CONEM
CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
NATAL - RIO GRANDE DO NORTE - BRASIL

ABCM

XII CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA
DE 29/07 A 02/08 DE 2024, NATAL-RN, BRASIL

CONEM2024-1629
ANÁLISE DO AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH APLICADO AO MODELO DE UMA VIGA COM PZT ACOPLADO

Lorena Lopes Dias, lorena.dias@unesp.br[1]
Douglas D. Bueno, douglas.bueno@unesp.br[1]
Pedro Christian Ayala Castillo, pedro.ayala@unifesspa.edu.br[2]
Camila G. Gonsalez-Bueno, camila.gg.bueno@unesp.br[1]

[1]Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Avenida Brasil, 56, Ilha Solteira, SP, 15.385-000, Brasil
[2]Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará (UNIFESSPA), Folha 31, Quadra 07, Lote Especial, Nova Marabá, Marabá, PA, 68507-590, Brasil

Resumo: *A caracterização das fontes de dissipação de energia em estruturas de engenharia, também conhecidas como amortecimento, tem constituído um tópico de investigação e debate ao longo de diversos anos. Embora seja crucial para descrever o comportamento de sistemas mecânicos, a compreensão e especificação desse fenômeno permanece desafiadora, em especial para estruturas mais complexas. Em tais situações, o amortecimento é regularmente introduzido diretamente na equação de movimento dinâmico, como é o caso do amortecimento de Rayleigh. Este é determinado por meio de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez do sistema dinâmico em estudo. Embora seja amplamente empregado devido à sua relativa simplicidade e conveniente processamento matemático, este modelo de amortecimento apresenta um desafio na sua aplicação, vinculado à necessidade de uma escolha cuidadosa dos seus coeficientes. A determinação destes é essencial para reproduzir de maneira satisfatória o amortecimento real da estrutura; no entanto, esse processo torna-se mais complexo para estruturas com múltiplos graus de liberdade. Neste contexto, o presente trabalho realiza a análise das curvas de impedância eletromecânica obtidas da modelagem de uma viga de Euler-Bernoulli com um transdutor piezoelétrico acoplado. Para tanto, é necessário primeiramente definir o amortecimento desse sistema, o qual foi representado pelo modelo de amortecimento de Rayleigh. Logo, uma vez que a técnica de impedância eletromecânica é comumente empregada em frequências elevadas, apresenta-se, adicionalmente, a complicação associada a esse fator ao lidar com este amortecimento. Portanto, a complexidade inerente a uma estrutura com múltiplos graus de liberdade, aliada à aplicação da técnica de impedância eletromecânica em altas frequências, torna a obtenção dos coeficientes adequados uma tarefa complexa e de difícil execução. Em vista disso, o presente artigo adotou uma abordagem simples e eficaz para essa determinação, fundamentada na comparação entre as curvas de impedância eletromecânica teóricas e experimentais. Adicionalmente, uma análise foi conduzida sobre os efeitos individuais dos coeficientes nas referidas curvas, assim como as implicações decorrentes da utilização de valores constantes para estes fatores em amplas faixas de frequência. Mediante essas análises, foi possível constatar que um dos coeficientes exerce uma influência mais significativa nas curvas teóricas de impedância eletromecânica, além de contribuir para a formação de conhecimento e maior entendimento acerca do amortecimento de Rayleigh.*

Palavras-chave: *amortecimento, coeficientes, modelo, impedância eletromecânica.*

1. INTRODUÇÃO

O amortecimento é o fenômeno responsável pela dissipação de energia mecânica em sistemas de engenharia. Este desempenha um papel crucial na atenuação das vibrações e no controle da resposta dinâmica das estruturas (Liu and Gorman, 1995). Apesar de sua vital importância para a descrição do comportamento dos sistemas mecânicos, a compreensão e caracterização dessa propriedade ainda é de difícil execução. Por não se basear em um simples fenômeno físico, a precisa determinação do amortecimento torna-se um processo particularmente difícil, em especial para estruturas mais complexas (Salehi and Sideris, 2020). Em tais situações, o amortecimento é regularmente introduzido diretamente na equação de movimento, sendo, de maneira geral, representado por três diferentes modelos: amortecimento de Coulomb, amortecimento viscoso (ou proporcional) e amortecimento histerético (ou estrutural), dos quais os dois últimos são os mais comumente utilizados (Rahul *et al.*, 2021). Entretanto, estudos indicam que estruturas reais de múltiplos graus de

liberdade apresentam um amortecimento dependente da frequência (Ewins, 2000). Por isso, o amortecimento viscoso, que considera a força de amortecimento proporcional à velocidade e é dependente da frequência, mostra-se adequado para a modelagem de sistemas mecânicos.

Em particular, o amortecimento de Rayleigh é um modelo de amortecimento viscoso amplamente utilizado para descrever a dissipação de energia nas estruturas (Han *et al.*, 2021). Este é determinado por meio de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez do sistema dinâmico em estudo. É frequentemente adotado por sua conveniência matemática, destacando-se, entre suas vantagens, o fato de não provocar alterações nas formas modais e o desacoplamento das equações de movimento, simplificando, com isso, a resolução do problema proposto (Liu and Gorman, 1995; Salehi and Sideris, 2020). Entretanto, em estruturas mais complexas ou em amplas faixas de frequências, este amortecimento pode não coincidir com os resultados reais. Foi inicialmente proposto por Rayleigh (1877) e posteriormente generalizado por Caughey (1960). Desde então, seu uso se disseminou de forma abrangente em diversas áreas da engenharia, abarcando domínios como o estudo sísmico em edifícios (Erduran, 2012; Cruz and Miranda, 2017), análises do solo (Park and Hashash, 2004; Ju and Ni, 2007), propagações de ondas (Gresil and Giurgiutiu, 2015; Tian *et al.*, 2017) e aplicações na técnica de impedância eletromecânica (Gresil *et al.*, 2012; Sepehry *et al.*, 2010; Lu *et al.*, 2022).

