



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

**ROLL WAVES EVOLUINDO EM CANAIS DE
FORTE DECLIVIDADE - UMA ABORDAGEM
MATEMÁTICA COM APROXIMAÇÃO NUMÉRICA**

GERALDO DE FREITAS MACIEL

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do Título de Livre-Docente.

**Ilha Solteira – SP -
novembro - 2001**

1210001273



**ROLL WAVES EVOLUINDO EM CANAIS DE
FORTE DECLIVIDADE - UMA ABORDAGEM
MATEMÁTICA COM APROXIMAÇÃO NUMÉRICA**

Doc. 071/2002 - NPO 33

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCN. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE TOMBO
06.05.02	30.05.02
RECEBIDA POR	TOMBO
<i>Alza</i>	<i>Ti. 1273</i>
AQUISIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
<i>Ilha Aut. 10,00</i>	<i>M152r</i>

GERALDO DE FREITAS MACIEL

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do Título de Livre-Docente.



Ilha Solteira – SP –

novembro - 2001

Co
sy 204368
sy 55594

10502068

AGRADECIMENTOS

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil – DEC, da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – FEIS/UNESP, em especial aos colegas da Hidráulica e Saneamento, pelo incentivo ao transcorrer do trabalho e pela confiança e amizade demonstradas.

Aos discentes de Iniciação Científica e Mestrado que com entusiasmo, dedicação e determinação reavivaram, de certa maneira, o meu entusiasmo durante a realização deste trabalho.

A Fapesp, pelos financiamentos concedidos, seja em Auxílios à Pesquisa, seja em Bolsas. Ao CNPq, pelas bolsas de IC concedidas.

E por estar este trabalho correlacionado, de alguma forma, a "Riscos e Catástrofes no Meio Ambiente", dedico-o, a todos aqueles que sofreram consequências, diretas ou indiretas desses acidentes. As atividades deste pesquisador têm estado em consonância com recomendações da ONU – Organização das Nações Unidas em prever e controlar acidentes na Natureza. (Resolução 42/169 de 11 de dezembro de 1987).

Aos membros desta Banca Examinadora.

À minha esposa Mônica Pinto Barbosa,
às minhas filhas Isadora e Stéphanie,
dedico este trabalho.

AGRADECIMENTOS

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil – DEC, da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/UNESP, em especial aos colegas da Hidráulica e Saneamento, pelo incentivo no transcorrer do trabalho e pela confiança e amizade demonstradas.

Aos discentes de Iniciação Científica e Mestrado que com entusiasmo indagação e determinação reavivavam, de certa maneira, o meu entusiasmo durante a realização deste trabalho.

A Fapesp, pelos financiamentos concedidos, seja em Auxílios à Pesquisa, seja em Bolsas. Ao CNPq, pelas bolsas de IC concedidas.

E por estar este trabalho correlacionado, de alguma forma, a Riscos e Catástrofes no Meio Ambiente, dedico-o, a todos aqueles que sofreram consequências, diretas ou indiretas desses acidentes – As atividades deste pesquisador têm estado em consonância com determinação da ONU – Organização das Nações Unidas em prever e controlar acidentes na Natureza. (Resolução 42/169 de 11 de dezembro de 1987).

Aos membros desta Banca Examinadora.



SUMÁRIO

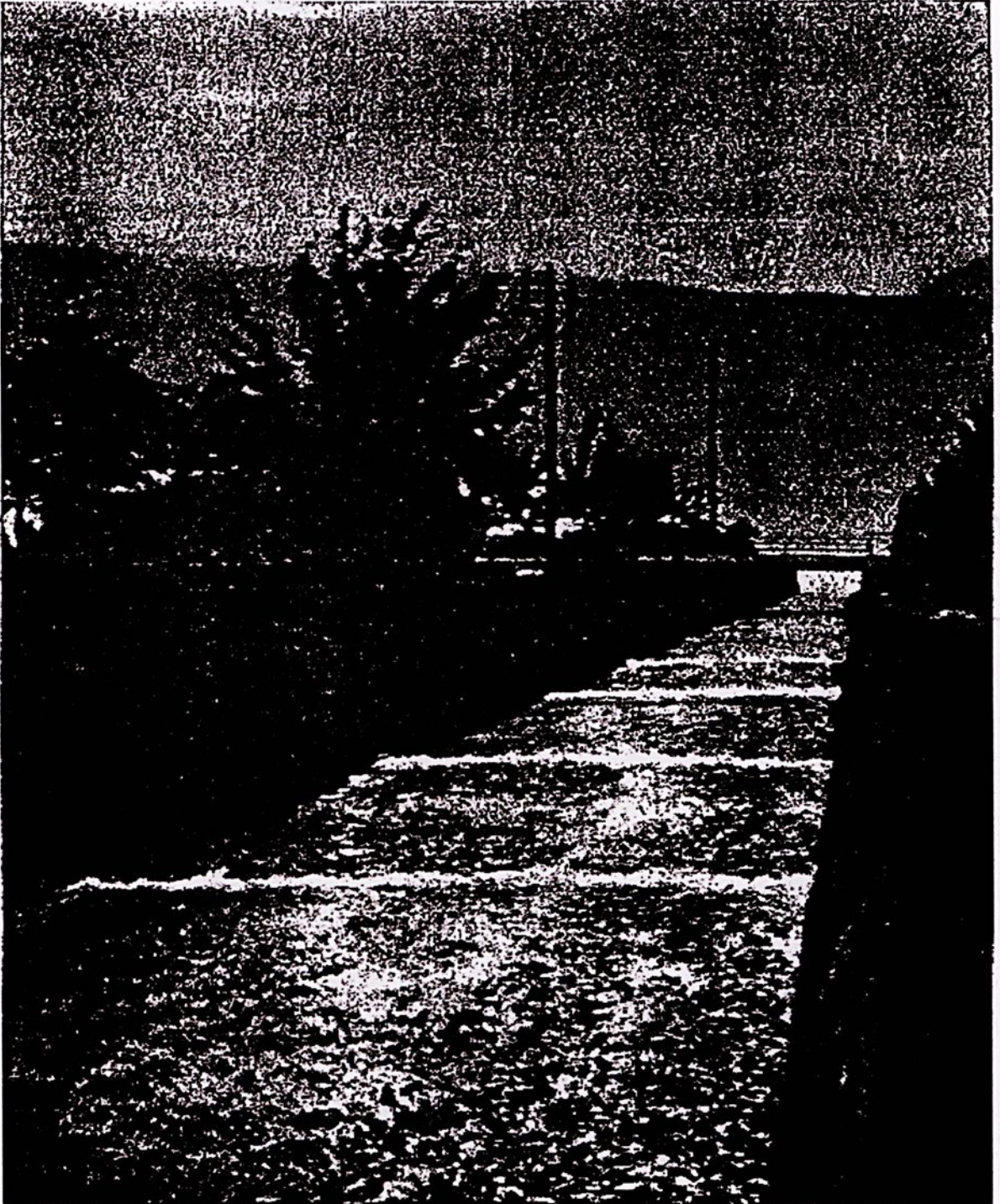
Roll Waves - Uma visão panorâmica -	vi
Resumo	viii
Abstract	x
Preâmbulo	xi
Capítulo I – Roll waves – Considerações Gerais – Contexto Atual e Contribuição do pesquisador	1
Capítulo II - Leis de Conservação Escalares	9
Capítulo III - Elementos da teoria de sistemas hiperbólicos aplicados às equações shallow water	28
Capítulo IV – Análise numérica – esquemas numéricos de Godunov-VanLeer na geração de ondas	42
Capítulo V - Validação do código de cálculo – Estudo de casos – testes com o modelo unidimensional (1-D)	50
Capítulo VI – Revisão sobre funções e sistemas não-lineares	63
Capítulo VII – Roll waves como solução do sistema shallow water invíscido – problema de Dressler	74
Capítulo VIII - Análise de estabilidade linear do sistema shallow water viscoso	82



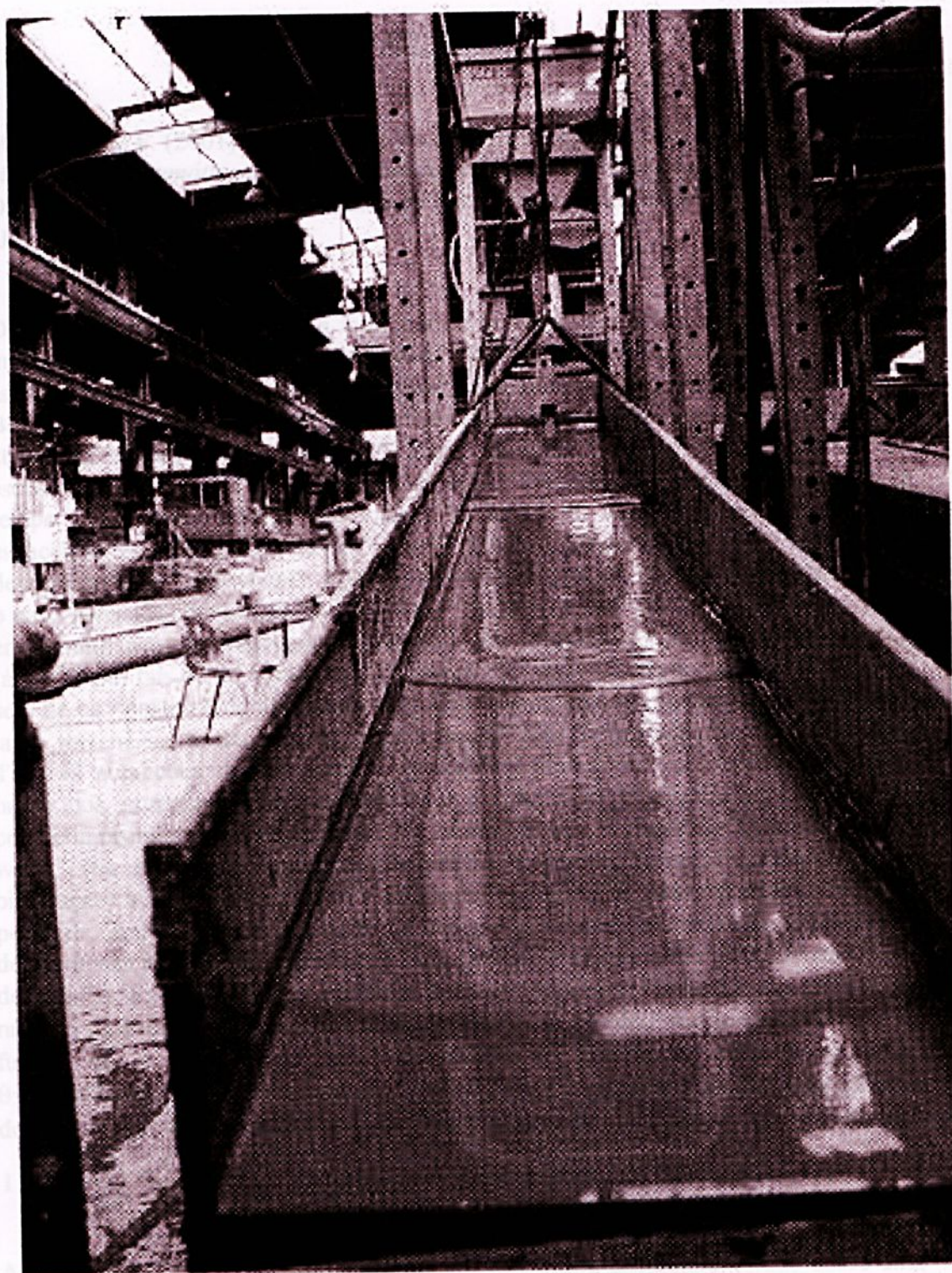
Capítulo IX – Geração e propagação de roll waves em escoamentos de fluidos não-newtonianos - Proposta de modelo reológico de fluido de Bingham com compromissos de engenharia	91
Capítulo X – Condições de existência e estabilidade de roll waves como solução do sistema shallow water viscoso em escoamento de fluido não-newtoniano – fluido de Bingham em laboratório e na natureza	114
Capítulo XI – Estimativa do número de Bingham (B) e da difusão numérica em via de aplicação em problemas de engenharia	129
Capítulo XII - Discussão de resultados teórico-numéricos de “roll waves” com base no código de cálculo	135
Capítulo XIII – Resultados numéricos a partir da equação de “roll waves”	155
Capítulo XIV – Perspectivas Futuras	159
Capítulo XV – Comentários Finais	177
Referências Bibliográficas	180

Roll Waves looking down stream (The Gröbenbach, Merlingen) from Vaughan Cornish (1911)

Roll Waves



Roll Waves looking down stream (The Grönnbach, Merlingem) from Vaughan Cornish (1935)



Roll waves in laboratory mudflows

resultados aplicados nesta Tese. Projetos sob coordenação deste pesquisador têm sido desenvolvidos nesta direção.

RESUMO

Palavras-chave: "roll waves", equações "shallow water", análise numérica, Bifurcações.

MACIEL, G. F. (2001). *Roll waves evoluindo em canais de forte declividade – Uma abordagem matemática com aproximação numérica*. Ilha Solteira, 184p. Tese (Livre-Docência) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

Os escoamentos em superfície livre que se processam em rampas de declividades moderadas podem, sob certas hipóteses clássicas, serem descritos pelas equações "shallow water" ou mais conhecidas pelos engenheiros hidráulicos equações do tipo Barré de Saint Venant. Entretanto para declividades elevadas, associado ao efeito de atrito de parede tipo Chézy, Manning, Strickler, a natureza turbulenta dos escoamentos em canais artificiais com superfície livre poderá desenvolver, ao cabo de tempo finito, instabilidades sob formas de ondas do tipo "hydraulic jumps" bem espaçados ou ainda "travelling waves" (ondas progressivas). Tais ondas são denominadas de "roll waves". Trata-se de ondas longas periódicas, descontínuas para o caso invíscido, contínuas em problemas "shallow water" viscoso, e ainda que raras em caudais naturais, parecem figurar tanto em escoamentos de fluidos newtonianos (água limpa) tais como aquelas que aparecem em vertedouros de barragens, como no seio de escoamentos de fluidos não-newtonianos ou hiperconcentrados, tais como em lavas torrenciais, avalanchas ou "debris flows". São determinadas e discutidas nesta Tese as condições de existência e estabilidade dessas ondas e, através de testes numéricos, pontuamos sobre propriedades e características cinemáticas dessas ondas com compromissos de engenharia. No plano teórico, a partir do sistema "shallow water" (de natureza hiperbólica não-linear), aplicamos ferramentas da teoria da bifurcação, mais especificamente o teorema de Hopf, e no plano numérico, obtemos perfis de "roll waves", seja através de código de cálculo desenvolvido, utilizando-se de esquemas numéricos de Godunov, seja através de rotinas em Matlab. As condições de existência e estabilidade apontam para os seguintes resultados: i) valores do número de Froude $F = \varphi(k, \sigma(F, \varepsilon, \theta), Re, C^*, \alpha)$ onde F é o número de Froude, função de k : número de onda, σ : função de Froude, ε : esbeltez da onda, θ : declividade do canal; Re : número de Reynolds, C^* : parâmetro de Bingham (coesão do fluido) e α o coeficiente de distribuição de velocidade na vertical. ii)

$$1 < U < \frac{3 - 2.C^*}{2.(1 - C^*)} \text{ onde } U \text{ é a velocidade de propagação da "roll wave".}$$

A partir desta Tese deixamos como perspectiva futura imediata o estudo sobre uma eventual analogia entre o problema das "roll waves" e o de Van der Pol. Uma abordagem matemática e numérica nos dão algumas pistas interessantes, ainda que fique como sugestão de todo o trabalho, a necessidade de gerar o fenômeno tratado em laboratório afim de, conjuntamente com a análise numérica, validarmos os

resultados apontados nesta Tese. Projetos sob coordenação deste pesquisador têm sido empreendidos nesta direção.

ABSTRACT

Palavras-chave: "roll waves"; equações "shallow water", análise numérica, fluidos newtonianos; fluidos não-newtonianos, canais íngremes, fluido de Bingham.

– Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

Free surface flows that process in moderate slope channels can, on certain classical hypothesis, be described by shallow water equations or better known for hydraulic engineers, Darcy de Saint Venant's equations. Therefore for high slope, associated to effect of friction of wall type (Chézy, Manning, Strickler, the turbulent nature of flows in artificial channel with free surface can develop, at the end of finite time, instability under wave shapes type hydraulic jumps well spaced or traveling waves (progressive waves). Such waves are called roll waves. They are long periodic waves, discontinuities for the inviscid fluids but continuous in problems for shallow water viscous flows, and even rarely in natural flows, these waves can be generated as in flows of newtonian fluid (clean water) such as those that appear in dam spillway, like non-newtonian or hyperconcentrated fluids, such as in torrent, avalanche or debris flows. In this thesis are determined and discussed the conditions of existence and stability of these waves and through the numeric tests we point up to the properties and kinematics characteristics of these waves with settlement of engineering. From the theoretical point of view and based on shallow water system (nonlinear hyperbolic system), we use tools of bifurcation theory, specifically the theorem of Hopf, and in numeric plan, we obtain profiles of roll waves, as through the code of calculation developed, using the numeric schemes of Godunov-VanLeer, as through the routine in Matlab software. The conditions of existence and stability show in the following results: i) values of Froude number $F = \varphi(k, \alpha(F, \beta), Re, C^*, \alpha)$, where φ is a function of k : wavenumber, α : function of Froude number, steepness of wave and slope of the channel, Re : Reynolds number, C^* : Bingham parameter (fluid cohesion), and α : distribution coefficient of velocity in vertical.

ii) $1 < U < \frac{3-2C^*}{2(1-C^*)}$ where U is the velocity of roll wave propagation.

From this thesis we let as future immediate perspective the study on an eventual analogy between the problem of roll waves and the "Van der Pol". A mathematic and numeric boarding give us some interesting clues, that they are suggesting in all work, such as the necessity of generate the phenomenology tested, in laboratory, together with numeric analysis, we validate the results showed in this thesis. Projects under coordination this researcher has been undertaking in this direction.

Keywords: roll waves; shallow water equations; numerical analysis; newtonian and non-newtonian flows; high gradient channels; Bingham's fluids.

ABSTRACT

MACIEL, G. F. (2001). *On the evolution of roll waves in high gradient channels – A mathematical and numerical approaches*. Ilha Solteira, 184p. Tese (Livre-Docência) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Free surface flows that process in moderate slope channels can, on certain classical hypothesis, be described by shallow water equations or better known for hydraulic engineer, Barré de Saint Venant's equations. Therefore for high slope, associated to effect of friction of wall type Chézy, Manning, Stricker, the turbulent nature of flows in artificial channel with free surface can develop, at the end of finite time, instability under wave shapes type hydraulic jumps well spaced or traveling waves (progressive waves). Such waves are called roll waves. They are long periodic waves, discontinuous for the inviscid fluids but continues in problems for shallow water viscous flows , and even rarely in natural flows, these waves can be generated as in flows of newtonian fluid (clean water) such as those that appear in dam spillway, like non-newtonian or hyperconcentrated fluids, such as in torrent, avalanche or debris flows. In this thesis are determined and discussed the conditions of existence and stability of these waves and through the numeric tests we point up to the properties and kinematics characteristics of these waves with settlement of engineering. From the theoretical point of view and based on shallow water system (nonlinear hyperbolic system), we use tools of bifurcation theory, specifically the theorem of Hopf, and in numeric plan, we obtain profiles of roll waves, as through the code of calculation developed, using the numeric schemes of Godunov-VanLeer, as through the routine in Matlab software. The conditions of existence and stability show to the following results: i) values of Froude number $F = \varphi (k, \sigma(F, \varepsilon, \theta), Re, C^*, \alpha)$, where φ is a function of k : wavenumber, σ : function of Froude number, steepness of wave and slope of the channel; Re : Reynolds number; C^* : Bingham parameter (fluid cohesion); and α : distribution coefficient of velocity in vertical.

ii) $1 < U < \frac{3 - 2.C^*}{2.(1 - C^*)}$ where U is the velocity of roll wave propagation.

From this thesis we let as future immediate perspective the study on an eventual analogy between the problem of roll waves and the Van der Pol's. A mathematic and numeric boarding give us some interesting clues, that they are suggesting in all work, such as the necessity of generate the phenomenology treated, in laboratory, together with numeric analysis, we validate the results showed in this thesis. Projects under coordination this researcher has been undertaking in this direction.

Keywords : roll waves; shallow water equations, numerical analysis, newtonian and non-newtonian flows, high gradient channels, Bingham's fluids.

I - "ROLL WAVES" - CONSIDERAÇÕES GERAIS

CONTEXTO ATUAL E CONTRIBUIÇÃO DO PESQUISADOR

PREÂMBULO

Esta Tese originou, num primeiro momento, de um trabalho de sistematização pontuada das atividades de pesquisa desenvolvida pelo docente-pesquisador a partir de seu ingresso na carreira (07/01/94) no Departamento de Engenharia Civil da Feis/Unesp, seguida de uma análise mais aprofundada, com abordagem matemática, de um estudo de caso que consistiu na adequabilidade e aplicação do grupo de equações "shallow water" no diagnóstico sobre condições de existência, unicidade e controle de ondas tipo "roll waves" em canais - Análise teórico-numérica. Não obstante, outras atividades e linhas de pesquisa correlatas, já implementadas e ou em fase de implantação pelo pesquisador, são citadas ao longo deste trabalho.



I – "ROLL WAVES" – CONSIDERAÇÕES GERAIS

CONTEXTO ATUAL E CONTRIBUIÇÃO DO PESQUISADOR -

Os escoamentos com superfície livre que se processam sobre fortes declividades podem desenvolver instabilidades. O aspecto caótico presente na natureza desses fenômenos instáveis, parece tender, ao cabo de tempo finito, para um escoamento estacionário, mais estável, com o aparecimento de ondas longas e periódicas em forma de ressalto hidráulico móvel ou "bore waves". Tais perturbações são denominadas de "roll waves". Se por um lado essas ondas são raras em escoamentos naturais, elas são freqüentes em canais artificiais e vertedouros de barragens, por exemplo.

Jeffreys em 1925 foi o primeiro a estabelecer um critério sobre a formação de "Roll Waves" a partir de uma análise de estabilidade linear. Deduziu que o escoamento uniforme tornava-se instável se o número de Froude fosse superior a 2. Dressler (1949) tentou delinear o perfil da superfície livre e verificou a formação de "Roll Waves". Ele descreve o fenômeno como sendo uma série de ondas de comprimentos bem definidos, separadas por descontinuidades da superfície livre. Na verdade a análise realizada por Dressler é baseada na formulação de Saint Venant ("shallow water equations") sem os termos de difusão. O 2º membro da equação da quantidade de movimento compreende o efeito da gravidade adicionado ao termo que modela a turbulência (via coeficiente de Chézy). Dressler mostra que se $\tan \theta > 4g/C^2$, (θ : declividade do canal ; C : coeficiente de Chézy), soluções regulares, periódicas e separadas por descontinuidades – picos da superfície livre - aparecem. Esta análise sintética e eminentemente correta, não permite, entretanto, determinar o comprimento destas ondas. Retomando o trabalho clássico de Dressler, rededuzimos as condições de existência de "roll-waves", o que nos permitiu aprofundar nas peculiaridades e



complexidades do fenômeno em questão. Na última década, Needham (1984) e Merkin (1986) incluem no equacionamento os termos de difusão, o que permitiu obter informações sobre o comprimento daquelas perturbações, ainda que o termo difusivo naquele equacionamento não estivesse corretamente adaptado (problema de consistência matemática) ao grupo "shallow water" (tratamento mais correto do termo difusivo é apreciado no escopo desta Tese), isto sem levar em conta uma "certa complexidade" na aplicação direta dos resultados daqueles autores a um problema de engenharia. Também nesta época, no contexto de "roll-waves" em reologia não-newtoniana, Bakhvolog e Eglit (1983-1984), estudando avalanches densas, efetuaram análise análoga à de Dressler, quando introduzem um termo dissipativo suplementar modelado por um atrito sólido. Chegaram à relação $(\tan \theta - \tan \phi) > 4g/C^2$, relação aliás, semelhante à de Dressler (1949), mas que em pouco contribui; a não ser numa mera modificação da declividade. Hutter e Savage (1988) também investem no estudo dos critérios de formação de "Roll Waves". A contribuição desses autores reside no fato de tentar substituir o atrito sólido pela coesão do fluido. Enfim, além das contribuições de Needham (1984) e Merkin (1986) já citadas, não podemos esquecer de Hwang e Chang (1987) que passam a estudar, sob um plano eminentemente teórico, a formação de "Roll Waves" através da Teoria da Bifurcação. Recentemente encontramos, no plano numérico, os trabalhos de Kranenburg (1992) que também, utilizando-se do grupo "shallow-water" comprovam a condição de existência já estabelecida por Dressler (1949).

Enfim, todas estas observações e estudos anteriores nos levam a crer que as "Roll Waves" podem se desenvolver em fluidos newtonianos e também em fluidos não-newtonianos. A proposta dessa Tese é, do ponto de vista teórico, rever as condições de existência e unicidade dessas ondas, seja numa reologia newtoniana ou não newtoniana,



sem perdas de vista dos compromissos de engenharia. Atenção especial será dada ao problema viscoso. Do ponto de vista numérico, a partir das equações das águas rasas, e de esquemas numéricos apropriados, validamos o código de cálculo desenvolvido, em situações permanentes e transientes, notadamente na geração de “roll waves”.

Apresentamos em **Perspectivas Futuras** as atividades em desenvolvimento e a serem desenvolvidas, notadamente a linha teórico-numérica com a analogia das roll waves e o problema clássico do oscilador de Van Der Pol.

Por fim, por opção deliberada deste autor, restringimo-nos, nesta Tese, ao tratamento e potencialidades do grupo “shallow water” e suas aplicações na hidráulica de superfície livre, não obstante, este pesquisador vem trabalhando mais recentemente com as equações da “classe Boussinesq” em ondas de submersão e tentando diagnosticar, com mais rigor, a dinâmica de escoamentos de fluidos hiperconcentrados com superfície livre, que em circunstâncias específicas podem gerar “roll waves”. Tais projetos contam com financiamento e estão em andamento.

Capítulo IV:

Esta Tese é composta por 15 Capítulos, a saber :

Capítulo I :

Este Capítulo trata, ainda que breve, do fenômeno de “roll waves“, suas condições de ocorrência e nossa preocupação em controlá-lo. A contribuição do pesquisador consiste em retomar trabalhos clássicos e colocá-los em discussão, reavaliação e avançar na direção de um diagnóstico mais apurado do fenômeno em meios hiperconcentrados ou de reologia não-newtoniana (proposta de fluido de Bingham).



Capítulo II :

Tenta fazer uma revisão condensada e nos prover de bases sobre leis de conservação escalares, solução do problema de Cauchy, curvas características e forma conservativa, introduzindo a noção de solução fraca ou solução no sentido de distribuição. Fechamos o capítulo ressaltando a não unicidade de soluções fracas, levando-nos à necessidade de verificar o conceito de entropia convexa, além de explicitar a solução do problema de Riemman associado a uma lei de conservação hiperbólica.

Capítulo III :

O terceiro Capítulo, usando das bases teóricas anteriormente citadas, classifica o grupo "shallow water" (equações de Saint Venant) como sistema estritamente hiperbólico. Explicita curvas de choque e de "détente" para o sistema de equações de interesse.

Capítulo IV :

Para uma geometria parametrizada ou geometria qualquer, lançamos a possibilidade de escrever os fluxos numéricos relativos ao grupo "shallow water", seja via o esquema numérico de Godunov (1ª ordem) que considera uma distribuição constante de $U(x, t)$ por malha, seja o esquema de VanLeer (2ª ordem), baseado na descentralização de fluxos e que considera uma distribuição linear de $U(x, t)$ por malha.

O cálculo numérico, a grosso modo, é desenvolvido em 05 etapas:

1ª etapa: cálculo das derivadas;

2ª etapa: cálculo das variáveis junto às interfaces;

3ª etapa: cálculo das variáveis junto às interfaces no tempo intermediário $(n+1/2) U^{n+1}$;



4ª etapa: cálculo da solução sem segundo membro da equação da conservação da quantidade de movimento;

5ª etapa: cálculo da solução com correção do 2º membro da equação da conservação da quantidade de movimento.

Capítulo V :

O código de cálculo desenvolvido em Fortran permite-nos calcular casos tipo tais como ondas geradas por ruptura de barragens, por deslizamentos de terra em reservatórios de barragens e mais recentemente implantamos a opção de geração de "roll waves" (em reologia newtoniana e não-newtoniana). O código de cálculo aceita 2 versões: seção geométrica parametrizada ou geometria largura x cota, o que nos permite utilizá-lo para aplicação em engenharia.

O código de cálculo é avaliado através de resultados numéricos, ora comparados com soluções analíticas conhecidas, ora com resultados experimentais.

Capítulo VI :

Neste Capítulo, uma revisão condensada sobre funções e sistemas diferenciais não-lineares é empreendida em via de utilização no estudo de estabilidade e eventuais pontos de bifurcação no contexto de "roll waves".

Capítulo VII:

Retomamos o clássico de Dressler e verificamos mais detalhadamente as condições de existência de "roll waves" para fluidos não-viscosos.



Capítulo VIII:

Uma análise de estabilidade linear do sistema "shallow water" viscoso (newtoniano) é pormenorizadamente efetuada. Uma reavaliação da proposta de Needham&Merkin é empreendida, o que nos permitiu propor um sistema "shallow water" mais apropriado à fenomenologia em questão e com perspectivas mais interessantes e consistentes quando de sua aplicação em problemas de engenharia.

Capítulo IX:

Tendo por objetivo analisar o fenômeno "roll waves" na reologia não-newtoniana, fizemos uma breve revisão de modelos reológicos mais pertinentes, apontando, nesta 1ª etapa, para uma reologia de fluido de Bingham, conforme conclusões dos estudos de Jonhson (1970).

Capítulo X:

A partir do Capítulo VII, retomamos o grupo "shallow water" viscoso e não-newtoniano e discutimos as novas condições de existência e estabilidade das "roll waves". São ilustrados, no decorrer deste Capítulo, resultados de experiências no laboratório e também numéricas sobre esse tipo de onda.

Capítulo XI:

Enfocamos neste breve Capítulo pontos cruciais no tratamento do fenômeno em questão: como trabalhamos em condições de escoamentos turbulentos e de dinâmica torrencial, associado ao fato que nosso modelo numérico apresenta uma viscosidade implícita ordens de vezes superior à viscosidade física do fluido, nossa proposta de



modelagem está validada para Números de Bingham elevados ou efeitos de "plug" dominantes.

Capítulo XII:

A partir dos resultados teóricos obtidos anteriormente e assentados nas hipóteses de validade do modelo implementado, ilustramos vários estudos de caso que puderam nos fornecer elementos norteadores sobre critérios de formação e desenvolvimento de "roll waves" em canais, em função dos parâmetros físicos, dinâmicos e geométricos envolvidos.

Capítulo XIII:

Em função do efeito limitante do código de cálculo (viscosidade numérica ordens de vezes superior à viscosidade física), retomamos o sistema shallow water não-newtoniano viscoso e após a dedução da equação das "roll waves" pudemos, a partir do software MATLAB, explorar e controlar (difícil tarefa), a evolução destas ondas, nos seus diversos cenários, quais sejam: variando o Número de Froude, o Número de Reynolds, Coesão, Velocidade de Propagação, etc.

Capítulo XIV:

Em Perspectivas Futuras, tentam-se arrolar as atividades em andamento na temática de "roll waves", em particular, nossa tentativa de estabelecer uma analogia entre o fenômeno e a dinâmica do oscilador de Van der Pol e seu controle. Essas atividades já mereceram algumas publicações, onde tentativas de aproximação são realizadas, no entanto, um tratamento matemático mais rigoroso e esclarecedor faz-se ainda necessário.

Capítulo XV:

Neste último capítulo, ainda que breve, esboçamos de plano as conclusões desta Tese e, com compromissos de engenharia, um protocolo de ação que poderia ser adotado quando os engenheiros encontrarem-se eventualmente envolvidos com este tipo de fenômeno.

Referências Bibliográficas

Referências que tratam de "roll waves" propriamente dita, de dinâmica de fluidos hiperconcentrados e embasamentos matemáticos utilizados no transcorrer desse trabalho.

II.1.1. Características

Para o caso linear, podemos falar de solução regular de (1.1), e portanto de suas curvas características. Isto posto, definimos curvas características $X(t, x_0, t_0)$ de u solução de (1.1) da seguinte maneira:



II – LEIS DE CONSERVAÇÃO ESCALARES

II.1. Noções de base sobre leis de conservação escalares

O objetivo deste item é discorrer sobre a resolução do problema de Cauchy para uma lei de conservação modelo, a saber:

Determinar $u(x)$ que verifique:

$$\begin{cases} (i) & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \\ (ii) & u(x, 0) = u_0(x) \quad \text{para } x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.1)$$

Admite-se para fins de simplificação que a função f é regular e estritamente convexa. Esta equação para $f = \frac{u^2}{2}$ é a equação de Burgers, cuja interpretação física auxilia-nos bastante na compreensão de fenômenos que serão tratados nesta Tese. Vamos nos restringir nesta parte a tratar o caso escalar ($u \in \mathbb{R}$), não obstante toda a técnica aqui descrita será também válida para o caso de sistemas ($u \in \mathbb{R}^m$), $m > 1$.

II.1.1. Características

Para o caso linear, podemos falar de solução regular de (1.1), e portanto de suas curvas características. Isto posto, definimos curvas características $X(t, x_0, t_0)$ de u solução de (1.1) da seguinte maneira:

$$\begin{cases} dX(t, x_0, t_0) = f'(u(X(t, x_0, t_0))) \\ X(t; x_0, t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

A solução em um ponto (x, t) depende apenas da condição inicial da curva característica passando por aquele ponto (comportamento local da solução). Na verdade, o que fazemos é estudar a variação de $u(x, t)$, onde u é solução da equação (1.1), ao longo da característica $X(t, x_0, t_0)$. Assim posto:

$$\phi(t) = u(X(t; x_0, t_0), t)$$

e considerando (1.1), tem-se:

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = 0$$

O que resulta em :

$$u(X(t; x_0, t_0), t) = u(X(0; x_0, t_0), 0) \quad (1.3)$$

A solução u é constante ao longo da característica. Assim sendo, a partir de (1.2), podemos afirmar que as características são retas. Se um segundo membro é adicionado à equação (1.1), esta última propriedade será falsa, contrariamente ao que ocorre no caso linear.

As curvas características permitem construir, explicitamente, a solução do problema de Cauchy a partir da identidade (1.3). Exemplifiquemos, a título de ilustração, o caso da equação de Burgers.

