

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

TATIANE DE PAULA MORAES

Uma introdução à teoria de ondas gravitacionais.

Guaratinguetá

2019

Tatiane de Paula Moraes

Uma introdução à teoria de ondas gravitacionais.

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Física da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Física

Orientador: Profº Dr. Rogerio Teixeira Cavalcanti

Guaratinguetá

2019

M827i	Moraes, Tatiane de Paula Uma Introdução à teoria de ondas gravitacionais / Tatiane de Paula Moraes – Guaratinguetá, 2019. 60 f.: il. Bibliografia: f. 47-48 Trabalho de Graduação em Licenciatura em Física – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019. Orientador: Prof. Dr. Rogério Teixeira Cavalcanti 1. Ondas gravitacionais. 2. Relatividade (Física). 3. Gravitação. I. Título. CDU 534
-------	--

Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CAMPUS DE GUARATINGUETÁ

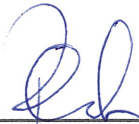
TATIANE DE PAULA MORAES

ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO PARTE DO
REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE "GRADUANDO EM FÍSICA "

APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE GRADUAÇÃO EM
FÍSICA

Profº Dr. MARCO AURELIO ALVARENGA MONTEIRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Profº Dr. Rogerio Teixeira Cavalcanti
Orientador/UNESP-FEG


Profº Dr. Elias Leite Mendonça
UNESP-FEG


Profº Dr. Saulo Henrique Pereira
UNESP-FEG

Dezembro , 2019

Dedico este trabalho a todos os amigos, familiares e professores que contribuíram para a minha formação acadêmica.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que contribuíram no decorrer desta jornada, especialmente:

A minha família que me deu apoio em todas as minhas escolhas e me deu suporte durante toda a graduação.

Ao Prof^o Dr. Julio Marny Hoff da Silva que me iniciou em Relatividade Geral, me deu apoio e condições de seguir na área de Física Teórica.

A todos os professores que de alguma maneira me inspiraram, motivaram e ajudaram em todos esses anos de graduação.

Ao meu orientador Prof^o Dr. Rogerio Teixeira Cavalcanti que teve papel fundamental na minha formação científica e na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos pelo companheirismo e disponibilidade para me auxiliar em vários momentos.

Este trabalho contou com o apoio das seguintes entidades:

PIBIC - Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica da UNESP

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

“Eu vi esperança nas estrelas. Era mais forte que o medo. E fui na direção dela.”
(Saru - Star Trek:Discovery)

RESUMO

Ondas gravitacionais estão entre as primeiras e mais fundamentais predições da relatividade geral. Observações indiretas desse fenômeno foram realizadas em 1974 por Russell A. Hulse e Joseph H. Taylor Jr ao estudar a variação de período do sistema binário PSR1913+16, o que lhes rendeu o premio Nobel de física em 1993. Mais recentemente Rainer Weiss, Kip Thorne e Barry Barish foram agraciados com o premio Nobel de física de 2017 pelas contribuições na construção do detector LIGO, que pela primeira vez detectou ondas gravitacionais de forma direta. A detecção direta de ondas gravitacionais abre uma variada gama de possibilidades para estudos astrofísicos e teóricos em gravitação, colocando essa linha de pesquisa em bastante evidencia atualmente. Nesse projeto estudaremos a base teórica e fundamental da geração, propagação e detecção de ondas gravitacionais no contexto da relatividade geral.

PALAVRAS-CHAVE: Ondas Gravitacionais. Relatividade Geral. Gravitação.

ABSTRACT

Gravitational waves are among the first and most fundamental predictions of general relativity. Indirect observations of this phenomenon were made in 1974 by Russell A. Hulse and Joseph H. Taylor Jr, studying the variation of the PSR1913 + 16 binary system period, which earned them the 1993 Nobel Prize in physics. Most recently Rainer Weiss, Kip Thorne and Barry Barish were awarded the 2017 Nobel Prize in physics for their contributions to the construction of the LIGO detector, which for the first time detected gravitational waves directly. Direct detection of gravitational waves opens a wide range of possibilities for astrophysical and theoretical studies in gravitation, putting this line of research in evidence today. In this project we will study the theoretical and fundamental basis of the generation, propagation and detection of gravitational waves in the context of general relativity.

KEYWORDS: Gravitational Waves. General Relativity. Gravitation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Polarização " $\times$ " ou "cruzada".[18]	28
Figura 2	Polarização "+".[18]	28
Figura 3	Observatório LIGO.[11]	41
Figura 4	Interferômetro de Michelson.[11]	42
Figura 5	Cavidades Fabry Perot.[11]	43
Figura 6	Power Recycling Mirror.[11]	43
Figura 7	LISA.[12]	44
Figura 8	Detector Mario Schenberg.	45
Figura 9	Pullback.[18]	51
Figura 10	Família de difeomorfismos. [18]	52
Figura 11	Mudança de coordenadas.[18]	53
Figura 12	Movendo pontos no campo: pullbacks.[18]	53

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BICEP	Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization
LIGO	Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory
LISA	Laser Interferometer Space Antenna
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	TEORIA DE PERTURBAÇÃO E RADIAÇÃO GRAVITACIONAL	14
2.1	LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE.	14
2.2	GRAUS DE LIBERDADE	16
3	POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS	24
4	PRODUÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS.	29
5	TIPOS DE FONTES.	33
5.1	APROXIMAÇÃO DE FONTE COMPACTA.	33
5.2	FONTES ESTACIONÁRIAS.	35
5.3	FONTES ESTÁTICAS E O LIMITE NEWTONIANO.	36
6	O MOMENTO-ENERGIA DO CAMPO GRAVITACIONAL.	38
7	DETECÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS.	41
7.1	LIGO: LASER INTERFEROMETER GRAVITATIONAL-WAVE OBSERVATORY	41
7.2	VIRGO INTERFEROMETER	44
7.3	LISA: LASER INTERFEROMETER SPACE ANTENNA	44
7.4	DETECTOR MARIO SCHENBERG	44
8	CONCLUSÃO	46
	REFERÊNCIAS	47
	APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE CAMPO LINEARIZADAS.	49
A.1	LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE.	49
A.2	DIFEOMORFISMOS.	51
A.3	GRAUS DE LIBERDADE.	54
	APÊNDICE B – POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS.	55
	APÊNDICE C – TIPOS DE FONTES.	57
C.1	APROXIMAÇÃO DE FONTE COMPACTA.	57
C.2	FONTES ESTACIONÁRIAS.	57

1 INTRODUÇÃO

Há mais de cem anos, em meados do ano de 1915, Albert Einstein revolucionou nossa maneira de explicar a gravidade. A teoria da Relatividade Geral, baseada na geometria Riemanniana, nos diz que o tempo e o espaço não são estruturas distintas, eles formam uma estrutura única e indissociável de quatro dimensões. Com isso, a gravidade deixa de ser interpretada como uma força de atração entre corpos massivos, e sim como uma consequência direta da deformação do espaço-tempo causada por concentrações de matéria e energia.

Nesse sentido podemos imaginar o universo como um tecido elástico, onde objetos que se movem nele causam constantes perturbações nesse tecido, assim como crianças pulando em um trampolim. Dessa maneira surgem as ondas gravitacionais, previstas pelas equações de Einstein. Também podemos compará-las com as ondas do mar. Assim como o mar se move para frente e para trás, as ondas gravitacionais representam distorções no espaço-tempo que se propagam à velocidade da luz. Esse fenômeno é tão intrigante que o próprio Einstein não acreditava que isso pudesse de fato acontecer e foram necessários muitos anos até que fôssemos capazes de criar um experimento grande e preciso o suficiente para realizarmos uma detecção direta de tais ondas. Antes disso, em 1993 Russell A. Hulse e Joseph H. Taylor Jr. receberam o prêmio Nobel pela descoberta de um novo tipo de pulsar[1]. As observações realizadas em 1974 desse sistema binário de estrelas de nêutrons foram as primeiras observações indiretas relacionadas às ondas gravitacionais.

Um dos interesses envolvido no estudo de estrelas de nêutrons vem do fato de que elas nos ajudam a entender melhor sobre a origem de metais preciosos, como ouro e prata, e outros metais pesados. E as ondas gravitacionais são um meio de examinarmos isso[2]. Elas atuam como uma espécie de alerta cósmico, guiando os astrônomos até eventos catastróficos e ricos em informações sobre o universo. Uma coisa leva à outra. Enquanto grandes eventos nos ajudam a detectar as ondas gravitacionais, estas nos ajudam a entender mais sobre o fenômeno que a gerou, garantindo que sejamos capazes de explorar objetos que são invisíveis para nós através de radiação eletromagnética.

Além disso é importante entendermos não só como essas ondas são geradas mas também quais as implicações e efeitos de quando estas atingem a Terra ou qualquer outro corpo no espaço. É aí que essas ondas se mostram tão eficientes já que a radiação gravitacional não sofre nenhum tipo de interferência durante essas interações, diferentemente da radiação eletromagnética. Nada pode parar a gravidade, ou seja, o encontro da onda gravitacional com a matéria ou qualquer tipo de radiação não irá interferir em nenhuma de suas características e isso nos garante que as ondas provenientes de eventos muito próximos ao início da formação do universo e do próprio Big Bang sejam estudadas nos dias de hoje. O projeto BICEP 2 (Background Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization) consiste de um radiotelescópio que fica no polo sul projetado para detectar o modo B da polarização da radiação cósmica de fundo em micro-ondas [3]. Apesar de ser bem diferente do LIGO, esse experimento espera conseguir detectar as ondas gravitacionais provenientes da grande inflação do universo observando o comportamento da radiação cósmica de fundo. Recentemente foi anunciado que eles haviam observado indiretamente uma onda gravitacional proveniente do Big Bang [4], mas uma análise mais completa

dos dados evidenciou que não havia informações suficientes para corroborar a descoberta. Neil Turok, diretor do Instituto de Física Teórica do Canadá, diz que o experimento em si tem muitas limitações e que por isso o BICEP 2 não pôde verificar se seu sinal era proveniente de um efeito verdadeiramente cosmológico [5]. O Brasil também vem tentando detectar ondas gravitacionais através do detector Mario Schenberg [6] que atualmente se encontra no INPE (Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais). O projeto é fruto da parceria entre o Instituto de Física da USP e o INPE mas infelizmente ainda não foram obtidos resultados satisfatórios[7].

Nesse trabalho são estudados os principais aspectos relacionados à geração, propagação e detecção de ondas gravitacionais. Veremos que, devido a sua pequena amplitude, são difíceis de serem detectadas na Terra. Contudo os observatórios LIGO e VIRGO (dois gigantes interferômetros a laser) já foram capazes de realizar tais detecções, sendo a primeira anunciada em 2016 proveniente da colisão de dois buracos negros a 130 milhões de anos-luz de distância da Terra [8]. Todos os objetos que se movem no espaço são fontes de ondas gravitacionais, entretanto essas ondas são tão fracas que não somos capazes de detectá-las. As ondas que de fato podemos procurar são aquelas provenientes de grandes eventos astrofísicos, como por exemplo a colisão de buracos negros, sistemas binários de estrelas de nêutrons, entre outros eventos citados anteriormente. Além disso veremos que essas ondas são caracterizadas por dois estados de polarização e que sua detecção está diretamente ligada ao efeito de contração e dilatação dos comprimentos característico da passagem dessas ondas. Veremos, portanto, no segundo capítulo como linearizar as equações de Einstein e em seguida faremos considerações importantes que nos levarão as chamadas transformações de gauge. No terceiro capítulo estudaremos as polarizações dessas ondas, como citado acima. Nos capítulos quatro e cinco veremos como essas ondas são formadas e alguns modelos simplificados de fonte. Isso nos levará ao capítulo seis onde discutiremos sobre o momento-energia do campo gravitacional. Por fim, no capítulo sete faremos uma discussão sobre os principais experimentos envolvidos na busca e detecção das ondas gravitacionais.

2 TEORIA DE PERTURBAÇÃO E RADIAÇÃO GRAVITACIONAL

2.1 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE.

