UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HEMILY GOMES MARCIANO FORTES

Partículas massivas de spin-2 em espaços curvos de fundo

Guaratinguetá
2018

Hemily Gomes Marciano Fortes

Partículas massivas de spin-2 em espaços curvos de fundo

Tese de doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do Título de Doutora em Física na área de Partículas e Campos.

Orientador: Prof^{o} Dr. Denis Dalmazi

Guaratinguetá
2018

F738p

Fortes, Hemily Gomes Marciano

Partículas massivas de spin-2 em espaços curvos de fundo / Hemily Gomes Marciano Fortes – Guaratinguetá, 2018.

55 f .: il.

Bibliografia: f. 51-53

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Denis Dalmazi

1. Gravitação. 2. Universo em expansão. 3. Teoria de campos (Física). I. Título.

CDU 531.5(043)

Luciana Máximo
Bibliotecária-CRB-8/3595

unesp *UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA*
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

HEMILY GOMES MARCIANO FORTES

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE

"DOUTOR EM FÍSICA"

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

Kostov

Prof. Dr. Konstatin Georgiev Kostov
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. DENIS DALMAZI
Orientador / UNESP/FEG

Prof. Dr. ÁLVARO DE SOUZA DUTRA
UNES/PFEG

Elias L Mendonça

Prof. Dr. ELIAS LEITE MENDONÇA
UNESP/FEG

Bruto Pimentel

Prof Dr. BRUTO MAX PIMENTEL ESCOBAR
IFT/UNESP

Prof. Dr. VICTOR DE OLIVEIRA RIVELLES
USP/IF

Março de 2018

DADOS CURRICULARES

HEMILY GOMES MARCIANO FORTES

NASCIMENTO	30/10/1989 - Itajubá / MG
FILIAÇÃO	Raimundo Marciano da Silva Imbenia Gomes Marciano
1996 / 1999	Ensino Fundamental I Escola Estadual Jorge Tibiriçá de Bourcherville - Itajubá - MG - Brasil Escola Estadual Coronel Casimiro Osório - Itajubá - MG - Brasil
2000 / 2006	Ensino Fundamental II e Ensino Médio Escola Estadual Wenceslau Brás - Itajubá - MG - Brasil
2007 / 2010	Graduação em Física Licenciatura Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI - Itajubá - MG - Brasil
2011 / 2013	Mestrado em Física e Matemática Aplicada Universidade Federal de Itajubá - UNIFEI - Itajubá - MG - Brasil
2014 / 2018	Doutorado em Física Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” Campus de Guaratinguetá - Guaratinguetá - SP - Brasil

Ao meu pai Raimundo querido, eternamente presente.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, o criador desse universo maravilhoso que nós, físicos, tanto nos esforçamos para entender e explicar.

Agradeço a todos meus colegas e professores, não só os de hoje, mas todos aqueles que fizeram parte da minha história.

Aos meus professores da graduação, mestrado e doutorado.

À FAPESP, pelo apoio nesses quatro anos de doutorado.

Aos meus colegas de doutorado, especialmente, ao Alessandro e ao Hélder pelas conversas agradáveis.

Ao meu orientador Denis Dalmazi pela dedicação e paciência, por sua amizade e compreensão em todos os momentos. Deus o abençoe!

À amiga Cecília que surgiu na minha vida em uma fase muito difícil, quando achei que não ia conseguir continuar, e fez tudo o que estava ao seu alcance para me ajudar.

A toda família Marciano que nunca mediu esforços para que esse dia chegasse, por sempre terem acreditado em mim. Obrigada mãe, Dener, Rogério, Rebecca, Rúbio, Waleska, Vinícius e todos os outros. Vocês são corresponsáveis por isso.

Ao meu esposo Guilherme, meu porto seguro, por sempre estar ao meu lado, por presenciar os momentos de luta e os momentos de vitória.

E, finalmente, mesmo eu sabendo que ele não pode ler isso hoje, não tenho como não agradecer ao maior pai que Deus poderia ter escolhido para mim. Neste ano que passou, não perdi só um pai. Perdi meu maior amigo, minha maior torcida. Nada disso seria possível sem ele. Não imaginei que ele não estaria aqui para me ver doutora. Mas um dia vou reencontrá-lo na glória e vou lhe contar como foi. Enquanto esse dia não chega, fica aqui registrada minha eterna gratidão.

Este trabalho contou com o apoio da seguinte entidade:
FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo
Número do Processo Fapesp: 2013/25368-0.

RESUMO

Partículas massivas de spin-2 são usualmente descritas pela conhecida teoria de Fierz-Pauli através de um tensor de rank-2 simétrico $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. Recentemente, tem havido um aumento no interesse por teorias que descrevam esse tipo de partícula, principalmente pela possibilidade de oferecer uma explicação alternativa para o problema da aceleração da expansão do universo, pois se o gráviton tivesse uma pequena massa, a força gravitacional diminuiria a grandes distâncias, produzindo tal aceleração. Trabalhos mais recentes têm trazido à tona outras possibilidades além de Fierz-Pauli para se descrever partículas de spin-2 massivas partindo de um tensor de rank-2 não simétrico $e_{\mu\nu} \neq e_{\nu\mu}$, os chamados modelos $\mathcal{L}(a_1)$. Tendo em vista que toda partícula deve interagir com a gravitação, no presente trabalho buscamos estudar o acoplamento desses novos modelos com um campo gravitacional de fundo. Para isso, a partir da manipulação das equações de movimento, procuramos obter os vínculos necessários para se ter uma teoria com a contagem de graus de liberdade correta. Fizemos também um estudo preliminar da versão sem massa dos modelos $\mathcal{L}(a_1)$ no espaço curvo a partir da análise das simetrias de gauge existentes. Identificamos ainda os modelos parcialmente simétricos presentes em $\mathcal{L}(a_1)$.

PALAVRAS-CHAVE: Spin-2 massivo. Modelos antissimétricos. Gravitação massiva.

ABSTRACT

Massive spin-2 particles are usually described by the well-known Fierz-Pauli theory via a symmetric rank-2 tensor $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$. Recently there has been an increase of interest in theories describing this kind of particle, especially because they can contribute to explain the accelerated expansion of the universe, since if the graviton has a small mass, the gravitational force would decrease at large distances, producing such accelerattion. In recent works other possibilities, besides the Fierz-Pauli model, which describe massive spin-2 particles starting from a non-symmetric rank-2 tensor $e_{\mu\nu} \neq e_{\nu\mu}$ have been found, the so-called $\mathcal{L}(a_1)$ models. Since every particle has to interact with the gravitation, we have studied the coupling of the new models with a background gravitational field. Therefore, from the manipulation of the equations of motion, we seek for the necessary constraints in order to achieve the correct counting of degrees of freedom. We also have done a preliminary study of the massless version of the $\mathcal{L}(a_1)$ models in the curved space from the analysis of the gauge symmetries of the theory. We also have identified the partially symmetric models present in $\mathcal{L}(a_1)$.

KEYWORDS: Massive spin-2 particles. Antisymmetric models. Massive gravity.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A busca por uma teoria que descrevesse partículas de spin-2 com massa começou a ter resultados praticamente em 1939 quando Fierz e Pauli obtiveram uma ação que satisfazia os requisitos necessários para uma teoria consistente, ficando conhecida como ação de Fierz-Pauli (FP) (FIERZ; PAULI, 1939) e tem sido amplamente utilizada como a única teoria para descrever partículas massivas de spin-2. Nessa abordagem, as partículas são descritas por um tensor simétrio de rank-2, $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$, que pode ser interpretado como a perturbação em torno de uma métrica de fundo que seja solução das equações de movimento na gravitação massiva. Esse campo $h_{\mu\nu}$ propaga 5 graus de liberdade (g.l.) em 4 dimensões[1]. Em particular, o seu traço h se anula na camada de massa da teoria, o que faz dele um campo auxiliar (GAITAN, 2007). Na Relatividade Geral (RG) de Einstein-Hilbert (EH), ao tomarmos a teoria linearizada temos partículas de spin-2 sem massa com apenas dois graus de liberdade (helicidades +2 e -2).

Em 1970, van Dam, Veltman e Zakharov estudaram a teoria de FP linear acoplada a uma fonte, o que levava a predições diferentes daquelas feitas pela Relatividade Geral (RG), por exemplo, para o ângulo de desvio pelo sol da luz vinda das estrelas (lente gravitacional), mesmo no limite de massa nula, o que chamamos de descontinuidade vDVZ (DAM; VELTMAN, 1970; ZAKHAROV, 1970). Ocorre que nem todos os 3 g.l. excedentes introduzidos pela massa do gráviton se desacoplam do tensor momento-energia quando m vai a zero. As helicidades ± 1 se desacoplam mas a helicidade 0 sem mantém acoplada ao traço do tensor momento-energia, vide seção 4.2 de (HINTERBICHLER, 2012). Uma sugestão foi levantada por Vainshtein em 1972 (VAINSHTEIN, 1972) para solucionar o problema da descontinuidade: o chamado "mecanismo de Vainshtein" que é baseado na adição de termos de autointeração para o gráviton massivo. Mais especificamente, numa gravitação massiva a aproximação quadrática (equação de movimento linear) não é confiável como seria na teoria sem massa. Ao estudarmos perturbações em torno de métricas do tipo Minkowiski (espaço plano), concluímos que estas convergem de acordo com a razão r_V/r onde r_V é o raio de Vainshtein que é inversamente proporcional à massa do gráviton. Portanto, para massas pequenas, r_V tende a infinito e a região de convergência da expansão a campo fraco $(r > r_V)$ se torna cada vez menor, o que nos obriga a levar em conta os termos não lineares (acima dos quadráticos em $h_{\mu\nu}$ na ação). Entretanto, as mesmas não linearidades que curam o problema da descontinuidade dão origem a fantasmas na teoria massiva. Boulware e Deser identificaram que tal problema surgia como um 6º g.l. não físico a nível não linear, ficando conhecido como "fantasma de Boulware-Deser (BD)" (BOULWARE; DESER, 1972). Assim, teorias de gravitação massiva foram praticamente abandonadas durante décadas, porém surge a pergunta se partículas de spin-2 massivas elementares existiriam na natureza mesmo que não sejam grávitons, uma vez que a teoria de cordas também prevê tais partículas.

Desse ponto de vista, uma vez estabelecida a teoria livre, buscou-se descrever a interação das partículas de spin-2 massivas com outros campos, por exemplo, a gravidade, já que toda partícula

[1] A simetria de Poincaré em 4 dimensões impõe que qualquer campo massivo de spin-s deva ter $2s + 1$ g.l., vide (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016) para uma referência recente.

deve estar sujeita à ação gravitacional. Nesse sentido, algumas tentativas de acoplar o modelo de FP a um campo gravitacional de fundo levaram ao desenvolvimento de alguns modelos para espaços curvos, mas com restrições no campo de fundo. Mais especificamente, o campo gravitacional de fundo deveria pertencer à classe de espaços de Einstein, o que significa satisfazer $R_{\mu\nu} = R\, g_{\mu\nu}/D$, onde D é a dimensão e R é a curvatura escalar do espaço-tempo (ARAGONE; DESER, 1971; BENGTSSON, 1995). Mais tarde, partindo de uma motivação da teoria de cordas, em (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999; BUCHBINDER et al., 2000; BUCHBINDER; GITMAN; PERSHIN, 2000) foi proposta uma lagrangiana em que coeficientes que são funções não analíticas da massa como $1/m^2$ são permitidos, ou seja, uma lagrangiana com infinitos termos contendo potências mais altas na curvatura, uma série em R/m^2. Assim, foi possível estabelecer de forma perturbativa uma ação mais geral para partículas de spin-2 massivas com acoplamentos não mínimos em um campo gravitacional de fundo arbitrário. Esse tema ficou estagnado também por décadas. Nos últimos anos, entretanto, tem aumentado significativamente o interesse em teorias de partículas massivas de spin-2 por diversos motivos. O primeiro deles é a possibilidade de se explicar a constatada expansão acelerada do universo (RIESS et al., 1998; PERLMUTTER et al., 1999) devido à relação entre partículas de spin-2 e o próprio gráviton, uma vez que a parte sem massa da ação de FP corresponde à ação de Einstein-Hilbert linearizada. Nesse sentido, a Relatividade Geral prediz que o gráviton é uma partícula de spin-2 sem massa com autointeração, mas não está descartada a possibilidade de haver pequenas correções na massa. Assim, se o gráviton tivesse uma pequena massa, a força gravitacional a grandes distâncias diminuiria exponencialmente (potencial de Yukawa), oferecendo uma explicação alternativa para a aceleração da expansão do universo. Apesar do fato de que as recentes detecções de ondas gravitacionais são compatíveis com grávitons sem massa, previstos pela RG, os grávitons massivos não estão descartados. Tais experimentos estabeleceram um limite superior de $10^{-22}\, eV$ para sua massa (RHAM et al., 2017). Destacamos ainda que explicar a aceleração do universo a partir de um mecanismo que se baseia na massa do gráviton apresenta uma vantagem sobre a explicação em termos de uma constante cosmológica, afinal, ao contrário desta última, a massa do gráviton seria naturalmente pequena (RHAM et al., 2017).

Outra motivação para se estudar teorias de partículas de spin-2 massivas seria uma melhor compreensão do mecanismo de Vainshtein (DEFFAYET et al., 2002; BABICHEV; DEFFAYET; ZIOUR, 2009; BABICHEV; DEFFAYET; ZIOUR, 2010) que deixa claro que as não linearidades da teoria se tornam mais importantes conforme a massa do gráviton vai a zero. Assim, as predições da teoria linear não são confiáveis no limite de massa nula.

Pensou-se por um tempo não ser possível obter uma teoria não linear livre de fantasmas pelos motivos já citados, até que em 2003 voltou à tona a questão de como contornar esse impasse da gravitação massiva (ARKANI-HAMED; GEORGI; SCHWARTZ, 2003; CREMINELLI et al., 2005). Frente às dificuldades encontradas, a gravitação massiva passou a ser analisada como uma teoria de campos efetiva. Nesse sentido, poderiam ser considerados os efeitos da teoria até um dado valor Λ da energia, o chamado “cutoff"da teoria. Para o modelo de FP, os autores de (ARKANI-HAMED; GEORGI; SCHWARTZ, 2003) sugeriram $\Lambda = (m_g^4 M_P)^{1/5}$ que depois pôde ser aumentado para

$\Lambda = (m_g^2 M_P)^{1/3}$, onde m_g é a massa do gráviton e M_P a de Planck. Como resultado desses trabalhos[2], mostrou-se que sexto grau de liberdade poderia ser evitado ao se fazer uma escolha específica dos coeficientes dos termos quadráticos e cúbicos em $h_{\mu\nu}$ da teoria. Mais tarde, algumas teorias de gravitação massiva foram desenvolvidas por de Rham, Gabadaze e Tolley (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011; RHAM, 2014; RHAM; GABADADZE, 2010; RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2012), os chamados modelos dRGT, onde eles primeiramente mostraram a ausência de fantasmas na teoria no limite de desacoplamento[3] usando uma abordagem análoga a de (ARKANI-HAMED; GEORGI; SCHWARTZ, 2003; CREMINELLI et al., 2005). Nesses modelos, a Lagrangiana contém os coeficientes apropriados dando origem a teorias que são livres de fantasmas nesse limite. Em seguida, usando uma análise Hamiltoniana, eles demonstraram a ausência de fantasmas na teoria não linear completa para além do limite de desacoplamento (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011). A formulação da teoria dRGT é baseada em duas métricas: uma dinâmica $g_{\mu\nu}$ e outra não dinâmica, $f_{\mu\nu}$, geralmente escolhida como sendo a métrica de Minkowski. Em 2015, foi obtida a partir dos modelos dRGT uma teoria covariante linear consistente com a descrição de um gráviton massivo se propagando em um campo de fundo arbitrário. Para se chegar a esse resultado, as duas métricas presentes no modelo dRGT são expandidas: $g_{\mu\nu}$ em torno de uma métrica de fundo $g^{(0)}_{\mu\nu}$ mais uma perturbação $h_{\mu\nu}$ e a métrica não dinâmica $f_{\mu\nu}$ é expandida em termos também de $g^{(0)}_{\mu\nu}$ mais correções que dependem de $g^{(0)}_{\mu\nu}$ e são determinadas de forma que termos lineares em $h_{\mu\nu}$ desapareçam, ficando toda a teoria escrita apenas em termos de $g^{(0)}_{\mu\nu}$ e termos no mínimo quadráticos em $h_{\mu\nu}$, excluindo, portanto, a necessidade do uso de duas métricas efetivamente (BERNARD; DEFFAYET; STRAUSS, 2015b; BERNARD; DEFFAYET; STRAUSS, 2015a). Com isso, resultados anteriores obtidos perturbativamente em R/m^2 (BUCHBINDER et al., 2000; BUCHBINDER; GITMAN; PERSHIN, 2000) foram recuperados. Todo esse avanço das recentes teorias de gravitação massiva, cujo ponto de partida (versão linearizada) é a teoria de FP, tem sido também uma motivação para o aumento do interesse em teorias de partículas massivas de spin-2.

Esse é, portanto, um esboço daquilo que vem ocorrendo no âmbito da teoria de campos de spin-2 massivo e, consequentemente, na gravitação massiva a partir do modelo de FP nas últimas décadas, visto que Fierz-Pauli é considerado por muitos autores a única descrição possível para partículas de spin-2 massivas através de um tensor de rank-2 e seu limite sem massa seria também a única maneira de descrever partículas sem massa também através de um tensor de rank-2.

Em contrapartida, trabalhos posteriores (DALMAZI, 2012; DALMAZI, 2013a; DALMAZI, 2013b; CASINI; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2002; MORAND; SOLODUKHIN, 2012) têm demonstrado que existem outras possibilidades de descrição de partículas de spin-2 massivas (e sem massa) livres igualmente consistentes, partindo-se de um tensor de rank-2 não simétrico $e_{\mu\nu} \neq e_{\nu\mu}$. Mais especificamente, em (DALMAZI, 2013a), partiu-se de um Ansatz geral de segunda ordem em derivadas para uma lagrangiana quadrática para um tensor de rank-2 não simétrico e demandando a existência de apenas um pólo massivo no setor de spin-2 do propagador da teoria, chegou-se a uma família de teorias livres consistentes com a descrição de partículas massivas de spin-2. Temos, então, um

[2] A conclusão de (CREMINELLI et al., 2005) era que o fantasma era inevitável, porém o cálculo tinha um sinal errado.

