Dissertação de Mestrado

Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ com Alocação de Pólos e Modificação de Zeros para Rastreamento de Sinais e Rejeição de Distúrbios em Sistemas de Controle Usando LMIs

Carlos Roberto Antunes Filho

Orientador:

Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS
Departamento de Engenharia Elétrica - DEE

Ilha Solteira, 27 de Fevereiro de 2007.

Carlos Roberto Antunes Filho

Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ com Alocação de Pólos e Modificação de Zeros para Rastreamento de Sinais e Rejeição de Distúrbios em Sistemas de Controle Usando LMIs

Dissertação submetida à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica - Área de Conhecimento: Controle e Automação.

Orientador:
Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Universidade Estadual Paulista - UNESP
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS
Departamento de Engenhria Elétrica - DEE

Ilha Solteira – SP

Fevereiro / 2007

Dedico esta dissertação a Deus,
O Grande Arquiteto do Universo,
que me conduz com suas mãos e palavras
de sabedoria, força e prosperidade e
aos meus pais, que têm sido meus sustentáculos,
me dando apoio nos momentos mais difíceis,
sendo sal, fermento e luz na minha vida.

Agradecimentos

A Deus Pai Todo-Poderoso que está sempre comigo em minha jornada terrena. Ao meu orientador, professor Edvaldo Assunção, que se dispôs integralmente a sanar minhas infinitas dúvidas e auxiliar-me em meus estudos de brilhante forma, ensinando sempre ter Nosso Criador como guia. Aos meus amigos da República: Wander Martins, João Marcos Sakamoto, Carlos Eguti, Renato Mendes, Marcelos Sanches e Pardal, Élcio Alteris, Fabiano, Carlos Tapia, Olivaldo Peron, Luiz Carlos, André Cutrim, Leandro, Sílvio Segura e José Luiz; aos amigos, colegas de trabalho, do Laboratório de Pesquisa em Controle: Rodrigo Cardim, Márcio Covacic, Jean Marcos, Alessandro Caun, Elizeu Félix, Tarcísio Zanquetta, Flávio Faria e Leandro; do Laboratório de Sensores: Wesley Pontes, Rodrigo Koji, Ricardo Freitas e Mário; do Departamento de Engenharia Elétrica da Unesp: André Luiz, Edilton Sobrinho e Jâine Canossa, que de uma maneira ou de outra tiveram grande contribuição nesse trabalho, nos momentos de felicidade intensa ou me apoiando e estendendo mãos de conforto em momentos turvos. Aos docentes membros da banca examinadora e os demais professores das disciplinas do PPGEE que me fortaleceram com seus conhecimentos. E, não podendo deixar de mencionar, um agradecimento especial ao meu amigo Cristiano Quevedo que se disponibilizou em auxiliar-me nesse estudo que foi elaborado a partir de seus significantes trabalhos realizados no decorrer de sua vida acadêmica. Aos Meus Doutores da Vida: meus pais Rosa e Carlos Roberto, meu irmão Paulo Roberto, minhas avós, tios e primos que mesmo longe, estavam ao meu lado durante a elaboração de meu trabalho; meu profundo agradecimento, também, a minha namorada Juliana, imprescindível durante meus trabalhos em Ilha Solteira; e aos meus grandiosos e eternos amigos e amigas de minha calorosa "Cidade Sorriso", Getulina: Paulo Zedra, Luana Antunes, Douglas Bernardes, Johny dos Santos, Rodrigo Zavariz, Elias Cunha, Juliano Contiero, Silvio Toledo, Fabrício Calixto, Leandro Fernandes, Meire Helen Cardim e aos demais companheiros, que são tantos e ocupariam boa parte de minha dissertação, MUITO OBRIGADO, que Deus os abençoe sempre. E ao CNPq pelo incentivo financeiro.

"Não é preciso ter olhos abertos para ver o sol,
nem é preciso ter ouvidos afiados para ouvir o trovão.
Para ser vitorioso você precisa ver o que não está visível.
Sun Tzu

Resumo

Uma metodologia de alocação de pólos é proposta para resolver o problema de rastreamento do sinal de referência, considerando-se, ainda, a presença de uma entrada exógena do tipo distúrbio ou perturbação na planta, propondo-se uma nova metodologia de modificação dos zeros para a atenuação do efeito desse sinal. Primeiramente, apresenta-se um método de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o sinal do erro de rastreamento e o sinal de referência, obtendo-se assim, um rastreador de sinais. A seguir, um método de minimização da norma $\mathcal{H}_2$ é proposto utilizando-se a modificação dos zeros, para a redução do efeito desse distúrbio na saída do sistema. Todo o projeto foi elaborado a partir de inequações matriciais lineares, que permitem descrever o equacionamento como um problema de otimização convexa, e através da alocação dos pólos ou zeros, apresenta a solução ótima para o sistema. Por fim, exemplos numéricos ilustram a viabilidade da metodologia proposta.

Abstract

The tracking system problem is solved using a pole placement methodology, considering, also, an external signal of disturbance or perturbation in the plant and a new zeros modification methodology is proposed to solve the problem of disturbance rejection. Firstly, the pole placement is used in order to minimize the $\mathcal{H}_\infty$-norm from the reference input signal to the error signal, designing a controller and solving the tracking problem. An $\mathcal{H}_2$-norm minimization methodology is used to reduce the disturbance effect in the output system. The design was formulated by Linear Matrix Inequalities (LMI), such that the optimum is obtained. Numerical examples illustrate the viability of the proposed methodology.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução p. 11

2 Rejeição de Distúrbios com Modificação de Zeros via Realimentação de Estados Estimados p. 14

2.1 Formulação do Processo de Otimização para a Rejeição de Distúrbios . p. 14

2.2 Projeto do Rastreador de Sinais $\mathcal{H}_\infty$ . . . . . p. 17

2.3 Inclusão das Restrições para a Alocação dos Pólos via LMI . . . . . p. 18

2.4 Alocação de Zeros . . . . . p. 19

2.5 Otimização da Norma $\mathcal{H}_2$ Utilizando a Modificação de Zeros . . . . . p. 22

3 Rejeição de Distúrbios com Modificação de Zeros utilizando Realimentação Dinâmica da Saída p. 24

3.1 Formulação do Processo de Otimização para a Atenuação de Distúrbios p. 24

3.2 Projeto do Rastreador com Peso na Freqüência com Realimentação Dinâmica da Saída . . . . . p. 27

3.3 Otimização da norma $\mathcal{H}_2$ Utilizando Modificação de Zeros com $K_p(s)$. p. 31

4 Resultados e Discussão p. 33

4.1 Exemplo 1 . . . . . p. 33

4.2 Exemplo 2 . . . . . p. 36

4.3 Exemplo 3 . . . . . p. 42

4.4 Exemplo 4 . . . . . p. 47

5 Conclusão p. 52

Referências p. 54

Lista de Figuras

1 Sistema de controle ótimo com posicionamento de pólos e zeros. . . . . p. 15

2 Sistema com realimentação de estados. . . . . p. 17

3 D é a região do plano-s limitada por uma circunferência de raio r e centro $(-q, 0)$. . . . . p. 19

4 Sistema de alocação de zeros. . . . . p. 20

5 Sistema de controle de rastreamento de sinais e atenuação de perturbação presente na planta. . . . . p. 25

6 Sistema de controle de rastreamento dinâmico de sinais. . . . . p. 27

7 Estrutura de sistemas com peso na freqüência. . . . . p. 28

8 Resposta ao Degrau. . . . . p. 34

9 Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$. . . . . p. 35

10 Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$. . . . . p. 35

11 Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$. . . . . p. 36

12 Mapeamento de pólos e zeros. Pólos da planta e, posteriormente, com a inserção do estimador. . . . . p. 37

13 Resposta final do sistema: sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos. . . . . p. 37

14 Resposta ao Degrau. . . . . p. 39

15 Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$. . . . . p. 39

16 Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$. . . . . p. 40

17 Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$. . . . . p. 41

18 Mapeamento de pólos e zeros. Pólos da planta e, posteriormente, com a inserção do estimador. . . . . p. 41

19 Resposta final do sistema: sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos. . . . . p. 42

20 Diagrama de Bode do Filtro F_1. . . . . p. 43

21 Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$. . . . . p. 44

22 Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$. . . . . p. 44

23 Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$. . . . . p. 45

24 Mapeamento de pólos e zeros do sistema. . . . . p. 46

25 Resposta final do sistema: sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos. . . . . p. 46

26 Diagrama de Bode do Filtro F_2. . . . . p. 48

27 Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$. . . . . p. 49

28 Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$. . . . . p. 49

29 Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$. . . . . p. 50

30 Mapeamento de pólos e zeros do sistema. . . . . p. 50

31 Resposta final do sistema: Sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos. . . . . p. 51

1 Introdução

Como pode-se verificar em (OGATA, 1997), (DORF; BISHOP, 2001), (CHEN, 1999) e (ASSUNÇÃO; PERES, 2001), existe na vasta literatura de engenharia de controle vários trabalhos que foram desenvolvidos utilizando a alocação dos pólos para o projeto e desenvolvimento de sistemas de controle. Entretanto, poucos são os estudos que tratam da alocação ou modificação dos zeros para a solução de problemas em engenharia de controle. As primeiras publicações envolvendo tais abordagens foram (MURDOCH, 1975) e (MURDOCH, 1977), que tornaram-se precursores nos estudos e na alocação dos zeros para sistemas MIMO. Desde então, vários outros autores se preocuparam com o tratamento dos zeros e mostraram a importância dessa abordagem para a engenharia de controle.

Assim como os pólos, a variação dos zeros altera, não somente o comportamento transitório, como em (MOORE; BHATTACHARYYA, 1990), mas também diversas características de um sistema controlável, tais como a robustez (TU; LIN, 1992), redução de modelos (HAUKSDÓTTIR, 2000), implementação de controladores robustos (PIERRI, 1999) e, até mesmo, para formulação de um rastreador de sinais, como pode-se verificar em (ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2004). Dentro das poucas obras significativas encontradas na literatura, pode-se ver em (PIERRI, 1999), a otimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ através da manipulação dos zeros do sistema, mas a parametrização de uma variável torna o problema não-linear. Ainda, em (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994), que é um texto clássico dos estudos de sistemas de controle, pode-se encontrar o tratamento dos zeros de uma forma mais detalhada.

A utilização de métodos de otimização das normas $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ em sistemas de controle, foram abordadas com grande êxito no tratamento da atenuação dos efeitos dos sinais de distúrbio na saída do sistema em (GEROMEL; BERNUSSOU; OLIVEIRA, 1999) e (CHILALI; GAHINET, 1996), mas a utilização da modificação dos zeros para tratamento desses problemas ainda não foi explorada.

Um problema de grande interesse, abordado em (MOORE; BHATTACHARYYA, 1990), é a obtenção de um controlador que atinja especificações de projeto, tais como o tempo

de estabelecimento e a porcentagem de *overshoot*, através da modificação dos zeros. Em (HAUKSDÓTTIR, 2000) aborda-se problemas de otimização envolvendo a alocação dos zeros para a redução de modelos de sistemas contínuos, mantendo sua estabilidade original e a resposta ao impulso muito próxima da obtida inicialmente.

Um método também baseado em controle misto linear quadrático $\mathcal{H}_\infty$, é apresentado em (LIAO; WANG; YANG, 2002), no qual é projetado um controlador capaz de solucionar problemas de falha nos atuadores da superfície de aeronaves, através de um rastreamento robusto confiável.

Em (HERJOLFSSON; EVARSSON, 2005), a modificação dos zeros é otimizada, com o objetivo de obter-se um rastreamento em sistemas lineares contínuos no tempo, no qual projeta-se um rastreador de sinais considerando sinais de entrada específicos: os do tipo degrau e impulso. Já em (ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2004) utiliza-se um processo de otimização, descrito em LMIs (do inglês, *Linear Matrix Inequalities*), que possibilita a modificação ótima dos zeros para o rastreamento de sinais e ainda, simultaneamente, através de um controlador, realiza-se a rejeição do efeito de perturbações exógenas no sistema, utilizando critérios de desempenho $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente.

Por fim, esse trabalho propõe o projeto de um controlador para o rastreamento de sinais com alocação de pólos, tendo como critério de desempenho a norma $\mathcal{H}_\infty$. Em uma segunda etapa, essa abordagem possibilita ao projetista, através de uma formulação convexa inédita, a obtenção de parâmetros de modificação dos zeros, que atenuam o efeito do distúrbio na saída do sistema. A solução desse problema, e a obtenção dos parâmetros de modificação dos zeros para a rejeição de distúrbios, são obtidos através de otimização linear (BOYD et al., 1994), utilizando-se LMIs como restrições, tendo agora a minimização da norma $\mathcal{H}_2$ como critério de desempenho, obtendo-se, assim, a solução ótima do problema.

Para obter-se um rastreamento mais eficiente, podendo-se ter uma flexibilidade de escolha da faixa de freqüência de atuação do rastreador de sinais, insere-se um peso na freqüência, ou seja, simplesmente um ponderador de freqüência, no projeto do rastreador de sinais. Na metodologia proposta, utilizando-se a realimentação de estados, a inserção do filtro não apresenta uma formulação convexa, onde a manipulação de uma variável torna o problema bilinear, sendo custosa a solução através de LMIs. Para a solução do problema de rastreamento, apresenta-se um rastreador de sinais com realimentação dinâmica da saída, com um controlador dinâmico $K_s(s)$, onde tal manipulação apresentou uma formulação ótima convexa, sem o aparecimento de bilinearidades, tornando-se o problema mais fácil de ser solucionado.

O objetivo desse estudo, além de propor essa nova metodologia, é de enriquecer, ainda mais, a literatura em sistemas de controle, envolvendo a aplicação dos zeros na resolução de problemas encontrados em engenharia de controle.

2 *Rejeição de Distúrbios com Modificação de Zeros via Realimentação de Estados Estimados*

2.1 Formulação do Processo de Otimização para a Rejeição de Distúrbios

Considere o seguinte sistema linear invariante no tempo (2.1), descrito em espaço de estados por:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2u(t) + B_1w(t) \\ y(t) &= Cx(t), x(0) = 0, t \in [0; \infty) \end{aligned} \tag{2.1}$$

sendo $A \in \Re^{n\times n}$, $B_1 \in \Re^{n\times 1}$, $B_2 \in \Re^{n\times 1}$, $C \in \Re^{1\times n}$, e $x(t)$ é o vetor de estados, $y(t)$ é a saída de interesse do sistema, $u(t)$ a entrada de controle e $w(t)$ uma entrada exógena do tipo distúrbio ou ruído.

Considera-se o sistema ilustrado na Figura 1 para a resolução do problema ótimo do rastreamento de sinais com alocação de pólos, e rejeição de ruído com modificação ótima dos zeros.

Inicialmente, projeta-se um vetor de ganhos K, de acordo com a lei de controle: $u(t) = -Kx(t)$, para o rastreamento de sinais, posicionando os pólos de tal forma que a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o erro de saída $e(t)$ e o sinal de referência $r(t)$ seja mínima, conforme ilustrado na Figura 2.

Para este projeto utiliza-se um vetor de ganho L, obtido através do Estimador de *Kalman* (KALMAN, 1960), (CHILALI; GAHINET, 1996), onde os estados realimentados são os estados estimados.