Um dos resultados fundamentais da relatividade geral é que, no limite apropriado, a gravitação Newtoniana pode ser reobtida. Neste trabalho, consideraremos que o campo gravitacional é fraco mas pode variar no tempo e, além disso, consideraremos que não há restrições para o movimento de partículas testes. Essas considerações (o limite de campo fraco) são importantes porque nos permitem estudar fenômenos não previstos pela mecânica Newtoniana, como a radiação gravitacional. Portanto, o que faremos inicialmente será a linearização das equações de Einstein. Esse procedimento nos levará à equação de onda a partir da qual teremos condição de reobter resultados físicos importantes. Assumir o limite de campo fraco nos permite escrever a métrica $g_{\mu\nu}$ da seguinte forma

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (2.1.1)$$

onde $\eta_{\mu\nu}$ é a métrica plana de Minkowski dada por $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ e $h_{\mu\nu}$ é uma pequena perturbação, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Além disso, a perturbação que estudaremos estará se propagando no espaço-tempo plano e por ser tão pequena poderemos desprezar termos de ordens superiores nela. Se definirmos que $h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma}$, então

$$(g_{\mu\nu})(g^{\nu\rho}) = \delta_{\mu}^{\rho} \quad (2.1.2)$$

e, portanto

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}. \quad (2.1.3)$$

Essa teoria é invariante de Lorentz (em relação à relatividade restrita) pois, sob uma transformação de Lorentz dada por

$$x^{\mu'} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (2.1.4)$$

a métrica plana $\eta_{\mu\nu}$ é invariante, enquanto a perturbação se transforma como (ver apêndice A)

$$h_{\mu'\nu'} = \Lambda_{\mu}^{\rho}\Lambda_{\nu}^{\sigma}h_{\rho\sigma}. \quad (2.1.5)$$

Nosso objetivo, então, é encontrar as equações de movimento para a perturbação $h_{\mu\nu}$, e faremos isso analisando as equações de Einstein em primeira ordem em $h_{\mu\nu}$. Para isso, começamos encontrando os símbolos de Christoffel, definidos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}g_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}g_{\mu\nu}). \quad (2.1.6)$$

Substituindo (2.1.1) e (2.1.3) em (2.1.6), temos (ver apêndice A):

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}(\eta^{\rho\lambda} - h^{\rho\lambda})[\partial_{\mu}(\eta_{\nu\lambda} + h_{\nu\lambda}) + \partial_{\nu}(\eta_{\lambda\mu} + h_{\lambda\mu}) - \partial_{\lambda}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})] \quad (2.1.7)$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\lambda}(\partial_{\mu}h_{\nu\lambda} + \partial_{\nu}h_{\lambda\mu} - \partial_{\lambda}h_{\mu\nu}). \quad (2.1.8)$$

Da mesma forma podemos encontrar o tensor de Riemann dado por

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\lambda}\partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \eta_{\mu\lambda}\partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\lambda}. \quad (2.1.9)$$

Então (ver apêndice A)

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}). \quad (2.1.10)$$

Contraindo a equação (2.1.10) com $\eta^{\mu\rho}$ encontramos o tensor de Ricci (ver apêndice A):

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\rho}R_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{2}(\eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}\partial_{\nu}h_{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\mu}h_{\nu\rho} - \eta^{\mu\rho}\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h_{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho}\partial_{\rho}\partial_{\mu}h_{\nu\sigma}) \\ R_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2}(\partial_{\rho}\partial_{\nu}h^{\rho}_{\sigma} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\mu}_{\nu} - \partial_{\sigma}\partial_{\nu}h - \square h_{\nu\sigma}). \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Como ρ e μ são índices mudos, podemos trocá-los de modo que o tensor assuma a seguinte forma:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu}) \quad (2.1.12)$$

Nessa expressão definimos o traço da perturbação como $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$ e o operador D'Alambertiano para o espaço plano que é dado por $\square = -\partial_t^2 + \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$. Contraindo novamente, obtemos o escalar de Ricci:

$$R = \partial_{\mu}\partial_{\nu}h^{\mu\nu} - \square h. \quad (2.1.13)$$

Finalmente temos todos os objetos que compõem o tensor de Einstein, dado por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \quad (2.1.14)$$

e que assume a seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\sigma}\partial_{\nu}h^{\sigma}_{\mu} + \partial_{\sigma}\partial_{\mu}h^{\sigma}_{\nu} - \partial_{\mu}\partial_{\nu}h - \square h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\partial_{\rho}\partial_{\lambda}h^{\rho\lambda} + \eta_{\mu\nu}\square h). \quad (2.1.15)$$

Com isso obtemos a equação de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1.16)$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento calculado de ordem zero em $h_{\mu\nu}$, ou seja, como estamos considerando o espaço plano e uma perturbação muito pequena, as contribuições de massa e energia

dadas por $T_{\mu\nu}$ são tão pequenas quanto $h_{\mu\nu}$, o que implica na lei de conservação expressa por $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$. As equações de Einstein no vácuo são dadas por

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.17)$$

Com essas informações seríamos, portanto, capazes de começar a encontrar soluções para (2.1.17). Entretanto a expressão (2.1.1) não especifica nenhum tipo de sistema de coordenadas em que essa composição seja válida. Isso indica que para cada sistema escolhido encontraremos uma descrição distinta para a perturbação. Para diminuirmos esses graus de liberdade do nosso problema, utilizaremos as chamadas transformações de gauge e podemos também observar como uma partícula livre no espaço se comportaria com a passagem de tal perturbação. Para entender melhor como funcionam essas transformações, veja o apêndice A.

2.2 GRAUS DE LIBERDADE

Agora vamos começar a analisar o comportamento de partículas livres no espaço-tempo e como elas são afetadas pela perturbação gravitacional. Entretanto, antes de chegarmos de fato na interpretação física do nosso problema e sermos capazes de ter uma ideia visual do fenômeno em questão, vamos fazer uma análise que nos permitirá obter outras informações importantes sobre as ondas gravitacionais. Será conveniente escolhermos um sistema de coordenadas fixo inercial no espaço-tempo de fundo de Minkowski e decompor as componentes da perturbação da métrica de acordo com as suas propriedades de transformação sob uma rotação espacial. A perturbação é um tensor (0,2) simétrico. Sob rotações espaciais, a componente 00 é um escalar, as componentes 0i (iguais às i0) formam um tri-vetor e as componentes ij formam um tensor espacial simétrico de dois índices. Em seguida, podemos decompor esse tensor espacial em uma parte com traço e outra sem (s_{ij}). Podemos então escrever $h_{\mu\nu}$ como

$$h_{00} = -2\Phi \quad (2.2.1)$$

$$h_{0i} = w_i \quad (2.2.2)$$

$$h_{ij} = 2s_{ij} - 2\Psi\delta_{ij} \quad (2.2.3)$$

onde Ψ contém o traço de h_{ij} e s_{ij} não tem traço.

Olhando para a expressão (2.2.3) temos que o h_{ij} possui seis graus de liberdade (por ser um tensor puramente espacial e simétrico), então o lado direito da equação tem que ser coerente com isso. Temos também que s_{ij} também deveria possuir os mesmos seis graus de liberdade, mas por ter traço nulo, isso significa que estamos tirando um grau de liberdade dele, ou seja, por ser um tensor espacial, s_{ij} possui nove graus de liberdade mas por ser simétrico este deve perder três graus de liberdade e por não ter traço deve perder mais um, restando apenas cinco. Dessa forma, o grau de liberdade que falta na nossa equação está presente em Ψ e δ_{ij} garante o traço de h_{ij} , mantendo nossa equação compatível.

Contraindo (2.2.3) com δ^{ij} para tirar o traço de h_{ij} , temos (ver apêndice A)

$$\delta^{ij} h_{ij} = -6\Psi \quad (2.2.4)$$

$$\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij} h_{ij}. \quad (2.2.5)$$

Substituindo (2.2.5) em (2.2.3) e isolando s_{ij} , temos

$$s_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} - \frac{1}{3}\delta^{kl} h_{kl} \delta_{ij}). \quad (2.2.6)$$

Dessa maneira, sabendo que a métrica é dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

e consideando a expressão (2.1.1), podemos escrever a métrica como

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + w_i(dt dx^i + dx^i dt) + [(1 - 2\Psi)\delta_{ij} + 2s_{ij}]dx^i dx^j \quad (2.2.7)$$

É válido notar que até aqui não fixamos nenhum gauge e nem resolvemos nenhuma equação. Estamos apenas definindo uma notação conveniente. O tensor s_{ij} é chamado de strain e conterá a informação da radiação gravitacional.

Para começarmos a entender fisicamente o significado da utilização de diferentes campos na perturbação, vamos considerar o movimento de partículas testes descritas pela equação geodésica. Dadas as definições anteriores, considerando que (ver apêndice A)

$$\partial_{[j} w_{i]} = \frac{1}{2}(\partial_j w_i - \partial_i w_j), \quad (2.2.8)$$

$$\partial_{(j} w_{k)} = \frac{1}{2}(\partial_j w_k + \partial_k w_j) \quad (2.2.9)$$

e através de substituições, temos que os símbolos de Christoffel são

$$\Gamma_{00}^0 = \partial_0 \Phi$$

$$\Gamma_{00}^i = \partial_i \Phi + \partial_0 w^i$$

$$\Gamma_{j0}^0 = \partial_j \Phi$$

$$\Gamma_{j0}^i = \partial_{[j} w_{i]} + \frac{1}{2}\partial_0 h^i_j$$

$$\Gamma_{jk}^0 = -\partial_{(j} w_{k)} + \frac{1}{2}\partial_0 h_{jk}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \partial_{(j} h_{k)i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk}. \quad (2.2.10)$$

Em (2.2.10) vemos que nossas equações dependem de h_{ij} ao invés de s_{ij} e Ψ , já que $h_{\mu\nu}$ depende desses termos. Essa diferença será importante quando começarmos a construir as equações de Einstein novamente. Antes disso, como fixamos um referencial inercial, é conveniente definirmos o quadri-momento $p^\mu = dx^\mu/d\lambda$, onde $\lambda = \frac{\tau}{m}$, em termos da energia E e da tri-velocidade $v^i = dx^i/dt$:

$$p^0 = \frac{dt}{d\lambda} = E \quad (2.2.11)$$

então

$$p^i = \frac{dx^i}{dt} m = \frac{dx^i}{d\lambda} = v^i \frac{dt}{d\lambda} = v^i E$$

ou seja,

$$p^i = E v^i. \quad (2.2.12)$$

Com isso, podemos escrever a equação geodésica

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho p^\sigma = 0, \quad (2.2.13)$$

de onde temos que

$$\frac{dp^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu p^\rho p^\sigma.$$

Dividindo a expressão acima por E e trocando $d\lambda$ por $\frac{d\tau}{E}$, temos

$$\frac{dp^\mu}{dt} = -\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{p^\rho p^\sigma}{E}. \quad (2.2.14)$$

Para vermos como a energia evolui com o tempo, basta tomarmos $\mu = 0$

$$\frac{dE}{dt} = -E \left[\partial_0 \Phi + 2(\partial_k \Phi) v^k - \left(\partial_{[j} w_{i]} - \frac{1}{2} \partial_0 h_{ij} \right) v^i v^j \right]. \quad (2.2.15)$$

Sabemos que a energia deve se conservar, entretanto $E = p^0 = m\gamma$ inclui apenas a parte inercial da partícula e não a energia de interação com o campo gravitacional. Já a componente espacial $\mu = i$ da equação geodésica se torna

$$\frac{dp^i}{dt} = -E \left[\partial_i \Phi + \partial_0 w_i + 2(\partial_{[j} w_{i]} + \partial_0 h_{ij}) v^j + \left(\partial_{[j} h_{k]i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right]. \quad (2.2.16)$$

Para encontrarmos uma interpretação física da expressão (2.2.16), vamos definir dois campos tri-vetoriais: **gravito-elétrico** e **gravito-magnético**

$$G^i \equiv -\partial^i \Phi - \partial_0 w^i \quad (2.2.17)$$

$$H^i \equiv (\nabla \times \vec{w})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j w_k. \quad (2.2.18)$$

Com isso, (2.2.16) se torna

$$\frac{dp^i}{dt} = E \left[G^i + (\vec{v} \times \vec{H})^i - 2(\partial_0 h^i_j) v^j - \left(\partial_{[j} h_{k]i} - \frac{1}{2} \partial_i h_{jk} \right) v^j v^k \right]. \quad (2.2.19)$$

Os dois últimos termos à direita descrevem como a partícula teste responde ao campo escalar Φ e às perturbações vetoriais w_i .

Além dessa análise do movimento de partículas testes devemos analisar as equações de campo para a perturbação da métrica, que são as equações de Einstein linearizadas. Para isso, basta voltarmos ao procedimento que já passamos anteriormente e encontrar os tensores de Riemman nessas nossas variáveis, que são

$$\begin{aligned} R_{0j0l} &= \partial_j \partial_l \Phi + \partial_0 \partial_{[j} w_{l]} - \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{jl} \\ R_{0jkl} &= \partial_j \partial_{[k} w_{l]} - \partial_0 \partial_{[k} h_{l]j} \\ R_{ikjl} &= \partial_j \partial_{[k} h_{l]i} - \partial_i \partial_{[k} h_{l]j}. \end{aligned} \quad (2.2.20)$$

Contraindo com $\eta^{\mu\nu}$ encontramos o tensor de Ricci

$$\begin{aligned} R_{00} &= \nabla^2 \Phi + \partial_0 \partial_k w^k + 3 \partial_0^2 \Psi \\ R_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k w^k + 2 \partial_0 \partial_j \Psi + \partial_0 \partial_k s_j^k \\ R_{ij} &= -\partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{[i} w_{j]} + \square \Psi \delta_{ij} - \square s_{ij} + 2 \partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

onde $\nabla^2 = \delta^{ij} \partial_i \partial_j$ é o Laplaciano tridimensional plano. E finalmente podemos calcular o tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= 2 \nabla^2 \Psi + \partial_k \partial_l s^{kl} \\ G_{0j} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + \frac{1}{2} \partial_j \partial_k w^k + 2 \partial_0 \partial_j \Psi + \partial_0 \partial_k s_j^k \\ G_{ij} &= (\partial_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) (\Phi - \Psi) + \partial_{ij} \partial_0 \partial_k w^k - \partial_0 \partial_{[i} w_{j]} + 2 \delta^{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} + \\ &\quad + 2 \partial_k \partial_{[i} s_{j]}^k - \partial_{ij} \partial_k \partial_l s^{kl}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Usando a expressão para a equação de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$ e analisando-a a fim de encontrarmos

graus de liberdade não físicos, vemos que apenas uma pequena fração das componentes da métrica são verdadeiros graus de liberdade do campo gravitacional, o restante obedecem restrições que os determinam em termos de outros campos. Para ver como isso acontece, basta iniciarmos tomando $G_{00} = 8\pi GT_{00}$. Dessa maneira podemos escrever (2.2.22) como

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi GT_{00} - \frac{1}{2} \partial_k \partial_l s^{kl}. \quad (2.2.23)$$

Essa é uma equação para Ψ sem derivadas temporais, ou seja, não é nele que está contido os graus de liberdade físicos e sim no tensor energia momento e em s_{ij} . Agora vamos olhar para a equação em $0j$:

$$(\partial_{kj} \nabla^2 - \partial_j \partial_k) w^k = -16\pi GT_{0j} + 4\partial_0 \partial_j \Psi + 2\partial_0 \partial_k s_j^k. \quad (2.2.24)$$

