

CARLOS MASAKI UEMURA

ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA DE UM PROTÓTIPO DE TRELIÇA ESPACIAL

Guaratinguetá

2016

CARLOS MASAKI UEMURA

ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA DE UM PROTÓTIPO DE TRELIÇA ESPACIAL

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins

Co-orientador: Prof. Me. Fabrício Vieira Silva

Guaratinguetá

2016

U22a	<p>Uemura, Carlos Masaki Análise teórica e numérica de um protótipo de treliça espacial / Carlos Masaki Uemura – Guaratinguetá, 2016. 48 f : il. Bibliografia: f. 47-48</p> <p>Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2016. Orientador: Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins Coorientador: Prof. Me. Fabrício Vieira Silva</p> <p>1. Resistência de materiais 2. Modelos matemáticos 3. Método dos elementos finitos I. Título</p>
------	---

CDU 620.17

**unesp**  **UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**  
**“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”**  
**CAMPUS DE GUARATINGUETÁ**


**ANÁLISE TEÓRICA E NUMÉRICA DE UM PROTÓTIPO DE TRELIÇA  
ESPACIAL**

**CARLOS MASAKI UEMURA**

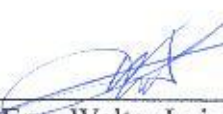
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE  
DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE “GRADUADO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA”  
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

  
Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**

  
Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins  
Orientador/UNESP-FEG

  
Prof. Ma. Erica Ximenes Dias  
UNESP-FEG

  
Prof. Eng. Walter Luiz Medeiros Tupinambá  
ETEC – Alfredo de Barros Santos

Dezembro de 2016

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço aos meus pais *Yassuo* e *Marina*, por terem me incentivado, apoiado nos momentos difíceis, sem eles eu não teria alcançado esta conquista. Aos meus irmãos, pela confiança, apoio e momentos de alegria.

Ao meu orientador, *Prof. Dr. Marcelo Sampaio Martins*, pelas oportunidades, amizade desde o início dessa jornada e muita paciência durante a realização deste trabalho. Assim como ao *Walter* e *Miller*, que muito fizeram por mim. Sou muito grato a todos.

A todos os amigos de república, dentre eles o *Alexandre Otávio*, *Felipe Gomes*, *Hélio Camarotto*, *Matheus Sona* e *Wilson Kioshi* que estiveram presente nesse último ano. Aos amigos *Alexandre Martuscelli*, *Carlo Macri*, *Gabriel Silva*, *Matheus Santos*, *Paola Fameli*, *Renata Magner*, *Rodrigo Verginelli* e *Vanessa Estefania* pelo companheirismo, pelas conversas, amizade e alegria.

A todos os professores que fizeram parte deste longo ciclo.

UEMURA, C. M. **Análise teórica e numérica de um protótipo de treliça espacial**. 2016. 48 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

## **RESUMO**

Ao longo dos anos, os alunos de engenharia têm dificuldades para assimilar aquilo que é visto na teoria e compreender fenômenos relacionados à resistência dos materiais. Há algumas formas para melhorar a visualização física do fenômeno como a criação de dispositivos didáticos, software para análises e competições. O uso de softwares poderá auxiliar quando o aluno se deparar com problemas mais complexos, sendo assim uma importante ferramenta didática. Neste trabalho será projetada uma treliça espacial que será usada como material de apoio para as disciplinas que envolvem resistência dos materiais e será feita uma modelagem numérica utilizando um software para comparar resultados calculados teoricamente.

**PALAVRAS-CHAVE:** Modelagem numérica. Elementos Finitos. Treliça espacial. Ferramenta didática.

UEMURA, C. M. **Theoretical and numerical analysis of a prototype space truss.** 2016. 48 f. Graduate Work (Graduate in Mechanical Engineering) – Faculdade Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2016.

### **ABSTRACT**

Over the years, engineering students have difficulties to assimilate what is seen in the theory and understand phenomena related to the strength of materials. There are some ways to improve the physical view of the phenomenon as the creation of didactic devices, software for analysis and competitions. The use of software may help when student is faced with complex problems, therefore an important teaching tool. In this work will be designed a space truss that will be used as collateral for disciplines involving strength of materials and numerical modeling will be done using software to compare results calculated theoretically.

**KEYWORDS:** Numerical modeling. Finite Element. Space truss. Teaching tool.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Telhado do pavilhão da São Paulo Expo .....	10
Figura 2 – Diagrama de corpo livre.....	12
Figura 3 – Forças atuantes .....	13
Figura 4 – Treliça plana.....	14
Figura 5 – Treliça com membros de força zero.....	15
Figura 6 – Treliça e diagrama de corpo livre.....	16
Figura 7 – Forças atuantes no membro.....	17
Figura 8 – Distribuição da tensão na seção .....	17
Figura 9 – Estruturas em treliça de espaguete .....	18
Figura 10 – MODELO PAcR.....	19
Figura 11 – Prova de carga da treliça .....	19
Figura 12 – Deformação de um fio sob tração .....	20
Figura 13 – Ponte de <i>Wheatstone</i> .....	21
Figura 14 – Circuitos em série.....	21
Figura 15 – Esquema de um extensômetro.....	23
Figura 16 – Célula de carga de compressão .....	23
Figura 17 – Célula de carga de tração e compressão.....	24
Figura 18 – Célula de carga de flexão .....	24
Figura 19 – Malha de Elementos Finitos.....	25
Figura 20 – Tipos de Elementos Finitos.....	25
Figura 21 – Maquete em madeira e poliestireno .....	26
Figura 22 – Maquete do nó em papel Paraná .....	27
Figura 23 – Nó em chapa de aço .....	27
Figura 24 – Bloco de aço para a fixação da célula de carga.....	28
Figura 25 – Esboço em AutoCAD do nó 1 e 4.....	28
Figura 26 – Esboço em AutoCAD do nó 2 e 3.....	29
Figura 27 – Tela principal do ANSYS .....	30
Figura 28 – Janela de seleção do elemento <i>LINK</i> .....	30
Figura 29 – Janela para definir a área da seção transversal.....	31
Figura 30 – Janela para entrada das propriedades do material .....	31
Figura 31 – Janela para a entrada das coordenadas dos nós .....	32
Figura 32 – Janela para atribuir características ao elemento <i>LINK</i> .....	32

Figura 33 – Modelo da estrutura treliçada.....	33
Figura 34 – Janela para definir restrições.....	33
Figura 35 – Janela para definir o carregamento .....	34
Figura 36 – Janela com as reações dos nós .....	34
Figura 37 – Janela para a análise de esforços.....	35
Figura 38 – Janela de com os esforços .....	35
Figura 39 – Força no membro .....	36
Figura 40 – Tensão no membro.....	36
Figura 41 – Deflexão .....	37
Figura 42 – Janela de configuração da solução nodal .....	37
Figura 43 – Coordenada adotada para o problema.....	38
Figura 44 – Diagrama de corpo livre do nó 4.....	38
Figura 45 – Diagrama de corpo livre do nó 1 .....	39
Figura 46 – Diagrama de corpo livre do nó 2.....	40

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coordenadas dos nós .....	32
Tabela 2 – Reações para um carregamento de 100N.....	42
Tabela 3 – Reações para um carregamento de 150N.....	42
Tabela 4 – Reações para um carregamento de 200N.....	42
Tabela 5 – Reações devido à aproximação dos ângulos.....	43
Tabela 6 – Esforços nos membros.....	43
Tabela 7 – Esforço devido à aproximação dos ângulos.....	44
Tabela 8 – Tensões nos membros.....	44
Tabela 9 – Tensão devido à aproximação dos ângulos .....	44
Tabela 10 – Deflexão no ponto de aplicação da carga .....	45

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS.....	11
1.2 OBJETIVOS.....	11
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>12</b>
2.1 TRELIÇAS .....	12
<b>2.1.1 Análise das treliças pelo método dos nós .....</b>	<b>12</b>
<b>2.1.2 Análise das treliças pelo método das seções .....</b>	<b>13</b>
<b>2.1.4 Tensão normal média .....</b>	<b>16</b>
2.2 DISPOSITIVOS DIDÁTICOS.....	18
2.4 CÉLULA DE CARGA .....	22
2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	24
<b>3 MATERIAL E MÉTODOS .....</b>	<b>26</b>
3.1 PROJETO E MAQUETE .....	26
3.2 ANÁLISE NUMÉRICA.....	29
<b>3.3.1 Forças e reações .....</b>	<b>38</b>
<b>3.3.2 Tensões.....</b>	<b>40</b>
<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>42</b>
4.1 REAÇÕES NOS APOIOS .....	42
4.2 ESFORÇOS NOS MEMBROS.....	43
4.3 DEFLEXÃO .....	45
<b>5 CONCLUSÃO.....</b>	<b>46</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>47</b>

## 1 INTRODUÇÃO

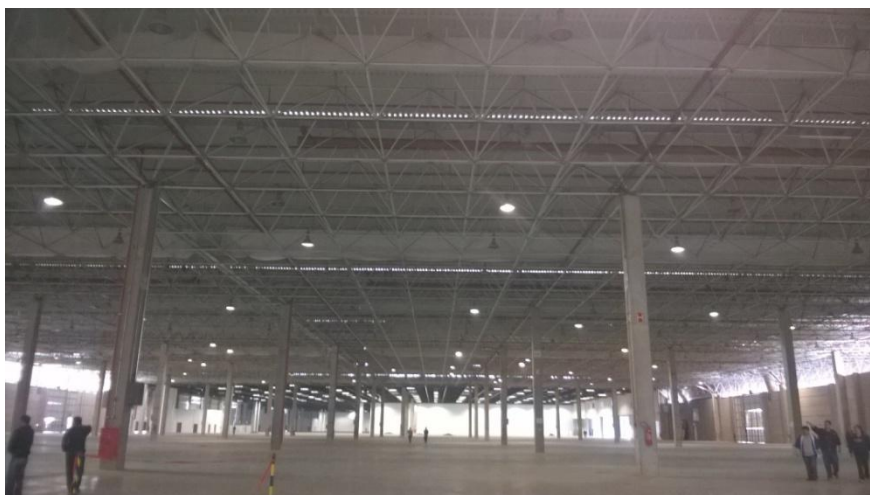
As treliças, usualmente, são estruturas estacionárias totalmente vinculadas e projetadas para suportar cargas, sendo assim, um dos principais tipos de estruturas da engenharia por fornecer, ao mesmo tempo, praticidade e economia em muitas situações como em pontes e edifícios. Uma treliça consiste unicamente por elementos retilíneos conectados em juntas apenas nas extremidades de cada elemento, assim atuam duas forças de mesmo módulo e direção, porém em sentidos opostos (BEER, 1991).

Podemos classificar as treliças em planas e espaciais. Uma treliça plana consiste em membros ligados pelas extremidades para formar uma estrutura bidimensional estável. A estruturação mais simples que forneça uma rigidez e estabilidade é a de um triângulo. Então, uma treliça plana e simples é constituída a partir de triângulo básico ao qual é conectado a mais membros para formar um elemento triangular adicional. Observa-se que a cada dois membros adicionados, um novo nó é acrescentado à treliça.

A treliça espacial é uma estrutura tridimensional estável formada por membros ligados pelas suas extremidades. De uma maneira similar a treliça simples, uma estruturação estável e rígida mais simples é a de um tetraedro, formado por seis membros e quatro nós, assim adicionando-se três membros, um novo nó é acrescentado à treliça (HIBBELER, 2013).

