coleção Schaum, Mc Graw Hill do Brasil, São Paulo, 1973.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar Manso. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **ZETETIKÉ**. Revista de Educação Matemática, v. 21, n. 1, p. 155-168, 2013.

THALLER, Bernd. **Visual Quantum Mechanics**. New York: Springer-Verlag, 2000.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaldo Silva. **Introdução à pesquisa em ciências sociais: a pesquisa qualitativa em educação**. São Paulo: Atlas, 1987. Outros números do Informe Rural ETENE: ANO, v. 3, p. 25, 2009.

VALENTE, José Armando. Tecnologias e educação a distância no ensino superior: uso de metodologias ativas na graduação. **Trabalho & Educação**, Belo Horizonte, v. 28, n. 1, p. 97–113, 2019. DOI: 10.35699/2238-037X.2019.9871. Disponível em: <https://periodicos.ufmg.br/index.php/trabedu/article/view/9871>. Acesso em: 25 ago. 2022.

VALENTE, José Armando. Informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: **O computador na sociedade do conhecimento**. Campinas: UNICAMP/NIED, p. 1-13, 1999. Disponível em: <http://usuarios.upf.br/~teixeira/livros/computador-sociedade-conhecimento.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2023.

VIEIRA, Lúcia Helena da Silva. **Epistemologia dos números complexos**. Florianópolis, 1999. 48f. Monografia (Licenciatura em Matemática), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis/SC, 1999.

VOGEL, Márcia Johne; JERZEWSKI, Valéria Bonetti; ANTUNES, Dione. O uso das tecnologias em sala de aula: uma nova proposta de aprendizagem. **Anais... SENID – 4 edição: a liberdade digital de aprender**, 2016. Santa Rosa – RS. Disponível em: <http://senid.upf.br/2016/images/pdf/151544.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2022.

WEGERT, Elias. **Visualization of Complex Functions: Plea for the Phase Plot**. 2009. Disponível em: https://www.tu-chemnitz.de/mathematik/preprint/2009/PREPRINT_12.php. Acesso em: 21 set. 2022.