Essa é uma equação para w^i sem derivadas temporais, ou seja, caímos no mesmo caso anterior em que, se soubermos determinar o tensor energia momento e s_{ij} , seremos capazes de determinar w^i . Por fim, basta olharmos a equação para ij :

$$\begin{aligned} (\partial_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j) \Phi = 8\pi GT_{ij} + (\partial_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j - 2\delta_{ij} \partial_0^2) \Psi - \partial_{ij} \partial_0 \partial_k w^k + \\ + \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + \square s_{ij} - 2\partial_k \partial_{(i} s_{j)}^k - \partial_{ij} \partial_k \partial_l s_j^l. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Mais uma vez vemos que não há derivadas temporais agindo em Φ . Portanto, o único grau de liberdade de propagação nas equações de Einstein são aqueles em s_{ij} e isso será utilizado para descrevermos as ondas gravitacionais. Dada uma transformação de gauge do tipo

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu$$

temos que a perturbação da métrica se transforma da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi + \partial_0 \xi^0 \\ w^i &\rightarrow w^i + \partial_0 \xi^i - \partial_i \xi^0 \\ \Psi &\rightarrow \Psi - \frac{1}{3} \partial_i \xi^i \\ s_{ij} &\rightarrow s_{ij} + \partial_{(i} \xi_{j)} - \frac{1}{3} \partial_k \xi^k \partial_{ij}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Assim como no eletromagnetismo, diferentes gauges podem ser apropriados para diferentes circunstâncias. Algumas escolhas comuns são:

- **Gauge Transverso:**

Iniciamos considerando que

$$\partial_i s^{ij} = 0,$$

Encontramos essa expressão escolhendo ξ^j que satisfaça

$$\nabla^2 \xi^j + \frac{1}{3} \partial_j \partial_i \xi^i = -2 \partial_i s^{ij}.$$

Além disso também consideramos que

$$\partial_i w^i = 0$$

a partir da escolha de ξ^0 que satisfaça

$$\nabla^2 \xi^0 = \partial_i w^i + \partial_0 \partial_i \xi^i.$$

Nesse gauge as equações de Einstein se tornam

$$G_{00} = 2\nabla^2 \Psi = 8\pi G T_{00} \quad (2.2.27)$$

$$G_{0j} = -\frac{1}{2} \nabla^2 w_j + 2\partial_0 \partial_j \Psi = 8\pi G T_{0j} \quad (2.2.28)$$

$$G_{ij} = (\delta_{ij} \nabla^2 - \partial_i \partial_j)(\Phi - \Psi) - \partial_0 \partial_{(i} w_{j)} + 2\delta_{ij} \partial_0^2 \Psi - \square s_{ij} = 8\pi G T_{ij}. \quad (2.2.29)$$

Mais adiante utilizaremos essas equações para encontrarmos as soluções de campo fraco.

- **Gauge harmônico ou Gauge de Lorentz:**

Essa segunda escolha também é interessante para o nosso estudo pois nos ajudará a calcular a produção de ondas gravitacionais. Como iremos discutir mais adiante, esse gauge é equivalente a tomarmos

$$\partial_\mu h^\mu{}_\nu - \frac{1}{2} \partial_\nu h = 0. \quad (2.2.30)$$

Mas antes de olharmos para as aplicações do limite de campo fraco, vamos concluir a nossa discussão sobre graus de liberdade dando atenção à diferença entre a decomposição algébrica da métrica e uma composição adicional que se torna possível se considerarmos campos tensoriais ao invés de tensores definidos em um ponto. Essa composição adicional nos ajuda a encontrar os graus de liberdade físicos de forma mais direta. Nos baseamos, então, no fato de que podemos decompor um campo vetorial em uma parte transversal $w_\perp^i$ e uma parte longitudinal $w_\parallel^i$

$$w^i = w_\perp^i + w_\parallel^i \quad (2.2.31)$$

onde

$$\partial_i w_{\perp}^i = 0$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j w_{\parallel k} = 0. \quad (2.2.32)$$

Um vetor longitudinal é o gradiente de um escalar λ , então

$$w_{\perp}^i = \epsilon^{ijk} \partial_j \xi_k$$

$$w_{\parallel i} = \partial_i \lambda. \quad (2.2.33)$$

Exatamente como a nossa decomposição inicial da métrica em escalar, vetor e tensor, essa decomposição de um campo vetorial em partes dependentes de um escalar e um vetor transversal é invariante sob rotações espaciais. O escalar λ representa um grau de liberdade. O vetor ξ^i parece ter três graus de liberdade mas um deles não é real e isso vem do fato de que a escolha pra defini-lo não é única. Então, temos três graus de liberdade no total. Um procedimento similar se aplica ao tensor s^{ij} , que pode ser decomposto em uma parte transversal $s_{\perp}^{ij}$, uma parte solenoidal s_S^{ij} e uma parte longitudinal $s_{\parallel}^{ij}$

$$s^{ij} = s_{\perp}^{ij} + s_S^{ij} + s_{\parallel}^{ij}. \quad (2.2.34)$$

A parte transversal não possui divergente enquanto que a divergencia da parte solenoidal é um vetor transversal e, a divergencia da parte longitudinal é um vetor longitudinal, ou seja

$$\partial_i s_{\perp}^{ij} = 0 \quad (2.2.35)$$

$$\partial_i \partial_j s_S^{ij} = 0 \quad (2.2.36)$$

$$\epsilon^{jkl} \partial_k \partial_i s_{\parallel}^{ij} = 0. \quad (2.2.37)$$

Isso significa que a parte longitudinal pode ser derivada de um campo escalar θ e que a parte solenoidal pode ser derivada de um vetor transversal ζ ,

$$s_{\parallel ij} = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) \theta \quad (2.2.38)$$

$$s_S^{ij} = \partial_{(i} \zeta_{j)}, \quad (2.2.39)$$

onde

$$\partial_i \zeta^i = 0. \quad (2.2.40)$$

Então, a parte longitudinal descreve um grau de liberdade enquanto a parte solenoidal descreve dois

graus de liberdade. A parte transversal não pode ser decomposta, o que significa que restam dois graus de liberdade no tensor s_{ij} . Com essa decomposição de campos tensoriais fomos capazes de escrever a perturbação $h_{\mu\nu}$ em termos de quatro escalares (Φ , Ψ , λ e θ), cada um com um grau de liberdade; dois vetores transversais (ξ^i e ζ^i), cada um com dois graus de liberdade e um tensor transversal sem traço ($s_{\perp}^{ij}$) com dois graus de liberdade.

3 POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS

O estudo de ondas gravitacionais é uma das aplicações possíveis para o limite de campo fraco. Aqui, vamos continuar considerando esse limite e, além disso, vamos considerar que essa radiação gravitacional está se propagando pelo espaço longe de uma possível fonte geradora. Tomaremos então que $T_{\mu\nu} = 0$. E então teremos que a equação 00 será

$$\nabla^2 \Psi = 0. \quad (3.0.1)$$

Analogamente, a equação 0j será

$$\nabla^2 w_j = 0. \quad (3.0.2)$$

Se tomarmos o traço da equação ij, teremos (a partir dos resultados acima) que

$$\nabla^2 \Phi = 0. \quad (3.0.3)$$

Nos resta, portanto, a parte sem traço da equação ij, que se torna uma equação de onda pra s_{ij} :

$$\square s_{ij} = 0 \quad (3.0.4)$$

Normalmente encontramos na literatura a equação (3.0.4) escrita em termos de $h_{\mu\nu}$ com o ansatz de que os outros graus de liberdade (Φ , Ψ e w_i) são iguais a zero. A isso damos o nome de gauge transversal sem traço, de onde temos que

$$[h_{\mu\nu}^{TT}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & 2s_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \quad (3.0.5)$$

Então, a equação de movimento é

$$\square h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (3.0.6)$$

Vamos manter essa notação mas tendo em mente que $h_{\mu\nu}^{TT}$ é puramente espacial, sem traço e transversal:

$$h_{0\nu}^{TT} = 0 \quad (3.0.7)$$

$$\eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{TT} = 0 \quad (3.0.8)$$

$$\partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} = 0. \quad (3.0.9)$$

Uma solução particularmente útil para uma equação de onda é dada por

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (3.0.10)$$

onde $C_{\mu\nu}$ é um tensor simétrico, constante, puramente espacial e sem traço, ou seja

$$C_{0\nu} = 0 \quad (3.0.11)$$

$$\eta^{\mu\nu} C_{\mu\nu} = 0. \quad (3.0.12)$$

O vetor constante k_σ é o vetor de onda. Para verificar que de fato temos uma solução, fazemos

$$\begin{aligned} 0 &= \square h_{\mu\nu}^{TT} \\ &= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \\ &= \eta^{\rho\sigma} \partial_\rho (ik_\sigma h_{\mu\nu}^{TT}) \\ &= -\eta^{\rho\sigma} k_\rho k_\sigma h_{\mu\nu}^{TT} \\ &= -k_\sigma k^\sigma h_{\mu\nu}^{TT}. \end{aligned} \quad (3.0.13)$$

Para que isso seja verdade $k_\sigma k^\sigma = 0$. Como k_σ é o vetor de onda, o resultado do produto acima implica que esse vetor é do tipo luz, ou seja, a onda gravitacional viajará na velocidade da luz. A componente temporal do vetor de onda é a frequência da onda e é escrito como $k^\sigma = (w, k^1, k^2, k^3)$. Então, da condição de que o vetor de onda é do tipo luz temos

$$\omega^2 = \delta_{ij} k^i k^j. \quad (3.0.14)$$

Nós ainda temos que garantir que a perturbação é transversal, ou seja

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu h_{TT}^{\mu\nu} \\ 0 &= \partial_\mu C^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma} \\ &= iC^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma}, \end{aligned} \quad (3.0.15)$$

que é verdade apenas se

$$k_\mu C^{\mu\nu} = 0 \quad (3.0.16)$$

Essa solução pode ser escrita de forma mais explícita escolhendo coordenadas espaciais nas quais a onda viaje na direção x^3 , sendo assim

$$k^\mu = (\omega, 0, 0, k^3) = (\omega, 0, 0, \omega), \quad (3.0.17)$$

onde sabemos que $k^3 = \omega$ pois o vetor de onda é do tipo luz. As únicas componentes diferentes de zero em $C_{\mu\nu}$ são C_{11} , C_{12} , C_{21} e C_{22} . Mas $C_{\mu\nu}$ não tem traço e é simétrica, então temos que (ver apêndice B)

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & C_{12} & -C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.0.18)$$

Então, para essa onda haverá apenas duas componentes que caracterizam a amplitude da onda.

Para entendermos o efeito físico da passagem de uma onda gravitacional, basta olharmos para um conjunto de massas testes. Essas massas não devem ser muito pequenas a ponto de não conseguirmos estudar a passagem da onda mas também não podem ter uma massa significativa a ponto de causar deformações no espaço-tempo. Além disso, vamos considerar um conjunto de massas testes e não uma única massa pois no referencial dessa única massa não haveriam mudanças detectáveis da passagem da onda. Portanto, vamos assumir que o comportamento dessas massas deve ser descrito pela equação geodésica, e vamos considerar que essas massas vizinhas tenham uma quadri-velocidade descrita por um único campo vetorial $U^\mu(x)$ e estão separadas por um vetor S^μ . Então temos

$$\frac{D^2}{d\tau^2} S^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma} U^\nu U^\rho S^\sigma, \quad (3.0.19)$$

onde definimos que $\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu$. Queremos que a equação (3.0.19) seja de primeira ordem em $h_{\mu\nu}^{TT}$. Se considerarmos que as massas estão se movendo lentamente, então podemos considerar a quadri-velocidade como um vetor unitário na direção temporal e então escrevemos

$$U^\nu = (1, 0, 0, 0). \quad (3.0.20)$$

Como a onda é transversal e estamos considerando sua propagação no eixo x^3 , podemos considerar apenas $R_{\mu 00 \sigma}$, de onde temos que

$$R_{\mu 00 \sigma} = \frac{1}{2} (\partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} + \partial_\sigma \partial_\mu h_{00}^{TT} - \partial_\sigma \partial_0 h_{\mu 0}^{TT} - \partial_\mu \partial_0 h_{\sigma 0}^{TT}). \quad (3.0.21)$$

Mas como $h_{\mu 0}^{TT} = 0$, então

$$R_{\mu 00 \sigma} = \frac{1}{2} \partial_0 \partial_0 h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (3.0.22)$$

Enquanto isso, para as massas se movendo lentamente temos $\tau = x^0 = t$ para pequenas ordens, então

a equação geodésica se torna

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h^{TT\mu}{}_\sigma \quad (3.0.23)$$

Como a nossa onda está viajando na direção x^3 , apenas S^1 e S^2 serão afetados, ou seja, apenas as partículas distribuídas na direção perpendicular ao vetor de onda. Vemos, então, que nossa onda é caracterizada por dois números que, por conveniência, vamos nomeá-los como

$$h_\times = C_{11}$$

$$h_+ = C_{12}, \quad (3.0.24)$$

então

$$C_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.0.25)$$

Vamos olhar cada um dos efeitos separadamente. Começando com $h_\times = 0$, temos (ver apêndice B)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (3.0.26)$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = -\frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}). \quad (3.0.27)$$

Resolvendo temos, para pequenas ordens:

$$S^1 = (1 + \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^1 \quad (3.0.28)$$

e

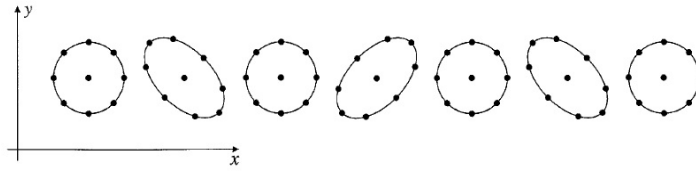
$$S^2 = (1 - \frac{1}{2} h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}) S^2. \quad (3.0.29)$$

Então, inicialmente, as massas paradas na direção x^1 irão oscilar nessa mesma direção, e o mesmo vale para as massas separadas na direção x^2 . Ou seja, se considerarmos um anel de massas, conforme a onda passar por elas, estas oscilarão para frente e para trás deformando o anel em uma elipse (Ver Figura 1).