Embora seja um modelo relativamente simples, o amortecimento de Rayleigh apresenta um desafio na sua aplicação, vinculado à necessidade de uma escolha cuidadosa dos seus coeficientes. Estes são responsáveis por multiplicarem as matrizes de massa e rigidez do sistema, resultando na matriz de amortecimento que será integrada à equação de movimento. Portanto, a determinação desses coeficientes é essencial para reproduzir de maneira satisfatória o amortecimento real da estrutura, possibilitando uma previsão mais precisa e confiável das respostas e projetos dos sistemas de engenharia. Nesse contexto, a análise modal é uma estratégia frequentemente adotada para determinar esses parâmetros. Para esse fim, os pesquisadores comumente se baseiam na comparação entre a resposta obtida ao empregar o amortecimento modal e aquela derivada da formulação de Rayleigh (Spears and Jensen, 2012; Pan *et al.*, 2014; Wang *et al.*, 2017). Contudo, esse processo torna-se altamente complexo para estruturas com múltiplos graus de liberdade. Diante desse desafio, a busca por métodos alternativos torna-se crucial. Dessa forma, a determinação dos coeficientes de amortecimento de Rayleigh a partir de dados experimentais emerge como uma solução viável e comumente utilizada, oferecendo uma alternativa eficaz à análise modal. Essa prática é usualmente utilizada em conjunto com simulações numéricas, sendo que a abordagem experimental encarrega-se da determinação dos coeficientes de amortecimento, os quais são então incorporados às simulações ou modelagens numéricas. A adoção dessa abordagem conjunta evita a necessidade de inúmeros testes experimentais e fornece valores mais precisos para as modelagens teóricas (Sanliturk and Koruk, 2013). Ju and Ni (2007) investigam a aplicação de um método de mínimos quadrados para estimar os parâmetros de amortecimento de Rayleigh na análise de elementos finitos da propagação de ondas em solos. Para tal, os autores inicialmente obtêm o coeficiente de absorção do solo por meio de medidas experimentais. Gresil and Giurgiutiu (2015) estimam as constantes de proporcionalidade mediante a calibração com os dados experimentais. Posteriormente, esses coeficientes são aplicados na modelagem numérica a fim de simular a propagação de ondas guiadas em compósitos de fibra de carbono. Tian *et al.* (2017) propõem um modelo simples e eficaz para a atenuação de ondas de tensão em concreto, baseado no princípio de amortecimento de Rayleigh. Os parâmetros do modelo são obtidos a partir de dados experimentais, o que permite prever o coeficiente de atenuação em diferentes frequências. Iglesias and López (2020) definem os parâmetros de amortecimento de Rayleigh a partir de um amplo conjunto de ensaios estruturais realizados em um painel de plástico reforçado com fibra de carbono. O objetivo é aplicar os parâmetros estimados em simulações numéricas para aumentar a confiabilidade das mesmas.

O conceito de amortecimento de Rayleigh foi desenvolvido como parte de um estudo sobre a teoria das vibrações mecânicas, em que frequências superiores a 1 kHz já são consideradas elevadas (Carneiro Jr *et al.*, 2021). No entanto, em diferentes domínios da engenharia, como no caso da técnica de Impedância Eletromecânica (EMI, do inglês *Electromechanical Impedance*), os sistemas são analisados em frequências muito superiores. Geralmente, recomenda-se um limite mínimo de 5 kHz, mas tais avaliações podem atingir valores de 1000 kHz ou mais (Giurgiutiu, 2007; Gresil *et al.*, 2012). Esta técnica tem sido amplamente aplicada na área de Monitoramento da Integridade Estrutural (SHM, do inglês *Structural Health Monitoring*), emergindo como uma promissora ferramenta para a detecção de danos estruturais em tempo real. Seu conceito básico consiste em monitorar as variações na impedância eletromecânica provadas pela presença de danos, cuja sensibilidade de detecção eleva-se quando a técnica é investigada em frequências elevadas (Park *et al.*, 2000). Consequentemente, modelagens de impedância eletromecânica, nas quais o amortecimento é representado pelo modelo de Rayleigh, são conduzidas em altas frequências. Isso pode acarretar uma complicação adicional na estimativa desse amortecimento, visto que os modos de vibração tornam-se mais numerosos, complexos e localizados.

Neste contexto, o presente trabalho analisa as curvas de Impedância Eletromecânica obtidas a partir do modelo analítico proposto por Sepehry *et al.* (2010). Esta modelagem investiga uma viga de Euler-Bernoulli com um transdutor piezoelétrico acoplado. Para tanto, é necessário primeiramente definir o amortecimento desse sistema, o qual foi representado pelo modelo de amortecimento de Rayleigh. Entretanto, a literatura de referência não fornece informações sobre a origem ou o método utilizado para determinar suas constantes de proporcionalidade. Para suprir essa lacuna, este trabalho adotou uma abordagem simples e eficaz para a determinação desses coeficientes, fundamentada na comparação entre as curvas de impedância eletromecânica teóricas e experimentais. Adicionalmente, foi conduzida uma análise dos efeitos individuais dos coeficientes nas referidas curvas, assim como as implicações decorrentes da utilização de valores constantes para estes fatores em amplas faixas de frequência. Mediante essas análises, constatou-se que um dos coeficientes exerce uma influência mais significativa nas curvas teóricas de impedância eletromecânica. Além disso, a adoção de valores constantes para esses parâmetros em amplas faixas frequências é desaconselhável, pois pode conduzir a resultados imprecisos.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Esta seção abrange a descrição dos métodos e procedimentos empregados neste trabalho. Inicialmente, é apresentada uma breve explicação sobre a Impedância Eletromecânica na Subseção 2.1. A seguir, a abordagem numérica utilizada para o cálculo da EMI teórica é discutida na Subseção 2.2, seguida pela descrição da abordagem experimental empregada na Subseção 2.3. Por fim, a seleção dos dados numérico-experimentais é apresentada na Subseção 2.4.

2.1 Impedância Eletromecânica

A técnica de impedância eletromecânica consiste na utilização de um ou mais transdutores piezoelétricos (PZT, do inglês *Leads Zirconate Titanate*) como sensor(es) e atuador(es). Esses dispositivos são responsáveis por realizar o acoplamento entre a impedância mecânica da estrutura e a impedância elétrica do PZT, a partir do qual monitora-se a estrutura.

A admitância eletromecânica $Y_{em}(\omega)$, apresentada na Eq. (1), foi introduzida por Liang *et al.* (1993), cujo inverso corresponde à impedância eletromecânica $Z_{em}(\omega)$. Esta equação ilustra como a impedância mecânica da estrutura, $Z(\omega)$, e a impedância mecânica do transdutor piezoelétrico, $Z_p(\omega)$, se relacionam entre si para definir a impedância eletromecânica de um sistema de 1 grau de liberdade.

$$Y_{em}(\omega) = \frac{1}{Z_{em}(\omega)} = j\omega \frac{b_p L_p}{h_p} \left[\bar{\varepsilon}_{33}^{T} - \frac{Z(\omega)}{Z_p(\omega) + Z(\omega)} d_{31}^2 \bar{Y}_{11}^{E} \right] \tag{1}$$

em que L_p, b_p e h_p são o comprimento, largura e espessura do PZT, respectivamente. $\bar{\varepsilon}_{33}^{T}$ é a constante dielétrica complexa do PZT na direção 3-3 (z) sob uma tensão mecânica constante, d_{31} é a constante piezoelétrica, $\bar{Y}_{11}^{E}$ é o módulo de elasticidade complexo do PZT na direção 1-1 (x) sob um campo elétrico constante, ω é a frequência angular e $j = \sqrt{-1}$ é o número imaginário puro.