Para a atenuação do efeito do sinal de distúrbio, projeta-se um vetor M (Figura 1),

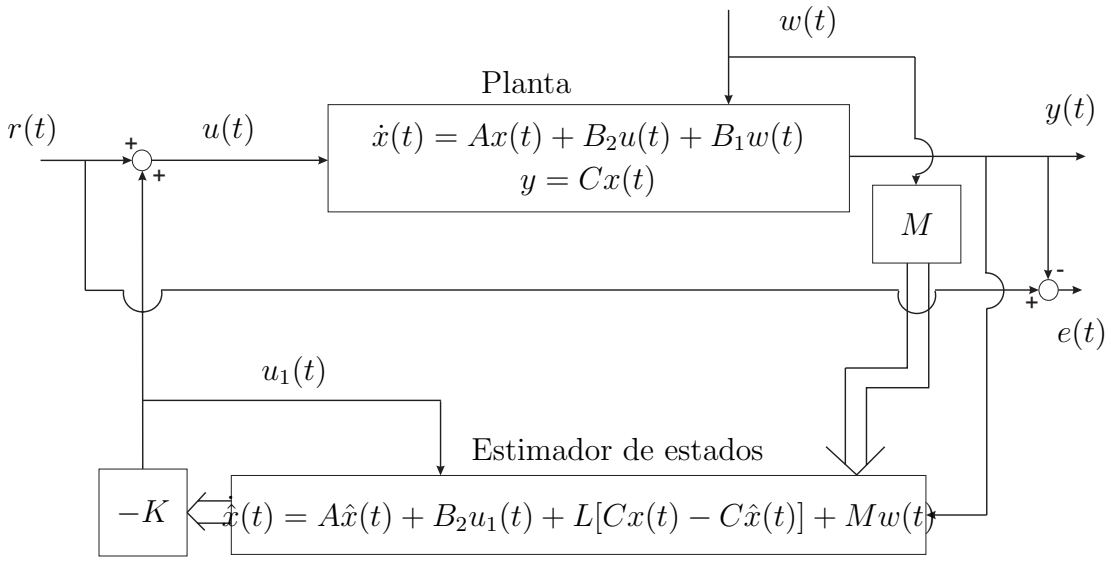


Figura 1: Sistema de controle ótimo com posicionamento de pólos e zeros.

que modifica os zeros de $w(t)$ para $u(t)$, fazendo com que a norma $\mathcal{H}_2$, entre o sinal de distúrbio $w(t)$ e a saída $y(t)$, seja minimizada. Neste caso é suposto que o distúrbio $w(t)$ seja medido, como por exemplo, a ação do vento sobre uma antena rastreadora. Esse processo de rejeição de distúrbio é demonstrado na sessão 2.5.

O diagrama de blocos da Figura 1 pode ser descrito através das variáveis de estado $x(t)$ e $\hat{x}(t)$, onde $x(t)$ são os estados da planta e $\hat{x}(t)$ os estados do estimador dados por:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -Z_1 \\ T & A_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ M \end{bmatrix} w(t) \qquad (2.2) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \\
e(t) &= r(t) - y(t)
\end{aligned}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
A_o &= A - B_2K - LC \\
T &= LC \\
Z_1 &= B_2K
\end{aligned}$$

O sistema (2.2) pode ser representado na forma compacta:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{x}}(t) &= A_s\bar{x}(t) + B_sr(t) + B_zw(t) \\
y(t) &= C_s\bar{x}(t) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

$$e(t) = r(t) - C_s\bar{x}(t)$$

sendo:

$$\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}, A_s = \begin{bmatrix} A & -Z_1 \\ T & A_o \end{bmatrix}, B_s = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \\
B_z &= \begin{bmatrix} B_1 \\ M \end{bmatrix}, C_s = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace no sistema (2.3), para $\bar{x}(0) = 0$, obtem-se:

$$\begin{aligned}
\bar{X}(s) &= (sI - A_s)^{-1}B_sR(s) + (sI - A_s)^{-1}B_zW(s) \\
Y(s) &= C_s(sI - A_s)^{-1}B_sR(s) + C_s(sI - A_s)^{-1}B_zW(s) \\
E(s) &= R(s) - C_s\bar{X}(s)
\end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.4), supondo-se que o sinal de ruído seja nulo, pode-se determinar a função de transferência:

$$E(s) = R(s) - C_s(sI - A_s)^{-1}B_sR(s)$$

tem-se então:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = -C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + 1$$

ou

$$H_{s_1}(s) = -C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + 1$$

neste caso, realiza-se o rastreamento de sinais, minimizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$.

Pode-se determinar a relação entre o sinal de saída e os sinais de entrada do sistema. Tem-se então:

$$Y(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_sR(s) + C_s(sI - A_s)^{-1}B_zW(s) \tag{2.5}$$

Analisando-se o efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema, considerando-se o

sinal de referência nulo em (2.5), obtemos a seguinte expressão:

$$H_{s_2}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_s(sI - A_s)^{-1}B_z$$

Na modificação dos zeros pode-se, então, minimizar a norma $\mathcal{H}_2$, da função de transferência entre o sinal de distúrbio $w(t)$ para o sinal de saída $y(t)$, e encontrar o parâmetro de modificação dos zeros M, para a rejeição de distúrbio na saída do sistema. O parâmetro de modificação dos zeros M encontra-se em B_z.

2.2 Projeto do Rastreador de Sinais $\mathcal{H}_\infty$

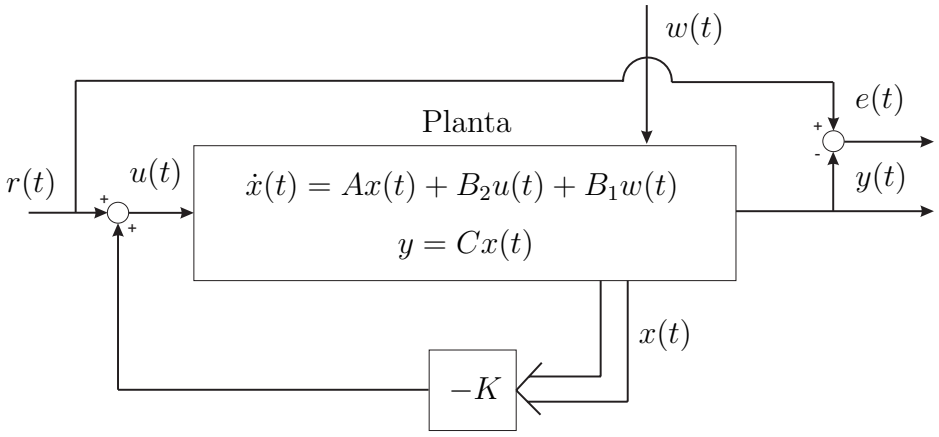


Figura 2: Sistema com realimentação de estados.

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema ilustrado na Figura 2, consiste em determinar um controlador K de tal forma que o erro de rastreamento $e(t)$, seja mínimo em relação ao sinal de referência $r(t)$, possibilitando assim um rastreamento do sinal. Portanto, deseja-se minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ da entrada de referência $r(t)$ para o erro $e(t)$, que é a diferença entre o sinal de referência $r(t)$ e o sinal de saída do sistema $y(t)$, onde o projeto do controlador K pode ser obtido através do seguinte problema de otimização, descrito na forma de LMIs (BOYD et al., 1994):

$$\|H\|_\infty^2 = min\ \delta$$

$$s.a \begin{bmatrix} A_mQ + QA_m' & -QC' & B_1 \\ -CQ & -1 & 1 \\ B_1' & 1 & -\delta \end{bmatrix} < 0$$

$$Q > 0$$

$$\delta > 0$$

sendo $Q = Q'$ e $A_m = A - B_2K$.

Para o rastreamento, substituindo A_m por $A - B_2K$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} (A - B_2K)Q + Q(A - B_2K)' & -QC' & B_1 \\ -CQ & -1 & 1 \\ B_1' & 1 & -\delta \end{bmatrix} < 0$$

Agora, fazendo $KQ = F$, obtêm-se então a seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} AQ - B_2F + QA - F'B_2' & -QC' & B_1 \\ -CQ & -1 & 1 \\ B_1' & 1 & -\delta \end{bmatrix} < 0$$

Dessa maneira, o seguinte problema de otimização é apresentado para a solução do problema do rastreamento:

$$\|H\|_\infty^2 = min\ \delta$$

$$s.a \begin{bmatrix} AQ + QA' - B_2F - F'B_2' & -QC' & B_1 \\ -CQ & -1 & 1 \\ B_1' & 1 & -\delta \end{bmatrix} < 0 \qquad (2.6)$$

$$Q > 0$$

$$\delta > 0$$

sendo que o controlador é obtido por $K = Q^{-1}F$, e Q e F são soluções ótimas de (2.6).

2.3 Inclusão das Restrições para a Alocação dos Pólos via LMI

A inserção de restrições de regiões na resolução do problema de rastreamento de sinais, possibilita ao projetista a alocação dos pólos em uma determinada região do plano-s (CHILALI; GAHINET, 1996), executando um rastreamento mais eficiente, pois tal mecanismo mantem os pólos do sistema em uma região limitada, impedindo que se dispersem pelo plano-s, evitando-se que os controladores tenham altos ganhos. De (CHILALI; GAHINET, 1996) tem-se as seguintes LMIs para alocação dos pólos em uma determinada região

ilustrada na Figura 3:

$$\left[\ AQ + QA' - B_2F - F'B_2' + 2\alpha Q\ \right] < 0 \tag{2.7}$$

$$\begin{bmatrix} -rQ & AQ - B_2F + qQ \\ QA' - F'B_2' + qQ & -rQ \end{bmatrix} < 0 \tag{2.8}$$

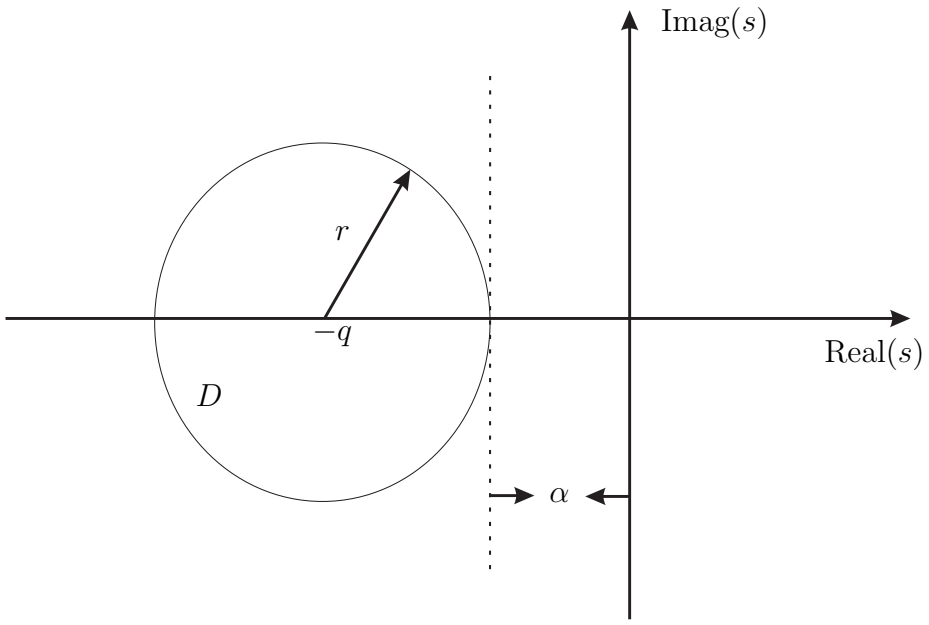


Figura 3: D é a região do plano-s limitada por uma circunferência de raio r e centro $(-q, 0)$.

2.4 Alocação de Zeros

Considerando-se o sistema (A, B_2, C), pode-se projetar um sistema que possibilite a modificação dos zeros de $w(t)$ para $u(t)$, conforme a estrutura ilustrada na Figura 4. Neste processo seleciona-se um vetor de ganhos M, $M \in \Re^{n\times 1}$, de modo que os zeros sejam alocados em lugares arbitrários, conforme a escolha do projetista (ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2004).

O Observador de estados utilizado no sistema de modificação de zeros, é um estimador de Kalman que determina os parâmetros corretos de um modelo em um determinado processo, estimando os estados do sistema que são inviáveis de serem obtidos. Dados alguns valores iniciais, pode-se ajustar os parâmetros do modelo através de cada nova medição, obtendo assim a estimativa do erro em cada atualização. Seu campo de aplicações é muito amplo, devido a sua habilidade de incorporar os efeitos de erros e sua estrutura computa-

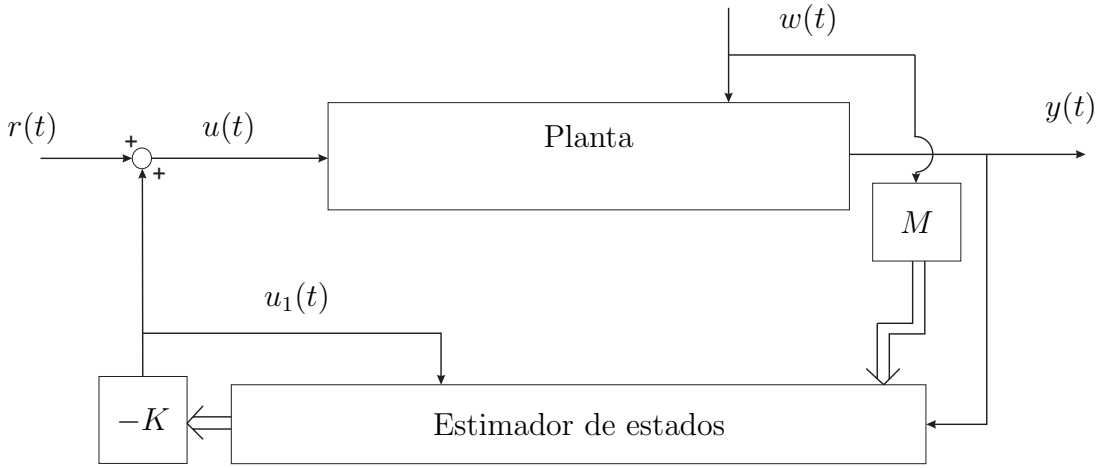


Figura 4: Sistema de alocação de zeros.

cional simples de ser projetada. Para esse trabalho utilizou-se o *software MATLAB* para obter o estimador de Kalman, mas para maiores informações ver (KALMAN, 1960). O estimador de estados é projetado segundo (KALMAN, 1960), de modo que não afete o desempenho do sistema.