Por outro lado, podemos fazer a mesma análise para $h_+ = 0$ (Figura 2), que nos leva a (ver apêndice B)

$$S^1 = S^1 + \frac{1}{2} h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma} S^2 \quad (3.0.30)$$

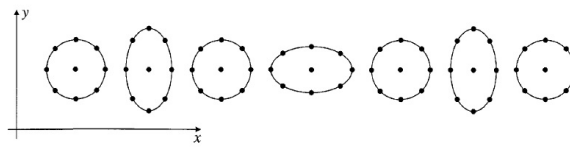
Figura 1 – Polarização "×" ou "cruzada".[18]



e

$$S^2 = S^2 + \frac{1}{2} h_{\times} e^{ik_{\sigma} x^{\sigma}} S^1. \quad (3.0.31)$$

Figura 2 – Polarização "+".[18]



Essas duas quantidades ($h_{\times}$ e h_{+}) medem dois modos independentes da onda gravitacional linearizada, conhecidas como polarização "mais" e "cruzada". Vemos, portanto que, essas massas não mudam suas coordenadas de posição no espaço, apenas a distância relativa entre elas.

4 PRODUÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS.

Tendo em mãos a solução de ondas planas para as equações de campo linearizadas, podemos estudar a geração de ondas gravitacionais. Agora é necessário considerarmos um termo de fonte nas equações de Einstein ($T_{\mu\nu}$),

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (4.0.1)$$

Mesmo com a presença de uma fonte, ainda há convenientes simplificações que podemos introduzir no nosso estudo. Podemos começar inserindo o traço-reverso da perturbação

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h \eta_{\mu\nu}. \quad (4.0.2)$$

O nome traço-reverso faz sentido já que

$$\bar{\bar{h}} = \eta_{\mu\nu} \bar{h}^{\mu\nu} = -h. \quad (4.0.3)$$

Note também que muito distante da fonte, no vácuo, podemos retomar com o gauge transversal sem traço e, portanto, o traço-reverso da perturbação será igual a perturbação original

$$\bar{h}_{\mu\nu}^{TT} = h_{\mu\nu}^{TT}. \quad (4.0.4)$$

Nesse ponto ainda estamos livres para escolher alguns gauges. Sabemos que sob a transformação de gauge

$$h_{\mu\nu}^\epsilon = h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} \quad (4.0.5)$$

o traço-reverso da perturbação se transforma como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_{(\mu} \xi_{\nu)} - \partial_\lambda \xi^\lambda \eta_{\mu\nu}. \quad (4.0.6)$$

Escolhendo um parâmetro de gauge ξ_μ que satisfaça

$$\square \xi_\mu = -\partial_\lambda \bar{h}^\lambda{}_\mu, \quad (4.0.7)$$

podemos, por fim, tomar o Gauge de Lorentz

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (4.0.8)$$

Adicionando a informação do traço-reverso da perturbação na expressão para o tensor de Einstein e usando a condição de Lorentz, chegamos na seguinte expressão

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \square \bar{h}_{\mu\nu}. \quad (4.0.9)$$

As equações de Einstein linearizadas, como já vimos, nos levam à equação de onda

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2kT_{\mu\nu}. \quad (4.0.10)$$

A solução para essa equação pode ser obtida utilizando a função de Green. Começamos considerando a solução para a equação de onda não homogênea quando a fonte é uma função δ (delta de Dirac), localizada em uma determinada coordenada y^σ no espaço-tempo. Assim, estaremos interessados em resolver uma equação da forma

$$\square_x G(x^\sigma - y^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma - y^\sigma), \quad (4.0.11)$$

onde o sub índice em $\square_x$ torna explícito que o operador d'Alambertiano diz respeito as coordenadas x^σ e $G(x^\sigma - y^\sigma)$ é a função de Green para o nosso problema. Dada a expressão (4.0.10) e (4.0.11), é possível escrevermos uma solução para as equações de campo linearizadas da forma

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x^\sigma) = \bar{h}_{(0)}^{\mu\nu}(x^\sigma) - 2k \int G(x^\sigma - y^\sigma) T^{\mu\nu}(y^\sigma) d^4y. \quad (4.0.12)$$

O problema de obter uma solução geral (com fonte) se reduz, portanto, em resolver (4.0.11) obtendo a função de Green apropriada. Com a fonte na origem, podemos escrever

$$\partial_\mu \partial^\mu G(x^\sigma) = \delta^{(4)}(x^\sigma). \quad (4.0.13)$$

Primeiramente integramos essa equação sobre o hipervolume V , que será uma esfera de raio r nas suas dimensões espaciais e integramos em t de menos infinito a mais infinito. Disso encontramos

$$\int_V \partial_\mu \partial^\mu G(x^\sigma) d^4x = \int_S [\partial_\mu G(x^\sigma)] n^\mu dS = 1, \quad (4.0.14)$$

onde utilizamos o teorema de divergência.

Vale notar que nesse capítulo vamos trabalhar com a métrica de assinatura $(+, -, -, -)$, diferentemente do que fizemos até aqui, então n^μ é escolhido para estar apontando para fora se for do tipo tempo e para dentro se for do tipo espaço. Além disso, já que as ondas gravitacionais se propagam à velocidade da luz, os únicos pontos do espaço-tempo que podem ser influenciados por ela são aqueles na parte do futuro do cone de luz. Então $G(x^\sigma)$ tem que ser nulo em todos os pontos do espaço-tempo exceto naqueles que estão no futuro, e portanto

$$G(x^\sigma) = \begin{cases} f(r)\delta(ct - r), & ct \geq 0 \\ 0, & ct < 0 \end{cases} \quad (4.0.15)$$

onde f é uma função arbitrária de r .

Reescrevendo a integral de superfície usando $dS = cdt d\Omega$ (onde $d\Omega$ é um elemento de ângulo sólido) e $\eta^\mu \partial_\mu = -\partial_r$ e realizando a integral sob a esfera, temos:

$$-4\pi r^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G(x^\sigma)}{\partial r} cdt = 1, \quad (4.0.16)$$

onde única contribuição da integral em t ocorre em $ct = r$. Substituindo (4.0.15) em (4.0.16) temos

$$4\pi r^2 f(r) \int_0^\infty \delta'(ct - r) c dt - 4\pi r^2 \frac{df(r)}{dr} \int_0^\infty \delta(ct - r) c dt = 1. \quad (4.0.17)$$

onde a linha na função delta denota diferenciação com respeito a r .

Integrando por partes vemos que a primeira integral do lado direito de (4.0.17) é zero, enquanto que a segunda é igual a um. Temos, portanto, que $-4\pi r^2 \frac{df}{dr} = 1$ e então $f(r) = \frac{1}{(4\pi r)}$, onde a constante de integração desaparece já que a função de Green deve ser nula no espaço infinito. Portanto, reescrevendo o resultado em termos das coordenadas x^σ , vemos que a função de Green que estávamos procurando é

$$G(x^\sigma) = \frac{\delta(x^0 - |\vec{x}|)}{4\pi |\vec{x}|} \theta(x^0), \quad (4.0.18)$$

onde a função de Heaviside $\theta(x^0)$ é igual a um ou zero se x^0 for maior ou igual a zero ou menor que zero, respectivamente. Podemos agora usar essa expressão para substituir $G(x^\sigma - y^\sigma)$ em (4.0.12), obtendo

$$\bar{h}^{\mu\nu}(x^\sigma) = -\frac{k}{2\pi} \int \frac{\delta((x^0 - y^0) - |\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \theta(x^0 - y^0) T^{\mu\nu}(y^\sigma) d^4 y. \quad (4.0.19)$$

Usando a função de delta para realizar a integral em y^0 , finalmente encontramos a solução geral para as equações de campo linearizadas, dada por

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(ct - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y}, \quad (4.0.20)$$

onde $\vec{x}$ representa a coordenada espacial do campo em que $\bar{h}^{\mu\nu}$ é determinado, $\vec{y}$ representa a coordenada espacial de um ponto em que a fonte está a uma distância $|\vec{x} - \vec{y}|$ dele e $ct - |\vec{x} - \vec{y}| \equiv ct_r$ é o tempo retardado.

Essa equação nos diz que a perturbação no campo gravitacional em $(ct, \vec{x})$ é a soma das influências da energia e momento da fonte no ponto $(ct_r, \vec{y})$ no cone de luz passado, ou seja, a perturbação gerada na fonte deve levar um certo tempo até chegar a outro ponto do espaço-tempo. Em geral, uma fonte de onda gravitacional pode ser dinâmica e de extensão espacial significativa, ou seja, não é pequena comparada com a distância ao ponto em que se quer calcular os efeitos da onda. Por isso, obter uma solução para (4.0.20) é analiticamente intratável. É conveniente, portanto, utilizarmos a expansão multipolar da equação (4.0.20), o que nos levará ao cálculo de sucessivas aproximações da solução. Começamos escrevendo a expansão de Taylor:

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{r} + (-y^i) \partial_i \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2!} (-y^i) (-y^j) \partial_i \partial_j \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (4.0.21)$$

$$= \frac{1}{r} + y^i \frac{x_i}{r^3} + y^i y^j \left(\frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \right) + \dots \quad (4.0.22)$$

onde $r \equiv |\vec{x}|$ é a distância espacial da origem até o ponto onde o campo está sendo calculado. A

solução pode ser escrita então

$$\begin{aligned} \bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} & \left[\frac{1}{r} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) d^3\vec{y} + \frac{x_i}{r^3} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) y^i d^3\vec{y} \right. \\ & \left. + \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int T^{\mu\nu}(ct_r, \vec{y}) y^i y^j d^3\vec{y} + \dots \right] \end{aligned} \quad (4.0.23)$$

onde $ct_r = ct - |\vec{x} - \vec{y}|$. O campo gravitacional em grandes distâncias da fonte podem ser aproximados apenas pelos primeiros termos da expansão.

5 TIPOS DE FONTES.

5.1 APROXIMAÇÃO DE FONTE COMPACTA.

Vamos supor que a fonte seja uma distribuição de massa localizada na origem O do nosso sistema de coordenadas. Se quisermos calcular o campo gravitacional em um ponto $\vec{x}$ a uma distância r da fonte, que seja muito maior quando comparada com a extensão da fonte, precisaremos, portanto, considerar apenas os termos de primeira ordem na expansão multipolar. Além disso, consideraremos que as partículas que compõem a fonte tem velocidades suficientemente pequenas quando comparadas com a velocidade da luz (c) e fazemos isso para que possamos tomar $ct_r = ct - r$ no argumento do tensor energia-momento. Dessa maneira, a solução na aproximação de fonte compacta é dada por

$$\bar{h}^{\mu\nu}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4 r} \int T^{\mu\nu}(ct - r, \vec{y}) d^3\vec{y}. \quad (5.1.1)$$

Nessa aproximação estamos apenas considerando soluções para as equações de campo linearizadas quando o campo estiver longe da fonte, cuja variação vai com $1/r$.

Da equação (5.1.1) vemos que o cálculo do campo gravitacional se reduziu a integrar $T^{\mu\nu}$ sobre a fonte em um tempo retardado fixo $ct - r$. Podemos interpretar fisicamente os componentes dessa integral da seguinte maneira:

- $\int T^{00} d^3\vec{y}$: é a energia total das partículas da fonte (incluindo a energia da massa de repouso) $\equiv Mc^2$;
- $\int T^{0i} d^3\vec{y}$: equivale a c vezes o momento total das partículas da fonte na direção $x^i \equiv P^i c$,
- $\int T^{ij} d^3\vec{y}$: é a integração do tensor na fonte.

Para uma fonte isolada, as quantidades M e P^i são constantes na teoria linear. Entretanto, sem perda de generalidade, podemos tomar as coordenadas espaciais x^i para que correspondam ao centro do momento das partículas da fonte, no qual $P^i = 0$. Dessa forma, da equação (5.1.1), nessas coordenadas, temos que

$$\bar{h}^{00} = -\frac{4G}{c^2 r}, \quad (5.1.2)$$

$$\bar{h}^{i0} = \bar{h}^{0i} = 0. \quad (5.1.3)$$

As componentes restantes do campo gravitacional são dadas por (ver apêndice C):

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4 r} \left[\int T^{ij}(ct', \vec{y}) d^3\vec{y} \right]_r, \quad (5.1.4)$$

onde $[]_r$ significa que a expressão entre colchetes está avaliada em $ct' = ct - r$.