Na Figura 1 vemos uma estrutura formada por tetraedros que sustenta o telhado de um dos pavilhões da São Paulo Expo.

Figura 1 - Telhado do pavilhão da São Paulo Expo



Fonte: (Própria, 2016)

## 1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

Valdiero et al. (2011) cita a dificuldade, vista aos longos dos anos no curso de engenharia, dos alunos em visualizar e compreender fenômenos relacionados aos problemas de resistência dos materiais. Comenta-se a respeito das formas didáticas encontradas para diminuir essa dificuldade como uso de dispositivos ou bancadas para ensaio de pórticos, inúmeros recursos computacionais, softwares para análise através do método de elementos finitos e também por meio de competições entre alunos.

Uma pesquisa sobre a verificação da necessidade de dispositivos didáticos para o ensino na graduação em engenharia mecânica feita por Bortolo e Linhares (2006), mostra que uma das disciplinas cujo aprendizado tem alto grau de dificuldade é Resistência dos Materiais, assim como Estática. Muitas vezes os alunos não conseguem assimilar o que é visto na teoria, para isso o uso de dispositivos didáticos físicos ou virtuais auxiliam na construção do conhecimento através da visualização física do fenômeno.

Barrios e Angelo (2007) sugerem uma complementação didática através da técnica numérica de solução de equações diferenciais parciais, conhecida como Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF simula computacionalmente estruturas planas, espaciais e de geometrias complexas. O uso de software representa visualmente gráficos tridimensionais das estruturas que se deseja estudar, além de ser muito útil em casos onde se tem geometria complexa, tendo assim uma vantagem pedagógica quando se quer sedimentar o conhecimento adquirido tradicionalmente.

Outra forma de estimular o aprendizado é através de competições como, por exemplo, o Concurso de Pontes que ocorre anualmente na UNESP – Campus Guaratinguetá durante a Semana de Ciência e Tecnologia, onde alunos devem construir uma ponte utilizando varetas de madeira.

## 1.2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo projetar, modelar numericamente uma estrutura espacial treliçada para fins didáticos que será usada como material de apoio no curso de engenharia mecânica na UNESP – Campus de Guaratinguetá.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

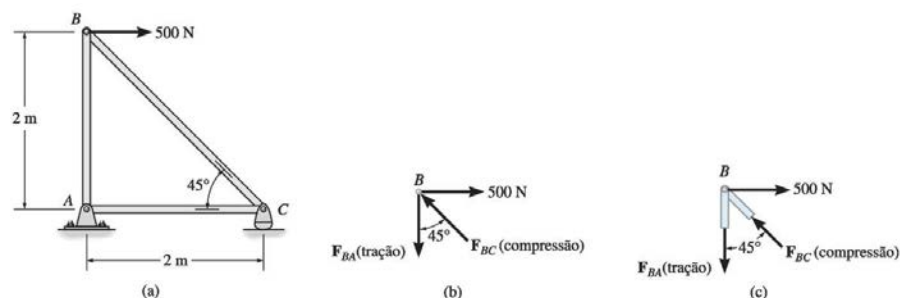
### 2.1 TRELIÇAS

#### 2.1.1 Análise das treliças pelo método dos nós

O método dos nós se baseia na condição de que se a treliça está em equilíbrio, cada um dos nós também estará em equilíbrio. Logo, se desenharmos o diagrama de corpo livre de cada nó, podemos obter as forças do membro agindo em cada nó através das equações de equilíbrio das forças. Numa treliça plana, os membros são retos e duas forças situados num único plano, então em cada nó existe um sistema de forças coplanar e concorrentes. Logo, apenas as condições  $\Sigma F_x = 0$  e  $\Sigma F_y = 0$  devem ser satisfeitos para o equilíbrio (HIBBELER, 2011).

Por exemplo, considerando o pino no nó B da treliça na Figura 2.a, haverá três forças atuantes sobre o pino, a força de 500N e as forças exercidas pelos membros BA e BC. No diagrama do corpo livre que está representado na Figura 2.b,  $F_{BA}$  está ‘puxando’ o pino, logo o membro BA está sob tração, enquanto o  $F_{BC}$  está ‘empurrando’ o pino, logo o membro BC está sob compressão. Podemos observar tais efeitos isolando o nó com pequenos segmentos dos membros conectados no pino (Figura 2.c). O ‘empurrão’ e ‘puxão’ nesses segmentos indica esses efeitos de compressão ou tração no membro.

Figura 2 – Diagrama de corpo livre



Fonte: (HIBBELER, 2011)

No método dos nós, começa-se num nó que tenha uma força conhecida e no máximo duas forças incógnitas, como na Figura 2.b. Assim, as aplicações de  $\Sigma F_x = 0$  e  $\Sigma F_y = 0$  resultam em duas equações algébricas que podem ser resolvidas para as duas incógnitas.

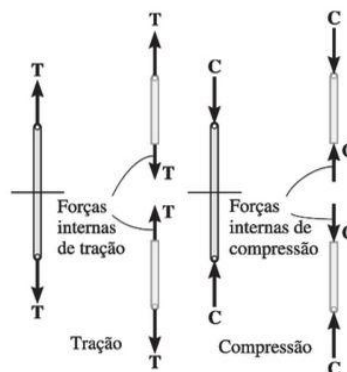
Aplicando as equações, podemos determinar o sentido correto de uma força incógnita por observação. Por exemplo, na Figura 2.b  $F_{BC}\text{sen}45^\circ$  precisa se equilibrar com a força de 500N ( $\Sigma F_x = 0$ ), logo  $F_{BC}$  deve empurrar o pino (compressão). Analogamente,  $F_{BA}$  é uma força de tração, pois se equilibra com a componente vertical  $F_{BC}\text{cos}45^\circ$  ( $\Sigma F_y = 0$ ). Quando uma treliça é mais complexa, podemos assumir o sentido da força do membro incógnito e aplicar as equações de equilíbrio, após isso o sentido pode ser verificado pelos resultados numéricos. Um resultado positivo indica que o sentido assumido está correto enquanto um resultado negativo indica que o sentido representado no diagrama de corpo livre deve ser invertido.

Para facilitar, sempre considere que as forças do membro incógnito atuam sob tração, ou seja, as forças estarão ‘puxando’ o nó. Assim, obterá resultados positivos para membros sob tração e negativos para membros sob compressão. Sabendo-se da intensidade e sentido corretos das forças, usa-se no diagrama de corpo livre para os nós subsequentes (HIBBELER, 2011).

### 2.1.2 Análise das treliças pelo método das seções

O método das seções pode ser utilizado quando precisamos encontrar uma força em um determinado membro de uma treliça. O princípio deste método é de que se uma treliça estiver em equilíbrio, qualquer segmento dela também estará em equilíbrio. Por exemplo, considere dois membros da treliça ao lado esquerdo da Figura 3. Cortando cada membro em duas partes, podemos ‘expor’ cada força interna como ‘externa’ de acordo com o diagrama de corpo livre do lado direito da Figura 3. Por observação concluímos que o equilíbrio requer que o membro sob tração esteja sujeito a um ‘puxão’ e o membro sob compressão esteja sujeito a um ‘empurrão’.

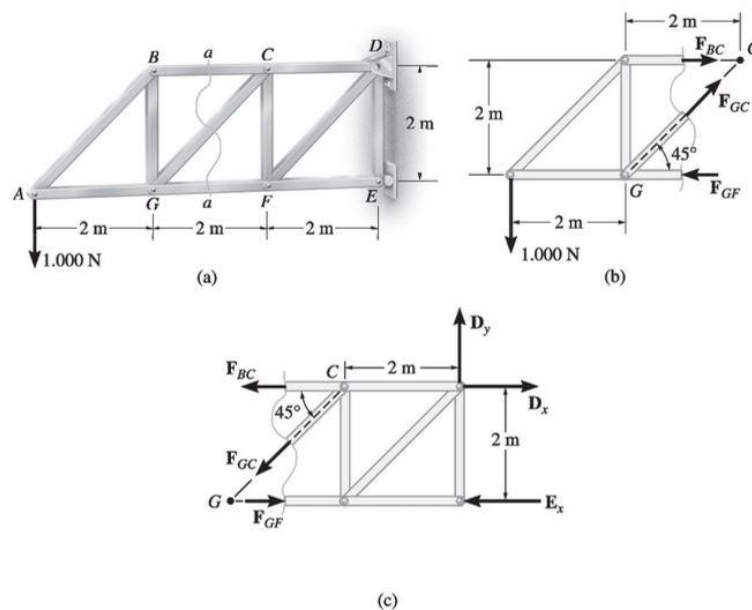
Figura 3 – Forças atuantes



Fonte: (HIBBELER, 2011)

Também podemos usar o método das seções para ‘cortar’ ou seccionar os membros de uma treliça inteira. Com a seção passando pela treliça e o diagrama de corpo livre de qualquer das duas partes desenhado, podemos aplicar as equações de equilíbrio para determinar as forças do membro na ‘seção do corte’. Como podemos aplicar apenas três equações de equilíbrio independentes ( $\sum F_x = 0$ ,  $\sum F_y = 0$ ,  $\sum M_o = 0$ ) ao diagrama de corpo livre de qualquer segmento, então escolheríamos uma seção que geralmente não passe por mais que três membros em que as forças são incógnitas. Considerando a Figura 4.a, se devemos determinar as forças nos membros BC, GC e GF, a seção *aa* será mais apropriada. As Figuras 4.b e 4.c mostram o diagrama de corpo livre dos dois segmentos. Observamos que a linha de ação das forças segue a geometria da treliça, pois a força em cada membro está ao longo de seu eixo. Notamos também que as forças de membro que agem numa parte da treliça são iguais, porém opostas àquelas que agem na outra parte conforme a terceira lei de Newton. Os membros BC e GC estão sob tração, pois estão sujeitos a um ‘puxão’, enquanto o membro GF está sob compressão, pois está sujeito a um ‘empurrão’ (HIBBELER, 2011).

Figura 4 – Treliça plana



Fonte: (HIBBELER, 2011)

Podemos obter as três forças do membro incógnito  $F_{BC}$ ,  $F_{GC}$  e  $F_{GF}$  aplicando as três equações de equilíbrio ao diagrama de corpo livre na Figura 4.b. Se considerarmos o diagrama de corpo livre na Figura 4.c, precisamos conhecer as três reações de apoio  $D_x$ ,  $D_y$  e  $E_x$ . Isso pode ser feito considerando o diagrama de corpo livre da treliça inteira.