Considerando-se a Figura 4, se existir um zero de transmissão de $w(t)$ para $u(t)$, então necessariamente existe um zero de transmissão de $w(t)$ para $y(t)$, a menos que ocorra cancelamento de pólos e zeros. Pode-se determinar os zeros de um sistema descrito em variáveis de estado (2.2), através do estudo da teoria de sistemas (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994). Com essa perspectiva, um zero é um valor generalizado de freqüência s tal que o sistema possa ter uma entrada e um estado não-nulos e, contudo, ter um zero na saída. Se a entrada $w(t)$ é exponencial para a freqüência z_i de um zero do sistema, dado por:

$$w(t) = w_o e^{z_i t}$$

então a saída do sistema é igual matematicamente a zero:

$$y(t) \equiv 0$$

Os estados do sistema podem ser:

$$\hat{x}(t) = \hat{x} e^{z_i t}$$

Assim:

$$\dot{\hat{x}}(t) = z_i e^{z_i t} \hat{x} = A_s e^{z_i t} \hat{x} + B_z w e^{z_i t},$$

ou

$$\left[\begin{array}{cc} z_i I - A_s & -B_z \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \hat{x} \\ w_o \end{array} \right] = 0$$

e também

$$y(t) = C_s \hat{x}(t) = C_s e^{z_i t} \hat{x} \equiv 0$$

Com isso, a equação característica dos zeros $w(t)$ para $u(t)$, pode ser descrita por (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994):

$$\left[\begin{array}{cc} z_i I - A_s & -B_z \\ C_s & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \hat{x} \\ w_o \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

ou ainda:

$$det \left[\begin{array}{cc} sI - A_s & -B_z \\ C_s & 0 \end{array} \right] = 0$$

mas

$$A_s = \left[\begin{array}{cc} A & -B_2 K \\ LC & A - B_2 K - LC \end{array} \right], B_z = \left[\begin{array}{c} B_1 \\ M \end{array} \right], C_s = \left[\begin{array}{cc} C & 0 \end{array} \right].$$

Portanto, tem-se:

$$det \left[\begin{array}{ccc} sI - A & B_2 K & -B1 \\ -LC & sI - A + B_2 K + LC & -M \\ C & 0 & 0 \end{array} \right] = 0 \tag{2.9}$$

sendo que as soluções, $s = z_i$, são os zeros modificados de $w(t)$ para $u(t)$ e M é o parâmetro de modificação dos zeros.

A equação (2.9) é denominada equação característica dos zeros do sistema da Figura 4 e depende do parâmetro M que permite a modificação dos zeros de $w(t)$ para $u(t)$. Neste trabalho é tratado o caso SISO, e os zeros modificados são os zeros de transmissão do sistema, que são as raízes do polinômio do numerador da função de transferência. Pode-se encontrar maiores detalhes sobre zeros em (COLANERI; GEROMEL; LOCATELLI, 1997).

2.5 Otimização da Norma $\mathcal{H}_2$ Utilizando a Modificação de Zeros

O problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema $H_s = (A_s, B_z, C_s)$ tem como objetivo obter o valor do vetor de ganhos M que minimize a norma $\mathcal{H}_2$, ou seja, que modifique os zeros do sistema de tal forma que a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ seja mínima, constituindo o controlador capaz de atenuar o efeito do sinal do ruído. O projeto dá-se através do seguinte problema de minimização descrito na forma de LMIs (PERES, 1997):

$$\|H\|_2^2 = min \;\; Tr(Z)$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q & B_z \\ B_z' & Z \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_sQ + QA_s' & QC' \\ CQ & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.10}$$

$$Q > 0$$

sendo $Q = Q'$.

Particionando-se Q na seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix}$$

com $Q_{11} \in \Re^{n\times n}$, $Q_{12} \in \Re^{n\times n}$ e $Q_{22} \in \Re^{n\times n}$, a equação (2.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\min \;\; Tr(Z)$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & B_1 \\ Q_{12}' & Q_{22} & M \\ B_1' & M' & Z \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} AQ_{11} + Q_{11}A' - Z_1Q_{12}' - Q_{12}Z_1' & AQ_{12} - Z_1Q_{22} + Q_{11}T' + Q_{12}A_o' & Q_{11}C' \\ TQ_{11} + A_oQ_{12}' + Q_{12}'A' - Q_{22}Z_1' & TQ_{12} + A_oQ_{22} + Q_{12}'T' + Q_{22}A_o' & Q_{12}'C' \\ CQ_{11} & CQ_{12} & -I \end{bmatrix} < 0 \tag{2.11}$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q12 \\ Q'_{12} & Q_{22} \end{bmatrix} > 0$$

sendo M solução ótima de (2.11).

O vetor M determina a posição dos zeros no sistema de controle e como seu valor é ótimo, então o valor de M encontrado minimiza a norma $\mathcal{H}_2$ de $H_s = (A_s, B_z, C_s)$.

A norma $\mathcal{H}_2$ é proporcional à área de todo espectro de freqüência de resposta do sistema, podendo existir uma faixa de freqüência com grande atenuação e outra com menor grau de atenuação. Para que o controlador atenue o efeito do distúrbio na saída do sistema adequadamente a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema H_s deve ser minimizada.

Nessa seção, o processo de determinação da norma $\mathcal{H}_2$ é realizado pela solução da inequação (2.11), obtendo-se, assim, um controlador capaz de atenuar o efeito do sinal de distúrbio. Porém, o rastreador de sinais equacionado para a minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ pode operar em uma faixa de freqüência que não seria a desejada pelo projetista. Nesse caso, o ideal seria que, antes da obtenção dos parâmetros de modificação dos zeros para a rejeição de distúrbios, o rastreador de sinais atuasse seguindo uma faixa de freqüência contida nas especificações de projeto. Para que isso ocorra, deve-se inserir um ponderador de freqüência, que possibilita a escolha da faixa de operação do rastreador de sinais. Contudo, ao inserir o peso na freqüência ocorrem bilinearidades na formulação do projeto, que tornaria custosa a solução do problema por métodos computacionais.

Então, motivou-se a pesquisa de um método de alocação de pólos que rastreasse sinais em uma determinada faixa de freqüência, para em seguida, equacionar um método de modificação de zeros, que atenue os efeitos de sinais de distúrbio. A solução encontrada foi a elaboração de um rastreador de sinais com realimentação dinâmica da saída, obtendo-se um controlador dinâmico que possibilite a inserção do ponderador de freqüência para um rastreamento de sinais desejável. Após o rastreamento de sinais bem sucedido, finaliza-se a metodologia com a atenuação do efeito dos sinais de distúrbio. No capítulo seguinte, propõe-se a formulação do problema.

3 *Rejeição de Distúrbios com Modificação de Zeros utilizando Realimentação Dinâmica da Saída*

Na literatura de sistemas de controle pode-se encontrar alguns trabalhos que adotam a realimentação dinâmica da saída como em (RADMAN, 1998), que trata de uma metodologia utilizando-se um compensador dinâmico para sistemas multivariáveis com alocação de pólos, e a modificação dos zeros é realizada através de um ganho de transmissão direta. Em (CHILALI; GAHINET, 1996), (GEROMEL; BERNUSSOU; OLIVEIRA, 1999) e (ANDREA; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2004), pode-se encontrar projetos consagrados de controladores dinâmicos, utilizando-se otimização das normas $\mathcal{H}_\infty$ ou $\mathcal{H}_2$ para o processo de atenuação do efeito do sinal de distúrbio e rastreamento de sinais, mas nesses trabalhos são propostos, pela primeira vez, a alocação de pólos para o rastreamento e a modificação dos zeros para a rejeição do efeito do sinal de distúrbio. Neste capítulo, primeiramente, propõe-se uma nova metodologia de minimização da norma $\mathcal{H}_\infty$ do sistema, cujo diagrama de blocos é dado pela Figura 5, para obter-se um controlador $K_p(s)$ para o rastreamento com peso na freqüência entre os sinais de erro $e(t)$ e o sinal de referência $r(t)$. A seguir, é proposto um método de minimização da norma $\mathcal{H}_2$, que utiliza, de modo inédito, a modificação dos zeros para a atenuação dos efeitos dos sinais de distúrbios na saída do sistema.

3.1 Formulação do Processo de Otimização para a Atenuação de Distúrbios

Considera-se o sistema (3.1) para resolução do problema ótimo do rastreamento dinâmico de sinais com alocação de pólos, e também, rejeição de ruído com modificação ótima dos zeros usando o controlador dinâmico $K_p(s)$.

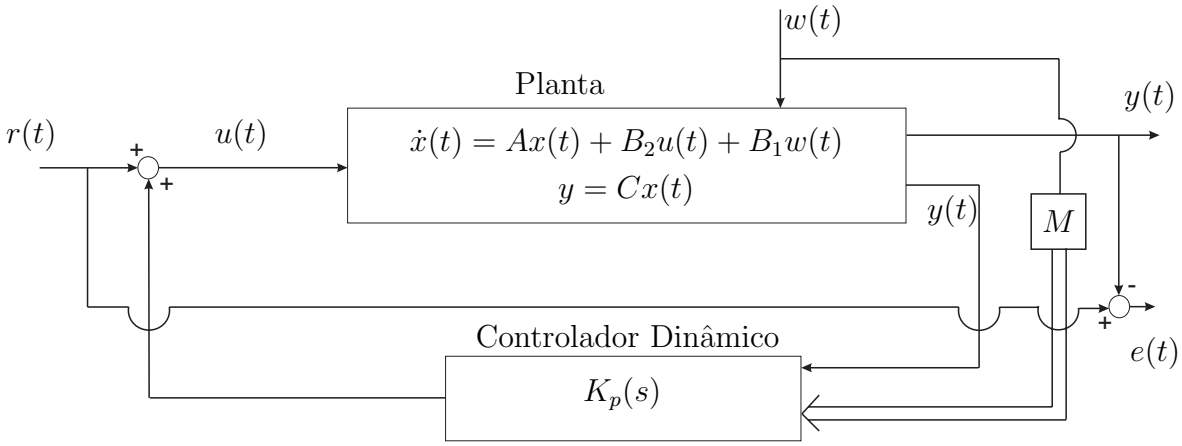


Figura 5: Sistema de controle de rastreamento de sinais e atenuação de perturbação presente na planta.

O modelo de $K_p(s)$ em espaço de estados é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p(t) &= A_p x_p(t) + B_p u(t) + M w(t) \\ y_p(t) &= C_p x_p(t), x(0) = 0, t \in [0; \infty) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Inicialmente, projeta-se um controlador dinâmico $K_p(s)$ para o rastreamento de sinais, posicionando os pólos de tal forma que a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o erro de saída $e(t)$ e o sinal de referência $r(t)$ seja mínima.

Para a atenuação do distúrbio, projeta-se um vetor M, que modifica os zeros de $w(t)$ para $u(t)$, fazendo com que a norma $\mathcal{H}_2$, entre o sinal de distúrbio $w(t)$ e a saída $y(t)$, seja mínima.

O diagrama de blocos da Figura 5 pode ser escrito através das variáveis de estado $x(t)$ e $x_p(t)$, onde $x(t)$ são os estados da planta e $x_p(t)$ são os estados do controlador $K_p(s)$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_p(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_1 C_p \\ B_p C & A_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ M \end{bmatrix} w(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix} \\ e(t) &= r(t) - y(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

sendo A_p, B_p e C_p as matrizes dinâmicas que representam o controlador $K_p(s)$.

O sistema (3.2) pode ser representado na forma compacta:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A_n \bar{x}(t) + B_z r(t) + B_n w(t) \\ y(t) &= C_n \bar{x}(t) \end{aligned}$$

$$e(t) = r(t) - C_n\bar{x}(t)$$

sendo:

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_p(t) \end{bmatrix}, A_n = \begin{bmatrix} A & B_1C_p \\ B_pC & A_p \end{bmatrix}, B_z = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$B_n = \begin{bmatrix} B_1 \\ M \end{bmatrix}, C_n = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace no sistema, para $\bar{x}(0) = 0$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} \bar{X}(s) &= (sI - A_n)^{-1}B_zR(s) + (sI - A_n)^{-1}B_nW(s) \\ Y(s) &= C_n(sI - A_n)^{-1}B_zR(s) + C_n(sI - A_s)^{-1}B_nW(s) \\ E(s) &= R(s) - C_n\bar{X}(s) \end{aligned} \tag{3.3}$$

De (3.3), considerando-se nulo o sinal de ruído, pode-se determinar a função de transferência:

$$E(s) = R(s) - C_n(sI - A_n)^{-1}B_zR(s)$$

tem-se então:

$$\frac{E(s)}{R(s)} = -C_n(sI - A_n)^{-1}B_z + 1$$

ou

$$H_{n_1}(s) = -C_n(sI - A_n)^{-1}B_z + 1$$

neste caso, o rastreamento dinâmico do sistema é realizado, minimizando a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$.

Pode-se determinar a relação entre o sinal de saída e os sinais de entrada do sistema através de (3.3). Desta maneira tem-se:

$$Y(s) = C_n(sI - A_n)^{-1}B_zR(s) + C_n(sI - A_n)^{-1}B_nW(s) \tag{3.4}$$

Analisando-se o efeito do sinal de distúrbio na saída do sistema, considerando-se o

sinal de referência nulo em (3.4), obtém-se a seguinte expressão:

$$H_{n_2} = \frac{Y(s)}{W(s)} = C_n(sI - A_n)^{-1}B_n$$

Com a manipulação dos zeros pode-se, então, minimizar a norma $\mathcal{H}_2$, do sinal de distúrbio $w(t)$ para o sinal de saída $y(t)$, e encontrar o parâmetro de modificação dos zeros M para a rejeição do sinal de distúrbio na saída do sistema.

3.2 Projeto do Rastreador com Peso na Freqüência com Realimentação Dinâmica da Saída

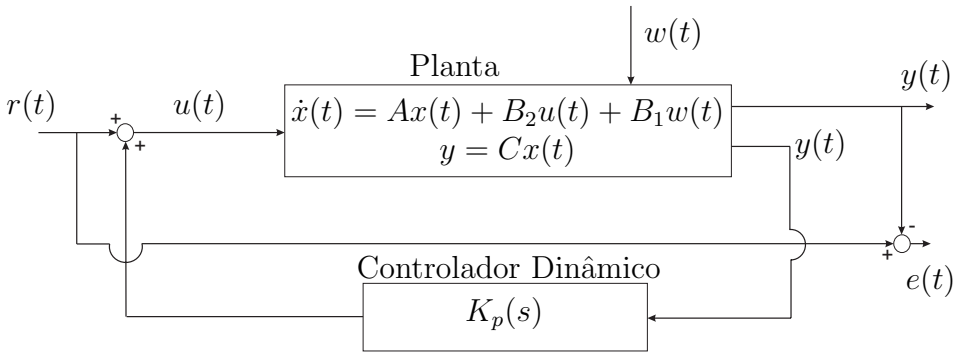


Figura 6: Sistema de controle de rastreamento dinâmico de sinais.

Para obter-se um rastreamento de sinais em uma determinada faixa de freqüência, com uma melhora na eficiência de sua operação, apresenta-se uma metodologia de inserção de peso na freqüência, de modo que venha possibilitar uma flexibilidade nos projetos de sistemas de controle, e assim, atingir as especificações do projeto em malha fechada, como em (ANDREA, 2002). Verifica-se a utilização de mecanismos semelhantes para a redução de modelos, porém descritos em forma de BMIs (do inglês, Bilinear Matrix Inequalities), em (VALENTIN; DUC, 1997). Para o projeto do rastreador de sinais busca-se a solução global que otimize o problema descrito a seguir:

$$\min \quad \|H_{n_1}(s)V(s)\|_\infty$$

sendo $V(s)$ o peso na freqüência de saída e considera-se $H_{n_1} = (A_{n_1}, B_{n_1}, C_{n_1}, D_{n_1})$ uma realização do sistema linear invariante no tempo e estável. Na Figura 7 é ilustrada a estrutura de inclusão de peso na frequência.

Com a inserção do peso na freqüência no rastreador de sinais proposto nesse trabalho, o problema torna-se bilinear, dificultando a solução do problema. Com isso, utiliza-se o rastreador com peso na freqüência com realimentação dinâmica da saída.