Seja u_0 a condição inicial :

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.4)$$



A figura 1 mostra , no plano (x, t) , as características referentes a esta condição inicial (1.4). A solução para $t > 0$ é dada por :

- para $x < 0$:

$$u(x, t) = 0$$

- para $0 \leq x \leq 1 + t$

$$u(x, t) = u_0(x_0) \text{ com } \frac{x-x_0}{t} = x_0 \text{ e portanto } u(x, t) = \frac{x}{1+t}$$

- para $x \geq 1 + t$

$$u(x, t) = 1$$

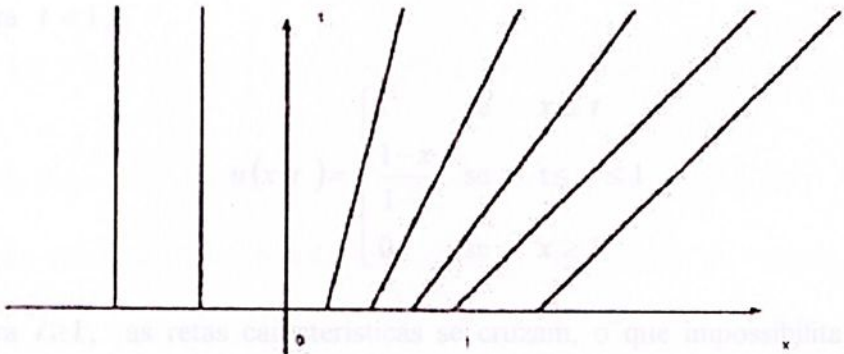


Figura 1.

Consideremos ainda, para a equação de Burgers, a condição inicial simétrica de (1.4).

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq 0 \\ 1-x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

A figura 2 mostra as curvas características correspondentes a esta nova condição inicial (1.5), a saber :

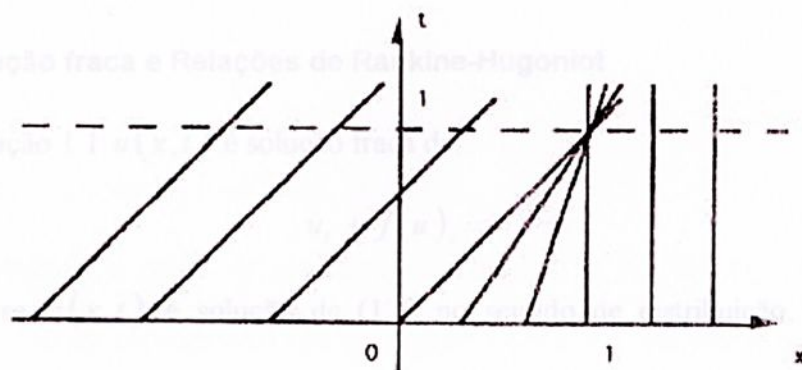


Figura 2.

Para $t < 1$, as curvas características originárias da condição inicial não se cruzam, pode-se portanto, construir a solução $u(x, t)$ de (1.1), a saber :

Para $t < 1$,

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t} & \text{se } t \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Para $t \geq 1$, as retas características se cruzam, o que impossibilita construir, a partir das características da condição inicial (1.5), uma solução de (1.1).

De uma maneira geral, se a condição inicial é decrescente, as retas características originárias da condição inicial poderão se cruzar para valores $t > 0$. Dessa maneira, não seria mais possível construir uma solução regular do problema de Cauchy, tratando-se portanto, de uma especificidade do problema não-linear, o que nos leva a pretender determinar uma solução descontínua de (1.1).

II.1.2. Estudo das descontinuidades

II.1.2.1. Solução fraca e Relações de Rankine-Hugoniot

Definição 1.1: $u(x, t)$ é solução fraca de:

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.7)$$

se somente se $u(x, t)$ é solução de (1.7) no sentido de distribuição, ou ainda de maneira equivalente,

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \quad \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u(x, t)\phi_t + f(u(x, t))\phi_x) dx dt = 0 \quad (1.8)$$

Da mesma maneira, $u(x, t)$ é solução fraca de (1.4) se u é uma função limitada tal que :

$$\forall \phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \quad \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (u(x, t)\phi_t + f(u(x, t))\phi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^+} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0 \quad (1.9)$$

Estas duas formulações “fracas” são obtidas a partir da equação (1.7) através da multiplicação desta por uma função teste $\phi(x, t)$. Integrando por partes, obtemos as formulações (1.8) e (1.9), de acordo com a natureza da função teste $\phi(x, t)$ (nula ou não) em $t=0$. É claro que uma solução regular de (1.7) é também solução fraca.

Teorema 1.1:

Seja Σ uma curva regular no plano (x, t) :

$$\sigma: t \rightarrow x(t)$$

de declividade local no ponto $(x(t), t)$:

$$\sigma \equiv \frac{dx(t)}{dt}$$



Se u é regular em ambos os lados de Σ , u é solução fraca de (1.7), se somente se $\forall (x, t) \in \Sigma$

$$\sigma [u] = [f(u)] \quad (1.10)$$

Onde $[u]$ designa o salto de u ao longo de Σ .

Retomemos, a título de exemplo, o problema (1.4). Em $t=1$, a solução do problema de Cauchy correspondente é descontínua em $x = 1$, ela vale 1 para $x < 1$, e 0 para $x > 1$.

A função $u(x, t)$ definida para $t \geq 1$ e dada por:

$$\text{Para } t \geq 1 \quad u(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{t+1}{2} \\ 0 & \text{se } x > \frac{t+1}{2} \end{cases} \quad (1.11)$$

é notadamente uma solução fraca de (1.7), uma vez que a relação de Rankine-Hugoniot é verificada ao longo da reta $x = \frac{t+1}{2}$. Tem-se um choque de velocidade 1/2. Já que para $t=1$ a solução dada por (1.1) é igual àquela dada por continuidade em $t=1$ por (1.6), demonstramos facilmente que u dada (1.6) e (1.11) para $t > 0$ é solução fraca de (1.1), com a condição inicial dada por (1.5).

A figura 3 mostra claramente as características associadas a esta solução no plano (x, t) e a figura 4 representa a solução para diferentes valores de t .



II.1.2.2. Forma conservativa e solução fraca

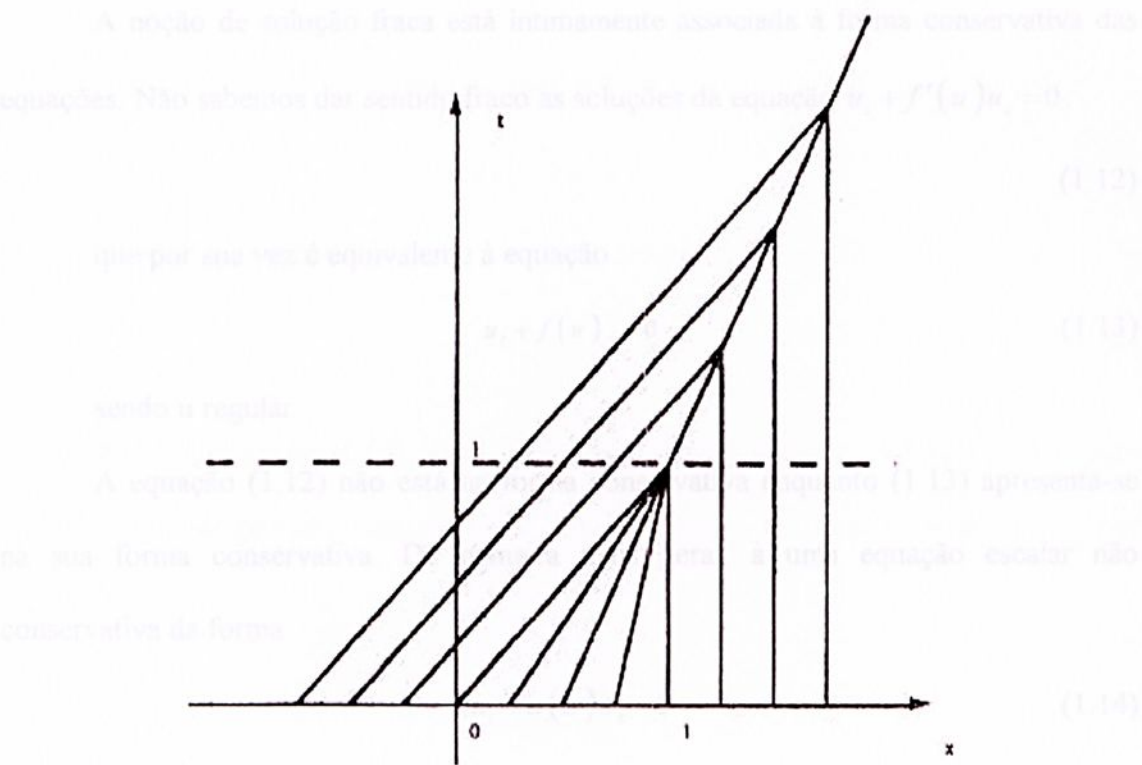


Figura 3.

Consideremos como exemplo, uma função $\phi(x)$ primitiva de a dada por:

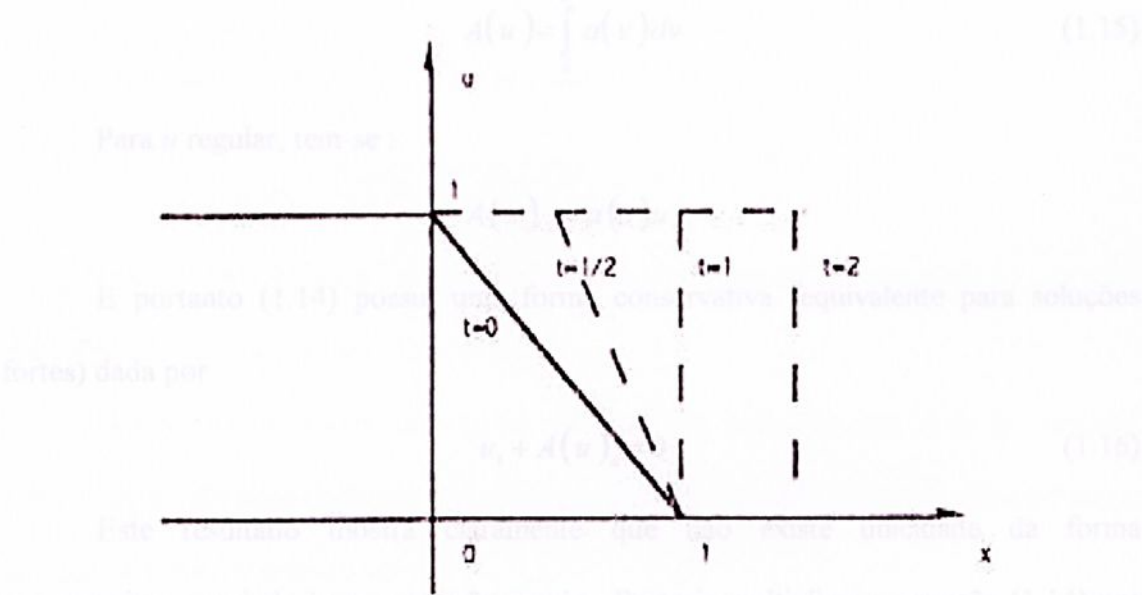


Figura 4.

Tomemos como exemplo a equação de Burgers



II.1.2.2. Forma conservativa e solução fraca

A noção de solução fraca está intimamente associada à forma conservativa das equações. Não sabemos dar sentido fraco as soluções da equação $u_t + f'(u)u_x = 0$.

(1.12)

que por sua vez é equivalente à equação :

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.13)$$

sendo u regular.

A equação (1.12) não está na forma conservativa enquanto (1.13) apresenta-se na sua forma conservativa. De maneira mais geral, à uma equação escalar não conservativa da forma

$$u_t + a(u)u_x = 0 \quad (1.14)$$

onde a é uma função regular, pode-se sempre associar uma forma conservativa.

Consideremos como exemplo, uma função $A(u)$ primitiva de a dada por :

$$A(u) = \int_0^u a(v) dv \quad (1.15)$$

Para u regular, tem-se :

$$A(u)_x = a(u)u_x$$

E portanto (1.14) possui uma forma conservativa (equivalente para soluções fortes) dada por

$$u_t + A(u)_x = 0 \quad (1.16)$$

Este resultado mostra claramente que não existe unicidade da forma conservativa associada à uma equação escalar. Bastaria multiplicar a equação (1.14) por uma função regular e estritamente positiva para construirmos uma outra forma conservativa da equação.

Tomemos, como exemplo, a equação de Burgers:



$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \quad (1.17)$$

Para $u > 0$ multipliquemos esta equação por $2u$:

$$2uu_t + 2u^2 u_x = 0$$

Esta última equação pode ser rescrita na forma

$$u_t^2 + \left(\frac{2}{3} u^3 \right)_x = 0 \quad (1.18)$$

Tanto a equação (1.17) quanto a (1.18) possuem a mesma solução regular para $u > 0$. Em contrapartida, elas possuem soluções fracas distintas. Consideremos por exemplo:

$$u(x, t) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < \sigma t \\ 1 & \text{se } x > \sigma t \end{cases} \quad (1.19)$$

$u(x, t)$ é solução fraca de (1.17) se somente se (Teorema 1.1)

$$\sigma (2-1) = \frac{1}{2} (2^2 - 1^2) \Leftrightarrow \sigma = \frac{3}{2}$$

Da mesma maneira, $u(x, t)$ é solução fraca de (1.18), se somente se :

$$\sigma (2^2 - 1^2) = \frac{2}{3} (2^3 - 1^3) \Leftrightarrow \sigma = \frac{14}{9}$$

O que demonstra que as relações de Rankine-Hugoniot, associadas a cada uma das formas conservativas, são diferentes.

Nas situações físicas, entretanto, não existem ambigüidades, pois as variáveis conservativas são bem definidas. Por exemplo para as equações de Euler isoentrópicas, as duas variáveis conservativas são:

A massa específica ρ associada a lei de conservação da massa :

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (1.20)$$



A vazão em massa ρu associada à lei de conservação da quantidade de movimento é dada por

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p(\rho))_x = 0 \quad (1.21)$$

Introduzindo (1.20) em (1.21) e dividindo por ρ , temos:

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho} p'(\rho) = 0 \quad (1.22)$$

que admite por forma conservativa a equação:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2} + h(\rho) \right)_x = 0 \quad (1.23)$$

$$\text{com } h'(\rho) = \frac{1}{\rho} p'(\rho)$$

Enfim os dois sistemas de equação possuem a mesma solução regular. Podemos definir as soluções fracas do sistema (1.20-1.23), mas elas serão diferentes daquelas de (1.20-1.23) e não terão nenhuma significação física.

II.1.2.3. Não unicidade de soluções fracas.

A noção de solução fraca associada a uma determinada forma conservativa não permite eliminar todas as dificuldades, ou seja, não é o suficiente bastante para assegurar unicidade da solução do problema (1.1). Consideremos então o problema de Cauchy quando do tratamento da equação de Burgers.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & u_t + \left(\frac{u^2}{2} \right)_x = 0 \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T] \\ \text{(ii)} \quad & u(x, 0) = \begin{cases} -1 & \text{para } x < 0 \\ +1 & \text{para } x > 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Demonstraremos que este problema possui uma solução fraca descontínua em $x=0$, assim como uma outra solução fraca , mas contínua em $\mathbb{R}$ para $t>0$. Seja,

$$u_d(x)=\begin{cases} -1 & \text{para } x < 0 \\ +1 & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

$u_d(x,0)=u(x,0)$, e $u_d(x)$ verifica a relação de Rankine-Hugoniot ao longo da reta $x=0$, sendo portanto uma solução fraca de (1.24)

Consideremos ainda uma função $u_f(x,t)$ definida para $t>0$ por:

$$u_f(x,t)=\begin{cases} -1 & \text{se } x \leq -t \\ \frac{x}{t} & \text{se } -t \leq x \leq t \\ 1 & \text{se } x \geq t \end{cases} \tag{1.25}$$

Para $t=0$, $u_f(x,0)=u(x,0)$; para $t>0$ esta função é contínua, derivável (salvo em $x=\pm t$). Demonstra-se , sem grandes dificuldades, que $u_f(x,t)$ é solução fraca de (1.24). As figuras que se seguem mostram as características associadas respectivamente à $u_d(x,t)$ e $u_f(x,t)$.

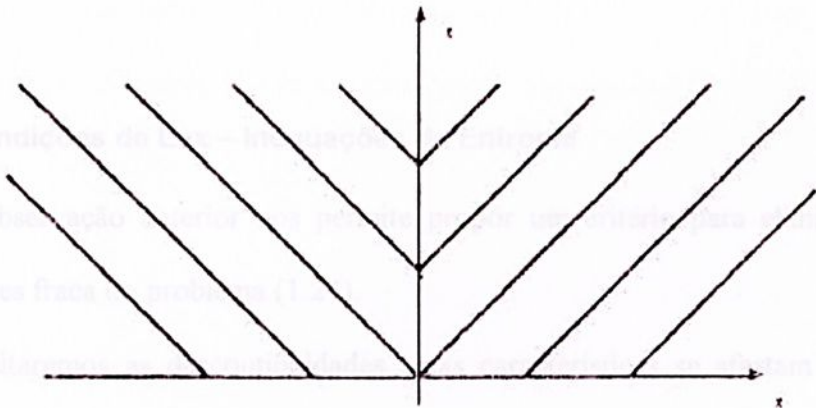


Figura 5.

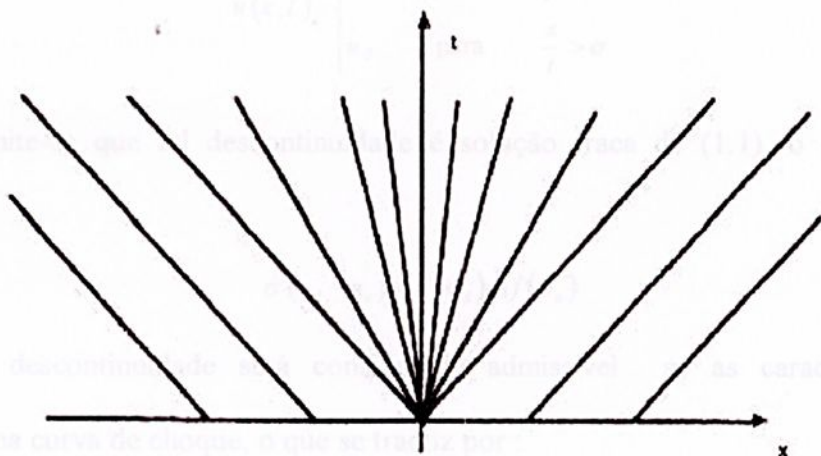


Figura 6.

Observamos com base na figura 5 que contrariamente ao que ocorre para o choque de velocidade $\sigma = \frac{1}{2}$ da figura 3, as características em (1.5) se afastam da curva de choque $\sigma = 0$

II.1.2.4. Condições de Lax – Inequações de Entropia

A observação anterior nos permite propor um critério para eliminar uma das duas soluções fraca do problema (1.24).

Rejeitaremos as descontinuidades cujas características se afastam da curva de choque Σ . Isto traduz-se em considerar apenas as descontinuidades que possam aparecer espontaneamente quando do encontro de duas características como exemplificado pelo problema de Cauchy de condição inicial (1.4). Fala-se, neste caso,

de maneira mais precisa, de descontinuidade admissível. Consideremos, então, uma descontinuidade centrada em $x=0$, a saber :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e & \text{para } \frac{x}{t} < \sigma \\ u_d & \text{para } \frac{x}{t} > \sigma \end{cases} \quad (1.26)$$

Admite-se que tal descontinuidade é solução fraca de (1.1), o que equivale dizer :

$$\sigma(u_d - u_e) = f(u_d) - f(u_e)$$

Tal descontinuidade será considerada admissível se as características se encontram na curva de choque, o que se traduz por :

$$f'(u_d) \leq \sigma \leq f'(u_e) \quad (1.27)$$

- $f'(u)$ é a declividade das características no plano (t, x) .

Essas relações são denominadas de condições de Lax.

Um outro ponto de vista é possível, de maneira a justificar esta escolha. A idéia geral baseia-se no conceito que as "boas soluções fracas" de (1.1) são aquelas obtidas como limite viscoso do problema.

Num sistema físico, por exemplo, temos quase sempre um termo viscoso que intervém no segundo membro da lei de conservação da equação (1.1) (i), dada por :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial f(u^\varepsilon)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2} \quad (1.28)$$

ε é um coeficiente de viscosidade positiva e pequeno. Chamamos u^ε a solução do problema que depende do parâmetro ε . É portanto razoável supor que a "boa solução" de (1.1) é o limite de u^ε quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Pode-se demonstrar que estas duas concepções são equivalentes.



Teorema 1.2 : Se u^ε solução de (1.28) com a condição inicial (1.1) (ii) tende para $u(x, t)$ (para quase todo (x, t)), restando limitada em $L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, tem-se então que :

- u é solução fraca de (1.1)
- u é solução fraca da inequação de entropia :

$$\eta(u)_t + h(u)_x \leq 0 \quad (1.29)$$

onde $\eta(u)$ é uma função convexa regular de u e $h'(u) = \eta'(u)f'(u)$, o que equivale dizer $\forall \phi \geq 0 \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$, tem-se :

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} (\eta(u(x, t))\phi_x + h(u(x, t))\phi_x) dx dt \geq 0 \quad (1.30)$$

A solução u é então denominada de solução fraca entrópica de (1.1).

Teorema 1.3 : Seja Σ uma curva regular do plano (x, t) :

$$\sigma: t \rightarrow x(t)$$

de declividade local no ponto $(x(t), t)$:

$$\sigma = \frac{dx(t)}{dt}$$

se u é solução regular de ambos os lados de Σ , u é solução fraca entrópica de (1.7), se somente se :

$$\forall (x, t) \in \Sigma \quad \sigma[u] = [f(u)] \quad (1.31)$$

e para toda entropia η convexa de fluxo associado h tal que $h' = \eta' f'$

$$\sigma[\eta(u)] \geq [h(u)] \quad (1.32)$$

$[u]$ designa o salto de u de um lado e outro de Σ .

se a função f é estritamente convexa, as condições (1.32) são equivalentes às condições de Lax (1.27).

II.1.3. O Problema de Riemann

A partir dos elementos de base explicitados anteriormente, passamos agora à resolução do problema de Riemann associado a uma lei de conservação hiperbólica.

Definição 1.2 : Denomina-se problema de Riemann associado a uma lei de conservação hiperbólica do tipo :

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1.33)$$

o problema de Cauchy para (1.33), com as seguintes condições iniciais :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_e & \text{para } x < 0 \\ u_d & \text{para } x > 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

O problema corresponde a uma condição inicial constante de um lado e de outro de $x=0$ e descontinuo em $x=0$.

Dada a sua simplicidade e a possibilidade de sua resolução de maneira exata, este problema desempenha um papel fundamental na análise dos problemas hiperbólicos e de sua resolução numérica.

Para tanto, efetuemos uma dilatação de escala de tempo e de espaço de um mesmo fator λ . A equação (1.33) fica invariante pela mudança de variável, o mesmo ocorrendo com a condição inicial (1.34). A solução do problema de Riemann associado a (1.33) e (1.34) é portanto igualmente invariável por translação.

Se designarmos a solução do problema de Riemann por $w(x, t, u_e, u_d)$, teremos $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$



$$\omega(\lambda x, \lambda t, u_e, u_d) \equiv \omega(x, t, u_e, u_d)$$

ω depende apenas de $\frac{x}{t}$ e adotaremos $\omega\left(\frac{x}{t}, u_e, u_d\right)$ como solução do problema de Riemann (1.33) (1.34).

A condição inicial sendo descontínua, só podemos tratar da solução fraca, sendo fácil de calculá-la no caso linear. A solução do problema de Riemann para a equação de transporte $u_t + c u_x = 0$ onde c é uma constante real não nula é dada por :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e & \text{para } \frac{x}{t} < c \\ u_d & \text{para } \frac{x}{t} > c \end{cases} \quad (1.35)$$

O caso não-linear é mais complexo, as soluções regulares podem existir conforme sugerido no exemplo do parágrafo (1.2.3).

II.1.3.1. Ondas de "Détente"

Seja f uma função regular e estritamente convexa.

Inicialmente buscamos solução de (1.33) - (1.34) regulares para $t > 0$.

Sendo $\xi \equiv \frac{x}{t}$, a solução ω depende apenas de ξ . Se $\omega(\xi)$ é solução regular de (1.33), temos então :

$$\omega'(\xi) \xi_t + f'(\omega) \omega'(\xi) \xi_x = 0$$

ou ainda, se substituirmos ξ_t e ξ_x pelos seus respectivos valores, obtemos :

$$\omega'(\xi) \frac{\xi}{t} = f'(\omega) \omega'(\xi) \frac{1}{t}$$

Para $t > 0$, há duas possibilidades :

ou $\omega'(\xi) \equiv 0$, o que leva, por continuidade, em $t = 0$; $u_e = u_d$



ou $\xi = f'(\omega(\xi))$ onde f' sendo uma função estritamente crescente, se inverte em $(f')^{-1}$ (também crescente) e assim obtemos explicitamente $\omega(\xi) = (f')^{-1}(\xi)$.

Podemos então construir uma solução fraca de (1.33), com ω dada por :

Fixam-se u_e e $\xi_+ > f'(u_e)$,

- Para $\xi \leq f'(u_e)$

$$u(x, t) = u_e$$

- Para $f'(u_e) \leq \xi \leq \xi_+$ com $\xi_+ > f'(u_e)$

$$u(x, t) = (f')^{-1}(\xi)$$

- Para $\xi_+ \leq \xi$

$$u(x, t) = (f')^{-1}(\xi_+)$$

Uma solução desse tipo é denominada de onda de "détente", ou seja, é a solução do Problema de Riemann para (1.33) com a condição inicial :

$$u_0(x) = \begin{cases} u_e & \text{para } x < 0 \\ (f')^{-1}(\xi_+) & \text{para } x > 0 \end{cases}$$

De maneira recíproca, se $f'(u_e) \leq f'(u_d)$, existe uma onda de "détente", solução do Problema de Riemann (1.33) - (1.34) definida por :

$$u(x, t) = \omega(\xi) = \begin{cases} u_e & \text{para } \xi \leq f'(u_e) \\ (f')^{-1}(\xi) & \text{para } f'(u_e) \leq \xi \leq f'(u_d) \\ u_d & \text{para } \xi \geq f'(u_d) \end{cases}$$

II.1.3.2. Resolução do Problema de Riemann

Podemos, a partir de agora, resolver inteiramente o problema de Riemann (1.33) (1.34). Resta-nos, apenas, tratar o caso $f'(u_e) > f'(u_d)$. Com base no parágrafo



anterior, não dispomos de solução regular. Procuremos, então, uma solução descontínua do tipo choque :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e & \text{para } \frac{x}{t} < \sigma \\ u_d & \text{para } \frac{x}{t} > \sigma \end{cases}$$

Tal solução é solução fraca se somente se a relação de Rankine-Hugoniot é atendida, o que fixa o valor de σ em :

$$\sigma = \frac{f(u_d) - f(u_e)}{u_d - u_e}$$

Tal solução verifica a condição de entropia, se somente se as condições de Lax são verificadas, isto é :

$$f'(u_d) \leq \sigma \leq f'(u_e)$$

Isto é efetivamente verificado uma vez que supusemos $f'(u_e) > f'(u_d)$ e f convexa.

Nota : Poderíamos ter tentado construir uma solução descontínua do mesmo tipo apresentado no parágrafo anterior, mas a hipótese $f'(u_e) < f'(u_d)$ então posta, teria convergido a uma solução descontínua não-admissível (ou não entrópica). Assim exposto, pudemos construir de maneira geral, a solução do problema de Riemann que consiste em uma onda de "détente" ou de uma onda de choque segundo os valores relativos de $f'(u_e)$ e $f'(u_d)$.

Todos esses resultados podem ser resumidos em um único Teorema.

Teorema 1.4 : O problema de Riemann (1.33)-(1.34) com f regular e estritamente convexa possui uma solução fraca (verificando a entropia), e única na classe das soluções C^1 por partes.



Tal solução é composta de uma "détente" ou de um choque e é definida da seguinte maneira :

- se $f'(u_e) > f'(u_d)$ (caso do choque)

$$u(x, t) = \begin{cases} u_e & \text{para } \frac{x}{t} < \frac{f(u_d) - f(u_e)}{u_d - u_e} \\ u_d & \text{para } \frac{x}{t} > \frac{f(u_d) - f(u_e)}{u_d - u_e} \end{cases}$$

- se $f'(u_e) \leq f'(u_d)$ (caso de "détente")

$$u(x, t) = \omega(\xi) = \begin{cases} u_e & \text{para } \xi \leq f'(u_e) \\ (f')^{-1}(\xi) & \text{para } f'(u_e) \leq \xi \leq f'(u_d) \\ u_d & \text{para } \xi \geq f'(u_d) \end{cases}$$

Por fim, vale lembrar que a velocidade das ondas na solução de um problema de Riemann $\mathfrak{R}(u_e, u_d)$ para f convexa é majorada por $\text{MAX} \{ |f'(u_e)|, |f'(u_d)| \}$. Esta condição será útil para a construção do esquema de Godunov.



III – ELEMENTOS DA TEORIA DE SISTEMAS HIPERBOLICOS

APLICADOS ÀS EQUAÇÕES "SHALLOW WATER"

Dentre as tentativas numéricas de simulação apresentadas nesta Tese, temos os modelos matemáticos baseados nas equações “shallow water” e fundamentados sobre os ensinamentos oriundos da teoria dos sistemas hiperbólicos não-lineares.

Para a operacionalidade do modelo numérico desenvolvido, recorreu-se à técnica numérica baseada na resolução de problemas hiperbólicos não-lineares via esquema numérico Godunov-VanLeer. O modelo em questão é testado sobre soluções analíticas conhecidas e que comportam choques, como no caso de ruptura instantânea de barragem, caso de um bloco indeformável penetrando num canal de ondas, além de outros estudos de caso clássicos da hidráulica de superfície livre.

Generalidades

Os escoamentos não permanentes gradualmente variados são regidos pelas equações “shallow water” (sistema de Saint-Venant), formado de duas equações a derivadas parciais, quasi-linear e do tipo hiperbólico, que traduzem a aplicação dos princípios de conservação de massa e quantidade de movimento ao escoamento com superfície livre em rios e canais.

A eventual descontinuidade do perfil da superfície livre, provocando o fenômeno que se convencionou denominar onda de choque pode caracterizar, por exemplo, ondas do tipo ruptura de barragem. Nestes casos, na região do choque, as equações de Saint-Venant perdem a sua validade e devem ser utilizadas, em seu lugar, as relações denominadas equações de Rankine-Hugoniot, resultantes da aplicação dos mesmos princípios de conservação na região do choque.



Uma das principais hipóteses implícitas nas equações de Saint-Venant, a da distribuição hidrostática de pressões em uma seção transversal do escoamento é particularmente violada, de forma drástica, na zona de choque ou descontinuidade, pelo aparecimento de acelerações verticais não desprezíveis.

Existem métodos que asseguram o uso das equações de Saint-Venant através da descontinuidade na superfície livre pela introdução de artifícios matemáticos e numéricos na simulação dos processos físicos existentes na onda de choque. Os dois principais métodos de cálculo encontrados na literatura são: Métodos Pseudoviscosos (consiste em um incremento na viscosidade) e Soluções Fracas das Equações de Saint-Venant, este mais enfatizado no âmbito desse trabalho.

Do ponto de vista numérico, a separação da descontinuidade e sua propagação traduz-se em problemas de resolução, gerando instabilidades, chegando até mesmo a uma “explosão” do esquema numérico.

O estudo matemático das leis de conservação hiperbólicas teve nesses últimos dez anos um avanço considerável, tanto do ponto de vista analítico quanto numérico. Entre todos os esquemas numéricos utilizados para simular o fenômeno em pauta, o esquema tipo Godunov é bem conhecido. Aplicado às equações de Saint Venant, escritas na sua forma conservativa, o esquema numérico permite uma boa representação da frente íngreme dos escoamentos sem perda de estabilidade do esquema.

Sobre o sistema Saint-Venant:

As equações de Barré de Saint-Venant, nas variáveis (h, u) , se apresentam, na sua forma conservativa, como:



Conservação da Massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} = 0$$

Conservação da Quantidade de Movimento:

$$\frac{\partial (hu)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha hu^2)}{\partial x} + gh \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin(\theta) - \frac{gu^2}{C^2}$$

onde:

h : profundidade do escoamento ;

u : velocidade média na vertical ;

C : coeficiente de Chézy ;

θ : declividade do canal ;

ρ : massa específica do fluido ;

α : coeficiente do perfil de velocidade ;

x, t : variáveis independentes.

Sobre Sistemas Hiperbólicos

Definições : Para uma maior compreensão desse estudo faz-se necessário dar algumas definições acerca do problema de Cauchy, a saber :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0 \\ U(x, 0) = U_0(x) \end{cases} \quad (1.1)$$

Hiperbolicidade do Sistema

O sistema (1-1) é dito hiperbólico se para todo valor de U , os autovalores da matriz jacobiana $f'(U)$ são reais e distintos:



Temos então: $\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \dots < \lambda_n(U)$; onde $\lambda_j(U)$ representa o $j^{\text{ésimo}}$ autovalor.

A celeridade das ondas e o Jacobiano de F são respectivamente:

$$C = \sqrt{gh} ; \quad \frac{\partial F}{\partial U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix}$$

A matriz Jacobiana de F admite dois autovalores reais e distintos, a saber:

$$\lambda_1 = u - C$$

$$\lambda_2 = u + C$$

A partir desta propriedade o sistema de Saint Venant é classificado como sendo estritamente hiperbólico, tendo como autovetores associados a λ_1 e λ_2 , os seguintes vetores:

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1+(u-C)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u-C \end{pmatrix} ; \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{1+(u+C)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ u+C \end{pmatrix}$$

Estes dois autovetores formam uma base do $\mathfrak{R}^2$.

Invariantes de Riemann

Chamamos de j -invariante de Riemann toda função $W(U)$ tal que :

$\forall U \text{ grad}(W) \cdot r_j(U) = 0$ onde $r_j(U)$ representa o autovetor (à direita) associado ao autovalor $\lambda_j(U)$.