[3] O limite de desacoplamento ocorre quando a massa do gráviton tende a zero e a massa de Planck tende ao infinito, mas uma certa combinação delas se mantém finita.

conjunto de Lagrangianas $\mathcal{L}(a_1)$, onde a_1 é um parâmetro real arbitrário, que descrevem partículas massivas de spin-2 livres através de um tensor não simétrico. Podemos dividir esses modelos em três casos: o primeiro seria quando $a_1 = 1/4$, onde a parte antissimétrica do campo $e_{\mu\nu}$ se torna não dinâmica e ficamos apenas com um tensor simétrico e recaímos na teoria usual de FP; o segundo caso é quando $a_1 = -1/12$ e chegamos a um modelo que chamamos de nFP (non Fierz-Pauli) devido ao seu termo de massa ser diferente, mostrando que há possibilidades além do paradigmático ajuste de FP; finalmente, o terceiro caso engloba os demais valores possíveis de a_1, ou seja, é aquele em que $a_1 \neq 1/4$ e $a_1 \neq -1/12$. Não há redefinição de campo que relacione os modelos com $a_1 \neq 1/4$ com a teoria de FP ($a_1 = 1/4$), de forma geral. O caso $\mathcal{L}(a_1 = -1/4)$ corresponde ao modelo de (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) o qual foi brevemente estudado acoplado a um espaço curvo de fundo do tipo maximamente simétrico. Esses modelos, assim como FP, apresentam os chamados campos auxiliares (GAITAN, 2007) que, apesar de estarem presentes na lagrangiana e serem importantes para a consistência da teoria, se anulam na camada de massa.

O presente trabalho de doutorado visa dar continuidade ao estudo dos modelos $\mathcal{L}(a_1)$, começando pelo acoplamento dos mesmos com um campo gravitacional de fundo para a_1 arbitrário, especialmente $a_1 \neq 1/4$, visto que a gravitação é uma interação universal. Para isso, realizamos o acoplamento mínimo trocando as derivadas comuns pelas derivadas covariantes e, como sabemos do caso $a_1 = 1/4$, é preciso adicionar também termos não mínimos para obter uma teoria consistente (ARAGONE; DESER, 1971; ARAGONE; DESER, 1980). Feito isso, utilizando o formalismo de vínculos Lagrangianos (GAITAN, 2007; BUCHBINDER et al., 2000), procuramos pela generalização para espaços curvos dos vínculos tensorial, vetorial e escalar que são necessários para eliminar os graus de liberdade não físicos da teoria já no espaço plano. Esse método consiste em ajustar as constantes da teoria de forma que as equações de movimento levem a expressões que possam se tornar vínculos, mediante a eliminação das segundas derivadas covariantes. Nesse processo, nós assumimos que os coeficientes dos termos de acoplamento não mínimos são funções analíticas de m^2. Tal condição terá papel importante em nosso trabalho e nos levará a uma restrição no espaço de fundo, como veremos mais adiante.

Após o estudo do acoplamento desses modelos a um campo gravitacional de fundo, foi feito um estudo preliminar sobre as simetrias locais e as versões sem massa dos mesmos. Como já foi falado, para se encontrar teorias massivas em espaços curvos, primeiramente se realiza o acoplamento mínimo e, em seguida, adiciona-se termos de curvatura de tal forma que se obtenha os vínculos necessários para que se preserve o número correto de g.l. Por outro lado, para teorias sem massa em espaços curvos, depois do acoplamento mínimo, adiciona-se os termos de curvatura com coeficientes apropriadamente escolhidos de forma a manter a invariância da teoria sob certas simetrias de gauge. Desta forma, foi possível encontrar as versões com simetrias locais dos modelos $\mathcal{L}(a_1)$.

Quando lidamos com espaços curvos, nos deparamos ainda com uma outra situação diferente das apresentadas. Em espaços de fundo com curvatura constante, existe um determinado valor para a razão R/m^2 que não nos permite chegar ao vínculo escalar da teoria, nos levando, em contrapartida, a uma simetria de *gauge* escalar. Consequentemente, teríamos uma teoria que descreve uma partícula de spin-2 massiva, porém possivelmente com apenas 4 g.l. em D=4 ao invés dos $5 = 2s + 1$ usuais para o caso massivo. Esse tipo de teoria vem sendo estudada em modelos de gravitação massiva e é conhecida como *teoria parcialmente sem massa*. Identificamos as possíveis teorias parcialmente sem massa correspondentes aos modelos $\mathcal{L}(a_1)$. No entanto, é uma parte do trabalho ainda preliminar e que necessita ainda de muito aprofundamento e análise.

O conteúdo da presente tese está divido da seguinte forma: no capítulo 2 é feita uma breve revisão da teoria livre de Fiez-Pauli e também dos principais resultados de seu acoplamento com espaço gravitacional de fundo. No capítulo 3 apresentamos os novos modelos para partículas de spin-2 massivas, $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}(a_1)$, os quais partem de um tensor de rank-2 não simétrico. Uma parte dos cálculos e os resultados a que chegamos estão descritos no capítulo 4 desta tese. No Capítulo 5, abordamos a busca pelas versões sem massa dos modelos $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}(a_1)$ estudando as simetrias de *gauge* existentes. Apresentamos também as teorias parcialmente sem massa presentes nos modelos em questão. Finalmente, no Capítulo 6, fazemos as considerações finais acerca de todo o trabalho realizado, além de pontuarmos outras abordagens realizadas mas que não nos levaram a resultados conclusivos ou que ainda estão em processo de estudo. Há também no final desta tese um apêndice onde são disponibilizadas as principais identidades e notações utilizadas pela autora.

2 A TEORIA DE FIERZ-PAULI

Na busca por uma teoria invariante de Lorentz que fosse quadrática no campo e que descrevesse partículas massivas de spin-2, Fierz e Pauli chegaram em 1939 à seguinte ação(FIERZ; PAULI, 1939):

$$S = \int d^D x \left[\partial_\mu h_{\nu\lambda}\partial^\nu h^{\mu\lambda} - \frac{1}{2}\partial_\lambda h_{\mu\nu}\partial^\lambda h^{\mu\nu} - \partial_\mu h^{\mu\nu}\partial_\nu h + \frac{1}{2}\partial_\lambda h \partial^\lambda h - \frac{m^2}{2}(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) \right] \tag{1}$$

onde $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ é um tensor de campo simétrico.

O termo cinético dessa ação coincide exatamente com a Lagrangiana de Einstein-Hilbert linearizada[1] $\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{-g}R$ expandida em torno da métrica de Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\kappa h_{\mu\nu}$. Ou seja, do ponto de vista da teoria quântica de campos, a teoria de Einstein-Hilbert descreve partículas de spin-2 sem massa.

A parte sem massa da ação (1) é invariante sob reparametrizações linearizadas

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \tag{2}$$

para um parâmetro de *gauge* vetorial $\xi_\mu(x)$. Essa simetria de *gauge* fixa os coeficientes dos termos cinéticos de (1) e garante o número de g.l. correto para a teoria sem massa, a saber, 2 g.l. para uma partícula de spin-2 sem massa em $D = 4$. O termo de massa $-\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2)$ não apresenta tal simetria e o coeficiente -1 que aparece na relação entre h^2 e $h_{\mu\nu}h^{\mu\nu}$ é conhecido como o ajuste de Fierz-Pauli tido como obrigatório nesse tipo de teoria, pois sua violação levaria à adição de um escalar com energia cinética negativa, ou seja, um fantasma.

Qualquer campo massivo de spin-s deve ter $2s+1$ g.l. de acordo com as representações irredutíveis do grupo de Poincaré. Efetivamente, a ação de Fierz Pauli em $D = 4$ descreve corretamente os 5 g.l. esperados para uma partícula massiva de spin-2, o que pode ser visto diretamente da manipulação das suas equações de movimento. São elas:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &\equiv \frac{\delta S}{\delta h^{\mu\nu}} \\ &= \Box h_{\mu\nu} - \partial^\lambda\partial_\mu h_{\lambda\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\lambda\partial^\sigma h_{\lambda\sigma} + \partial_\mu\partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}\Box h - m^2(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h) = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Aplicando ∂^μ nas equações de movimento (3), obtemos, se $m^2 \neq 0$:

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} - \partial_\nu h = 0\ , \tag{4}$$

[1] Fierz e Pauli primeiramente obtiveram a teoria massiva e só então notaram que ela levava à relatividade geral linearizada no limite de massa nula.

que de volta em (3) nos leva a

$$\Box h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - m^2(h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h) = 0 \; . \tag{5}$$

Tomando o traço dessa última, encontramos que $h = 0$, o que, por sua vez, nos leva a $\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0$. Temos, portanto, encontrado as chamadas condições de FP,

$$\partial^\mu h_{\mu\nu} = 0 \tag{6}$$
$$h = 0 \tag{7}$$

e, voltando a (3), as equações de movimento se tornam equações de Klein-Gordon

$$(\Box - m^2) h_{\mu\nu} = 0 \; . \tag{8}$$

Uma vez que $h_{\mu\nu}$ é um campo simétrico de rank-2, ele possui, em princípio, $(D^2 + D)/2$ componentes. Os vínculos vetorial e escalar dados em (6) e (7) restringem esse número para $(D-2)(D+1)/2$. Assim, em $D = 4$, temos 5 g.l. para o campo $h_{\mu\nu}$, como esperado para partículas de spin-2 massivas.

Vale notar que o modelo de FP apresenta um campo na sua formulação lagrangiana, o traço h, que entra na sua lagrangiana mas se anula na camada de massa, ou seja, quando usamos as equações de movimento. Chamamos esse tipo de campo de “campo auxiliar”, cuja existência é importante para a formulação do modelo, mas que acaba sendo nulo ao usarmos as suas equações de movimento.

A teoria linear de FP pode ser estendida para espaços curvos. Para isso, é preciso encontrar a versão de (1) acoplada a um campo gravitavional de fundo $g_{\mu\nu}$. Para que seja consistente, a nova teoria deve reproduzir o mesmo número de g.l. propagantes que no caso plano. Sabe-se que o acoplamento mínimo não é suficiente e que termos não mínimos devem ser adicionados (ARAGONE; DESER, 1971; ARAGONE; DESER, 1980). Fazendo isso, a ação mais geral para um campo de spin-2 massivo em um espaço curvo quadrático em derivadas e que seja coerente com o limite plano vem dada por:

$$\begin{aligned} S \;=\; & \int d^D x \sqrt{-g} \Big[-\frac{1}{2} \nabla_\alpha h_{\mu\nu} \nabla^\alpha h^{\mu\nu} + \nabla_\alpha h_{\mu\nu} \nabla^\nu h^{\mu\alpha} - \nabla_\mu h \nabla_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu h \nabla^\mu h + \\ & + a_1 R \, h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} + a_2 R \, h^2 + a_3 R^{\mu\alpha\nu\beta} h_{\mu\nu} h_{\alpha\beta} + a_4 R^{\mu\beta} h_{\mu\nu} h_\beta{}^\nu + a_5 R^{\mu\nu} \, h_{\mu\nu} h + \\ & - \frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \Big] \end{aligned} \tag{9}$$

onde os coeficientes a_j’s são arbitrários por ora, compare com (1).

A manipulação das equações de movimento $E_{\mu\nu} = 0$ vindas de (9) devem nos permitir chegar aos vínculos vetorial e escalar que generalizam (6) e (7) para o espaço curvo. O vínculo vetorial é obtido sem problemas a partir de $\nabla^\mu E_{\mu\nu} = 0$ e sem adicionar restrições aos parâmetros a_j’s. Por outro lado, ao se procurar pelo vínculo escalar, alguns dos termos que aparecem são:

$$
\begin{aligned}
&\frac{m^2}{D-2} g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} + \nabla^\mu \nabla^\nu E_{\mu\nu} + b_1 R g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} + b_2 R^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = \\
&+ \left(2a_4 - 2b_2 - 2 - \frac{4a_3}{D-2}\right) \tilde{R}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla^\mu h_{\mu\beta} + \left(a_5 + b_2 + \frac{2a_3}{D-2}\right) \tilde{R}^{\alpha\beta} \nabla_\mu \nabla^\mu h_{\alpha\beta} + \\
&+ \left(a_5 + b_2 + 1 + \frac{2a_3}{D-2}\right) \tilde{R}^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta h + \ldots = 0
\end{aligned} \tag{10}
$$

onde b_1 e b_2 são constantes arbitrárias e $\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/D$. Não é possível eliminar todas as segundas derivadas vindas dos termos com $\tilde{R}_{\mu\nu}$ simultaneamente apenas fixando os coeficientes a_j's. Por isso se faz necessário impor restrições sobre o campo gravitacional de fundo, a saber, os autores de (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999; BUCHBINDER et al., 2000; BUCHBINDER; GITMAN; PERSHIN, 2000) consideraram uma gama de espaços curvos conhecida como espaços de Einstein em que $\tilde{R}_{\mu\nu} = 0$ ou, da mesma forma,

$$
R_{\mu\nu} = \frac{R}{D} g_{\mu\nu} \tag{11}
$$

Nesse caso, a ação linear para um gráviton massivo se propagando em um espaço de fundo do tipo Einstein com métrica $g_{\mu\nu}$ vem dada por (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999):

$$
\begin{aligned}
S = \int d^{\mathrm{D}} x \sqrt{-g} \Big[&-\frac{1}{2} \nabla_\alpha h_{\mu\nu} \nabla^\alpha h^{\mu\nu} + \nabla_\alpha h_{\mu\nu} \nabla^\nu h^{\mu\alpha} - \nabla_\mu h \nabla_\nu h^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\mu h \nabla^\mu h + \\
&-\frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) + \frac{R}{D} \left(\xi h^{\mu\nu} h_{\mu\nu} + \frac{(1-2\xi)}{2} h^2 \right) \Big]
\end{aligned} \tag{12}
$$

onde temos agora apenas um parâmetro arbitrário ξ. Por simplicidade, costuma-se escolher $\xi = 1$ e assim o faremos daqui por diante.

Para $m = 0$, a ação (12) possui a simetria de *gauge* vetorial

$$
\delta h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu \,, \tag{13}
$$

propagando 2 g.l. em D=4 e coincide com a versão linearizada de

$$
S_\Lambda = M_{\mathrm{P}}^2 \int d^4 x \, \sqrt{-g} \, (R - 2\Lambda) \tag{14}
$$

expandida em torno de um campo gravitacional de fundo $g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ do tipo Einstein, mas por abuso de linguagem voltamos a usar $g_{\mu\nu}$ no lugar de $g^{(0)}_{\mu\nu}$ em (12).

Sabe-se ainda que uma teoria com simetria vetorial que descreva partículas de spin-2 sem massa acopladas a um campo gravitacional de fundo para ser consistente necessita que consideremos, necessariamente, espaços do tipo Einstein, ou seja, perturbativamente o gráviton apenas pode se propagar nesse tipo de espaço (DESER; HENNEAUX, 2007).

Para $m \neq 0$, a ação não possui simetria de *gauge* . Mas podemos, assim como no caso plano, procurar pelos vínculos necessários para a eliminação de graus de liberdade excedentes através da manipulação das equações de movimento de (12) $E_{\mu\nu} = 0$. Nesse caso, a divergência das equações de movimento $\nabla^\mu E_{\mu\nu} = 0$ nos leva aos vínculos

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} - \nabla_\nu h = 0 \;, \tag{15}$$

e o traço $g^{\mu\nu} E_{\mu\nu} = 0$ combinado com $\nabla^\mu \nabla^\nu E_{\mu\nu} = 0$ nos dá

$$\left[m^2 (D-1) - \frac{R}{D}(D-2) \right] h = 0 \;. \tag{16}$$

Se o termo entre colchetes for não nulo[2], chegamos ao vínculo escalar

$$h = 0 \tag{17}$$

que de volta em (15), nos leva à condição de transversalidade do campo

$$\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0 \;. \tag{18}$$

Os vínculos (17) e (18) generalizam as condições de FP (6) e (7) para espaços curvos, o que nos garante o número correto de g.l. para a teoria massiva, a saber, 5 g.l. para $D = 4$.

Essas condições nos permitem reescrever as equações de movimento $E_{\mu\nu} = 0$ como

$$(\Box - m^2) h_{\mu\nu} + 2 R_{\mu\rho\nu\sigma} h^{\rho\sigma} = 0 \;. \tag{19}$$

onde $\Box = \nabla^\mu \nabla_\mu$. Notemos que as equações de movimento não são exatamente do tipo Klein-Gordon pois apresentam um termo adicional com a curvatura de Riemann. Considerando que a condição de transversalidade do campo deve ser satisfeita, ou seja, $\nabla^\mu h_{\mu\nu} = 0$, era de se esperar que esse termo estivesse presente. Do contrário, haveria uma inconsistência ao se calcular o comutador $[\nabla^\mu, \Box - m^2] h_{\mu\nu}$. Em outras palavras, se as equações de movimento fossem do tipo Klein-Gordon, $(\Box - m^2) h_{\mu\nu} = 0$, por consistência o comutador mencionado deveria ser nulo devido a (18), mas ao abri-lo vemos que isso não ocorre:

$$\begin{aligned}
[\nabla^\mu, \Box - m^2] h_{\mu\nu} &= [\nabla^\mu, \Box] h_{\mu\nu} \\
&= \nabla_\alpha [\nabla^\mu, \nabla^\alpha] h_{\mu\nu} + [\nabla^\mu, \nabla^\alpha] \nabla_\alpha h_{\mu\nu} \\
&= \nabla_\alpha (R^{\lambda\alpha} h_{\lambda\nu} + R_\nu{}^{\lambda\mu\alpha} h_{\mu\lambda}) - R^{\lambda\mu} \nabla_\lambda h_{\mu\nu} + R^{\lambda\alpha} \nabla_\alpha h_{\lambda\nu} + R_\nu{}^{\lambda\mu\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\lambda} \\
&= \nabla^\lambda h_{\lambda\nu} + R_\nu{}^{\lambda\mu\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\lambda} + R_\nu{}^{\lambda\mu\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\lambda} \\
&= 0 + 2 R_\nu{}^{\lambda\mu\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\lambda} \\
&= 2 R_\nu{}^{\lambda\mu\alpha} \nabla_\alpha h_{\mu\lambda} \neq 0
\end{aligned} \tag{20}$$

Note que usamos $\nabla_\mu R^{\mu\alpha} = 0 = \nabla_\mu R^{\mu\nu\beta\sigma}$ que são válidas para espaços tipo Einstein. Note ainda que

[2] O caso em que o termos entre colchetes for nulo nos leva a resultados interessantes que serão discutidos mais adiante, no Capítulo 5.

(20) está de acordo com a aplicação de ∇^μ em (19).

Como vimos, os resultados apresentados anteriormente são válidos para o acoplamento da partícula de spin-2 massiva com campos de fundo do tipo Einstein. Porém, notou-se (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999) posteriormente que ao se permitir que os coeficientes dos termos não mínimos da ação original fossem do tipo $1/m^2$ e potências mais altas nas curvaturas aparecessem, que era possível obter perturbativamente em $1/m^2$ uma lagrangiana válida para espaços de fundo arbitrários.