2.2 Abordagem Numérica

O modelo analítico desenvolvido por Sepehry *et al.* (2010) é empregado para computar a impedância eletromecânica de uma viga com PZT acoplado, conforme ilustrado na Fig. 1.

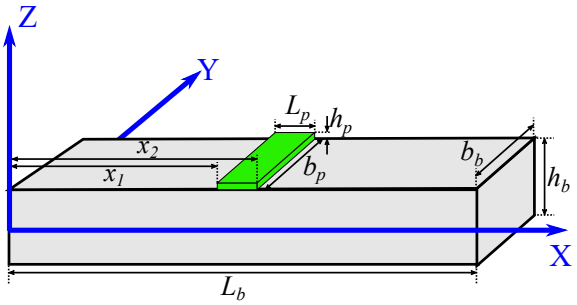


Figura 1: **Esquema de uma viga livre-livre com um PZT acoplado.**

Inicialmente, os autores determinam as energias cinética e de deformação de cada componente do sistema mecânico (viga e PZT) de forma isolada e, posteriormente, em conjunto. Em seguida, a Equação de Lagrange é aplicada para o caso sem forças externas, resultando na dinâmica do sistema dada por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{N}E_3 \tag{2}$$

em que $\mathbf{M}$ é a matriz de massa total obtida pela soma das matrizes da viga e do PZT, e similarmente, $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez total; $\mathbf{q}(t)$ representa o vetor de deslocamento modal, $\mathbf{N}$ é o vetor de momento criado pelo PZT e E_3 corresponde ao campo elétrico.

Os autores consideram as matrizes de massa e rigidez da viga e do PZT expressas em termos das funções de formas modais $\psi_i(x)$, em que i é o i-ésimo modo. As matrizes de massa $\mathbf{M}_b$ e de rigidez $\mathbf{K}_b$ da viga, e do transdutor piezoelétrico, $\mathbf{M}_p$ e $\mathbf{K}_p$, são tais que cada elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna é dado por

$$\begin{aligned} m_b^{(i,j)} &= \int_0^{L_b} \bar{\rho}_b A_b \psi_i(x)\psi_j(x)dx & m_p^{(i,j)} &= \int_{x_1}^{x_2} \rho_p A_p \psi_i(x)\psi_j(x)dx \\ k_b^{(i,j)} &= \int_0^{L_b} \bar{E}_b I_b \psi_i''(x)\psi_j''(x)dx & k_p^{(i,j)} &= \int_{x_1}^{x_2} I_1 \psi_i''(x)\psi_j''(x)dx \end{aligned} \tag{3}$$

nas quais o subscrito b denota a viga (do inglês *beam*); e p se refere ao PZT, posicionado entre as coordenadas x_1 e x_2, tal que $(x_2 - x_1) = L_p$ (ver Fig. 1). $\bar{\rho}_b$ e ρ_p são, respectivamente, as densidades da viga e do PZT. A_b e A_p são as respectivas áreas da seções transversais. $\bar{E}_b$ é o módulo de Young da viga e I_b é o seu momento de inércia de área. I_1 é a constante definida por: $I_1 = cb_b \frac{z}{3}\Big|_{h_b/2}^{h_b/2+h_p}$, tal que c é o inverso da compliância mecânica para um campo elétrico nulo S_{11}^E; e L_b, b_b e h_b são, respectivamente, o comprimento, a largura e a espessura da viga. O sobrescrito $(\,)''$ indica a segunda derivada, em relação a x, enquanto o subscrito $\bar{(\,)}$ expressa a dependência da temperatura. O vetor momento $\mathbf{N}$ é tal que seu i-ésimo elemento é dado por $N_p^{(i)} = -\int_{x_1}^{x_2} I_2 \psi_i''(x)dx$, sendo $I_2 = db_p z^2\Big|_{h_b/2}^{h_b/2+h_p}$ e $d = \frac{\bar{d}_{31}}{S_{11}^E}$.

A seguir, os autores reescrevem o vetor $\mathbf{q}(t)$ como uma multiplicação entre as coordenadas generalizadas do sistema $\mathbf{g}(t)$ e a matriz de autovetores do sistema para um campo elétrico nulo $\mathbf{\Phi}$, tal que $\mathbf{M}_{gg}\ddot{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{K}_{gg}\mathbf{g}(t) = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{N}E_3$, sendo $\mathbf{M}_{gg} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ e $\mathbf{K}_{gg} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi}$. A introdução da matriz de amortecimento estrutural $\mathbf{C}_{gg}$ ocorre por meio da aplicação do amortecimento proporcional de Rayleigh, dado por

$$\mathbf{C}_{gg} = \alpha\mathbf{M}_{gg} + \beta\mathbf{K}_{gg} \tag{4}$$

em que α e β são os coeficientes constantes arbitrários.

Segundo Sepehry *et al.* (2010), o campo elétrico E_3 é considerado uniforme sobre o PZT e pode ser expresso em termos da tensão elétrica V_3, tal que $E_3 = V_3/h_p$. Além disso, os autores consideram uma tensão harmônica $V_3 = V_0 e^{j\omega t}$ e $\mathbf{g}(t) = g_0 e^{j\omega t}$. Dessa forma, a impedância eletromecânica Z_{em} do sistema é dada por

$$Z_{em}(\omega) = \left\{ j\omega \left[-db_p \left(\frac{h_b}{2} \right) \Psi'(x)\Big|_{x_1}^{x_2} \mathbf{\Phi} \Big(-\omega^2 \mathbf{M}_{gg} + \mathbf{C}_{gg} j\omega + \mathbf{K}_{gg} \Big)^{-1} \mathbf{N}_g + \frac{e_p b_p L_p}{h_p} \right] \right\}^{-1} \tag{5}$$

em que $\mathbf{N}_g = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{N}/h_p$, $e_p = \bar{\epsilon}_{33}^T - \frac{\bar{d}_{31}^2}{S_{11}^E}$ e $\Psi(x) = [\psi_1(x) \;\; \psi_2(x) \;\; \ldots \;\; \psi_n(x)]$ é a matriz de forma modal, obtida para n modos.