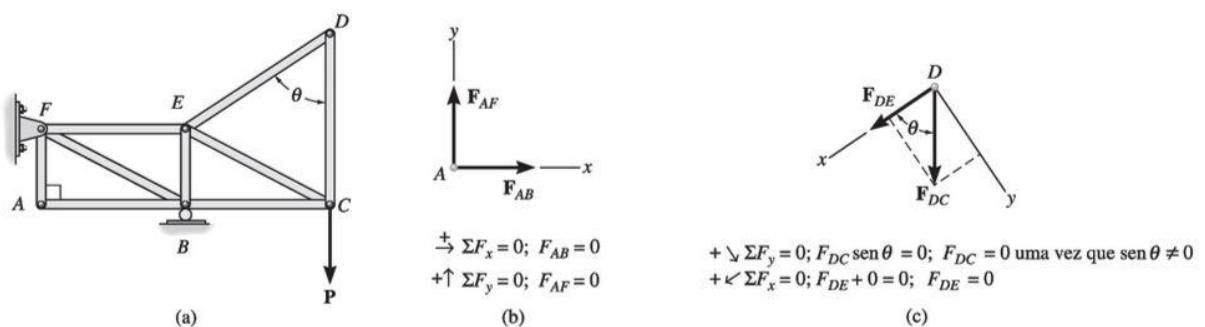
Devemos considerar, ao aplicar as equações de equilíbrio, maneiras de escrever as equações para conseguir uma solução direta para cada incógnita ao invés de resolver equações simultâneas. Por exemplo, pelo diagrama de corpo livre da Figura 4.b, a soma dos momentos em torno de C resultaria uma solução direta para  $F_{GF}$ , pois  $F_{BC}$  e  $F_{GC}$  criam um momento zero em torno de C. Podemos obter  $F_{BC}$  fazendo a soma dos momentos em torno de G e  $F_{GC}$  através da soma de forças na direção vertical, pois  $F_{GF}$  e  $F_{BC}$  não possuem componentes verticais (HIBBELER, 2011).

### 2.1.3 Membros de força zero

A análise pelo método dos nós pode ser simplificada quando forem identificados os membros que não suportam qualquer carregamento. Os membros de força zero são utilizados para dar mais estabilidade à treliça e fornecer um apoio adicional caso o carregamento seja alterado.

Geralmente, os membros de força zero podem ser determinados por observação de cada um dos nós. Por exemplo, considerando a Figura 5.a, se desenharmos o diagrama de corpo livre do pino no nó A (Figura 5.b), observamos que os membros AB e AF são membros de força zero. Caso fosse desenhado o diagrama de corpo livre dos nós B ou F não chegaríamos a essa conclusão, pois há cinco incógnitas em cada um desses nós. Desse mesmo modo, fazendo o diagrama de corpo livre do nó D (Figura 5.c), vemos que os membros DC e DE são membros de força zero. A partir dessas análises, concluímos que se apenas dois membros formam um nó da treliça e não há cargas externas ou reação de apoio aplicado ao nó, os dois membros só podem ser membros de força zero (HIBBELER, 2011).

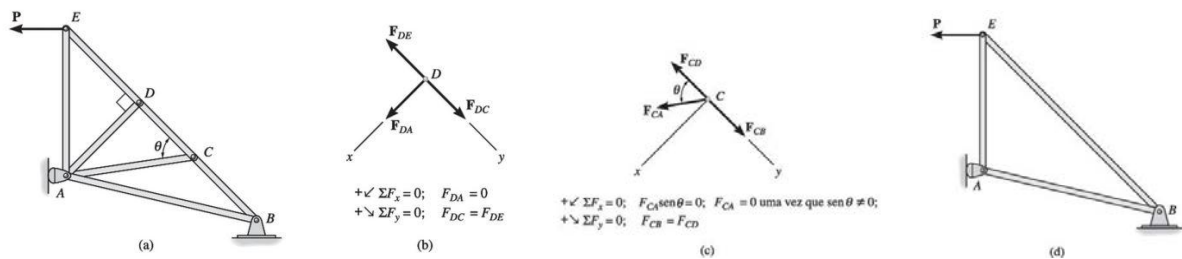
Figura 5 – Treliça com membros de força zero



Fonte: (HIBBELER, 2011)

Considerando a treliça da Figura 6.a, vemos no diagrama de corpo livre do pino no nó D (Figura 6.b) que o membro DA é um membro de força zero. Observamos também que no nó C (Figura 6.c), CA é um membro de força zero. Assim, se três membros formam um nó da treliça e dois deles são colineares e não há força externa ou reação de apoio aplicado ao nó, o terceiro membro é um membro de força zero. Portanto, treliça mostrada na Figura 6.d é adequada para suportar o peso P. (HIBBELER, 2011).

Figura 6 – Treliça e diagrama de corpo livre

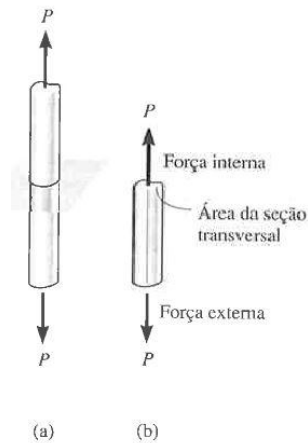


Fonte: (HIBBELER, 2011)

### 2.1.4 Tensão normal média

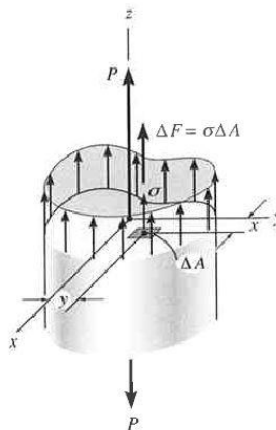
Elementos de treliça, pendurais e parafusos são elementos estruturais ou mecânicos frequentemente submetidos a cargas axiais geralmente aplicadas nas extremidades. A Figura 7.a mostra uma barra com uma carga axial que servirá de exemplo para a determinação da distribuição média de tensão que atua na seção transversal da barra. A seção é definida como área da seção transversal, se todas as seções transversais sejam iguais, esta é considerada prismática. Se o peso da barra for desprezado e seccionado como indicado, então para o corpo estar em equilíbrio, a resultante da força interna atuante na seção transversal deverá ser igual em intensidade, oposta em direção e colinear à força externa atuante na extremidade inferior da barra (Figura 7.b).

Figura 7 – Forças atuantes no membro



Fonte: (Hibbeler, 2004)

Figura 8 – Distribuição da tensão na seção



Fonte: (Hibbeler, 2004)

Visto que a barra esteja submetida a uma deformação uniforme constante, a deformação é o resultado de uma tensão normal constante  $\sigma$  (Figura 8). Se cada área  $\Delta A$  da seção transversal estiver sujeita a uma força  $\Delta F = \sigma \Delta A$ , o somatório das forças atuante sobre toda a área da seção transversal será equivalente à força interna  $P$ . Se  $\Delta A \rightarrow dA$  e  $\Delta F \rightarrow dF$ , então admitindo que  $\sigma$  seja constante e  $\uparrow \sum F_Z = \Sigma F_Z$ , temos:

$$\int dF = \int_A \sigma dA$$

$$P = \sigma A$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (1)$$

Onde  $\sigma$  é a tensão normal média em qualquer ponto da área da seção transversal,  $P$  é a resultante da força normal interna e  $A$  é a área da seção transversal da barra.

## 2.2 DISPOSITIVOS DIDÁTICOS

Sabe-se que muitas universidades, tanto no Brasil quanto no exterior, dispõem de bancadas para competições de estrutura e também laboratórios com modelos didáticos como forma de facilitar o aprendizado dos alunos de engenharia.

Na Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC), durante a Semana de Pesquisa e Extensão (Sepex), ocorre a Competição de Estruturas em Treliça de Espaguete (Figura 9) onde equipes de até três alunos devem construir um conjunto de treliças que seja formado por duas treliças planas, sendo elas paralelas ou juntas no topo (tipo pirâmide). O conjunto deve respeitar as dimensões de 60 cm de comprimento e 10 cm de largura, assim como ter até 500 gramas de espaguete. A treliça final não deverá ultrapassar os 600 gramas de peso total e ganhará aquele que resistir ao carregamento aplicado até que entre em colapso.

Figura 9 – Estruturas em treliça de espaguete

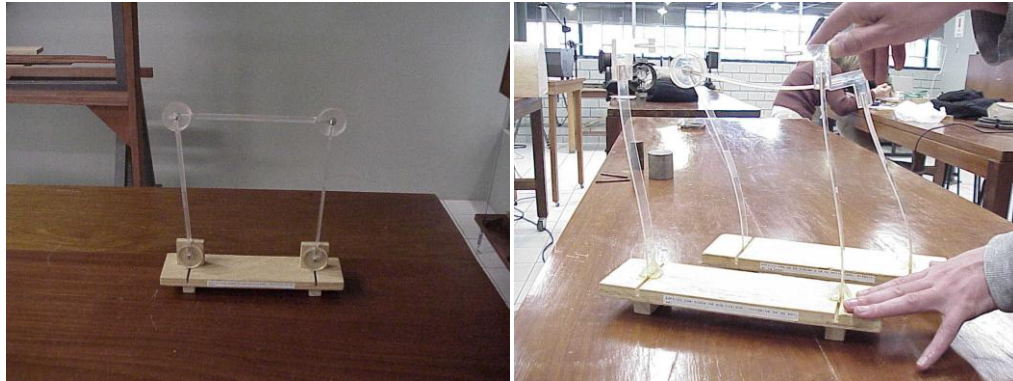


Fonte: (Notícias da UFSC, 2014)

Na Escola Politécnica da USP, foi inaugurado em 2001 o Laboratório Didático de Resistência dos Materiais com modelos didáticos e experimentos para auxiliar os alunos, tanto da Escola Politécnica quanto da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo. Com o grande número de alunos que ingressam todo ano, o acesso ao Laboratório fica limitado. Alguns modelos foram criados para que possam ser levados pelos professores para as salas de aulas,

como é o exemplo do MODELO PAcR (pórticos articulados em todos os nós). São modelos feitos de madeira e acrílico para analisar e mostrar os efeitos nos apoios de acordo com as articulações dos nós (Figura 10).

Figura 10 – MODELO PAcR



Fonte: (Nakao, 2003)

Numa das disciplinas, os alunos da Faculdade de Arquitetura e Urbanismo tiveram que projetar e construir uma estrutura treliçada usando barras de madeira de aeromodelismo ou de construção de pipas que suportasse uma carga de cinquenta quilogramas-força em um vão de dois metros (Figura 11). Através do projeto, os alunos investigaram a carga de ruptura à tração e à compressão de cada barra, conceder forma à treliça, verificar os esforços normais em cada barra, construir e realizar a prova de carga.

Figura 11 – Prova de carga da treliça



Fonte: (Nakao, 2003)

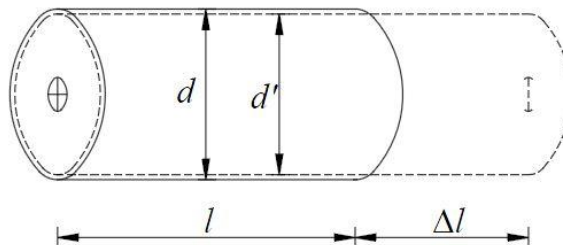
### 2.3 EXTENSOMETRIA

Os extensômetros elétricos são sensores/transdutores que medem deformações a partir da transformação de pequenas variações em suas dimensões em variações equivalentes em sua resistência elétrica. Devido à precisão das medidas, fácil manipulação e capacidade de monitorar as deformações até a carga limite de ruptura em ensaios destrutivos na área de estrutura.

A medida através destes dispositivos é feita colando os extensômetros nas superfícies das estruturas, convertendo a deformação causada no extensômetro em uma variação de resistência elétrica (voltagem) que será convertida em tensão elétrica a ser amplificado e lida em um local remoto. Algumas características deste método são alta precisão de medição, pequeno tamanho e pouco peso, excelentes respostas aos fenômenos dinâmicos e possibilita a medida em locais remotos.