O sistema de Saint Venant admite 2 invariantes de Riemann: W_1 e W_2 , a saber:

$$\nabla W_1 \cdot \vec{v}_1 = 0$$

$$\nabla W_2 \cdot \vec{v}_2 = 0$$

onde : $W_1 = u + 2C$ e $W_2 = u - 2C$



Dadas as propriedades de W_1 e W_2 , o sistema de Saint Venant sem o 2º membro pode ser escrito como se segue:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = 0$$

Curvas Características

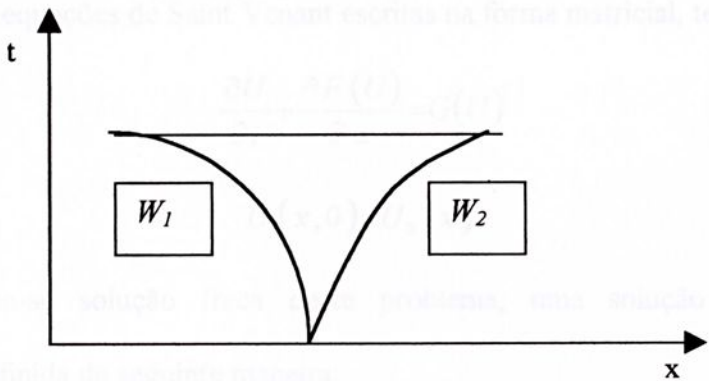
Seja $U(x, t)$ uma solução regular de (1-1). Definimos j -característica X^j oriunda de (x_0, t_0) como sendo:

$$\frac{d}{dt} X^j(t, x_0, t_0) = \lambda_j(U(X^j(t, x_0, t_0), t))$$

No plano (x, t) , tem-se:

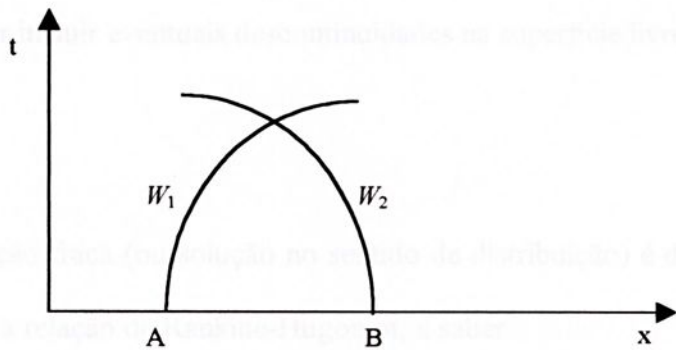
- W_1 é constante sobre a curva de tangente, $\frac{1}{\lambda_2}$, dita 2ª característica.
- W_2 é constante sobre a curva de tangente, $\frac{1}{\lambda_1}$, dita 1ª característica.

Nas regiões sem descontinuidades (U regular), estas duas propriedades permitem resolver o sistema de Saint Venant. – É o clássico “método das características”.



Devido a não linearidade do sistema, as k -características ($k = 1, 2$) que partem de pontos distintos em $t = 0$, podem se encontrar (cruzar), tornando impossível a existência de soluções regulares (aparecimento de descontinuidades). Daí, surgir a necessidade de

buscar uma solução física, de preferência, entre a família de soluções fracas do problema.



Solução fraca do problema de Cauchy

Esta categoria de solução parte de um princípio básico da teoria de equações diferenciais parciais, segundo o qual uma onda de choque ou descontinuidade forte é basicamente uma solução fraca genuína das equações hiperbólicas. Nesta abordagem, as equações do movimento, continuidade e dinâmica, são escritas sob a forma denominada conservativa ou divergente, sendo que o seu estabelecimento teve origem na análise matemática de sistemas fluidos baseada em leis de conservação. A partir do enfoque efetuado por Lax (1975), Cunge, Holly e Verwey (1980) e Abbott (1975) que tomam como partida as equações de Saint Venant escritas na forma matricial, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = G(U)$$

$$U(x,0)=U_0(x)$$

Denomina-se solução fraca deste problema, uma solução no sentido de distribuições, definida da seguinte maneira:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(Q \times [0, T]) \qquad \int_{Q \times [0, T]} (U \phi_{,t} + f(U) \cdot \phi_{,x}) \cdot dx \, dt + \int_Q U \cdot \phi_0 \cdot dx = 0$$



onde ϕ_0 é o valor inicial de ϕ . Esta alternativa constitui uma “solução adotada” por alguns pesquisadores para a simulação de ondas provocadas por ruptura de barragens, pelo fato de poder incluir eventuais descontinuidades na superfície livre, por exemplo.

Propriedades:

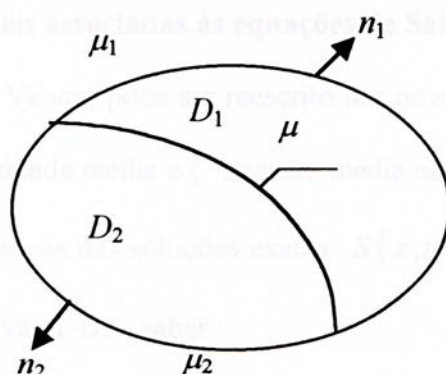
Uma solução fraca (ou solução no sentido de distribuição) é dita regular fora do choque e verifica a relação de Rankine-Hugoniot, a saber:

$\sigma[U] = [f(U)]$, onde $[U]$ representa o salto de U (descontinuidade) que se desloca com velocidade σ .

Demonstração: Seja o domínio D atravessado por uma fronteira μ ao longo da qual U apresenta uma descontinuidade. $\mu(t)$ separa o domínio em dois subdomínios D_1 e D_2 . Se U é solução fraca do problema de Cauchy (1.1), então, integrando por partes no domínio D , tem-se :

$$\begin{aligned} \int_D \left(U \frac{\partial \phi}{\partial x} + f(U) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dS &= 0 \\ &= \int_{D_1} \left(\frac{\partial(U\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(f(U)\phi)}{\partial x} \right) dS + \int_{D_2} \left(\frac{\partial(U\phi)}{\partial x} + \frac{\partial(f(U)\phi)}{\partial x} \right) dS \\ &= \int_{\mu_1} \left(\begin{matrix} U \\ f(U) \end{matrix} \right) \phi n_1 d_1 + \int_{\mu_2} \left(\begin{matrix} U \\ f(U) \end{matrix} \right) \phi n_2 d_1 \end{aligned}$$





Fazendo μ_1 e μ_2 tender para μ , tem-se que n_1 tende para $-n_2$, o que resulta em :

$$\int_{\mu} \left(f(U_2) - f(U_1) \right) \left(\frac{-d(\mu(t))}{dt} \right) \phi d_1 = 0$$

$$\frac{d(\mu(t))}{dt} (U_2 - U_1) = f(U_2) - f(U_1)$$

$$\sigma[U] = [f(U)]$$

Esta relação é conhecida como relação de Rankine-Hugoniot. Ela demonstra que a forma conservativa do Sistema de Saint Venant em questão é compatível com a equação do ressalto hidráulico (“hydraulic jump”) tendo $\frac{d(\mu(t))}{dt} = \sigma$ como a velocidade de propagação da descontinuidade. Para se determinar quais são as “boas soluções físicas”, utiliza-se o método das características, levando-se em conta apenas os choques provenientes do encontro de duas k -características. Tal constatação é de interesse prático fundamental, pois ela certifica que as descontinuidades do escoamento não são mais separadas de sua propagação, mas tratadas como um ponto ordinário do mesmo.



Determinação das variáveis associadas às equações de Saint Venant.

O sistema de Saint Venant pode ser reescrito nas novas variáveis S e Q , onde S é a seção molhada, u a velocidade média e Q a vazão média na seção. Não nos resta senão buscar aproximações numéricas das soluções exatas $S(x, t)$ e $Q(x, t)$ das equações de Saint Venant conservativas 1-D, a saber :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{S} + P(S) \right)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

$P(S)$ representa a pressão, função crescente da área molhada:

$$P(S) = \left(\frac{gS}{\alpha + 1} \right) \left(\frac{S}{K} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

S : seção molhada :

$$S = K(x) h^{\alpha(x)}$$

h : tirante ;

α, K : fatores de forma (seção transversal parametrizada).

A partir desse sistema de equações a duas variáveis S e Q , escrito em forma matricial, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} = 0 \\ U(x, 0) = U_0 \end{cases} \quad (1.3)$$

onde



$$U = (S, Q)^T$$

$$f(U) = \left(Q, \frac{Q^2}{S} + P(S) \right)^T$$

$(x, t) \in (\Omega \times [0, T])$, $U(x, 0)$ representa o valor de U no instante $t = 0$.

Para $S > 0$, o sistema é estritamente hiperbólico, pois os autovalores à direita $(\lambda^- \text{ e } \lambda^+)$ da matriz $f'(U)$ são reais e distintos.

$$f'(U) = \frac{\partial f(U)}{\partial U} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + C & 2u \end{bmatrix}$$

$$\lambda^- = u - C \quad \lambda^+ = u + C$$

onde

$$u = \frac{Q}{S} \quad \text{e} \quad C = \sqrt{\frac{g}{\alpha} \left(\frac{S}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}}$$

A cada autovalor está associado um autovetor (à direita), a saber:

$$\lambda^- = u - C \quad \Rightarrow \quad r^- = (1, u - C)^T$$

$$\lambda^+ = u + C \quad \Rightarrow \quad r^+ = (1, u + C)^T$$

O sistema possui igualmente dois invariantes de Riemann W^- e W^+ associados aos autovetores r^- e r^+ :

$$W^\varepsilon = u - \varepsilon \cdot h(S) = \frac{Q}{S} - 2 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{g S \alpha}{k} \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \quad \text{onde} \quad h(S) = \int_0^S \frac{C(S)}{S} dS \quad \text{e} \quad \varepsilon = \pm 1$$

Se $h(S, Q)$ representa a entropia convexa do sistema de Saint Venant associada ao fluxo $F(S, Q)$, essas duas variáveis são dadas por:

$$h(S, Q) = \frac{Q^2}{2S} + \frac{g S \alpha}{(\alpha + 1)} \left(\frac{S}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad F(S, Q) = \frac{Q^3}{3S} + g Q \left(\frac{S}{k} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (1.4)$$



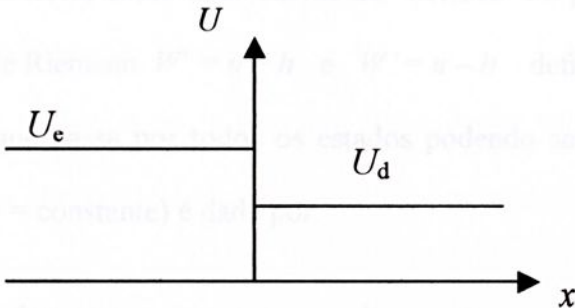
No caso das equações de Saint Venant, a entropia representa a energia mecânica por unidade de comprimento e portanto (1.4) representa a dissipação de energia de montante para jusante, dissipação essa que ocorre ao nível do choque.

Estudo do problema de Riemann – Uma solução detalhada para Saint Venant

Analisaremos aqui a solução do problema de Riemann que é a base de construção de um grande número de esquemas numéricos. No caso do sistema de Saint Venant 1-D conservativo temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0 & \text{com } U = (S, Q)^T \\ F(U) = \left(Q, \frac{Q^2}{S} + P(S) \right)^T \\ U(x, 0) = U_e, & \text{se } x < 0 \quad \text{e } U_d, \quad \text{se } x > 0 \end{cases}$$

A solução exata $U(x, t)$ é conhecida. Ela é isoentrópica e constituída de duas ondas que podem ser ou ondas de choque ou de “détente” separadas por um estado intermediário constante U^* (conforme LAX, 1971) ligando U_e a U_d .



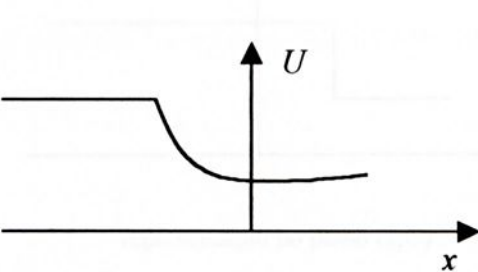
O interesse maior reside essencialmente ao longo da característica $x = 0$. Trata-se da solução estacionária U_s que não depende senão dos estados iniciais U_e, U_d , assim como de $\frac{x}{t}$.



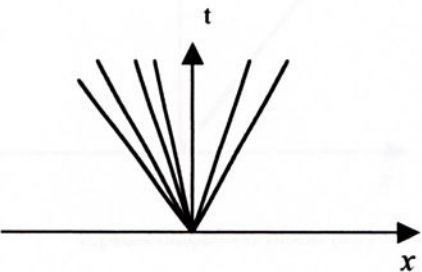
Definição de ondas de choque e de “détente”

Definição de uma onda de “détente”: Denominamos “j-détente” em um domínio

$\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \left(\sigma = \frac{x}{t} \right)$ toda solução regular $U(x,t)$ do problema de Riemann, tal que $\sigma = \lambda_j(U)$.



representação no plano (x,U)



representação no plano (x,t)

Proposição: os invariantes de Riemann são constantes ao longo de uma “détente”, reciprocamente uma curva ao longo da qual os invariantes de Riemann são constantes é uma “détente”.

Consequência: Existem então duas curvas de “détente” no plano (S,Q) associadas aos dois invariantes de Riemann $W^+ = u + h$ e $W^- = u - h$ definidas por:

A curva que passa por todos os estados podendo ser ligados a U_e por uma “1 - détente” ($W^+ = \text{constante}$) é dada por:

$$\Gamma^-(U_e) = \left\{ (S,Q), S \geq 0 \mid u+h = u_e+h_e \right\} \Rightarrow Q = (u_e+h_e)S + 2 \left[\frac{ga}{K} \right]^{\frac{1}{2a}} S^{\frac{(1+2a)}{2a}}$$

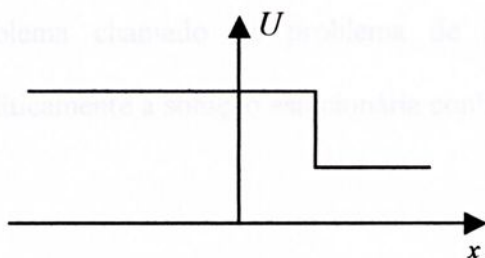
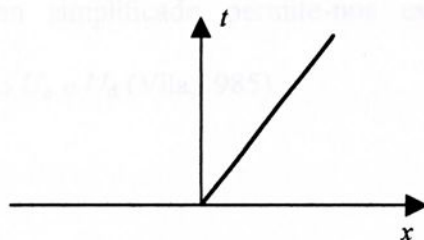
A curva que passa por todos os estados podendo ser ligados a U_d por uma “2-détente” ($W^- = \text{constante}$) é dada por:



$$\Gamma^+(U_d) = \left\{ (S, Q), S \geq 0 \mid u - h = u_d - h_d \right\} \Rightarrow Q = (u_d + h_d)S - 2 \left[\frac{ga}{K} \right]^{\frac{1}{2a}} S^{\frac{(1+2a)}{2a}}$$

Definição de uma onda de choque: Seja $U_0 \in L^2$, existe pois uma curva local partindo de U_0 e de direção r_j e que verifica a relação de Rankine-Hugoniot:

$$\forall U \in C \exists \sigma \text{ tal que } \sigma(U - U_0) = F(U) - F(U_0)$$

representação no plano (x, U) representação no plano (x, t)

Definimos assim duas curvas $S^-(U_0)$ (recip. $S^+(U_0)$) que representam os estados U podendo ser ligados por um 1-choque (recip. 2-choque); a saber:

$$S^-(U_e) = \left\{ (S, Q), S \geq 0 \mid u = u_e - (S - S_e) \sqrt{\frac{P(S) - P(S_e)}{(S - S_e)S \cdot S_e}} \right\} ; \quad u = \frac{Q}{S}$$

$$S^+(U_d) = \left\{ (S, Q), S \geq 0 \mid u = u_d - (S - S_d) \sqrt{\frac{P(S) - P(S_d)}{(S - S_d)S \cdot S_d}} \right\} ; \quad u = \frac{Q}{S}$$

Resolução do problema de Riemann

A solução do problema de Riemann é constituída, como vimos, por duas ondas que podem ser ou “détente” ou choques, separadas por um estado intermediário U^* . Há entretanto a necessidade de se definir novas curvas $\Sigma^-(U_e)$ (respectivamente $\Sigma^+(U_d)$) formadas a partir das curvas $\Gamma^-(U_e)$ e $S^-(U_d)$ (respec. $\Gamma^+(U_e)$ e $S^-(U_d)$) que permitem representar a solução completa do problema de Riemann, constituída da associação dessas duas ondas, a saber:



$$\Sigma^-(U_e) = \{ (S < Q), S \geq 0, U \in \Gamma^-(U_e) \text{ se } S \leq S_e ; U \in S^-(U_e) \text{ se } S > S_e \}$$

$$\Sigma^+(U_d) = \{ (S < Q), S \geq 0, U \in \Gamma^-(U_d) \text{ se } S \leq S_d ; U \in S^-(U_d) \text{ se } S > S_d \}$$

As curvas $\Sigma^-(U_e)$ e $\Sigma^+(U_d)$ sendo difíceis de obtenção do ponto de vista analítico, elas são substituídas pelas curvas de “détentes” $\Gamma^-(U_e)$ e $\Gamma^+(U_d)$. Tal problema chamado de problema de Riemann simplificado permite-nos explicitar analiticamente a solução estacionária conhecendo U_e e U_d (Vila,1985).



IV – ANÁLISE NUMÉRICA

ESQUEMAS NUMÉRICOS DE GODUNOV-VANLEER

NA GERAÇÃO DE ONDAS

No objetivo de facilitar a exposição deste Capítulo, vamos tratar o problema numa geometria parametrizada e independente, portanto, da abscissa curvilínea. Serão determinadas aproximações numéricas das soluções exatas das funções $S(x,t)$ e $Q(x,t)$, variáveis das equações de Saint-Venant conservativas e unidimensionais e escritas na forma matricial, conforme (1-3)- Cap. III.

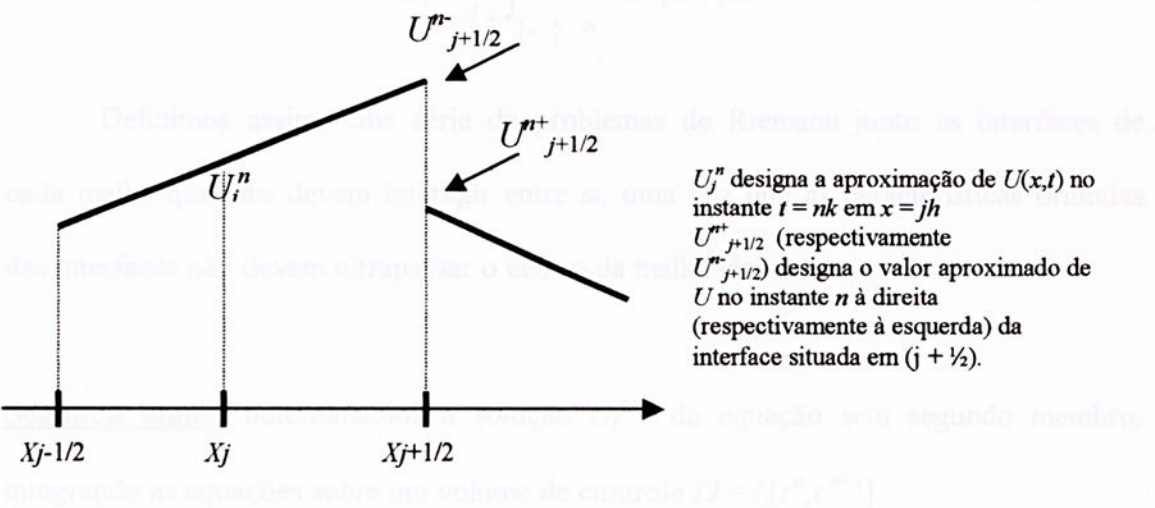
Método das Diferenças Finitas – Breve Revisão -

Definição: O Método das Diferenças Finitas consiste na aproximação das derivadas parciais de uma equação diferencial através de fórmulas de diferenças, e conseqüente verificação da equação discretizada ao problema inicial, em determinados pontos do domínio. Isto conduz a um sistema de equações algébricas, cuja solução fornece o valor da função desejada nos pontos pré-determinados.

Seja uma aproximação por diferenças finitas de incremento de tempo k e de espaço h , como se segue:

I_j designa os pontos da malha de abscissa $(j - \frac{1}{2}).h < x < (j + \frac{1}{2}).h$, $j.h$ correspondendo ao centro da malha e $(j \pm \frac{1}{2}).h$ suas interfaces.

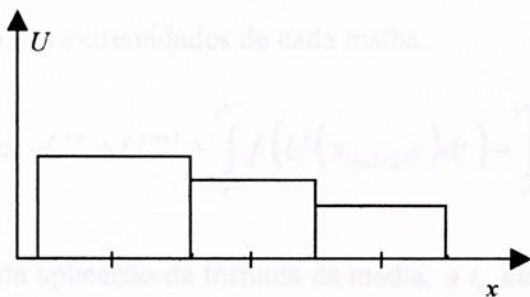




Esquema de Godunov

O esquema numérico de Godunov é determinado a partir da forma conservativa das equações de Cauchy e é baseado na resolução dos problemas de Riemman locais. Tal esquema consiste na distribuição de U constante por malha. A solução dada pelo esquema será, portanto, uma solução fraca. O cálculo se desenvolve no esquema tipo volumes finitos, em duas etapas, a saber:

Primeira etapa: prolonga-se U_j^n sobre cada malha $I_j \times [t^n, t^{n+1}]$:



Representação no plano (x, U)



$$U_j^n = \frac{1}{dx} \int_{\left(x-\frac{1}{2}\right) dx}^{\left(x+\frac{1}{2}\right) dx} u^n(x, t) dx$$

Definimos assim, uma série de problemas de Riemann junto às interfaces de cada malha que não devem interagir entre si, uma vez que as características oriundas das interfaces não devem ultrapassar o centro da malha vizinha.

Segunda etapa: determinamos a solução U_j^{n+1} da equação sem segundo membro, integrando as equações sobre um volume de controle $\Omega = I_j[t^n, t^{n+1}]$

Demonstração: Consideremos um domínio Ω e uma função teste $\phi = 1$ dentro de Ω e $\phi = 0$ fora de Ω . Por definição, determinar U como uma solução fraca de (1-3)- Cap. III) equivale a:

$$\int_{\Omega_x[t^n, t^{n+1}]} U_{,t} \phi dx dt + \int_{\Omega_x[t^n, t^{n+1}]} f(\phi) f(U)_{,x} dx dt = 0$$

$$\int_{\Omega_x[t^n, t^{n+1}]} U_{,t} + f(U)_{,xx} dx dt = 0 \Rightarrow \int_{\Omega_x[t^n, t^{n+1}]} \left(\text{div} \left(\begin{matrix} U \\ f(U) \end{matrix} \right) \right)_{t,x} dx dt = 0$$

Aplicando a fórmula de Green podemos transformar uma integral de superfície em um cálculo de fluxo nas extremidades de cada malha.

$$\Rightarrow \int_r \left(\begin{matrix} U \\ f(U) \end{matrix} \right) n ds = 0 \Rightarrow -U^n + U^{n+1} + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j-1/2}, t)) dt = 0$$

Por intermédio da aplicação da fórmula da média, $\exists t_0$ em $[t^n, t^{n+1}]$ tal que:

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j+1/2}, t)) dt = \Delta t f(U(x_{j+1/2}, t_0)) \text{ e } \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(U(x_{j-1/2}, t)) dt = \Delta t f(U(x_{j-1/2}, t_0))$$

Escolhendo como primeira aproximação $t_0 = t^n$, obtemos o esquema numérico conhecido como esquema de Godunov (1959):

$$U_j^{*n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g(x_{j+1/2}, t) - g(x_{j-1/2}, t))$$

onde g é o fluxo médio nas interfaces : $g(U_{(j+\frac{1}{2}, t)}) = \frac{1}{\Delta t} \int_{[t^n, t^{n+1}]} f(U_E(x, t)) dt$ e U_E a solução do problema de Riemann.

Terceira etapa: Corrige-se a solução sem segundo membro a partir do valor do segundo membro calculado no tempo n , a saber:

$$U_j^{n+1} = U_j^{*n+1} + \Delta t (G(U_j^n))$$

A solução exata do problema é então obtida pela concordância de uma série de soluções contínuas por partes. Para que os diferentes problemas de Riemman não interajam entre si, faz-se necessário que as características oriundas dos pontos de abscissas X_j não ultrapassem a meia malha. Essa condição de estabilidade é dita condição de COURANT-FRIEDRICHS-LEVY (CFL) que se traduz por:

$$\max \left(|u_j| + C_j \right) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

Esquema de Van Leer

Se por um lado o esquema de Godunov é o mais simples a se executar, por outro lado a viscosidade numérica que ele introduz representa mal os choques, amortecendo-os demasiadamente. É portanto possível construir um esquema unidimensional conservativo mais preciso, passando a 2ª ordem. O esquema proposto é o de Van Leer. Ele permite obter um esquema conservativo de segunda ordem no espaço, através da técnica de descentralização de fluxo. Considerando uma aproximação da solução



interpolada linearmente na vizinhança da média, buscamos uma solução discretizada, que a cada passo de tempo, é descrita pelos seus valores médios U_j^n sobre um conjunto de intervalos de passo constante Δx .

Por razões de simplificação de apresentação, limitaremos a apresentar uma malhagem uniforme de passo h (espaço). A solução aproximada sendo conhecida no tempo nk , a proposta é então, determinar as variáveis S e Q (no centro da malha) no tempo $(n+1)k$. A resolução se desenvolve em cinco etapas, a saber:

Primeira etapa: cálculo das declividades (derivadas)

A distribuição de U nos intervalos I_j é linear ao redor da média U_j^n . A declividade p_j^n desta distribuição é dada por uma estimativa centrada da derivada:

$$p_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2 \Delta x}$$

Por razões de estabilidade, acrescenta-se a esta definição de declividade, as correções de monotonia eliminando assim os máximos locais. Para cada malha, comparamos as declividades à esquerda, no centro e à direita, conforme se segue:

$$P_e = \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{\Delta x} \quad P_j^n = \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2 \Delta x} \quad P_d = \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{\Delta x}$$

No caso da declividade mudar de sinal, retornamos à 1ª ordem no espaço, anulando a declividade.

Segunda etapa: cálculo das variáveis junto às interfaces.



Calculamos assim as variáveis junto às interfaces das malhas no tempo nk a partir das declividades calculadas anteriormente. Desse modo, para as variáveis situadas em $j + \frac{1}{2}$, obtém-se:

$$U_{j+1/2}^{n-} = U_j^n + p_j^n \frac{\Delta x}{2} \quad U_{j-1/2}^{n+} = U_j^n - p_j^n \frac{\Delta x}{2}$$

Terceira etapa: cálculo das variáveis junto às interfaces no tempo $(n+1/2)U_j^{n+1/2}$

A fim de aumentar a precisão em tempo do esquema numérico, acrescentamos uma etapa intermediária cujo objetivo é determinar os fluxos nas interfaces. O esquema numérico é do tipo preditivo-corretor e permite calcular os fluxos nas interfaces no tempo $(n+1/2)$, o erro de arredondamento (em tempo) é da ordem de Δt^2 invés de Δt . A partir do desenvolvimento em série de Taylor (no tempo) e em 1ª ordem, temos:

$$U_{j-1/2}^{n+1/2} = U_{j-1/2}^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial U}{\partial t} + \varepsilon(t) = U_{j-1/2}^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial f(U)}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} G(U) + \varepsilon(t)$$

Quarta etapa: cálculo da solução sem segundo membro

A aplicação direta do esquema numérico tipo Godunov permite a determinação da solução sem segundo membro:

$$U_j^{*n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(G(U_{j+1/2}^{t+1/2-}) - G(U_{j-1/2}^{t+1/2+}) \right)$$

Quinta etapa: cálculo das soluções com segundo membro

Calculamos em seguida o segundo membro no tempo $(n+1)G_j^{n+1}$. A correção é em seguida efetuada a partir da média dos segundos membros tomados no tempo (n) e no tempo $(n+1)$:

$$U_j^{n+1} = U_j^{*n+1} + \frac{\Delta t}{2} \left(G(U_j^{*n+1}) + G(U_j^n) \right)$$

Estudo das condições iniciais e de contorno

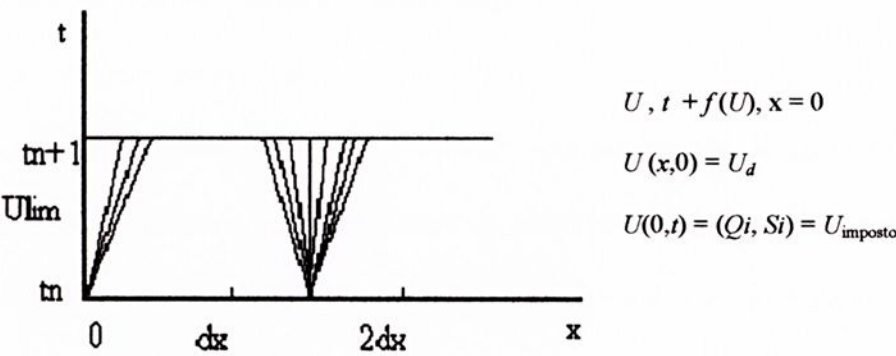
Considerações Gerais

Dentro deste contexto algumas apreciações sobre condições limite, ainda que resumidas, são feitas nesse item, a saber:

Sistema em questão:

$$\begin{cases} U_{,t} + f(U)_{,x} = 0, & (x,t) \in [0,1] \times [0,t] \\ U(x,0) = U_0(x) + \text{condições de contorno em } x=0 \text{ e } x=1 \end{cases}$$

O número de condições a serem impostas em $x = 0$ e $x = 1$ depende evidentemente da solução ou mais exatamente do número de características que entram (a montante do domínio). Como o esquema de Godunov é construído a partir da projeção L^2 da solução exata, correspondendo a um dado inicial constante por malha, fica relativamente fácil implementar as condições de contorno, calcula-se apenas o valor estacionário (isto é junto à fronteira) do $\frac{1}{2}$ do problema de Riemann.



Condições de contorno de montante

Buscamos uma solução $U(x,t)$ do problema dentro do espaço de funções C^1 por partes. O problema é análogo ao problema de Riemann, sendo portanto definido no quadrante $(x \geq 0, t \geq 0)$, em seguida determina-se a solução estacionária pela intersecção no plano (S,Q) das curvas Γ^+ e Γ^- com as curvas impostas pelo tipo de condição de contorno. A teoria dos sistemas hiperbólicos nos afirma que **podemos impor duas condições de contorno se o regime de escoamento é torrencial e apenas uma se o regime é fluvial**. Sendo assim, temos:

$$\begin{cases} U_{,t} + f(U)_{,x} = 0 \\ U(x,0) = U_d \\ Q(0,t) = Q_i > 0 \end{cases}$$

Regime fluvial

$$\begin{cases} U_{,t} + f(U)_{,x} = 0 \\ U(x,0) = U_d \\ Q(0,t) = Q_i > 0 \\ S(0,t) = S_i > 0 \end{cases}$$

Regime torrencial

Condições de contorno a jusante

A teoria dos sistemas hiperbólicos nos afirma que **podemos impor uma condição quando o regime é fluvial e nenhuma quando o regime é torrencial**. Neste caso é a área molhada S que é imposta. Isto pode ser interpretado como uma condição de regime uniforme a jusante.



V – VALIDAÇÃO DO CÓDIGO DE CÁLCULO – ESTUDO DE CASOS – TESTES COM O MODELO UNIDIMENSIONAL

Testes Realizados a partir de código de cálculo com base nos esquemas numéricos tipo Godunov- VanLeer

Testes Elementares em Regime Permanente

A proposta deste item é apresentar e comentar alguns dos primeiros resultados de ordem numérica quando da geração de “roll waves” em fluidos newtonianos, baseados nas equações “shallow water”, e obtidos com o código de cálculo desenvolvido. O programa de simulação tem sua formulação teórica assentada na teoria de sistemas não-lineares hiperbólicos e suas decorrências, notadamente a resolução dos problemas de Riemman.

Afim de validar o esquema numérico adotado, faremos 02 tipos de testes: uma 1ª série de testes no regime permanente (casos de curvas de remanso - movimento permanente gradualmente variado), canais com declividade constante e com mudança de declividade; uma 2ª série de testes em regime transitório (caso de ruptura de barragem e ondas geradas por impacto localizado de massas sólidas em meio líquido).

1ª Série de Testes : Regime Permanente

- **Curvas de remanso**

Fixada uma vazão de $0.8 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, um coeficiente de atrito Chézy ($C=30$) em todo canal, variamos a declividade e as condições impostas a montante e a jusante. Assim procedendo, obtivemos os resultados ilustrados como se segue:



i) Curvas de Remanso tipo S ("Steep Slope")

Para uma declividade do canal da ordem de 0.05 m/m, obtemos uma lâmina normal (h_n) de 0.28m e uma lâmina crítica (h_c) da ordem de 0.40 m. Impondo uma altura (h) a montante de 0.39m (figura 1) e 0.10m (figura 2) pudemos verificar que, a lâmina d'água tende para a lâmina normal através de uma curva tipo S_2 no primeiro caso e uma curva tipo S_3 no segundo caso (curvas essas conhecidas da área de Hidráulica de Superfície Livre) em regime permanente.

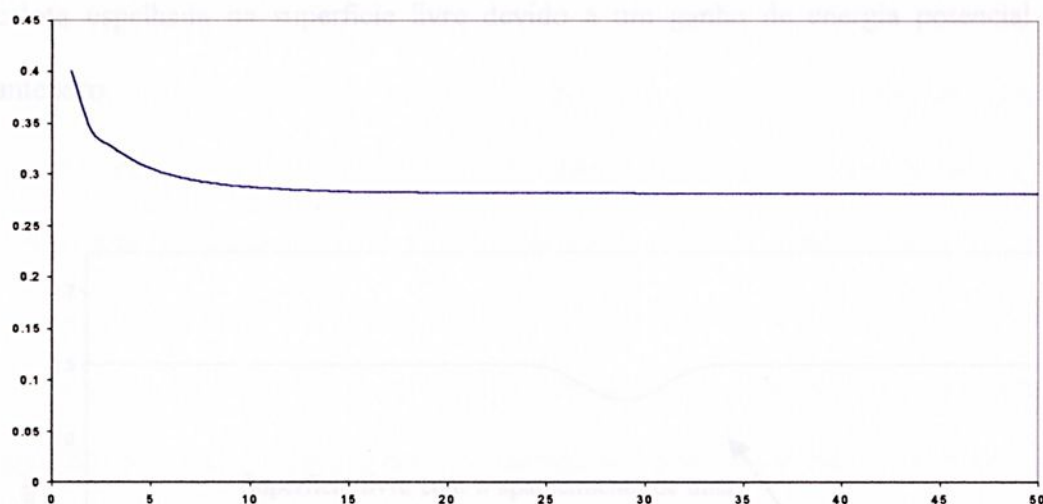


Figura 1 - Curva tipo S_2 - $\tan(\theta) = 0.05$, $h_n = 0.28$, $h_c = 0.40$, $h = 0.39$.