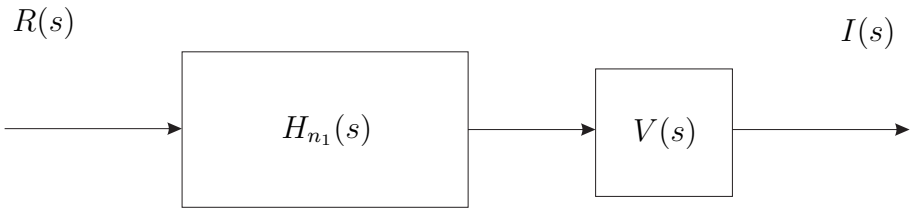


Figura 7: Estrutura de sistemas com peso na freqüência.

Considera-se da Figura 6, o compensador dinâmico $K_p(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p + D_p$.

Então, da Figura 7, tem-se a seguinte realização do sistema realimentado pelo compensador dinâmico:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & D_d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} A & B_2C_p & 0 & B_1 \\ B_pC & A_p & 0 & 0 \\ -B_fC & 0 & A_f & B_f \\ \hline 0 & 0 & C_f & 0 \end{array}\right] \tag{3.5}$$

sendo que A_p, B_p e C_p em (3.5) são as matrizes dinâmicas que representam o compensador dinâmico e A_f, B_f e C_f são matrizes correspondentes ao filtro utilizado no sistema.

Para solução do problema de determinação do controlador dinâmico, que atuará como rastreador de sinais, deve-se resolver o seguinte problema de otimização com restrições para alocação de pólos (CHILALI; GAHINET, 1996):

$$\|H\|_\infty^2 = \min\ \delta$$

$$s.a \left[\begin{array}{ccc} A_dP + PA_d' & B_d & -PC_d' \\ B_d' & -\delta & 1 \\ -C_dP & 1 & -\delta \end{array}\right] < 0 \tag{3.6}$$

$$\left[\begin{array}{cc} -r_oP & A_dP + qP \\ PA_d' + qP & -r_o \end{array}\right] < 0 \tag{3.7}$$

$$P > 0$$

$$\delta > 0$$

No entanto, a substituição das variáveis torna o problema difícil de ser solucionado, apresentando BMIs. Para solução desse problema faz-se, então, uma manipulação matemática para evitar a ocorrência de bilineridades, como em (CHILALI; GAHINET, 1996). Entretanto,

a transformação linear apresentada para que o problema de otimização torne-se linear é inédita. Primeiramente, adota-se as matrizes P e P^{-1}, tais como:

$$P = \begin{bmatrix} R & \psi & I \\ \psi' & J & H \\ I & H' & F \end{bmatrix}, \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} S & E & I \\ E' & \phi & L \\ I & L' & T \end{bmatrix}$$

sendo $P \geq 0$, $R = R' \in \Re^{n \times n}$ e $S = S' \in \Re^{n \times n}$. Dessa forma, tem-se:

$$P\Pi_2 = \Pi_1$$

com

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} R & I \\ \psi' & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Pi_2 = \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

de fato, $PP^{-1} = I$, portanto:

$$PP^{-1} = \begin{bmatrix} RS + \psi E' + I & RE + \psi\phi + L' & R + \psi L + T \\ \psi' S + JE' + H & \psi' E + J\phi + HL' & \psi' + JL + HT \\ S + H'E' + F & E + H'\phi + FL' & I + H'L + FT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

dessa maneira, usando o fato que $RS+\psi E'+I = I$, $\psi' S+JE'+H = 0$ e $S+H'E'+F = 0$, prova-se que $P\Pi_2 = \Pi_1$:

$$\begin{bmatrix} R & \psi & I \\ \psi' & J & H \\ I & H' & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & S \\ 0 & E' \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & RS + \Psi E' + I \\ \Psi' & \Psi' S + JE' + H \\ I & S + H'E' + F \end{bmatrix}$$

considerando-se a matriz de Lyapunov $P > 0$, e pré e pós multiplicando-se P por Π_2' e Π_2, respectivamente, obtem-se a seguinte inequação:

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0$$

portanto:

$$\Pi_2' P \Pi_2 = \begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} > 0$$

Posteriormente pré e pós multiplica-se a inequação (3.6) pela matriz diagonal (Π_2', I, I) e pela matriz diagonal (Π_2, I, I), respectivamente, e então, pré e pós multiplica-se a ine-

quação (3.7) pelas matrizes η' e η respectivamente, onde η é dada por:

$$\eta = \begin{bmatrix} \Pi_2 & 0 \\ 0 & \Pi_2 \end{bmatrix}$$

obtêm-se o seguinte problema de otimização (3.8):

$$\|H\|_\infty^2 = \min\ \delta$$

$$\begin{bmatrix} AR + RA' + B_2C_j + C_j'B_2' & A + A_f' + A_j' & B_1 & C_f' \\ A_j + A_f + A' & SA + A'S + B_jC + C'B_j' - B_fC - C'B_f' & SB_1 + B_f & 0 \\ B_1' & B_f' + B_1'S & -\delta I & I \\ C_f & 0 & I & -\delta I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} -r_oR & -r_o & AR + B_2C_j + qR & A + q \\ -r_o & -r_oS & A_j + q & SA + B_jC + qS \\ RA' + C_j'B_2' + qR & A_j' + q & -r_oR & -r_o \\ A' + q & A'S + C'B_j' + qS & -r_o & -r_oS \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\delta > 0$$

sendo $R = R' \in \Re^{n\times n}$, $S = S' \in \Re^{n\times n}$, A_j, B_j e C_j as variáveis de otimização conjunta das LMIs.

Considerando-se:

$$\begin{aligned} C_j &= C_p\psi' \\ B_j &= EB_p \\ A_j &= SAR + EB_pC\psi R - B_fCR + SB_2C_p\psi' + EA_p\psi' \end{aligned}$$

Para a solução da equação acima tem-se:

$$\psi E' = -RS$$

com isso, obtem-se as matrizes dinâmicas do compensador $\mathcal{H}_\infty$, $K_p(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p + D_p$. Para obter-se as matrizes ψ e E utiliza-se a decomposição LU. Considera-se uma

matriz A_{LU} inversível descrita a seguir:

$$A_{LU} = \psi^{-1} LU$$

sendo ψ a matriz de permutações, L é uma matriz triangular inferior e U é uma matriz triangular superior. Para maiores detalhes vide (LIMA, 2000). Pode-se obter a decomposição LU de uma matriz através do *software MATLAB*.

3.3 Otimização da norma $\mathcal{H}_2$ Utilizando Modificação de Zeros com $K_p(s)$

Nessa sessão o problema de otimização da norma $\mathcal{H}_2$ do sistema $H_{n_2} = (A_n, B_n, C_n)$ tem como objetivo obter o valor do vetor de ganho M capaz de minimizar a norma $\mathcal{H}_2$, modificando-se os zeros do sistema de tal forma que a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ seja mínima e que o efeito do sinal do ruído na saída do sistema seja atenuado.

Para a atenuação do distúrbio presente na saída do sistema, minimiza-se a norma $\mathcal{H}_2$ entre $w(t)$ e $y(t)$, obtendo-se então um vetor de ganhos M. O projeto dá-se através do seguinte problema de minimização descrito na forma de LMIs (PERES, 1997):

$$\|H\|_2^2 = min \;\; Tr(Z)$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q & B_n \\ B_n' & Z \end{bmatrix} > 0 \tag{3.9}$$

$$\begin{bmatrix} A_n Q + Q A_n' & QC' \\ CQ & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$Q > 0$$

sendo $Q = Q'$.

Particionando-se Q na seguinte forma:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix}$$

com $Q_{11} = Q_{11}' \in \Re^{n \times n}$, $Q_{12} \in \Re^{n \times n}$ e $Q_{22} = Q_{22}' \in \Re^{n \times n}$, a equação (3.9) pode ser

reescrita da seguinte forma:

$$\min \quad Tr(Z)$$

$$s.a \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & B_1 \\ Q_{12}' & Q_{22} & M \\ B_1' & M' & Z \end{bmatrix} > 0 \tag{3.10}$$

$$\begin{bmatrix} AQ_{11} + Q_{11}A' + B_1C_pQ_{12}' + Q_{12}C_p'B_1' & AQ_{12} + B_1C_pQ_{22} + Q_{11}C'B_p' + Q_{12}A_p' & Q_{11}C' \\ B_pCQ_{11} + A_pQ_{12}' + Q_{12}'A' + Q_{22}C_p'B_1' & B_pCQ_{12} + A_pQ_{22} + Q_{12}'C'B_p' + Q_{22}A_p' & Q_{12}'C' \\ CQ_{11} & CQ_{12} & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}' & Q_{22} \end{bmatrix} > 0$$

sendo M solução ótima de (3.10).

Essas LMIs são capazes de minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$, que é proporcional à área da resposta em freqüência do sistema, podendo existir uma faixa de freqüência com grande atenuação e outra com menor grau de atenuação. Para que o controlador dinâmico atenue o efeito do distúrbio na saída do sistema, assim como no capítulo anterior, a norma $\mathcal{H}_2$ do sistema H_d deve ser minimizada, obtendo-se seu valor ótimo.

4 Resultados e Discussão

4.1 Exemplo 1

Considera-se um sistema linear invariante no tempo de terceira ordem e projeta-se um rastreador de sinais e um atenuador dos efeitos dos sinais de distúrbios, sem o acréscimo do filtro. Tem-se um sistema de controle que determina a espessura de chapas por meio de ajuste de rolos de laminação, representado em variáveis de estado, descrito por (DORF; BISHOP, 2001):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \tag{4.1}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ é um sinal de perturbação acrescentado ao sistema.

Utilizando-se a estrutura dada na Figura 1 para o sistema descrito em (4.1) e agregando valores as variáveis que limitam a alocação dos pólos, sendo $q = 0$, $r = 1$ e $\alpha = 0$, projeta-se um controlador K para minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando-se as inequações (2.6), (2.7) e (2.8), depois um estimador de estados de *Kalman* e na seqüência projeta-se um controlador capaz de rejeitar efeitos dos sinais de distúrbio, minimizando-se norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ utilizando o projeto de modificação de zeros, conforme descrito em (2.11).

O compensador $\mathcal{H}_\infty$ projetado para este sistema, bem como o ganho L do estimador

de *Kalman* são:

$$K = \begin{bmatrix} -2,3819 & -3,3819 & 0,9999 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 61984374,6075 \\ 314304,8301 \\ 792,8491 \end{bmatrix}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ atingida no projeto, tomando com base todo o espectro de freqüência é 2,0001. A Figura 8 ilustra a resposta do sistema à uma entrada degrau unitária, apresentando-se um comportamento adequado do rastreador de sinais para freqüências até $0{,}1 rad/s$.

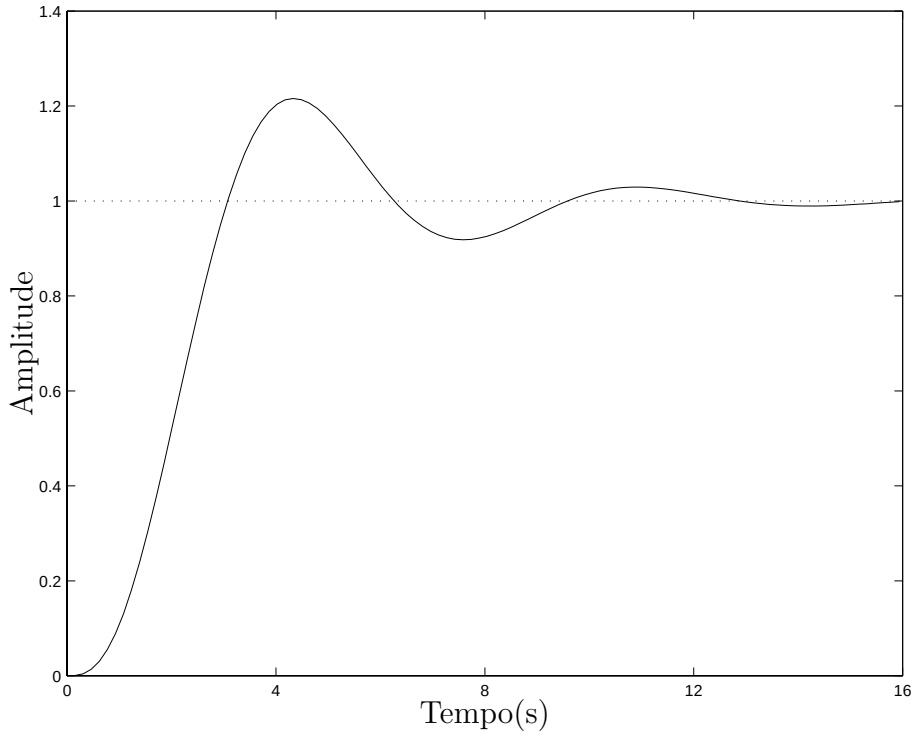


Figura 8: Resposta ao Degrau.

Observa-se na Figura 9 que, para uma determinada faixa de freqüência de operação, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $R(s)$ para $E(s)$ é minimizada, atendendo as características para um sistema ratreador de sinal. Na Figura 10 pode-se observar o gráfico de defasagem de $R(s)$ para $E(s)$.

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é $2,8386 \times 10^{-3}$, o que implica em uma grande atenuação do sinal de perturbação. A Figura 11 ilustra a resposta em freqüência da função de transferência $Y(s)/W(s)$, em módulo.

Para a atenuação do ruído, o problema de otimização fornece o seguinte valor do

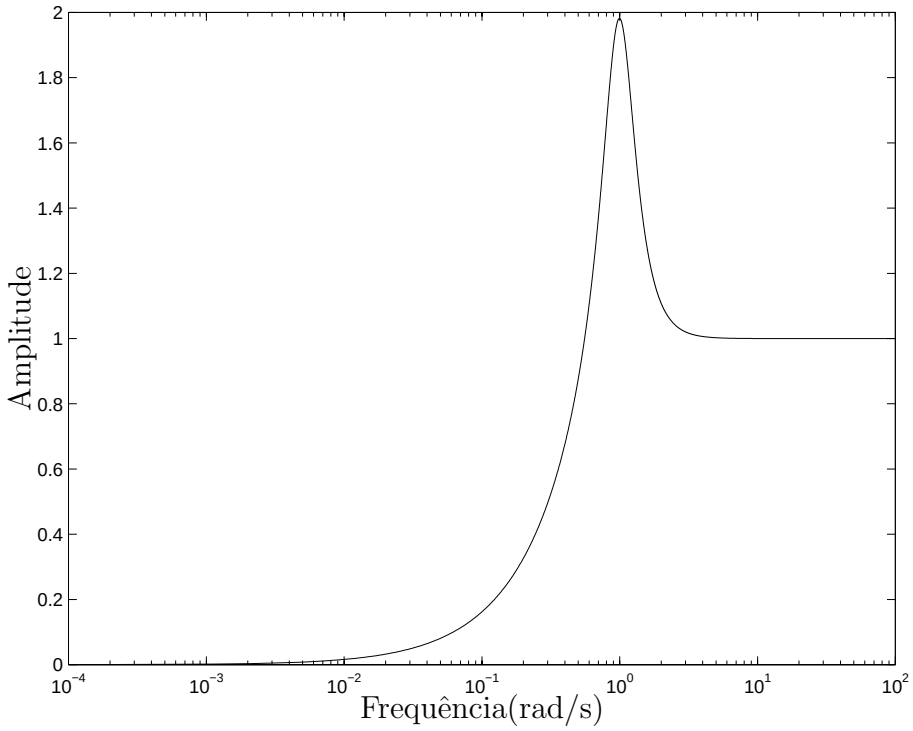


Figura 9: Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$.