O princípio do extensômetro é baseado no fato dos metais mudarem o valor de sua resistência elétrica quando se deformam.

Figura 12 – Deformação de um fio sob tração



Fonte: (Andolfato, 2004)

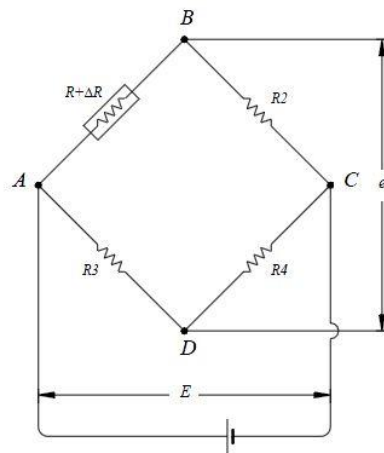
Na Figura 12, a linha contínua mostra o fio metálico de área da seção transversal  $A$ , resistividade  $\rho$ , comprimento original antes da deformação  $l$  e sua resistência elétrica  $R$  é dada por:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2)$$

A linha pontilhada agora mostra o fio metálico deformado de comprimento  $l + \Delta l$  e resistência igual a  $R + \Delta R$ .

Para obter as medidas de deformações, são usados circuitos elétricos específico, chamados Ponte de *Wheatstone* que medem a diferença de potencial entre dois pontos por meio das variações de resistência dentro do circuito.

Figura 13 – Ponte de *Wheatstone*



Fonte: (Andolfato, 2004)

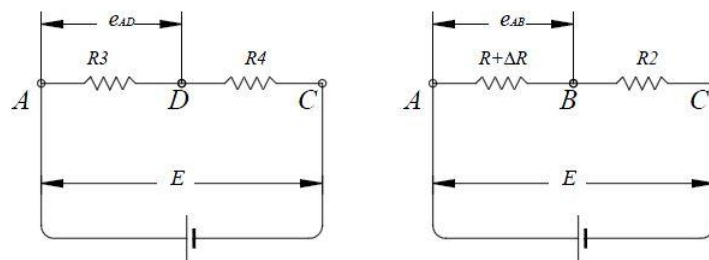
Para dois resistores em série sendo aplicada a eles uma tensão de alimentação conforme mostra a Figura 13, a tensão entre o ponto A e D, chamada de  $e_{AD}$ , é dada por:

$$e_{AD} = \left[ \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right] \cdot E \quad (3)$$

Analogamente para o outro circuito da Figura 13, a tensão entre A e B, chamada de  $e_{AB}$ , é dada por:

$$e = \left[ \frac{R + \Delta R}{R + \Delta R + R_2} \right] \cdot E \quad (4)$$

Figura 14 – Circuitos em série



Fonte: (Andolfato, 2004)

A Figura 14 apresenta os dois circuitos que colocados em paralelos, obtém-se a ponte de *Wheatstone* da Figura 13, onde a diferença de potencial entre D e B será a diferença entre  $e_{AD}$  e  $e_{AB}$ , que corresponde ao valor de  $e$ . Supondo na Figura 13, que  $R$  é a resistência do extensômetro e  $R_2$ ,  $R_3$  e  $R_4$  são resistores fixos e  $E$  é uma voltagem constante aplicada no circuito da ponte, e que ainda o extensômetro sofra uma deformação, cuja resistência mude para  $R+\Delta R$ , então existirá uma voltagem elétrica  $e$  gerada nos terminais de saída da ponte dada por:

$$e = e_{AD} - e_{AB} = \left[ \frac{R_3}{R_3+R_4} - \frac{R+\Delta R}{R+\Delta R+R_2} \right] \cdot E \quad (5)$$

Se  $R = R_2 = R_3 = R_4$ , a equação 5 pode ser reescrita como:

$$e = \left[ \frac{-\Delta R}{2(2R+\Delta R)} \right] \cdot E \quad (6)$$

Uma vez que  $2R \gg \Delta R$ , portanto  $2R+\Delta R \approx 2R$ , logo:

$$e = - \frac{E \cdot \Delta R}{4 \cdot R} \quad (7)$$

Substituindo  $\Delta R/R$  por  $K \cdot \varepsilon$ , onde  $K$  expressa a sensibilidade à deformação do material metálico, tem-se:

$$e = \pm \frac{E}{4} K \cdot \varepsilon \quad (8)$$

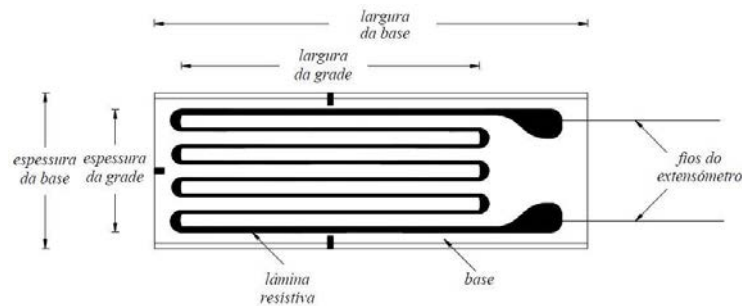
A partir disso, percebe-se que  $e$  é proporcional à deformação  $\varepsilon$ . Portanto para se medir o valor da deformação, basta medir a voltagem de saída da ponte.

## 2.4 CÉLULA DE CARGA

A célula de carga possui uma grande variedade de aplicações, dentre elas podemos citar a utilização em medições de forças, sistema de pesagem industrial e balanças comerciais. Sua função é a de um transdutor de força, que basicamente transforma uma força em um sinal elétrico.

Seu princípio de funcionamento baseia-se na variação da resistência ôhmica de um sensor denominado extensômetro ou strain gages (Figura 15), quando submetido a uma deformação. Estes extensômetros são colados no corpo da célula de carga e ligados entre si conforme uma ponte de Wheatstone. Este circuito é ideal para se avaliar a variação da resistência ôhmica de modo mais exato, pois amplifica os sinais obtidos (BARBOSA, 2009).

Figura 15 – Esquema de um extensômetro



Fonte: (Adolfato, 2004)

Devemos levar em consideração a forma e as características do corpo da célula de carga, pois há uma vasta gama de variedades como para compressão (Figura 16), tração e compressão (Figura 17) e de flexão (Figura 18). Uma escolha errada poderá comprometer tanto a célula de carga quanto os resultados obtidos.

Figura 16 – Célula de carga de compressão



Fonte: (HBM Test and Measurement, 2016)

Figura 17 – Célula de carga de tração e compressão



Fonte: (HBM Test and Measurement, 2016)

Figura 18 – Célula de carga de flexão



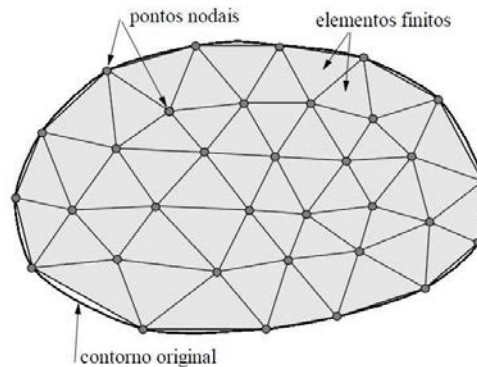
Fonte: (ALFA Instrumentos, 2016)

## 2.5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é em uma técnica de solução numérica aproximada aplicada em inúmeros problemas de engenharia, tais como análise de tensões e deformações em sólidos, análise linear e não linear, eletromagnetismo, etc. Sua ideia consiste em dividir o domínio do problema em sub-regiões de geometria simples, como por exemplo, triângulos, quadriláteros, cubos, etc.

Por estas sub-regiões terem dimensões finitas são chamadas de “elementos finitos”, ao contrário dos elementos infinitesimais utilizados em cálculo diferencial e integral. Estes elementos finitos são conectados entre si por pontos, chamados de nó ou pontos nodais (Figura 19). O conjunto formado por estes elementos finitos e pontos nodais é denominado de malha de elementos finitos (SOUZA, 2003).

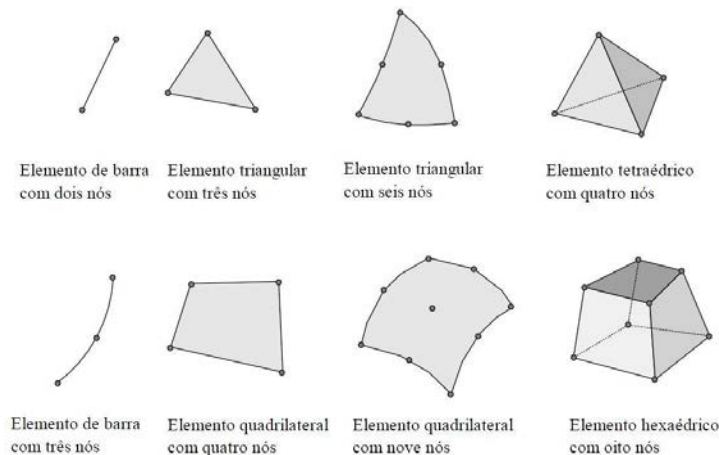
Figura 19 – Malha de Elementos Finitos



Fonte: (SOUZA, 2003)

Os diversos tipos geométricos de elementos finitos a serem usados (forma triangular, quadrilateral, cúbico, etc.), vão depender do tipo e da dimensão do problema (uni, bi ou tridimensional). Algumas dessas formas geométricas são apresentadas na Figura 20.

Figura 20 – Tipos de Elementos Finitos



Fonte: (Souza, 2003)

A precisão deste método vai depender de alguns fatores, tais como quantidade de nós e elementos, tamanho e tipo dos elementos da malha. Um ponto importante deste método é a convergência. Embora seja um método aproximado, a medida que o tamanho dos elementos finitos da malha tende a zero, a quantidade de nós tende a infinito, assim a solução obtida converge para uma solução exata do problema. Ou seja, quanto maior for a quantidade de elementos finitos e menor o seu tamanho, mais preciso será o resultado da análise. (SOUZA, 2003).

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

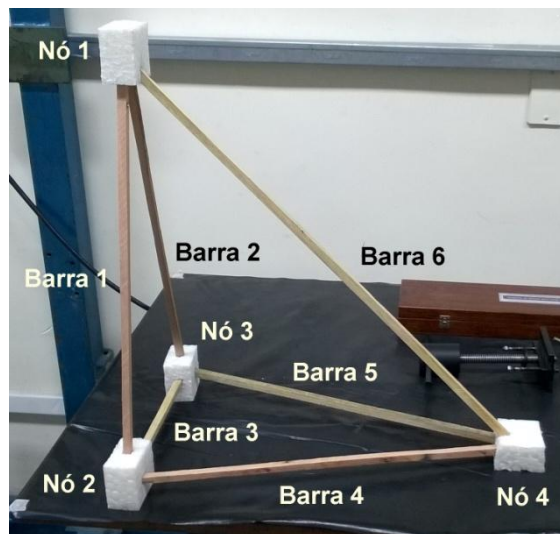
Nesta seção será mostrado o procedimento de construção da maquete, projeto dos nós e resolução numérica e por modelagem numérica utilizando um software.

#### 3.1 PROJETO E MAQUETE

A treliça a ser estudada será constituída de barras de alumínio de área de seção transversal quadrada de 7,9mm de aresta com as seguintes propriedades: módulo de elasticidade 68,9GPa e coeficiente de *Poisson* 0,35.