A integral (5.1.4) é muito complexa para ser avaliada diretamente. Felizmente, existem alternativas que nos levam a uma expressão muito mais clara. Primeiramente, lembremos que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ e,

considerando que $T^{\mu\nu}$ é uma função das coordenadas $(ct', \vec{y})$, temos que $\partial_0 = \partial/\partial(ct')$ e $\partial_k = \partial/\partial y^k$. Disso podemos escrever,

$$\partial_0 T^{00} + \partial_k T^{0k} = 0, \quad (5.1.5)$$

$$\partial_0 T^{i0} + \partial_k T^{ik} = 0. \quad (5.1.6)$$

Vamos considerar agora a integral

$$\int \partial_k (T^{ik} y^j) d^3 \vec{y} = \int (\partial_k T^{ik}) y^j d^3 \vec{y} + \int T^{ij} d^3 \vec{y}, \quad (5.1.7)$$

onde a integral é tomada sobre a região do espaço ao redor da fonte, então $T^{\mu\nu} = 0$ na superfície S de fronteira dessa região. Usando o teorema de Gauss para converter a integral do lado esquerdo em uma integral de superfície S, encontramos que seu valor é zero. Por fim, usando (5.1.6), podemos escrever

$$\int T^{ij} d^3 \vec{y} = - \int (\partial_k T^{ik}) y^j d^3 \vec{y} = \int (\partial_0 T^{i0}) y^j d^3 \vec{y} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \int T^{i0} y^j d^3 \vec{y}. \quad (5.1.8)$$

Por conveniência, vamos trocar i e j e somar de maneira que obtemos

$$\int T^{ij} d^3 \vec{y} = \frac{1}{2c} \frac{d}{dt'} \int (T^{i0} y^j + T^{j0} y^i) d^3 \vec{y}. \quad (5.1.9)$$

Devemos considerar agora a seguinte integral

$$\int \partial_k (T^{0k} y^i y^j) d^3 \vec{y} = \int (\partial_k T^{0k}) y^i y^j d^3 \vec{y} + \int (T^{i0} y^j + T^{j0} y^i) d^3 \vec{y}, \quad (5.1.10)$$

onde, mais uma vez, utilizamos o teorema de Gauss para mostrar que o lado esquerdo da equação é nulo. Usando (5.1.5) temos:

$$\int (T^{i0} y^j + T^{j0} y^i) d^3 \vec{y} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \int T^{00} y^i y^j d^3 \vec{y}. \quad (5.1.11)$$

Combinando (5.1.9) com (5.1.11), temos

$$\int T^{ij} d^3 \vec{y} = \frac{1}{2c^2} \frac{d^2}{dt'^2} \int T^{00} y^i y^j d^3 \vec{y}. \quad (5.1.12)$$

Inserindo essa expressão na fórmula de quadrupolo (ver apêndice C), temos:

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = -\frac{2G}{c^6 r} \left[\frac{d^2 I^{ij}(ct')}{dt'^2} \right]_r, \quad (5.1.13)$$

onde definimos o tensor momento de quadrupolo como

$$I^{ij}(ct) = \int T^{00} y^i y^j d^3 \vec{y}, \quad (5.1.14)$$

que é um tensor constante em cada hipersuperfície constante no tempo.

5.2 FONTES ESTACIONÁRIAS.

Vamos voltar à solução geral para as equações de campo linearizadas. Como vimos na expansão multipolar, outras propriedades da fonte podem gerar um campo que cai ainda mais rápido do que $1/r$. Em geral, não temos como encontrar uma expressão simples para a solução geral, mas podemos simplificar um pouco mais quando consideramos a fonte estacionária.

Uma fonte estacionária tem $\partial_0 T^{\mu\nu} = 0$, ou seja, o tensor energia-momento é constante no tempo. Note que isso não implica que a fonte seja estática. Um exemplo típico de uma fonte estacionária mas não estática é uma esfera uniforme e rígida rotacionando com velocidade angular constante. Uma vantagem do limite de fonte estacionária é que a dependência temporal desaparece implicando que o tempo retardado seja irrelevante. Consequentemente, a solução geral será reduzida a

$$\bar{h}^{\mu\nu}(\vec{x}) = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\mu\nu}(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y}. \quad (5.2.1)$$

É possível fazermos a expansão multipolar para essa solução da mesma maneira que fizemos anteriormente, mas nesse caso a dependência temporal é omitida. De fato, esse caso nos permite encontrar mais facilmente interpretações físicas para os vários momentos multipolares.

Um caso particularmente interessante é o de fontes estacionárias não-relativísticas. Considere uma fonte que tenha velocidades bem definidas $u^i(\vec{x})$, onde a velocidade u de cada partícula constituinte é pequena o suficiente quando comparada com a velocidade da luz de forma que podemos negligenciar termos de ordem u^2/c^2 e superiores no tensor energia-momento. Em particular, tomamos $\gamma_u = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} \approx 1$. Além disso, a pressão p dentro da fonte em todas as direções é muito menor do que a densidade de energia e também deverá ser negligenciada. Em nosso estudo, veremos que para esse tipo de fonte,

$$T^{00} = \rho c^2; \quad (5.2.2)$$

$$T^{0i} = c\rho u^i, \quad (5.2.3)$$

$$T^{ij} = \rho u^i u^j, \quad (5.2.4)$$

onde $\rho(\vec{x})$ é a distribuição de densidade própria da fonte. Podemos ver que $|T^{ij}| / |T^{00}| \sim u^2/c^2$ e portanto devemos tomar $T^{ij} \sim 0$ para a nossa aproximação. A solução correspondente pode ser escrita como

$$\bar{h}^{00} = \frac{4\Phi}{c^2}; \quad (5.2.5)$$

$$\bar{h}^{0i} = \frac{A^i}{c}, \quad (5.2.6)$$

$$\bar{h}^{ij} = 0, \quad (5.2.7)$$

onde definimos o potencial escalar gravitacional Φ e o vetor potencial gravitacional espacial A^i . As componentes correspondentes de $h^{\mu\nu}$ são dadas por $h^{\mu\nu} = \bar{h}^{00} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\bar{h}$. As equações 5.2.5, 5.2.6 e 5.2.7 implicam que $\bar{h} = \bar{h}^{00}$ e, com os índices em baixo, encontramos que as componentes não nulas são

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2\Phi}{c^2}, \quad (5.2.8)$$

$$h_{0i} = \frac{A^i}{c}. \quad (5.2.9)$$

Vale lembrar que ao subir ou descer índices espaciais introduz um sinal negativo. Portanto, o valor numérico de A_i é menos o valor de A^i .

Nessa parte do estudo, em geral, adotamos o ponto de vista de que $h_{\mu\nu}$ é um tensor de rank 2 definido em coordenadas cartesianas no espaço-tempo de fundo de Minkowski. Nesse momento, entretanto, é útil voltarmos a ideia de que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ define a métrica de um espaço-tempo levemente curvo. Assim podemos escrever o elemento de linha, no limite de fonte não-relativística e em coordenadas "quasi-Minkowski", como

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \frac{2A_i}{c} c dt dx^i - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) \sum (dx^i)^2, \quad (5.2.10)$$

onde $A_i dx^i = -\delta_{ij} A^i dx^j = -\vec{A} \cdot d\vec{x}$.

Determinar as geodésicas desse elemento de linha significa calcular a trajetória de partículas testes no campo gravitacional de uma fonte não-relativística. Em particular, temos que assumir que as partículas testes estão se movendo com velocidades muito baixas e que a trajetória dos fótons nesse limite também podem ser encontradas se determinarmos as geodésicas nulas desse elemento de linha.

5.3 FONTES ESTÁTICAS E O LIMITE NEWTONIANO.

Outros casos especiais de fontes estacionárias são as fontes estáticas, nas quais as partículas que as constituem não estão se movendo. Nesse caso, a única componente não nula do tensor de energia-momento é a energia de repouso $T^{00} = \rho c^2$. De fato, esse limite Newtoniano é claramente equivalente a fonte estacionária com velocidades $u^i(\vec{x}) = 0$. Portanto, temos que os únicos elementos não nulos são

$$h_{00} = h_{11} = h_{22} = h_{33} = \frac{2\Phi}{c^2}. \quad (5.3.1)$$

De fato a solução acima permanece válida como uma boa aproximação mesmo se as partículas da fonte estiverem se movendo, evidenciando que o tensor energia-momento da fonte é dominante sobre a energia de repouso da distribuição de matéria, ou seja, $|T^{00}| \gg |T^{0i}|$ e $|T^{00}| \gg |T^{ij}|$. O elemento de linha correspondente é dado por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) d\sigma^2, \quad (5.3.2)$$

onde $d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, ou seja, a expressão anterior se refere ao elemento de linha no limite Newtoniano. Além disso, esse elemento de linha pode facilmente ser adaptado, por exemplo, para coordenadas polares, onde teríamos que $d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$. Como exemplo do elemento de linha, podemos considerar o caso simples de um objeto esférico, estático e de massa M , onde o potencial gravitacional Newtoniano é dado por $\Phi = -GM/r$. Nesse caso, a equação será dada por

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.3.3)$$

que é a solução de Schwarzschild. No sistema solar, essa aproximação é boa o suficiente para determinar a deflexão da luz e os redshifts gravitacionais causados pelo Sol. Entretanto, essa aproximação não é precisa o suficiente para prever as mudanças no periélio, já que este é um efeito acumulativo.

6 O MOMENTO-ENERGIA DO CAMPO GRAVITACIONAL.

Fisicamente é esperado que um campo gravitacional carregue momento-energia assim como campos eletromagnéticos fazem. Infelizmente, a tarefa de associar uma densidade de energia para um campo gravitacional é muito difícil. Sabemos, a partir do princípio da equivalência, que transformar coordenadas para um referencial em queda livre pode eliminar efeitos gravitacionais. Como resultado disso, não há uma noção local de densidade de energia gravitacional na relatividade geral. Além disso, no espaço-tempo em geral não há motivos para que a energia e o momento se conservem.

Em um espaço-tempo geral não há simetrias como as encontradas, por exemplo, no eletromagnetismo. Mesmo na teoria de gravitação linearizada devolvida nesse estudo o campo $h_{\mu\nu}$ representa uma pequena distorção do espaço de Minkowski e, portanto, as propriedades de simetria de Lorentz se perdem.

Como discutimos anteriormente, a teoria de gravitação linearizada ignora o momento-energia associado ao campo gravitacional em si (gravidade da gravidade). Para incluir essa contribuição, e assim ir além da teoria linearizada, devemos modificar as equações de campo para obter

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}), \quad (6.0.1)$$

onde $G_{\mu\nu}^{(1)}$ é o tensor de Einstein linearizado e $t^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento do próprio campo gravitacional. Rearranjando os termos, temos

$$G_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{8\pi G}{c^4}t_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (6.0.2)$$

Podemos expandir as equações de Einstein, obtendo

$$G_{\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu}^{(1)} + G_{\mu\nu}^{(2)} + \dots = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (6.0.3)$$

onde os índices entre parêntesis indicam a ordem da expansão em $h_{\mu\nu}$. Essa equação sugere que, para uma boa aproximação, nós devemos tomar

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G}G_{\mu\nu}^{(2)}. \quad (6.0.4)$$

Dessa forma, os termos do tensor de Einstein que são de segunda ordem serão dados por

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}h_{\mu\nu}R^{(1)} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{(1)}, \quad (6.0.5)$$

onde $R_{\mu\nu}^{(2)}$ é o tensor de Ricci em segunda ordem de $h_{\mu\nu}$, $R^{(1)}$ e $R^{(2)}$ são o escalar de Ricci em primeira e segunda ordem, respectivamente.

Apesar de (6.0.5) e $t_{\mu\nu}$ serem covariantes sob uma transformação de Lorentz, não são invariantes sob uma transformação de coordenadas infinitesimais. Uma maneira de lidar com esse problema é considerar que de fato o momento-energia do campo gravitacional em um ponto do espaço-tempo não tem significado real em relatividade geral. Isso sugere que, em cada ponto do espaço-tempo,

devemos tomar a média de $G_{\mu\nu}^{(2)}$ sob uma pequena região a fim de sondar fisicamente a curvatura do espaço-tempo, o que nos dará a medida do invariante de gauge do campo gravitacional. Se denotarmos esse processo por $\langle \dots \rangle$, então poderemos trocar (6.0.4) por

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{c^4}{8\pi G} \langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle. \quad (6.0.6)$$

Tendo feito isso, nossa tarefa agora é determinar $\langle G_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$ como uma função de $h_{\mu\nu}$. Como estamos considerando todas as direções para cada ponto, as primeiras derivadas devem ir para zero. Então, para qualquer função de posição $a(x)$, nós temos $\langle \partial_\mu a \rangle = 0$. Isso nos leva a importante consequência de que $\langle \partial_\mu(ab) \rangle = \langle (\partial_\mu a)b \rangle + \langle a(\partial_\mu b) \rangle = 0$, e consequentemente podemos trocar derivadas em produtos ganhando um sinal, ou seja

$$\langle (\partial_\mu a)b \rangle = - \langle a(\partial_\mu b) \rangle. \quad (6.0.7)$$

Vamos começar considerando os dois termos da direita de (6.0.5) que depende do tensor e escalar de Ricci de primeira ordem. Isso se mostrará muito conveniente para expressar os termos do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ de qualquer matéria. As equações de campo (linearizadas) podem ser reescritas como

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\kappa(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T), \quad (6.0.8)$$

onde $T = T^\mu_\mu$ e $\kappa = 8\pi G/c^4$. Note também que, dessa equação, temos $R^{(1)} = \kappa T$. Portanto, podemos escrever (6.0.5) como

$$G_{\mu\nu}^{(2)} = R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(2)} - \frac{1}{2}\kappa(\bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}). \quad (6.0.9)$$

Precisamos, portanto, encontrar uma expressão para $R_{\mu\nu}^{(2)}$ e, consequentemente, para $R^{(2)}$ através da contração do tensor de Ricci. Então os termos de segunda ordem em $h_{\mu\nu}$ ficam

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^{(2)\sigma} - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\nu}^{(2)\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^{(1)\rho} \Gamma_{\rho\nu}^{(1)\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{(1)\rho} \Gamma_{\rho\sigma}^{(1)\sigma}, \quad (6.0.10)$$

onde novamente os índices entre parênteses representam a ordem da expansão. As conexões afim, incluindo termos de segunda ordem, se tornam

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\nu}^\sigma &= \Gamma_{\mu\nu}^{(1)\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^{(2)\sigma} + \dots \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\nu h_\mu^\sigma + \partial_\mu h_\nu^\sigma - \partial^\sigma h_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}h^{\sigma\tau}(\partial_\nu h_{\tau\mu} + \partial_\mu h_{\tau\nu} - \partial_\tau h_{\mu\nu}) + \dots \end{aligned} \quad (6.0.11)$$