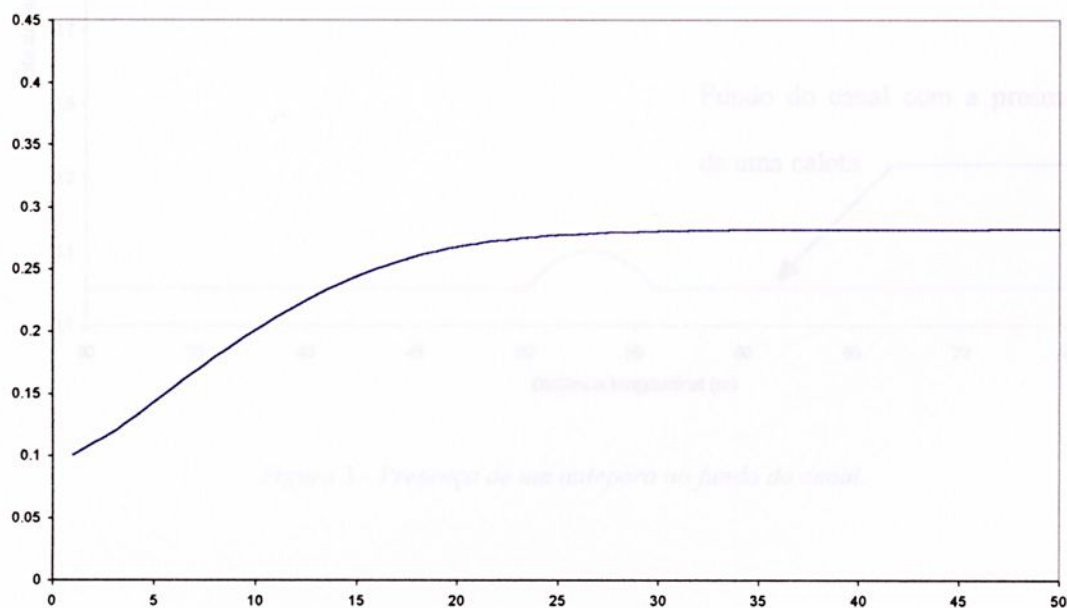


Figura 2 - Curva tipo S_3 - $\tan(\theta) = 0.05$, $h_n = 0.28$, $h_c = 0.40$, $h = 0.10$.



Canal com declividade constante

A seguir, dentro do contexto de regime permanente, fixamos uma lâmina igual a lâmina normal da ordem de 1,50m. O canal ainda é do tipo retangular (largura = 1.0m), mas agora com declividade nula, ou seja: um canal horizontal. Este exemplo foi simulado através da função "fundo" do tipo parabolóide entre 50 e 56 metros (conforme figura 3). Comprovamos novamente a eficácia do código de cálculo em regime permanente através do surgimento da resposta esperada; ou seja, o aparecimento da calota espelhada na superfície livre devido a um ganho de energia potencial com o anteparo.

(alguns segundos de computação após uma evolução regular das vazões e lâminas)

de água com velocidade de 0,4 m/s. Na simulação de regime permanente a solução

após estabilização, é apresentada de uma vazão de 0,1 m³/s a lâmina d'água de 0,333 m

(0,1111 m²) ao longo de todo canal (vale ressaltar que a água é obtida pela resolução da

em regime permanente, ou seja, em regime de escoamento permanente)

de água da lâmina d'água de 0,333 m

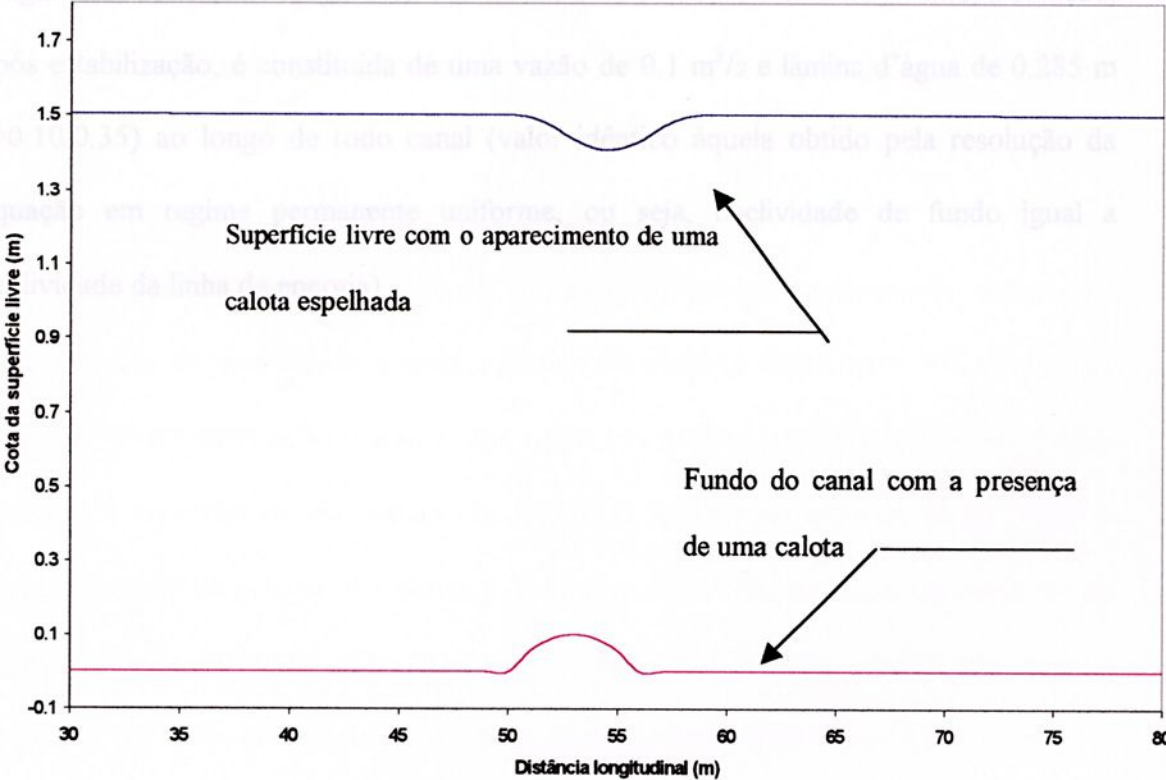


Figura 3 - Presença de um anteparo no fundo do canal.



Canal com declividade constante

Em um canal retangular de 2000 m de comprimento, inicialmente vazio, de largura constante (1 metro) e de declividade de 0.3%, introduzimos uma vazão constante $Q = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}$. O atrito de parede é modelizado por um coeficiente de Strickler de 20. As lâminas d'água de montante e jusante não são fixadas. O incremento espacial $\Delta x = 100 \text{ m}$ e o incremento de tempo foi modulado de maneira a garantir um número de Courant de 0.50.

O cálculo através do código desenvolvido mostrou-se estabilizar rapidamente (alguns segundos do computador) após uma evolução regular das vazões e lâminas d'água sem oscilação – (figura 4). Na ausência de condição-limite de jusante, a solução, após estabilização, é constituída de uma vazão de $0.1 \text{ m}^3/\text{s}$ e lâmina d'água de 0.285 m ($=0.10/0.35$) ao longo de todo canal (valor idêntico àquela obtido pela resolução da equação em regime permanente uniforme, ou seja, declividade de fundo igual à declividade da linha de energia).



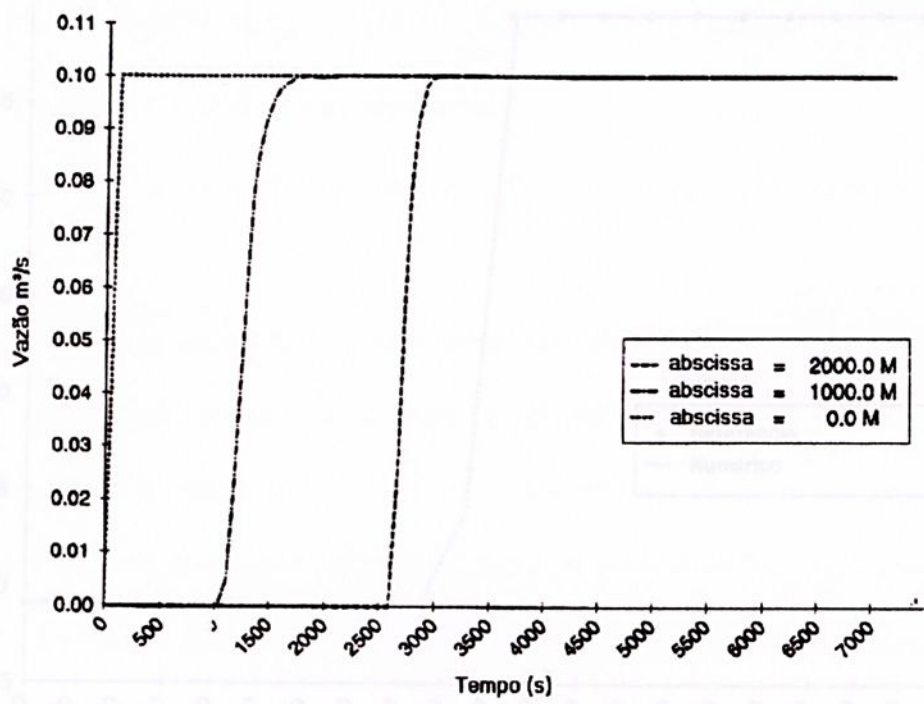


Figura 4 – Evolução das vazões para regimes de estabilização

Canal com mudança de declividade do fundo.

Nas mesmas condições que os ensaios precedentes, apresentando, entretanto, uma mudança na declividade à meia distância do canal (a montante = 4% e a jusante 2%), podemos observar, na figura 5, que existe um erro na previsão das lâminas d'água quando da mudança de declividade do fundo. O incremento espacial de $\Delta x = 100$ m parece elevado para levar em conta a evolução da lâmina na zona de mudança de declividade. É mostrado nesta figura um valor de referência obtido nas mesmas condições por outro código de cálculo mais preciso e com malha menor ($\Delta x = 10$ m).



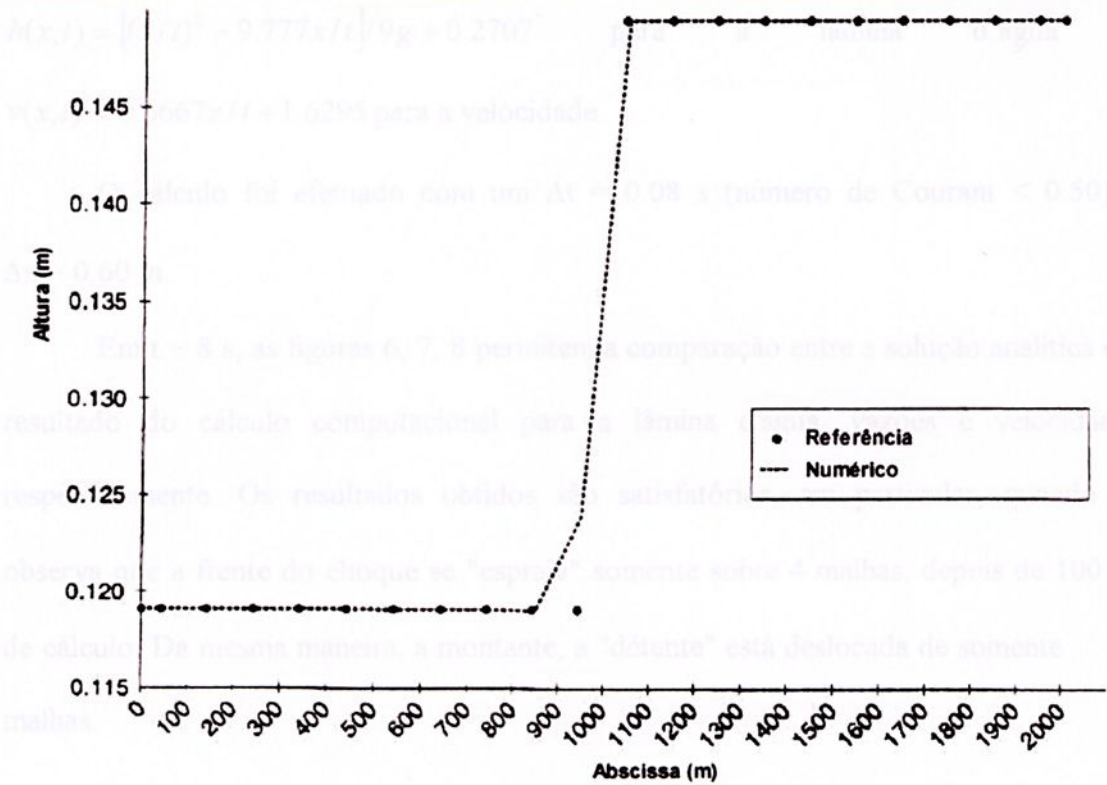


Figura 5 – Evolução da profundidade em canal com mudança de declividade

2ª Série : Regime transiente

Problema de ruptura de barragem

• Problema de Riemann

O canal é retangular com fundo horizontal de largura 4.905 m e de 60 m de comprimento. O atrito é desprezado, anulando o segundo membro da equação da quantidade de movimento. A condição inicial é constituída de velocidade nula, lâmina d'água de 0.6086 m na metade de montante, de 0.0425 m na outra metade de jusante. Consideramos uma vazão nula a montante e fluxo de saída livre a jusante. Trata-se, portanto, de um problema de Riemann simples para o qual conhecemos a solução analítica constituída de um choque a jusante deslocando-se com uma velocidade $\sigma = 2.5$ m/s, de uma zona intermediária de lâmina 0.2124 m e velocidade de 2 m/s, terminando por uma onda de "détente" a montante, de equação



$$h(x,t) = \left[(x/t)^2 - 9.777x/t \right] / 9g + 0.2707 \quad \text{para a lâmina d'água e}$$
$$v(x,t) = 0.6667x/t + 1.6295 \quad \text{para a velocidade.}$$

O cálculo foi efetuado com um $\Delta t = 0.08$ s (número de Courant < 0.50) e $\Delta x = 0.60$ m.

Em $t = 8$ s, as figuras 6, 7, 8 permitem a comparação entre a solução analítica e o resultado do cálculo computacional para a lâmina d'água, vazões e velocidades respectivamente. Os resultados obtidos são satisfatórios, em particular, quando se observa que a frente do choque se "espraia" somente sobre 4 malhas, depois de $100 \Delta t$ de cálculo. Da mesma maneira, a montante, a "détente" está deslocada de somente 3 malhas.

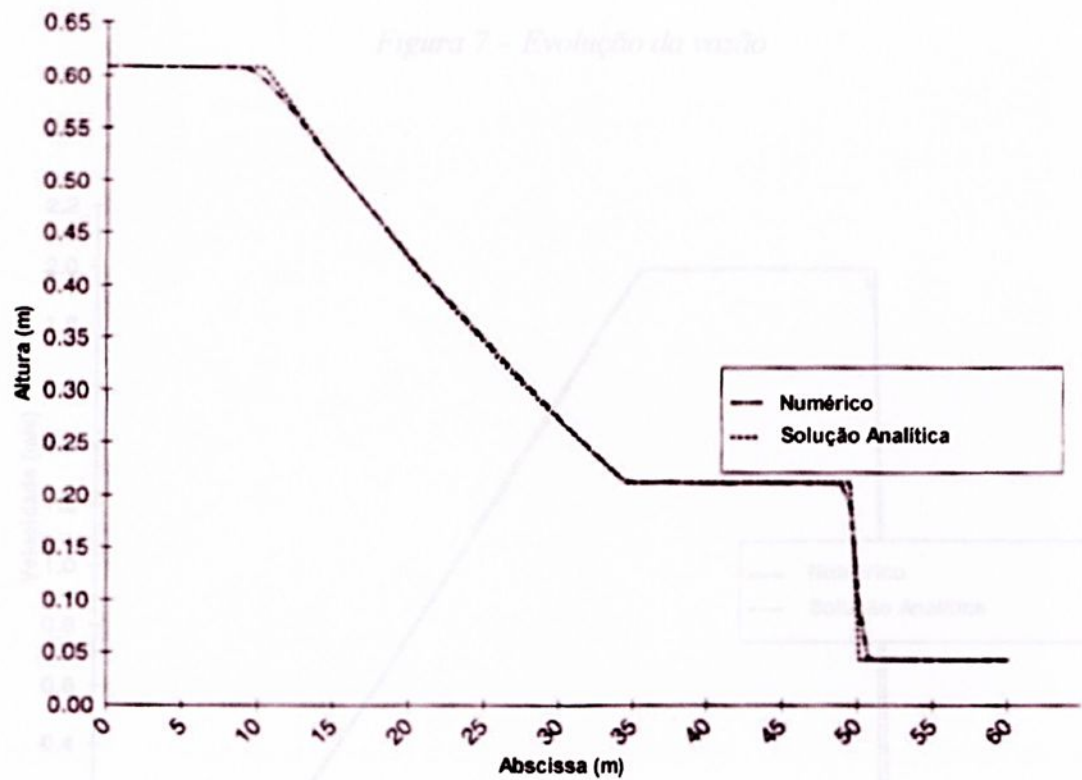


Figura 6 – Solução do problema de Riemann (ruptura de barragem)



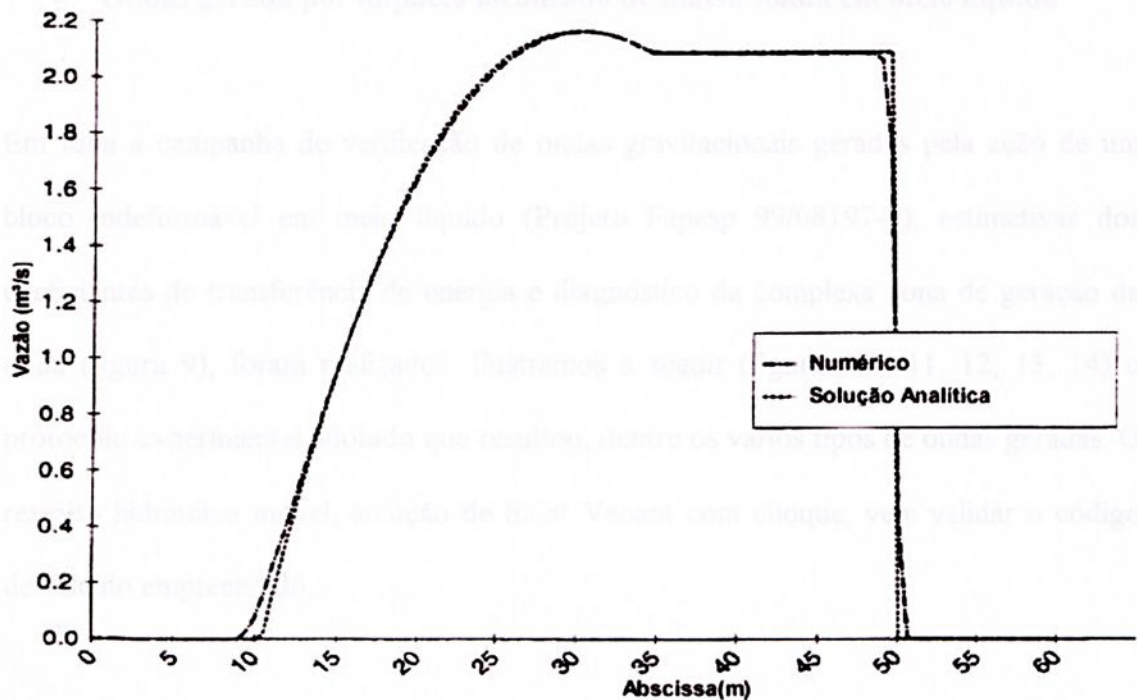


Figura 7 – Evolução da vazão

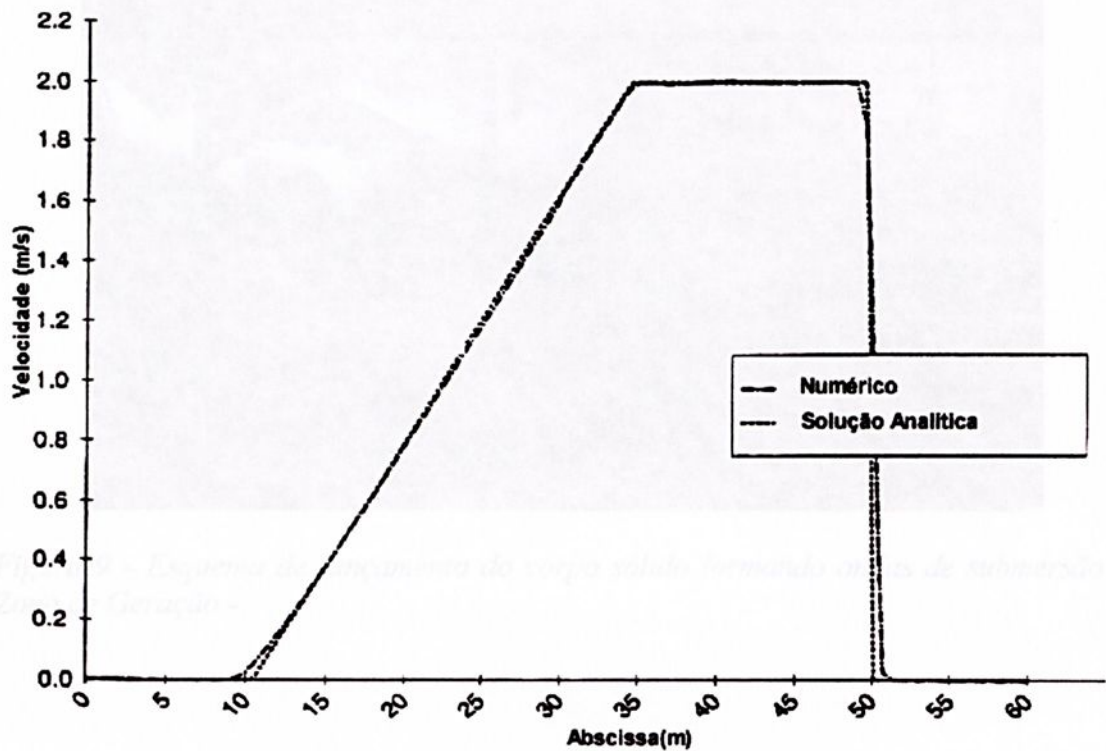


Figura 8 – Evolução da velocidade



- Ondas gerada por impacto localizado de massa sólida em meio líquido

Em toda a campanha de verificação de ondas gravitacionais geradas pela ação de um bloco indeformável em meio líquido (Projeto Fapesp 99/08197-9), estimativas dos coeficientes de transferência de energia e diagnóstico da complexa zona de geração da onda (figura 9), foram realizados. Ilustramos a seguir (figuras 10, 11, 12, 13, 14) o protocolo experimental adotado que resultou, dentre os vários tipos de ondas geradas. O ressalto hidráulico móvel, solução de Saint Venant com choque, vem validar o código de cálculo empreendido.



Figura 9 - Esquema de lançamento do corpo sólido formando ondas de submersão – Zona de Geração -



Ensaio experimental resultando em onda do tipo “Ressalto Hidráulico”

Tabela 1 – Característica do bloco deslizante

	Bloco 1(concreto)
L(cm)	33.1
l(cm)	27.7
E(cm)	12
$\beta(^{\circ})$	40
ρ_s/ρ_w	2
Massa(Kg)	21.60

Tabela 2 – Dados do experimento

Lâmina d'água no canal (d) (cm)	15
Distância de lançamento do bloco sobre a rampa (cm)	100
Coefficiente de atrito da rampa ($\text{tg}\phi$)	0.14
Declividade da rampa ($^{\circ}$)	27
Velocidade de impacto (m/s)	2



Froude	1.65
Distância da sonda da zona de impacto (m)	3
Tempo de simulação (s)	5
H3(exp) (cm)	22.80
H3(num) (cm)	23.00
ρ_s / ρ_w	2

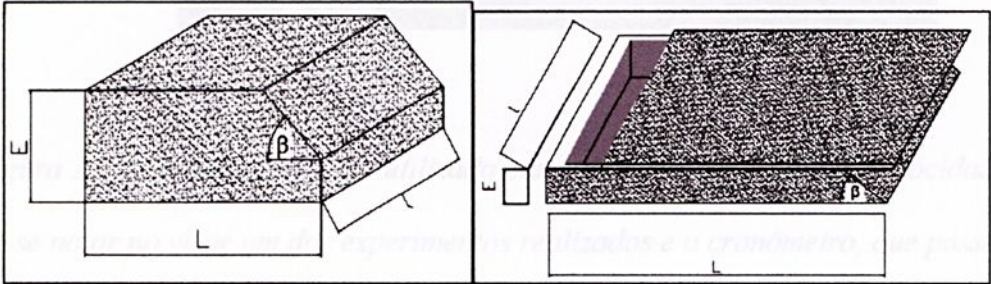


Figura 10 – Geometria dos blocos deslizantes



Figura 11 - Esquema de filmagem no laboratório (câmera de vídeo, iluminação, malha)





Figura 12 - Aparelho de video utilizado para obtenção do campo de velocidades (pode-se notar no visor um dos experimentos realizados e o cronômetro, que passava os quadros em 1/30 segundos).



Figura 13 - Detalhe da imagem analisada no visor



Comparação Numérico-Experimental de Ondas (e/d=0.80)

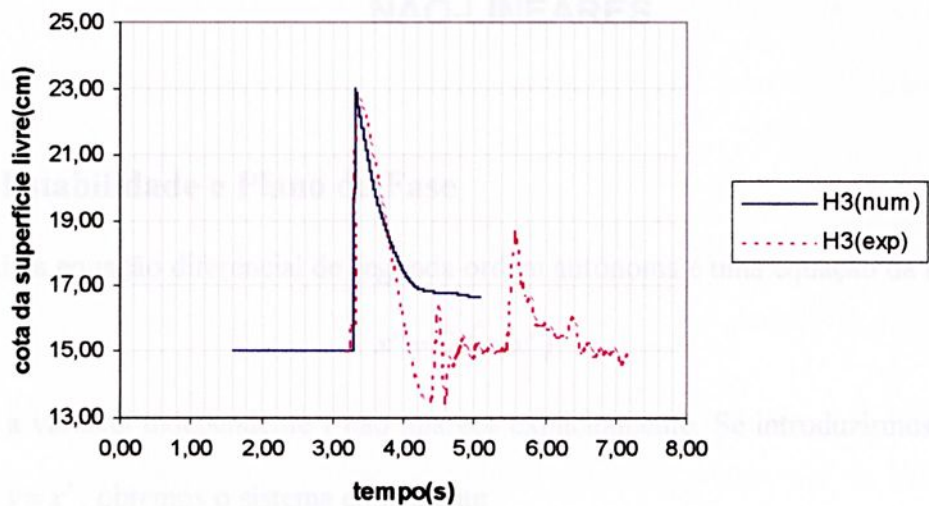


Gráfico 14 – Apresenta os resultados obtidos da cota da superfície livre após a perturbação, utilizando o modelo numérico e o experimental. Podemos notar um perfil de ressalto hidráulico para uma relação $E/d=0.8$



VI – REVISÃO SOBRE FUNÇÕES E SISTEMAS DIFERENCIAIS NÃO-LINEARES

VI.1 – Estabilidade e Plano de Fase

Uma equação diferencial de segunda ordem autônoma é uma equação da forma

$$x'' = G(x, x') \quad (1)$$

na qual, a variável independente t não aparece explicitamente. Se introduzirmos a nova variável $y = x'$, obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = G(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

ou seja, duas equações de primeira ordem, onde nenhuma delas envolve a variável independente t explicitamente. Este sistema é um caso especial do sistema autônomo geral das duas equações de primeira ordem, a saber:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = F(x, y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = G(x, y) \end{cases} \quad (3)$$

Novamente, a variável independente t não aparece explicitamente. Assumimos que as funções F e G são continuamente diferenciáveis em alguma região R no plano xy , que é chamado Plano de Fase para o sistema em (3). Então, de acordo com os teoremas de existência e unicidade, dado t_0 e qualquer ponto (x_0, y_0) de R , existe uma única solução $x = x(t)$, $y = y(t)$ de (3) que está definida em algum intervalo aberto (a, b) contendo t_0 e que satisfaz as condições iniciais.

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \quad (4)$$



As equações $x(t_0)=x_0$, $y(t_0)=y_0$ descrevem então uma curva solução parametrizada no plano de fase. Qualquer curva solução é chamada de Trajetória do sistema em (3), e precisamente uma trajetória passa por cada ponto da região R . Um ponto crítico do sistema em (4) é um ponto (x^*, y^*) tal que

$$F(x^*, y^*)=G(x^*, y^*)=0 \quad (5)$$

Se (x^*, y^*) é um ponto crítico do sistema, então as funções constantes

$$x(t) \equiv x^*, \quad y(t) \equiv y^* \quad (6)$$

satisfazem as equações em (3). Uma tal solução constante é chamada de solução de equilíbrio do sistema. Note que a trajetória da solução de equilíbrio em (6) consiste no ponto único (x^*, y^*) .

Estabilidade

Um ponto crítico (x^*, y^*) do sistema autônomo em (3) é dito estável desde que, se o ponto inicial (x_0, y_0) está suficientemente próximo de (x^*, y^*) , então $(x(t), y(t))$ permanece próximo de (x^*, y^*) para todo $t > 0$. A figura 1 representa um ponto crítico $(0,0)$ estável.

O ponto crítico (x^*, y^*) é chamado instável se não é estável. O ponto de sela em $(0,0)$ mostrado na figura 2 é um ponto crítico instável.

Figura 2 - Um ponto de Sela

Estabilidade Assintótica

O ponto crítico (x^*, y^*) é chamado assintoticamente estável se é estável e, mais ainda, toda trajetória que começa suficientemente próxima de (x^*, y^*) tende a



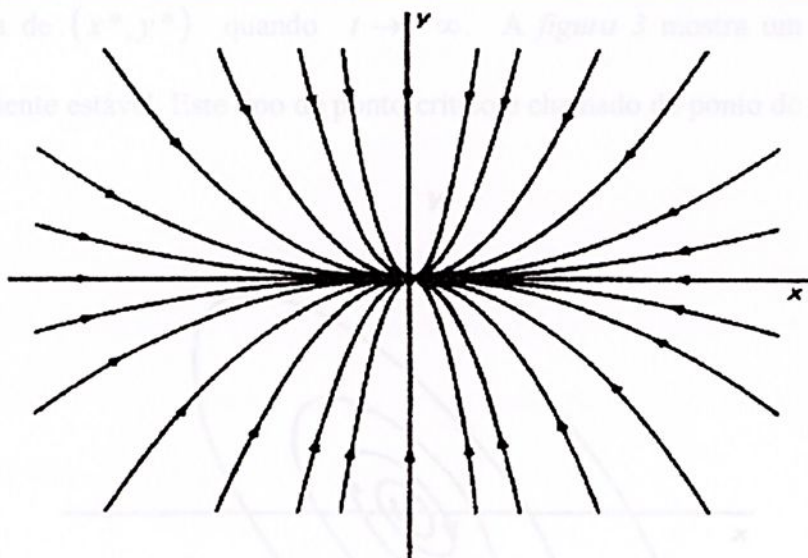


Figura 1 – Um nó impróprio estável

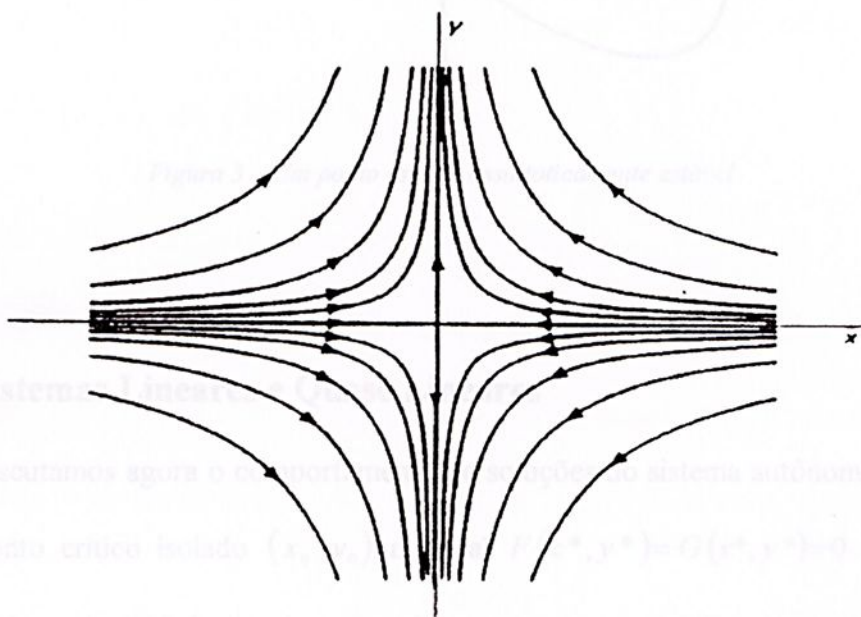


Figura 2 – Um ponto de Sela

Estabilidade Assintótica

O ponto crítico (x^*, y^*) é chamado assintoticamente estável se é estável e, mais ainda, toda trajetória que começa suficientemente próxima de (x^*, y^*) também

se aproxima de (x^*,y^*) quando $t \rightarrow +\infty$. A figura 3 mostra um ponto crítico assintoticamente estável. Este tipo de ponto crítico é chamado de ponto de espiral.

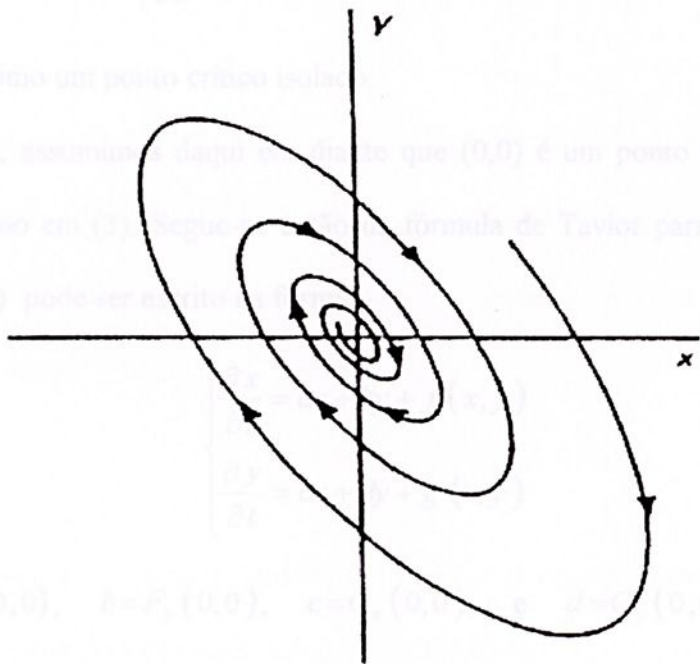


Figura 3 – Um ponto espiral assintoticamente estável

VI.2 –Sistemas Lineares e Quase Lineares

Discutamos agora o comportamento de soluções do sistema autônomo (3), perto de um ponto crítico isolado (x_0,y_0) no qual $F(x^*,y^*)=G(x^*,y^*)=0$. Um ponto crítico é chamado isolado se alguma vizinhança sua não contém outro ponto crítico. Assumimos todo tempo que as funções F e G são continuamente diferenciáveis numa vizinhança de (x_0,y_0) .