Primeiramente, utilizando varetas de madeira e poliestireno, foi construído uma maquete para ter conhecimento de sua estrutura e dimensões, como podemos ver na Figura 21.

Figura 21 – Maquete em madeira e poliestireno



Fonte: (Própria, 2016)

Então foi pensado nas dimensões das barras para que a estrutura respeitasse a área útil do quadro onde seria fixada. Assim, chegou-se nas seguintes dimensões (Figura 21):

- 1 barra de 250mm de comprimento (barra 3);
- 2 barras de 500mm de comprimento (barras 1 e 2);
- 2 barras de 600mm de comprimento (barras 4 e 5);
- 1 barra de aproximadamente 761mm de comprimento (barra 6).

Para os nós, como foi pensado em fazer com chapas de aço pela facilidade de produção, utilizou-se papel Paraná por ter uma rigidez maior que outros tipos de papéis. Os nós pensados para o projeto seriam duas chapas de aço dobradas em L, como pode ser visto na Figura 22.

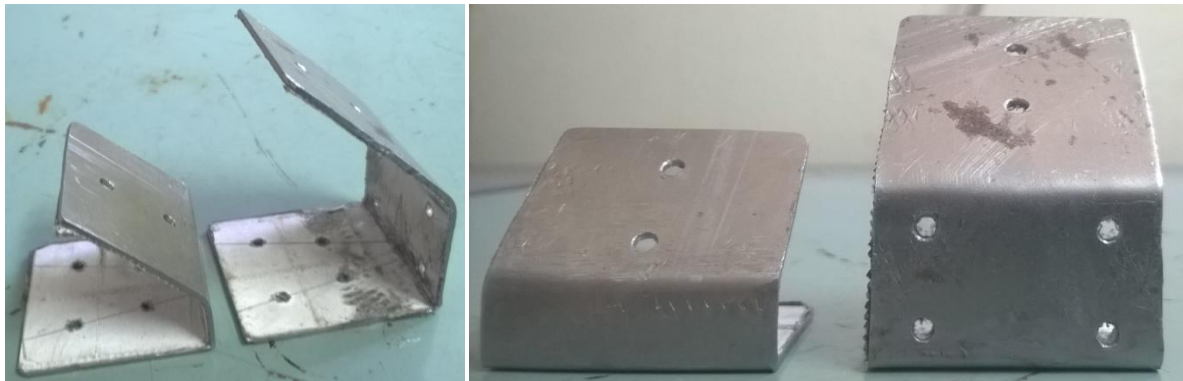
Figura 22 – Maquete do nó em papel Paraná



Fonte: (Própria, 2016)

O nó, onde seria aplicada a carga, também seria feito com chapas de aço dobradas na qual seria fixado um bloco de aço (Figura 24) em que ficaria a célula de carga. O nó que seria fixo ao quadro, são duas chapas dobradas em V. Tais nós podem ser vistos na Figura 23.

Figura 23 – Nó em chapa de aço



Fonte: (Própria, 2016)

Figura 24 – Bloco de aço para a fixação da célula de carga

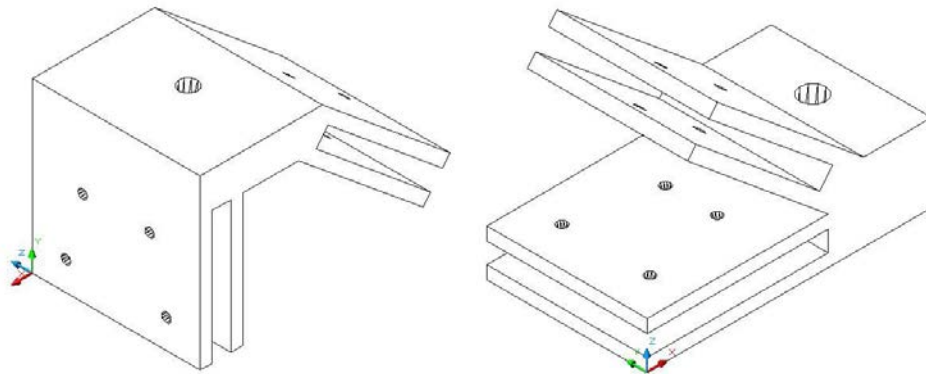


Fonte: (Própria, 2016)

Durante o processo de fabricação dos nós, notamos algumas dificuldades encontradas, a principal delas é em relação aos furos. Quando as chapas são dobradas, as posições dos furos não coincidem. Se os furos são feitos após dobrar as chapas, há uma dificuldade na fixação das chapas na morsa para realizar tal procedimento.

Devido a essas dificuldades no procedimento, o projeto dos nós foi repensado para que seja fabricado a partir de um bloco de alumínio.

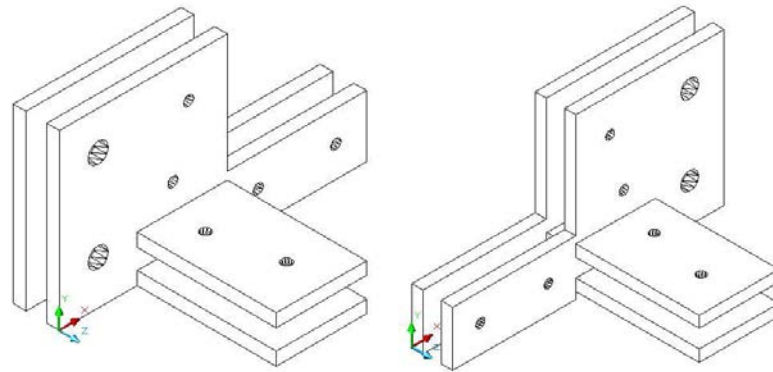
Figura 25 – Esboço em AutoCAD do nó 1 e 4



Fonte: (Própria, 2016)

Na Figura 25, uma peça irá fixar o nó 1 ao quadro e o nó 4 com o bloco onde ficaria a célula de carga será feito como uma peça só.

Figura 26 – Esboço em AutoCAD do nó 2 e 3



Fonte: (Própria, 2016)

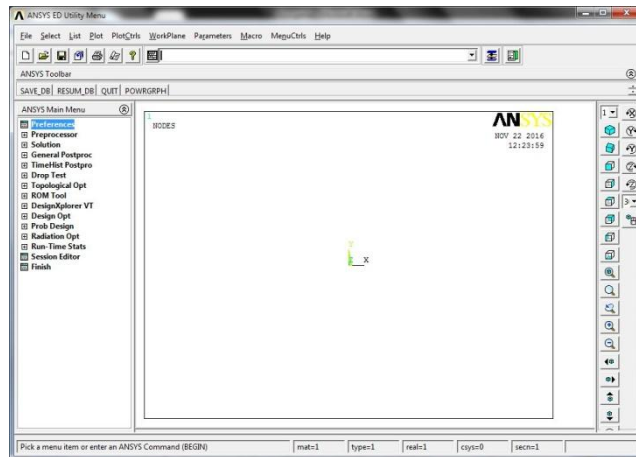
Na Figura 26, ambos serão fixados a uma barra de aço e esta fixada ao quadro. A barra de aço terá uma espessura considerável para que não sofra flexão ao aplicar a carga na treliça e acabe influenciando os resultados.

### 3.2 ANÁLISE NUMÉRICA

Utilizamos o software de modelagem numérica ANSYS Workbench para a análise da treliça espacial. A modelagem é dividida em três etapas: pré-processamento (*preprocessor*), solução (*solution*) e pós-processamento (*general postproc*). No pré-processamento será determinada o tipo de análise, o tipo de elemento, a seção transversal do elemento, as propriedades do material e modelar a geometria da estrutura. Na solução será definido o carregamento e as restrições dos nós. No pós-processamento será listada os resultados das reações, assim como as forças e tensões normais em cada barra e também a visualização destas.

Ao abrir o software, nos deparamos com a tela principal visto na Figura 27. Para melhor visualização, foi mudada a cor de fundo para branco. Para isso, na aba *PlotCtrls > Style > Colors > Reverse Video*.

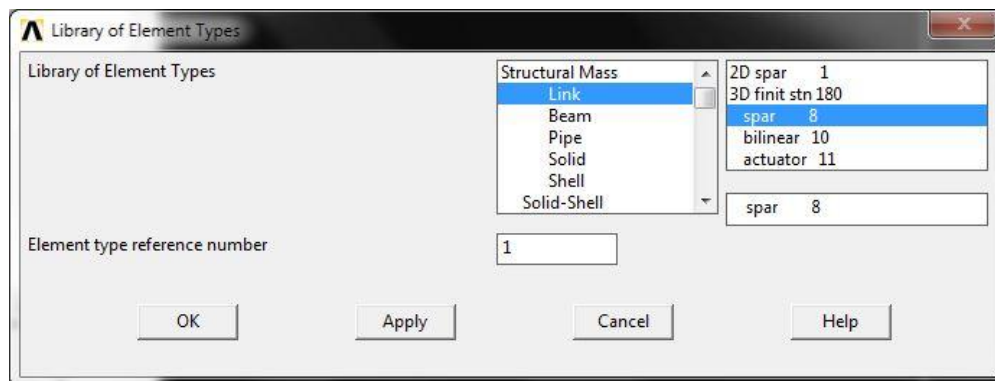
Figura 27 – Tela principal do ANSYS



Fonte: (Própria, 2016)

Primeiramente definimos o tipo de análise, que no nosso caso é estrutural. Em *ANSYS Main Menu*, onde todo processo de análise será feito, selecionamos *Preferences* e uma janela abrirá, marcamos *Structural* e confirmamos.

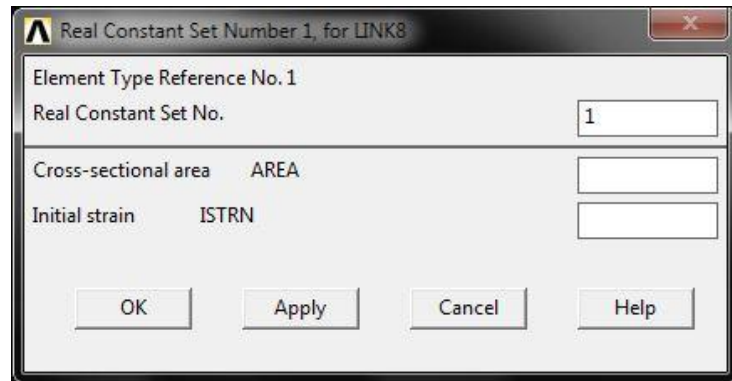
Em *Preprocessor > Element Type > Add/Edit/Delete > Add*, selecionamos o elemento *Link* e *spar 8* (Figura 28). O elemento *Link* tem grande utilidade em problemas de engenharia, por ser bidimensional sofre tração e compressão, podendo servir como uma barra de treliça.

Figura 28 – Janela de seleção do elemento *LINK*

Fonte: (Própria, 2016)

Agora é necessário definir a área da seção transversal da barra. Para isso em *Real Constants > Add/Edit/Delete > Add > OK* (Figura29), entramos com a área da seção em  $m^2$ .