3 OS NOVOS MODELOS MASSIVOS $\mathcal{L}(a_1)$: ESPAÇO PLANO

A teoria de Fierz-Pauli tem sido amplamente utilizada como a única teoria para descrever partículas massivas de spin-2 através de um tensor de rank-2 e seu limite sem massa seria também a única maneira de descrever partículas sem massa também através de um tensor de rank-2 da mesma forma que as teorias de Maxwell-Proca e Maxwell se tornaram descrições paradigmáticas de partículas de spin-1 com e sem massa via tensor de rank-1, respectivamente.

Em contrapartida, a busca por descrições alternativas de sistemas físicos tais como partículas massivas de spin-2 é sempre bem vinda, especialmente por causa das dificuldades de adicionarmos interação em modelos de alto spin. Alguns trabalhos (DALMAZI, 2012; DALMAZI, 2013a; DALMAZI, 2013b; CASINI; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2002; MORAND; SOLODUKHIN, 2012) têm demonstrado que existem outras possibilidades, igualmente consistentes, partindo de um tensor de rank-2 não simétrico[1] $e_{\mu\nu} \neq e_{\nu\mu}$. Mais especificamente, em (DALMAZI, 2013a), partiu-se de um Ansatz geral de segunda ordem em derivadas para uma Lagrangiana quadrática para um tensor de rank-2 não simétrico e demandando a existência de apenas um pólo massivo no setor de spin-2 do propagador da teoria, chegou-se a uma família de teorias livres consistentes com a descrição de partículas massivas de spin-2. Em (DALMAZI; SANTOS; MENDONÇA, 2015) foi apresentada essa família de lagrangianas $\mathcal{L}(a_1)$ em D dimensões, mas por simplicidade iremos focar em $D = 4$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(a_1) = & -\frac{1}{2}\partial^\mu e^{(\alpha\beta)}\partial_\mu e_{(\alpha\beta)} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\partial^\mu e[\partial_\mu e - 2\partial^\alpha e_{(\alpha\mu)}] + \\ & +[\partial^\alpha e_{(\alpha\beta)}]^2 + \left(a_1 - \frac{1}{4}\right)(\partial^\alpha e_{\alpha\beta})^2 - \frac{m^2}{2}(e_{\mu\nu}e^{\nu\mu} - e^2)\end{aligned} \tag{1}$$

Temos, então, um conjunto de Lagrangianas[2] $\mathcal{L}(a_1)$, onde a_1 é um parâmetro real arbitrário, que descreve partículas massivas de spin-2 livres, através de um tensor não simétrico. Não há redefinição de campo que relacione essa família para $a_1 \neq 1/4$ com a teoria de FP (1).

Podemos dividir esses modelos em três casos:

- o primeiro seria quando $a_1 = 1/4$, onde a parte antissimétrica do campo $e_{\mu\nu}$ desaparece dos termos com derivadas de (1) e se torna não dinâmica e ficamos apenas com um tensor simétrico e recaímos na teoria usual de FP descrita no capítulo anterior;
- o segundo caso é quando $a_1 = -1/12$ e, a partir de algumas transformações, chegamos a um modelo que chamamos de nFP (non Fierz-Pauli) devido ao seu termo de massa não ser necessariamente o que aparece em FP, mostrando que há possibilidades além do usual ajuste de FP (mais detalhes na seção 3.1);
- finalmente, o terceiro caso engloba os demais valores possíveis de a_1, ou seja, é aquele em que $a_1 \neq 1/4$ e $a_1 \neq -1/12$ (mais detalhes na seção 3.2).

[1] Mesmo para um tensor simétrico, no caso sem massa, há uma alternativa conhecida como WTDIFF, vide, por exemplo, a tese de doutorado (BLAS, 2008).

[2] A existência dos modelos $\mathcal{L}(a_1)$ contradiz as conclusões do trabalho (NIEUWENHUIZEN, 1973).

Além do modelo massivo, foi estudada também a correspondente versão sem massa de (1). É possível identificar seu conteúdo físico através da introdução de campos auxiliares e da realização de algumas transformações, de modo que a parte antissimétrica do campo $e_{\mu\nu}$ se separa da parte simétrica e passa a ser descrita por um escalar ψ. Assim, $\mathcal{L}(a_1)$ com $m = 0$ pode ser reescrita da seguinte forma (DALMAZI, 2013a):

$$\mathcal{L}^{m=0}(a_1) = \mathcal{L}_{\text{EH}}(h_{\mu\nu}) - \frac{3}{2}\left(a_1 - \frac{1}{4}\right)\left[a_1 + \frac{1}{12}\right]\partial_\mu\psi\,\partial^\mu\psi \tag{2}$$

onde $\mathcal{L}_{\text{EH}}(h_{\mu\nu})$ é a lagrangiana linearizada de Einstein-Hilbert usual sendo $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$ um campo de spin-2 e ψ um campo escalar, ambos sem massa. Temos, portanto:

- uma partícula de spin-2 sem massa e uma partícula escalar sem massa para $a_1 < -1/12$ ou $a_1 > 1/4$;
- para exatamente $a_1 = -1/12$ ou $a_1 = 1/4$ a partícula escalar desaparece e ficamos apenas com a partícula de spin-2 sem massa;
- para os demais valores de a_1, o escalar se torna um fantasma.

Portanto, a teoria $\mathcal{L}^{m=0}(a_1)$ é unitária para $a_1 \leq -1/12$ ou $a_1 \geq 1/4$. O caso $\mathcal{L}(a_1 = -1/4)$ corresponde ao modelo de (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) o qual foi brevemente estudado acoplado a um espaço curvo de fundo do tipo maximamente simétrico.

3.1 $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$: MODELO $\mathcal{L}(a_1)$ COM $a_1 = -1/12$

Reescrevamos a lagrangiana dada em (1) agora com $a_1 = -1/12$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(a_1 = -1/12) = &-\frac{1}{2}\partial^\mu e^{(\alpha\beta)}\partial_\mu e_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{6}\partial^\mu e[\partial_\mu e - 2\partial^\alpha e_{(\alpha\mu)}] + \\ &+[\partial^\alpha e_{(\alpha\beta)}]^2 - \frac{1}{3}(\partial^\alpha e_{\alpha\beta})^2 - \frac{m^2}{2}(e_{\mu\nu}e^{\nu\mu} - e^2)\end{aligned} \tag{3}$$

A parte sem massa de $\mathcal{L}(a_1)$ quando $a_1 = -1/12$ é invariante sob reparametrizações linearizadas, transformações de Weyl e deslocamentos ("shifts") antissimétricos transversos:

$$\delta e_{\mu\nu} = \partial_\nu\xi_\mu + \eta_{\mu\nu}\phi + \partial^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]} \tag{4}$$

onde $\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}$ é um tensor de rank-3 totalmente antissimétrico. Usando a simetria de Weyl podemos fazer uma transformação no campo $e_{\mu\nu}$ tal que apenas o termo de massa em (3) se altere. Dessa forma, chegaremos a uma outra expressão para a lagrangiana a qual chamaremos de $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$ e que possui um termo de massa com um parâmetro c arbitrário:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c) = &-\frac{1}{2}\partial^\mu e^{(\alpha\beta)}\partial_\mu e_{(\alpha\beta)} + \frac{1}{6}\partial_\mu e[\partial^\mu e - 2\partial_\nu e^{(\nu\mu)}] + \\ &+[\partial^\alpha e_{(\alpha\beta)}]^2 - \frac{1}{3}[\partial_\mu e^{\mu\nu}]^2 - \frac{m^2}{2}(e_{\mu\nu}e^{\nu\mu} + c\,e^2)\end{aligned} \tag{5}$$

sendo que o nome nFP significa “não Fierz-Pauli” devido ao termo de massa não apresentar necessariamente o ajuste de FP. Apesar disso, esse modelo descreve consistentemente partículas massivas de spin-2 e seu limite de massa nula descreve partículas de spin-2 sem massa, assim como o modelo de FP. O caso sem massa $\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{m=0}(c)$ apareceu primeiramente em (CASINI; MONTEMAYOR; URRUTIA, 2002).

Assim como no caso de FP, podemos manipular as equações de movimento para $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$, buscando pelos vínculos necessários para que o modelo seja compatível com a descrição de uma partícula de spin-2 massiva. Vejamos as equações de movimento dadas por:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} \;=\;& \Box e_{(\mu\nu)} + \frac{\eta_{\mu\nu}}{3}(\partial^\alpha\partial^\beta e_{\alpha\beta} - \Box e) + \frac{1}{3}\partial_\mu\partial_\nu e - \partial_\mu\partial^\alpha e_{(\nu\alpha)} + \\ & -\partial_\nu\partial^\alpha e_{(\alpha\mu)} + \frac{2}{3}\partial_\mu\partial^\alpha e_{\alpha\nu} - m^2(e_{\nu\mu} + c\,\eta_{\mu\nu}e) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

De $\partial^\nu E_{\mu\nu} = 0$, temos

$$\partial^\nu e_{\nu\mu} + c\,\partial_\mu e = 0 \tag{7}$$

De volta em (6), obtemos de $E_{\mu\nu} - E_{\nu\mu} = 0$:

$$e_{[\mu\nu]} = 0 \tag{8}$$

De $\eta^{\mu\nu}E_{\mu\nu} = 0$, temos:

$$\begin{gathered} m^2\left(c + \frac{1}{4}\right)e = 0 \\ \text{se } c \neq -\frac{1}{4} \Longrightarrow e = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

e, consequentemente, de (7) chegamos a que

$$\partial^\alpha e_{\alpha\nu} = 0\,. \tag{10}$$

Assim, obtivemos as condições de FP (8), (9) e (10) necessárias para uma contagem correta[3] de 5 g.l. em $D = 4$ consistentes com $5 = 2s + 1$. As equações de movimento dadas em (6) se tornam as equações de Klein-Gordon:

$$(\Box - m^2)e_{(\mu\nu)} = 0\,. \tag{11}$$

Por outro lado, se $c = -1/4$ o modelo $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$ se torna invariante sob transformações de Weyl: $\delta e_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}\phi$. Podemos, então, fixar o *gauge* $e = 0$ e obter todas as condições de FP (8), (9) e (10) juntamente das equações de Klein-Gordon (11).

Notemos que, assim como no modelo de FP, há campos auxiliares presentes na formulação de

[3] Vide (KOENIGSTEIN; GIACOSA; RISCHKE, 2016) para uma dedução recente das condições de FP para spin-2 usando os invariantes de Casimir do grupo de Poincaré.

$\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$. Além do traço "$e$", a parte antissimétrica do campo, $e_{[\mu\nu]}$, também é zero na camada de massa, vide (8) e (9). Logo, dizemos que "e" e $e_{[\mu\nu]}$ são campos auxiliares. Exceto no caso em que $c = -1/4$ quando o traço pode ser escolhido nulo de antemão devido à simetria de Weyl que o modelo adquire somente para esse valor específico de c.

3.2 MODELO $\mathcal{L}(a_1)$ COM $(a_1 \neq 1/4, -1/12)$

Nesse caso, temos a família de lagrangianas apresentada em (1) onde a_1 é qualquer número diferente de $1/4$ e $-1/12$. A parte sem massa de (1) é invariante sob reparametrizações linearizadas e shifts antissimétricos transversos:

$$\delta e_{\mu\nu} = \partial_\nu \xi_\mu + \partial^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]} \tag{12}$$

Ao contrário do que ocorre com FP e nFP, o limite de massa nula de $\mathcal{L}(a_1)$ com $a_1 \neq 1/4$ e $a_1 \neq -1/12$ descreve partículas de spin-2 sem massa e um campo escalar sem massa, como já vimos a partir da análise de (2).

As equações de movimento para $\mathcal{L}(a_1)$ vem dadas por:

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} \;=\; & \Box e_{(\mu\nu)} + 2\left(a_1 + \frac{1}{4}\right)[\eta_{\mu\nu}(\partial^\alpha\partial^\beta e_{\alpha\beta} - \Box e) + \partial_\mu\partial_\nu e] - \partial_\mu\partial^\alpha e_{(\alpha\nu)} + \\ & -\partial_\nu\partial^\alpha e_{(\alpha\mu)} - 2\left(a_1 - \frac{1}{4}\right)\partial_\mu\partial^\alpha e_{\alpha\nu} + m^2(\eta_{\mu\nu} e - e_{\nu\mu}) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Assim como foi feito para $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$, podemos a partir da manipulação das equações de movimento chegar aos vínculos e à equação de Klein-Gordon:

$$e_{[\mu\nu]} = 0 \tag{14}$$

$$\partial^\alpha e_{\alpha\nu} = 0 \tag{15}$$

$$e = 0 \tag{16}$$

$$(\Box - m^2) e_{(\mu\nu)} = 0 \tag{17}$$

Novamente, as condições de FP (14), (15) e (16) garantem o número correto de 5 g.l. Vemos que os campos auxiliares presentes na formulação de $\mathcal{L}(a_1)$ são o traço "e" e a parte antissimétrica do campo $e_{[\mu\nu]}$.

4 OS NOVOS MODELOS MASSIVOS $\mathcal{L}(a_1)$: ESPAÇO CURVO

Ao construir uma teoria de spin-2 massiva em um espaço curvo a partir de um tensor de rank-2 não simétrico, é preciso que o número de graus de liberdade do caso plano seja preservado. Para que isso ocorra, devemos obter a versão para espaços curvos das 11 condições de FP ($D = 4$) (14), (16), (15). São elas:

$$\begin{aligned} e_{[\mu\nu]} &= 0 && (1)\\ g^{\mu\nu}e_{\mu\nu} &= 0 && (2)\\ \nabla^{\mu}e_{\mu\nu} &= 0\,. && (3) \end{aligned}$$

Assim, das 16 componentes de $e_{\mu\nu}$, ficamos apenas com $16 - 11 = 5$ g.l. Nossos cálculos estão focados em $D = 4$, mas eles podem ser generalizados para D dimensões ($D \geq 3$).

A generalização dos modelos $\mathcal{L}(a_1)$ para espaços curvos é feita a partir do acoplamento mínimo que consiste em trocar as derivadas comuns pelas covariantes e da adição de termos contendo o tensor de curvatura como no caso de FP (BUCHBINDER; GITMAN; PERSHIN, 2000), tomando certo cuidado com a ambiguidade de ordenamentos, já que neste caso as derivadas não mais comutam.

Nas próximas seções serão apresentados os principais resultados do acoplamento dos modelos $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}(a_1)$ ($a_1 \neq -1/12$) a um espaço curvo de fundo.[1] Esses resultados foram publicados recentemente em (DALMAZI; FORTES, 2017).

4.1 $\mathcal{L}^{g}_{\text{nFP}}(c)$: MODELO $\mathcal{L}^{g}(a_1)$ COM $a_1 = -1/12$

4.1.1 Espaços arbitrários

Buscando por uma teoria que seja quadrática em derivadas, consistente com o limite plano (5) e no máximo linear em curvaturas, chegamos a uma expressão mais geral para a lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{g}_{\text{nFP}}(c) \;=\; & -\frac{1}{4}\nabla^{\mu}e^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^{\mu}e^{\alpha\beta}\nabla_{\mu}e_{\beta\alpha} - \frac{1}{12}\nabla^{\alpha}e_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}e^{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\nabla^{\alpha}e_{\alpha\beta}\nabla_{\lambda}e^{\beta\lambda} + \\ & + \frac{1}{4}\nabla^{\alpha}e_{\beta\alpha}\nabla_{\lambda}e^{\beta\lambda} + \frac{1}{6}\nabla^{\mu}\nabla_{\mu}e - \frac{1}{3}\nabla^{\alpha}e_{\alpha\beta}\nabla^{\beta}e - \frac{m^2}{2}(e_{\alpha\beta}e^{\beta\alpha} + c\,e^2) + \\ & + d_1\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} + d_2\,R\,e^2 + d_3\,R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\mu}\,e^{\beta\nu} + d_4\,R_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\mu}\,e^{\beta}{}_{\mu} + d_5\,R_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\beta}\,e + \\ & + d_6\,R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\beta}\,e^{\mu\nu} + d_7\,R_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\mu}\,e_{\mu}{}^{\beta} + d_8\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\beta\alpha} + d_9\,R_{\alpha\beta}\,e^{\mu\alpha}\,e_{\mu}{}^{\beta} \end{aligned} \quad (4)$$

onde d_j ($j = 1, 2, ..., 9$) são constantes arbitrárias por enquanto. É importante ressaltar que não estamos considerando funções não analíticas de m^2 para os coeficientes d_j's.

O termo $R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\mu}\,e^{\nu\beta}$ não foi considerado dentre os termos não mínimos da lagrangiana (4)

[1] Os resultados para $\mathcal{L}(a_1)$ com $a_1 = 1/4$ reproduzem aqueles do modelo de FP apresentados no capítulo 2 e podem ser identificados ao longo dos cálculos que serão apresentados na seção 4.2.

porque, devido à propriedade cíclica $R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0$, é um termo redundante. Vejamos:

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\nu\beta} &= (-R_{\alpha\mu\nu\beta} - R_{\alpha\nu\beta\mu})\, e^{\alpha\mu}\, e^{\nu\beta} \\ &= -R_{\alpha\mu\nu\beta}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\nu\beta} + R_{\alpha\nu\mu\beta}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\nu\beta} \end{aligned} \tag{5}$$

onde os termos obtidos já aparecem em (4).

As equações de movimento obtidas da lagrangiana (4) são:

$$\begin{aligned} E_{\rho\sigma} &= \frac{1}{2}\Box(e_{\rho\sigma} + e_{\sigma\rho}) + \frac{1}{6}\nabla_\rho\nabla^\lambda e_{\lambda\sigma} - \frac{1}{2}(\nabla_\rho\nabla^\lambda e_{\sigma\lambda} + \nabla_\sigma\nabla^\lambda e_{\rho\lambda}) - \frac{1}{2}\nabla_\sigma\nabla^\alpha e_{\alpha\rho} + \\ &\quad -\frac{1}{3}g_{\rho\sigma}\Box e + \frac{1}{3}\nabla_\rho\nabla_\sigma e + \frac{1}{3}g_{\rho\sigma}\nabla^\beta\nabla^\alpha e_{\alpha\beta} - m^2(e_{\sigma\rho} + c\, e\, g_{\sigma\rho}) + 2d_1 R\, e_{\rho\sigma} + \\ &\quad +2d_2\, R\, e\, g_{\rho\sigma} + 2d_3\, R_{\rho\beta\sigma\nu}\, e^{\beta\nu} + 2d_4\, R_{\rho\beta}\, e^{\beta}{}_{\sigma} + d_5\, R_{\rho\sigma}\, e + d_5\, g_{\rho\sigma}\, R^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta} + \\ &\quad +2d_6\, R_{\alpha\beta\rho\sigma}\, e^{\alpha\beta} + d_7\, R^{\alpha}{}_{\sigma}\, e_{\alpha\rho} + d_7\, R_{\rho}{}^{\alpha} e_{\sigma\alpha} + 2d_8\, R\, e_{\sigma\rho} + 2d_9\, R_{\sigma}{}^{\beta}\, e_{\rho\beta} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Observe que, em geral, $E_{\rho\sigma} \neq E_{\sigma\rho}$.