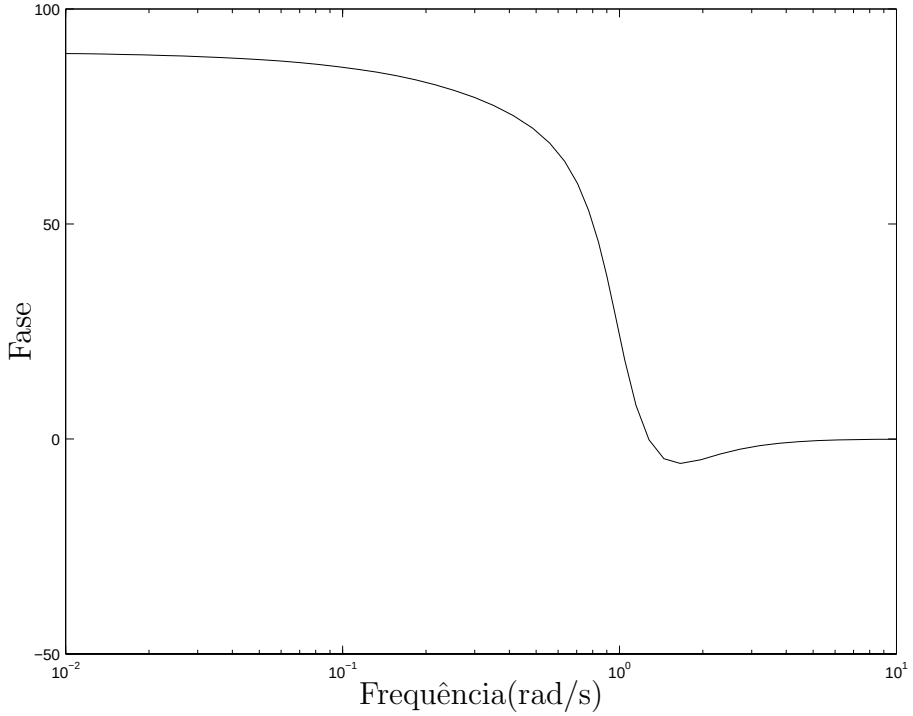


Figura 10: Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$.

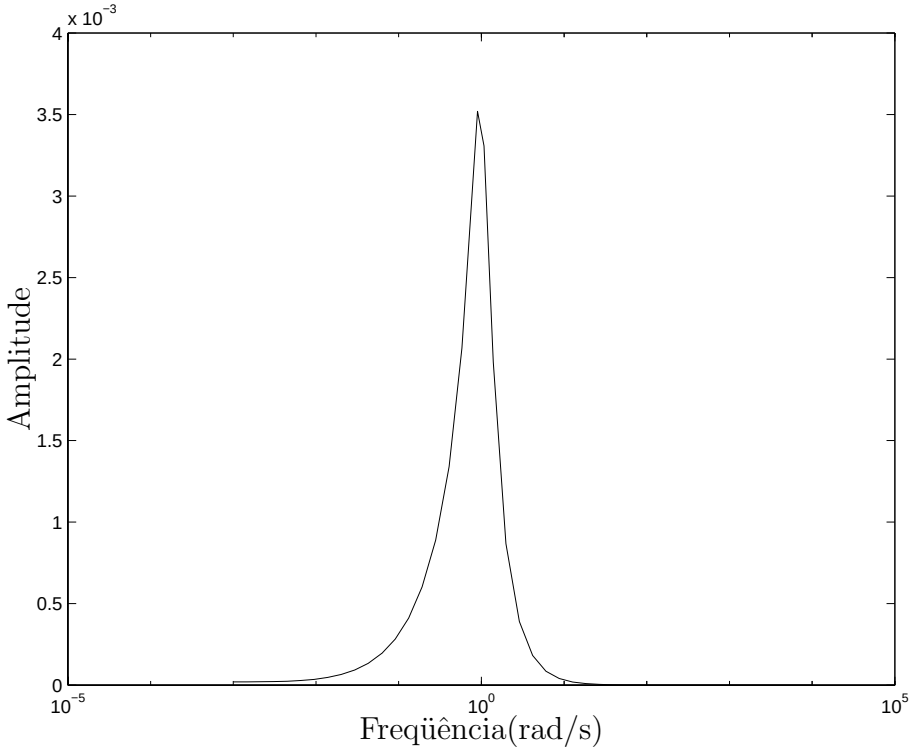


Figura 11: Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$.

parâmetro M de modificação dos zeros:

$$M = \begin{bmatrix} -64,0353 \\ 0,0974 \\ -6,4507 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

Os pólos do sistema foram alocados dentro da região estabelecida, limitadas por q, r e α, no lado esquerdo do plano S, com os valores: $s = -0,9999$ e $-0,3091 \pm j0,9511$ e os pólos do estimador alocados em $s = -199,1222 \pm j345,0414$ e $-398,4245$. Os zeros do sistema de malha fechada foram alocados em: $-0,0064$ e $-321,1302 \pm j304,1898$, como mostra a Figura 12.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = sen(0,1t)$, sendo o resultado final ilustrado na Figura 13, apresentando-se uma boa atenuação do sinal de distúrbio presente na saída da planta.

4.2 Exemplo 2

Em (FRANKLIN; POWELL; EMAMI-NAEINI, 1994) é abordada uma metodologia analítica para o aumento da constante de erro de velocidade para projetos em sistemas de controle

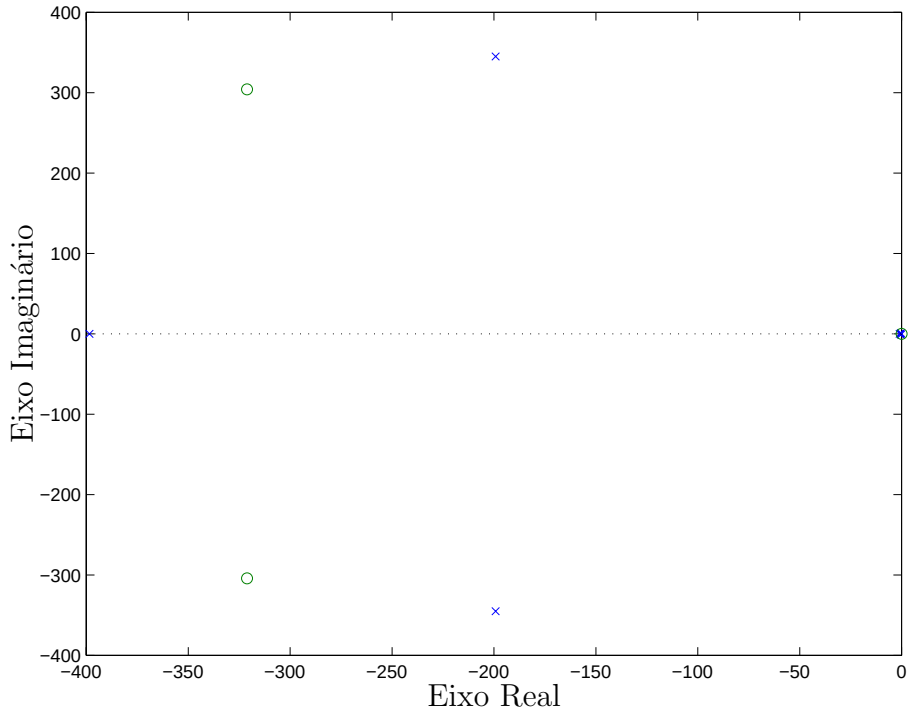


Figura 12: Mapeamento de pólos e zeros. Pólos da planta e, posteriormente, com a inserção do estimador.

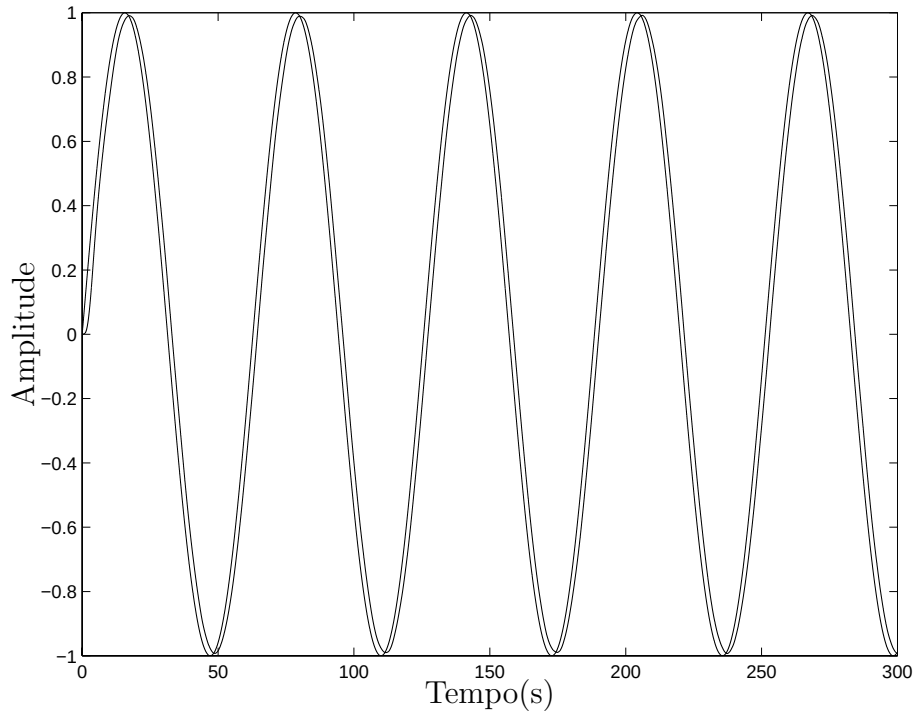


Figura 13: Resposta final do sistema: sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos.

utilizando-se a alocação de zeros. Considera-se um sistema linear invariante no tempo de segunda ordem que representa tal metodologia e projeta-se um rastreador de sinais e um atenuador dos efeitos dos sinais de distúrbio, sem o acréscimo do filtro. Seja o sistema representado em variáveis de estado, descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \tag{4.2}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ é um sinal de perturbação acrescentado ao sistema.

Utilizando-se a estrutura dada na Figura 1 para o sistema descrito em (4.2) e agregando valores as variáveis que limitam a alocação dos pólos, sendo $q = 0$, $r = 1$ e $\alpha = 0$, projeta-se um controlador K para minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando-se as equações (2.6), (2.7) e (2.8), depois um estimador de estados de *Kalman* e na seqüência projeta-se um controlador capaz de rejeitar efeitos dos sinais de distúrbio, minimizando-se a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$, utilizando-se o projeto de modificação de zeros, conforme descrito em (2.11).

O compensador $\mathcal{H}_\infty$ projetado para este sistema, bem como o ganho L do estimador de *Kalman* são:

$$\begin{aligned} K &= \begin{bmatrix} 0,4142 & 0,9999 \end{bmatrix} \\ L &= \begin{bmatrix} 63234,3073 \\ 11,2458 \end{bmatrix} \times 10^3 \end{aligned}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ atingida no projeto, tomando com base todo o espectro de freqüência é 2,0000. A Figura 14 ilustra a resposta do sistema à uma entrada degrau unitária, apresentando-se um comportamento adequado do rastreador de sinais para freqüências até $0{,}1 rad/s$.

Observa-se na Figura 15 que, para uma determinada faixa de freqüência de operação, a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $R(s)$ para $E(s)$ é minimizada, atendendo as características para um sistema ratreador de sinal. Na Figura 16 pode-se observar o gráfico de defasagem de $R(s)$ para $E(s)$.

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é $0,2778$, o que implica em uma

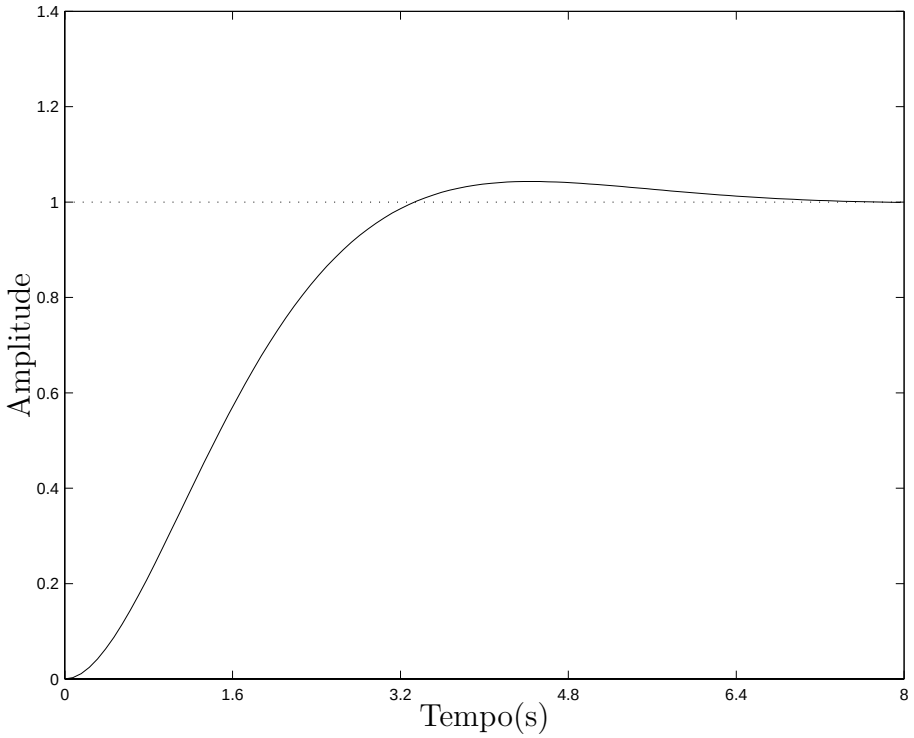


Figura 14: Resposta ao Degrau.

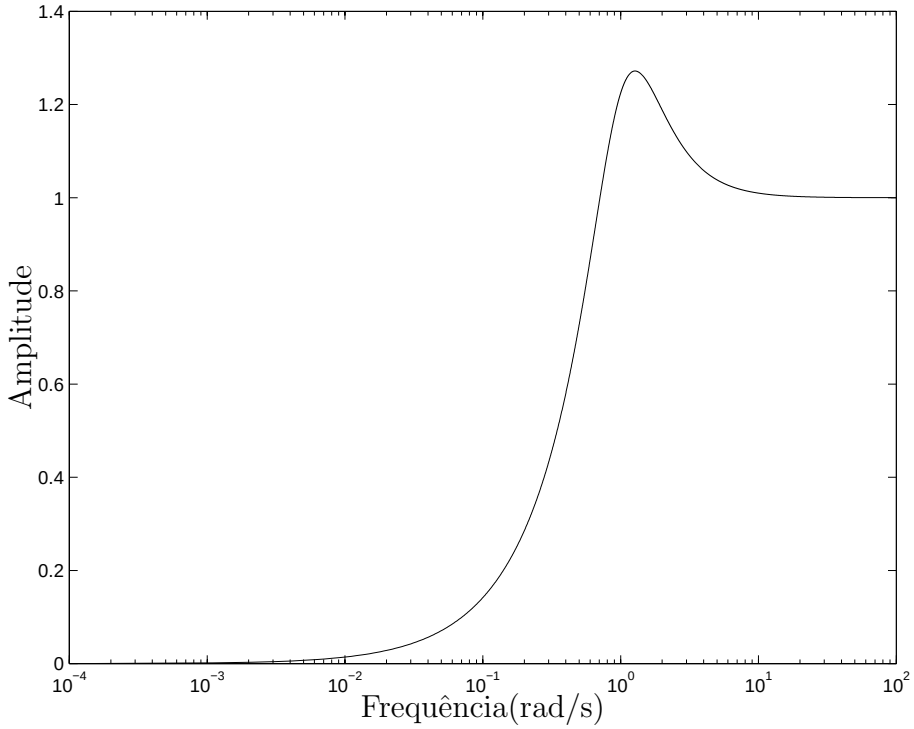


Figura 15: Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$.