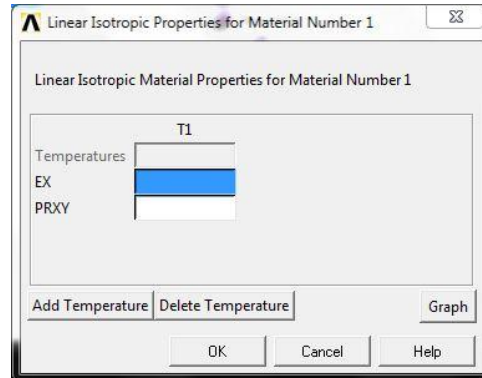
Figura 29 – Janela para definir a área da seção transversal



Fonte: (Própria, 2016)

O passo seguinte é determinar as propriedades do material. Em *Material Props > Material Models > Structural > Linear > Elastic > Isotropic*, definimos o módulo de elasticidade (EX) e coeficiente de *Poisson* (PRXY) do material (Figura 30). Entramos com o valor do módulo de elasticidade em Pa.

Figura 30 – Janela para entrada das propriedades do material



Fonte: (Própria, 2016)

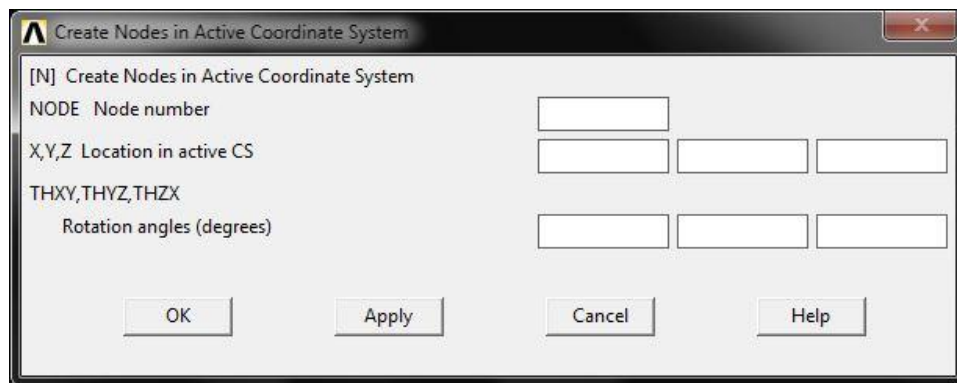
Definido o tipo de elemento e suas propriedades, partimos para a modelagem do problema. Primeiramente devemos criar os nós, para isso em *Modeling > Create > Nodes > In Active CS* (Figura 31), numeramos os nós e entramos com suas coordenadas, tomando como origem das coordenadas o nó 2 de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 – Coordenadas dos nós

Nó	X	Y	Z
1	125	484.12	0
2	0	0	0
3	250	0	0
4	125	0	586.83

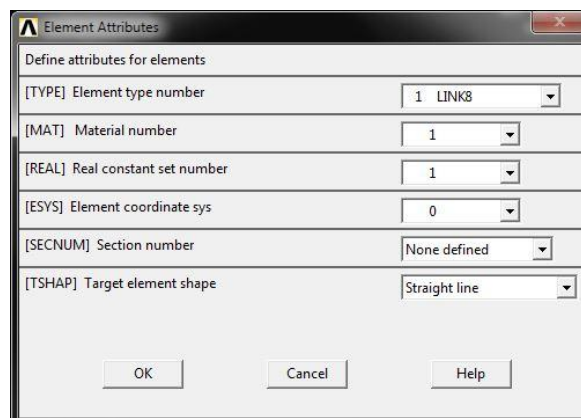
Fonte: (Própria, 2016)

Figura 31 – Janela para a entrada das coordenadas dos nós



Fonte: (Própria, 2016)

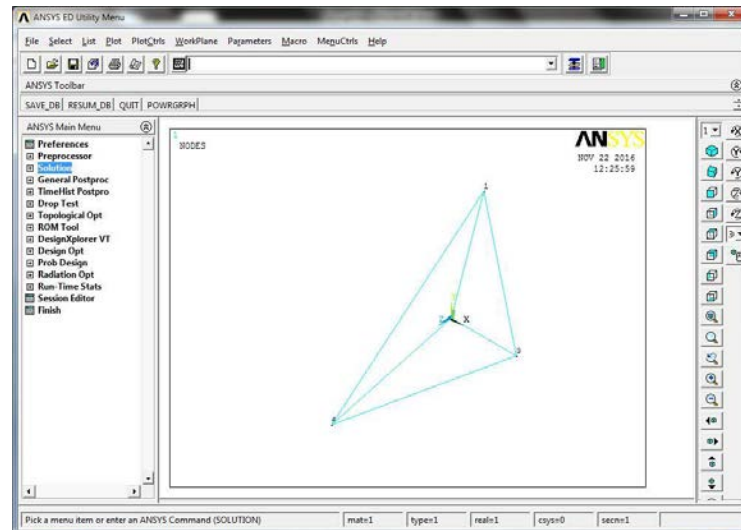
Antes de criar os membros da estrutura, devemos atribuir a estes o valor da área da seção transversal. Em *Modeling > Create > Elements > Elem Attributes*, atribuímos ao elemento *Link 8* suas características determinadas anteriormente (Figura 32).

Figura 32 – Janela para atribuir características ao elemento *LINK*

Fonte: (Própria, 2016)

Agora podemos criar os membros da estrutura. Ainda em *Elements > Auto Numbered > Thru Nodes*, conectamos dois nós por vez e confirmamos em *Apply* até os dois últimos nós e confirmamos com *OK*. Após tal procedimento, teremos a estrutura vista como na Figura 33.

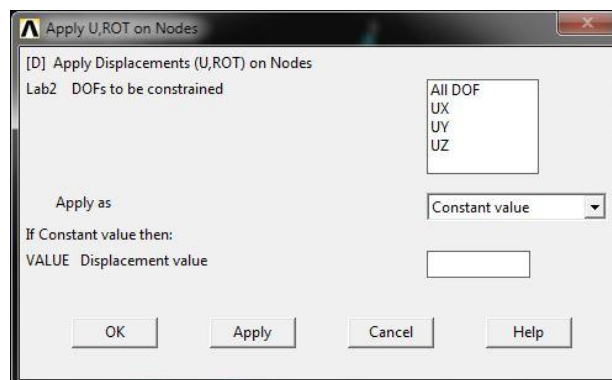
Figura 33 – Modelo da estrutura treliçada



Fonte: (Própria, 2016)

Para definir as condições de restrições dos nós, em *Solution > Define Loads > Apply > Structural > Displacement > On Nodes*, selecionamos os nós e definimos as restrições nos três eixos (Figura 34).

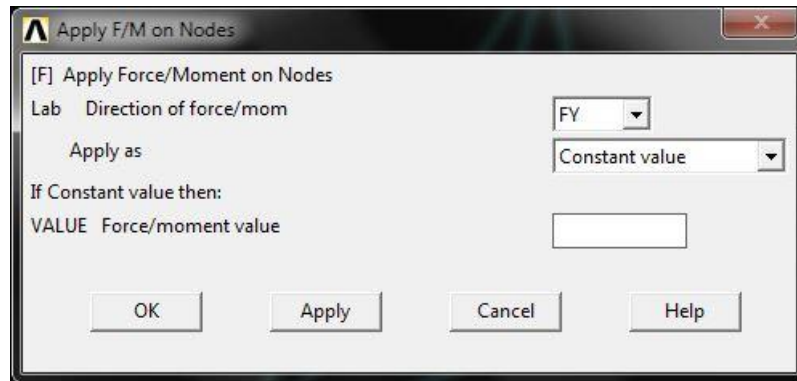
Figura 34 – Janela para definir restrições



Fonte: (Própria, 2016)

Para definir o carregamento na estrutura, ainda em *Structural > Force/Moment > On Nodes*, selecionamos o nó aonde irá o carregamento e entramos com seu valor em N e sua direção (Figura 35).

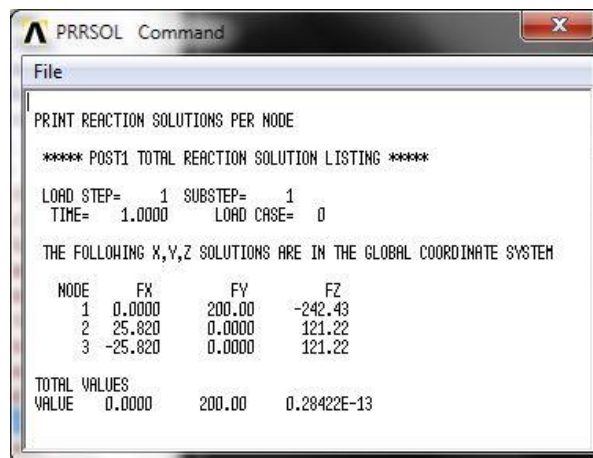
Figura 35 – Janela para definir o carregamento



Fonte: (Própria, 2016)

Para fazer a análise, em *Solution > Solve > Current LS*, uma mensagem aparecerá confirmando a solução. Para obter as reações dos nós (Figura 36), em *General PostProc > List Results > Reaction Solu*, escolhemos *All items*.

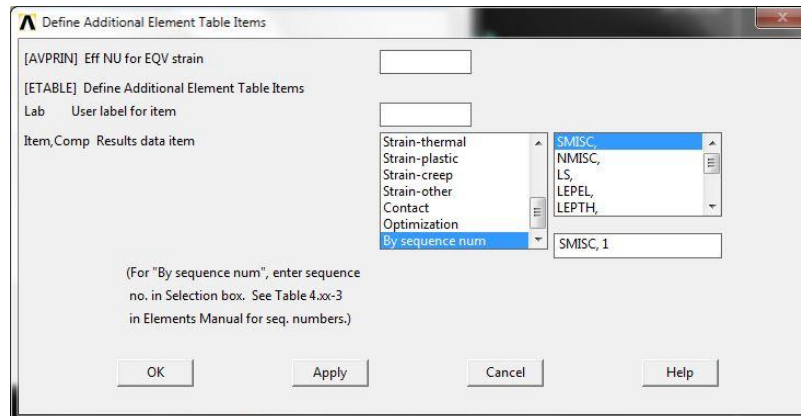
Figura 36 – Janela com as reações dos nós



Fonte: (Própria, 2016)

Para obter as forças e tensões nos membros, em *General Postproc > Element Table > Define Table > Add... > By sequence num > SMISC, 1 > Apply* e *LS,1 > OK*. O SMISC e LS nos fornecerão, respectivamente, as forças e tensões nos membros (Figura 37).

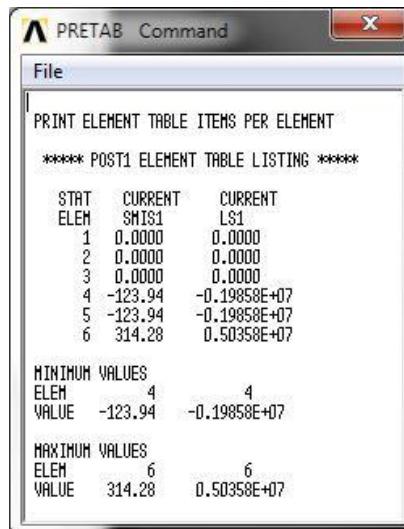
Figura 37 – Janela para a análise de esforços



Fonte: (Própria, 2016)

Para listar os resultados, ainda em *Element Table > List Element Table >* selecionamos SMIS1 e LS1. Uma janela aparecerá listando as forças e tensões nos membros (Figura 38).