A partir de agora, buscamos ajustar as constantes d_j's da teoria de forma que as equações de movimento levem a expressões que possam se tornar vínculos, mediante a eliminação das segundas derivadas covariantes. Dessa forma, encontramos primeiramente o vínculo vetorial da teoria:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\rho &\doteq \nabla^\sigma E_{\rho\sigma} = (1 - 2d_3 - 2d_6)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\nabla^\alpha e^{\lambda\sigma} + (1 + 2d_6)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\nabla^\alpha e^{\sigma\lambda} + d_5 R_{\alpha\beta}\nabla_\rho e^{\alpha\beta} + \\ &\quad +\left(\frac{1}{2} - 2d_3 - 2d_6 + d_7\right)e^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda R_{\sigma\rho} + (-1 + 2d_3 + d_5)e^{\lambda\sigma}\nabla_\rho R_{\sigma\lambda} + \\ &\quad +\left(\frac{1}{2} + 2d_4 + 2d_6\right)e^{\sigma\lambda}\nabla_\lambda R_{\sigma\rho} + \left(\frac{1}{2} + 2d_9\right)R^{\lambda\mu}\nabla_\mu e_{\rho\lambda} + 2d_1 R\nabla^\sigma e_{\rho\sigma} + \\ &\quad +\left(\frac{1}{2} + d_7\right)R^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha e_{\lambda\rho} + \left(\frac{1}{6} + d_7\right)R_{\lambda\rho}\nabla_\mu e^{\mu\lambda} + \left(\frac{1}{4} + 2d_1 + d_9\right)e_{\rho\sigma}\nabla^\sigma R + \\ &\quad +\left(2d_4 - \frac{1}{2}\right)R_{\lambda\rho}\nabla_\mu e^{\lambda\mu} + \left(\frac{1}{4} + \frac{d_7}{2} + 2d_8\right)e_{\lambda\rho}\nabla^\lambda R + (2d_8 R - m^2)\nabla^\sigma e_{\sigma\rho} + \\ &\quad +\left(\frac{1}{3} + d_5\right)R_{\alpha\rho}\nabla^\alpha e + (2d_2 R - m^2 c)\nabla_\rho e + \left(2d_2 + \frac{d_5}{2}\right)e\nabla_\rho R = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

onde foram utilizadas as identidades (7) e (9). Notemos que (7) não possui termos com derivadas de segunda ordem portanto já é um vínculo vetorial, pois envolve no máximo uma derivada temporal.

O vínculo tensorial será obtido a partir da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\rho\sigma} \doteq E_{\rho\sigma} - E_{\sigma\rho} &= \frac{2}{3}(\nabla_\rho\nabla^\lambda e_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma\nabla^\lambda e_{\lambda\rho}) + \Big[m^2 + 2(d_1 - d_8)R\Big](e_{\rho\sigma} - e_{\sigma\rho}) + \\ &\quad +2(2d_6 + d_3)R_{\rho\sigma\alpha\beta}\, e^{\alpha\beta} + (2d_4 - d_7)(R_{\rho}{}^{\beta}\, e_{\beta\sigma} - R_{\sigma}{}^{\beta}\, e_{\beta\rho}) + \\ &\quad +(d_7 - 2d_9)(R_{\rho}{}^{\beta}\, e_{\sigma\beta} - R_{\sigma}{}^{\beta}\, e_{\rho\beta}) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

A fim de encontrarmos um vínculo escalar, temos que considerar a combinação escalar mais geral das equações de movimento. No entanto, como a simetria de Weyl está presente no termo cinético de $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$, não será necessário levar em conta outros termos além do traço das equações de movimento a fim de produzir um vínculo. Vejamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &\doteq g^{\rho\sigma}E_{\rho\sigma} \\ &= \Big[-m^2(1+4c)+(2d_1+8d_2+d_5+2d_8)R\Big]e+2(d_3+d_4+2d_5+d_7+d_9)R_{\sigma\beta}e^{\sigma\beta} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Dessa forma, nós temos um vínculo escalar em um campo gravitacional de fundo arbitrário. Se escolhermos

$$d_9 = -d_3 - d_4 - 2d_5 - d_7 \tag{10}$$

$$d_2 = -\frac{(2d_1+d_5+2d_8)}{8} \tag{11}$$

e assumirmos $c \neq -1/4$, o vínculo escalar (9) se torna simplesmente $e = 0$. Substituindo esse resultado em (7) e (8), obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\rho &= (1-2d_3-2d_6)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\nabla^\alpha e^{\lambda\sigma}+(1+2d_6)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\nabla^\alpha e^{\sigma\lambda}+d_5R_{\alpha\beta}\nabla_\rho e^{\alpha\beta}+ \\ &+\left(\frac{1}{2}-2d_3-2d_6+d_7\right)e^{\lambda\sigma}\nabla_\lambda R_{\sigma\rho}+(-1+2d_3+d_5)e^{\lambda\sigma}\nabla_\rho R_{\sigma\lambda}+ \\ &+\left(\frac{1}{2}+2d_4+2d_6\right)e^{\sigma\lambda}\nabla_\lambda R_{\sigma\rho}+\left(\frac{1}{2}-2d_3-2d_4-4d_5-2d_7\right)R^{\lambda\mu}\nabla_\mu e_{\rho\lambda}+ \\ &+2d_1R\nabla^\sigma e_{\rho\sigma}+\left(\frac{1}{4}+2d_1-d_3-d_4-2d_5-d_7\right)e_{\rho\sigma}\nabla^\sigma R+ \\ &+\left(2d_4-\frac{1}{2}\right)R_{\lambda\rho}\nabla_\mu e^{\lambda\mu}+\left(\frac{1}{4}+\frac{d_7}{2}+2d_8\right)e_{\lambda\rho}\nabla^\lambda R+(2d_8R-m^2)\nabla^\sigma e_{\sigma\rho}+ \\ &+\left(\frac{1}{2}+d_7\right)R^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha e_{\lambda\rho}+\left(\frac{1}{6}+d_7\right)R_{\lambda\rho}\nabla_\mu e^{\mu\lambda}\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\rho\sigma} &= \frac{2}{3}(\nabla_\rho\nabla^\lambda e_{\lambda\sigma}-\nabla_\sigma\nabla^\lambda e_{\lambda\rho})+\Big(m^2+2(d_1-d_8)R\Big)(e_{\rho\sigma}-e_{\sigma\rho})+ \\ &+2(2d_6+d_3)R_{\rho\sigma\alpha\beta}\,e^{\alpha\beta}+(2d_4-d_7)(R_\rho{}^\beta\,e_{\beta\sigma}-R_\sigma{}^\beta\,e_{\beta\rho})+ \\ &+(2d_3+2d_4+4d_5+3d_7)(R_\rho{}^\beta\,e_{\sigma\beta}-R_\sigma{}^\beta\,e_{\rho\beta})=0\end{aligned} \tag{13}$$

Vemos que há ainda termos com segundas derivadas em (13). Poderíamos pensar em determinar $\nabla^\sigma e_{\sigma\rho}$

como função dos termos restantes em (12) com $d_8 = 0$ e substituir de volta em (13) o que nos levaria a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\rho\sigma} \;=\; & \frac{4}{3m^2}\Bigg[(1-2d_3-2d_6)R_{[\sigma\lambda\beta\mu}\nabla_{\rho]}\nabla^{\mu}e^{\lambda\beta} + (1+2d_6)R_{[\sigma\lambda\beta\mu}\nabla_{\rho]}\nabla^{\mu}e^{\beta\lambda} + \\
& + \left(\frac{1}{2}-2d_3-2d_4-4d_5-2d_7\right)R^{\lambda\mu}\nabla_{[\rho}\nabla_{\mu}e_{\sigma]\lambda} + \left(\frac{1}{2}+d_7\right)R^{\lambda\mu}\nabla_{[\rho}\nabla_{\mu}e_{\lambda\sigma]} + \\
& + \left(\frac{1}{6}+d_7\right)R_{\mu[\sigma}\nabla_{\rho]}\nabla_{\lambda}e^{\lambda\mu} + \left(-\frac{1}{2}+2d_4\right)R_{\mu[\sigma}\nabla_{\rho]}\nabla_{\lambda}e^{\mu\lambda} + d_5R_{\alpha\beta}\nabla_{[\rho}\nabla_{\sigma]}e^{\alpha\beta} + \\
& + 2d_1R\nabla_{[\rho}\nabla^{\beta}e_{\sigma]\beta} + \nabla_{[\rho}\mathcal{F}_{\sigma]}\Bigg] + \left(m^2+2(d_1-d_8)R\right)(e_{\rho\sigma}-e_{\sigma\rho}) + \\
& + 2(2d_6+d_3)R_{\rho\sigma\alpha\beta}\,e^{\alpha\beta} + (2d_4-d_7)(R_{\rho}{}^{\beta}\,e_{\beta\sigma} - R_{\sigma}{}^{\beta}\,e_{\beta\rho}) + \\
& + (2d_3+2d_4+4d_5+3d_7)(R_{\rho}{}^{\beta}\,e_{\sigma\beta} - R_{\sigma}{}^{\beta}\,e_{\rho\beta})
\end{aligned} \tag{14}$$

onde $\mathcal{F}_\alpha$ não contém derivadas de $e_{\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\alpha} \;\doteq\; & +\left(\frac{1}{2}-2d_3-2d_6+d_7\right)e^{\lambda\mu}\nabla_{\lambda}R_{\mu\alpha} + (-1+2d_3+d_5)e^{\lambda\mu}\nabla_{\alpha}R_{\mu\lambda} + \\
& + \left(\frac{1}{2}+2d_4+2d_6\right)e^{\mu\lambda}\nabla_{\lambda}R_{\mu\alpha} + \left(\frac{1}{4}+2d_1-d_3-d_4-2d_5-d_7\right)e_{\alpha\lambda}\nabla^{\lambda}R + \\
& + \left(\frac{1}{4}+\frac{d_7}{2}\right)e_{\lambda\alpha}\nabla^{\lambda}R
\end{aligned} \tag{15}$$

Infelizmente sem assumir restrições no espaço de fundo não foi possível evitar as derivadas de segunda ordem de $e_{\mu\nu}$ na expressão tensorial (14). Portanto, somos levados a considerar espaços de Einstein $R_{\mu\nu} = \frac{R}{4}g_{\mu\nu}$ a fim de contornar o problema como veremos na seção seguinte.

No caso em que $c = -1/4$, não assumiríamos a igualdade em (11). Pelo contrário, demandaríamos (10) e

$$2d_1 + 8d_2 + d_5 + 2d_8 \neq 0 \tag{16}$$

para que o vínculo escalar $e = 0$ fosse igualmente obtido. No entanto, os termos problemáticos de (14) que são, principalmente, $(\frac{1}{2}+d_7)R^{\lambda\mu}\nabla_{[\rho}\nabla_{\mu}e_{\lambda\sigma]}$ e $(\frac{1}{6}+d_7)R_{\mu[\sigma}\nabla_{\rho]}\nabla_{\lambda}e^{\lambda\mu}$ não se alterariam e, portanto, as conclusões se manteriam as mesmas.

4.1.2 Espaços de Einstein

Na seção anterior, vimos que, apesar de termos obtido $e = 0$ a partir de (9) em campos de fundo arbitrários, não foi possível se chegar a uma versão para espaços arbitrários do vínculo tensorial, sem efetuar restrições sobre o espaço. Portanto, assumiremos o espaço do tipo Einstein, ou seja,

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4}g_{\mu\nu} \tag{17}$$

em $D = 4$. De (17) mostra-se, vide Apêndice, a partir da identidade de Bianchi que a curvatura escalar R é constante, ou seja, $\nabla^\mu R = \partial^\mu R = 0$ e ainda que $\nabla^\mu R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$.

Reescrevamos, portanto, as expressões (7), (8) e (9):

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\rho \doteq \nabla^\sigma E_{\rho\sigma} &= (1-2d_3-2d_6)R_{\rho\lambda\sigma\mu}\nabla^\mu e^{\lambda\sigma} + (1+2d_6)R_{\rho\lambda\sigma\mu}\nabla^\mu e^{\sigma\lambda} + \tilde{d}_1 R\,\nabla^\sigma e_{\rho\sigma} + \\ &+ \left[\left(\frac{1}{6}+2\tilde{d}_8\right)R - m^2\right]\nabla^\sigma e_{\sigma\rho} + \left[\left(\frac{1}{12}+2\tilde{d}_2\right)R - m^2 c\right]\nabla_\rho e = 0\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\rho\sigma} \doteq E_{\rho\sigma} - E_{\sigma\rho} &= \frac{2}{3}(\nabla_\rho\nabla^\lambda e_{\lambda\sigma} - \nabla_\sigma\nabla^\lambda e_{\lambda\rho}) + 2(d_3+2d_6)R_{\rho\sigma\alpha\beta}e^{\alpha\beta} + \\ &+ \left[m^2 + \left(2\tilde{d}_1 - 2\tilde{d}_8\right)R\right](e_{\rho\sigma} - e_{\sigma\rho}) = 0\end{aligned} \tag{19}$$

$$\mathcal{C} \doteq g^{\rho\sigma}E_{\rho\sigma} = \left[-m^2(1+4c) + \left(2\tilde{d}_1 + 8\tilde{d}_2 + \frac{d_3}{2} + 2\tilde{d}_8\right)R\right]e = 0 \tag{20}$$

onde foi definido que

$$\begin{aligned}\tilde{d}_1 &\doteq d_1 + \frac{d_4}{4} + \frac{d_9}{4} \\ \tilde{d}_2 &\doteq d_2 + \frac{d_5}{4} \\ \tilde{d}_8 &\doteq d_8 + \frac{d_7}{4}\end{aligned} \tag{21}$$

Portanto, (20) nos leva ao vínculo escalar $e = 0$, se o colchete for diferente de zero. Por outro lado, (19) ainda possui termos com derivadas de segunda ordem. Note que isso poderia ser solucionado se fosse verdade que $\nabla^\mu e_{\mu\nu} = 0$. Podemos chegar a essa igualdade diretamente do vínculo vetorial (18) se fizermos o seguinte ajuste:

$$\tilde{d}_1 = 0, \quad d_3 = 1, \quad d_6 = -\frac{1}{2} \tag{22}$$

desde que o coeficiente de $\nabla^\mu e_{\mu\nu}$ não seja zero. De volta ao vínculo tensorial (19), obtemos $e_{[\mu\nu]} = 0$ desde que o seu coeficiente também não seja nulo. Em resumo, todos os 11 vínculos de FP

$$e = 0 \tag{23}$$

$$\nabla^\sigma e_{\sigma\rho} = 0 \tag{24}$$

$$e_{[\rho\sigma]} = 0 \tag{25}$$

são devidamente encontrados se

$$\tilde{m}^2\left(\tilde{m}^2 - \frac{R}{6}\right)\left\{(1+4c)\tilde{m}^2 + \left[8(c\,\tilde{d}_8 - \tilde{d}_2) - \frac{1}{2}\right]R\right\} \neq 0 \tag{26}$$

$$\tilde{m}^2 \equiv m^2 - 2\tilde{d}_8 R \tag{27}$$

enquanto que as equações de movimento (6) se tornam

$$E_{\rho\sigma} = (\Box - \tilde{m}^2)\, e_{\rho\sigma} + 2R_{\rho\alpha\sigma\beta}\, e^{\alpha\beta} = 0 \tag{28}$$

onde os parâmetros $\tilde{d}_2$ e $\tilde{d}_8$ são livres a menos das condições (26).

4.2 MODELO $\mathcal{L}^g(a_1)$ COM $a_1 \neq -1/12$

4.2.1 Espaços arbitrários

O procedimento neste caso é análogo ao que foi feito na seção anterior para $\mathcal{L}_{\text{nFP}}(c)$. A expressão mais geral para a lagrangiana $\mathcal{L}(a_1)$ no espaço curvo vem dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^g(a_1) \;\; = \;\; & -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\beta\alpha} + a_1\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\mu\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \\
& + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla_\mu e - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla^\alpha\, e_{\alpha\mu} + \\
& - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla^\alpha e_{\mu\alpha} - \frac{m^2}{2}(e_{\alpha\beta}\,e^{\beta\alpha} - e^2) + f_1\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} + f_2\,R\,e^2 + \\
& + f_3\,R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\mu}\,e^{\beta\nu} + f_4\,R_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\mu}\,e^{\beta}{}_{\mu} + f_5\,R_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\beta}\,e + f_6\,R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\beta}\,e^{\mu\nu} + \\
& + f_7\,R_{\alpha\beta}\,e^{\alpha\mu}\,e_\mu{}^\beta + f_8\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\beta\alpha} + f_9\,R_{\alpha\beta}\,e^{\mu\alpha}\,e_\mu{}^\beta
\end{aligned} \tag{29}$$

onde f_j $(j = 1, 2, ..., 9)$ são constantes arbitrárias *a priori*. Variando a ação com respeito a $e^{\rho\sigma}$, nós obtemos as equações de movimento:

$$\begin{aligned}
E_{\rho\sigma} \;\; = \;\; & \frac{1}{2}\Box(e_{\rho\sigma} + e_{\sigma\rho}) - 2a_1\nabla_\rho\nabla^\mu e_{\mu\sigma} - \frac{1}{2}\nabla_\rho\nabla^\mu e_{\sigma\mu} - \frac{1}{2}\nabla_\sigma\nabla^\mu e_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\nabla_\sigma\nabla^\mu e_{\rho\mu} + \\
& + 2\left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\left[-g_{\rho\sigma}\Box e + \nabla_\rho\nabla_\sigma e + g_{\rho\sigma}\frac{\nabla^\mu\nabla^\alpha(e_{\alpha\mu} + e_{\mu\alpha})}{2}\right] + \\
& - m^2(e_{\sigma\rho} - e\,g_{\rho\sigma}) + 2f_1\,R\,e_{\rho\sigma} + 2f_2\,R\,g_{\rho\sigma}\,e + 2f_3\,R_{\rho\beta\sigma\nu}\,e^{\beta\nu} + 2f_4\,R_{\rho\beta}\,e^{\beta}{}_{\sigma} + \\
& + f_5\,R_{\rho\sigma}\,e + f_5\,R_{\alpha\beta}\,g_{\rho\sigma}\,e^{\alpha\beta} + 2f_6\,R_{\alpha\beta\rho\sigma}\,e^{\alpha\beta} + f_7\,R_{\alpha\sigma}\,e^{\alpha}{}_{\rho} + f_7\,R_{\rho\alpha}\,e_\sigma{}^\alpha + \\
& + 2f_8\,R\,e_{\sigma\rho} + 2f_9\,R_{\sigma\beta}\,e_\rho{}^\beta = 0
\end{aligned} \tag{30}$$