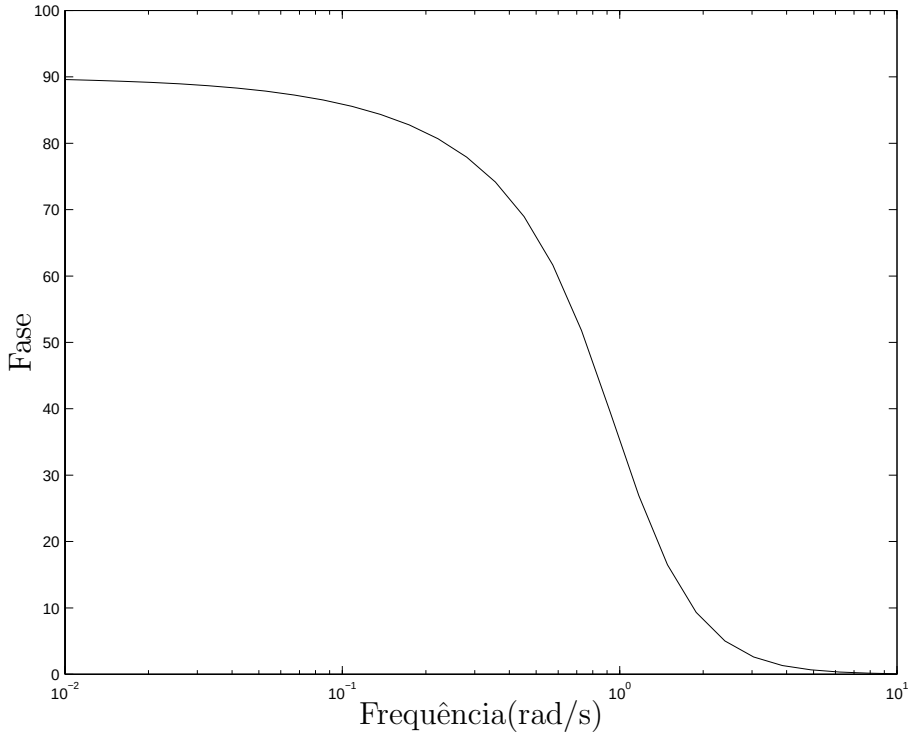


Figura 16: Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$.

grande atenuação do sinal de perturbação. A Figura 17 ilustra a resposta em freqüência da função de transferência $Y(s)/W(s)$, em módulo.

Para a atenuação do ruído, o problema de otimização fornece o seguinte valor do parâmetro M de modificação dos zeros:

$$M = \begin{bmatrix} 4487,0102 \\ -1,0895 \end{bmatrix}$$

Os pólos da planta do sistema foram alocados dentro da região estabelecida, limitadas por q, r e α, no lado esquerdo do plano S, com os valores: $s = -0,7071 \pm j0,7071$ e os pólos do estimador alocados em $s = -5623,4132 \pm j5623,4132$. Os zeros do sistema de malha fechada foram alocados em: $z = -1826,1276$ e $-7564,0363$, como mostra a Figura 18.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = sen(0,1t)$, sendo o resultado final ilustrado na Figura 19, apresentando-se uma boa atenuação do sinal de distúrbio presente na saída da planta. Para alguns exemplos, não ocorre rastreamento com a utilização dessa metodologia, devido à falta do ponderador de freqüência.

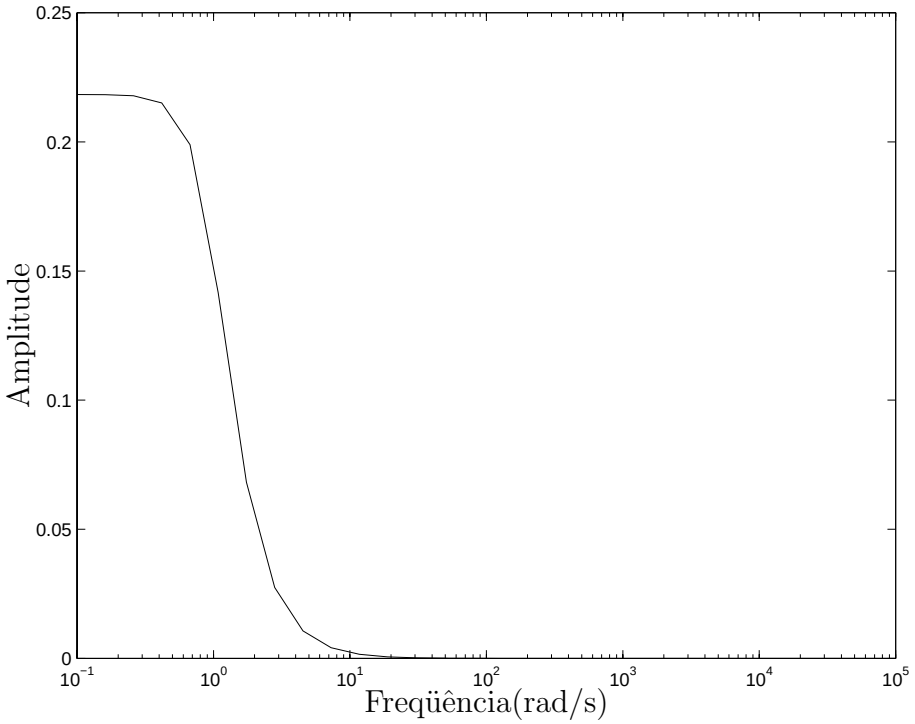


Figura 17: Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$.

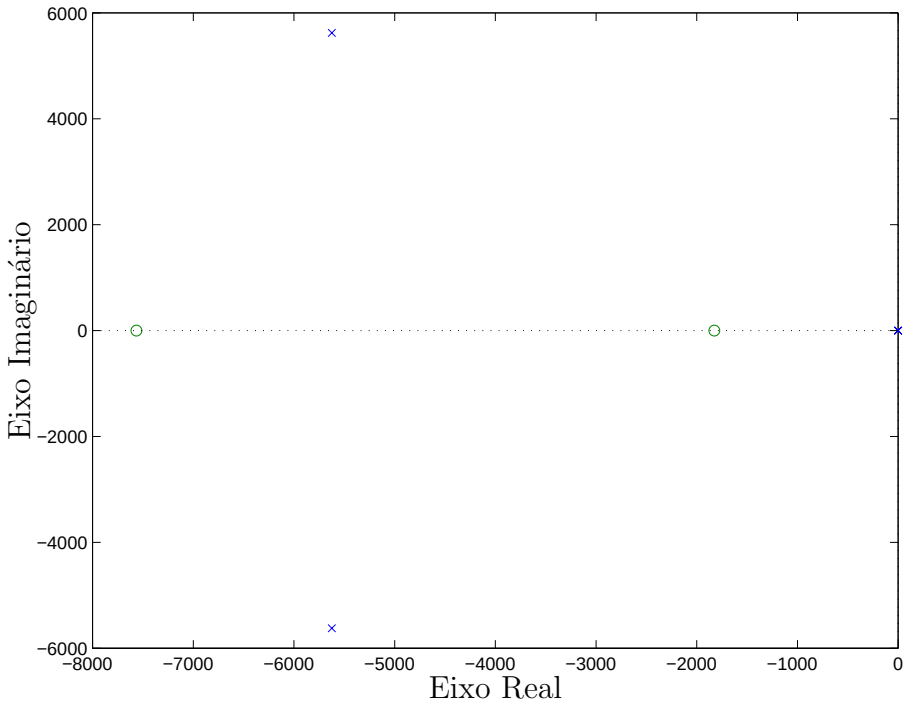


Figura 18: Mapeamento de pólos e zeros. Pólos da planta e, posteriormente, com a inserção do estimador.

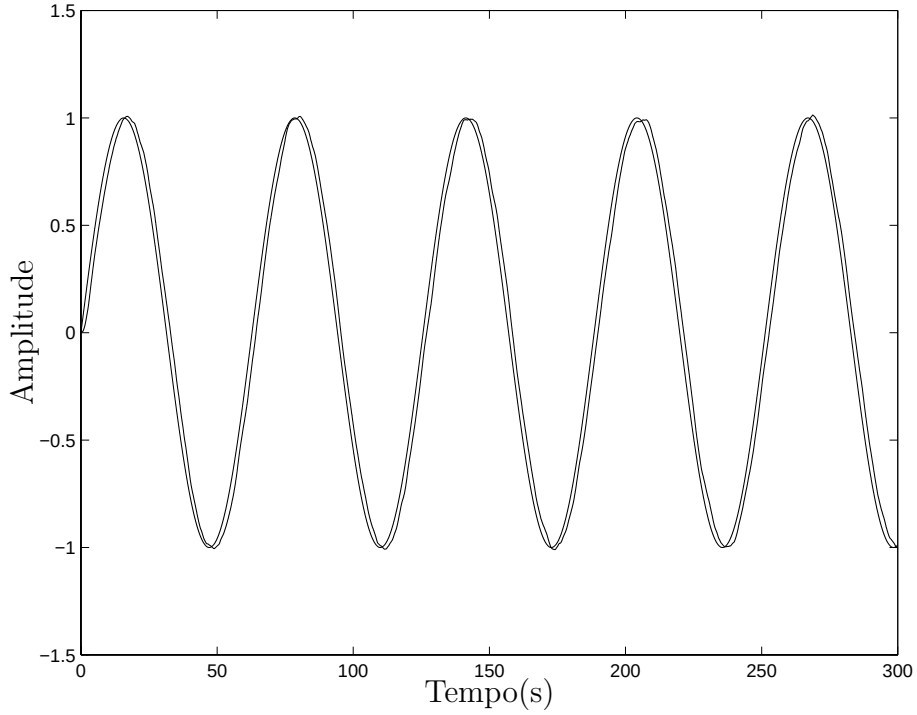


Figura 19: Resposta final do sistema: sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos.

4.3 Exemplo 3

Neste exemplo, considera-se um sistema linear invariante no tempo de terceira ordem e projeta-se um rastreador de sinais e um atenuador dos efeitos dos sinais de distúrbio, com o acréscimo de um filtro para baixas freqüências, como ilustra a Figura 20. Seja o sistema representado em variáveis de estado, descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,15 & -0,305 & -0,01 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.3)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ é um sinal de perturbação acrescentado ao sistema.

O Filtro passa-baixa $F_1(s)$ acrescentado é dado por:

$$F_1(s) = \frac{1}{500s^3 + 400s^2 + 300s + 100}$$

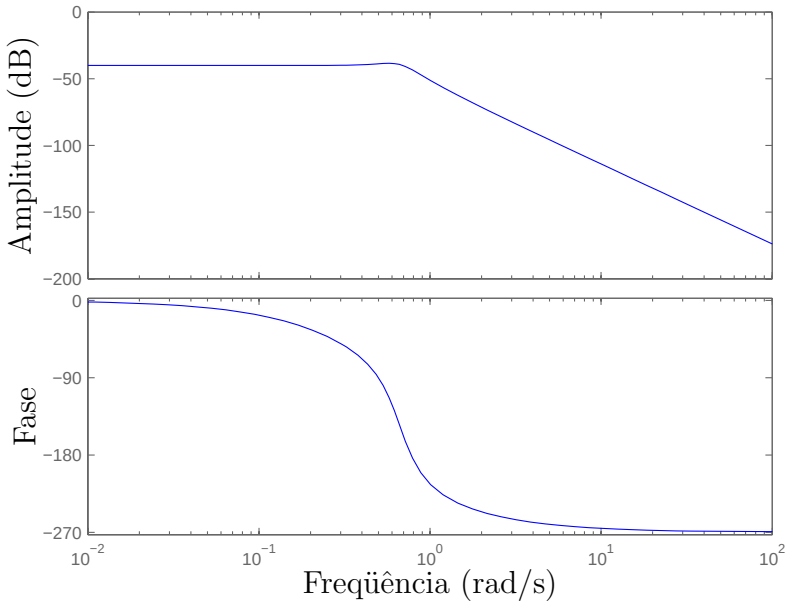


Figura 20: Diagrama de Bode do Filtro F_1.

A estrutura utilizada para esse problema é a dada pela Figura 5, com realimentação dinâmica da saída do sistema. Para o sistema descrito em (4.3) e adotando valores as variáveis que limitam a alocação dos pólos, $q = 0$ e $r_o = 22$, projeta-se um compensador $K_p(s)$, para minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando-se a equação (3.8). Na seqüência obtem-se, através do controlador projetado, o ganho M, que modifica os zeros do sistema para a rejeição de um distúrbio presente na saída do sistema, minimizando-se a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$, conforme descrito em (3.10).

O compensador $\mathcal{H}_\infty$ projetado para este sistema, que dá-se na forma de função de transferência, é dado por:

$$K_p(s) = \frac{-0,6709s^2 - 2,5796s - 1,0976}{0,0001s^3 + 0,0046s^2 + 0,1032s + 1,1228}$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ atingida no projeto, para a freqüência limitada pelo filtro de $0{,}1rad/s$, é $0,0126$, implicando que o rastreador opera adequadamente. A Figura 21 ilustra a atuação do rastreador na freqüência determinada, e observa-se que a norma $\mathcal{H}_\infty$ foi minimizada, apresentando-se assim, um comportamento adequado do rastreador de sinais. Na Figura 22 pode-se observar o gráfico de defasagem de $R(s)$ para $E(s)$.

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é $1,3197$, o que implica em uma atenuação do sinal de perturbação. A Figura 23 ilustra a resposta em freqüência da função de transferência $Y(s)/W(s)$, em módulo.

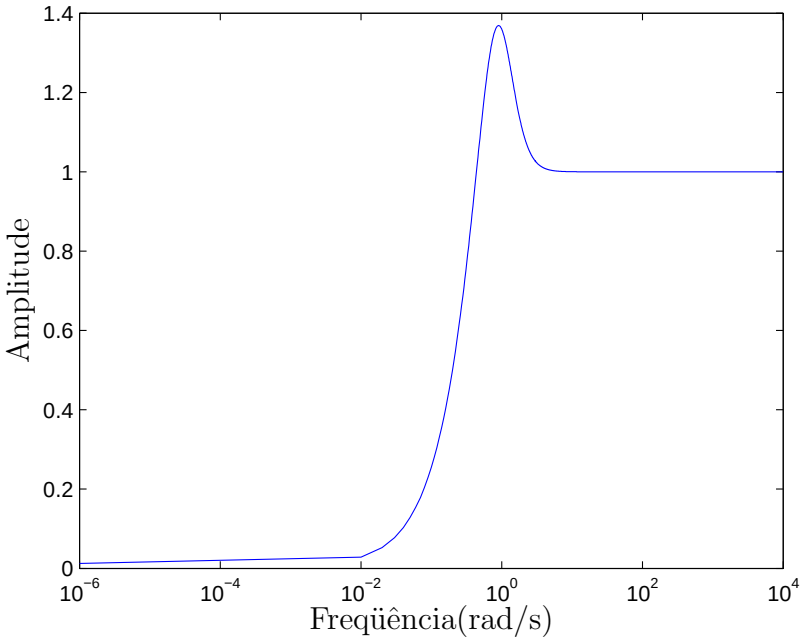


Figura 21: Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$.