2.2.1 Amortecimento de Rayleigh

O amortecimento de Rayleigh é determinado por meio de uma combinação linear da massa e da rigidez, conforme indicado na Eq. (4). Essa também pode ser expressa em termos da razão de amortecimento ξ, conforme apresentado na Eq. (6), a qual associa esse parâmetro a cada forma modal e frequência natural do sistema. Dados dois ou mais valores para as frequências naturais angulares ω_n e seus correspondentes ξ, os coeficientes α e β podem ser determinados. Isto permite obter uma curva de amortecimento que ajusta-se a razão ξ em diferentes pontos de frequência. Na Fig. 2, apresenta-se a variação da razão de amortecimento de Rayleigh em relação à frequência natural angular, destacando como os termos de massa e rigidez influenciam a razão de amortecimento global. Em frequências mais baixas, o componente vinculado à massa prevalece, seguindo uma tendência hiperbólica decrescente à medida que a frequência aumenta. Em contrapartida, em frequências mais elevadas, o termo associado à rigidez assume predominância, resultando em um aumento linear da taxa de amortecimento.

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{\omega_n} + \beta\omega_n \right) \tag{6}$$

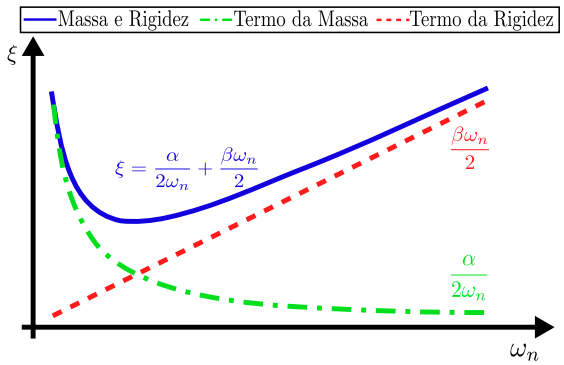


Figura 2: **Esquema da variação da razão de amortecimento de Rayleigh em função da frequência natural angular.**

Neste trabalho, empregou-se o comando *fminsearch* do *software* Matlab® para determinar os coeficientes α e β. Este comando utiliza o método numérico de Nelder-Mead para localizar o mínimo de uma função multivariável fun.

Esta foi definida como a diferença absoluta entre os valores máximos (ou seja, os picos mais elevados) das impedâncias eletromecânicas teóricas e experimentais, conforme apresentado na Eq. (7). Em outras palavras, o comando computacional recalculou repetidamente a impedância eletromecânica teórica até que a função fun atingisse seu valor mínimo.

$$fun = |max(Z_{exp}(\omega_i)) - max(Z_{teo}(\omega_i))|, \quad i = f_{min}, f_{min}+1, ..., f_{max} \tag{7}$$

em que $max(\ )$ denota o valor máximo, Z_{exp} e Z_{teo} representam, respectivamente, as impedâncias eletromecânicas experimentais e teóricas, e f_{min} e f_{max} correspondem às frequências mínima e máxima do intervalo de frequência analisado.

2.2.2 Funções de Forma Modais para Altas Frequências

As estruturas de engenharia, quando excitadas em suas frequências naturais, vibram ou se deformam em padrões específicos conhecidos como formas modais. Essas representam as diferentes maneiras pelas quais uma estrutura oscila. Sob condições de operações típicas, uma estrutura vibrará em uma combinação complexa de todos essas formas modais. Neste trabalho, utilizou-se a expressão exata da função de forma modal obtida por Gonçalves *et al.* (2018) para uma viga de Euler-Bernoulli na condição livre-livre. Essa expressão é apresentada na Eq. (8). Os números de ondas k_n associados às frequências naturais da viga são apresentados na Tab. 1.

$$\psi_n(x) = \left[\frac{-e^{(k_n(x-2L_b))} + [cos(k_nL_b) - sen(k_nL_b)]e^{(k_n(x-L_b))}}{1 - e^{(-2k_nL_b)} - 2sen(k_nL_b)e^{(-k_nL_b)}}\right] + \frac{1}{2}e^{(-k_nx)}(1+\eta_n) + cos(k_nx) - \eta_n sen(k_nx) \tag{8}$$

em que

$$\eta_n = \frac{1 + e^{(-2k_nL_b)} - 2e^{(-k_nL_b)}cos(k_nL_b)}{1 - e^{(-2k_nL_b)} - 2e^{(-k_nL_b)}sen(k_nL_b)} \tag{9}$$

Tabela 1: **Números de onda k_n.**

n	k_nL_b
1	4,73004
2	7,85320
3	10,9956
4	13,3518
5	16,4934
$n > 5$	$\frac{(2n+1)\pi}{2}$

A Eq. (8) é aplicável quando a teoria da viga de Euler-Bernoulli é válida, ou seja, quando o comprimento de uma onda de flexão é aproximadamente dez vezes maior que a espessura da viga. Consequentemente, esta expressão pode ser empregada inclusive am altas frequências, desde que respeite o limite de aplicação da teoria de viga.

Com base na expressão k_nL_b da Tab. 1 e no número de onda de flexão dado por $k = (\rho_b A_b / E_b I_b)^{1/4}\omega^{1/2}$, é possível determinar o número de modos necessários para analisar a viga em toda a extensão da faixa de frequência investigada. Neste estudo, foram utilizados 38 modos para as simulações numéricas, uma vez que a frequência máxima analisada é de 35 kHz, conforme será esclarecido na Seção 2.4.

2.3 Abordagem Experimental

O experimento consistiu na coleta de sinais de impedância eletromecânica de uma viga de liga de alumínio 6063-T5 contendo um transdutor piezoelétrico PSI-5H4E da Piezo Systems® fixado em sua superfície. Uma ilustração esquemática da configuração experimental empregada é apresentada na Fig. 3. Utilizou-se uma placa de aquisição de dados da National Instruments®, modelo NI-USB 6211 (16 bits); um computador contendo o *software* analisador de impedância desenvolvido por Baptista and Filho (2009) em ambiente LabVIEW®; e uma *protoboard* contendo um resistor com resistência elétrica de 10 kΩ, o qual atua como um circuito auxiliar, cuja função é limitar a corrente elétrica no PZT, evitando, assim, potenciais danos a esse dispositivo. A placa de aquisição de dados (DAQ, do inglês *Data Acquisition*) é responsável por capturar o sinal de resposta e, simultaneamente, transmitir o sinal de excitação para o PZT. O sinal de excitação, por sua vez, é gerado pelo analisador de impedância, o qual também calcula a EMI com base no sinal de resposta capturado pelo DAQ.