Aplicando uma derivada covariante nas equações de movimento e após muitas manipulações, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_\rho \doteq \nabla^\sigma E_{\rho\sigma} \;\; = \;\; & +(1-2f_3-2f_6)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\nabla^\alpha e^{\lambda\sigma} + (1+2f_6)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\nabla^\alpha e^{\sigma\lambda} + \\
& + \left(\frac{1}{2}+f_7\right)R^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha e_{\lambda\rho} + \left(\frac{1}{2}+2f_9\right)R^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha e_{\rho\lambda} + (f_7-2a_1)R_{\lambda\rho}\nabla_\mu e^{\mu\lambda} + \\
& + \left(2f_4-\frac{1}{2}\right)R_{\lambda\rho}\nabla_\mu e^{\lambda\mu} + 2f_1 R\nabla^\sigma e_{\rho\sigma} + \left(\frac{1}{4}+2f_1+f_9\right)e_{\rho\sigma}\nabla^\sigma R + \\
& + \left(2f_2+\frac{f_5}{2}\right)e\nabla_\rho R + (m^2+2f_2R)\nabla_\rho e + \left(\frac{1}{2}+2f_4+2f_6\right)e^{\beta\sigma}\nabla_\sigma R_{\rho\beta} \\
& + \left(\frac{1}{2}+2a_1+f_5\right)R_{\rho\sigma}\nabla^\sigma e - (1-2f_3-f_5)e^{\alpha\beta}\nabla_\rho R_{\alpha\beta} + f_5 R_{\alpha\beta}\nabla_\rho e^{\alpha\beta} + \\
& - \left(\frac{1}{2}+2f_3+2f_6-f_7\right)e^{\sigma\alpha}\nabla_\sigma R_{\rho\alpha} + \left(\frac{1}{4}+\frac{f_7}{2}+2f_8\right)e_{\sigma\rho}\nabla^\sigma R + \\
& -(m^2-2f_8R)\nabla^\sigma e_{\sigma\rho}
\end{aligned} \tag{31}$$

Definamos agora o tensor $\mathcal{C}_{\rho\sigma}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\rho\sigma} \;\; \doteq \;\; & E_{\rho\sigma} - E_{\sigma\rho} = \left(-2a_1+\frac{1}{2}\right)(\nabla_\rho\nabla^\mu e_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma\nabla^\mu e_{\mu\rho}) + \\
& + [m^2+2R(f_1-f_8)](e_{\rho\sigma}-e_{\sigma\rho}) + 2f_3\, R_{\rho\beta\sigma\nu}(e^{\beta\nu}-e^{\nu\beta}) + \\
& + 2f_4(R_{\rho\beta}\, e^\beta{}_\sigma - R_{\sigma\beta}\, e^\beta{}_\rho) + 4f_6\, R_{\alpha\beta\rho\sigma}\, e^{\alpha\beta} + f_7 R^\alpha{}_\sigma(e_{\alpha\rho}-e_{\rho\alpha}) + \\
& + f_7 R_\rho{}^\alpha(e_{\sigma\alpha}-e_{\alpha\sigma}) + 2f_9(R_{\sigma\beta}\, e_\rho{}^\beta - R_{\rho\beta}\, e_\sigma{}^\beta)
\end{aligned} \tag{32}$$

A fim de encontrarmos um vínculo escalar, temos que considerar a combinação escalar mais geral das equações de movimento até primeira ordem na curvatura:

$$\mathcal{C} \doteq (b_0\, R\, + b_1 m^2) g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} + b_2 R^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} + b_3 \nabla^\rho\nabla^\sigma E_{\rho\sigma} \tag{33}$$

onde b_j $(j=0,1,2,3)$ são constantes arbitrárias por enquanto. Manipulando e simplificando o máximo possível, obtemos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} = \quad & +[b_3(2f_4+f_7)-b_2]R^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla^\rho e_{\lambda\rho} + 2b_3(1-f_3)R_{\rho\lambda\sigma\alpha}\,\nabla^\rho\nabla^\alpha e^{\lambda\sigma} + \\
& - \left[2b_2\left(\frac{1}{4}+a_1\right) - b_3\left(\frac{1}{2}-2a_1+f_7+2f_9\right)\right]R^{\lambda\alpha}\nabla_\alpha\nabla^\rho e_{\rho\lambda} + \\
& + \left[(b_0R+b_1m^2)\left(\frac{1}{2}+6a_1\right) + 2b_2\left(\frac{1}{4}+a_1\right)R - b_3(m^2-2f_1R-2f_8R)\right]\nabla^\lambda\nabla^\rho e_{\rho\lambda} \\
& - \left[(b_0R+b_1m^2)\left(\frac{1}{2}+6a_1\right) + 2b_2\left(\frac{1}{4}+a_1\right)R - b_3(m^2+2f_2R)\right]\Box e + \\
& + (b_2+b_3f_5)R_{\lambda\rho}\Box e^{\lambda\rho} + \left[b_2+b_3f_5+2\left(a_1-\frac{1}{4}\right)(b_2+b_3)+b_3\right]R_{\lambda\rho}\nabla^\lambda\nabla^\rho e + \mathcal{C}_1
\end{aligned} \tag{34}$$

onde $\mathcal{C}_1$ contém termos com no máximo derivadas de primeira ordem de $e_{\rho\sigma}$. A expressão (34) possui sete termos com segundas derivadas de $e_{\rho\sigma}$, os quais devem ser eliminados para que tenhamos um vínculo escalar. Notemos que no caso especial em que $a_1 = 1/4$ (FP), os dois últimos termos com derivadas de segunda ordem podem ser simultaneamente cancelados se $b_2 = b_3 = 0$. De volta nos outros termos, teríamos que fazer $b_0 R + m^2\, b_1 = 0$. Entretanto, não teríamos um vínculo de qualquer maneira. Isso está de acordo com (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999) no qual os autores escolhem trabalhar com espaços de Einstein para superar tal impasse para $a_1 = 1/4$. No caso em que $a_1 \neq 1/4$, para obtermos o vínculo escalar, nós precisaríamos encontrar uma solução para o sistema abaixo:

$$b_3(2f_4 + f_7) - b_2 = 0 \tag{35}$$

$$b_3(1 - f_3) = 0 \tag{36}$$

$$2b_2\left(\frac{1}{4} + a_1\right) - b_3\left(\frac{1}{2} - 2a_1 + f_7 + 2f_9\right) = 0 \tag{37}$$

$$(b_0 R + b_1 m^2)\left(\frac{1}{2} + 6a_1\right) + 2b_2\left(\frac{1}{4} + a_1\right)R - b_3(m^2 - 2f_1 R - 2f_8 R) = 0 \tag{38}$$

$$(b_0 R + b_1 m^2)\left(\frac{1}{2} + 6a_1\right) + 2b_2\left(\frac{1}{4} + a_1\right)R - b_3(m^2 + 2f_2 R) = 0 \tag{39}$$

$$b_2 + b_3 f_5 = 0 \tag{40}$$

$$2b_2\left(\frac{1}{4} + a_1\right) + 2b_3\left(\frac{1}{4} + a_1 + \frac{f_5}{2}\right) = 0 \tag{41}$$

Uma vez que f_i $(i = 1, .., 9)$ e b_j $(j = 0, .., 3)$ são constantes, diferentemente de R que, para espaços arbitrários varia de ponto a ponto no espaço tempo, demandamos que os coeficientes de R nas equações (38) e (39) sejam nulos, i.e.,

$$b_0\left(\frac{1}{2} + 6a_1\right) + 2b_2\left(\frac{1}{4} + a_1\right) + 2b_3(f_1 + f_8) = 0 \tag{42}$$

$$b_0\left(\frac{1}{2} + 6a_1\right) + 2b_2\left(\frac{1}{4} + a_1\right) - 2b_3 f_2 = 0 \quad . \tag{43}$$

A solução, singular em $a_1 = 1/4$ como esperado, vem dada por

$$\begin{aligned}
f_3 &= 1 \\
f_4 &= \frac{1}{2} + f_9 \\
f_5 &= \frac{(1+4a_1)}{(-1+4a_1)} \\
f_7 &= -\frac{8a_1}{(-1+4a_1)} - 2f_9 \\
f_2 &= -\frac{1+8a_1(1+2a_1)}{4(-1+4a_1)} + \frac{b_0}{2b_1} \\
f_1 &= \frac{1+8a_1(1+2a_1)}{4(-1+4a_1)} - \frac{b_0}{2b_1} - f_8 \\
b_3 &= \frac{1}{2} b_1(1+12a_1) \\
b_2 &= -\frac{b_1(1+12a_1)(1+4a_1)}{2(-1+4a_1)}
\end{aligned} \tag{44}$$

Substituindo essa solução de volta em (34), chegamos ao seguinte vínculo escalar em um espaço de fundo arbitrário:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C} &= \mathcal{C}_1 = \frac{(1+12a_1)}{(-1+4a_1)}\left\{-\frac{b_1(1+4a_1)^2}{2(-1+4a_1)} R^{\rho\sigma} R_{\rho\sigma} e + \frac{b_1(1-12a_1)}{2} \nabla^\lambda R^{\sigma\rho} \nabla_\rho e_{\lambda\sigma} + \right. \\
&\quad \left. + 4b_1 a_1 e_{\lambda\sigma} \Box R^{\lambda\sigma} + \frac{b_1(1+12a_1)}{2(-1+4a_1)} \nabla_\rho R^{\lambda\sigma} \nabla^\rho e_{\lambda\sigma} - \frac{b_1(1+4a_1)}{2} \nabla^\sigma R^{\lambda\alpha} \nabla_\alpha e_{\lambda\sigma} \right\} + \\
&\quad + \frac{b_1(1+12a_1)}{2}\left\{\left[-\frac{b_0}{b_1} + \frac{1+8a_1(1+2a_1)}{4(-1+4a_1)}\right] \nabla^\lambda R \, \nabla^\rho e_{\rho\lambda} + \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{b_0}{b_1} + \frac{1-2a_1(-1+4a_1)}{-1+4a_1} - 2f_9\right] \nabla^\lambda R \, \nabla^\rho e_{\lambda\rho} \right\} + \\
&\quad + \frac{(1+12a_1)}{(-1+4a_1)}\left\{(b_0 R + b_1 m^2) + \frac{b_1(1+4a_1)}{2}\left[m^2 + \frac{b_0 R}{b_1} - \frac{[16a_1(1+a_1)+3]R}{2(-1+4a_1)}\right]\right\} R^{\rho\sigma} e_{\rho\sigma} \\
&\quad + b_1(1+12a_1) R^{\rho\sigma} R_{\rho\beta\sigma\nu} e^{\beta\nu} + \frac{(1+12a_1)}{(-1+4a_1)}\left[\frac{b_1(1+12a_1)(1+4a_1)}{2(-1+4a_1)} - 8b_1 a_1\right] R^{\rho\sigma} R_{\rho\beta} \, e^\beta{}_\sigma + \\
&\quad + \frac{b_1(1+12a_1)}{2}\left\{\left[\frac{2b_0}{b_1} - \frac{1+16a_1(1+3a_1)}{4(-1+4a_1)}\right] \nabla_\lambda R \, \nabla^\lambda e + \left[\frac{b_0}{b_1} - \frac{2a_1(1+4a_1)}{(-1+4a_1)}\right] (\Box R)\, e\right\} + \\
&\quad + \left\{(b_0 R + b_1 m^2)\left[3m^2 - \frac{1+16a_1(1+3a_1)}{2(-1+4a_1)} R + \frac{3b_0 R}{b_1}\right] + \right. \\
&\quad \left. - \frac{b_1(1+12a_1)(1+4a_1)}{2(-1+4a_1)}\left[m^2 + \frac{b_0 R}{b_1} - \frac{[1+8a_1(1+2a_1)]R}{2(-1+4a_1)}\right] R \right\} e
\end{aligned} \tag{45}$$

No entanto, não foi possível obter $e = 0$ a partir de (45) sem restrições no espaço de fundo.

4.2.2 Espaços de Einstein

Como não foi possível obter $e = 0$ na subseção anterior, iremos restringir o campo gravitacional de fundo a espaços de Einstein (17) assim como no caso de FP (HINTERBICHLER, 2012; BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999) e em $\mathcal{L}_{\mathrm{nFP}}(c)$. Reescrevamos, portanto, as expressões de (31), (32) e (34):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_\rho &\doteq \nabla^\sigma E_{\rho\sigma} = (1 - 2f_3 - 2f_6) R_{\rho\lambda\sigma\alpha} \nabla^\alpha e^{\lambda\sigma} + (1 + 2f_6)\, R_{\rho\lambda\sigma\alpha} \nabla^\alpha e^{\sigma\lambda} + 2\tilde{f}_1 R\, \nabla^\lambda e_{\rho\lambda} + \\
&+ \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - a_1 + 4\tilde{f}_8\right) R - m^2\right] \nabla^\lambda e_{\lambda\rho} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + a_1 + 4\tilde{f}_2\right) R + m^2\right] \nabla_\rho e = 0
\end{aligned}
\tag{46}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{\rho\sigma} &\doteq E_{\rho\sigma} - E_{\sigma\rho} \\
&= +\left(-2a_1 + \frac{1}{2}\right)(\nabla_\rho \nabla^\mu e_{\mu\sigma} - \nabla_\sigma \nabla^\mu e_{\mu\rho}) + 2(f_3 + 2f_6)\, R_{\rho\beta\sigma\nu}(e^{\beta\nu} - e^{\nu\beta}) + \\
&\quad + \left[m^2 + (2\tilde{f}_1 - 2\tilde{f}_8) R\right](e_{\rho\sigma} - e_{\sigma\rho}) = 0
\end{aligned}
\tag{47}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} &\doteq \tilde{b}_1 g^{\rho\sigma} E_{\rho\sigma} + b_3 \nabla^\rho \nabla^\sigma E_{\rho\sigma} \\
&= +2b_3(1 - f_3) R_{\rho\lambda\sigma\alpha} \nabla^\rho \nabla^\alpha e^{\lambda\sigma} + \\
&\quad + \left[-6\tilde{b}_1\left(a_1 + \frac{1}{12}\right) + \frac{b_3}{2}\left(\frac{1}{4} + a_1 + 4\tilde{f}_2\right) R + b_3 m^2\right] \Box e + \\
&\quad + \left[6\tilde{b}_1\left(a_1 + \frac{1}{12}\right) + \frac{b_3}{2}\left(\frac{1}{4} - a_1 + 4\tilde{f}_1 + 4\tilde{f}_8\right) R - b_3 m^2\right] \nabla^\lambda \nabla^\rho e_{\rho\lambda} + \\
&\quad + \tilde{b}_1 \left[3m^2 + \left(2\tilde{f}_1 + 8\tilde{f}_2 + \frac{f_3}{2} + 2\tilde{f}_8\right) R\right] e = 0
\end{aligned}
\tag{48}
$$

Motivados pela substituição de (17) em (29) e (33), definimos as seguintes constantes:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}_1 &\doteq f_1 + \frac{f_4}{4} + \frac{f_9}{4} \\
\tilde{f}_2 &\doteq f_2 + \frac{f_5}{4} \\
\tilde{f}_8 &\doteq f_8 + \frac{f_7}{4} \\
\tilde{b}_1 &\doteq b_0\, R + b_1 m^2 + \frac{b_2 R}{4}
\end{aligned}
\tag{49}
$$

A expressão (46) já é um vínculo vetorial uma vez que não contém derivadas de segunda ordem no campo. Corresponde a 4 vínculos no total. O mesmo não ocorre nas expressões (47) e (48) que ainda possuem segundas derivadas. Primeiramente, vamos tornar (48) em um vínculo escalar. Precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} b_3(1-f_3) &= 0 \\ -6\tilde{b}_1\left(a_1+\frac{1}{12}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{1}{4}+a_1+4\tilde{f}_2\right)R+b_3m^2 &= 0 \\ 6\tilde{b}_1\left(a_1+\frac{1}{12}\right)+\frac{b_3}{2}\left(\frac{1}{4}-a_1+4\tilde{f}_1+4\tilde{f}_8\right)R-b_3m^2 &= 0 \end{aligned} \tag{50}$$

É fácil notar que a solução de (50) de volta em (48) nos leva ao vínculo escalar $e=0$, desde que o coeficiente de "e" seja diferente de zero em (48). Entretanto, a expressão (47) ainda possui termos de segunda ordem em derivadas. Para que esses termos sejam cancelados[2], é necessário que $\nabla^\mu e_{\mu\nu}=0$. É possível obter essa igualdade a partir do vínculo vetorial (46) se fizermos uma escolha apropriada dos parâmetros da teoria. Mais especificamente, uma vez que a solução de (50) requer $f_3=1$, se fixarmos também $\tilde{f}_1=0$ e $f_6=-\frac{1}{2}$, obtemos automaticamente de (46) o vínculo $\nabla^\mu e_{\mu\nu}=0$ desde que seu coeficiente em (46) seja não nulo. A solução do conjunto de equações formado pelo sistema dado em (50) mais as equações $\tilde{f}_1=0$ e $f_6=-\frac{1}{2}$ vem dada por:

$$\begin{aligned} f_3 &= 1 \\ \tilde{f}_8 &= -\frac{1}{8}-\tilde{f}_2 \\ \tilde{b}_1 &= \frac{b_3}{1+12a_1}\left[2m^2+\left(\frac{1}{4}+a_1+4\tilde{f}_2\right)R\right] \end{aligned} \tag{51}$$

Retornando a solução acima em (46), (47) e (48) nós finalmente chegamos a todos os vínculos necessários, uma vez que a partir de (48) obtemos o vínculo escalar:

$$e=0\,. \tag{52}$$

Usando (51) e o resultado $e=0$ em (46), temos o vínculo vetorial:

$$\nabla^\sigma e_{\sigma\rho}=0\,. \tag{53}$$

Finalmente, usando (51) e os resultados (52) e (53) em (47), chegamos ao vínculo tensorial:

$$e_{[\rho\sigma]}=0 \tag{54}$$

desde que seu coeficiente em (47) seja não nulo. Resumindo, todas as condições de FP são satisfeitas se a restrição abaixo for respeitada

$$b_3\tilde{m}^2\left[2\tilde{m}^2+\left(-\frac{1}{4}+a_1\right)R\right]\left[3\tilde{m}^2-\frac{R}{2}\right]\neq 0 \tag{55}$$

[2] Se $a_1=1/4$, tais termos seriam eliminados sem problemas, mas esse valor específico de a_1 representa o caso de FP, o qual ja foi apresentado no capítulo 2 e, portanto, não é de nosso interesse aqui.

$$\tilde{m}^2 \equiv m^2 + \left(\frac{1}{4} + 2\tilde{f}_2\right) R \tag{56}$$

enquanto as equações de movimento se tornam

$$E_{\rho\sigma} = (\Box - \tilde{m}^2) e_{\rho\sigma} + 2R_{\rho\alpha\sigma\beta}\, e^{\alpha\beta}\,. \tag{57}$$

Portanto, a teoria possui $16 - 11 = 5$ graus de liberdade o que corresponde à contagem correta para uma partícula de spin-2 massiva ($5 = 2s + 1$). A teoria final ainda contém 2 parâmetros livres $\tilde{f}_2$ e a_1, com a restrição (55) e $(a_1 + 1/12)(a_1 - 1/4) \neq 0$.