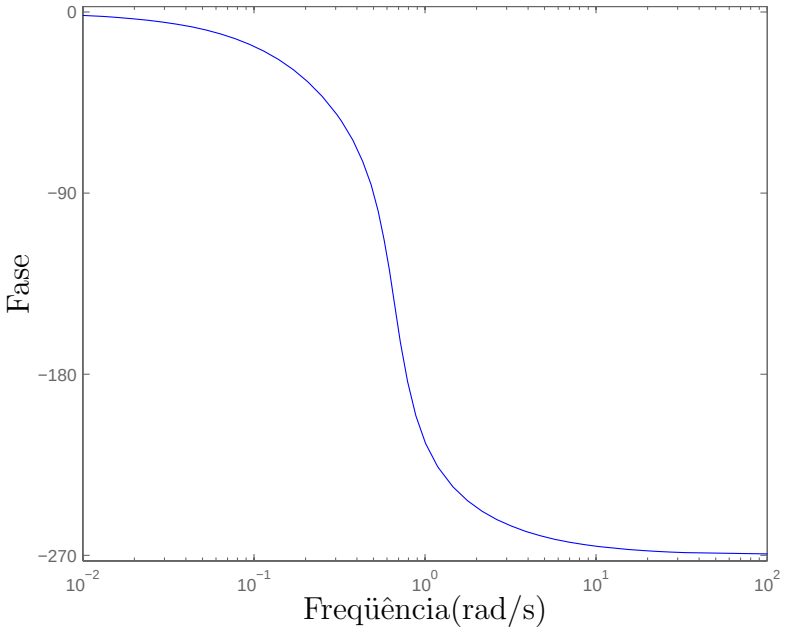


Figura 22: Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$.

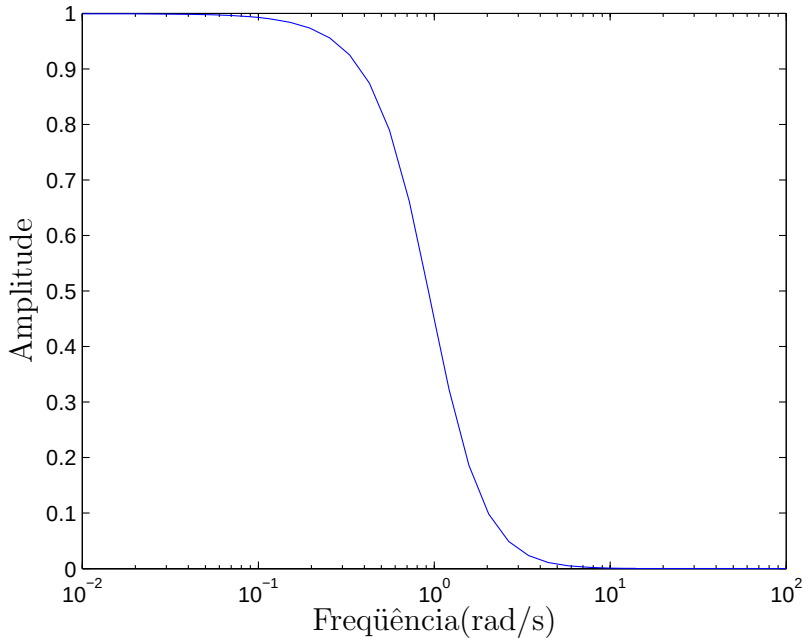


Figura 23: Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$.

Para a atenuação do ruído, o problema de otimização fornece o seguinte valor do parâmetro M de modificação dos zeros:

$$M = \begin{bmatrix} -0,0078 \\ -0,0446 \\ 0,2618 \end{bmatrix}$$

Os pólos do sistema foram alocados dentro da região estabelecida, limitadas por q e r_o, no lado esquerdo do plano S, com os valores: $s = -11,8776 \pm j18,5181; -22; -1,1715$ e $-0,7503 \pm j0,5709$. Os zeros do sistema de malha fechada foram alocados em: $-8,9571 \pm j18,0439$ e $-27,3045$, como pode-se verificar na Figura 24

Para a simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = sen(0,1t)$, considerando um sinal de ruído com amplitude igual a 1. O resultado final ilustrado na Figura 25 e a resposta obtida, como pode-se verificar, apresenta uma boa atenuação do sinal de distúrbio presente na saída da planta.

Como pode-se observar na Figura 25, o efeito do sinal de distúrbio na saída foi atenuado, ocorrendo uma pequena defasagem devido ao mínimo erro presente. Porém, o controlador atuou no sistema de forma que o efeito do sinal de distúrbio fosse reduzido, comprovando a eficiência da metodologia apresentada, principalmente em relação à possibilidade da inserção do ponderador de freqüência, dando ao projetista a flexibilidade da

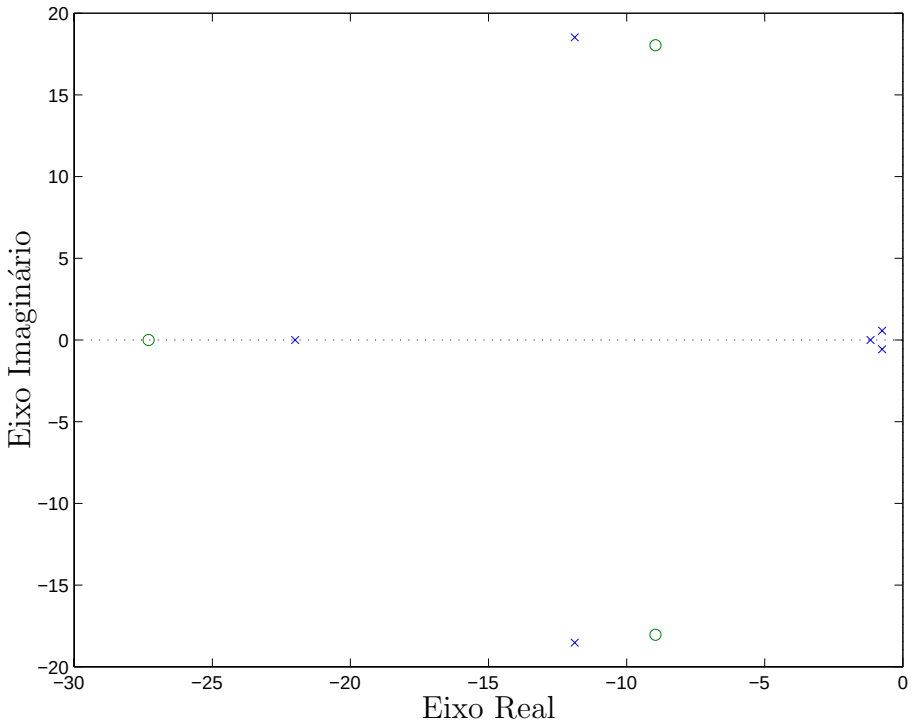


Figura 24: Mapeamento de pólos e zeros do sistema.

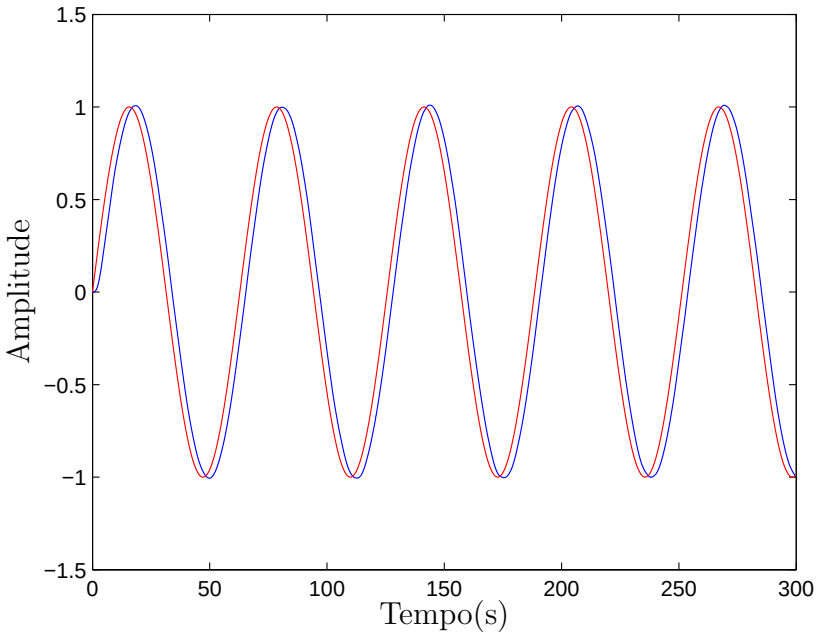


Figura 25: Resposta final do sistema: sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos.

escolha da freqüência de atuação do rastreador.

4.4 Exemplo 4

Neste exemplo, considera-se um sistema linear invariante no tempo de terceira ordem e projeta-se um rastreador de sinais e um atenuador dos efeitos dos sinais de distúrbio, com o acréscimo de um filtro passa-faixa, como ilustra a Figura 26. Seja o sistema representado em variáveis de estado, descrito por:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \qquad (4.4)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

sendo $x(t)$ o vetor de estados, $u(t)$ o sinal de controle e $w(t)$ é um sinal de perturbação acrescentado ao sistema.

O Filtro passa-baixa $F_2(s)$ acrescentado é dado por:

$$F_2(s) = \frac{1s^2 + 100s}{1s^3 + 100s^2 + 100s + 1}$$

A estrutura utilizada para esse problema é a dada pela Figura 5, com realimentação dinâmica da saída do sistema. Para o sistema descrito em (4.4) e adotando valores as variáveis que limitam a alocação dos pólos, $q = 10$ e $r_o = 40$, projeta-se um compensador $K_p(s)$, para minimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ utilizando-se a equação (3.8). Na seqüência obtem-se, através do controlador projetado, o ganho M, que modifica os zeros do sistema para a rejeição de um distúrbio presente na saída do sistema, minimizando-se a norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$, conforme descrito em (3.10).

O compensador $\mathcal{H}_\infty$ projetado para este sistema, que dá-se na forma de função de transferência, é dado por:

$$K_p(s) = \left(\frac{0,5843s^2 - 1,8884s - 1,0593}{0,0001s^3 + 0,0010s^2 + 0,0465s + 1,0335} \right) \times 10^5$$

A norma $\mathcal{H}_\infty$ de $r(t)$ para $e(t)$ atingida no projeto, para a freqüência limitada pelo

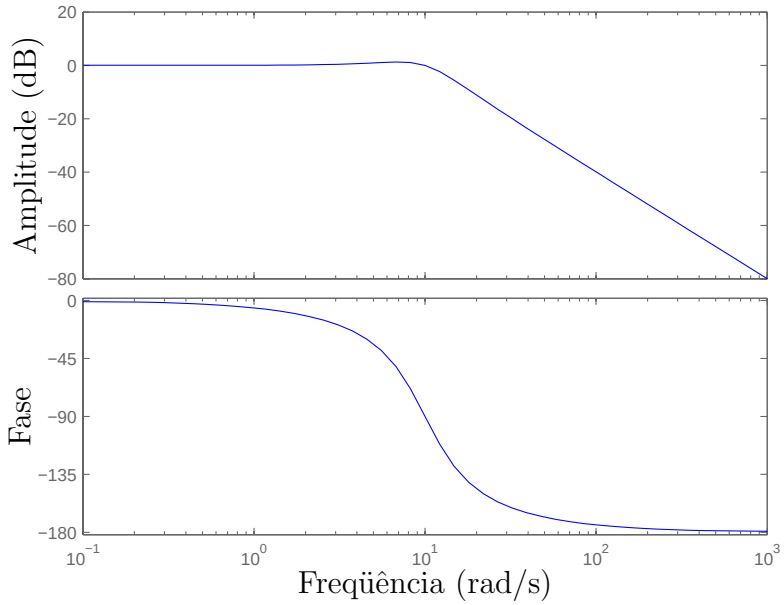


Figura 26: Diagrama de Bode do Filtro F_2.

filtro, é 0,0244, implicando que o rastreador opera adequadamente. A Figura 27 ilustra a atuação do rastreador na freqüência determinada, e observa-se que a norma $\mathcal{H}_\infty$ foi minimizada, apresentando-se assim, um comportamento adequado do rastreador de sinais. Na Figura 28 pode-se observar o gráfico de defasagem de $R(s)$ para $E(s)$.

A norma $\mathcal{H}_2$ de $w(t)$ para $y(t)$ atingida no projeto é $0,7477$, o que implica em uma boa atenuação do sinal de perturbação. A Figura 29 ilustra a resposta em freqüência da função de transferência $Y(s)/W(s)$, em módulo.

Para a atenuação do ruído, o problema de otimização fornece o seguinte valor do parâmetro M de modificação dos zeros:

$$M = \begin{bmatrix} -0,0006 \\ 0,0035 \\ 0,3297 \end{bmatrix} \times 10^{-8}$$

Os pólos do sistema foram alocados dentro da região estabelecida, limitadas por q e r_o, no lado esquerdo do plano S, com os valores: $s = -50,0000; -25,8288 \pm j36,7349; -0,5385 \pm j1,4434$ e $-0,4427$. Os zeros do sistema de malha fechada foram alocados em: $-51,8$ e $-24,6 \pm 37,1$, como pode-se verificar na Figura 30.

Para a simulação considera-se um sinal de entrada $r(t) = sen(0,1t)$, considerando um sinal de ruído com amplitude igual a 1. O resultado final ilustrado na Figura 31

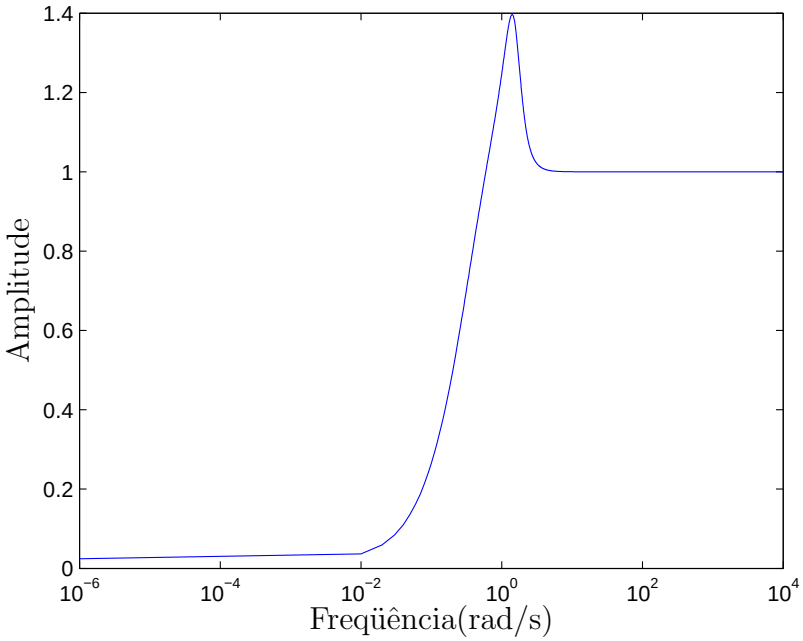


Figura 27: Resposta em freqüência $E(s)/R(s)$.