Inserindo esse resultado em 6.0.10, temos

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu h^{\rho\sigma})\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \frac{1}{2}h^{\rho\sigma}(\partial_\mu \partial_\sigma h_{\nu\rho} + \partial_\nu \partial_\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\mu \partial_\nu h_{\rho\sigma} - \partial_\rho \partial_\sigma h_{\mu\nu})$$

$$+\frac{1}{2}(\partial^\sigma h_\nu^\rho)(\partial_\rho h_{\sigma\mu} - \partial_\sigma h_{\rho\mu}) + \frac{1}{2}(\partial_\sigma h^{\rho\sigma} - \frac{1}{2}\partial^\rho h)(\partial_\mu h_{\nu\rho} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}). \quad (6.0.12)$$

Para encontrarmos a expressão completa de 6.0.6, devemos calcular $\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle$. Vamos, primeiramente, utilizar o resultado 6.0.7 para reescrever os produtos de primeiras derivadas em 6.0.12 em termos de segundas derivadas, de onde temos que

$$\begin{aligned} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle = & \frac{1}{4} \langle (\partial_\mu h_{\rho\sigma}) \partial_\nu h^{\rho\sigma} - 2(\partial_\sigma h^{\rho\sigma}) \partial_{(\mu} h_{\nu)\rho} + 2(\partial_{\rho h}) \partial_{(\mu} h_{\nu)}^\rho - (\partial_\mu h) \partial_\nu h \\ & + \kappa(2h_{\mu\nu}T + 2hT_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}hT - 4h_{\rho(\mu}T_{\nu)}^\rho) \rangle. \end{aligned} \quad (6.0.13)$$

Contraindo essa expressão e mais uma vez fazendo uso de 6.0.7 e das equações de campo em primeira ordem, temos

$$\langle R^{(2)} \rangle = -\frac{1}{2}\kappa \langle h^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma} \rangle. \quad (6.0.14)$$

Combinando as expressões 6.0.9, 6.0.12 e 6.0.14 e reescrevendo o resultado em termos do traço reverso $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$, encontramos que o tensor energia-momento 6.0.4 do campo gravitacional é

$$\begin{aligned} t_{\mu\nu} = & \frac{1}{4}\kappa^{-1} \langle (\partial_\mu \bar{h}_{\rho\sigma}) \partial_\nu \bar{h}^{\rho\sigma} - 2(\partial_\sigma \bar{h}^{\rho\sigma}) \partial_{(\mu} \bar{h}_{\nu)\rho} - \frac{1}{2}(\partial_\mu \bar{h}) \partial_\nu \bar{h} \\ & - \kappa(4\bar{h}_{\rho(\mu}T_{\nu)}^\rho + \eta_{\mu\nu}h^{\rho\sigma}T_{\rho\sigma}) \rangle. \end{aligned} \quad (6.0.15)$$

Através do uso desse tensor é possível determinar a energia carregada pelas ondas gravitacionais mas esse procedimento não faz parte desse trabalho.

7 DETECÇÃO DE ONDAS GRAVITACIONAIS.

Existe um grande interesse em observar diretamente as ondas gravitacionais, a fim de testar a teoria da relatividade geral de Einstein e observar alguns dos objetos mais exóticos da natureza, como os buracos negros. O grande impacto do estudo das ondas gravitacionais vem principalmente do fato delas não se dispersarem devido a interação com a matéria como acontece com as ondas eletromagnéticas. Isso significa que, mesmo elas sendo extremamente difíceis de detectar, essas ondas nos ajudam a estudar regiões do espaço que são invisíveis para nós.

Recentemente Rainer Weiss, Kip Thorne e Barry Barish foram agraciados com o prêmio Nobel de Física de 2017 pelas contribuições na construção do detector LIGO, que pela primeira vez detectou ondas gravitacionais de forma direta, sendo a primeira em 2015 [9]. Essa primeira onda detectada foi proveniente da colisão de dois buracos negros de aproximadamente 30 massas solares cada.

Pouco mais de um ano depois da primeira detecção, o observatório LIGO já anunciava a terceira detecção [10], todas vindas da colisão de buracos negros. Uma dessas detecções também foi registrada pelo observatório VIRGO, na Itália.

7.1 LIGO: LASER INTERFEROMETER GRAVITATIONAL-WAVE OBSERVATORY

O LIGO (Observatório de Ondas Gravitacionais por Interferômetro Laser) [11] é o maior observatório de ondas gravitacionais do mundo e um dos experimentos mais complexos e precisos já feitos. Ele consiste em dois enormes interferômetros a laser localizados a quilômetros de distância um do outro (Washington e Louisiana). A imagem a seguir mostra a visão aérea desses dois interferômetros que trabalham em conjunto. A importância de serem dois experimentos separados por uma grande distância é que se de fato uma onda gravitacional passar por nós, os dois instrumentos devem captar essa passagem. Se houvesse apenas um seria muito difícil distinguir se o dado coletado foi da passagem de uma onda gravitacional ou se foi algum ruído proveniente da própria Terra, como abalos sísmicos e, portanto, seria insuficiente para confirmar a passagem de uma onda.

Figura 3 – Observatório LIGO.[11]

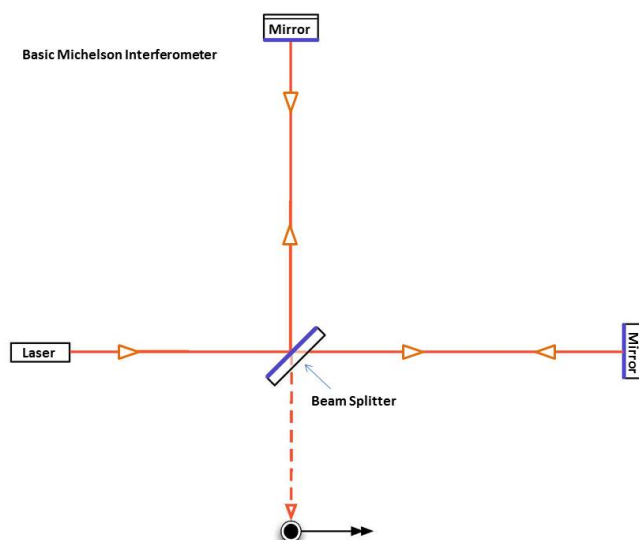


Vale notar que o LIGO não é um observatório como qualquer outro observatório astronômico tradicional. Diferentemente dos telescópios ópticos ou radioelétricos, o LIGO não vê radiação eletromagnética (por exemplo, luz visível, ondas de rádio, microondas). E isso nem é necessário já que

as ondas gravitacionais são fenômenos completamente diferentes e que não fazem parte do espectro eletromagnético.

Para entendermos como o LIGO funciona, veja a imagem abaixo. Apesar de muito mais sofisticados, os interferômetros da LIGO são fundamentalmente baseados no interferômetro de Michelson, inventado na década de 1880.

Figura 4 – Interferômetro de Michelson.[11]



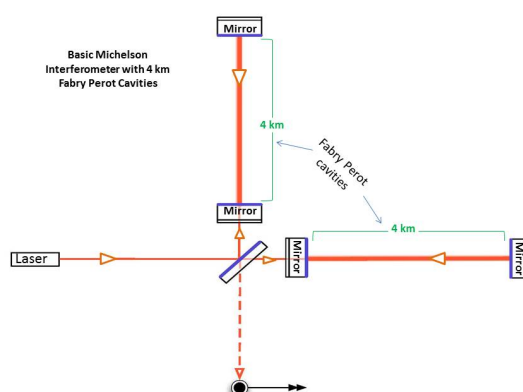
As semelhanças existentes entre esse experimento e o LIGO são: ambos são em forma de L; ambos têm espelhos nas extremidades dos braços para refletir a luz, a fim de combinar feixes de luz e criar um padrão de interferência; ambos medem padrões e intensidade de um feixe de luz resultante depois que dois feixes foram sobrepostos ou forçados a 'interferir'. Entretanto, as semelhanças acabam aí.

A primeira grande diferença entre esse dois experimentos é que o LIGO é extremamente maior, com braços de 4 km de comprimento (cerca de 360 vezes maior que do que o usado no experimento de Michelson-Morley que tinha braços de 11 m de comprimento). O tamanho é um detalhe particularmente importante quando se trata de detecção de ondas gravitacionais. Quanto mais longo for o braço do experimento, maior a distância que o laser vai percorrer e, portanto, mais sensível se torna o instrumento.

Vimos anteriormente que quando uma onda gravitacional atinge um anel de partículas-testes ela causa uma deformação nesse anel, comprimindo-o e esticando-o. A mesma coisa acontece com os braços do LIGO. Quando seus braços esticam e comprimem, a luz laser gasta um tempo diferente para percorrer todo o braço do LIGO e voltar, mudando assim o padrão de interferência medido no detector. A questão é que mesmo os braços do LIGO tendo 4 km de comprimento, essa distância ainda é muito pequena para conseguirmos detectar uma variação no comprimento dos braços 1.000 vezes menor que um próton. Por isso esse experimento precisou de ajustes importantes, tornando-o muito mais sofisticado do que usado por Michelson. Um desses ajustes foi a adição das chamadas **cavidades Fabry Perot**. A figura abaixo mostra como o experimento original fica com essas modificações.

Essa cavidade é criada adicionando espelhos perto do divisor de feixe que refletem continuamente partes de cada feixe de laser para frente e para trás nos braços cerca de 280 vezes antes de serem

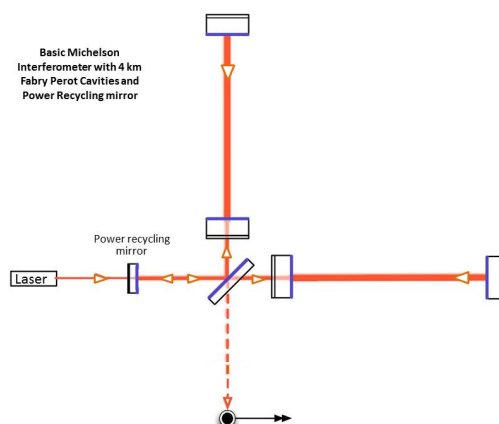
Figura 5 – Cavidades Fabry Perot.[11]



mesclados novamente. Dessa maneira, o LIGO tem efetivamente 1120 km de comprimento. Essa estratégia torna o experimento muito mais sensível, capaz de detectar essa variação milhares de vezes menor que um próton, sem de fato ocupar um espaço físico maior do que os 4 km.

Outra questão importante com relação à sensibilidade do LIGO está na energia do laser. Para que o experimento tenha sensibilidade máxima, o laser precisa ser emitido com 750 quilowatts, mas o laser do LIGO só chega a 200 Watts. Para resolver esse problema foram adicionados mais espelhos, como mostrado na figura a seguir.

Figura 6 – Power Recycling Mirror.[11]



Esses Power Recycling Mirror ou espelhos de reciclagem de energia são colocados entre a fonte de laser e o divisor de feixe. Dessa maneira, após o feixe de luz passar pelo espelho divisor e percorrer os braços do LIGO, quase toda a luz refletida segue de volta em direção aos espelhos de reciclagem (ao invés de ir para o detector). Com isso, os fótons se somam aos que estão entrando, e mais fótons significa mais potência, resolvendo o problema de energia inicial.

Por fim, outras medidas necessárias para garantir a eficiência do LIGO são os isolamentos. Os componentes ópticos do LIGO são colocados no vácuo para garantir que não haja mudanças de temperaturas ao longo dos braços do experimento, impedindo consequentemente a formação de ventos no interior do mesmo. Além disso há medidas de isolamento sísmico constituído por pequenos ímãs presos na parte traseira de cada espelho. Se os espelhos se moverem demais, um eletroímã cria um

campo magnético de contrapeso para empurrar ou puxar os ímãs e o espelho de volta à posição. Esse método também é importante para resolver o problema da força das marés do Sol e da Lua, que puxam os espelhos em direção a eles assim como fazem com o oceano.

7.2 VIRGO INTERFEROMETER

O interferômetro VIRGO (cujo nome é uma homenagem ao Aglomerado de Virgem) também é baseado no experimento de Michelson e funciona exatamente como o LIGO. Desde 2007, Virgo e LIGO concordaram em compartilhar e analisar conjuntamente os dados registrados pelos seus detectores e publicar em conjunto seus resultados.

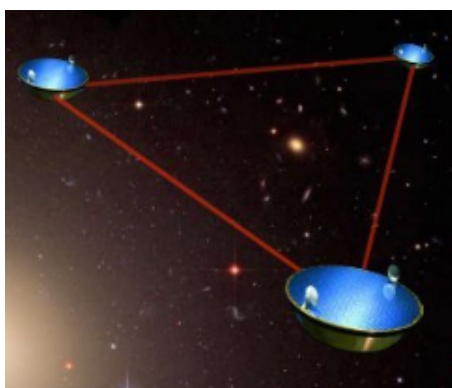
7.3 LISA: LASER INTERFEROMETER SPACE ANTENNA

O LISA (Antena Espacial para Interferômetro a Laser) é um experimento desenvolvido pela NASA com a colaboração da Agência Espacial Européia (ESA) com o mesmo objetivo do LIGO e VIRGO, mas dessa vez o experimento não estaria na superfície da Terra, mas em órbita. Essa mudança de localização traz enormes vantagens, já que no espaço o experimento pode ser realizado em uma escala extremamente maior do que na Terra, aumentando significativamente a precisão dos dados coletados [12].

De acordo com a NASA "O LISA consiste em três naves espaciais, separadas por milhões de quilômetros e seguindo dezenas de milhões de quilômetros, mais de cem vezes a distância da Lua, atrás da Terra, enquanto orbitamos o Sol. Essas três naves retransmitem raios laser entre as diferentes naves espaciais e os sinais são combinados para procurar assinaturas de ondas gravitacionais".

A figura a seguir ilustra o experimento que está programado para ser lançado no início da década de 2030.