Para efeitos de comparação com os resultados de (MORAND; SOLODUKHIN, 2012), consideremos agora um subcaso especial dos espaços de Einstein que são os espaços maximamente simétricos onde temos a seguinte identidade para o tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{R}{12}(g_{\alpha\rho} g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho})\,. \tag{58}$$

Todos os resultados obtidos anteriormente podem ser trazidos consistentemente para os espaços maximamente simétricos (58).

Usando (49) e (51), a Lagrangiana (29) em um campo de fundo maximamente simétrico se torna

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\mathrm{MSS})}(a_1) \;=\;& -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\beta\alpha} + a_1 \nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\mu\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \\ & + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla_\mu e - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,(\nabla^\alpha e_{\alpha\mu} + \nabla^\alpha e_{\mu\alpha}) \\ & - \frac{m^2}{2}(e_{\alpha\beta}\, e^{\beta\alpha} - e^2) - \frac{1}{24}\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{12} + \tilde{f}_2\right) R\, e^2 + \\ & - \left(\frac{1}{6} + \tilde{f}_2\right) R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\beta\alpha} \end{aligned} \tag{59}$$

Por outro lado, foi apresentado em (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) um modelo para partículas massivas de spin-2 também com um tensor não simétrico $e_{\mu\nu} \neq e_{\nu\mu}$ acoplado a um campo de fundo maximamente simétrico. Essa teoria é conhecida como "dual massive gravity" e tem a seguinte expressão como lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\mathrm{dual})} = \frac{1}{2}\nabla_\rho e_{\nu\sigma}(-\nabla^\rho e^{\nu\sigma} - \nabla^\nu e^{\rho\sigma} + \nabla^\nu e^{\sigma\rho} - \nabla^\rho e^{\sigma\nu} + \nabla^\sigma e^{\rho\nu} + \nabla^\sigma e^{\nu\rho}) + \\ - m^2(e_{\mu\nu} e^{\nu\mu} - e^2) \end{aligned} \tag{60}$$

Como já foi discutido em (DALMAZI, 2013a), o modelo apresentado em (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) é recuperado a partir de $\mathcal{L}^{(\mathrm{MSS})}(a_1)$ no espaço plano quando $a_1 = -1/4$. Entretanto, vale ressaltar que a escolha de $a_1 = -1/4$ não requer necessariamente espaços maximamente simétricos como veremos mais adiante.

A relação entre $\mathcal{L}^{\text{(dual)}}$ e $\mathcal{L}^{\text{(MSS)}}(a_1)$ vem dada por

$$\mathcal{L}^{\text{(MSS)}}(a_1 = -1/4) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{\text{(dual)}} - \left[\frac{1}{24} + \tilde{f}_2\right] R(e^{\alpha\beta}e_{\beta\alpha} - e^2) \tag{61}$$

Assim, o modelo de (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) é um subcaso de $\mathcal{L}^{\text{(MSS)}}(a_1 = -1/4)$ onde

$$\tilde{f}_2 = -\frac{1}{24}\,. \tag{62}$$

Com o valor de $\tilde{f}_2$ acima, as restrições (55) nos levam a dois valores proibidos para o escalar de curvatura, a saber, $R \neq -6\,m^2$ e $R \neq 12\,m^2$. O primeiro valor difere por um sinal da restrição obtida em (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) enquanto que o segundo valor não foi mencionado em (MORAND; SOLODUKHIN, 2012).

É importante enfatizar entretanto que $\tilde{f}_2$ é um parâmetro livre no modelo $\mathcal{L}^g(a_1)$, portanto a desigualdade (55) restringe os possíveis valores de $\tilde{f}_2$, não a curvatura R. Isso ocorre porque nossa lagrangiana original é mais geral do que (60). Em espaços maximamente simétricos, não há valores proibidos para o escalar de curvatura no modelo $\mathcal{L}^g(a_1)$, nem mesmo para $a_1 = -1/4$.

5 MODELOS SEM MASSA E MODELOS PARCIALMENTE SIMÉTRICOS

No capítulo anterior, os modelos massivos $\mathcal{L}(a_1)$ foram acoplados a um campo gravitacional de fundo. Para isso, efetuamos o acoplamento mínimo da correspondente ação no espaço plano e adicionamos termos lineares na curvatura (não mínimos) de tal forma que os vínculos necessários para uma contagem correta de g.l. fossem obtidos. Para se obter as versões sem massa desses modelos também acoplados a um campo gravitacional de fundo, seguimos um procedimento similar. No entanto, ao invés de procurarmos por vínculos, demandamos a existência de algumas simetrias de *gauge*. Assim como no caso massivo, dividiremos nosso estudo em duas partes: primeiro vamos considerar $a_1 = -1/12$ que corresponde ao que chamamos de $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e, em seguida, apresentaremos os resultados para os demais valores de a_1. Lembremos que o caso $a_1 = 1/4$ nos leva ao já conhecido modelo de Fiez-Pauli, inclusive no correspondente caso sem massa sobre o qual já foi comentado no Capítulo 2. Portanto, nos concentraremos em $a_1 \neq 1/4$. Vejamos os principais resultados para cada modelo.

5.1 $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$

5.1.1 Espaços arbitrários

Tomemos como ponto de partida a lagrangiana (4) com $m = 0$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{g,m=0}_{\text{nFP}} \quad = \quad & -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\beta\alpha} - \frac{1}{12}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda} + \\
& + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda} + \frac{1}{6}\nabla^\mu\nabla_\mu e - \frac{1}{3}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla^\beta e + d_1\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta} + \\
& + d_2\, R\, e^2 + d_3\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\beta\nu} + d_4\, R_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\beta}{}_{\mu} + d_5\, R_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\beta}\, e + \\
& + d_6\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\beta}\, e^{\mu\nu} + d_7\, R_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\mu}\, e_{\mu}{}^{\beta} + d_8\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\beta\alpha} + d_9\, R_{\alpha\beta}\, e^{\mu\alpha}\, e_{\mu}{}^{\beta} \qquad (1)
\end{aligned}$$

onde d_j $(j = 1, 2, ..., 9)$ são constantes arbitrárias por enquanto. As simetrias de *gauge* no caso plano estão dadas em (4) e esperamos reproduzi-las em espaços curvos, onde ∂_α deve ser trocado por ∇_α:

$$\delta e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\phi + \nabla_\nu \xi_\mu + \nabla^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]}. \qquad (2)$$

Devemos, então, escolher apropriadamente os coeficientes dos termos não mínimos de forma a manter a ação invariante.

Calculando a variação de $\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0}$ sob as transformações (2), após várias manipulações obtemos:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0} \;=\; & \sqrt{-g}\Bigg\{\phi\Big[(2d_1+8d_2+d_5+2d_8)R\,e+2(d_3+d_4+2d_5+d_7+d_9)R_{\rho\sigma}e^{\rho\sigma}\Big] \\
& +\nabla_\nu\xi_\mu\Bigg[\left(\frac{1}{6}+d_7\right)R^\mu{}_\alpha\,e^{\nu\alpha}+\left(\frac{1}{2}+d_7\right)R^\nu{}_\alpha\,e^{\alpha\mu}+2(-1+d_3)R^{\mu\beta\nu\rho}\,e_{\beta\rho} \\
& +(1+2d_6)R^{\alpha\beta\mu\nu}\,e_{\alpha\beta}+\left(-\frac{1}{2}+2d_4\right)R^\mu{}_\beta\,e^{\beta\nu}+\left(\frac{1}{2}+2d_9\right)R^\nu{}_\beta\,e^{\mu\beta}+ \\
& +\left(\frac{1}{3}+d_5\right)R^{\nu\mu}\,e+2d_1R\,e^{\mu\nu}+2d_8Re^{\nu\mu}\Bigg]+\nabla^\mu\,\xi_\mu\Big[2d_2R\,e+d_5R^{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta}\Big] \\
& +\xi_\mu\left[-\frac{1}{3}\,e_{\lambda\nu}\,\nabla^\lambda R^{\mu\nu}-e_{\lambda\nu}\,\nabla^\nu R^{\mu\lambda}+e_{\alpha\lambda}\nabla^\mu R^{\lambda\alpha}+\frac{1}{6}\,e\,\nabla_\mu R\right]+ \\
& +\Big[2R(d_1-d_8)e^{\mu\nu}+(2d_4-d_7)R^\mu{}_\beta\,e^{\beta\nu}+(2d_9-d_7)R^\nu{}_\beta\,e^{\mu\beta}\Big]\nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3}
$$

Tendo em vista a expressão acima, não é difícil se convencer de que não é possível obter $\delta\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0}=0$ sem que restrinjamos o espaço de fundo pois não há solução possível para os d_j's que zere todos os coeficientes. Isso pode ser visto particularmente se olharmos para os coeficientes $(\frac{1}{6}+d_7)$ e $(\frac{1}{2}+d_7)$ que não podem se cancelar simultaneamente. Portanto se faz necessário estabelecer uma restrição para o espaço de fundo, o que será abordado a seguir.

5.1.2 Espaços de Einstein

Iremos reconsiderar o modelo $\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0}$, desta vez acoplado a espaços de fundo do tipo Einstein (17). Nesse caso a lagrangiana (1) pode ser reescrita como:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0} \;=\; & -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\alpha\beta}-\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\beta\alpha}-\frac{1}{12}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\lambda\beta}+\frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda}+ \\
& +\frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda}+\frac{1}{6}\nabla^\mu\nabla_\mu e-\frac{1}{3}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla^\beta e+\tilde{d}_1\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta}+ \\
& +\tilde{d}_2\,R\,e^2+d_3\,R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\mu}\,e^{\beta\nu}+d_6\,R_{\alpha\beta\mu\nu}\,e^{\alpha\beta}\,e^{\mu\nu}+\tilde{d}_8\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\beta\alpha}
\end{aligned} \tag{4}
$$

onde definimos

$$\tilde{d}_1 \;=\; d_1+\frac{d_4}{4}+\frac{d_9}{4} \tag{5}$$

$$\tilde{d}_2 \;=\; d_2+\frac{d_5}{4} \tag{6}$$

$$\tilde{d}_8 \;=\; d_8+\frac{d_7}{4}\,. \tag{7}$$

Reescrevamos usando (17) a variação da lagrangiana sob a transformação (2):

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{g,m=0}_{\text{nFP}} \;=\; & \sqrt{-g}\Bigg\{\phi\left(2\tilde{d}_1+8\tilde{d}_2+\frac{d_3}{2}+2\tilde{d}_8\right)R\,e\,+\\
&+\Big[(-1+2d_3+2d_6)R^{\mu\beta\nu\alpha}e_{\beta\alpha}-(1+2d_6)R^{\alpha\nu\beta\mu}e_{\alpha\beta}\Big]\nabla_\nu\xi_\mu+\\
&+\left[\left(\frac{1}{6}+2\tilde{d}_8\right)e^{\nu\mu}+2\tilde{d}_1e^{\mu\nu}\right]R\,\nabla_\nu\xi_\mu+\left(\frac{1}{12}+2\tilde{d}_2\right)R\,e\,\nabla^\mu\xi_\mu+\\
&+\Big[(d_3+2d_6)R^{\mu\beta\nu\lambda}e_{\beta\lambda}+(2\tilde{d}_1-2\tilde{d}_8)R\,e^{\mu\nu}\Big]\nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}\Bigg\} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Portanto, para que a lagrangiana seja invariante à primeira parte da transformação em (2), ou seja, $\delta e^{(1)}_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}\phi$, é preciso que:

$$2\tilde{d}_1+8\tilde{d}_2+\frac{d_3}{2}+2\tilde{d}_8=0\;. \qquad (9)$$

Por outro lado, para que a lagrangiana seja invariante à transformação $\delta e^{(2)}_{\mu\nu}=\nabla_\nu\xi_\mu$, as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
-1+2d_3+2d_6&=0 \qquad (10)\\
1+2d_6&=0 \qquad (11)\\
\frac{1}{6}+2\tilde{d}_8&=0 \qquad (12)\\
\tilde{d}_1&=0 \qquad (13)\\
\frac{1}{12}+2\tilde{d}_2&=0 \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Finalmente, para que haja invariância sob $\delta e^{(3)}_{\mu\nu}=\nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}$, é preciso que:

$$
\begin{aligned}
d_3+2d_6&=0 \qquad (15)\\
\tilde{d}_1-\tilde{d}_8&=0 \qquad (16)
\end{aligned}
$$

Vemos das equações (12), (13) e (16) que não há solução possível que torne a lagrangiana invariante sob as tranformações $\delta e^{(2)}_{\mu\nu}=\nabla_\nu\xi_\mu$ e $\delta e^{(3)}_{\mu\nu}=\nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}$ simultaneamente. Portanto, não foi possível obter um modelo consistente com a descrição de uma partícula de spin-2 sem massa se propagando nem mesmo em espaços do tipo Einstein. Desse ponto de vista, o modelo para campo simétrico $h_{\mu\nu}=h_{\nu\mu}$ dado em (12) com $m=0$ é mais flexível do que o $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$.

Em contrapartida, podemos identificar dois modelos distintos com as seguintes simetrias:

- **Simetrias escalar e vetorial**

  É possível encontrar uma solução para o sistema de equações reduzido (9)-(14):

$$\tilde{d}_1=0,\;\tilde{d}_2=-\frac{1}{24},\;d_3=1,\;d_6=-\frac{1}{2},\;\tilde{d}_8=-\frac{1}{12} \qquad (17)$$

Nesse caso, temos um modelo invariante sob a seguinte transformação de *gauge*:

$$\delta e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\phi + \nabla_\nu \xi_\mu \ . \tag{18}$$

- **Simetrias escalar e tensorial**

  Analogamente, de (9), (15) e (16), obtemos um modelo invariante pela transformação de *gauge*:

$$\delta e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}\phi + \nabla^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]} \ , \tag{19}$$

  onde devemos ter que

$$\tilde{d}_1 = \tilde{d}_8, \ d_3 = -2d_6, \ \tilde{d}_2 = \frac{d_6}{8} - \frac{\tilde{d}_8}{2} \ . \tag{20}$$

O conteúdo físico dos modelos acima com simetrias parciais ainda não foi estudado, sendo uma das perspectivas futuras do presente trabalho.

5.1.3 Espaços maximamente simétricos

Consideremos agora o modelo acoplado a espaços maximamente simétricos, onde o tensor de Riemmann vem dado por

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{R}{12}(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}) \ . \tag{21}$$

Nesse caso, a variação da lagrangiana (8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{\text{MS},m=0}_{\text{nFP}} \ &= \ \sqrt{-g}R\Bigg\{\phi\left(2\tilde{d}_1 + 8\tilde{d}_2 + \frac{d_3}{2} + 2\tilde{d}_8\right)e + \\
&+\left(-\frac{1}{12} + \frac{d_3}{6} + 2\tilde{d}_2\right)e\,\nabla^\mu\xi_\mu + \left(\frac{1}{4} - \frac{d_3}{6} - \frac{d_6}{6} + 2\tilde{d}_8\right)e^{\nu\mu}\,\nabla_\nu\xi_\mu + \\
&+\left(\frac{1}{12} + \frac{d_6}{6} + 2\tilde{d}_1\right)e^{\mu\nu}\,\nabla_\nu\xi_\mu + \left(\frac{d_3}{12} + \frac{d_6}{6} + 2\tilde{d}_1 - 2\tilde{d}_8\right)e^{\mu\nu}\,\nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{22}$$

Assim, para que $\delta\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0} = 0$, é preciso que cada um dos coeficientes presentes na expressão anterior se anule, ou seja,

$$2\tilde{d}_1 + 8\tilde{d}_2 + \frac{d_3}{2} + 2\tilde{d}_8 = 0 \tag{23}$$
$$-\frac{1}{12} + 2\tilde{d}_2 + \frac{d_3}{6} = 0 \tag{24}$$
$$\frac{1}{4} - \frac{d_3}{6} - \frac{d_6}{6} + 2\tilde{d}_8 = 0 \tag{25}$$
$$\frac{1}{12} + 2\tilde{d}_1 + \frac{d_6}{6} = 0 \tag{26}$$
$$2\tilde{d}_1 + \frac{d_3}{12} + \frac{d_6}{6} - 2\tilde{d}_8 = 0 \tag{27}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos a seguinte solução:

$$\tilde{d}_1 = -\frac{1}{12} + \tilde{d}_8,\ \tilde{d}_2 = -\frac{1}{24} - 2\,\tilde{d}_8,\ d_3 = 1 + 24\,\tilde{d}_8,\ d_6 = \frac{1}{2} - 12\,\tilde{d}_8 \tag{28}$$

onde $\tilde{d}_8$ se mantém arbitrário pois na prática somente quatro das cinco equações (23) a (27) são independentes. A existência dessa solução significa que a lagrangiana $\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0}$ em espaços maximamente simétricos possui simetria sob a transformação completa dada em (2).

Ao substituirmos a solução (28) em (1) juntamente com o fato de que o espaço é maximamente simétrico, temos a seguinte lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{\text{MS},m=0} \;=\;& -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\beta\alpha} - \frac{1}{12}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda} + \\ & + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda} + \frac{1}{6}\nabla^\mu\nabla_\mu e - \frac{1}{3}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla^\beta e - \frac{1}{24}\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} + \\ & + \frac{1}{24}\,R\,e^2 - \frac{1}{8}\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\beta\alpha}\end{aligned} \tag{29}$$

onde o parâmetro $\tilde{d}_8$ acaba sendo eliminado dos coeficientes. Temos portanto um modelo consistente a princípio com a descrição de partículas de spin-2 sem massa se propagando em espaços de fundo maximamente simétricos. A lagrangiana (29) é consistente com o limite sem massa do modelo $\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g}(c)$ encontrado na seção 4.1.2 para espaços maximamente simétricos com $\tilde{d}_2 = -1/24$ e $\tilde{d}_8 = -1/12$. Podemos então dizer que esse modelo massivo tem um limite sem massa consistente, pelo menos em espaços maximamente simétricos.