A viga foi posicionada sobre uma camada de espuma para simular uma condição de contorno livre-livre. As medições foram realizadas à temperatura ambiente de 24°C. Para excitar a estrutura, foi aplicada uma varredura senoidal em frequência do tipo *chirp* com amplitude de ±1 V na faixa de frequência de 1 Hz a 100 kHz, com passo de 1 Hz. Empregou-se uma taxa de amostragem de 250 kS/s. Trinta sinais foram coletados para a condição sem dano. As propriedades geométricas e materiais do transdutor piezoelétrico e da viga são apresentadas, respectivamente, nas Tabs. 2 e 3.

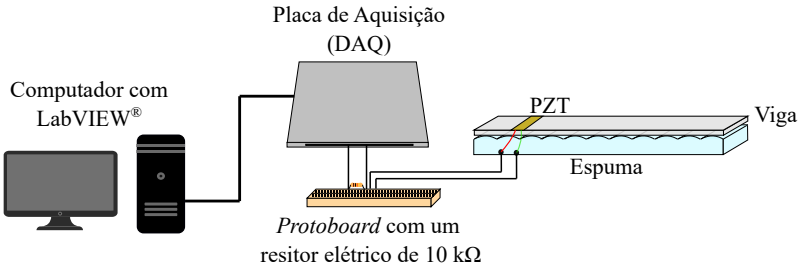


Figura 3: **Configuração experimental empregada para a aquisição dos sinais de EMI.**

Tabela 2: **Propriedades geométricas e materiais do transdutor piezoelétrico PSI-5H4E a 24°C.**

Propriedade	Símbolo	Valor
Comprimento	L_p	13 mm
Largura	b_p	12 mm
Espessura	h_p	0,2667 mm
Compliância	S_{11}^E	1,6129×10^{-11} Pa^{-1}
Densidade	ρ_p	7800 kg/m^3
Constante piezoelétrica	d_{31}	-327,18×10^{-12} m/V
Constante dielétrica	ε_{33}^T	3,2478×10^{-8} F/m
Distância da primeira extremidade do PZT à origem	x_1	81 mm
Distância da segunda extremidade do PZT à origem	x_2	$x_1 + L_p$ = 94 mm

Tabela 3: **Propriedades geométricas e materiais da viga de liga de alumínio 6063-T5 a 24°C.**

Propriedade	Símbolo	Valor
Comprimento	L_b	498 mm
Largura	b_b	12 mm
Espessura	h_b	3 mm
Módulo de Young	E_b	69 GPa
Densidade	ρ_b	2680 kg/m^3

2.4 Seleção dos Dados Numérico-Experimentais

Com o intuito de identificar a região de maior concordância entre os dois conjuntos de sinais, os dados numérico-experimentais foram analisados em três distintas faixas de frequência. Essas são apresentadas na Tab. 4, as quais são delimitadas pelas frequências mínimas, f_{min}, e máximas, f_{max}, de cada intervalo. Os coeficientes α e β foram recalculados para cada uma das três faixas de frequência, resultando em uma curva de EMI com coeficientes variáveis. Adicionalmente, investigou-se os efeitos decorrentes da utilização de valores constantes para esses parâmetros ao longo de toda a faixa de frequência investigada (5 kHz a 35 kHz). As curvas de EMI geradas por meio dessas duas abordagens foram objeto de comparação.

Tabela 4: **Diferentes faixas de frequência investigadas.**

N° da Faixa	f_{min} [kHz]	f_{max} [kHz]
1	5	15
2	15	25
3	25	35

Após definir a faixa de frequência mais adequada e seus respectivos α e β, estes foram multiplicados por 4 diferentes valores: 0,01, 0,1, 10 e 100, com o intuito de avaliar seus efeitos individuais nas curvas de impedância eletromecânica. A seleção desses multiplicadores baseou-se na premissa de que induziriam uma significativa variação nos valores dos coeficientes, ao mesmo tempo em que preveniriam potenciais erros computacionais decorrentes da multiplicação por valores excessivamente baixos.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Com o objetivo de investigar as implicações decorrentes da utilização de valores constantes para os coeficientes α e β em amplas faixas de frequência, assim como delinear a região de maior concordância entre os resultados teóricos e experimentais, realizou-se a comparação entre curvas de EMI obtidas ao variar os parâmetros de amortecimento para as 3 distintas faixas de frequências investigadas e ao mantê-los constantes. Esses coeficientes foram determinados mediante a

aplicação da Eq. (7). Os valores obtidos para cada faixa de frequência especificada na Tab. 4 encontram-se registrados na Tab. 5. Por outro lado, ao adotar coeficientes constantes ao longo de toda a faixa de frequência (5 kHz a 35 kHz), tem-se que α e β correspondem, respectivamente, a 0,0012 e $1{,}9145\times10^{-7}$.

Tabela 5: **Valores de α e β correspondentes a cada intervalo de frequência listado na Tab. 4.**

N° da Faixa	α	β
1	0,0012	$1{,}9145\times10^{-7}$
2	0,0011	$3{,}4152\times10^{-8}$
3	0,0011	$2{,}8067\times10^{-8}$

Na Fig. 4, apresenta-se a parte real dos sinais de EMI, tanto experimentais quanto numéricos. Estes últimos foram obtidos por meio de duas metodologias distintas quanto aos coeficientes de amortecimento: ajustando-os conforme os dados da Tab. 5 e mantendo-os constantes. Todos os resultados numéricos foram adquiridos por meio do algoritmo implementado no *software* Python®.