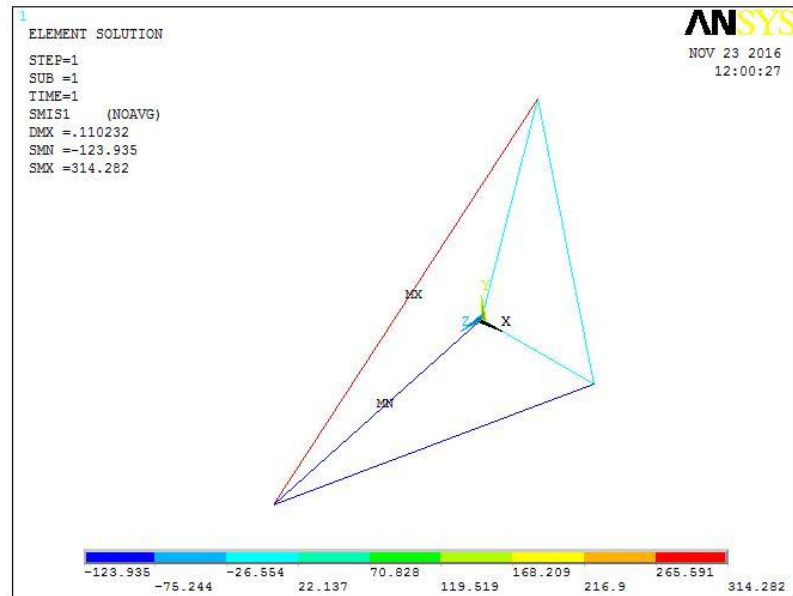
Figura 38 – Janela de com os esforços



Fonte: (Própria, 2016)

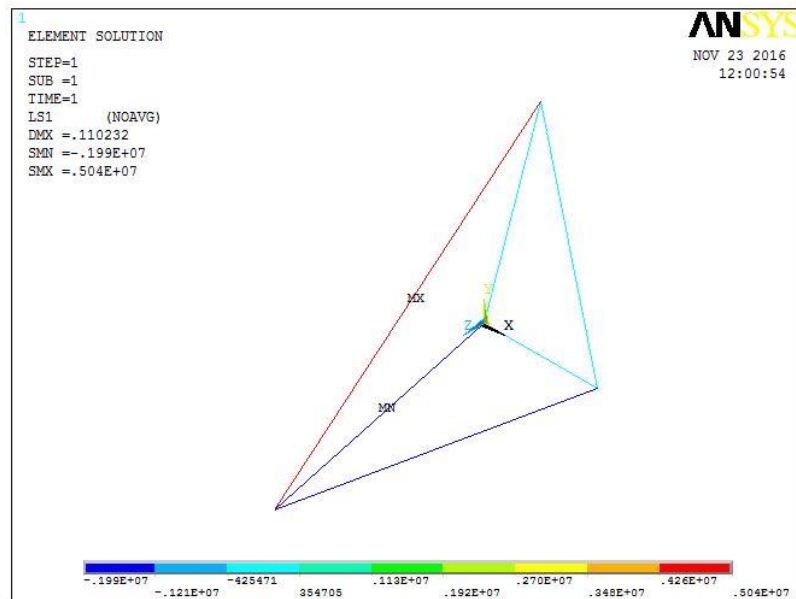
Para visualizar os esforços nos membros, ainda em *Element Table > Plot Elem Table >* selecionamos SMIS1 ou LS1 para visualizar as forças (Figura 39) e as tensões (Figura 40), respectivamente.

Figura 39 – Força no membro



Fonte: (Própria, 2016)

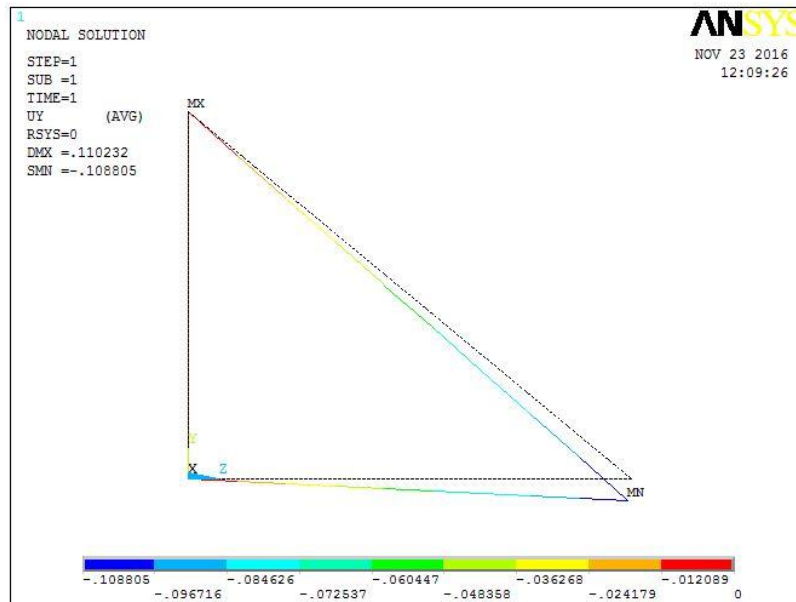
Figura 40 – Tensão no membro



Fonte: (Própria, 2016)

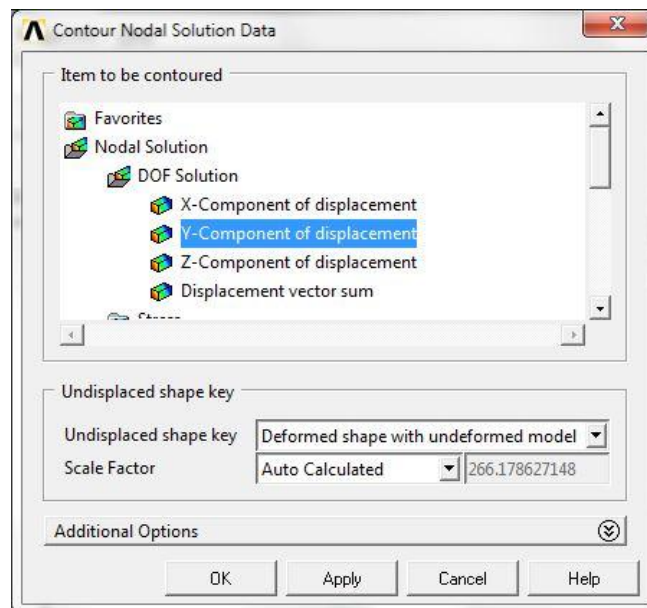
Para visualizar a deflexão (Figura 41), em *General Postproc > Plot Results > Contour Plot > Nodal Solu.* Uma janela abrirá e selecionamos *Y-Component of displacement* em *DOF Solution*. Para comparar a treliça deformada com a treliça inicial, marcamos *Deformed shape with undeformed model*, como na Figura 42.

Figura 41 – Deflexão



Fonte: (Própria, 2016)

Figura 42 – Janela de configuração da solução nodal



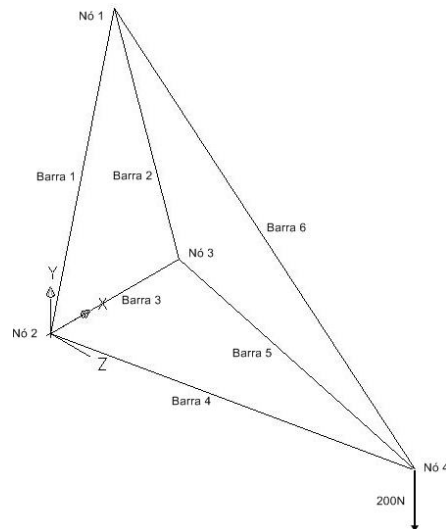
Fonte: (Própria, 2016)

### 3.3 ANÁLISE TEÓRICA

#### 3.3.1 Forças e reações

A Figura 43 representa a treliça e a coordenada adotada para a resolução deste problema, assim como a identificação dos elementos.

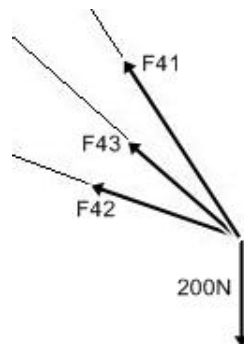
Figura 43 – Coordenada adotada para o problema



Fonte: (Própria, 2016)

Para iniciarmos a análise teórica pelo método dos nós, identificamos o nó que tenha uma força conhecida e o menor número de incógnitas, então começaremos pelo nó 4, como mostrado na Figura 44.

Figura 44 – Diagrama de corpo livre do nó 4



Fonte: (Própria, 2016)

De acordo com o diagrama de corpo livre do nó 4 (Figura44), aplicando  $\Sigma F_Y = 0$ ,  $\Sigma F_X = 0$  e  $\Sigma F_Z = 0$ , temos:

- $\Sigma F_Y = 0$

$$F_{41}\text{sen}39,5^\circ - 200 = 0$$

$$\mathbf{F_{41} = 314,43N}$$

- $\Sigma F_X = 0$

$$-F_{42}\text{sen}12^\circ + F_{43}\text{sen}12^\circ = 0$$

$$F_{42} = F_{43}$$

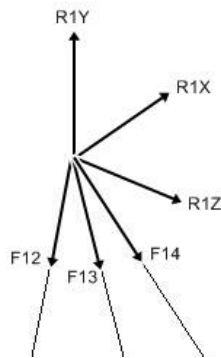
- $\Sigma F_Z = 0$

$$-F_{42}\text{cos}12^\circ - F_{43}\text{cos}12^\circ - F_{41}\text{cos}39,5^\circ = 0$$

$$\mathbf{F_{42} = -124,02N}$$

Os valores  $F_{41}$ ,  $F_{42}$  e  $F_{43}$  são as forças em que os membros estão sujeitos. O valor negativo encontrado para  $F_{42}$  indica que o vetor é para o sentido contrário ao adotado, logo que este membro estará sob compressão enquanto o membro sujeito ao  $F_{41}$  estará sob tração.

Figura 45 – Diagrama de corpo livre do nó 1



Fonte: (Própria, 2016)

De acordo com o diagrama de corpo livre do nó 1 (Figura 45), temos, aplicando  $\Sigma F_X = 0$ ,  $\Sigma F_Y = 0$  e  $\Sigma F_Z = 0$ , temos:

- $\Sigma F_X = 0$

Podemos observar que os nós 1, 2 e 3 têm restrições de movimentos, pois ficarão fixados ao quadro, logo podemos dizer que os membros 1, 2 e 3 são membros de força zero. Como não existem forças na direção do eixo X, a reação  $R_{1X}$  será nula.

- $\Sigma F_Z = 0$

$$R_{1Z} + F_{14}\text{sen}50,5^\circ = 0$$

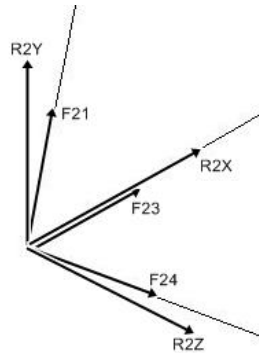
$$\mathbf{R}_{1Z} = -242,62\text{N}$$

- $\Sigma F_Y = 0$

$$R_{1Y} - F_{14}\cos 50,5^\circ = 0$$

$$\mathbf{R}_{1Y} = 200\text{N}$$

Figura 46 – Diagrama de corpo livre do nó 2



Fonte: (Própria, 2016)

De acordo com o diagrama de corpo livre do nó 2 (Figura 46), aplicando  $\Sigma F_X = 0$ ,  $\Sigma F_Y = 0$  e  $\Sigma F_Z = 0$ , temos:

- $\Sigma F_Y = 0$

Como não há forças nessa direção,  $\mathbf{R}_{2Y} = 0$ .