5.2 $\mathcal{L}^g(a_1)$

5.2.1 Espaços arbitrários

Analogamente ao que foi feito na seção anterior para $\mathcal{L}_{\text{nFP}}^{g,m=0}$, para se obter o modelo sem massa de $\mathcal{L}^g(a_1)$, precisamos das versões para espaços curvos das simetrias locais dadas em (12) a fim de garantir a consistência da teoria com a vantagem de que agora temos menos simetria:

$$\delta e_{\mu\nu} = \nabla_\nu\xi_\mu + \nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]} \tag{30}$$

Comecemos pela lagrangiana (29) com $m=0$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) \;=\;& -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\beta\alpha} + a_1\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\mu\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \\
& + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla_\mu e - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla^\alpha\, e_{\alpha\mu} + \\
& - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla^\alpha e_{\mu\alpha} + f_1\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta} + f_2\, R\, e^2 + f_3\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\beta\nu} + \\
& + f_4\, R_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\beta}{}_{\mu} + f_5\, R_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\beta}\, e + f_6\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\beta}\, e^{\mu\nu} + f_7\, R_{\alpha\beta}\, e^{\alpha\mu}\, e_{\mu}{}^{\beta} + \\
& + f_8\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\beta\alpha} + f_9\, R_{\alpha\beta}\, e^{\mu\alpha}\, e_{\mu}{}^{\beta}
\end{aligned}
\tag{31}
$$

onde f_j's são constantes arbitrárias por enquanto.

A variação da lagragiana sob a transformação (30) após diversas simplificações vem dada por:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) \;=\;& \sqrt{-g}\Bigg\{\nabla_\nu\xi_\mu\Bigg[\left(-2a_1 + f_7\right)R^{\mu}{}_{\alpha}\, e^{\nu\alpha} + \left(\frac{1}{2} + f_7\right)R_{\alpha}{}^{\nu}\, e^{\alpha\mu} + \\
& + (-1 + 2f_3 + 2f_6)R^{\mu\beta\nu\rho}\, e_{\beta\rho} + (1 + 2f_6)R^{\nu\alpha\beta\mu}\, e_{\alpha\beta} + \\
& + \left(-\frac{1}{2} + 2f_4\right)R^{\mu}{}_{\beta}\, e^{\beta\nu} + \left(\frac{1}{2} + 2f_9\right)R^{\nu}{}_{\beta}\, e^{\mu\beta} + \\
& + \left(\frac{1}{2} + 2a_1 + f_5\right)R^{\nu\mu}\, e + 2f_1 R\, e^{\mu\nu} + 2f_8 R e^{\nu\mu}\Bigg] + \\
& + \nabla^\mu\, \xi_\mu\Big[2f_2 R\, e + f_5 R^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta}\Big] \\
& + \xi_\mu\Bigg[-2a_1\, e_{\lambda\nu}\,\nabla_\alpha R^{\alpha\mu\lambda\nu} - \frac{1}{2}e_{\alpha\lambda}\,\nabla_\nu R^{\mu\alpha\nu\lambda} - \frac{1}{2}e_{\alpha\lambda}\nabla_\nu R^{\mu\lambda\nu\alpha} + \\
& + \left(2a_1 + \frac{1}{2}\right)(e\,\nabla_\nu R^{\mu\nu} -\, e_{\alpha\beta}\nabla^\beta R^{\mu\alpha})\Bigg] \\
& + \Big[2R(f_1 - f_8)e^{\mu\nu} + (2f_4 - f_7)R^{\mu}{}_{\beta}\, e^{\beta\nu} + (2f_9 - f_7)R^{\nu}{}_{\beta}\, e^{\mu\beta}\Big]\nabla^\alpha\Lambda_{[\alpha\mu\nu]}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Neste caso também não é possível encontrar uma solução para os f_j's de modo a obter $\delta\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) = 0$ sem restringir o espaço de fundo.

5.2.2 Espaços de Einstein

Novamente, vamos considerar $R_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R\, g_{\mu\nu}$ e reescrever a variação da lagrangiana sob a transformação (30):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) \;=\;& -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e_{\beta\alpha} + a_1 \nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\mu\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \\
& + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\,\nabla_\mu e^{\beta\mu} + \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla_\mu e - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla^\alpha\, e_{\alpha\mu} + \\
& - \left(a_1 + \frac{1}{4}\right)\nabla^\mu e\,\nabla^\alpha e_{\mu\alpha} + \tilde{f}_1\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\alpha\beta} + \tilde{f}_2\, R\, e^2 + f_3\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\mu}\, e^{\beta\nu} + \\
& + f_6\, R_{\alpha\beta\mu\nu}\, e^{\alpha\beta}\, e^{\mu\nu} + \tilde{f}_8\, R\, e^{\alpha\beta}\, e_{\beta\alpha} \qquad (33)
\end{aligned}$$

onde definimos

$$\tilde{f}_1 = f_1 + \frac{f_4}{4} + \frac{f_9}{4} \qquad (34)$$

$$\tilde{f}_2 = f_2 + \frac{f_5}{4} \qquad (35)$$

$$\tilde{f}_8 = f_8 + \frac{f_7}{4} \qquad (36)$$

Neste caso, a variação da lagrangiana sob a transformação (30) vem dada por:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) \;=\;& \sqrt{-g}\Bigg\{\nabla_\nu \xi_\mu \Big[(-1 + 2f_3 + 2f_6) R^{\mu\beta\nu\rho}\, e_{\beta\rho} + (1 + 2f_6) R^{\nu\alpha\beta\mu}\, e_{\alpha\beta} + \\
& + 2\tilde{f}_1 R\, e^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{8} - \frac{a_1}{2} + 2\tilde{f}_8\right) R e^{\nu\mu}\Big] + \nabla^\mu\, \xi_\mu \left[\frac{1}{8} + \frac{a_1}{2} + 2\tilde{f}_2\right] R\, e \\
& + \Big[(f_3 + 2f_6) R^{\mu\beta\nu\lambda} e_{\beta\lambda} + 2(\tilde{f}_1 - \tilde{f}_8) R e^{\mu\nu}\Big] \nabla^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]}\Bigg\} \qquad (37)
\end{aligned}$$

Para que obtenhamos $\delta\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) = 0$, é preciso encontrar f_j's tais que satisfaçam as seguintes equações:

$$-1 + 2f_3 + 2f_6 = 0 \qquad (38)$$

$$1 + 2f_6 = 0 \qquad (39)$$

$$\tilde{f}_1 = 0 \qquad (40)$$

$$\frac{1}{8} - \frac{a_1}{2} + 2\tilde{f}_8 = 0 \qquad (41)$$

$$\frac{1}{8} + \frac{a_1}{2} + 2\tilde{f}_2 = 0 \qquad (42)$$

$$f_3 + 2f_6 = 0 \qquad (43)$$

$$\tilde{f}_1 - \tilde{f}_8 = 0 \qquad (44)$$

No entanto, as equações (40), (41) e (44) nos levam ao modelo sem massa de FP: $a_1 = 1/4$. Logo, não foi possível obter um modelo sem massa para $\mathcal{L}^g(a_1)$ $(a_1 \neq 1/4)$ em espaços do tipo Einstein que possuam simetria sob a transformação (30).

Podemos, por outro lado, estabelecer modelos com as simetrias vetorial e tensorial separadamente. Vejamos:

- **Simetria vetorial**

  Se considerarmos o sistema formado apenas pelas equações (38)-(42), obtemos a seguinte solução:

$$\tilde{f}_1 = 0,\ f_6 = -\frac{1}{2},\ f_3 = 1,\ \tilde{f}_8 = -\frac{1}{16} + \frac{a_1}{4},\ \tilde{f}_2 = -\frac{1}{16} - \frac{a_1}{4} \tag{45}$$

  Para esses valores dos parâmetros, a lagrangiana (33) é invariante sob a transformação $\delta^{(1)} e_{\mu\nu} = \nabla_\nu \xi_\mu$.

- **Simetria tensorial**

  Analogamente, se escolhermos os parâmetros tais que as equações (43) e (44) sejam satisfeitas, ou seja,

$$f_3 = -2f_6,\ \tilde{f}_1 = \tilde{f}_8 \tag{46}$$

  a lagrangiana (33) se torna invariante sob a transformação $\delta e_{\mu\nu} = \nabla^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]}$.

O conteúdo físico dos modelos acima será investigado no futuro.

5.2.3 Espaços maximamente simétricos

Façamos agora a restrição para espaços de fundo do tipo maximamente simétricos. A variação da lagrangiana $\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1)$ dada em (37) se torna:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) \;=\; & \sqrt{-g}R\Bigg\{\left(-\frac{1}{24} + \frac{a_1}{2} + \frac{f_3}{6} + 2\tilde{f}_2\right) e\,\nabla^\mu \xi_\mu + \\
& + \left(\frac{5}{24} - \frac{a_1}{2} - \frac{f_3}{6} - \frac{f_6}{6} + 2\tilde{f}_8\right) e^{\nu\mu}\,\nabla_\nu \xi_\mu + \left(\frac{1}{12} + \frac{f_6}{6} + 2\tilde{f}_1\right) e^{\mu\nu}\,\nabla_\nu \xi_\mu + \\
& + \left(\frac{f_3}{12} + \frac{f_6}{6} + 2\tilde{f}_1 - 2\tilde{f}_8\right) e^{\mu\nu}\,\nabla^\alpha \Lambda_{[\alpha\mu\nu]}\Bigg\}
\end{aligned} \tag{47}$$

A fim de obter $\delta\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1) = 0$, é necessário resolver:

$$-\frac{1}{24} + \frac{a_1}{2} + \frac{f_3}{6} + 2\tilde{f}_2 = 0 \tag{48}$$

$$\frac{5}{24} - \frac{a_1}{2} - \frac{f_3}{6} - \frac{f_6}{6} + 2\tilde{f}_8 = 0 \tag{49}$$

$$\frac{1}{12} + \frac{f_6}{6} + 2\tilde{f}_1 = 0 \tag{50}$$

$$\frac{f_3}{12} + \frac{f_6}{6} + 2\tilde{f}_1 - 2\tilde{f}_8 = 0 \tag{51}$$

para o qual encontramos a seguinte solução:

$$\tilde{f}_1 = -\frac{1}{16} + \frac{a_1}{4} + \tilde{f}_8,\ \tilde{f}_2 = -\frac{1}{16} - \frac{a_1}{4} - 2\tilde{f}_8,\ f_3 = 1 + 24\,\tilde{f}_8,\ f_6 = \frac{1}{4} - 3a_1 - 12\,\tilde{f}_8 \tag{52}$$

onde $\tilde{f}_8$ se mantém arbitrário. A existência dessa solução significa que a lagrangiana $\mathcal{L}^{g,m=0}(a_1)$ em espaços maximamente simétricos possui simetria sob a transformação completa dada em (30).
Ao substituirmos a solução (52) em (33) juntamente com o fato de que o espaço é maximamente simétrico, chegamos à seguinte lagrangiana:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{g,m=0}_{\text{nFP}} \;=\;& -\frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\nabla^\mu e^{\alpha\beta}\nabla_\mu e_{\beta\alpha} - \frac{1}{12}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda} + \\
& + \frac{1}{4}\nabla^\alpha e_{\beta\alpha}\nabla_\lambda e^{\beta\lambda} + \frac{1}{6}\nabla^\mu \nabla_\mu e - \frac{1}{3}\nabla^\alpha e_{\alpha\beta}\nabla^\beta e - \frac{1}{24}\,R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\alpha\beta} + \\
& + \left(\frac{1}{48} - \frac{a_1}{4}\right) R\,e^2 + \left(-\frac{5}{48} + \frac{a_1}{4}\right) R\,e^{\alpha\beta}\,e_{\beta\alpha}
\end{aligned} \tag{53}$$

onde o parâmetro $\tilde{f}_8$ acaba sendo eliminado novamente dos coeficientes. Temos portanto um modelo aparentemente consistente com a descrição de partículas de spin-2 sem massa e um escalar sem massa se propagando em espaços de fundo maximamente simétricos. Verificamos ainda que (53) é consistente com o limite sem massa do modelo $\mathcal{L}^g(a_1)$ obtido na seção 4.2.2 para espaços maximamente simétricos com $\tilde{f}_2 = -(a_1 + 1/4)/4$.

5.3 TEORIAS PARCIALMENTE SIMÉTRICAS

Em espaços planos, as partículas são divididas em massivas e sem massa de forma bem definida. Já em espaços curvos, além dessas, existe uma possibilidade matemática de que haja teorias para partículas de spin-2 que propagam um número de g.l. maior que de um gráviton sem massa, mas menor que de um massivo. Essas teorias são conhecidas como parcialmente sem massa (HIGUCHI, 1987; BONIFACIO; FERREIRA; HINTERBICHLER, 2015; BERNARD et al., 2017) e apresentam o diferencial de ter uma invariância de gauge escalar, apesar da massa, responsável por remover um dos g.l. do gráviton massivo. Vejamos como isso acontece na prática, começando pela própria teoria de FP.

No capítulo 1, foram deduzidas as chamadas condições de FP sendo que uma delas, $h = 0$, foi obtida demandando que o coeficiente da expressão (16) fosse não nulo e não foi analisado o caso em que ocorre o contrário. Portanto, consideremos que o coeficiente de h nessa expressão seja nulo, em $D = 4$, o que nos leva a

$$R = 6m^2\ . \tag{54}$$

Além disso, ocorre que não haverá mais o vínculo escalar $h = 0$. Por outro lado, a teoria adquire uma simetria de *gauge* escalar:

$$\delta h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \nabla_\nu \alpha + \frac{m^2}{2} g_{\mu\nu}\alpha \tag{55}$$

onde α é o parâmetro de *gauge*. Com essa simetria, a teoria propaga 4 g.l., ou seja, 1 g.l. a menos que a teoria massiva.

As teorias parcialmente sem massa vêm sendo bastante estudadas a nível linear (BERNARD et al., 2017; DESER; WALDRON, 2001a; DESER; WALDRON, 2001c; DESER; WALDRON, 2001b) e tem havido um grande esforço para estendê-las ao nível não linear, apesar de alguns impasses (RHAM et al., 2013; GARCIA-SAENZ; ROSEN, 2015). Essas teorias são de grande interesse gravitacional pois a relação (54) implica em uma relação direta entre a massa do gráviton e a constante cosmológica, uma vez que Λ é proporcional a R. Como sabemos, a massa do gráviton, se existir, seria naturalmente pequena, o que ofereceria uma alternativa para o problema da constante cosmológica.

Vejamos os casos de teoria parcialmente sem massa nos modelos $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$:

- $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$

  Na equação (20), demandamos que o coeficiente do traço "e" fosse não nulo para que chegássemos ao vínculo escalar $e = 0$. Consideremos agora a situação em que esse coeficiente é nulo, ou seja,

$$R = \frac{(1+4c)m^2}{2(1+8c)\,\tilde{d}_8 - 8\tilde{d}_2 - \frac{1}{2}} \tag{56}$$

  onde já foram utilizadas as soluções (22) e a definição (27) e $c \neq -1/4$. Neste caso a teoria adquire a seguinte simetria escalar

$$\delta e_{\rho\sigma} = g_{\rho\sigma}\,\lambda\,, \tag{57}$$

  onde λ é um escalar de *gauge*. Com essa simetria esperamos ter menos graus de liberdade propagantes, assim como a teoria parcialmente massiva de FP. Notemos, então, que mesmo com uma teoria em que $m \neq 0$, para o valor específico de R dado em (56), a teoria massiva adquire a simetria de *gauge* (57), configurando o que chamamos de teoria parcialmente sem massa.

  Quando temos $c = -1/4$, para que o coeficiente de "e" seja nulo devemos ter

$$\frac{\tilde{d}_8}{4} + \tilde{d}_2 = -\frac{1}{16}\,. \tag{58}$$

  Nesse caso, o modelo $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ também adquire a simetria escalar (57).

- $\mathcal{L}^g(a_1)$

  Da mesma forma, se o coeficiente de "e" no vínculo escalar (48) for nulo, não obteremos $e = 0$. Em contrapartida, a teoria adquire uma nova simetria. Ou seja, temos

$$R = \frac{-2m^2}{\frac{1}{4} + a_1 + 4\tilde{f}_2}\,, \tag{59}$$

e a teoria $\mathcal{L}^g(a_1)$ adquire a simetria

$$\delta e_{\rho\sigma} = \nabla_\rho \nabla_\sigma \lambda \tag{60}$$

onde λ é um escalar de *gauge*. Temos então, mesmo com $m \neq 0$, uma teoria de spin-2 parcialmente simétrica possivelmente com menos de 5 g.l. propagantes.

É natural pensar em escrever as igualdades (56) e (59) como uma restrição para os parâmetros ao invés de uma restrição[1] para R. No entanto, ao isolarmos $\tilde{d}_2$ ou $\tilde{d}_8$ em (56) e $\tilde{f}_2$ em (59) chegamos a expressões para esses parâmetros que possuem R no denominador, o que contradiz a hipótese inicial de que os coeficientes são analíticos em m^2 e no máximo lineares na curvatura R.

[1] Uma vez que as constantes $\tilde{d}_2$, $\tilde{d}_8$ e $\tilde{f}_2$ são arbitrárias, (56) e (59) não são exatamente uma restrição para R. O que elas nos dizem, na verdade, é que a curvatura deve ser proporcional ao quadrado da massa, porém a constante de proporcionalidade não está definida. Eventuais estudos sobre causalidades nos modelos podem levar a uma fixação das constantes. Só então essas relações seriam, de fato, restrições para R.

6 CONCLUSÃO

De acordo com a proposta inicial do presente trabalho, buscava-se obter a versão dos modelos $\mathcal{L}(a_1)$ para espaços curvos. Modelos esses que já se encontravam bem estabelecidos em sua forma livre. Para esse propósito, era necessário construir uma teoria acoplada a um campo gravitacional de fundo $g_{\mu\nu}$ de modo que quando tomássemos o limite em que o espaço fosse plano, ou seja, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica de Minkowski, reproduzíssemos os resultados já conhecidos. O procedimento realizado neste trabalho é análogo ao que foi feito em (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999) para o modelo de Fierz-Pauli. Assim, partimos da lagrangiana $\mathcal{L}(a_1)$ sem interação e efetuamos o acoplamento mínimo. Assim como no caso de Fierz-Pauli, foi necessário adicionar termos não mínimos que fossem quadráticos no campo e lineares na curvatura. Assumimos que os coeficientes desses termos são constantes arbitrárias, funções analíticas de m^2.

O próximo passo foi garantir que a lagrangiana apresentasse o mesmo número de graus de liberdade para partículas de spin-2 massivas no espaço plano, ou seja, 5 g.l. em $D = 4$. Para isso, buscamos por relações que removessem os graus de liberdade espúrios. No caso plano, os vínculos da teoria são as condições de Fierz-Pauli, as quais garantem que a teoria de fato descreve partículas de spin-2 massivas. Buscamos então pelas condições de FP no espaço curvo a partir da manipulação covariante das equações de movimento.