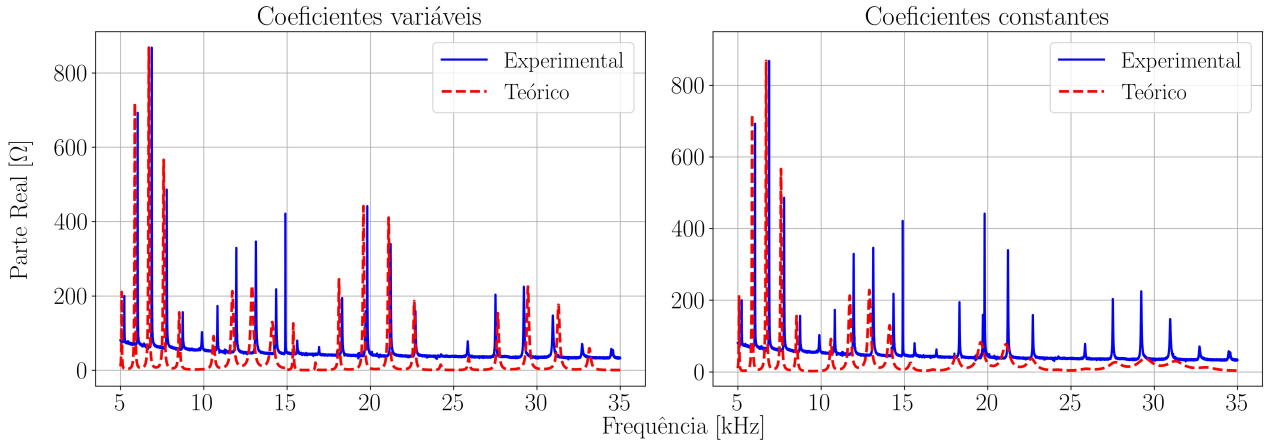


Figura 4: **Comparação entre a parte real da impedância eletromecânica experimental e teórica, considerando coeficientes de amortecimento variáveis e constantes.**

De maneira geral, as frequências de pico nos sinais de impedância eletromecânica são influenciadas pelas propriedades físico-mecânicas da estrutura, ao invés das propriedades elétricas do PZT. Adicionalmente, nessas regiões, a influência do amortecimento é dominante, afetando fortemente as amplitudes dos picos. Em particular, na abordagem teórica, a parte real da EMI é majoritariamente definida pelo amortecimento, conforme pode ser observado na Eq. (5). Logo, quaisquer alterações nessa propriedade acarretam em variações nos picos dos sinais de impedância eletromecânica. Essa constatação pode ser verificada ao analisar as curvas apresentadas na Fig. 4, em que se observa uma melhor concordância entre as amplitudes dos picos das curvas teóricas e experimentais quando os coeficientes variam de acordo com a Tab. 5. A partir da frequência de 15 kHz, as duas curvas teóricas divergem significativamente. Na situação de coeficientes constantes, o sistema transita para um estado de sobreamortecimento, resultando em picos de baixas amplitudes ou até mesmo ausentes. Apenas a região correspondente à faixa de frequência 1 exibe resultados satisfatórios com os dados experimentais. Tal fato se deve à localização do pico mais proeminente dentro dessa faixa, o que impacta diretamente na determinação dos parâmetros derivados pela Eq. (7). Essa afirmação torna-se evidente quando se comparam os parâmetros obtidos na condição constante com aqueles listados na Tab. 5 para a faixa n° 1, revelando a equivalência entre ambos. Portanto, em faixas de frequência extensas, recomenda-se a variação dos coeficientes α e β para se obter uma representação mais precisa do comportamento real do sistema em análise.

Na Fig. 4, nota-se que as curvas experimentais apresentam uma variação de amplitude que as afasta do eixo vertical zero e, consequentemente, da curva teórica. Diversos fatores podem ser responsáveis por tais divergências, como a calibração do sistema de medição, a inadequação dos parâmetros adotados no sistema teórico, condições de contorno do experimento não ideais, variáveis não contempladas na análise teórica, como as impedâncias de entrada dos cabos condutores e do DAQ, ou a influência do circuito elétrico auxiliar no sinal medido, entre diversos outros fatores. A investigação acurada das origens dessa discrepância é crucial para aprimorar a precisão e confiabilidade do modelo teórico.

Mediante investigações mais detalhadas, constatou-se que a faixa de frequência entre 15 kHz e 30 kHz apresenta a maior concordância entre os resultados numérico-experimentais, sendo, portanto, a mais apropriada para a aplicação da abordagem proposta por Sepehry *et al.* (2010) no contexto do sistema em análise. Em vista disso, procedeu-se com o recálculo dos parâmetros α e β, a fim de melhor adequá-los a esse intervalo, cujos valores correspondem, respectivamente, a 0,0011 e $3{,}5315\times10^{-8}$. A seguir, determinou-se as curvas teóricas de EMI ao multiplicar os coeficientes individualmente por 0,01, 0,1, 10 e 100. Em outras palavras, um dos coeficientes permaneceu constante, enquanto o outro variava em

relação ao seu valor original (*baseline*). Os resultados obtidos estão expostos na Fig. 5, enquanto que os diferentes valores de α e β empregados estão presentes na Tab. 6.

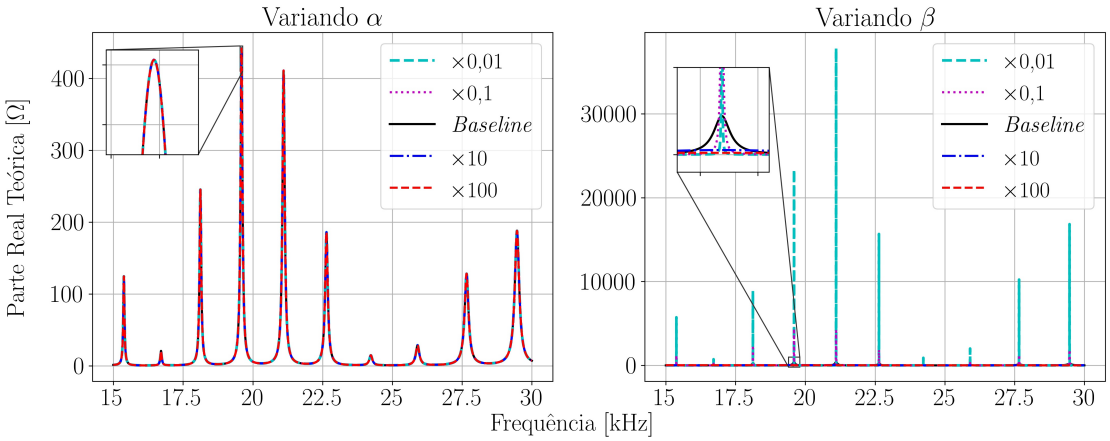


Figura 5: **Parte real da impedância eletromecânica teórica calculada mediante a variação individual dos coeficientes α e β.**

Tabela 6: **Valores de α e β utilizados para o cálculo das curvas de impedância eletromecânica exibidas na Fig. 5.**

Multiplicador	α	β
0,01	$1{,}1\times10^{-5}$	$3{,}5315\times10^{-10}$
0,1	$1{,}1\times10^{-4}$	$3{,}5315\times10^{-9}$
1 (*Baseline*)	0,0011	$3{,}5315\times10^{-8}$
10	0,011	$3{,}5315\times10^{-7}$
100	0,11	$3{,}5315\times10^{-6}$