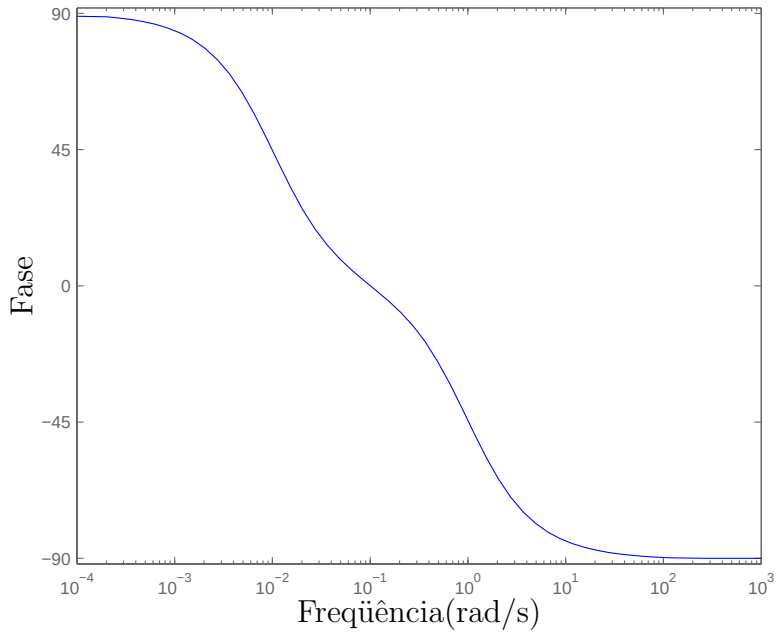


Figura 28: Gráfico de defasagem de $E(s)/R(s)$.

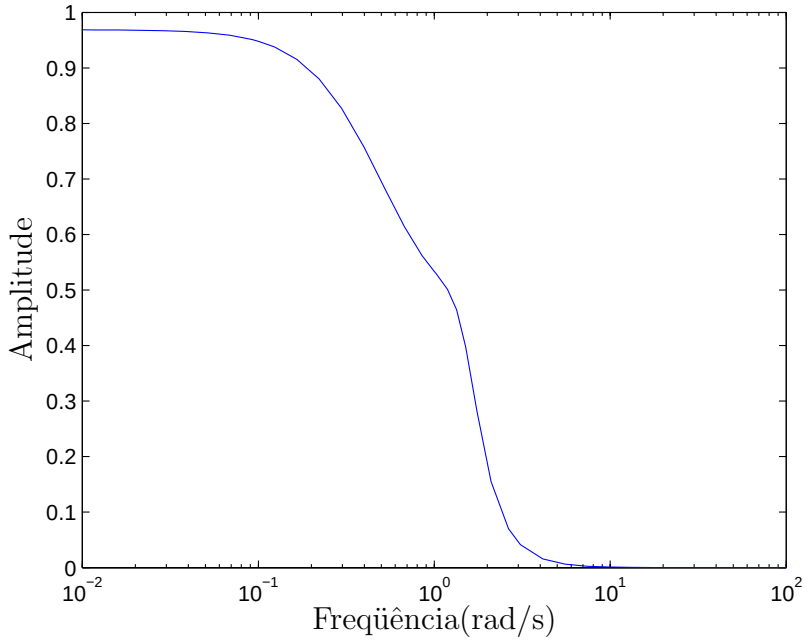


Figura 29: Resposta em freqüência de $Y(s)/W(s)$.

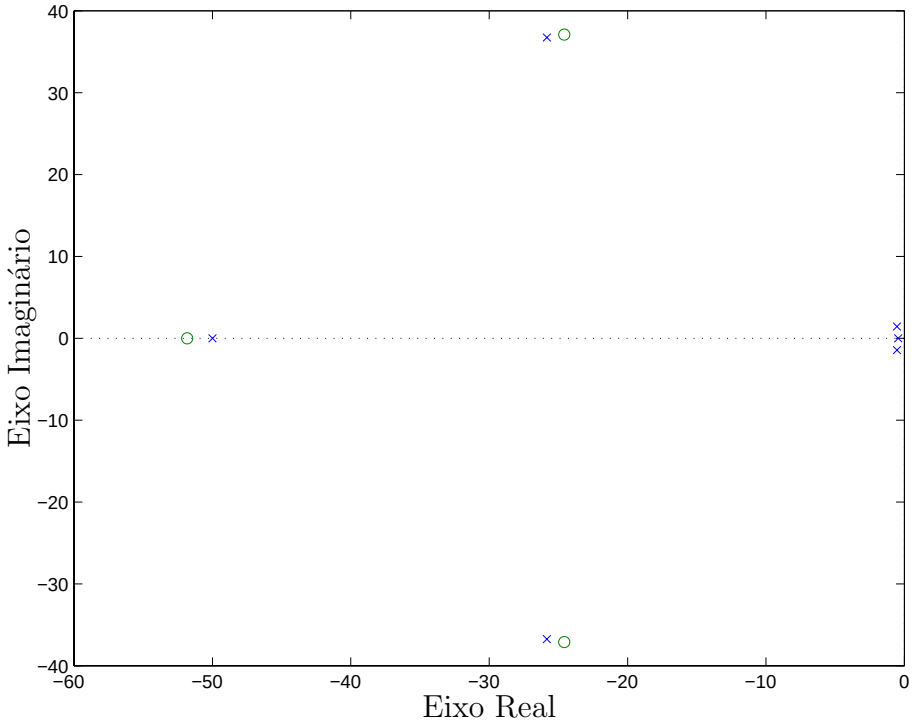


Figura 30: Mapeamento de pólos e zeros do sistema.

e a resposta obtida, como pode-se verificar, apresenta uma boa atenuação do sinal de distúrbio presente na saída da planta.

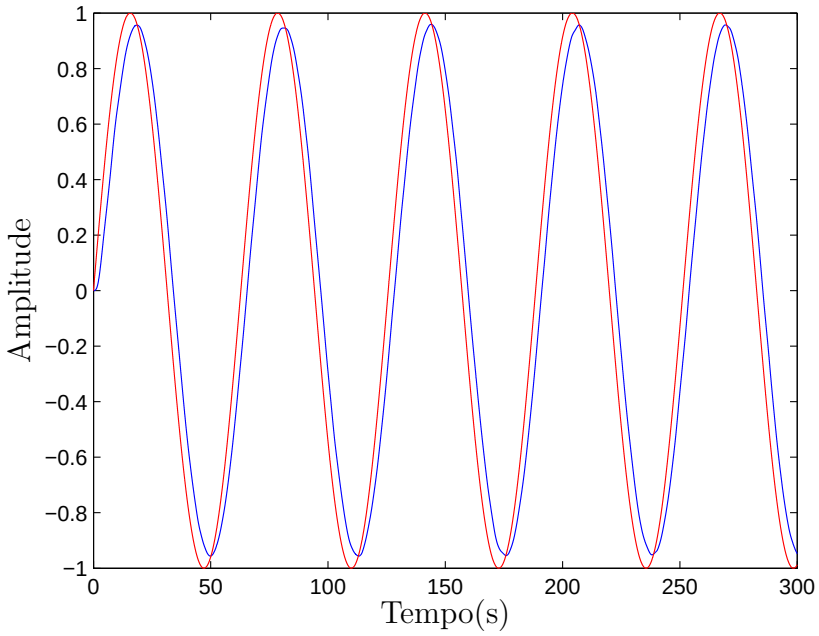


Figura 31: Resposta final do sistema: Sinais de referência e de saída praticamente sobrepostos.

Como pode-se observar na Figura 31, o efeito do sinal de distúrbio na saída foi atenuado, ocorrendo uma pequena defasagem devido ao mínimo erro presente. Porém, o controlador atuou no sistema de forma que o efeito do sinal de distúrbio fosse reduzido, comprovando a eficiência da metodologia apresentada, principalmente, em relação à possibilidade da inserção do ponderador de freqüência, dando ao projetista a flexibilidade da escolha da freqüência de atuação do rastreador.

5 Conclusão

Desenvolveu-se nesse trabalho de pesquisa uma metodologia para resolução de problemas de atenuação do efeito do sinal de distúrbio na saída da planta de um sistema de controle. Considerando-se o sistema ilustrado na Figura 1, pode-se otimizar a norma $\mathcal{H}_\infty$ da função de transferência de $r(t)$ para e(t) e também a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência entre $w(t)$ e $y(t)$. Pode-se obter um controlador K, que minimiza a norma $\mathcal{H}_\infty$ entre o sinal referência e o sinal erro de rastreamento, através do valor desse compensador e de um ganho L do estimador. Desta maneira, cria-se um mecanismo através da modificação dos zeros, capaz de atenuar o efeito do sinal de distúrbio na saída da planta. A fim de permitir ao projetista a criação de um seguidor de freqüência que funcione em uma determinada faixa desejada, tentou-se, sem sucesso, a inclusão do peso na freqüência nessa metodologia, devido ao surgimento de BMIs. Porém, devido à necessidade dessa flexibilidade, foi explorada, nesse trabalho, uma outra técnica que aborda realimentação dinâmica da saída ($K_p(s)$).

A nova proposta, usando o controlador dinâmico $K_p(s)$, evita o surgimento de bilinearidades na resolução das LMIs, como aconteceu na abordagem usando realimentação dos estados estimados. Entretanto, para que o mecanismo funcionasse de acordo com a formulação apresentada, propôs-se uma nova transformação linear de extrema importância para o problema, capaz de evitar a bilinearidade nessa metodologia, permitindo, assim, o acréscimo do peso na freqüência, e possibilitando a flexibilidade no projeto.

Deve-se considerar também que, estabelecendo-se uma breve comparação entre a metodologia aqui apresentada, onde utiliza-se a alocação de pólos para o rastreamento de sinais e a modificação dos zeros para a atenuação de distúrbios, e a proposta em (ANDREA, 2002), onde utiliza-se a alocação de pólos para a atenuação de distúrbios e a modificação dos zeros para o rastreamento de sinais, pode-se concluir que ambas metodologias obtiveram êxitos nas soluções de determinados problemas. Em algumas plantas, o uso dos zeros para a atenuação de distúrbios possui um melhor desempenho em relação ao uso dos pólos. Em outros sistemas, a eficácia não é a mesma, e o método proposto em (ANDREA, 2002) supera o trabalho de pesquisa aqui apresentado. A mesma consideração é feita para

o rastreamento de sinais, onde um método possuir baixa eficiência, o outro pode tornar-se solução do problema.

Os métodos de projetos são equacionados na forma de LMIs, com isso, pode-se facilmente resolver os problemas utilizando algoritmos presentes na literatura de convergência polinomial.

Referências

ANDREA, C. Q. *Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ com Alocação de Zeros para o Problema do Rastreamento Usando LMIs*. Unesp, Ilha Solteira, SP: Dissertação de Mestrado, 2002.

ANDREA, C. Q.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle Ótimo $\mathcal{H}_\infty$ e $\mathcal{H}_2$ para o Problema de Rastreamento de Sinais e Rejeição de Distúrbios com Modificação de Zeros Usando LMIs. In: *CBA 2004 - XV Congresso Brasileiro de Automática*. Gramado, RS, Brasil: [s.n.], 2004.

ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle Ótimo $\mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_\infty$ com Modificação de Zeros para o Problema de Rastreamento Usando LMIs. *SBA Controle e Automação*, v. 15, n. 4, p. 413–422, 2004.

ASSUNÇÃO, E.; PERES, P. L. D. Otimização Global para os Problemas de Redução $\mathcal{H}_2$ de Modelos e Reducão da Ordem do Controlador. *Revista Controle e Automação*, v. 12(2), p. 93–101, 2001.

BOYD, S. et al. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. [S.l.]: SIAM Studies in Apllied Mathematics, USA, 1994.

CHEN, C. T. *Linear system theory and design*. 3rd. ed. New York: Oxford, 1999. (The Oxford series in electrical and computer engineering).

CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: An lmi approach. *IEE Trans. Autom. Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.

COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; LOCATELLI, A. Control Theory and Design. In: *Academic Press*. San Diego CA USA: [s.n.], 1997.

DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de Controle Modernos: oitava edição*. [S.l.]: Rio de Janeiro, Brasil: LTC - Livros Técnicos e Cientícos Editora S.A., 2001.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; EMAMI-NAEINI, A. *Feedback Control of Dynamic Systems*. [S.l.]: USA: Addison Wesley, 1994.

GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J.; OLIVEIRA, M. C. $\mathcal{H}_2$-Norm Optimization with Contrained Dynamic Output Feedback Controllers: Decentralized and Reliable Control. *IEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 7, p. 1449–1454, 1999.

HAUKSDÓTTIR, A. S. Optimal Zeros for Model Reduction of Continuous-Time System. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Chicago IL USA: [s.n.], 2000. p. 1889–1893.

HERJOLFSSON, G.; EVARSSON, B. Zero Optimized Tracking for Linear Continuous-Time Systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. Portland OR USA: [s.n.], 2005. p. 1208–1213.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of ASME - Journal of Basic Engineering*, v. 82, p. 35–45, 1960.

LIAO, F.; WANG, J. L.; YANG, G. Reliable robust flight tracking control: an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 10(1), p. 76–90, 2002.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária*. [S.l.]: 4^{th}IMPA, 2000.

MOORE, K. L.; BHATTACHARYYA, S. P. A techinique for choosing zero locations for minimal overshoot. *IEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, n. 5, p. 577–580, 1990.

MURDOCH, P. Pole and zero assignment by state vector feedback. *Automatica*, v. 11, p. 199–201, 1975.

MURDOCH, P. Assignment of pole and zeros in a scalar transfer-function by state vector feedback. *Control System Design by Pole-Zero Assignment, Academic Press, New York*, p. 137–144, 1977.

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. [S.l.]: New Jersey: Prentice-Hall, 1997.

PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; PERES, P. L. D. $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{H}_2$ Guaranteed Costs Computation for Uncertain Linear Systems. *International Journal of Systems Science*, v. 28, n. 2, p. 183–188, 1997.

PERES, P. L. D. *Controle $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$: Caracterização por Desigualdades Matriciais Lineares*. UNICAMP, Campinas, SP, Brasil: Tese de Livre Docência, 1997.

PIERRI, P. S. *Uma Técnica de Imposicão de Zeros para Auxílio em Projeto de Sistemas de Controle*. USP, São Paulo, SP, Brasil: Tese de Doutorado, 1999.

RADMAN, G. Design of a dynamic compensator for complete pole-zero placement. In: *Proceedings of the Twentieth Southeastern Symposium on System Theory*. [S.l.: s.n.], 1998. p. 176–177.

TU, M. C.; LIN, M. C. Robust stabilisation of multivariable feedback systems with desired performance requirement. *IEE Control Theory and Aplications*, v. 139, n. 3, p. 259–266, 1992.

VALENTIN, C.; DUC, G. LMI-Base Algorithms for Frequency Weigth Optimal $\mathcal{H}_2$ -norm Model Reduction. In: *36^{th} Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 767–772.