Podemos assumir sem perda de generalidade que $x_0=y_0=0$. Caso contrário,

faremos as substituições $u=x-x_0$, $v=y-y_0$. Então $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial t}$ de modo que:



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F(u + x_0, v + y_0) = F_1(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} = G(u + x_0, v + y_0) = G_1(u, v) \end{cases} \quad (7)$$

que tem $(0,0)$ como um ponto crítico isolado.

Portanto, assumimos daqui em diante que $(0,0)$ é um ponto crítico isolado do sistema autônomo em (3). Segue-se então da fórmula de Taylor para funções de duas variáveis que (3) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax + by + f(x, y) \\ \frac{\partial y}{\partial t} = cx + dy + g(x, y) \end{cases} \quad (8)$$

onde $a = F_x(0,0)$, $b = F_y(0,0)$, $c = G_x(0,0)$, e $d = G_y(0,0)$, e as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ têm a propriedade que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \quad (9)$$

ou seja, quando (x,y) é próximo de $(0,0)$, as quantidades $f(x,y)$ e $g(x,y)$ são pequenas em comparação com $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, o qual é pequeno. Daí, quando (x,y) é próximo de $(0,0)$, o sistema não linear em (8) é, em algum sentido, “próximo” do sistema linearizado.

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax + by \\ \frac{\partial y}{\partial t} = cx + dy \end{cases} \quad (10)$$

Assumindo que $(0,0)$ é também um ponto crítico isolado deste sistema linear, o sistema autônomo em (8) é portanto chamado de quase linear desde que f e g satisfaçam as condições em (9). Acontece que, na maioria dos casos (mas não em todos), as trajetórias perto de $(0,0)$ do sistema quase linear em (8) parecem-se muito – qualitativamente – com aquelas de sua “linearização” em (10). Conseqüentemente, o



primeiro passo com direção a se compreender sistemas autônomos gerais é caracterizar os pontos críticos de sistemas lineares.

Sistemas Lineares

O sistema em (10) é prontamente resolvido pelo método de eliminação ou pelo método de autovalor. Usando o último método, substituímos $x = Ae^{\lambda t}$ e $y = Be^{\lambda t}$ em (10). Depois de dividir as equações resultantes por $e^{\lambda t}$, obtemos as duas equações lineares homogêneas, a saber:

$$\begin{aligned}(a - \lambda).A + b.B &= 0 \\ c.A + (d - \lambda).B &= 0\end{aligned}\tag{11}$$

que os coeficientes A e B devem satisfazer. Para que as equações tenham uma solução não-trivial, o determinante dos coeficientes deve anular-se:

$$\begin{aligned}\Delta &= (a - \lambda).(d - \lambda) - b.c = a.d - a.\lambda - d.\lambda + \lambda^2 - b.c \\ &= \lambda^2 - (a + d).\lambda + (a.d - b.c) = 0\end{aligned}\tag{12}$$

A natureza da solução do sistema em (10) é determinada pela natureza das raízes da equação característica quadrática em (12). Notando que esta equação é simplesmente a equação característica da matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

do sistema linear em (10).

Assumimos que $(0,0)$ é um ponto crítico isolado em (10). Segue-se que $a.d - b.c \neq 0$, de modo que $\lambda = 0$ não pode ser raiz de (12). A razão é que o termo constante $(a.d - b.c)$ em (12) é o determinante do sistema de operações lineares

$$\begin{aligned}a.x + b.y &= 0 \\ c.x + d.y &= 0\end{aligned}\tag{13}$$



Se $(a.d - b.c) = 0$, as equações em (13) são as equações da mesma reta que passa por $(0,0)$, de modo que o sistema tem toda uma reta de pontos críticos no lugar de um ponto crítico isolado em $(0,0)$.

Conseqüentemente, a equação característica em (12) recai em um destes casos a saber:

1. Raízes reais desiguais de mesmo sinal;
2. Raízes reais desiguais de sinais contrários;
3. Raízes reais iguais não nulas;
4. Raízes complexas conjugadas; ou
5. Raízes imaginárias puras.

Teorema 1 Estabilidade de Sistemas Lineares

Sejam λ_1 e λ_2 as raízes da equação característica

$$\lambda^2 - (a + d).\lambda + (a.d - b.c) = 0$$

do sistema linear

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = ax + by \\ \frac{\partial y}{\partial t} = cx + dy \end{cases}$$

com $a.d - b.c \neq 0$. Então o ponto crítico $(0,0)$ é

- (a) assintoticamente estável, se as partes reais de λ_1 e λ_2 são ambas negativas;
- (b) estável, mas não assintoticamente estável, se as partes reais de λ_1 e λ_2 são ambas zero (de modo que $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$);
- (c) instável, se λ_1 ou λ_2 tem parte real positiva.

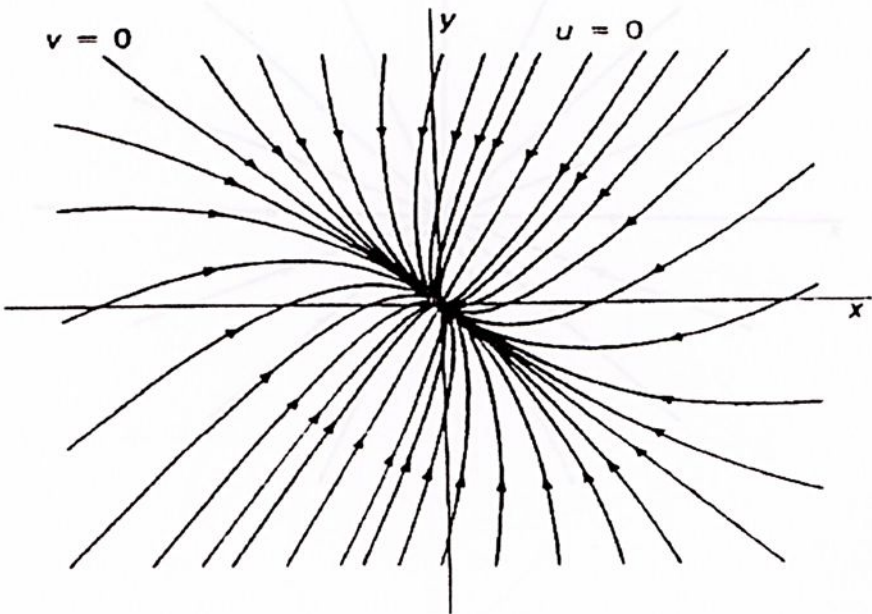
Para nós, é considerável o efeito de perturbações pequenas nos coeficientes a , b , c e d do sistema linear em (10), que resultam em pequenas perturbações das raízes características λ_1 e λ_2 . Se essas perturbações são suficientemente pequenas, partes reais positivas (de λ_1 e λ_2) permanecem positivas, e parte reais negativas permanecem negativas. Portanto, um ponto crítico assintoticamente estável permanece

assintoticamente estável, e um ponto crítico instável permanece instável. A parte (b) do Teorema 1 é, assim, o único caso no qual perturbações arbitrariamente pequenas podem afetar a estabilidade de ponto crítico (0,0).

Tipo de ponto crítico

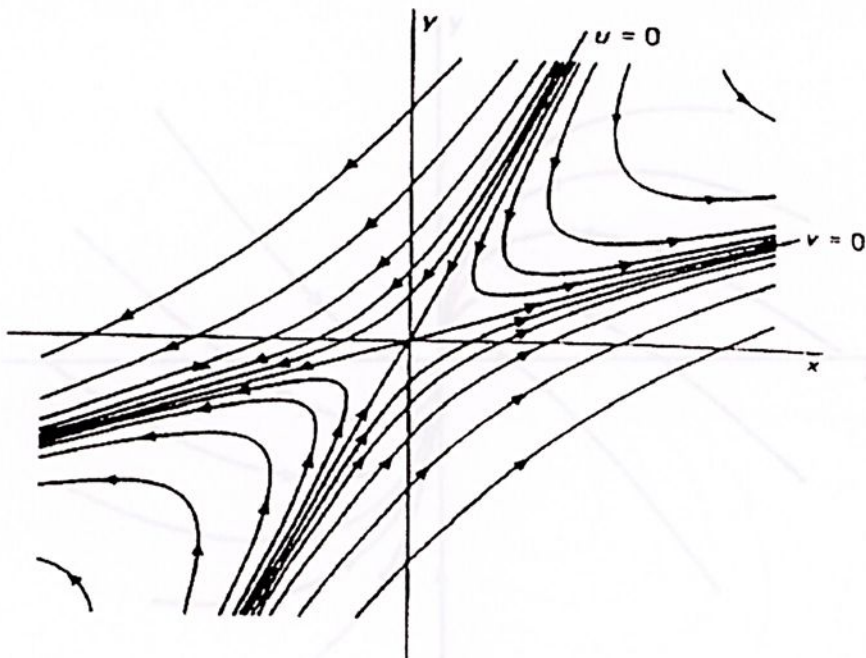
Raízes da equação Característica	Tipo de ponto crítico
Reais, desiguais, mesmo sinal	Nó impróprio (i)
Reais, desiguais, sinais contrários	Ponto de sela (ii)
Reais e desiguais	Nó próprio (iii) ou impróprio (iv)
Conjugadas complexas	Ponto espiral (v)
Imaginárias puras	Centro (vi)

Exemplos de Pontos Críticos

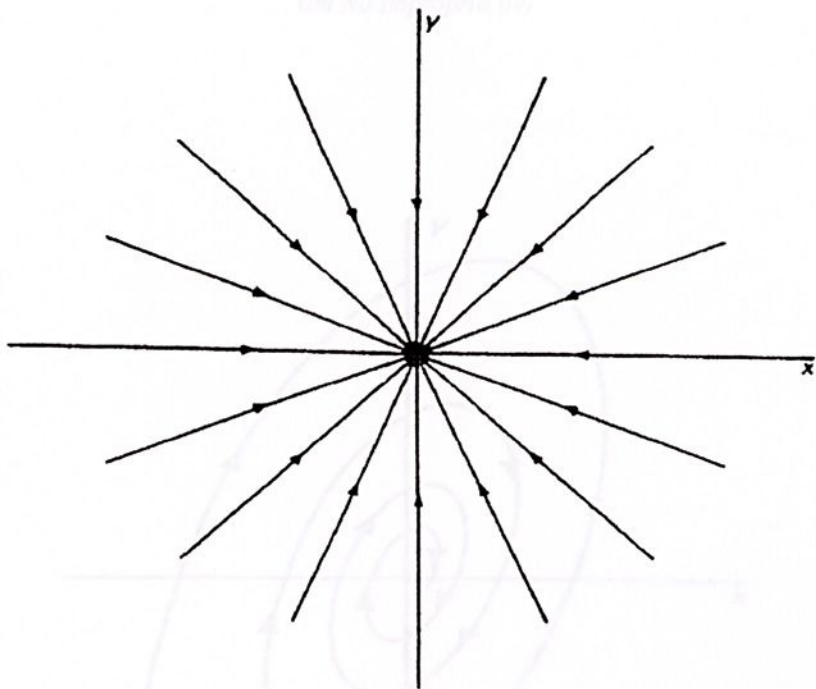


Um Nó Impróprio (i)

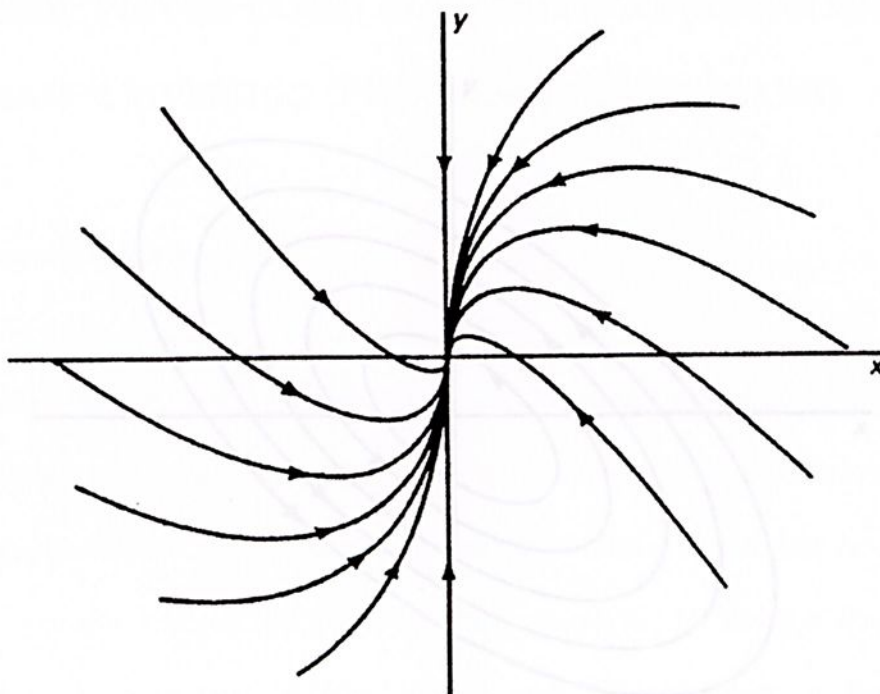




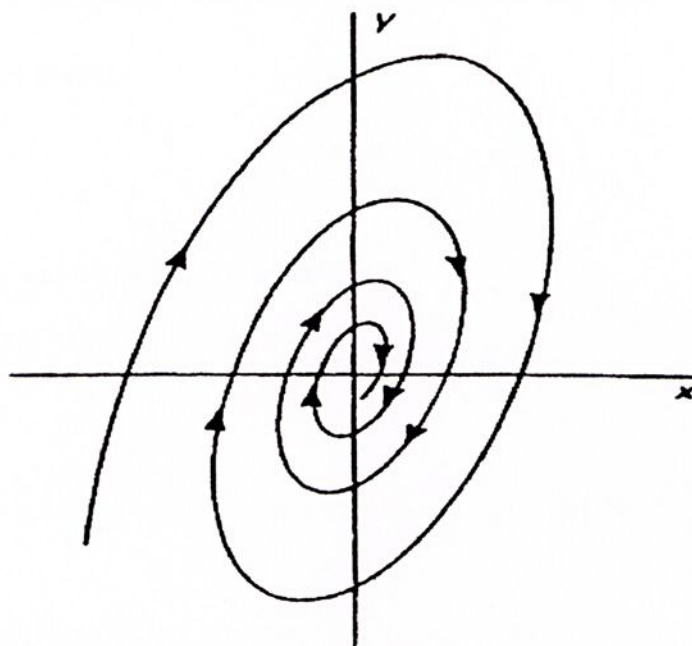
Um Ponto de Sela (ii)



Um Nó Próprio (iii)



Um Nó Impróprio (iv)



Um Ponto Espiral (v)

VII – ROLL WAVES COMO SOLUÇÃO DO SISTEMA SHALLOW

WATER INVÍSCIDO (PROBLEMA DE DRESSLER)

Equacionamento matemático

Com base no trabalho de Dressler (1953) podemos afirmar que a

massa específica não varia com a profundidade e portanto é grande

quando comparada ao elemento de fluido considerado e desprezamos

pois se admitir a partir da equação de conservação de massa

movimento. As equações de movimento de um elemento de fluido

consideramos com fronteiras livres) são dadas a partir das equações de

movimento do fluido. O sistema fica então composto de uma equação de conservação

de massa (1), uma equação representativa de conservação de quantidade de movimento

(2) e duas relativas ao resalto hidráulico (3 e 4), conforme se segue

Conservação da massa :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0$$

Conservação da quantidade de movimento :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + g h \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = g h \sin(\theta) - \frac{\tau}{C^2} \frac{u^2}{h} \tag{2}$$

$$\Rightarrow u \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial(hu)}{\partial x} + h u \frac{\partial u}{\partial x} + g h \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = g h \sin(\theta) - \frac{\tau}{C^2} \frac{u^2}{h}$$

$$\Rightarrow u \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right) + h \frac{\partial u}{\partial t} + h u \frac{\partial u}{\partial x} + g h \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = g h \sin(\theta) - \frac{\tau}{C^2} \frac{u^2}{h} \rightarrow h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = g \sin(\theta) - \frac{\tau}{C^2} \frac{u^2}{h}$$



VII – ROLL WAVES COMO SOLUÇÃO DO SISTEMA SHALLOW WATER INVÍSCIDO (PROBLEMA DE DRESSLER)

Equacionamento matemático

Com base em uma quantidade finita de material isotrópico, admitindo que a massa específica não varie, e supondo que a profundidade do escoamento é grande quando comparada ao diâmetro das partículas constituintes, um modelo incompressível pode ser adotado a partir das equações da conservação da massa e quantidade de movimento. As equações "shallow water" com choque (dada à natureza dos escoamentos com frentes íngremes) são obtidas a partir das equações clássicas da mecânica dos fluidos. O sistema fica então constituído de uma equação da conservação da massa (1), uma equação representativa da conservação da quantidade de movimento (2) e duas relativas ao ressalto hidráulico (3 e 4), conforme se segue

Conservação da massa :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h \cdot u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

Conservação da quantidade de movimento :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + g \cdot h \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = g \cdot h \cdot \sin(\theta) - \frac{g \cdot u^2}{C^2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow u \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + h \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial(hu)}{\partial x} + h \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot h \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = g \cdot h \cdot \sin(\theta) - \frac{g \cdot u^2}{C^2}$$

$$\Rightarrow u \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} \right) + h \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + h \cdot u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot h \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = g \cdot h \cdot \sin(\theta) - \frac{g \cdot u^2}{C^2} \rightarrow \div h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = g \cdot \sin(\theta) - \frac{g \cdot u^2}{C^2 \cdot h}$$



$$\rho h(w - u) = \rho_0 h_0 w \quad (3)$$

$$\rho_0 h_0 w u = \frac{1}{2} \rho g h^2 \cos(\theta) \quad (4)$$

sendo:

h : profundidade do escoamento

h_0 : profundidade do escoamento uniforme

u : velocidade média na vertical

w : velocidade de propagação da frente do escoamento

C : coeficiente de Chézy

θ : declividade do canal

ρ : massa específica do fluido

O 2º membro da eq. (2) é composto de dois termos:

- termo da gravidade
- termo representativo dos efeitos dissipativos na interface entre o escoamento e as paredes do canal.

Condições de existência de "roll waves"

A proposta deste parágrafo é elucidar as condições necessárias e suficientes para a geração de "roll waves" como solução das equações "shallow water".

Considerando o escoamento de um fluido sobre um plano infinito, definimos a princípio, as variáveis de interesse e por conseguinte as escalas de trabalho; a saber:



escala de comprimento: $H = \frac{h}{h_0}$ e $X = \frac{x \cdot \tan(\theta)}{h_0}$

escala de velocidades: $U = \frac{u}{\sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos(\theta)}}$ e $W = \frac{w}{\sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos(\theta)}}$

escala de tempo: $T = \frac{t}{\frac{h_0}{\tan(\theta)} \cdot \frac{1}{\sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos(\theta)}}}$

onde $\sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos(\theta)}$ a velocidade de propagação das ondas gravitacionais.

Se introduzirmos essas novas variáveis adimensionais nas equações (1) e (2), e se desprezarmos as variações da massa específica, temos:

Trabalhando com a equação (1):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h \cdot u)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial(H \cdot h_0)}{\partial \left(\frac{T \cdot h_0}{\tan \theta \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta}} \right)} + \frac{\partial(H \cdot h_0 \cdot U \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta})}{\partial \left(\frac{X \cdot h_0}{\tan \theta} \right)} = 0$$

$$\tan \theta \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta} \cdot \frac{\partial H}{\partial T} + \tan \theta \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta} \cdot \frac{\partial(H \cdot U)}{\partial X} = 0$$

Como $h_0 > 0$

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(H \cdot U)}{\partial X} = 0 \quad (5)$$

Trabalhando com a equação (2), tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + g \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = g \cdot \sin(\theta) - \frac{g u^2}{C^2 h}$$

$$\frac{\partial(U \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta})}{\partial \left(\frac{T \cdot h_0}{\tan \theta \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta}} \right)} + U \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta} \cdot \frac{\partial(U \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta})}{\partial \left(\frac{X \cdot h_0}{\tan \theta} \right)} + g \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial(H \cdot h_0)}{\partial \left(\frac{X \cdot h_0}{\tan \theta} \right)} =$$



$$\begin{aligned}
 &= g \cdot \sin(\theta) - \frac{g U^2 \cdot g \cdot h_0 \cdot \cos \theta}{C^2 \cdot H \cdot h_0} \\
 &\frac{\sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta} \cdot \tan \theta \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta}}{h_0} \cdot \frac{\partial U}{\partial T} + \frac{\sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta} \cdot \tan \theta \cdot \sqrt{g \cdot h_0 \cdot \cos \theta}}{h_0} \cdot U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \\
 &+ \frac{g \cdot \cos(\theta) \cdot h_0 \cdot \tan \theta}{h_0} \cdot \frac{\partial H}{\partial X} = g \cdot \sin(\theta) - \frac{g U^2 \cdot g \cdot \cos \theta}{C^2 \cdot H} \\
 &g \cdot \cos \theta \cdot \tan \theta \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial T} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} \right) = g \cdot \sin(\theta) - \frac{g^2 \cdot U^2 \cdot \cos \theta}{C^2 \cdot H} \\
 &\left(\frac{\partial U}{\partial T} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} \right) = 1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H} \quad ; \quad \beta = \frac{g}{C^2 \cdot \tan(\theta)} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Trabalhando com a equação (3) e (4), tem-se:

$$\rho h(w - u) = \rho_0 h_0 w$$

$$\rho H h_0 (W \cdot \sqrt{g h_0 \cdot \cos \theta} - U \cdot \sqrt{g h_0 \cdot \cos \theta}) = \rho_0 h_0 W \cdot \sqrt{g h_0 \cdot \cos \theta}$$

$$\rho = \text{constante e } h_0 \neq 0$$

$$H(W - U) = W \quad (7a)$$

$$\rho_0 h_0 W \cdot \sqrt{g h_0 \cdot \cos \theta} \cdot U \cdot \sqrt{g h_0 \cdot \cos \theta} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot h_0^2 \cdot \cos(\theta)$$

$$W U = \frac{1}{2} \cdot H^2 \quad (7b)$$

temos assim:

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial(HU)}{\partial X} = 0$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} + U \cdot \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial H}{\partial X} \right) = 1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H}$$

$$W = H(W - U) \quad \text{e} \quad W U = \frac{1}{2} \cdot H^2$$



A determinação do critério de formação de "roll waves" requer, antes de tudo, uma solução para a equação da superfície livre. Primeiramente reescrevemos as equações em um sistema móvel de coordenadas. Seja, por hipótese, $\zeta = X - W.T$, onde W representa a velocidade adimensional de propagação da frente de escoamento (celeridade). A partir dessas premissas, podemos estabelecer as relações para as funções derivada, conforme se segue:

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial T} = -H'W$$

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial T} = -U'W$$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X} = U'.1$$

$$\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{\partial H}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial X} = H'.1$$

ou seja:

$$\frac{\partial U}{\partial T} = -W.U' \quad \frac{\partial U}{\partial X} = U' \quad \frac{\partial H}{\partial T} = -W.H' \quad \frac{\partial H}{\partial X} = H'$$

Substituindo nas equações (5) e (6), temos:

$$-W.H' + H'.U + U'.H = 0$$

$$H'.(U - W) + U'.H = 0$$

$$-W.U' + U.U' + H' = 1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H}$$

$$U'.(U - W) + H' = 1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H}$$

O que resulta no sistema:



$$\begin{cases} H.U' + (U - W).H' = 0 \\ (U - W).U' + H' = 1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H} \end{cases}$$

Obtemos, então, 2 equações lineares a 2 incógnitas (U' e H'). A resolução desse sistema fornecerá 2 equações diferenciais com U' e H' e suas respectivas derivadas de 1ª ordem; a saber:

$$H' = \frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H}\right)}{(U - W)^2 - H} \quad (8)$$

$$U' = \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{(U - W) \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{U^2}{H}\right)}{(U - W)^2 - H} \quad (9)$$

A relação entre essas duas equações permite-nos verificar que a vazão específica é uma constante, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{H'}{U'} &= \frac{H}{(W - U)} \\ H \cdot (W - U) &= K = \text{constante} \end{aligned} \quad (10)$$

Se aplicarmos (10) na expressão de H' (equação (8)), obteremos finalmente uma equação não linear de 1ª ordem, conforme explicitado abaixo:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \cdot \left(1 - \beta \cdot \frac{(H.W - K)^2}{H^3}\right)}{\left(\frac{K}{H}\right)^2 - H} \quad (11)$$

A resolução desta equação vai nos fornecer o perfil desejado da superfície livre. Verificamos, entretanto, que para esta equação não existe solução periódica. A proposta seria então tentarmos “construir” soluções periódicas a partir de soluções contínuas intercaladas por ressaltos hidráulicos, por exemplo. Para isso, precisamos encontrar



soluções contínuas que apresentem a propriedade que em uma determinada seção o escoamento seja supercrítico e numa outra posterior seja subcrítico. Por continuidade, deve existir um ponto de abscissa ζ_0 , de profundidade H_0 , e velocidade U_0 , onde o número de Froude seja igual a unidade (escoamento crítico). Exposto isto, tem-se que $W - U_0 = \sqrt{H_0}$. Para este ponto, em particular, o denominador da equação (11) é nulo, o que significa uma descontinuidade, salvo para o caso em que o numerador também é nulo. Por outro lado, a experiência mostra que na vizinhança do ponto crítico, o perfil da superfície livre é praticamente horizontal e não vertical. Exposto isto, este ponto crítico é portanto necessariamente diferente daquele onde ocorre o ressalto hidráulico, de maneira que só é possível “construir” roll-waves quando o numerador e o denominador se anulam concomitantemente. Essa condição nos fornece, pois, 2 parâmetros: U_0 e H_0 como funções de variáveis de interesse (integrando as equações de H' e U'), conforme mostrados abaixo:

$$H_0 = \left(\frac{-\beta W + \sqrt{\beta W^2}}{1 - \beta} \right)^2$$

$$U_0 = \frac{W - \sqrt{\beta W^2}}{1 - \beta}$$

$$K = (W - U_0).H_0 = (H_0)^{\frac{3}{2}}$$

Por conseguinte, a relação (10) é então substituída na equação (11). Assim:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = - \frac{H \left(1 - \beta \cdot \frac{(HW - K)^2}{H^3} \right)}{\left(\frac{K}{H} \right)^2 - H} = \frac{H^3 - \beta \left(WH - H^{\frac{3}{2}} \right)^2}{H^3 - H_0^3}$$

Os polinômios do numerador e denominador têm como raiz H_0 ; podemos assim rescrever a equação na forma:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{(H - H_0)(H^2 + H(H_0 - W^2 \cdot \beta) + \beta \cdot H_0^2)}{(H - H_0)(H_0^2 + H \cdot H_0 + H^2)} \quad (12)$$

A equação diferencial para a superfície livre no intervalo contínuo é então dada por:

$$\frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{H^2 + H(H_0 - W^2 \cdot \beta) + \beta \cdot H_0^2}{(H_0^2 + H \cdot H_0 + H^2)} \quad (13)$$

Enfim, para gerarmos "roll-waves", a partir da equação (13), é necessário que

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \zeta} \right)_{(H=H_0)} > 0, \text{ que implica em:}$$

$$2 \cdot \beta \cdot \frac{1 - \sqrt{\beta}}{-\beta + \sqrt{\beta}} < 1 \quad (14)$$

Trabalhando no primeiro termo da inequação (14), temos:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{\beta - \beta \sqrt{\beta}}{-\beta + \sqrt{\beta}} \right) &= 2 \cdot \frac{(\beta - \beta \sqrt{\beta})(-\beta - \sqrt{\beta})}{(-\beta + \sqrt{\beta})(-\beta - \sqrt{\beta})} = 2 \cdot \left(\frac{-\beta^2 - \beta \sqrt{\beta} + \beta^2 \sqrt{\beta} + \beta^2}{\beta^2 + \beta \sqrt{\beta} - \beta \sqrt{\beta} - \beta} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{\beta \sqrt{\beta} \cdot (-1 + \beta)}{\beta \cdot (\beta - 1)} = 2 \cdot \sqrt{\beta} \end{aligned}$$

$$\text{Então: } (15) \quad 2 \cdot \sqrt{\beta} < 1 \Rightarrow \beta < \frac{1}{4}$$

$$\beta = \frac{g}{C^2 \cdot \tan(\theta)}$$

$$\text{mas } u^2 = C^2 \cdot \tan(\theta) \cdot h \quad e \quad F^2 = \frac{u^2}{g \cdot h} = \frac{C^2 \cdot \tan(\theta) \cdot h}{g \cdot h} = \frac{C^2 \cdot \tan(\theta)}{g}$$

então:

$$\beta = \frac{1}{F^2} \Rightarrow F > 2$$



VIII - ANÁLISE DE ESTABILIDADE LINEAR DO SISTEMA

"SHALLOW WATER" VISCOSO

O objetivo desse Capítulo é analisar o escoamento em canal usando como sistema principal as equações "shallow-water" apresentando, no segundo membro da equação da quantidade de movimento, os termos de gravidade, efeito de parede tipo Chézy e notadamente os efeitos difusivos devido a viscosidade do fluido.

Dressler (1949) em sua análise, não considera os efeitos difusivos (viscosidade).

Seu estudo teórico sobre o fenômeno "roll waves" nos leva a:

- i) A relação $4r^2 < m$, onde r é o termo de resistência tipo Chézy $\left(r = \frac{g}{C^2} = C_f\right)$ e m a declividade do canal (θ em nosso estudo). Essa relação é conhecida como condição necessária para a existência de "roll waves", mostrando que se o efeito de resistência da parede é grande, ondas periódicas tipo "roll waves" não deverão se formar, o mesmo acontecendo para efeitos muito pequenos.
- ii) Em todos os casos, o valor de m e r^2 poderiam ser fixados anteriormente, pois conhecemos a natureza das paredes do canal e sua declividade. Se uma velocidade de propagação for ainda prescrita, teremos segundo Dressler (1949), uma família de soluções periódicas (a 1-parâmetro) com relação ao comprimento de onda. Se somado a isto, fixarmos também o comprimento de onda, a solução é única. A *figura 1* ilustra um trem de "roll waves", segundo Dressler.



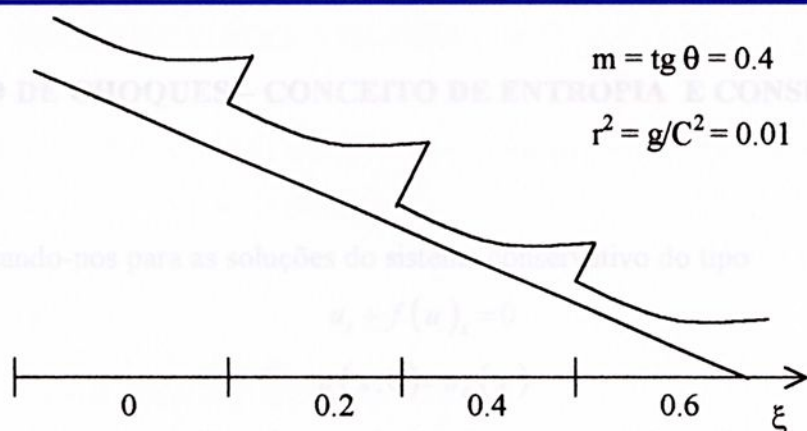


Figura 1 "roll wave" solução tipo.

Needham e Merkin (1983) introduzindo os efeitos viscosos estendem o estudo de Dressler (1949) e verificam que a inclusão deste termo não altera a condição de estabilidade do escoamento uniforme, e mais, quando o escoamento torna-se instável, uma família de soluções (a 1-parâmetro) quase periódicas aparecem (tendo como parâmetro de controle a velocidade U da perturbação). Isto é interpretado e deve resultar de uma bifurcação de HOPF do escoamento uniforme para uma velocidade crítica da ordem de $U_c = 1 + \frac{1}{F}$.

Em nossa análise, os passos a serem seguidos serão aqueles usados por Needham e Merkin (1983) levando ainda em consideração os termos viscosos modificados, aqui adaptados ao grupo de equações de "shallow water", de maneira mais apropriada e por conseguinte mais consistente. Para tanto, uma análise matemática mais afinada poderá nos esclarecer sobre o novo termo a ser considerado no modelo viscoso. Na verdade, uma nova discussão matemática do termo viscoso deverá ser empreendida, conforme apresentado no item subsequente.



SELEÇÃO DE CHOQUES – CONCEITO DE ENTROPIA E CONSIDERAÇÕES GERAIS

Atentando-nos para as soluções do sistema conservativo do tipo

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2)$$

no caso escalar, e em utilizando o método das características, demonstra-se que as soluções C^1 são definidas apenas para curtos intervalos de tempo. Para se resolver o problema do ponto de vista físico, é preciso admitir a existência de choque ao cabo de tempo finito. Passamos então a tratar não mais solução fortes ou regulares, mas soluções no sentido de distribuição. Se $x(t)$ é o local da curva de choque; $u_e = u(x(t)^-, t)$ - valor à esquerda - ; $u_d = u(x(t)^+, t)$ - valor à direita - e o salto de u sendo da forma $[u] = u_e - u_d$, a partir da formulação “fraca”, obtemos as condições de Rankine-Hugoniot da dinâmica dos gases; a saber:

$$[f(u)] = \sigma [u] \quad \sigma: \text{velocidade de propagação do choque.}$$

Para o problema, assim colocado, temos muitas soluções e precisamos portanto cercar ou determinar aquelas que atendam ao problema físico. Daí o *conceito de entropia*, ou seja, tentar buscar soluções que verifiquem, ao menos, a seguinte proposição: Qual seria a solução, no limite, do problema viscoso $u_t + f(u)_x = \nu u_{xx}$?