As alterações nas curvas de impedância eletromecânica decorrentes da variação do coeficiente β são consideravelmente mais significativas do que aquelas obtidas pela modificação de α. Essa discrepância se deve ao fato de que, na formulação do amortecimento de Rayleigh, o efeito do amortecimento proporcional à rigidez (β) exerce um papel dominante em frequências mais elevadas, enquanto o oposto ocorre para o amortecimento proporcional à massa (α), conforme ilustrado na Fig. 2. No geral, ao diminuir o parâmetro β, observa-se um incremento na amplitude dos picos, ao passo que um aumento do mesmo resulta na diminuição de suas amplitudes, podendo até mesmo culminar em um estado de sobreamortecimento. Por outro lado, as curvas permaneceram inalteradas ao se modificar o coeficiente α. Análises mais abrangentes indicaram a necessidade de multiplicadores superiores a 1000 para que tais alterações se tornassem perceptíveis. Portanto, para a faixa de frequência analisada, os efeitos de α são insignificantes, sendo o amortecimento modelado pelo coeficiente proporcional à rigidez. Com isso, conclui-se que o parâmetro β exerce uma influência mais significativa nas curvas de impedância eletromecânica, uma vez que essa técnica geralmente opera em frequências bastante elevadas. Os resultados desta investigação coincidem com os de Gresil *et al.* (2012).

4. CONCLUSÕES

Este artigo visou implementar e investigar o modelo analítico proposto por Sepehry *et al.* (2010), com foco na análise do amortecimento de Rayleigh presente em sua formulação. A pesquisa visa contribuir para a formação de conhecimento e maior entendimento acerca deste modelo de amortecimento. A abordagem foi avaliada em uma viga de alumínio com um transdutor piezoelétrico acoplado, considerando a condição sem dano.

Os coeficientes de amortecimento de Rayleigh foram determinados mediante a comparação entre as curvas de impedância eletromecânica experimentais e teóricas, sendo as últimas recalculadas iterativamente para atingir o melhor ajuste com os dados experimentais. A análise das curvas numéricas, considerando coeficientes de amortecimento variáveis e constantes, revelou que os primeiros são mais adequados para serem aplicados em amplas faixas de frequências. Tal abordagem viabiliza uma representação mais precisa do comportamento real da estrutura, prevenindo assim estados de subamortecimento ou sobreamortecimento. Adicionalmente, investigou-se a influência individual dos parâmetros de amortecimento ao multiplicá-los por quatro valores distintos. Observou-se que as alterações nas curvas de impedância eletromecânica provenientes da variação do coeficiente β são consideravelmente mais expressivas do que aquelas obtidas pela modificação de α. Isso se deve ao fato de que a técnica de Impedância Eletromecânica geralmente opera em frequências mais elevadas, região em que o amortecimento proporcional à rigidez é dominante.

Conclui-se que o amortecimento de Rayleigh é capaz de representar adequadamente o amortecimento real do sistema

em estudo. No entanto, em amplas faixas de frequências, esse amortecimento deve ser empregado com cautela. Além disso, é importante ressaltar que o modelo de Rayleigh requer um conhecimento prévio do amortecimento estrutural ou sua obtenção por meio de comparações com valores modais ou dados experimentais, como realizado neste estudo. Isso pode introduzir desafios na sua aplicação e comprometer a principal vantagem associada à utilização de uma modelagem teórica, que é a eliminação da necessidade de qualquer informação experimental prévia. No entanto, apesar dessas considerações, a obtenção dos parâmetros por meio de vias experimentais possibilita aumentar a confiabilidade das simulações numéricas e, principalmente, extrapolar esses dados para diferentes ambientes e circunstâncias estruturais, sem necessariamente acarretar um aumento significativo de investimento, como pode ocorrer nos testes físicos. Isso contribui para o maior entendimento das complexas interações estruturais em diferentes contextos, possibilitando prever o comportamento das estruturas e auxiliar na tomada de decisões fundamentadas em dados mais precisos e abrangentes.

5. AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo n° 2021/12008-2.

6. REFERÊNCIAS

Baptista, F.G. and Filho, J.V., 2009. "A new impedance measurement system for pzt based structural health monitoring". *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, Vol. 58, No. 10, pp. 3602–3608. doi: 10.1109/TIM.2009.2018693.

Carneiro Jr, J.P., Brennan, M.J., Gonçalves, P.J.P., Cleante, V.G., Bueno, D.D. and Santos, R.B., 2021. "On the attenuation of vibration using a finite periodic array of rods comprised of either symmetric or asymmetric cells". *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 511, p. 116217. doi:10.1016/j.jsv.2021.116217.

Caughey, T.K., 1960. "Classical normal modes in damped linear dynamic systems". *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 27, No. 2, p. 269–271. doi:/10.1115/1.3643949.

Cruz, C. and Miranda, E., 2017. "Evaluation of the rayleigh damping model for buildings". *Engineering Structures*, Vol. 138, pp. 324–336. doi:10.1016/j.engstruct.2017.02.001.

Erduran, E., 2012. "Evaluation of rayleigh damping and its influence on engineering demand parameter estimate". *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 41, No. 14, pp. 1905–1919. doi:10.1002/eqe.2164.

Ewins, D.J., 2000. *Modal Testing: Theory, Practice and Application*. Research Studies Press LTD., 2nd edition. Hertfordshire, England.

Giurgiutiu, V., 2007. *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Academic Press, 1st edition.

Gonçalves, P.J.P., Peplow, A. and Brennan, M.J., 2018. "Exact expressions for numerical evaluation of high order modes of vibration in uniform euler-bernoulli beams". *Applied Acoustics*, Vol. 141, pp. 371–373. doi: 10.1016/j.apacoust.2018.05.014.

Gresil, M. and Giurgiutiu, V., 2015. "Prediction of attenuated guided waves propagation in carbon fiber composites using rayleigh damping model". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 26, No. 16, pp. 2151–2169. doi:10.1177/1045389X14549870.

Gresil, M., Yu, L., Giurgiutiu, V. and Sutton, M., 2012. "Predictive modeling of electromechanical impedance spectroscopy for composite materials". *Structural Health Monitoring*, Vol. 11, No. 6, pp. 671–683. doi:10.1177/1475921712451954.

Han, M., Jiang, J., Du, H. and Feng, S., 2021. "Research on damping engagement methodology in dynamic analysis of isolated structure". *Shock and Vibration*, Vol. 2021, p. 17. doi:10.1155/2021/6613952.

Iglesias, F.S. and López, A.F., 2020. "Rayleigh damping parameters estimation using hammer impact tests". *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 135, p. 106391. doi:10.1016/j.ymssp.2019.106391.