Figura 7 – LISA.[12]

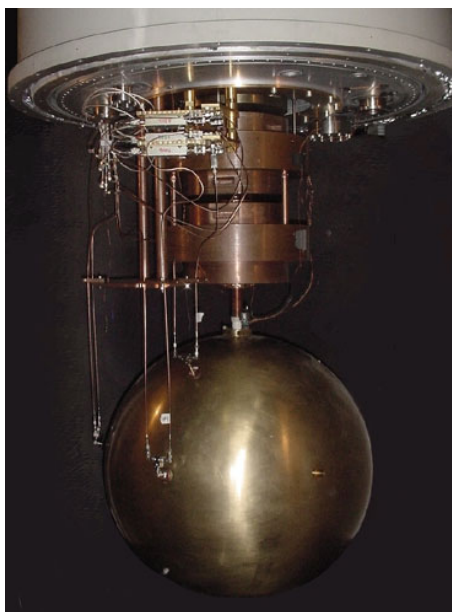


7.4 DETECTOR MARIO SCHENBERG

O Detector Mario Schenberg, como já citado anteriormente, é fruto de uma parceria entre o INPE e a USP e tem como principal objetivo a busca por ondas gravitacionais.

Este é um detector esférico que consiste de uma massa de ressonância (esfera de cobre-alumínio de mais de uma tonelada) e um conjunto de transdutores paramétricos de maneira que seja possível monitorar os modos normais de vibração, ou seja, o sistema esfera-transdutor funciona como um sistema massa-mola. Além disso a esfera é resfriada até muito próximo do zero absoluto, garantindo que a agitação atômica por causa da temperatura não interfira na observação. A imagem abaixo mostra como esse detector é diferente dos demais.

Figura 8 – Detector Mario Schenberg.



8 CONCLUSÃO

Este trabalho trouxe uma visão geral do estudo de ondas gravitacionais, passando pelos estágios de formação, propagação e detecção dessas ondas. Vimos que as ondas gravitacionais exigem grande sensibilidade para serem detectadas mas que felizmente detectores como o LIGO já atingiram precisão suficiente e estão evoluindo para detectar ondas ainda mais fracas. Com isso é possível concluirmos que o estudo e detecção das ondas gravitacionais traz, então, grandes perspectivas para o futuro, tanto na física quanto em outras áreas, como por exemplo na astronomia e na cosmologia. No artigo "Primordial Black Holes - Perspectives in Gravitational Wave Astronomy "[13] os autores citam que a detecção direta das ondas gravitacionais possibilita um método completamente novo no estudo de buracos negros primordiais. Eles ressaltam que essa é a primeira vez que somos capazes de fazer uma observação direta desse tipo de objeto.

Além disso, Isac Artzi cita em seu artigo [14] que esse grande desenvolvimento na nossa capacidade de detectar e avaliar fenômenos como esse nos levam a fazer novos questionamentos. Podemos ressaltar também que a construção de observatórios como o LIGO representam um grande avanço tecnológico, contribuindo para futuros observatórios espaciais como o LISA.

E por fim, alguns artigos citam sobre a possibilidade de estudar a geração de ondas eletromagnéticas devido à radiação gravitacional e alguns estudos sugerem que essas ondas podem nos fornecer informações sobre o universo logo após o Big Bang, algo que não podíamos fazer através de radiação eletromagnética. Através das ondas gravitacionais os cientistas são capazes de enxergar regiões do espaço que antes eram invisíveis para nós e esse estudo traz, principalmente, grandes perspectivas no estudo de buracos negros.

Conclui-se, portanto, que o estudo das ondas gravitacionais levam à grandes questionamentos e desenvolvimentos em diversas áreas da Ciência e nos dá condições de compreendermos eventos astrofísicos pouco conhecidos além de podermos conhecer mais sobre a própria evolução do universo.

REFERÊNCIAS

- [1] TAYLOR JR, J.H. **Binary Pulsars and Relativistic Gravity**. Nobel Lecture, 1993.
- [2] GEOGRAPHIC.N. Ondas gravitacionais: o que são, de onde vêm e o que têm de importante? **National Geographic**, 2017. Disponível em: <<https://www.nationalgeographicbrasil.com/espaco/2017/10/ondas-gravitacionais-o-que-sao-de-onde-vem-e-o-que-tem-de-importante>>
- [3] HARVARD, G. **BICEP 2**, 2019 . Disponível em: <<https://www.cfa.harvard.edu/CMB/bicep2/science.html>>
- [4] CHIANG, H, et all. Measurement of CMB Polarization Power Spectra from Two Years of BICEP Data C. **Astrophys Journal**, v.3, 2010.
- [5] MARTINS, M.R. Ondas Gravitacionais – Cientistas do BICEP-2 reconhecem que são precisas mais observações. **ASTROPT**, 2014. Disponível em: <<http://www.astropt.org/2014/06/22/ondas-gravitacionais-cientistas-do-bicep-2-reconhecem-que-sao-precisas-mais-observacoes/>>
- [6] NOGUEIRA, S. Detector brasileiro entra na corrida por onda gravitacional. **Folha de São Paulo**, 2004 Disponível em: <<https://www1.folha.uol.com.br/fsp/ciencia/fe2804200401.htm>>
- [7] DIAS, H. Doação de detector de ondas gravitacionais paralisa projeto brasileiro. **Jornal da Usp**, 2016. Disponível em: <<https://jornal.usp.br/universidade/doacao-de-detector-de-ondas-gravitacionais-paralisa-projeto-brasileiro/>>
- [8] ABBOTT, B.P; ABRAHAN, S; et all. Binary Black Hole Population Properties Inferred from the First and Second Observing Runs of Advanced LIGO and Advanced Virgo. **The Astrophysical Journal Letters**, v.882, 2019.
- [9] WEISS, Rainer. Nobel Lecture: LIGO and the discovery of gravitational waves I. **REVIEWS OF MODERN PHYSICS**, 2018.
- [10] GALILEU, R. Ondas gravitacionais são detectadas pela terceira vez. **Revista Galileu**, 2017. Disponível em: <<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2017/06/ondas-gravitacionais-sao-detectadas-pela-terceira-vez.html>>
- [11] CALTECH. LIGO: Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory. **LIGO**, 2019. Disponível em: <<https://www.ligo.caltech.edu/page/ligos-ifo>>
- [12] Nasa. LISA: Laser Interferometer Space Antenna. **LISA**, 2019. Disponível em: <<https://www.lisa.nasa.gov/>>
- [13] SASAKI, M; SUYAMA, T. Primordial Black Holes: Perspectives in Gravitational Wave Astronomy. **astro-ph**, 2018.
- [14] ARTZI, I. **Perspectives on Gravitational Waves**. Grand Canyon University, 2016.
- [15] HOBSON, H.; LASENBY, G. **General Relativity: An introduction for physicists**. Cambridge, 2003.
- [16] D'INVERNO, R. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, 1992.
- [17] MAGGIORE, M. **Gravitational Waves**. Université de Genève, 2008.

[18] CARROLL, Sean M. **Spacetime and Geometry**. Cambridge University Press, 2019.

APÊNDICE A – EQUAÇÕES DE CAMPO LINEARIZADAS.

A.1 LINEARIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CAMPO E TRANSFORMAÇÕES DE GAUGE.

A partir de uma transformação geral de coordenadas podemos encontrar uma expressão de como a métrica e $h_{\mu\nu}$ se transformam, sendo esta dada da seguinte forma

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu}\xi^{\mu}, \quad (\text{A.1.1})$$

onde o inverso é dado por

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \delta_{\nu}^{\mu} - \partial_{\nu}\xi^{\mu}. \quad (\text{A.1.2})$$

Com isso temos:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma} = (\delta_{\mu}^{\rho} - \partial_{\mu}\xi^{\rho})(\delta_{\nu}^{\sigma} - \partial_{\nu}\xi^{\sigma})(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = \\ &= (\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\nu}^{\sigma} - \delta_{\mu}^{\rho}\partial_{\nu}\xi^{\sigma} - \delta_{\nu}^{\sigma}\partial_{\mu}\xi^{\rho} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\xi^{\rho}\xi^{\sigma})(\eta_{\rho\sigma} + h_{\rho\sigma}) = \\ &= \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}. \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Consequentemente, como $g'_{\mu\nu}$ também é da forma da equação (2.1.1), podemos escrever uma nova função para a perturbação da métrica em relação a antiga da seguinte forma

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\xi_{\nu} - \partial_{\nu}\xi_{\mu}. \quad (\text{A.1.4})$$

Posteriormente, para escrevermos as equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -kT_{\mu\nu} \quad (\text{A.1.5})$$

na forma linearizada devemos, primeiramente, encontrar uma expressão para a conexão afim em função da perturbação $h_{\mu\nu}$. Sabendo que a conexão é dada por

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\rho}(\partial_{\nu}g_{\lambda\rho} + \partial_{\lambda}g_{\nu\rho} - \partial_{\rho}g_{\mu\lambda}),$$

temos que, por simples substituições,

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\sigma\rho}(\partial_{\nu}h_{\rho\mu} + \partial_{\mu}h_{\rho\nu} - \partial_{\rho}h_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}(\partial_{\nu}h_{\mu}^{\sigma} + \partial_{\mu}h_{\nu}^{\sigma} - \partial^{\sigma}h_{\mu\nu}), \quad (\text{A.1.6})$$

onde definimos que $\partial^{\sigma} \equiv \eta^{\sigma\rho}\partial_{\rho}$. Agora, basta substituir essa expressão diretamente na expressão para o tensor de Riemann,

$$R_{\mu\nu\rho}^{\sigma} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} - \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\tau}\Gamma_{\tau\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\nu}^{\tau}\Gamma_{\tau\rho}^{\sigma},$$

de onde obtemos

$$\begin{aligned} R^\sigma_{\mu\nu\rho} &= \frac{1}{2}\partial_\nu(\partial_\rho h^\sigma_\mu + \partial_\mu h^{\sigma\rho} - \partial^\sigma h_{\mu\rho}) - \frac{1}{2}\partial_\rho(\partial_\nu h^\sigma_\mu + \partial_\mu h^\sigma_\nu - \partial^\sigma h_{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\mu h^\sigma_\rho + \partial_\rho\partial^\sigma h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial^\sigma h_{\mu\rho} - \partial_\rho\partial_\mu h^\sigma_\nu). \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

Em seguida, o tensor de Ricci pode ser obtido tomando o traço do tensor de Riemann, onde encontramos

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\mu h + \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\rho h^\rho_\mu - \partial_\rho\partial_\mu h^\rho_\nu), \quad (\text{A.1.8})$$

onde $h \equiv h^\sigma_\sigma$ é o traço e $\square \equiv \partial_\sigma\partial^\sigma$ é o operador D'Alambertiano. Então, tomando o traço novamente encontramos o escalar de Ricci dado por

$$R = R^\mu_\mu = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = \square h - \partial_\rho\partial_\sigma h^\rho_\sigma. \quad (\text{A.1.9})$$

Por fim, inserindo esses resultados na equação de Einstein temos

$$\partial_\nu\partial_\mu + \square h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\rho h^\rho_\mu - \partial_\rho\partial_\mu h^\rho_\nu - \eta_{\mu\nu}(\square h - \partial_\rho\partial_\sigma h^{\sigma\rho}) = -2kT_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1.10})$$

É possível simplificar essa equação tomando o traço reverso de $h_{\mu\nu}$ que é dado por

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (\text{A.1.11})$$

Contraindo os índices encontramos que: $\bar{h} = -h$, $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$. Substituindo essas expressões na equação de Einstein, temos

$$\square\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\partial_\sigma\bar{h}^{\rho\sigma} - \partial_\nu\partial_\rho\bar{h}^\rho_\mu - \partial_\mu\partial_\rho\bar{h}^\rho_\nu = -2kT_{\mu\nu}. \quad (\text{A.1.12})$$

Podemos simplificar essa equação ainda mais utilizando uma transformação de gauge de tipo

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \partial_\mu\xi_\nu - \partial_\nu\xi_\mu. \quad (\text{A.1.13})$$

Portanto, as componentes do traço reverso se transformam da seguinte maneira:

$$\bar{h}'^{\mu\rho} = \bar{h}^{\mu\rho} - \partial^\mu\xi^\rho - \partial^\rho\xi^\mu + \eta^{\mu\rho}\partial_\sigma\xi^\sigma, \quad (\text{A.1.14})$$

e com isso temos que

$$\partial_\rho\bar{h}'^{\mu\rho} = \partial_\rho\bar{h}^{\mu\rho} - \square\xi^\mu. \quad (\text{A.1.15})$$

Entretanto, se escolhermos as funções $\xi^\mu(x)$ que satisfazem

$$\square\xi^\mu = \partial_\rho\bar{h}^{\mu\rho}, \quad (\text{A.1.16})$$

então nós temos que

$$\partial_\rho \bar{h}'_{\mu\rho} = 0. \quad (\text{A.1.17})$$

A importância desse resultado é que, nesse novo gauge, cada uma das últimas três componentes do lado esquerdo desaparecem. Portanto, as equações de campo se reduzem a

$$\square \bar{h}^{\mu\nu} = -2kT^{\mu\nu}, \quad (\text{A.1.18})$$

que satisfaz a condição de gauge

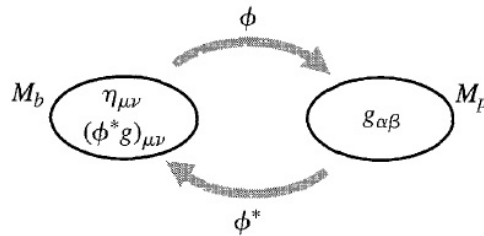
$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.1.19})$$

A.2 DIFEOMORFISMOS.

A teoria de campo linearizada pode ser pensada como aquela que coordena o comportamento dos campos tensoriais na métrica de fundo plana e pode ser descrita em termos de um espaço tempo de fundo M_b , um espaço tempo físico M_p e um difeomorfismo $\phi : M_b \rightarrow M_p$. Como existe um difeomorfismo, podemos dizer que as variedades M_b e M_p são iguais mas, apesar disso, vamos considerar que elas possuem campos tensoriais diferentes. Dessa maneira, em M_b estará definida a métrica $\eta_{\mu\nu}$ do espaço de Minkowski, enquanto em M_p teremos uma métrica $g_{\alpha\beta}$ que respeita as equações de Einsten. Uma outra maneira de enxergarmos isso é que podemos considerar que M_b contém as coordenadas x^μ e M_p as coordenadas y^μ .