Diz-se que uma solução verifica a condição de *entropia*, se para todo binômio entropia-fluxo (U, F) , sendo U convexa, tem-se $U_t + F_x \leq 0$, no sentido de distribuição. Isto posto, ao longo de uma descontinuidade, temos:

$$\sigma [U(u)] - [F(u)] \leq 0$$

De maneira geral, as condições impostas acima são consideradas como verificando a *entropia*, que no caso escalar, dá garantia de unicidade da solução.



SISTEMA SHALLOW WATER VISCOSO ($\nu \neq 0$)

Needham e Merkin (1984, 1986) em seus trabalhos sobre "roll waves" adotam um sistema shallow water viscoso da forma:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} u_t + \left(\frac{u^2}{2} + g \cos \theta h \right)_x = g \sin \theta - C_f \frac{u^2}{h} + \nu_0 u_{xx} \end{cases} \quad (2)$$

Para uma discussão mais direcionada desprezamos, nesse caso, os termos de atrito e as constantes. Retomamos então o sistema (1-2), na seguinte forma:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + g \cos(\theta) h \right)_x = \nu_0 u_{xx} \end{cases} \quad (3)$$

(4)

para o qual o binômio entropia-fluxo ($\mathbf{U}, \mathbf{F}$) é dado respectivamente por:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(h, u) = \frac{hu^2}{2} + g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \\ \mathbf{F}(h, u) = hu^2 + g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \end{cases}$$

Além disso, neste caso, a viscosidade adotada não tem representatividade física no contexto do grupo "shallow water" (termo viscoso inadaptado), ou seja, não escrevemos corretamente a equação da quantidade de movimento, não obtendo assim, as "boas" condições de choque. De outra maneira podemos dizer que o sistema escrito nas variáveis (h, u) , tal como em (3-4) não verifica a *entropia convexa*. De fato, a partir do cálculo do Hessiano $D^2(\mathbf{U})(h, u)$ temos que:

$$D^2(\mathbf{U})(h, u) = \begin{pmatrix} g \cos(\theta) & u \\ u & h \end{pmatrix}$$

Verificamos, pois, que o produto dos autovalores é positivo apenas na condição de Froude $F \leq 1$. Nesse caso, retomamos o sistema (1-2) reescrevendo-o e adaptando o termo viscoso ali presente às condições "shallow water" (termo viscoso com maior representatividade física), a saber:

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 & (5) \\ (hu)_t + \left(hu^2 + g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \right)_x = g h \sin \theta - C_f u^2 + \nu (hu_x)_x & (6) \end{cases}$$

As condições de Rankine-Hugoniot são dadas nesse caso por:

$$h_+ (c-u)_+ = h_- (c-u)_- \equiv K_0$$

$$K_0 [u] = g \cos(\theta) \left[\frac{h^2}{2} \right]$$

A partir do sistema escrito na sua forma conservativa e fazendo $q = hu$, o novo binômio de entropia $(\mathbf{U}, \mathbf{F})$ é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(h, q) = \frac{q^2}{2h} + g \cos(\theta) \frac{h^2}{2} \\ \mathbf{F}(h, q) = \frac{q^3}{2h^2} + g \cos(\theta) h q \end{cases}$$

De maneira análoga ao procedimento anterior, podemos rapidamente verificar que a entropia é convexa nas novas variáveis (h, q) - matriz Hessiana é definida positiva para uma função convexa e toda forma quadrática tem os autovalores da matriz simétrica positivos. O conceito de entropia convexa corresponde, na verdade, a energia do sistema, que deverá decrescer de montante para jusante. Neste caso específico, as condições de entropia são equivalentes às conclusões de choque de Lax (1971) ou seja:

$$u_+ - c < \sqrt{gh} < u_- - c ;$$

resultado este conforme o artigo clássico de Dressler (1949). Dessa maneira, encerramos aqui a "boa seleção" de choques.



Para a análise de estabilidade linear propriamente dita, partimos do seguinte sistema "shallow water" :

- equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (7)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento modificada:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} + g \cos(\theta) h \frac{\partial h}{\partial x} = g h \sin(\theta) - \frac{gu^2}{C^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hv \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (8)$$

sendo:

ν : viscosidade do fluido

α : coeficiente de distribuição de velocidade

A fim de determinarmos os parâmetros que colocam em evidência o desenvolvimento de instabilidades, torna-se necessário uma adimensionalização das equações acima, a saber:

- escala de comprimento: $x = L \cdot x^*$; L representa o comprimento de onda e $h = h_n \cdot h^*$;
- escala de velocidades: $u = u_n \cdot u^*$.
- escala de tempo: $t = t_n \cdot t^* = (L / u_n) \cdot t^*$

O índice n representa as condições de escoamento uniforme e o asterisco (*) as variáveis adimensionais.

Introduzindo essas variáveis e omitindo os asteriscos (*), obtém-se:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha - 1) \cdot \frac{u}{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon \cdot F^2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{h}\right) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad (10)$$



A fim de analisar o estudo quase permanente do sistema "shallow-water", fazendo $z = x - Ut$ onde U é uma velocidade constante de propagação, tem-se:

$$z = x - Ut$$

Donde a equação da conservação da massa torna-se:

$$h(u - U) = 1 - U \quad (11)$$

e a equação da quantidade de movimento:

$$-U \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha U \cdot \frac{\partial u}{\partial z} - (\alpha - 1) \cdot \frac{u}{h} \cdot U \cdot \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon \cdot F^2} \cdot \left(1 - \frac{u^2}{h}\right) + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{h} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial h}{\partial z}\right) \quad (12)$$

Substituindo a equação da conservação da massa em (12), podemos eliminar a variável u e obter uma equação diferencial de segunda ordem em h , a saber:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 + \frac{\text{Re}}{F^2(1-U)} \cdot \left\{ h^3 - \alpha F^2(1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} \\ + \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1)(h-h_2)}{\varepsilon \cdot F^2(U-1)h} = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

sendo:

$$h_1 = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] - \sqrt{(U+3)(U-1)} \right\}$$

$$h_2 = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] + \sqrt{(U+3)(U-1)} \right\}$$

Verifica-se que para obtermos h_1 e h_2 reais, é necessário que $U > 1$.

No objetivo de verificar a existência de soluções periódicas para a equação (13), a nossa proposição é de verificar a existência de tais soluções no plano de fases. Para tanto, tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = w = F_1(h, w) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = F_2(h, w) \end{cases} \quad (14)$$



$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{h} w^2 + \frac{\text{Re}}{(1-U)hF^2} \left\{ h^3 - \alpha F^2 (1-u)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} w - \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1)(h-h_2)}{\varepsilon F^2 (U-1)h}$$

Estudo dos pontos de equilíbrio:

$$F_1(h, w) = 0 \rightarrow w = 0$$

$$F_2(h, w) = 0 \rightarrow h = 1$$

Donde verifica-se que o escoamento uniforme ($h=1$ e $w=0$) é um ponto de equilíbrio.

Podemos então pensar em verificar a existência ou não de órbitas fechadas ao redor deste ponto de equilíbrio. Assim sendo, deverão existir soluções periódicas para o problema pesquisado.

Através de um processo de linearização do sistema (14) na vizinhança do ponto de equilíbrio $(h, w) = (1, 0)$, obtemos o sistema linear de equações, a saber:

$$h = 1 + \eta \bar{h} \quad \text{e} \quad w = \varphi \bar{w} \quad \text{onde,} \quad \varphi \ll 1 \quad \text{e} \quad \eta \ll 1.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \bar{w} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\text{Re}}{(1-U)F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \bar{w} - \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2 (U-1)} \{ 1 + 2(1-U) \} \end{cases} \quad (15)$$

Isto posto, passamos a determinar os autovalores λ_i ($i=1,2$) do sistema (15), a saber:

O determinante Δ é dado por:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2 (U-1)} \{ 1 + 2(1-U) \} & -\frac{\text{Re}}{(1-U)F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \end{vmatrix}$$

O que resulta na equação quadrática em λ , conforme se segue:

$$\lambda^2 - \frac{\text{Re}}{(1-U)F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \lambda^1 - \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2 (U-1)} \{ 1 + 2(1-U) \} \lambda^0 = 0$$

Para obtermos auto-valores reais e distintos e por conseguinte órbitas fechadas (ou soluções periódicas) torna-se necessário que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja estritamente superior a zero. Assim sendo, tem-se:

$$\left(-\frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \right)^2 - 4.1. \left(-\frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \{1 + 2(1-U)\} \right) > 0$$

$$4.1. \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \{1 + 2(1-U)\} > 0$$

Ou seja:

$$1 + 2(1-U) > 0 \quad \Rightarrow \quad U < \frac{3}{2}$$

$$U - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad U > 1$$

O que resulta:

$$1 < U < \frac{3}{2} \quad (16)$$

IX – GERAÇÃO E PROPAGAÇÃO DE ROLL WAVES EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS – PROPOSTA DE MODELO REOLÓGICO DE FLUIDO DE BINGHAM COM COMPROMISSOS DE ENGENHARIA

Tendo como objetivo determinar de maneira clara, concisa, e com vistas à aplicação em problemas de engenharia um modelo matemático capaz de reproduzir “roll waves” no seio de escoamentos de fluidos de Bingham (notadamente em “debris flow”, ou fluidos hiperconcentrados), este item tem como finalidade fazer uma revisão sintetizada dos principais modelos reológicos existentes para tal fim; colocando em evidência suas vantagens e/ou limitações ou inconvenientes quando de sua aplicação.

1 - Principais classes de modelo para o diagnóstico de “debris flow”

Na verdade, não há um modelo que reduza um escoamento tipo “debris flow” ao seu centro de massa. O modelo mais simplista é devido à Takahashi (1981) que determina a distância de parada do escoamento (alcance) a partir da forma que adquire o depósito de material. Fica, pois, descartado o modelo clássico de dinâmica de avalanchas proposto por Voellmy (1955) que reduz o seu estudo à dinâmica do seu centro de massa, considera um problema plano (toda a propagação lateral da avalanche é desprezada) além de desprezar o movimento relativo de partículas no seio do escoamento. Ainda que seja de grande utilização prática dos engenheiros, deve-se interpretar tais resultados com bastante cautela haja visto as hipóteses restritivas na sua formulação.

Podemos, de uma maneira geral, e em 1º lugar, classificar os escoamentos a partir dos trabalhos de Jonhson (1970,1984) que atribui uma estrutura argilosa aos



“debris flow”, com forte concentração de material fino, tratando a coesão como parâmetro significativo. Em segundo plano temos os trabalhos de Bagnold (1954,1956) ou modelo granular, que são utilizados para os escoamentos que apresentam blocos de maiores dimensões, onde o fenômeno da colisão entre eles é parâmetro determinante. O quadro abaixo nos dá uma boa aproximação destas duas classes de modelo.

Quadro 1 – Tipos de escoamento e Mecanismos de sustentação

TIPO DE ESCOAMENTO		MECANISMO QUE sustenta os sedimentos
“debris flow”	“grain flow”	pressão dispersiva
	“mud flow”	coesão e densidade da estrutura argilosa

a) Modelo simplificado de Takahashi (1981)

Quando um escoamento tipo “debris flow” chega em um ponto onde a declividade do canal diminui de maneira abrupta, sua velocidade diminui, sua frente aumenta (altura cresce), e por fim pára. A fim de modelar tal fenômeno, Takahashi assimila o escoamento a um perfil de forma trapezoidal cujas dimensões variam em função do tempo. As componentes da velocidade são uniformes e a concentração de material fino é a mesma em toda a massa - Figura 1. A partir das leis de conservação da massa e da quantidade de movimento aplicada ao bloco trapezoidal, pode-se determinar o alcance X_L do escoamento. Esta distância é definida pela relação:

$$X_L = \frac{Y^2}{G} \quad \text{sendo} \quad Y = v_u \cos(\theta_u - \theta) \left(1 + \frac{((\sigma - n\rho)Cd_u.Ka + n\rho). \cos(\theta_u)}{2.((\sigma - \rho).Cd_u + \rho)} \cdot \frac{g.h_u}{v_u^2} \right)$$
$$\text{e} \quad G = \left(\frac{(\sigma - n\rho)g.Cd_u. \cos(\theta_u). \tan(f)}{(\sigma - \rho).Cd_u + \rho} \right) - \sin(\theta) \quad \text{onde:}$$



v_u , Cd_u , e h_u representam as velocidades, concentrações e altura do escoamento a montante; σ e ρ representam, respectivamente, a densidade dos grãos e do fluido em questão; θ e ϕ a declividade e o ângulo de atrito interno.

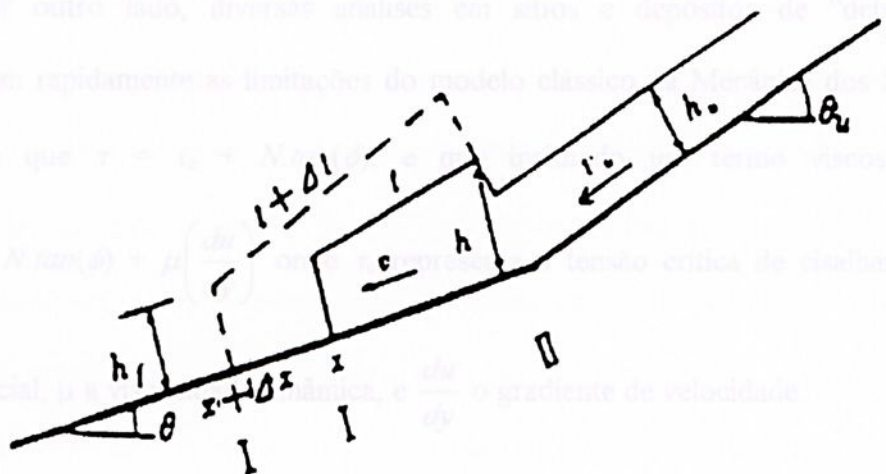


Figura 1 – Modelo simplificado de Takahashi.

b) Diferentes modelos reológicos

A modelação física de escoamento tipo "debris flow" necessita da escolha de um modelo reológico representativo. Dentro desta proposta, diversos modelos foram desenvolvidos - os modelos tipo "Bingham" com formulação mais ou menos complexa, oriunda dos trabalhos de Jonhson (1970,1984) e utilizados, por exemplo, na China para estudo de escoamentos com forte concentração em materiais finos. Por outro lado, temos os chamados modelos granulares, oriundos dos trabalhos de Bagnold (1954,1956).

i) Modelo de Bingham

O princípio de base destes modelos reside no fato que os “debris flow” têm um comportamento intermediário entre um solo com mistura de argila e de blocos e àquele de um fluido viscoso (tipo hiperconcentrado).

Por outro lado, diversas análises em sítios e depósitos de “debris flow” comprovam rapidamente as limitações do modelo clássico da Mecânica dos Solos que estabelece que $\tau = \tau_c + N \cdot \tan(\phi)$, e que incluindo um termo viscoso tem-se

$$\tau = \tau_c + N \cdot \tan(\phi) + \mu \left(\frac{du}{dy} \right) \text{ onde } \tau_c \text{ representa a tensão crítica de cisalhamento ou}$$

rigidez inicial, μ a viscosidade dinâmica, e $\frac{du}{dy}$ o gradiente de velocidade.

Uma simplificação deste modelo, que consiste em desprezar os atritos internos,

permite-nos chegar ao modelo reológico de Bingham : $\tau = \tau_c + \mu \left(\frac{du}{dy} \right)$.

Se por um lado, este modelo simplifica o processo de mistura entre a argila e a água, em contrapartida ele explica relativamente bem algumas das características essenciais da dinâmica desses escoamentos, quais sejam: seu mecanismo de deslanche (partida) à altura não nula; o alcance do “debris flow” e o fato de uma parte do escoamento efetuar-se como bloco rígido.

ii) Modelos granulares

Uma vez que o modelo precedente não permite explicar as diversas interações (choques) entre os diversos blocos no seio do escoamento tipo “debris flow” (haja visto o barulho que se produz, quando da passagem destes escoamentos), um modelo tipo granular se evidencia. Takahashi, por exemplo, aplica em seus trabalhos os resultados



obtidos por Bagnold que admite o escoamento “granular” como um conjunto de esferas idênticas, distribuídas uniformemente no fluido e em diferentes camadas, que deslizam umas sobre as outras. A tensão de cisalhamento seria então, resultante da transferência de quantidade de movimento de camada em camada, quando da colisão ou choques entre partículas. Dentro dessa mesma proposta, Savage e Jeffrey, com base na teoria cinética dos gases, diferentemente de Bagnold, levam em consideração o movimento aleatório das partículas representadas por grãos esféricos lisos (sem atrito).

Se por um lado tal modelo fornece o tensor de tensões, seu domínio de aplicação é restrito, uma vez que a concentração de partículas deve ser mais ou menos uniforme e o fluido intersticial em questão pouco viscoso. Ainda que esse modelo traduza a interação entre os blocos, e forneça a expressão do tensor de tensões, este não deve ser muito dissociado de suas hipóteses de base, quais sejam, o modelo supõe que as partículas têm um diâmetro uniforme (longe da realidade de um “debris flow”) e o fluido intersticial não influencia na dinâmica do escoamento. Posto isto, em linhas gerais, o modelo granular seria pouco adaptado à modelação do “debris flow”.

iii) Modelo de Chen (1986,1988)

Chen propõe uma formulação para a tensão de cisalhamento mais geral e que de certa maneira tenta contemplar os dois modelos precedentes. Trata-se de um modelo visco-plástico geral e que se escreve da seguinte forma:

$$\tau = C \cdot \cos(\phi) + P \cdot \sin(\phi) + \mu \cdot \left(\frac{du}{dy} \right)^n \quad \text{sendo:}$$

C : coesão

ϕ : ângulo de atrito sólido



P : pressão

$\frac{du}{dy}$: gradiente de velocidade

Esse modelo não está baseado em nenhuma base experimental. Na verdade, há apenas uma junção dos dois fenômenos (coesão e choque de partículas), sem levar em conta o nível de influência de um fenômeno em relação ao outro. De que adiantaria introduzir novos parâmetros cujos valores experimentais precisos são cada vez mais difíceis de obtenção?

2 - Adotando uma modelação de fluido de "Bingham"

Ainda que um "debris flow" seja composto de uma mistura de água e grãos de dimensões diversas, este pode ser modelado com base em 3 componentes, a saber : água, partículas finas (< 1 mm de diâmetro) e grãos maiores (> 1 mm de diâmetro). Quando a concentração de grãos finos é significativa, as partículas finas se misturam com a água e formam uma pasta ("lama"), na qual os materiais mais grossos se deslocam pouco no seio do escoamento. Isto é devido ao fato que as partículas de argila se misturando às moléculas de água, proporcionam ao "debris flow" uma estrutura e uma coesão onde as partículas fluidas perdem sua individualidade. A consistência da mistura assemelha-se portanto a um "concreto liqüefeito". Assim sendo, os "debris flow" podem então, ser considerados como homogêneos, viscosos e densos, com blocos dispersados no seio do escoamento. A rugosidade do canal (leito) e a declividade são parâmetros decisivos na dinâmica desses escoamentos.

A fim de explicar os diferentes fenômenos associados aos "debris flow" como o transporte de blocos em suspensão ou a presença de depósitos laterais ao eixo principal de escoamento, Jonhson (1970,1984) e Enos (1977) sugerem que o comportamento de



um “debris flow” possa ser assimilado a de um fluido de Bingham com a presença de uma tensão crítica de cisalhamento aquém da qual o material apresenta um comportamento de um sólido e além da qual este deverá se deformar proporcionalmente conforme a lei que se segue:

$$\tau = \tau_c + \mu \left(\frac{du}{dy} \right) \quad \text{se} \quad \tau > \tau_c$$

$$\frac{du}{dy} = 0 \quad \text{se} \quad \tau < \tau_c$$

Ainda que simplista, esta formulação apresenta propriedades importantes, a saber:

- o fluido pode modelar uma mudança de estado que os fluidos newtonianos e granulares não permitem: ele se comporta como um sólido enquanto a tensão de cisalhamento é inferior a τ_c , vindo escoar como um líquido se $\tau > \tau_c$. Tal propriedade é primordial para uma modelação da fase de deslanche (partida do “debris flow” - passagem de uma fase sólida a uma líquida) ou da parada (passagem de uma fase líquida a uma fase sólida).
- no fluido de Bingham há um compromisso entre a influência da topografia do terreno e das propriedades do fluido, tais como a coesão e sua densidade.
- o modelo é coerente com os modelos estáticos: Takahashi (1981) também leva em consideração a noção ou critério de altura crítica durante o processo de deslanche (partida).

Tomemos como exemplo, para a fase de deslanche ou partida do material, o modelo de Takahashi (1981) desprezando, a fins de simplificação, o atrito intergrãos. Temos, então:

$$h_c = D - \frac{\tau_c}{\rho \cdot g \cdot \sin(\theta)} \cdot \frac{(1 - \lambda)(\sigma - \rho) + (\lambda \cdot \rho)}{\lambda \cdot ((1 - \lambda)(\sigma - \rho) + \rho)(1 - \sigma)}$$



sendo:

- h_c : altura crítica;
 D : espessura da camada superior;
 λ : porosidade;
 θ : declividade;
 σ e ρ : densidade do material e do fluido.

Verificamos que da mesma maneira que um fluido de Bingham, a altura crítica depende da topografia do terreno, assim como das propriedades mecânicas do fluido (rigidez, densidade).

Do ponto de vista experimental, diversas observações comprovam as hipóteses enunciadas acima. De uma maneira geral, a distribuição de velocidades de um fluido de Bingham é caracterizado por um "plug" situado no centro do escoamento e que se desloca a velocidade constante ligados a dois arcos de parábola que ligam essa velocidade constante a uma velocidade nula junto às paredes do canal.

Poderíamos ainda citar os trabalhos de Jonhson e Hampton (1970) que utilizando traçadores distribuídos na superfície do escoamento de "debris flow" e de aparelhos fotográficos, comprovam que a distribuição de velocidades é semelhante às de um fluido de Bingham, conforme ilustra a figura 2:



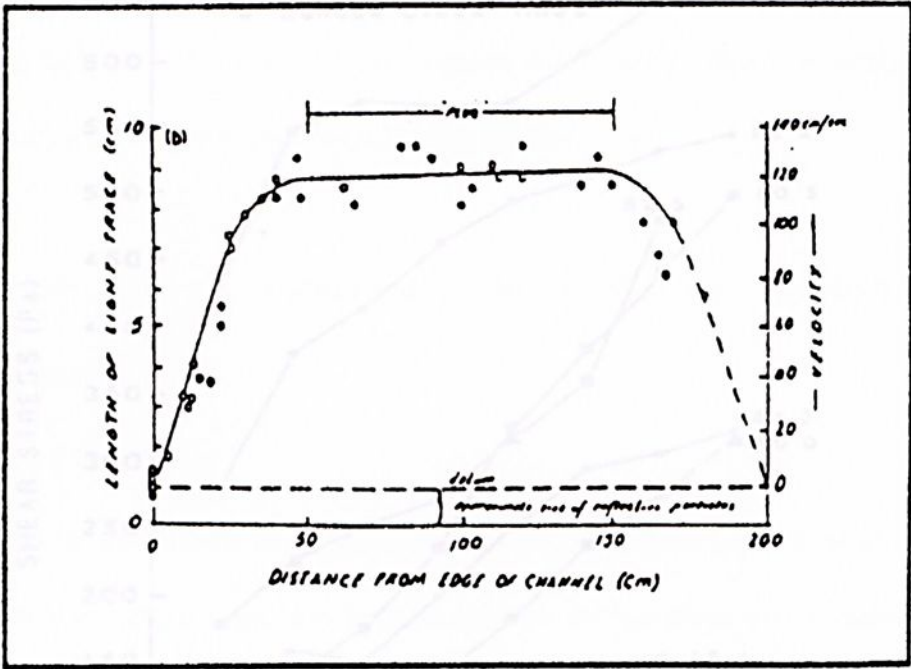


Figura 2 – Perfil de velocidade característico

Se as observações experimentais nos levam à validação das hipóteses de fluido de Bingham, a maneira mais rápida e mais eficiente de verificá-la seria ainda realizar experiências de reometria clássica.

Phillips e Davis (1989) utilizando amostras da Nova Zelândia, conseguem, a partir dos Reogramas obtidos, evidenciar a presença de uma tensão crítica (rigidez) e um aumento da tensão de cisalhamento com a taxa de deformação (gradiente de velocidades). A figura 3 ilustra algumas dessas tentativas:

3. Condições de existência de "roll waves" na nova reologia

A proposta deste parágrafo é estudar as condições necessárias e suficientes para a geração de "roll waves" como solução das equações "shallow water" numa reologia de



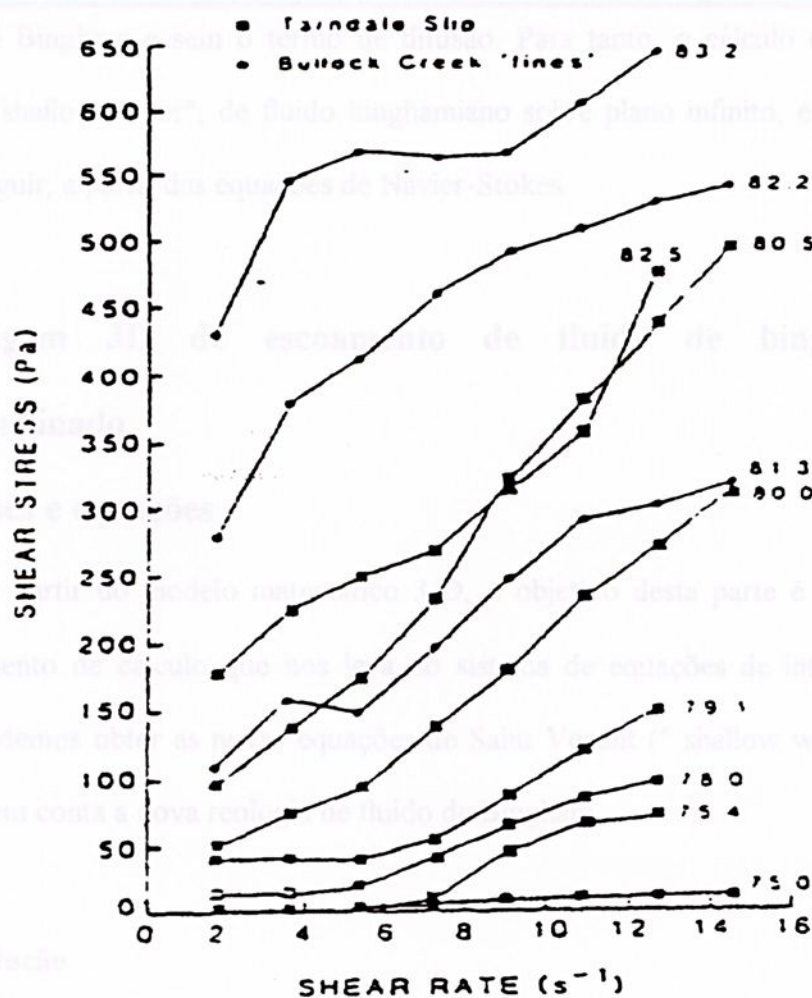


Figura 13 - Reogramas.

NOTA: O autor desta Tese tem se envolvido com escoamentos de fluidos hiperconcentrados com superfície livre e redefinição de leis de atrito na nova reologia não-newtoniana – fluido de Bingham. Mais recentemente vem trabalhando com o modelo reológico de Herschel-Bulkley (projeto Fapesp em andamento).

3. Condições de existência de "roll waves" na nova reologia

A proposta deste parágrafo é elucidar as condições necessárias e suficientes para a geração de "roll waves" como solução das equações "shallow water" numa reologia de



fluido de Bingham e sem o termo de difusão. Para tanto, o cálculo que nos leva ao sistema "shallow water", de fluido binghamiano sobre plano infinito, é apresentado no item a seguir, a partir das equações de Navier-Stokes.

Modelagem 3D de escoamento de fluido de bingham sobre plano inclinado

Hipóteses e equações

A partir do modelo matemático 3-D, o objetivo desta parte é detalhar todo o procedimento de cálculo que nos leva ao sistema de equações de interesse, ou seja, como podemos obter as novas equações de Saint Venant ("shallow water equations") levando em conta a nova reologia de fluido de Bingham.

1. Introdução

O escoamento 3D de uma corridaa ou "debris flow" po exemplo pode ser descrito perfeitamente a partir de 03 variáveis independentes. Para isto precisamos de 03 equações para descrever o escoamento não permanente. A lei da conservação da massa ou da continuidade, da quantidade de movimento e da energia. Entretanto para o caso de interesse, ou seja, escoamentos comportando descontinuidades, somente o binômio massa – quantidade de movimento responde a essa necessidade. Exposto isto, consideremos também a massa específica constante e que a profundidade do escoamento seja pequena quando confrontada com o comprimento característico, ou ainda em relação ao próprio diâmetro das partículas constituintes. Como exemplo, podemos citar que a altura de onda é pequena em relação ao seu comprimento. Diante dessas hipóteses, podemos conceber um modelo incompressível de Navier-Stokes



(hipótese de onda longa) estabelecido a partir da conservação da massa e da quantidade de movimento.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial vw}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

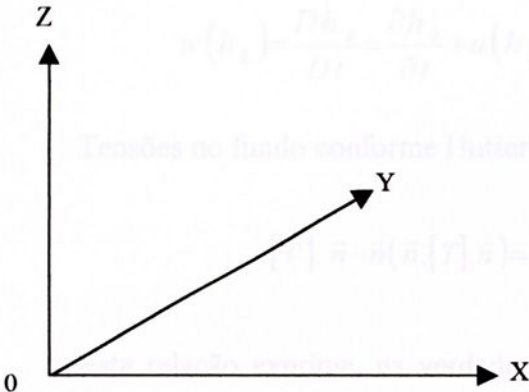
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial vw}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} = -g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (4)$$

As equações de Saint Venant são obtidas a partir da integração na vertical das equações de Navier Stokes as quais são adicionadas uma lei reológica de comportamento.

Às equações de Saint Venant são adicionadas as equações do ressalto hidráulico ou condições de Rankine-Hugoniot da dinâmica dos gases que permitem a solução do problema em nível do choque. Há, portanto, uma nítida separação entre o choque e sua propagação no seio do escoamento, que se traduz freqüentemente em problemas numéricos. A fim de contornar esse problema, o princípio de base é de reescrever tais equações na sua forma conservativa, cuja propriedade é de verificar as equações do ressalto hidráulico. Diz-se e comprova-se, matematicamente, que a solução fraca do sistema assim constituído verifica as equações do ressalto.

- Condições de contorno
- Condição de impermeabilidade no fundo e na superfície livre :

• Notações



- T_{ij} tensão aplicada ao fluido
- u componente da velocidade na direção OX
- v componente da velocidade na direção OY
- w componente da velocidade na direção OZ

- ρ massa específica do fluido em kg/m^3
- μ viscosidade dinâmica do fluido em kg/m.s
- ν viscosidade cinemática do fluido em m^2/s $\nu = \frac{\mu}{\rho}$
- τ_c rigidez inicial em Pa
- h_1 cota do fundo em m
- h_2 cota da superfície livre em m

$$e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$
 deformações em s^{-1}

$F = \frac{U}{\sqrt{gh}}$ número de Froude, U e h velocidade e alturas características do escoamento

$$\text{Re} = \frac{U h}{\nu}$$
 Número de Reynolds



- Condições de contorno
- Condição de impermeabilidade no fundo e na superfície livre :

$$w(h_1) = \frac{Dh_1}{Dt} = \frac{\partial h_1}{\partial t} + u(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y}, \quad \forall z = h_1 \quad (5)$$

$$w(h_2) = \frac{Dh_2}{Dt} = \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y}, \quad \forall z = h_2$$

Tensões no fundo conforme Hutter e Savage (1988) :

$$[T] \cdot \vec{n} - \vec{n} (\vec{n} \cdot [T] \cdot \vec{n}) = \frac{u_j}{|\vec{u}|} \left(\tau_c + \mu \cdot \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \Big|_{z=h_1} \quad (6)$$

Esta relação exprime, na verdade, a igualdade das tensões na interface entre o fluido e o solo.

2. Determinação das diferentes componentes do tensor de tensões

Faz-se necessário exprimir as tensões T_{ij} em função dos gradientes de velocidades e da rigidez inicial τ_c . Dent (1982), O'Donovan e Tanner (1983) generalizaram a lei de comportamento de fluido de Bingham para os casos de escoamentos 2-D e igualmente 3-D. Entretanto naquela formulação tem-se o problema da orientação da tensão de cisalhamento em função do referencial adotado. As componentes do tensor devem portanto serem expressas de uma forma geral, possibilitando a comparação das tensões de cisalhamento à rigidez inicial τ_c , independentemente da orientação dos eixos. O princípio de base utilizado foi adotar os invariantes dos tensores. Ou seja :

$$T_{xx} = -P + 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$T_{yy} = -P + 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (8)$$



$$T_{zz} = -P + 2 \cdot \mu \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \quad (9)$$

$$T_{xy} = \tau_c + \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (10)$$

$$T_{xz} = \tau_c + \mu \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (11)$$

$$T_{yz} = \tau_c + \mu \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (12)$$

Determinação do invariante do tensor II_v (conforme Dent (1982). O'Donovan e Tanner (1983)); a saber :

$$\begin{aligned} II_v &= T_{xx} \cdot T_{yy} + T_{xx} \cdot T_{zz} + T_{yy} \cdot T_{zz} - T_{xy}^2 - T_{xz}^2 - T_{yz}^2 \\ &= \mu^2 \left(-4 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} - 4 \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)^2 + \\ &\quad + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right)^2 \\ &= 4\mu^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)^2 + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)^2 + \\ &\quad + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right)^2 \end{aligned}$$

Caracteriza-se grande deformação se : $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{II_v} > \tau_c$ ou seja :

$$\begin{aligned} &4\mu^2 \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right)^2 + \left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right)^2 + \\ &\left(\tau_c + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right)^2 > 3\tau_c^2 \quad (13) \end{aligned}$$



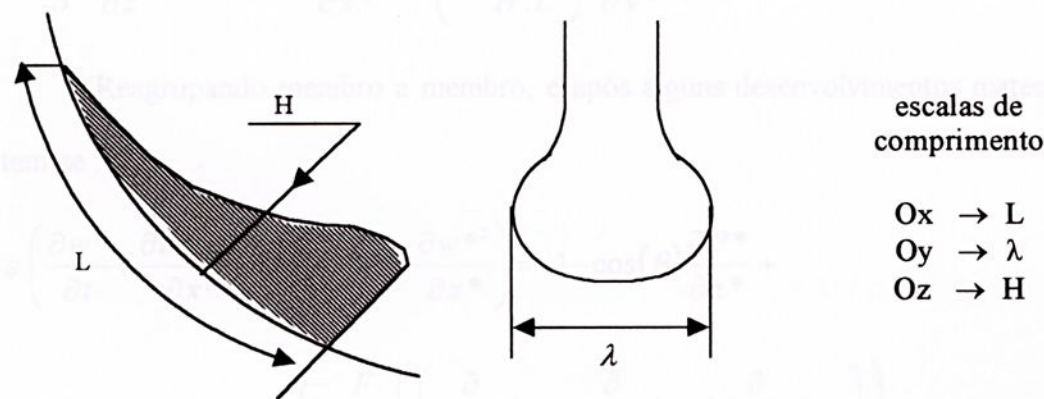
$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

3. Justificativa das hipóteses adotadas para o modelo físico

O objetivo dessa parte é, a partir de grandezas adimensionais, justificar as hipóteses adotadas no modelo Saaint Venant aplicado a uma nova reologia tipo "binghamiana". Em particular, deve-se ressaltar e justificar o fato da adoção de uma distribuição de pressão hidrostática : condição esta obtida a partir da equação da conservação da quantidade de movimento.