- $\Sigma F_Z = 0$

$$R_{2Z} - F_{24}\text{sen}78^\circ = 0$$

$$\mathbf{R}_{2Z} = 121,31\text{N}$$

- $\Sigma F_X = 0$

$$R_{2X} - F_{24}\cos 78^\circ = 0$$

$$\mathbf{R}_{2X} = 25,79\text{N}$$

Como o nó 2 e 3 são semelhantes,  $R_{3Z} = 121,31\text{N}$ ,  $R_{3X} = -25,79\text{N}$  e  $R_{2Y} = 0$ .

### 3.3.2 Tensões

A área da seção transversal dos membros é  $6,241\text{mm}^2$  e as forças dos membros são  $F_{14} = 314,43\text{N}$  e  $F_{24} = F_{34} = 124,02\text{N}$ , aplicando a equação (1) temos:

- Barra 6

$$\sigma = \frac{314,43\text{N}}{6,241 \times 10^{-6}\text{m}^2} = 5,03\text{MPa}$$

- Barra 4 e 5

$$\sigma = \frac{124,02N}{6,241 \times 10^{-6}} = 1,99\text{MPa}$$

Para efeito de didática, os valores encontrados foram baixos devido às limitações do projeto como a espessura das barras, que podem sofrer deformações se utilizada cargas maiores.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 REAÇÕES NOS APOIOS

A análise teórica foi feita através dos métodos dos nós para um carregamento de 100N, 150N e 200N. A modelagem numérica foi feita através do software ANSYS. Na Tabela 2, 3 e 4 temos a comparação dos valores das reações obtidos para cada carregamento.

Tabela 2 – Reações para um carregamento de 100N

Nó	X		Y		Z	
	Numérico (N)	Teórico (N)	Numérico (N)	Teórico (N)	Numérico (N)	Teórico (N)
1	0,0	0,0	100,0	100,0	-121,2	-121,3
2	12,9	12,9	0,0	0,0	60,6	60,7
3	-12,9	-12,9	0,0	0,0	60,6	60,7

Fonte: (Própria, 2016)

Tabela 3 – Reações para um carregamento de 150N

Nó	X		Y		Z	
	Numérico (N)	Teórico (N)	Numérico (N)	Teórico (N)	Numérico (N)	Teórico (N)
1	0,0	0,0	150,0	150,0	181,8	182,0
2	19,4	19,3	0,0	0,0	90,9	91,0
3	-19,4	-19,3	0,0	0,0	90,9	91,0

Fonte: (Própria, 2016)

Tabela 4 – Reações para um carregamento de 200N

Nó	X		Y		Z	
	Numérico (N)	Teórico (N)	Numérico (N)	Teórico (N)	Numérico (N)	Teórico (N)
1	0,0	0,0	200,0	200,0	-242,9	242,6
2	25,9	25,8	0,0	0,0	121,5	121,3
3	-25,9	25,8	0,0	0,0	121,5	121,3

Fonte: (Própria, 2016)

A maior diferença percentual encontrada foi para as reações em X do nó 3 para um carregamento de 150N, cerca de 0,52%. Portanto, sendo um método bastante confiável e de

grande importância. Porém, o uso apenas de software não é o mais adequado. Ao esboçar a treliça no AutoCAD, este aproximou os valores dos ângulos, de  $50,5^\circ$  para  $50^\circ$ ,  $39,5^\circ$  para  $40^\circ$  e  $75,5^\circ$  para  $76^\circ$ . Esta aproximação além de causar erro no projeto dos nós também causa diferença nas reações, exceto o último ângulo que não foi usado nos cálculos, como pode ser observado na Tabela 5.

Tabela 5 – Reações devido à aproximação dos ângulos

Nó	X		Z	
	Teórico (N)	Teórico aprox. (N)	Teórico (N)	Teórico aprox. (N)
1	0,0	0,0	182,0	178,8
2	19,3	19,0	91,0	89,4
3	-19,3	-19,0	91,0	89,4

Fonte: (Própria, 2016)

Com isso, a diferença percentual entre o valor teórico resultante da aproximação e o numérico subiu para 1,78%, o que fez com que identificássemos o problema.

#### 4.2 ESFORÇOS NOS MEMBROS

Na Tabela 6, temos a comparação das forças sofrida pelos membros e seus respectivos comportamentos. Como observado anteriormente, as barras 1, 2 e 3 são membros de força zero e o ângulo aproximado para  $76^\circ$  não influencia nessas barras, porém alteraria no projeto dos nós.

Tabela 6 – Esforços nos membros

Barra	Numérico (N)				Teórico (N)				Comportamento da barra
	100N	150N	200N	1kN	100N	150N	200N	1kN	
4	62,1	93,1	124,2	619,7	62,0	93,0	124,0	609,2	Compressão
5	62,1	93,1	124,2	619,7	62,0	93,0	124,0	609,2	Compressão
6	157,3	236,0	314,7	1571,4	157,2	235,8	314,4	1555,7	Tração

Fonte: (Própria, 2016)

A maior diferença percentual encontrada foi para um carregamento de 100N e de 200N nas barras sob compressão, 0,16%. Devido à aproximação, esta diferença aumentou para 1,95% como pode ser observado na Tabela 7.

Tabela 7 – Esforço devido à aproximação dos ângulos

Barra	Numérico (N)	Teórico aprox. (N)
4	62,1	60,9
5	62,1	60,9
6	157,3	155,6

Fonte: (Própria, 2016)

Na Tabela 8, temos a comparação das tensões nos membros, nota-se que os valores são muito próximos, o que valida o uso de software de modelagem numérica para complementar as práticas tradicionais.

Tabela 8 – Tensões nos membros

Barra	Numérico (MPa)				Teórico (MPa)			
	100N	150N	200N	1kN	100N	150N	200N	1kN
4	0,995	1,493	1,990	9,929	0,994	1,490	1,987	9,761
5	0,995	1,493	1,990	9,929	0,994	1,490	1,987	9,761
6	2,521	3,782	5,042	25,179	2,519	3,779	5,038	24,927

Fonte: (Própria, 2016)

A maior diferença percentual encontrada foi para um carregamento de 150N, 0,20%. Esta diferença aumentou para 1,96% como pode ser observado na Tabela 9.

Tabela 9 – Tensão devido à aproximação dos ângulos

Barra	Numérico (MPa)	Teórico aprox. (MPa)
4	1,493	1,464
5	1,493	1,464
6	3,782	3,739

Fonte: (Própria, 2016)

### 4.3 DEFLEXÃO

Na tabela 10, observamos as deflexões para os carregamentos de 100N, 150N, 200N e 1kN para observar melhor a deflexão.

Tabela 10 – Deflexão no ponto de aplicação da carga

Carga	Deflexão (mm)
100N	0,055
150N	0,082
200N	0,109
1kN	0,544

Fonte: (Própria, 2016)

Observando os resultados, era esperado que apresentasse valores baixos, pois treliças espaciais são estruturas conhecidas por sua rigidez.

## 5 CONCLUSÃO

Analisando os dados, conclui-se que a utilização de um software pode auxiliar o aluno na resolução desde problemas dos mais simples aos mais complexos. Esta ferramenta mostrou-se ser bastante precisa, isso fez com que fosse identificado o problema em relação aos nós, assim o projeto foi modificado. O software poderá ser uma grande ferramenta na questão de didática, porém não substitui as formas tradicionais, visto que a utilização apenas de software causou um problema que não foi observado e que foi apenas identificado na comparação dos resultados encontrados analiticamente e numericamente.

Os baixos valores encontrados são devidos a pouca carga utilizada, apenas para fins didáticos, e pelo fato de uma treliça ser uma estrutura bastante rígida. O projeto teórico e numérico, assim como a maquete mostraram-se exequível, atendendo a proposta do trabalho.

## REFERÊNCIAS

ADOLFATO, R. P.; CAMACHO, J. S.; BRITO, G. A. **Extensometria Básica**. 2004. 45 f. Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2004. Disponível em: <<http://www.feis.unesp.br/Home/departamentos/engenhariacivil/nepae/extensometria-basica.pdf>>. Acessado em: 31 out. 2016.

ALFA INSTRUMENTOS ELETRÔNICOS S.A. Disponível em: <<http://www.alfainstrumentos.com.br/>>. Acessado em: 22 nov. 2016.

BARBOSA, F. S. et al. **Modelagem numérica e análise experimental aplicadas ao projeto de uma célula de carga**. 2009. 12 f. Universidade Federal de Juiz de Fora, 2009. Disponível em: <[http://www.ufjf.br/lrm/files/2009/04/cil04\\_celula.pdf](http://www.ufjf.br/lrm/files/2009/04/cil04_celula.pdf)>. Acessado em: 31 out. 2016.

BARRIOS, D. B. O método dos elementos finitos como ferramenta coadjuvante no ensino da disciplina resistência dos materiais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 35., 2007, Curitiba. **Anais...** Curitiba: ABENGE/UnicemP, 2007. 1 CD-ROM.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros: Estática**. 5.ed. São Paulo: Makron Books, 1991. 980p.

BORTOLO, K. F.; LINHARES, J. C. Verificação da necessidade de dispositivos didáticos para o ensino na graduação em engenharia mecânica. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 34., 2006, Passo Fundo. **Anais...** Passo Fundo: ABENGE/UPF, 2006. p. 1128-1139. 1 CD-ROM.

HBM TEST AND MEASUREMENT. Disponível em: <<https://www.hbm.com/pt/0249/sensores-e-transdutores-forca/>>. Acessado em: 31 out. 2016.

HIBBELER, R. C. **Análise das estruturas**. 8.ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2013. 522p.

HIBBELER, R. C. **Estática: Mecânica para Engenharia**. 12.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011. 512p.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004. 670p.

NAKAO, O. S.; FILHO, J. A. A. G.; MONTEIRO, C. O. Os modelos físicos e o laboratório didático de resistência dos materiais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 31., 2003, Rio de Janeiro. **Anais eletrônicos...** Rio de Janeiro: IME, 2003. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2003/artigos/NMT225.pdf>>. Acessado em: 31 out. 2016.

NOTÍCIAS DA UFSC. Santa Catarina, Universidade Federal de Santa Catarina, 2016. Disponível em: <<http://noticias.ufsc.br/2014/10/sepex-2014-competicoes-de-estruturas-com-espaguete-e-de-avioes-de-papel/>>. Acessado em: 31 out. 2016.

SOUZA, R. M. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. 2003. 39 f. Universidade Federal do Pará, Belém, 2003. Disponível em: <[http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo\\_souza/TrabPublicados/Apostilas/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf](http://www.ufpa.br/nicae/integrantes/remo_souza/TrabPublicados/Apostilas/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf)>. Acessado em: 31 out. 2016.

VALDIERO, A. C.; BORTOLAIA, L. A.; RASIA, L. A. Desenvolvimento de uma banca didática para ensaio de pórticos como objeto educacional na engenharia. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO EM ENGENHARIA, 39., 2011, Blumenau. **Anais eletrônicos...** Blumenau: FURB, 2011. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2011/sexoestec/art2117.pdf>>. Acessado em: 31 out. 2016.