O difeomorfismo ϕ nos permite mover tensores de um lado a outro entre os espaços físico e de fundo. Como estamos interessados em construir nossa teoria linearizada no espaço de fundo plano, estaremos interessados, portanto, no pullback $(\phi^* g)_{\mu\nu}$, ou seja, estamos saindo do espaço curvo e indo para o espaço de Minkowski, como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Pullback.[18]



Podemos, portanto, definir a perturbação como a diferença entre a métrica física pulled-back e a métrica plana

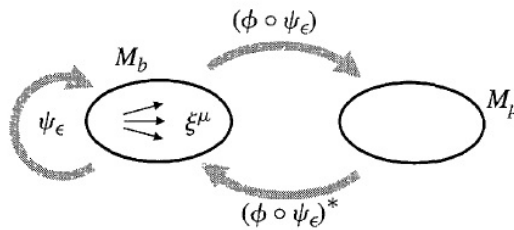
$$h_{\mu\nu} = (\phi^* g)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}. \quad (\text{A.2.1})$$

Através dessa definição não há nada que garanta que $h_{\mu\nu}$ será pequeno, entretanto o campo gravitacional em M_p é fraco e, por isso, para um certo difeomorfismo ϕ nós teremos $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Então, manteremos nossa atenção apenas nos difeomorfismos em que isso é verdade.

Além disso, o fato de que $g_{\alpha\beta}$ respeita as equações de Einstein no espaço-tempo físico implica que $h_{\mu\nu}$ vai obedecer as equações linearizadas no espaço-tempo de fundo porque ϕ , como um difeomorfismo, pode ser utilizado para trazer de volta (pullback) as equações de Einstein. Todo esse processo é exatamente equivalente a fazer as transformações de coordenadas citadas anteriormente, mas essa notação trará mais clareza para o que estamos interessados em estudar.

Considere agora um campo vetorial $\xi^\mu(x)$ no espaço-tempo de fundo. Esse campo vai gerar uma família de difeomorfismos de 1-parâmetro dados por $\psi_\epsilon : M_b \rightarrow M_b$, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Família de difeomorfismos. [18]



Para ϵ suficientemente pequeno, se ϕ é um difeomorfismo que define a perturbação em (A.2.1) for pequeno, então $(\phi \circ \psi_\epsilon)$ também será, apesar da perturbação assumir diferentes valores. Podemos, então, definir uma família de perturbações parametrizadas por ϵ :

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= [(\phi \circ \psi_\epsilon) * g]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ &= [\psi_\epsilon^*(\phi * g)]_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

A equação (A.2.2) pode ser escrita dessa maneira pois um pullback sob uma composição é equivalente a composição dos pullbacks na ordem oposta, já que os pullbacks estão movendo as coisas na direção oposta ao mapa original. Com isso, podemos unir as expressões (A.2.1) e (A.2.2):

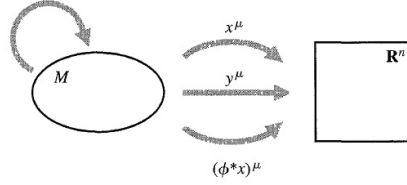
$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= \psi_\epsilon^*(h + \eta)_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ &= \psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) + \psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.3})$$

Nessa equação utilizamos o fato de que o pullback da soma de dois tensores é igual a soma dos pullbacks. Além disso, se considerarmos que ϵ é muito pequeno, o primeiro termo se torna apenas $h_{\mu\nu}$ para pequenas ordens, enquanto os outros dois termos nos dão a derivada de Lie.

Para entendermos essa passagem, vamos relembrar que estamos considerando dois campos iguais e ϕ pode ser utilizado para mover coisas pra frente ou para trás (pushforward e pullback). Se ϕ é invertível, então isso define um difeomorfismo entre os campos, como já havimos considerado. Com isso podemos explicar a relação entre difeomorfismos e mudanças de coordenadas.

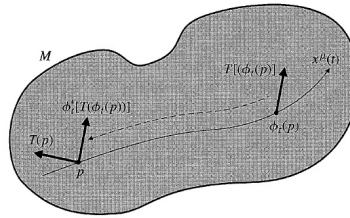
Considere um campo n -dimensional M com funções coordenadas $x^\mu : M \rightarrow \mathbf{R}^n$. Para fazermos uma mudança de coordenadas podemos simplesmente introduzir novas funções $y^\mu : M \rightarrow \mathbf{R}^n$, ou seja, manter o campo fixo e mudar apenas a maneira de mapeá-lo.

Figura 11 – Mudança de coordenadas.[18]



Entretanto, também podemos introduzir um difeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$ no qual as coordenadas serão apenas os pullbacks $(\phi * x)^\mu : M \rightarrow \mathbf{R}^n$, ou seja, estamos movendo pontos no campo e depois avaliando como ficam as coordenadas nesses novos pontos, como mostram as Figura 11 e Figura 12.

Figura 12 – Movendo pontos no campo: pullbacks.[18]



Portanto, a equação (A.2.3) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} &= \psi_\epsilon^*(h_{\mu\nu}) + \epsilon \left(\frac{\psi_\epsilon^*(\eta_{\mu\nu}) - \eta_{\mu\nu}}{\epsilon} \right) \\ &= h_{\mu\nu} + \epsilon \mathcal{L}_\xi \eta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (\text{A.2.4})$$

onde utilizamos o fato de que a derivada de Lie da métrica ao longo de um campo vetorial ξ_μ é $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2\nabla_\mu \xi_\nu$. Como no nosso contexto a métrica de fundo é plana, as derivadas covariantes se tornam apenas derivadas parciais, o que nos dá, finalmente

$$h_{\mu\nu}^{(\epsilon)} = h_{\mu\nu} + 2\epsilon \partial_\mu \xi_\nu. \quad (\text{A.2.5})$$

A equação (A.2.5) representa uma transformação de gauge para a teoria linearizada, ou seja, ela mostra como a perturbação da métrica se modifica sob um difeomorfismo infinitesimal ao longo do campo vetorial $\epsilon \xi^\mu$.

Sabemos, portanto, que tipo de perturbação da métrica caracteriza espaços-tempo físicos equivalentes para um dado vetor ξ^μ (aqueles relacionados um ao outro por $2\epsilon \partial_\mu \xi_\nu$). Portanto, a equação (A.2.5) transformará o tensor de Riemman linearizado em

$$\delta R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\rho \partial_\mu \partial_\nu \xi_\sigma + \partial_\rho \partial_\nu \partial_\sigma \xi_\mu + \partial_\sigma \partial_\mu \partial_\nu \xi_\rho +$$

$$+\partial_\sigma\partial_\mu\partial_\rho\xi_\nu - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\mu\xi_\rho - \partial_\sigma\partial_\nu\partial_\rho\xi_\mu - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\nu\xi_\sigma - \partial_\rho\partial_\mu\partial_\sigma\xi_\nu) = 0 \quad (\text{A.2.6})$$

Apesar dos cálculos abstratos para encontrarmos uma transformação de gauge para a métrica, vemos através da equação (A.2.6) que estávamos procurando uma maneira de manter a curvatura inalterada e, conseqüentemente, o espaço-tempo físico. Portanto, a invariância de gauge pode ser interpretada como um caminho mais direto para uma transformação de coordenadas infinitesimais, enquanto que o difeomorfismo ψ_ϵ^* seria como a mudança de coordenada de x^μ para $x^\mu - \epsilon\xi^\mu$.

A.3 GRAUS DE LIBERDADE.

Contraindo (2.2.3) com δ^{ij} para tirar o traço de h_{ij} , temos

$$\delta^{ij}h_{ij} = h_{11} + h_{22} + h_{33}$$

$$\delta^{ij}(-2\Psi)\delta_{ij} = -2\Psi(\delta^{ij}\delta_{ij}) = -2\Psi(\delta^{11}\delta_{11} + \delta^{22}\delta_{22} + \delta^{33}\delta_{33})$$

$$\delta^{ij}h_{ij} = -2\Psi(1 + 1 + 1) = -6\Psi \quad (\text{A.3.1})$$

Agora, para escrevermos a equação geodésica vamos adotar a seguinte notação:

$$\partial_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu(\eta_{\alpha\beta}) = \partial_\mu h_{\alpha\beta} \quad (\text{A.3.2})$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{0j}^i &= \frac{1}{2}\eta^{\mu i}(\partial_0 h_{j\mu} + \partial_j h_{0\mu} - \partial_\mu h_{0j}) = \\ &= \frac{1}{2}\delta^{ki}(\partial_0 h_{ji} + \partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}) \\ &= \frac{1}{2}\partial_0 h_{ij} + \frac{1}{2}(\partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}), \end{aligned} \quad (\text{A.3.3})$$

de onde tiramos que

$$\frac{1}{2}(\partial_j h_{0i} - \partial_i h_{0j}) = \partial_{[jw_i]}. \quad (\text{A.3.4})$$

As demais notações presentes no texto seguem o mesmo raciocínio.

APÊNDICE B – POLARIZAÇÃO DAS ONDAS GRAVITACIONAIS.

Todas as componentes $C^{\mu\nu}$ podem ser expressas em termos de seis quantidades: C^{00} , C^{01} , C^{02} , C^{11} , C^{12} , C^{22}

$$[C^{\mu\nu}] = \begin{pmatrix} C^{00} & C^{01} & C^{02} & C^{00} \\ C^{01} & C^{11} & C^{12} & C^{01} \\ C^{02} & C^{12} & C^{22} & C^{02} \\ C^{00} & C^{01} & C^{02} & C^{00} \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.1})$$

Podemos simplificar ainda mais utilizando uma transformação de gauge. Para preservar a condição de Lorentz temos que garantir que $\square\xi^\mu = 0$. Uma transformação que satisfaz essa condição é dada por

$$\xi^\mu = \epsilon e^{(ik_\rho x^\rho)}, \quad (\text{B.0.2})$$

onde ϵ^μ são constantes. Com isso encontramos

$$C'^{\mu\nu} = C^{\mu\nu} - i\epsilon^\mu k^\nu - i\epsilon^\nu k^\mu + i\eta^{\mu\nu}\epsilon^\rho k_\rho. \quad (\text{B.0.3})$$

Disso obtemos que

$$C'^{00} = C'^{01} = C'^{02} = 0$$

$$C'^{11} = -C'^{22}$$

Chamando $A^{11} \equiv h_+$ e $A^{12} \equiv h_\times$, temos finalmente

$$C_{TT}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.0.4})$$

E por fim, lembrando que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^\mu = \frac{1}{2} S^\sigma \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\mu\sigma}^{TT} \quad (\text{B.0.5})$$

e que

$$h_{\mu\nu}^{TT} = C_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (\text{B.0.6})$$

temos então, por substituição direta

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_{11} e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (\text{B.0.7})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}). \quad (\text{B.0.8})$$

Da mesma maneira, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_+ e^{ik_\sigma x^\sigma}). \quad (\text{B.0.9})$$

Seguindo o mesmo raciocínio para $h_+ = 0$, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (C_{12} e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (\text{B.0.10})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^1 = \frac{1}{2} S^1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma}) \quad (\text{B.0.11})$$

e

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} S^2 = \frac{1}{2} S^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (h_\times e^{ik_\sigma x^\sigma}). \quad (\text{B.0.12})$$

APÊNDICE C – TIPOS DE FONTES.

C.1 APROXIMAÇÃO DE FONTE COMPACTA.

As componentes do campo gravitacional são dadas por

$$\bar{h}^{00}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4 r} \int T^{00} d^3 \vec{y}; \quad (\text{C.1.1})$$

$$\bar{h}^{0i}(ct, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T^{0i} d^3 \vec{y}; \quad (\text{C.1.2})$$

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T^{ij} d^3 \vec{y}; \quad (\text{C.1.3})$$

Como $P^i = 0$, temos que a segunda equação é nula. A fórmula de quadrupolo será dada por:

$$\bar{h}^{ij}(ct, \vec{x}) = -\frac{4G}{c^4 r} \left(\frac{1}{2C^2} \frac{d^2}{dt'^2} \int T^{00} y^i y^j d^3 \vec{y} \right)_r \quad (\text{C.1.4})$$

$$= -\frac{2G}{c^6} \left(\frac{d^2}{dt'^2} I^{ij}(ct') \right)_r \quad (\text{C.1.5})$$

onde

$$I^{ij}(ct') = \int T^{00} y^i y^j d^3 \vec{y} \quad (\text{C.1.6})$$

C.2 FONTES ESTACIONÁRIAS.

A solução correspondente para $\bar{h}^{\mu\nu}(\vec{x})$ é:

$$\bar{h}^{00} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{00}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{\rho c^2}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{C.2.1})$$

$$= \frac{4}{c^2} \left[-G \int \frac{\rho}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \right] = \frac{4\Phi}{c^2}$$

onde

$$\Phi = -G \int \frac{\rho}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3 \vec{y} \quad (\text{C.2.2})$$

e

$$\bar{h}^{0i} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{0i}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{c\rho u^i}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} \quad (\text{C.2.3})$$

$$= \frac{1}{c} \left[-\frac{4G}{c^2} \int \frac{\rho u^i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] d^3\vec{y} = \frac{1}{c} A^i$$

onde

$$A^i = -\frac{4G}{c^2} \int \frac{\rho u^i}{|\vec{x} - \vec{y}|} \quad (\text{C.2.4})$$

E por fim,

$$\bar{h}^{ij} = -\frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{ij}}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3\vec{y} = 0 \quad (\text{C.2.5})$$