Se L representa um comprimento característico, H sua altura e λ sua largura, tem-se conforme o croquis abaixo :



escalas de velocidades : $(u, v, w) = \left(\left| \sqrt{g \cdot L} \right| u^*, \left| \frac{\lambda}{L} \sqrt{g \cdot L} \right| v^*, \left| \frac{H}{L} \sqrt{g \cdot L} \right| w^* \right)$

escala de tempo : $dt = \frac{dx}{u} \Rightarrow t = \sqrt{L \cdot g} \cdot t^*$

As grandezas diferenciadas pelo asterisco são adimensionais ao passo que aquelas entre barras são as de base e de ordem da unidade. A adimensionalização da

tensão de cisalhamento assim como a da pressão se faz a partir do peso da coluna líquida, o que permite quantificar a influência das tensões internas do fluido em relação às externas ao fluido ; a saber :

$$\tau_c = \rho \cdot g \cdot H \cdot \cos(\theta) \cdot \tau_c^* \quad \text{e} \quad P = \rho \cdot g \cdot H \cdot \cos(\theta) \cdot P^* \quad : \theta \text{ é a declividade média}$$

Introduzindo as variáveis adimensionais na equação (4) e admitindo que a viscosidade ν é independente de x , de y e de z , tem-se :

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial u \cdot w}{\partial x} + \frac{\partial v \cdot w}{\partial y} + \frac{\partial w^2}{\partial z} &= \left(\frac{g \cdot H}{L} \right) \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + \frac{\partial u^* \cdot w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* \cdot w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} \right) \\ \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} &= \left(\nu \cdot \frac{\sqrt{g \cdot L}}{H \cdot L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{H^2}{L^2} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{1}{L^2} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial x^*} \right) = \left(\nu \cdot \frac{\sqrt{g \cdot L}}{H \cdot L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^*} \cdot e_{xz^*} \\ \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} &= \left(\nu \cdot \frac{\sqrt{g \cdot L}}{H \cdot L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\nu \cdot \frac{\sqrt{g \cdot L}}{H \cdot L} \right) \left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{H^2}{\lambda^2} \cdot \frac{\partial w^*}{\partial y^*} \right) = \left(\nu \cdot \frac{\sqrt{g \cdot L}}{H \cdot L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y^*} \cdot e_{yz^*} \\ \rightarrow \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} &= g \cdot \cos(\theta) \cdot \frac{\partial P^*}{\partial x^*} + 2 \cdot \left(\nu \cdot \frac{\sqrt{g \cdot L}}{H \cdot L} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial y^*} \cdot e_{yz^*} \end{aligned}$$

Reagrupando membro a membro, e após alguns desenvolvimentos matemáticos, tem-se :

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\partial w^*}{\partial t} + \frac{\partial u^* \cdot w^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^* \cdot w^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^{*2}}{\partial z^*} \right) &= -1 - \cos(\theta) \frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \\ &+ \sqrt{\varepsilon} \cdot \frac{F}{\text{Re}} \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^*} e_{xz^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} e_{yz^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} e_{yz^*} \right) \right) \end{aligned} \quad (14)$$

Utilizando-se da hipótese que $\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1$, ou seja que $\left(\frac{H}{L} \right)$ e $\left(\frac{H}{\lambda} \right)$ são

pequenos e que o parâmetro $\frac{F}{\text{Re}}$ (razão entre o número de Froude e Reynolds) é



também pequeno (pois Re é grande), a equação da conservação da quantidade de movimento na direção vertical se reduz a :

$$0 = -1 - \cos(\theta) \cdot \frac{\partial P^*}{\partial z^*}$$

Retornando às variáveis dimensionais, deduzimos que a distribuição de pressões é hidrostática, a saber :

$$P(z) = -\rho \cdot g \cdot (h - z) \quad (15)$$

4. Estabelecimento das equações – Modelo matemático

a) Equação da conservação da massa :

$$\text{div}(\vec{U}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u \cdot dz - u(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x} + u(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} - u(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x} + u(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} v \cdot dz - v(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial y} + v(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} - v(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial y} + v(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(h_2) - w(h_1)$$

A partir das condições de impermeabilidade do fundo e da superfície, tem-se :

$$w(h_1) = \frac{Dh_1}{Dt} = \frac{\partial h_1}{\partial t} + u(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$w(h_2) = \frac{Dh_2}{Dt} = \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x} + v(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial y}$$

O que resulta em :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (16)$$

$$\text{onde} \quad \bar{u} = \frac{1}{h} \int_{h_1}^{h_2} u \cdot dz \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{h_1}^{h_2} v \cdot dz \quad h = h_2 - h_1$$

b) Equação da conservação da quantidade de movimento segundo à direção OX :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial u \cdot w}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right)$$

$$\rightarrow \text{Cálculo de } \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial u \cdot w}{\partial z} \right) \cdot dz$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{h_1}^{h_2} u \cdot dz - u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial (h \cdot \bar{u})}{\partial t} \cdot u(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u^2}{\partial x} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{h_1}^{h_2} u^2 \cdot dz - u^2(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + u^2(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial (h \cdot \bar{u}^2)}{\partial x} \cdot u^2(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x} + u^2(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u \cdot v}{\partial y} \cdot dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{h_1}^{h_2} u \cdot v \cdot dz - u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + u(h_1) \cdot v(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial (h \cdot \bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial y} \cdot u(h_2) \cdot v(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} + u(h_1) \cdot v(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u \cdot w}{\partial z} \cdot dz = u(h_2) \cdot w(h_2) \cdot u(h_1) \cdot w(h_1)$$

$$\text{donde } \int_{h_1}^{h_2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u \cdot v}{\partial y} + \frac{\partial u \cdot w}{\partial z} \right) \cdot dz = \frac{\partial (h \cdot \bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial (h \cdot \bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (h \cdot \bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial y} - u(h_2) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\partial h_2}{\partial t} + u(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + v(h_2) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y} - w(h_2) \right) + u(h_1) \left(\frac{\partial h_1}{\partial t} + u(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + v(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y} - w(h_1) \right)$$

Utilizando as condições de impermeabilidade do fundo e da superfície, chegamos a :



$$\int_{h1}^{h2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial u.v}{\partial y} + \frac{\partial u.w}{\partial z} \right) . dz = \frac{\partial (h.\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_{xx} . h . (\bar{u}^2)^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_{xy} . h . (\bar{u} . \bar{v}))}{\partial y}$$

onde

$$\alpha_{xx} = \frac{(\bar{u}^2)}{(\bar{u})^2} \quad \text{e} \quad \alpha_{xy} = \frac{(u \bar{v})}{\bar{u} . \bar{v}}$$

$$\rightarrow \text{Cálculo de } \int_{h1}^{h2} \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \right) . dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{h1}^{h2} T_{xx} . dz - T_{xx}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + T_{xx}(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h1}^{h2} T_{xy} . dz - T_{xy}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial y} +$$

$$+ T_{xy}(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} + \int_{h1}^{h2} \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} . dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h1}^{h2} T_{xx} . dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h1}^{h2} T_{xy} . dz - \left(T_{xx}(h_2) \frac{\partial h_2}{\partial x} + T_{xy}(h_2) \cdot \frac{\partial h_2}{\partial y} - T_{xz}(h_2) \right) +$$

$$+ \left(T_{xx}(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial x} + T_{xy}(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y} - T_{xz}(h_1) \right)$$

Mas sabendo que :

$$[T] \vec{n} \Big|_{z=h2} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\partial h_2}{\partial x} \\ -\frac{\partial h_2}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = -T_{xx} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial x} - T_{yz} \cdot \frac{\partial h_2}{\partial y} + T_{xz}(h_2)$$

e que :

$$[T] \vec{n} \Big|_{z=h1} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{xy} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{xz} & T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ -1 \end{pmatrix} = T_{xx} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} + T_{xy} \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y} - T_{xz}(h_1)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \int_{h1}^{h2} T_{xx} . dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{h1}^{h2} T_{xy} . dz + [T] \cdot \vec{n} \Big|_{z=h2} + [T] \cdot \vec{n} \Big|_{z=h1}$$



$$= \frac{\partial \left(h \cdot T_{xx} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(h \cdot T_{xy} \right)}{\partial y} + [T] \cdot \vec{n} \Big|_{z=h_2} + [T] \cdot \vec{n} \Big|_{z=h_1}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} \cdot dz = \int_{h_1}^{h_2} \left(-p + 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot dz = -\rho g \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} \cdot dz = \int_{h_1}^{h_2-h_c} \left(-\tau_c \rho + \mu e_{xy} \right) dz = \tau_c (h-h_c)$$

$$[T] \cdot \vec{n} \Big|_{z=h_2} = 0$$

$$[T] \cdot \vec{n} \Big|_{z=h_1} = T_{xx}(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial x} + T_{xy}(h_1) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial y} - T_{xz}(h_1)$$

$$= -\rho g h \frac{\partial h_1}{\partial x} + T_{xy}(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} - T_{xz}(h_1)$$

O termo $T_{xy}(h_1) \frac{\partial h_1}{\partial y} - T_{xz}(h_1)$ representa as tensões (efeito de atrito de parede – fundo do canal). Esse termo é composto da tensão de cisalhamento à qual é adicionada uma perda de carga suplementar, modelada, por exemplo, por um coeficiente de Chézy ou de Manning-Strikler, como na hidráulica clássica. As dissipações internas viscosas são desprezadas quando confrontadas ao efeito de parede.

Após alguns desenvolvimentoss matemáticos temos que :

$$= -\rho g \cdot h \frac{\partial h_1}{\partial x} - \rho g \cdot \frac{\partial \frac{h^2}{2}}{\partial x} - \frac{u_i}{|\vec{u}|} \left(\tau_c + \mu \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad \text{em} \quad z=h_1 - \tau_c \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{g u \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C^2}$$

$$\frac{\partial h \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha_{xx} h \bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial (\alpha_{xy} h \bar{u} \cdot \bar{v})}{\partial y} =$$
$$= -gh \cdot \frac{\partial (h_1)}{\partial x} - \frac{\partial (h^2)}{\partial x} - \frac{\tau_c}{\rho} \cdot \left(\frac{\bar{u}}{|\vec{u}|} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) - \frac{g \bar{u} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C^2}$$

Analogamente, a expressão para conservação da quantidade de movimento segundo OY é dada por :



$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha_{xx} \bar{h} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\alpha_{xy} h \bar{v}^2)}{\partial y} =$$

$$= -gh \frac{\partial(h_1)}{\partial y} - \frac{\partial(h^2)}{\partial y} - \frac{\tau_c}{\rho} \left(\frac{\bar{v}}{|\bar{u}|} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{g \bar{v} \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C^2}$$

5. Observações e Comentários

É possível a determinação das expressões analíticas dos coeficientes α_{xx} , α_{xy} e α_{yy} dependentes do perfil de velocidades. Para o escoamento laminar permanente e uniforme de um fluido tipo Bingham sobre um plano infinito, temos que :

$$\alpha_{x_i x_j} = \alpha_{xy} = \alpha_{yy} = \alpha = \frac{9}{15} \cdot \frac{8 + 7 \frac{h_p}{h}}{\left(2 + \frac{h_p}{h}\right)^2} \quad \text{com} \quad h_p = \frac{\tau_c}{\rho \cdot g \cdot \sin\left(\frac{\partial h_1}{\partial x_i}\right)}$$

h_p representando a altura ou profundidade do fluido não cisalhada ("parte em plug")

Para um fluido newtoniano, ou seja ($h_p = 0$), reencontramos o valor de α igual a 1.2, enquanto que para um perfil de velocidades uniforme, ou seja, ($h_p = h$), α é igual a 1.

Admitindo portanto :

→ massa específica constante e fluido homogêneo

→ uma distribuição de pressão hidrostática

$$\varepsilon = \frac{H}{L} \ll 1 \quad (\text{hipótese de onda longa})$$

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{F}{\text{Re}} \ll 1 \quad (\text{Número de Reynolds grande})$$

→ desprezando os termos de 2ª ordem e os efeitos viscosos :



O sistema diferencial de Saint Venant se escreve da seguinte forma :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial h\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\left(\frac{gh^2}{2} + \alpha h\bar{u}^2\right)}{\partial x} + \frac{\partial(\alpha h\bar{u}\cdot\bar{v})}{\partial y} = -gh\cdot\frac{\partial(h_1)}{\partial x} - \frac{\tau_c}{\rho}\cdot\left(\frac{\bar{u}}{|\bar{u}|} - \frac{\partial h}{\partial y}\right) - \frac{g\bar{u}\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C^2}$$

$$\frac{\partial h\bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha h\bar{u}\cdot\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{gh^2}{2} + \alpha h\bar{v}^2\right)}{\partial y} = -gh\cdot\frac{\partial(h_1)}{\partial y} - \frac{\tau_c}{\rho}\cdot\left(\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{g\bar{v}\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}{C^2}$$

* equação da conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

* equação da conservação da quantidade de movimento modificada:

$$\frac{\partial(h\bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha h\bar{u}^2)}{\partial x} + g\cos(\theta)\cdot h\cdot\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tau_c}{\rho} + g\sin(\theta)\cdot h - \frac{g\bar{u}^2}{C^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(h\bar{v}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}\right) \quad (2)$$

sendo:

h : profundidade do escoamento

$\bar{v}$: velocidade média vertical

C : coeficiente de Chezy

θ : declividade do canal

ρ : massa específica do fluido

ν : viscosidade do fluido

α : coeficiente de distribuição de velocidade na vertical

τ_c : tensão crítica de cisalhamento reduzida

ρ



X- CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA E ESTABILIDADE DE ROLL WAVES COMO SOLUÇÃO DO SISTEMA "SHALLOW WATER" VISCOSO EM ESCOAMENTOS DE FLUIDOS NÃO-NEWTONIANOS (FLUIDO DE BINGHAM) EM LABORATÓRIO E NA NATUREZA

Conforme demonstrado, e em se tratando de fluidos não-newtonianos (fluidos de Bingham), o sistema "shallow water" viscoso, pode ser escrito da seguinte forma :

- equação de conservação da massa:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- equação da conservação da quantidade de movimento modificada:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha hu^2)}{\partial x} + g \cdot \cos(\theta) \cdot h \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tau_c}{\rho} + g \cdot h \cdot \sin(\theta) - \frac{g u^2}{C^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(h \cdot \nu \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (2)$$

sendo:

h : profundidade do escoamento

u : velocidade média vertical

C : coeficiente de Chézy

θ : declividade do canal

ρ : massa específica do fluido

ν : viscosidade do fluido

α : coeficiente de distribuição de velocidade na vertical

$\frac{\tau_c}{\rho}$: tensão crítica de cisalhamento reduzida.



O 2º membro da eq. (2) é, agora, composto de três termos:

- termo da gravidade
- termo representativo dos efeitos dissipativos na interface entre o escoamento e o fundo do canal
- termo oriundo da reologia “binghamiana”.
- termo viscoso.

De maneira análoga ao desenvolvimento apresentado no **Capítulo VII**, chegamos à condição necessária para a geração de “roll waves”, na nova reologia binghamiana, a saber:

$$2 \cdot \beta \left(\frac{1 - \sqrt{\beta + \frac{C^* \cdot (1 - \beta)}{W^2}}}{-\beta + \sqrt{\beta + \frac{C^* \cdot (1 - \beta)}{W^2}}} \right) < 1 \quad \text{sendo:} \quad \begin{aligned} C^* &= \frac{\tau_c}{\rho \cdot g \cdot h_0 \cdot \sin(\theta)} \\ \beta &= \frac{g}{C^2 \cdot \tan(\theta)} \end{aligned}$$

ou ainda escrevendo esta condição de geração em função do número de Froude crítico, tem-se :

$$F_c > \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{2(1 - C^*) + \frac{k^2 \sigma}{\text{Re}}} - (\alpha - 1) \right)^2 - \alpha(\alpha - 1)}}$$

A relação acima é dita condição de existência para formação de “roll waves” em fluidos binghamianos.

A inequação acima define um domínio para o qual pode-se formar “roll waves”. Tais resultados são ilustrados na figura 1. Observa-se que para um acréscimo do termo de Bingham (coesão do material ou da tensão crítica τ_c), “roll waves” podem se desenvolver mais facilmente, ou seja, o aumento deste parâmetro favorecerá o



desenvolvimento dessas perturbações. Essa conclusão vem ao encontro, por exemplo, das observações experimentais de Takahashi (1990), que gera “roll waves” no laboratório mesmo para números de Froude menores que dois (ver figuras 2, 3 e 4). Se a coesão do fluido C^* for nula , a desigualdade é dada pelo parâmetro: $\beta < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \tan(\theta) > \frac{4 \cdot g}{C^2}$, o que está de acordo com o resultado de Dressler (1949) - geração de "roll-waves" em "fluido newtoniano" ou "água limpa".

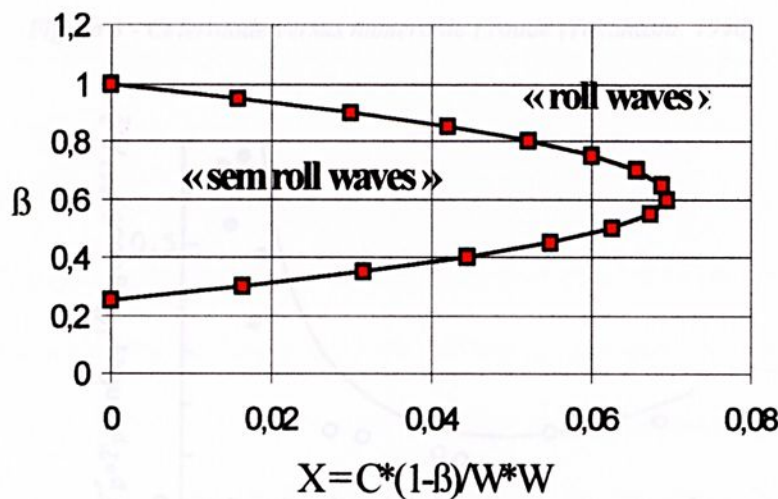


Figura 1 - Domínio de existência de “roll waves”.

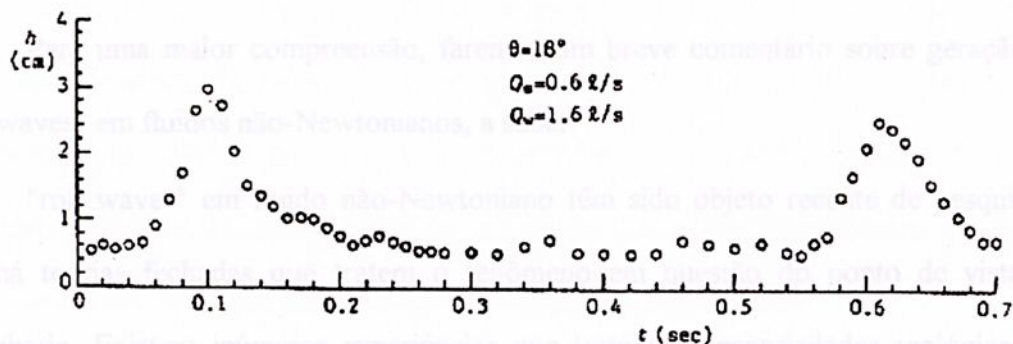


Figura 2 - Roll waves em um debris flow (Takahashi, 1990).

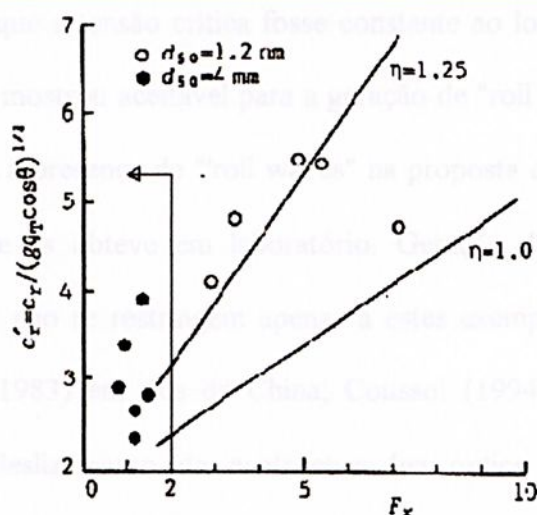


Figura 3 - Celeridade versus número de Froude (Takahashi, 1990).

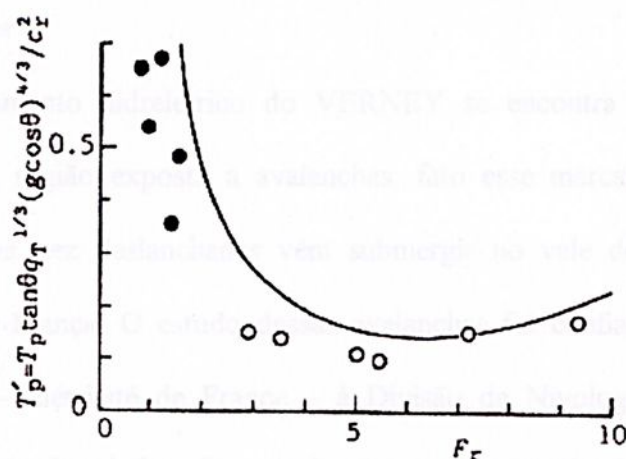


Figura 4 - Período versus número de Froude (Takahashi, 1990).

Para uma maior compreensão, faremos um breve comentário sobre geração de "roll waves" em fluidos não-Newtonianos, a saber:

- "roll waves" em fluido não-Newtoniano têm sido objeto recente de pesquisa e não há teorias fechadas que tratem o fenômeno em questão do ponto de vista de engenharia. Existem inúmeras experiências que tratam de propriedades reológicas de fluidos, apontando o modelo de Bingham como bastante aceitável na simulação de fluidos tipo "debris flows", "mudflows", avalanches, etc. Nossa proposta teórico-numérica foi usar as equações "shallow water" (tipo Saint-Venant) assumindo, do ponto

de vista da reologia, que a tensão crítica fosse constante ao longo da profundidade do escoamento, o que se mostrou aceitável para a geração de "roll waves". Como pudemos constatar, verificamos a presença de "roll waves" na proposta de Bingham, assim como Takahashi (1990) que as obteve em laboratório. Geração de tais instabilidades, na reologia binghamiana, não se restringem apenas a estes exemplos, mas também foram tratadas por Cheng (1983) em rios da China; Coussot (1994) em evolução de lavas torrenciais; ou em deslizamento de avalanches (na óptica numérica) quando das atividades de pós-doutorado (G. Freitas Maciel (1997)). Neste contexto, deixamos registradas algumas simulações numéricas do deslanche de avalanche no corredor do Boulangeard, a saber :

O aproveitamento hidrelétrico do VERNEY se encontra na França (Alpes franceses) em uma região exposta a avalanches, fato esse marcado pelas sucessivas avalanches que uma vez deslanchadas vêm submergir no vale de L'Eau d'Olle, na região do rio Isère-França. O estudo dessas avalanches foi confiado pelo Serviço de Estudos da EDF – Électricité de France – à Divisão de Nivologia do Cemagref de Grenoble. Em função dos dados disponíveis para aquele estudo de caso, achamos de bom alvitre estudar mais em detalhes o deslanche e a evolução da avalancha anual a fim de determinar os campos de velocidade e de altura e, mais precisamente, a velocidade e altura da avalanche junto ao lago da barragem e por conseguinte, a determinação de alturas de onda no lago geradas por impacto localizado da massa animada de movimento no meio líquido. Ainda que esses últimos resultados não façam parte dessa Tese, estes são encontrados na referência *Charlier et al.*



A descrição abaixo é de ordem sumária, pois o objetivo maior é ilustrar a presença de perturbações tipo "roll waves" quando de sua propagação em simulação numérica bidimensional.

O caso do Boulangeard não tem nada de específico. A determinação cartográfica do corredor é realizada a partir de cartas topográficas. Análise de fotos aéreas permitiram-nos dividir o corredor em cinco zonas homogêneas, e as avalanches se deslancham mais comumente quando a declividade do terreno depassa os 30 graus. O eixo principal do escoamento é determinado utilizando talwegues, e as curvas que a avalanche poderá desenvolver ao longo de sua trajetória também é levado em consideração.

A avalanche anual :

Uma camada de neve de cerca de 50 cm deslancha nas zonas sem vegetação do corredor. A neve estocada em outras zonas do corredor (floresta, por exemplo) não participa na avalanche, ali permanecendo. Estima-se em 1ª ordem, um volume de cerca de 70.000 m³ que desce o corredor, vindo parar a uma altitude entre 800 e 900 m.

No caso do Boulangeard (figura 5), o modelo numérico do terreno foi realizado a partir dos mapas e manualmente. A discretização do sítio foi realizada através de elementos de malha de 25 metros de lado para os quais se determinavam as cotas no centro de cada malha.

Cabe citar que naquela versão, o modelo numérico de terreno é gerido por um "sistema expert ELSA", que por sua vez interfaceia com o modelo numérico bidimensional. A malha do domínio ensaiado foi feita com elementos quadriláteros contando cerca de 7000 elementos (figura 6). Leva-se em conta que nas zonas de forte declividade, o passo de discretização é menor, reduzindo-se a 10 metros, ao passo que



nas zonas de declividades mais suaves retornamos aos 25 metros. A malha final é do tipo elementos finitos e é obtida através da divisão do sítio de interesse em zonas ou quadros elementares que por sua vez são discretizados por gerador de malha automatizado e integrado à biblioteca de elementos finitos MODULEF desenvolvido pelo INIRIA. Cada um desses subdomínios são em seguida "recolados" para se obter a malha do sítio final. Em seguida, a malha é projetada sobre o modelo numérico do terreno, de maneira a se determinar a cota no centro de cada malha, por interpolação.

As simulações são inicializadas, assim como no código 1D, por uma altura inicial de fluido em todo domínio. No caso do Boulangeard, supomos que só a parte de montante do corredor estivesse coberta de neve. Os deslanches sobre cada elemento de malha são gerados pelo próprio código, segundo a altura de fluido ultrapasse ou não altura crítica de deslanche h_c que é função da declividade, da tensão crítica de cisalhamento e da massa específica. O volume é determinado a partir da estimativa da área e da espessura da zona fraturada.

Resultados e Comentários :

A partir de simulações mostradas nas figuras que se seguem, temos uma idéia do processo de evolução da massa de avalanche de neve densa (material com característica de fluido de Bingham).

As figuras apresentadas a seguir mostram a configuração das isoalturas para a avalanche anual tratada em diferentes fases de sua evolução. Nas figuras 7, 8, 9 e 10 podemos observar a fase de início do escoamento, fase de aceleração e desaceleração da avalanche (isoalturas representadas pela cor amarela - alturas máximas). Na fase de aceleração no corredor, o escoamento, com velocidades máximas propicia o



aparecimento de "roll waves", fenômeno quase sempre relatado por pessoas da região e do meio técnico, característico, aliás, de terrenos de forte declividade. As "roll waves" estão representadas por isoalturas de cor amarela, regularmente espaçadas.

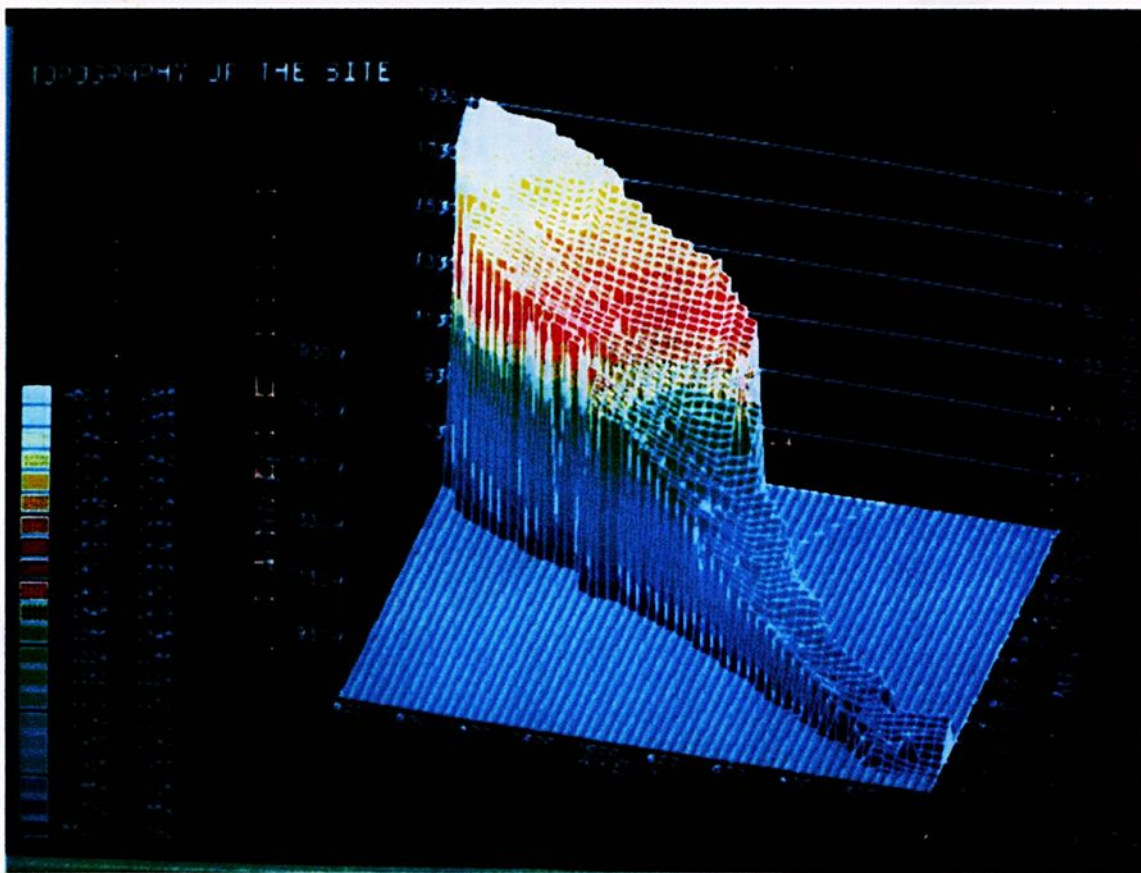


Figura 5 – Topografia do sítio Boulangeard (Alpes Franceses).

Figura 6 – Malha usada nas simulações numéricas



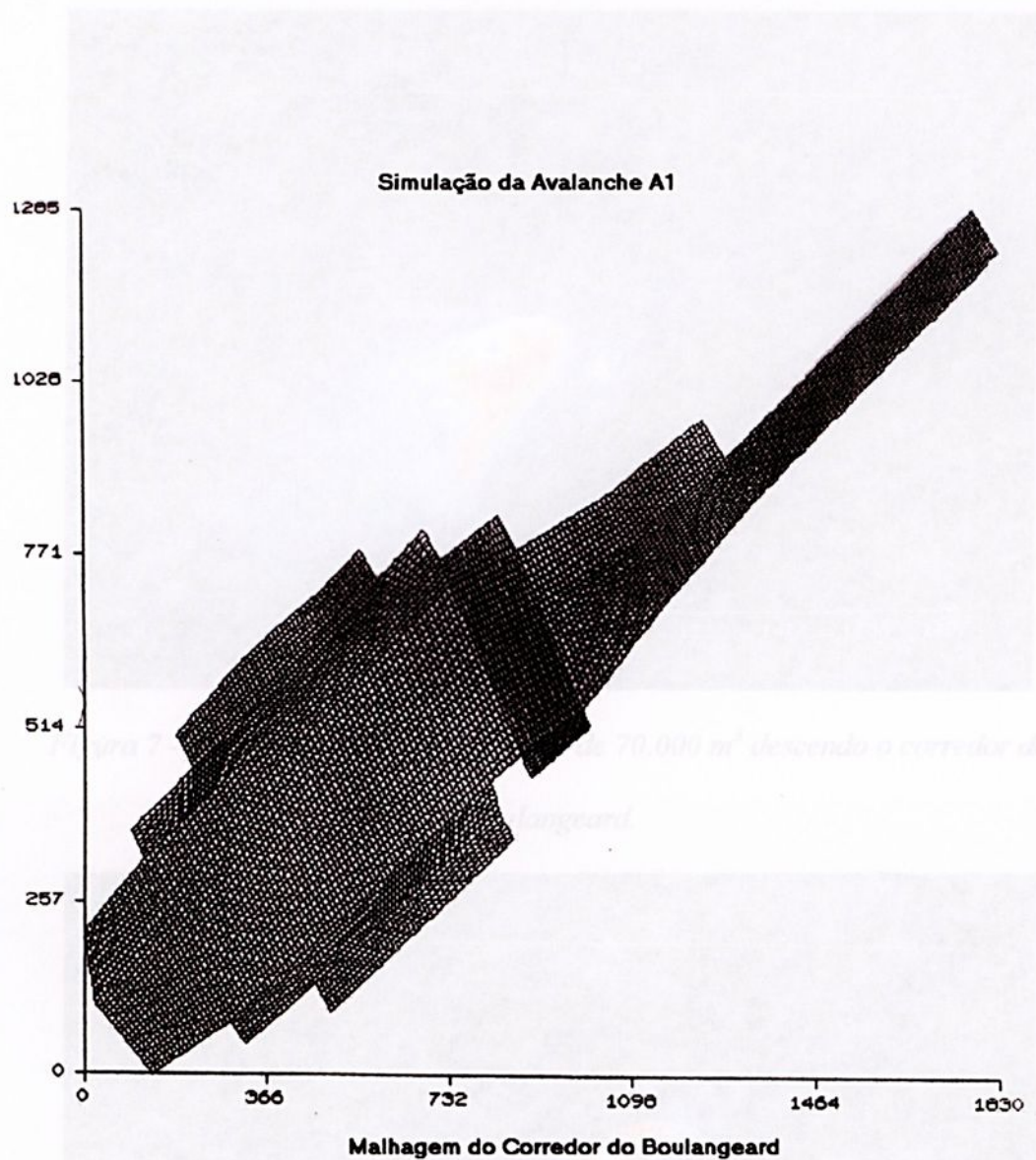


Figura 6 – Malhagem usada nas simulações numéricas



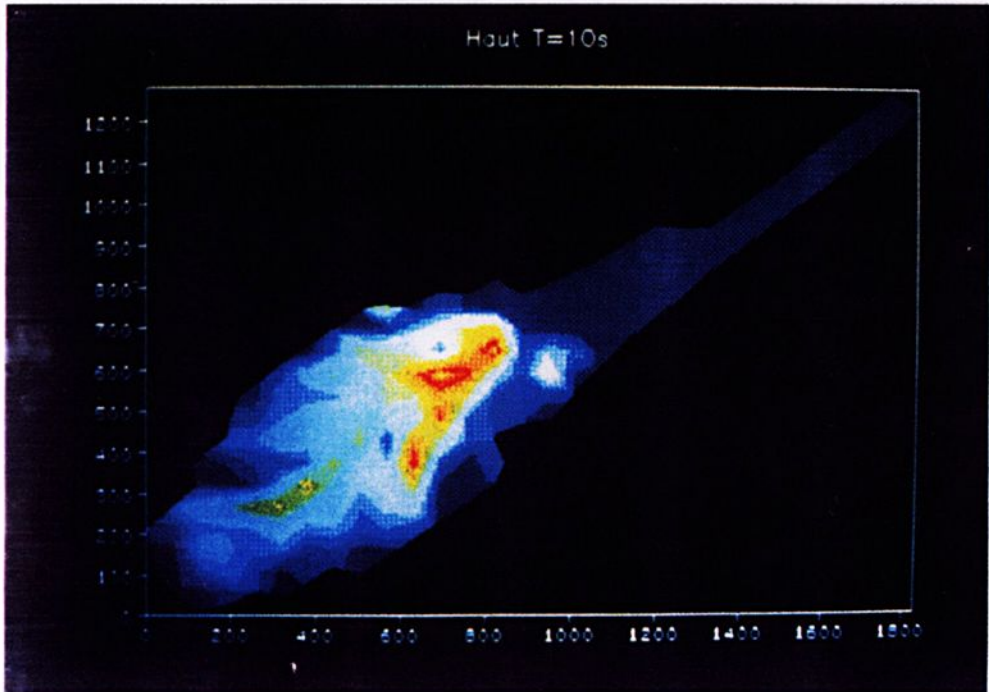


Figura 7 – Simulação de uma avalanche de 70.000 m³ descendo o corredor do Boulangeard.