Dividimos nossa análise em dois casos: o primeiro corresponde ao modelo em que $a_1 = -1/12$, o qual chamamos de $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$; o segundo caso, ao qual nos referimos como $\mathcal{L}^g(a_1)$, compreende os demais valores de a_1, exceto $a_1 = 1/4$ que corresponde ao modelo de Fierz-Pauli. Partimos da lagrangiana acoplada a um campo gravitacional de fundo arbitrário e procuramos obter os vínculos fazendo escolhas apropriadas para os coeficientes até então arbitrários. Após extensos cálculos, chegamos a expressões não triviais. Apesar de parecer haver um pouco mais de liberdade na escolha da métrica de fundo do que no caso de Fierz-Pauli, ainda assim não foi possível se chegar a uma solução que nos levasse aos vínculos. Optamos, portanto, por considerar espaços do tipo Einstein, assim como em (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999). Nossa forma de obter os vínculos foi basicamente nos livrar de todas as segundas derivadas no campo presentes nas expressões obtidas a partir da equação de movimento. Apesar desse método manter a covariância do modelo ao longo dos cálculos, apresenta a desvantagem de exigirmos eventualmente mais do que é necessário de fato para termos os vínculos. Na verdade, vide (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999; FUKUMA et al., 2016), seria necessário eliminar apenas as segundas derivadas temporais do campo. Essa seria uma forma alternativa de se obter os vínculos que talvez nos permitiria não ter restrições sobre o espaço de fundo, porém nos custaria a covariância explícita e leva a cálculos mais extensos que pretendemos retomar no futuro, vide (FUKUMA et al., 2016) para cálculos análogos no modelo de Fierz-Pauli.

Ao considerarmos espaços do tipo Einstein nos cálculos, o tensor de Ricci passa a ser proporcional à métrica e R é constante, o que nos permite simplificar os cálculos. Assim, encontramos uma solução para os coeficientes que nos levou aos vínculos desejados, ou ainda, às condições de FP no espaço curvo. Os vínculos nos permitiram chegar à contagem correta de graus de liberdade e temos, portanto, os modelos massivos $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$ descrevendo consistentemente partículas massivas de spin-2 acopladas a um campo de fundo gravitacional do tipo Einstein. Com a versão obtida para $\mathcal{L}^g(a_1)$, pudemos generalizar para espaços de Einstein um resultado da literatura (MORAND; SOLODUKHIN, 2012) onde havia sido apresentado um modelo de spin-2 massivo em espaços do tipo maximamente simétricos, também a partir de um tensor de rank-2 não simétrico. Ao compararmos os resultados obtidos aqui para os modelos $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$ com os obtidos em (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999) para o modelo de FP, a principal diferença é que, além dos vínculos escalar e vetorial, temos também um vínculo tensorial antissimétrico. Na prática, entretanto, os modelos massivos $\mathcal{L}(a_1)$, com $a_1 \neq 1/4$, não ficam devendo nada ao modelo massivo tradicional de Fierz-Pauli ($a_1 = 1/4$) em espaços curvos. Esses resultados foram publicados recentemente em (DALMAZI; FORTES, 2017).

Sabe-se que se for permitido que os coeficientes dos termos não mínimos na lagrangiana de FP sejam não analíticos em m^2, o modelo não mais necessita de restrição sobre o espaço de fundo (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999). Esse fato foi confirmado recentemente a partir das modernas teorias dRGT de gravitação massiva. Esperamos, portanto, que ao permitirmos em $\mathcal{L}^g(a_1)$ que os termos não mínimos levem coeficientes não analíticos do tipo $1/m^2$ consigamos também alcançar resultados mais gerais, o que está em estudo. Como o campo é não simétrico, a quantidade de termos quadráticos na curvatura agora é bem maior.

Depois de obter os modelos massivos, procuramos pelas respectivas versões sem massa em espaços curvos. Neste caso, ao invés de procurarmos por vínculos, buscamos reproduzir as simetrias de *gauge* que o modelo sem massa no espaço plano apresenta. Para espaços arbitrários, não encontramos solução, assim como ocorre para FP com $m = 0$ (DESER; HENNEAUX, 2007). Para espaços de Einstein, encontramos modelos com algumas simetrias de *gauge* específicas, mas nenhum deles possui as versões curvas das mesmas simetrias do caso plano. Portanto, $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$ não possuem versões sem massa que, tomando o limite para o caso plano, reproduzam o que se conhece desses modelos livres, ao contrário do caso de FP ($a_1 = 1/4$).

Estudamos também os modelos sem massa acoplados a espaços maximamente simétricos. Foi possível, então, encontrar um modelo consistente com a descrição de partículas de spin-2 sem massa em espaços maximamente simétricos para ambos os casos $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$. Novamente vale ressaltar que, assim como no caso massivo, os coeficientes dos termos não mínimos são assumidos como sendo analíticos em m^2. A solução foi unívoca, ou seja, todos os coeficientes indeterminados, a priori, foram fixados. Como uma perspectiva futura, esperamos verificar se resultados menos restritivos surgem ao se permitir que os coeficientes possuam termos não analíticos em constantes com dimensão de massa (por exemplo, uma constante cosmológica), assim como a análise feita em (DESER; HENNEAUX, 2007).

Finalmente, estudamos as chamadas "teorias parcialmente sem massa", ou mais precisamente no nosso caso, parcialmente simétricas, relacionadas a $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$. Em ambos os modelos, existe um determinado valor de R dado em termos da massa e dos parâmetros que leva a teoria a adquirir uma simetria escalar. Essa simetria nos permite descrever partículas massivas de spin-2 porém com simetria local.

Trabalhos recentes de gravitação massiva (RHAM; GABADADZE; TOLLEY, 2011) e (HASSAN;

ROSEN, 2012) permitiram que fossem obtidas teorias livres de fantasmas com grávitons massivos se propagando em um campo gravitacional de fundo arbitrário (BERNARD; DEFFAYET; STRAUSS, 2015b; BERNARD; DEFFAYET; STRAUSS, 2015a; BERNARD et al., 2016). Esses resultados estão de acordo com aqueles obtidos perturbativamente anteriormente em (BUCHBINDER; KRYKHTIN; PERSHIN, 1999) (em potências de $1/m^2$). Portanto, ao permitirmos coeficientes não analíticos nas lagrangianas $\mathcal{L}^g_{\text{nFP}}(c)$ e $\mathcal{L}^g(a_1)$ e obtermos os vínculos necessários, esperamos também obter espaços mais gerais e chegar a versões não lineares (auto-interação) desses modelos.

Outra abordagem em andamento na tentativa de generalizar os modelos encontrados para espaços arbitrários é baseada no trabalho (FUKUMA et al., 2016) onde a partir de uma análise Hamiltoniana, os termos problemáticos que possivelmente não nos permitiriam chegar aos vínculos são identificados previamente e evitados por escolha apropriada dos coeficientes presentes na lagrangiana. No entanto, nesse método, abrimos mão da covariância explícita do modelo, o que tem gerado extensos cálculos.

Concluímos que os modelos $\mathcal{L}(a_1)$ para partículas massivas de spin-2 estão praticamente no mesmo patamar do tradicional modelo de Fierz-Pauli no que diz respeito a acoplamento com o campo gravitacional.

REFERÊNCIAS

ARAGONE, C.; DESER, S. Constraints on gravitationally coupled tensor fields. **Il Nuovo Cimento A**, v. 3, n. 3, p. 709–720, 1971.

ARAGONE, C.; DESER, S. ‘consistency problems of spin-2 gravity coupling. **Il Nuovo Cimento B**, v. 57, p. 33–49, 1980.

ARKANI-HAMED, N.; GEORGI, H.; SCHWARTZ, M. D. Effective field theory for massive gravitons and gravity in theory space. **Annals of Physics**, v. 305, n. 2, p. 96–118, 2003.

BABICHEV, E.; DEFFAYET, C.; ZIOUR, R. Recovering general relativity from massive gravity. **Physical Review Letters**, v. 103, n. 201102, 2009.

BABICHEV, E.; DEFFAYET, C.; ZIOUR, R. Recovering general relativity from massive gravity via the vainshtein mechanism. **Physical Review D**, v. 82, n. 104008, 2010.

BENGTSSON, I. Note on massive spin 2 in curved space. **Journal of Mathematical Physics**, v. 36, p. 5805–5811, 1995.

BERNARD, L. et al. Partially massless graviton on beyond einstein spacetimes. **Physical Review D**, v. 95, n. 124036, 2017.

BERNARD, L. et al. Linear spin-2 fields in most general backgrounds. **Physical Review D**, v. 93, n. 084020, 2016.

BERNARD, L.; DEFFAYET, C.; STRAUSS, M. v. Consistent massive graviton on arbitrary backgrounds. **Physical Review D**, v. 91, n. 104013, 2015.

BERNARD, L.; DEFFAYET, C.; STRAUSS, M. von. Massive graviton on arbitrary background: derivation, syzygies, applications. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2015, 2015.

BLAS, D. **Aspects of Infrared Modifications of Gravity**. Tese (Doutorado) — UNIVERSITAT DE BARCELONA, Barcelona - Espanha, 2008.

BONIFACIO, J.; FERREIRA, P. G.; HINTERBICHLER, K. Transverse diffeomorphism and weyl invariant massive spin 2: Linear theory. **Physical Review D**, v. 91, n. 125008, 2015.

BOULWARE, D. G.; DESER, S. Inconsistency of finite range gravitation. **Physics Letters B**, v. 40, n. 2, p. 227–229, 1972.

BUCHBINDER, I. et al. Equations of motion for massive spin 2 field coupled to gravity. **Nuclear Physics B**, v. 584, n. 1-2, p. 615–640, 2000.

BUCHBINDER, I.; GITMAN, D.; PERSHIN, V. Causality of massive spin 2 field in external gravity. **Physics Letters B**, v. 492, n. 1-2, p. 161–170, 2000.

BUCHBINDER, I. L.; KRYKHTIN, V. A.; PERSHIN, V. D. On consistent equations for massive spin-2 field coupled to gravity in string theory. **Physics Letters B**, v. 466, n. 2-4, p. 216–226, 1999.

CASINI, H.; MONTEMAYOR, R.; URRUTIA, L. F. Duality for symmetric second rank tensors. 1. the massive case. **Physical Review D**, v. 66, n. 085018, 2002.

CREMINELLI, P. et al. Ghosts in massive gravity. **Journal of High Energy Physics**, v. 0509, n. 003, 2005.

DALMAZI, D. Nonuniqueness of the fierz-pauli mass term for a nonsymmetic tensor. **Physical Review D**, v. 86, n. 125036, 2012.

DALMAZI, D. Massive spin-2 particle from a rank-2 tensor. **Physical Review D**, v. 87, n. 125027, 2013.

DALMAZI, D. A note on the nonuniqueness of the massive fierz-pauli theory and spectator fields. **Physical Review D**, v. 88, n. 045003, 2013.

DALMAZI, D.; FORTES, H. G. M. **Physical Review D**, v. 95, n. 065028, 2017.

DALMAZI, D.; SANTOS, A. L. R. dos; MENDONÇA, E. L. Massive "spin-2" theories in arbitrary $d \geq 3$ dimensions. **Annals of Physics**, v. 354, p. 385–393, 2015.

DAM, H. van; VELTMAN, M. J. G. Massive and massless yang-mills and gravitational fields. **Nuclear Physics B**, v. 22, p. 397–411, 1970.

DEFFAYET, C. et al. Nonperturbative continuity in graviton mass versus perturbative discontinuity. **Physical Review D**, v. 65, n. 044026, 2002.

DESER, S.; HENNEAUX, M. A note on spin two fields in curved backgrounds. **Classical and Quantum Gravity**, v. 24, p. 1683–1686, 2007.

DESER, S.; WALDRON, A. Gauge invariances and phases of massive higher spins in (anti-)de sitter space. **Physical Review Letters**, v. 87, n. 031601, 2001.

DESER, S.; WALDRON, A. Null propagation of partially massless higher spins in (a)ds and cosmological constant speculations. **Physics Letters B**, v. 513, n. 1-2, p. 137–141, 2001.

DESER, S.; WALDRON, A. Partial masslessness of higher spins in (a)ds. **Nuclear Physics B**, v. 607, n. 3, p. 577–604, 2001.

FIERZ, M.; PAULI, W. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field. **Proceedings of the Royal Society of London**, A173, n. 953, p. 211–232, 1939.

FUKUMA, M. et al. Massive higher spin fields in curved spacetime and necessity of non-minimal couplings. **Progress of Theoretical and Experimental Physics**, v. 2016, n. 7, 2016.

GAITAN, R. **Sobre el problema del acoplamiento de campos de espines altos en dimension 2+1**. Tese (Doutorado) — Facultad de Ciencias, Universidad Central de Venezuela, Caracas - Venezuela, 2007.

GARCIA-SAENZ, S.; ROSEN, R. A. A non-linear extension of the spin-2 partially massless symmetry. **Journal of High Energy Physics**, v. 1505, n. 042, 2015.

HASSAN, S.; ROSEN, R. A. Bimetric gravity from ghost-free massive gravity. **Journal of High Energy Physics**, n. 126, 2012.

HIGUCHI, A. Forbidden mass range for spin-2 field theory in de sitter space-time. **Nuclear Physics B**, v. 282, p. 397–436, 1987.

HINTERBICHLER, K. Theoretical aspects of massive gravity. **Reviews of Modern Physics**, v. 84, p. 671–710, 2012.

KOENIGSTEIN, A.; GIACOSA, F.; RISCHKE, D. H. Classical and quantum theory of the massive spin-two field. **Annals of Physics**, v. 368, p. 16–55, 2016.

MORAND, K.; SOLODUKHIN, S. N. Dual massive gravity. **Physics Letters B**, v. 715, n. 1-3, p. 260–266, 2012.

NIEUWENHUIZEN, P. van. On ghost-free tensor lagrangians and linearized gravitation. **Nuclear Physics B**, v. 60, p. 478–492, 1973.

PERLMUTTER, S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high redshift supernovae. **The Astronomical Journal**, v. 517, n. 2, p. 565–586, 1999.

RHAM, C. de. Massive gravity. **Living Reviews in Relativity**, v. 17, n. 7, 2014.

RHAM, C. de et al. Graviton mass bounds. **Reviews of Modern Physics**, v. 89, n. 3, p. 025004, 2017.

RHAM, C. de; GABADADZE, G. Generalization of the fierz-pauli action. **Physical Review D**, v. 82, n. 044020, 2010.

RHAM, C. de; GABADADZE, G.; TOLLEY, A. Ghost free massive gravity in the stückelberg language. **Physics Letters B**, v. 711, n. 2, p. 190–195, 2012.

RHAM, C. de; GABADADZE, G.; TOLLEY, A. J. Resummation of massive gravity. **Physical Review Letters**, v. 106, n. 231101, 2011.

RHAM, C. de et al. Evidence for and obstructions to nonlinear partially massless gravity. **Physical Review D**, v. 88, n. 024003, 2013.

RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. **The Astronomical Journal**, v. 116, n. 3, p. 1009–1038, 1998.

VAINSHTEIN, A. I. To the problem of nonvanishing gravitation mass. **Physics Letters B**, v. 39, p. 393–394, 1972.

ZAKHAROV, V. I. Linearized gravitation theory and the graviton mass. **Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters**, v. 12, n. 9, p. 312, 1970.

APÊNDICE A – NOTAÇÃO E IDENTIDADES UTILIZADAS $D = 4$

- Métrica de Minkowski:

$$\eta_{\mu\nu} = (-,+,+,+) \tag{1}$$

- Partes simétrica e antissimétrica de um vetor:

$$B_{(\mu\nu)} = \frac{B_{\mu\nu} + B_{\nu\mu}}{2} \tag{2}$$

$$B_{[\mu\nu]} = \frac{B_{\mu\nu} - B_{\nu\mu}}{2} \tag{3}$$

- Comutação das derivadas covariantes:

$$\begin{aligned} [\nabla_\alpha, \nabla_\beta]\, B^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n} &= R^{\mu_1}{}_{\lambda\alpha\beta}\, B^{\lambda\mu_2 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n} + \ldots + R^{\mu_m}{}_{\lambda\alpha\beta}\, B^{\mu_1 \ldots \mu_{m-1}\lambda}{}_{\nu_1 \ldots \nu_n} + \\ &+ R_{\nu_1}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\, B^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\lambda\nu_2 \ldots \nu_n} + \ldots + R_{\nu_n}{}^{\lambda}{}_{\alpha\beta}\, B^{\mu_1 \ldots \mu_m}{}_{\nu_1 \ldots \nu_{n-1}\lambda} \end{aligned} \tag{4}$$

- Identidade cíclica:

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} + R_{\mu\alpha\beta\nu} + R_{\mu\beta\nu\alpha} = 0 \tag{5}$$

- Identidade de Bianchi:

$$\nabla_\nu R_{\alpha\sigma\rho\beta} + \nabla_\beta R_{\alpha\sigma\nu\rho} + \nabla_\rho R_{\alpha\sigma\beta\nu} = 0 \tag{6}$$

Aplicando $g^{\alpha\beta}$ na identidade acima, obtemos

$$\begin{aligned} -\nabla_\nu R_{\sigma\rho} + \nabla^\alpha R_{\alpha\sigma\nu\rho} + \nabla_\rho R_{\sigma\nu} = 0 \\ \nabla^\alpha R_{\alpha\sigma\nu\rho} = \nabla_\nu R_{\sigma\rho} - \nabla_\rho R_{\sigma\nu} \end{aligned} \tag{7}$$

E agora $g^{\sigma\rho}$:

$$-\nabla_\nu R + \nabla^\alpha R_{\alpha\nu} + \nabla^\sigma R_{\sigma\nu} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla^\alpha R_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R \tag{9}$$

- Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \tag{10}$$

- Espaços de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = \frac{R}{4} g_{\mu\nu} \tag{11}$$

Vejamos a seguir as implicâncias de se considerar espaços do tipo Einstein. Substituindo (11) em (9), temos

$$\frac{1}{4}\nabla^{\alpha}(g_{\alpha\nu}R) = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R \tag{12}$$

$$\tfrac{1}{4}\nabla_{\nu}R = \frac{1}{2}\nabla_{\nu}R \tag{13}$$

$$\nabla_{\nu}R = 0 \tag{14}$$

Uma vez que $\nabla_{\nu}R = 0$, temos que $\nabla_{\nu}R = \partial_{\nu}R = 0$. Logo, R é constante.

Consequentemente,

$$\nabla^{\alpha}R_{\mu\nu} = 0\ . \tag{15}$$

Finalmente, substituíndo (15) em (7), chegamos a

$$\nabla^{\alpha}R_{\alpha\sigma\nu\rho} = 0\ . \tag{16}$$

- Espaços maximamente simétricos:

$$R_{\alpha\beta\rho\sigma} = \frac{R}{12}(g_{\alpha\rho}g_{\beta\sigma} - g_{\alpha\sigma}g_{\beta\rho}) \tag{17}$$