Ju, S.H. and Ni, S.H., 2007. "Determining rayleigh damping parameters of soils for finite element analysi". *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 31, No. 10, pp. 1239–1255. doi:10.1002/nag.598.

Liang, C., Sun, F.P. and Rogers, C.A., 1993. "Coupled electromechanical analysis of piezoelectric ceramic actuator-driven systems: determination of the actuator power consumption and system energy transfer". In *Smart Structures and Materials 1993: Smart Structures and Intelligent Systems*. International Society for Optics and Photonics, SPIE, Vol. 1971, pp. 286–298. doi:10.1117/12.152767.

Liu, M. and Gorman, D., 1995. "Formulation of rayleigh damping and its extensions". *Computers & Structures*, Vol. 57, No. 2, pp. 277–285. doi:10.1016/0045-7949(94)00611-6.

Lu, R., Shen, Y., Qu, W. and Xiao, L., 2022. "Health monitoring of high-damping viscoelastic materials using subresonator enriched electro-mechanical impedance signatures". *Smart Materials and Structures*, Vol. 31, No. 9, p. 095046. doi:10.1088/1361-665X/ac8778.

Pan, D., Chen, G. and Wang, Z., 2014. "Suboptimal rayleigh damping coefficients in seismic analysis of viscously-damped structures". *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, Vol. 13, No. 4, p. 653–670. doi:10.1007/s11803-014-0270-9.

Park, D. and Hashash, Y.M.A., 2004. "Soil damping formulation in nonlinear time domain site response analysis". *Journal of Earthquake Engineering*, Vol. 8, No. 2, pp. 249–274. doi:10.1142/S1363246904001420.

Park, G., Cudney, H.H. and Inman, D.J., 2000. "An integrated health monitoring technique using structural impedance sensors". *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 11, No. 6, pp. 448–455. doi:10.1106/QXMV-

R3GC-VXXG-W3AQ.

Rahul, B., Dharani, J. and Balaji, R., 2021. "Optimal method for determination of rayleigh damping coefficients for different materials using modal analysis". *International Journal of Vehicle Structures and Systems*, Vol. 13, No. 1, pp. 102–111. doi:10.4273/ijvss.13.1.20.

Rayleigh, L.B.J.W.S., 1877. *The theory of sound*. London, Macmillan.

Salehi, M. and Sideris, P., 2020. "Enhanced rayleigh damping model for dynamic analysis of inelastic structures". *Journal of Structural Engineering*, Vol. 146, No. 10, p. 04020216. doi:10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0002732.

Sanliturk, K.Y. and Koruk, H., 2013. "Development and validation of a composite finite element with damping capability". *Composite Structures*, Vol. 97, pp. 136–146. doi:10.1016/j.compstruct.2012.10.020.

Sepehry, N., Shamshirsaz, M. and Bastani, A., 2010. "Experimental and theoretical analysis in impedance-based structural health monitoring with varying temperature". *Structural Health Monitoring*, Vol. 10, No. 6, pp. 573–585. doi: 10.1177/1475921710388338.

Spears, R.E. and Jensen, S.R., 2012. "Approach for selection of rayleigh damping parameters used for time history analysis". *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 134, No. 6, p. 061801. doi:10.1115/1.4006855.

Tian, Z., Huo, L., Gao, W., Li, H. and Song, G., 2017. "Modeling of the attenuation of stress waves in concrete based on the rayleigh damping model using time-reversal and pzt transducers". *Smart Materials and Structures*, Vol. 26, No. 10, p. 105030. doi:10.1088/1361-665X/aa80c2.

Wang, H.F., Lou, M.L. and Zhang, R.L., 2017. "Selection of rayleigh damping coefficients for seismic response analysis of soil layers". *World Academy of Science, Engineering and Technology, International Journal of Environmental, Chemical, Ecological, Geological and Geophysical Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 158–163.

7. RESPONSABILIDADE AUTORAIS

Os autores são os únicos responsáveis pelo conteúdo deste trabalho.

ANALYSIS OF THE RAYLEIGH DAMPING APPLIED TO A BEAM MODEL WITH COUPLED PZT

Lorena Lopes Dias, lorena.dias@unesp.br[1]
Douglas D. Bueno, douglas.bueno@unesp.br[2]
Pedro Christian Ayala Castillo, pedro.ayala@unifesspa.edu.br[2]
Camila G. Gonsalez-Bueno, camila.gg.bueno@unesp.br[1]

[1]São Paulo State University "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP), Brasil Avenue, 56, Ilha Solteira, SP, 15.385-000, Brazil
[2]Federal University of the South and Southeast of Pará (UNIFESSPA), Folha 31, Quadra 07, Lote Especial, Nova Marabá, Marabá, PA, 68507-590, Brazil

Abstract: *Characterizing the sources of energy dissipation in engineering structures, also known as damping, has been a topic of research and debate for many years. Although crucial for describing the behavior of mechanical systems, grasping and precisely defining this phenomenon remains a challenge, especially for more complex structures. In such situations, damping is frequently incorporated directly into the dynamic equation of motion, as is the case with the Rayleigh damping. This is determined through a linear combination of the mass and stiffness matrices of the dynamic system under investigation. Although widely used due to its relative simplicity and convenient mathematical processing, this damping model presents a challenge in its application, linked to the need for a careful selection of the Rayleigh coefficients. The determination of these coefficients is essential to satisfactorily reproduce the actual damping of the structure; however, this process becomes more complex for structures with multiple degrees of freedom. In this context, the present work analyzes the electromechanical impedance curves obtained from the modeling of a Euler-Bernoulli beam with a coupled piezoelectric transducer. To this end, it is first necessary to define the damping of this mechanical system, which was determined by applying the Rayleigh damping concept. Therefore, since the electromechanical impedance technique is commonly employed at high frequencies, there is also the complication associated with this factor when dealing with this damping. So, the inherent complexity of a structure with multiple degrees of freedom, combined with the application of the electromechanical impedance technique at high frequencies, makes obtaining the appropriate coefficients a complex and difficult task. In view of this, the present article has adopted a simple and effective approach for this determination, based on the comparison between theoretical and experimental electromechanical impedance curves. Additionally, an analysis was conducted on the individual effects of the coefficients on the aforementioned curves, as well as the implications arising from using constant values for these factors over broad frequency ranges. Through these analyses, it was possible to observe that one of the coefficients has a more significant influence on the theoretical electromechanical impedance curves, in addition to contribute to the formation of knowledge and greater understanding of the Rayleigh damping.*

Keywords: *damping, coefficients, model, electromechanical impedance*