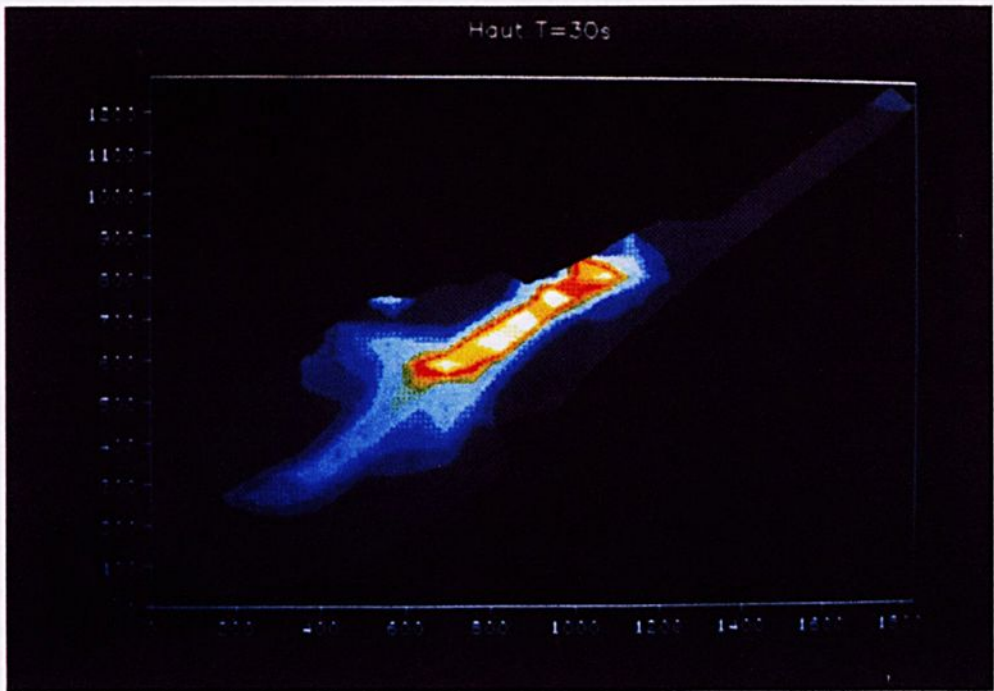


Figura 8 – T = 30s – Fase de aceleração.

Figura 10 – Fase de desaceleração.

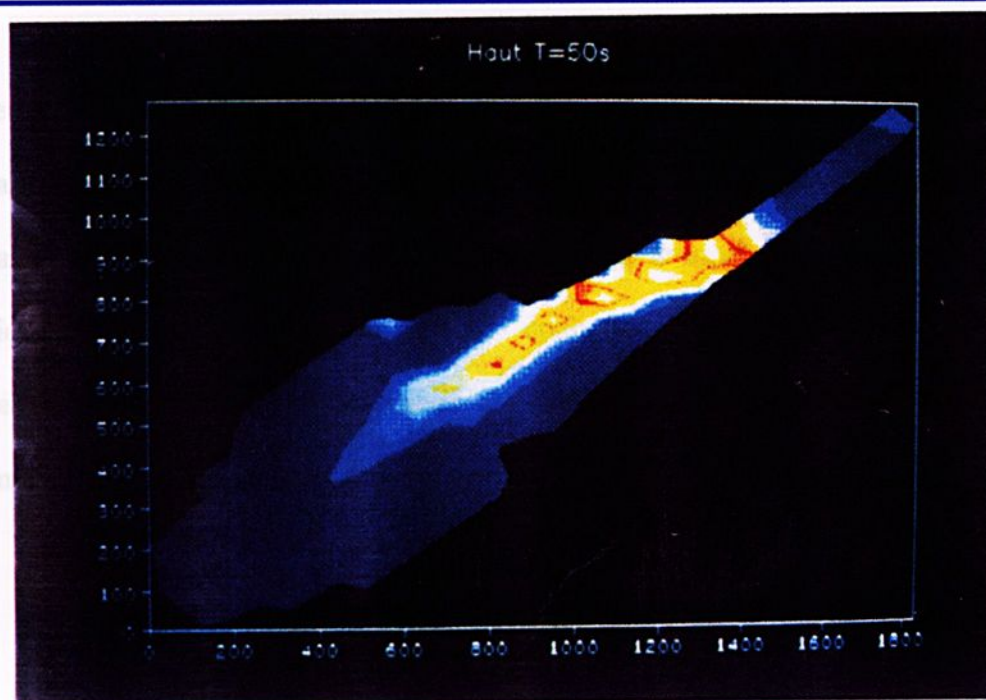


Figura 9 – Presença nítida de “roll waves” no seio da avalanche.

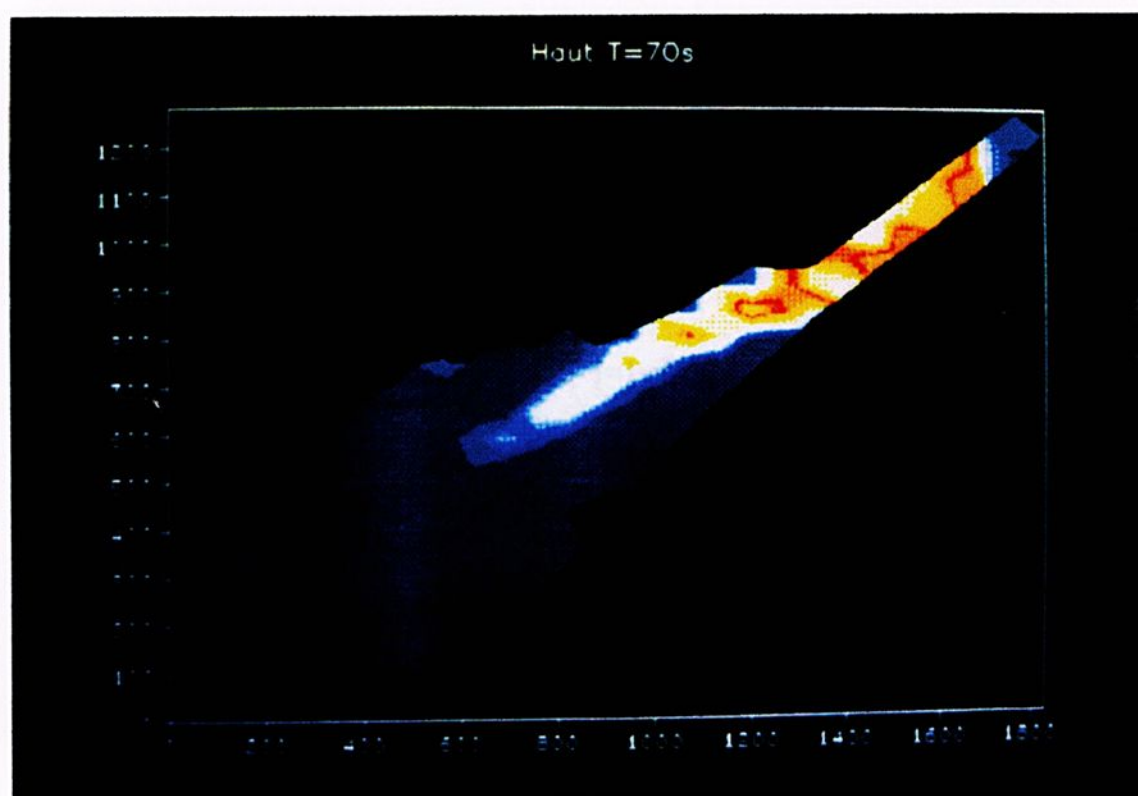


Figura 10 – Fase de desaceleração.

De maneira análoga ao Capítulo VIII e adimensionalizando o sistema conservação da massa-quantidade de movimento com as escalas convenientes tem-se: escala de comprimento $x = L.x^*$, $h = h_n.h^*$, onde L representa o comprimento de onda, escala de tempo $t = t_n.t^*$ e a escala de velocidades $u = u_n.u^*$. O subíndice (n) indica condições de escoamentos em regime uniforme. Introduzindo essas variáveis adimensionais e omitindo os asteriscos (*), obtém-se após alguns desenvolvimentos matemáticos, o sistema (3-4), a saber:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha.u.\frac{\partial u}{\partial x} - (\alpha-1).\frac{u}{h}.\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{F^2}.\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2}.\left(1 - \frac{u^2}{h} + \frac{C^*}{h}\right) + \frac{1}{\text{Re}}.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{h}.\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial h}{\partial x}\right) \quad (4)$$

A fim de analisar o estudo "quase permanente" do sistema "shallow-water", fazemos uma mudança de variável (referencial móvel), a saber: $z = x - Ut$. Isso exposto, e aplicando uma mudança de variável às equações (3) e (4) obtém-se:

- conservação da massa

$$h.(u - U) = 1 - U \quad (5)$$

- conservação da quantidade de movimento

$$-U\frac{\partial u}{\partial z} + \alpha.U.\frac{\partial u}{\partial z} - (\alpha-1).\frac{u}{h}.U.\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{1}{F^2}.\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2}.\left(1 - \frac{u^2}{h} + \frac{C^*}{h}\right) + \frac{1}{\text{Re}}.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{h}.\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial h}{\partial z}\right) \quad (6)$$

Substituindo (5) em (6) e eliminando a variável u , obtemos uma equação diferencial de segunda ordem na variável h , a saber:



$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\text{Re}}{F^2(1-U)} \left\{ h^3 - \alpha F^2(1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1^*)(h-h_2^*)}{\varepsilon.F^2(U-1)h} = 0 \quad (7)$$

sendo:

$$h_1^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] - \sqrt{\left((U+1) + \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right) \left((U+1) - \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right)} \right\}$$

$$h_2^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ [U+1] + \sqrt{\left((U+1) + \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right) \left((U+1) - \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right)} \right\}$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho.g.h.\text{sen}(\theta)}$$

A fim de verificar a existência de soluções periódicas para a equação (7), surge a necessidade de estudá-la em seu plano de fases. Para tanto, impõe-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = w = F_1(h, w) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = F_2(h, w) \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{h} w^2 + \frac{\text{Re}}{(1-U)F^2} \left\{ h^3 - \alpha F^2(1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} w - \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1)(h-h_2)}{\varepsilon.F^2(U-1)h}$$

Estudo dos pontos de equilíbrio:

$$F_1(h, w) = 0 \rightarrow w = 0$$

$$F_2(h, w) = 0 \rightarrow h = 1$$

Donde verifica-se que o escoamento uniforme ($h=1$ e $w=0$) é um ponto de equilíbrio.



Podemos então pensar em verificar a existência ou não de órbitas fechadas ao redor deste ponto de equilíbrio. Assim sendo, deverão existir soluções periódicas para o problema pesquisado.

Através de um processo de linearização do sistema (8) na vizinhança do ponto de equilíbrio $(h,w) = (1,0)$, obtemos o sistema linear de equações, a saber:

$$h = 1 + \eta \bar{h} \quad \text{e} \quad w = \varphi \bar{w} \quad \text{onde,} \quad \varphi \ll 1 \quad \text{e} \quad \eta \ll 1.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \bar{w} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \cdot \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \bar{w} - \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \left\{ 1 + 2(1-C^*)(1-U) \right\} \bar{h} \end{cases} \quad (9)$$

Exposto isto, passamos a determinar os autovalores λ_i ($i=1,2$) do sistema (9), a partir do cálculo do determinante Δ , dado por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \left\{ 1 + 2(1-C^*)(1-U) \right\} & -\frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \cdot \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \end{bmatrix}$$

O que resulta na equação quadrática em λ , conforme se segue:

$$\lambda^2 - \frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \lambda - \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \left\{ 1 + 2(1-C^*)(1-U) \right\} \lambda^0 = 0$$

Para obtermos auto-valores reais e distintos e por conseguinte órbitas fechadas (ou soluções periódicas) torna-se necessário que o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ seja estritamente superior à zero. Assim sendo, tem-se:

$$\left(-\frac{\text{Re}}{(1-U).F^2} \left\{ 1 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha U^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \right)^2 - 4.1 \left(-\frac{\tan(\theta)}{\varepsilon.F^2(U-1)} \left\{ 1 + 2(1-C^*)(1-U) \right\} \right) > 0$$

$$4 \cdot 1 \cdot \frac{\tan(\theta)}{\varepsilon F^2 (U-1)} \{1 + 2 \cdot (1 - C^*) (1 - U)\} > 0$$

Ou seja :

$$1 + 2 \cdot (1 - C^*) (1 - U) > 0 \quad \Rightarrow \quad U < \frac{3 - 2 \cdot C^*}{2 \cdot (1 - C^*)}$$

$$U - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad U > 1$$

O que resulta, para o fluido não-Newtoniano, a condição sobre U:

$$1 < U < \frac{3 - 2 \cdot C^*}{2 \cdot (1 - C^*)} \quad (10)$$

Lembramos que, se a coesão for nula, ($C^* = 0$), condição de fluido Newtoniano, a equação (10) é dada por $1 < U < \frac{3}{2}$. (como determinado anteriormente – **Cap. VIII**).

$$B = \frac{\text{dissipação devido a } \tau_0}{\text{dissipação viscosa}} = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot \frac{U}{H} = \frac{\tau_0}{\mu} \cdot \frac{U}{H}$$

μ = viscosidade cinemática

Para os fluidos do tipo lavas torrenciais ou avalanches, obtivemos, a partir da literatura, dados do terreno, que podem sustentar a validade da proposta, a saber :

XI – ESTIMATIVA DO NÚMERO DE BINGHAM (B) E DA DIFUSÃO NUMÉRICA EM VIA DE APLICAÇÃO EM PROBLEMAS DE ENGENHARIA

É sabido que o único tipo de fluido capaz de produzir um deslanche a partir de uma altura crítica é o de Bingham (presença de tensão crítica, etc). Na literatura concernente, o fluido de Bingham poderia bem caracterizar a reologia e a dinâmica de lavas torrenciais, ou fluidos hiperconcentrados. Os pesquisadores, de maneira geral, comparam os perfis de velocidade teóricos com aqueles medidas em laboratório referendando assim a proposta em tela.

Quando o fluido de Bingham põe-se em movimento, o perfil de velocidade compreende duas partes : uma parte cisalhante próxima à parede (região de intensa ação viscosa) e uma parte em "plug". A partir desse perfil característico, poder-se-ia definir o número de Bingham, a saber :

$$B = \frac{\text{dissipação devido a } \Gamma_c}{\text{dissipação viscosa}} = \frac{\Gamma_c}{\mu \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\Gamma_c}{\rho \nu \frac{\partial u}{\partial y}} \approx \frac{\Gamma_c}{\rho \nu \frac{U}{H}}$$

ν : viscosidade cinemática

Para os fluidos do tipo lavas torrenciais ou avalanchas, obtivemos, a partir da literatura, dados do terreno, que podem sustentar a validade da proposta, a saber :

Tabela 1 : Parâmetro da literatura específica

Avalanchas	Lavas torrenciais
$2 < \frac{\tau_c}{\rho} < 8$	$0.05 < \frac{\tau_c}{\rho} < 0.5$
$10^{-3} < \nu < 10^{-2}$	$10^{-2} < \nu < 10^{-1}$
$0.5 < \frac{U}{H} < 30$	$0.4 < \frac{U}{H} < 5$
$6.5 < B < 10^5$	$1.0 < B < 10^4$

Esses resultados nos demostram que em aplicações de engenharia e para as escalas em que trabalhamos com os escoamentos que pretendemos estudar, o efeito da dissipação viscosa é pequeno em relação ao efeito majoritário devido à ação da tensão cisalhante τ_c . No plano numérico, tal efeito está associado ao fato que a viscosidade numérica implícita do esquema é significativamente maior que a viscosidade do fluido (conforme apresentado no item que se segue). Esta restrição ainda que limitante, é aceitável no contexto em que trabalhamos (vide número de Bingham) – ou seja, estamos em domínio de grandes escalas e regime tipicamente turbulento, o que, mais uma vez, vem ao encontro das hipóteses adotadas no desenvolvimento do código de cálculo. Em suma, estamos desprezando o efeito da viscosidade do fluido e tratando o escoamento em "plug".



ESTIMATIVA DA DIFUSÃO NUMÉRICA ORIUNDA DO MODELO - COMPARAÇÃO COM A DIFUSÃO FÍSICA

O objetivo dessa parte do trabalho é determinar, ainda que em 1ª ordem, a expressão e quantificação da difusão numérica afim de compará-la com a difusão física (viscosidade física). O efeito de difusão numérica provável, oriunda do esquema numérico utilizado, dependerá do incremento espacial Δx e do incremento de tempo Δt .

Seja então uma aproximação por diferenças finitas de incremento Δx constante em todo domínio. Fazendo uma aproximação por diferenças finitas do sistema de Saint Venant em questão, podemos escrever como se segue :

$$U_{,t} + f(U)_{,x} = G(U)$$

$$\text{Com : } U = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}; \quad f(U) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}; \quad G(U) = 0$$

onde, t designa a derivada em relação ao tempo t e x a derivada em relação a x .

Uma vez que o regime de escoamento é de natureza torrencial ou rápida, torna-se possível determinar o valor exato do fluxo numérico, a saber :

$$F = \frac{u}{\sqrt{gh}} > 1; \quad u - c > 0$$

Uma vez que a característica associada ao autovalor $u - c$ penetra no domínio de cálculo, tem-se que a solução estacionária do problema de Riemann é igual ao valor à esquerda (esquema decentrado a montante ou progressivo). Sendo assim, o esquema pode então ser escrito da seguinte forma :

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + \frac{f(U_j^n) - f(U_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0$$

$$U_t + \frac{\Delta t}{2} U_{,tt} + O(\Delta t^2) + f(U)_{,x} - \frac{\Delta x}{2} f(U)_{,xx} + O(\Delta x^2) = 0$$

Em 2ª ordem :

$$U_{,t} + f(U)_{,x} = -\frac{\Delta t}{2} U_{,tt} + \frac{\Delta x}{2} f(U)_{,xx} + O(\Delta x^2 + \Delta t^2) = 0$$

ora, sabemos que :

$$\begin{aligned} U_{,tt} &= -f(U)_{,xt} = -(f' U_{,x})_{,t} = -f'' U_{,t} U_{,x} - f' U_{,tx} \\ &= f'' f(U)_{,x} U_{,x} + f'(f(U)_{,x})_{,x} = (f' f(U)_{,x})_{,x} \end{aligned}$$

De onde se obtém a equação equivalente do esquema numérico :

$$U_{,t} + f(U)_{,x} = \frac{\Delta x}{2} \left[(Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} f') f(U)_{,x} \right]_{,x}$$

onde Id é a matriz identidade. Dessa maneira, a viscosidade numérica buscada é da ordem de :

$$\nu_{num} = \frac{\Delta x}{2} [(Id - rf') f']$$

$$\text{onde : } r = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

No caso do sistema tratado (Saint Venant), tem-se uma matriz $[M]$ dada por :

$$\begin{aligned} [M] &= \frac{\Delta x}{2} \left[(Id - \frac{\Delta t}{\Delta x} f') f' \right] \\ &= \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + c^2 & 2u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -r \\ -r(-u^2 + c^2) & 1 - 2ru \end{bmatrix} \\ &= \frac{\Delta x}{2} \begin{bmatrix} -r(-u^2 + c^2) & 1 - 2ru \\ (1 - 2ru)(-u^2 + c^2) & -r(-u^2 + c^2) + 2u(1 - 2ru) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

O termo de difusão da equação da conservação da quantidade de movimento devido à viscosidade numérica é dada, no caso, pela seguinte expressão :



$$= \frac{\Delta x}{2} \left[(1-2ru)(-u^2+c^2)h_{,x} + (-r(-u^2+c^2) + 2u(1-2ru))(hu)_{,x} \right]_{,x}$$

NUMÉRICA E VISCOSIDADE FÍSICA

Admitindo que u seja da ordem de grandeza de c e utilizando a condição de Courant-Friedrichs-Lévy (CFL), demonstra-se que esse termo é da ordem de:

$$\frac{\Delta x}{2} [u(hu)_{,x}]_{,x}$$

A equação de conservação da quantidade de movimento, nesse caso, é dada por :

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2 + p)}{\partial x} = \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial(u \frac{\partial(hu)}{\partial x})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = \nu_{num} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \cos(\theta) \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\Delta x}{2} u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

A última equação mostra que implicitamente introduzimos no segundo membro da equação da quantidade de movimento um termo dissipativo suplementar e que tende a zero quando o incremento espacial Δx diminui. Exposto isto, a viscosidade numérica é, então, dada por :

$$\nu_{num} = u \frac{\Delta x}{2}$$



ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE VISCOSIDADE NUMÉRICA E VISCOSIDADE FÍSICA

Para o fenômeno investigado, a velocidade u esteve na faixa compreendida entre 2 m/s e 10 m/s. Admitindo um incremento $\Delta x = 1$ m, chegamos a uma viscosidade numérica mínima da ordem de $1\text{ m}^2/\text{s}$. Mas na prática, o incremento Δx é ligeiramente superior, uma vez que queremos tratar problemas de engenharia em larga escala, com domínios estendendo-se até dezenas de quilômetros. Entretanto, no melhor dos casos, a viscosidade física, nesses casos (numa lava torrencial por exemplo), não deverá exceder de $0.1\text{ m}^2/\text{s}$, o que nos fornece :

$$\frac{v_{\text{numérica}}}{v_{\text{física}}} > 10$$

De maneira que podemos concluir que para as escalas que pretendemos trabalhar a difusão numérica é ordens de vezes superior a difusão física. A contribuição da viscosidade física pode, pois, ser desprezada nas equações, o que justifica a posteriori, a hipótese utilizada para a determinação do modelo matemático. No entanto cabe aqui citar que para simulações em escalas menores, da ordem do centímetro, por exemplo, seria conveniente elaborar um modelo matemático que levasse em conta o efeito viscoso (análise de pequenas escalas), e por conseguinte um modelo numérico implícito seria mais apropriado, pois possibilitaria um aumento do passo de tempo, por exemplo. Os esquemas implícitos são incondicionalmente estáveis.



XII - DISCUSSÃO DE RESULTADOS TEÓRICO-NUMÉRICOS DE "ROLL WAVES" COM BASE NO CÓDIGO DE CÁLCULO

A partir dos resultados obtidos anteriormente, podemos começar a ilustrar alguns elementos norteadores de critérios de formação e desenvolvimento de "roll waves" em função dos parâmetros físicos envolvidos. As figuras que se seguem mostram a influência do número de Reynolds Re e do número de onda k em função do número de Froude crítico F_c para vários valores da coesão C^* (efeito de Bingham). A figura 1 mostra a influência do número de ondas (comprimento de ondas) sobre o Froude crítico para dois parâmetros fixos, quais sejam: $\zeta = \frac{\sigma}{Re} = 0.05$ e $\alpha = 1.00$. Pode-se deduzir a partir figura 1 que "roll waves" tendem a se desenvolver mais facilmente ou mais prematuramente para um cenário de pequenos números de onda e valores elevados da tensão crítica de Bingham (efeito da coesão). Afirmar-se-ia por um lado que um aumento no valor da coesão levaria ou favoreceria o aparecimento de instabilidades tipo "roll waves", por outro lado, que ondas longas seriam as primeiras a se desestabilizarem.

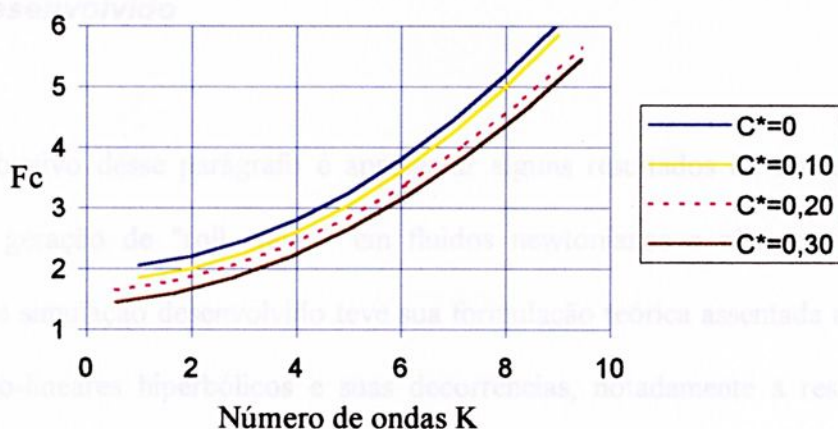


Figura 1: Froude crítico em função do número de ondas k

A figura 2 mostra a influência da rigidez adimensional C^* (coesão) sobre o número de Froude como função do número de Reynolds Re . Pode-se observar que da mesma maneira que no resultado ilustrado na figura 1, um aumento na coesão do fluido proporcionaria o aparecimento precoce de "roll waves", para Froude e Reynolds fixados.

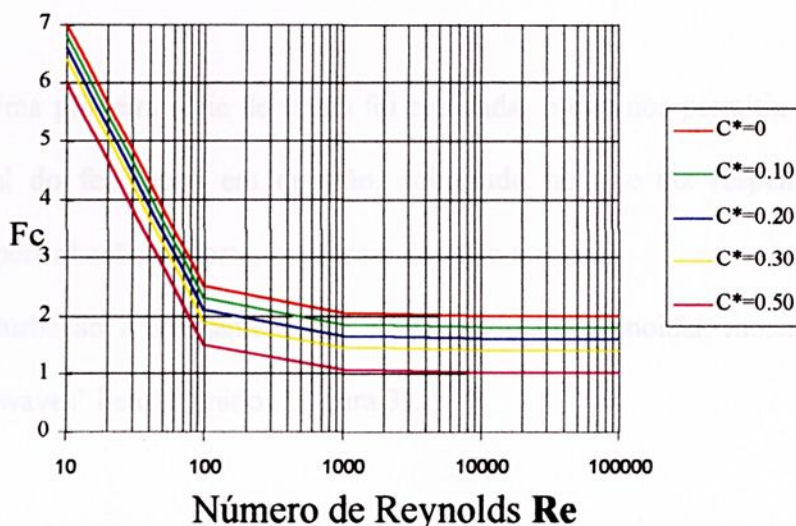


Figura 2: Froude crítico em função do Número de Reynolds

Testes de Validação – Resultados numéricos utilizando o código de cálculo desenvolvido

O objetivo desse parágrafo é apresentar alguns resultados de ordem numérica obtidos na geração de "roll waves" em fluidos newtonianos e não-newtonianos. O programa de simulação desenvolvido teve sua formulação teórica assentada na teoria de sistemas não-lineares hiperbólicos e suas decorrências, notadamente a resolução dos problemas de Riemman (Vila, 1985). As simulações numéricas foram executadas a partir de esquemas numéricos de VanLeer (2ª ordem no tempo e no espaço) e efetuadas



em canal de seção retangular de 1000 m de comprimento (com incremento de espaço $\Delta x = 1.00$ m) e declividade significativa, da ordem de 30%. Trabalhando com regimes de escoamento preferencialmente turbulentos e supercríticos, duas condições-limite a montante puderam ser fixadas, a saber : vazão de 800 l/s/m e lâmina d'água de 0.15 m. Sobre essa vazão, pequenas perturbações (da ordem do por cento) foram impostas, de maneira a gerar "roll waves" estáveis a jusante do canal, como ilustram os diagramas abaixo.

Uma primeira série de testes foi realizada, o que nos permitiu uma apreciação mais global do fenômeno em questão, sobretudo no que diz respeito às condições iniciais da perturbação imposta, conforme descrito a seguir :

- uma perturbação a montante sobre a vazão, do tipo senoidal, mostrou-se capaz de gerar "roll waves" bem definidos (Figura 3).

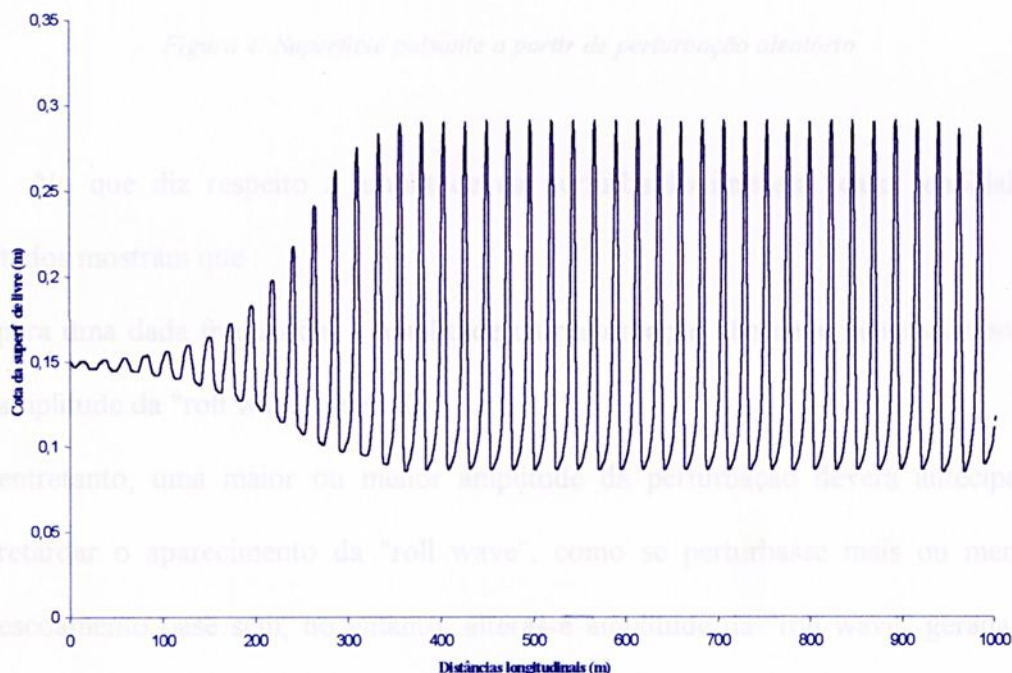


Figura 3: "Roll waves" gerados a partir de perturbação senoidal de $T = 3.14$ s ($C^* = 0$)

(1% da vazão)



- b) uma perturbação aleatória não conseguiu gerar "roll waves" bem definidas, ou seja, com uma frequência preferencial marcada, entretanto gerou uma superfície livre pulsante e com aspectos caóticos, como demonstra a figura 4.

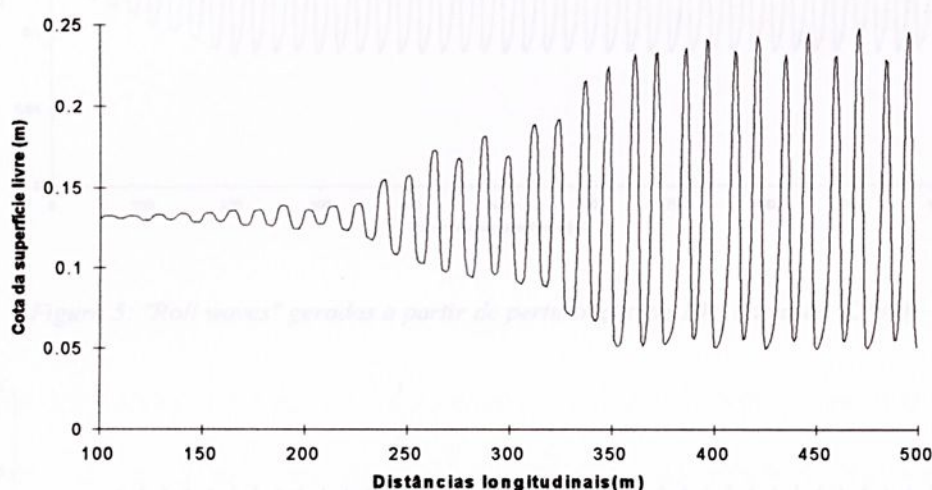


Figura 4: Superfície pulsante a partir de perturbação aleatória

No que diz respeito à amplitude da perturbação imposta (caso senoidal), os resultados mostram que :

- para uma dada frequência, a amplitude da perturbação não deve influenciar sobre a amplitude da "roll wave", gerada ;
- entretanto, uma maior ou menor amplitude da perturbação deverá antecipar ou retardar o aparecimento da "roll wave", como se perturbasse mais ou menos o escoamento base sem, no entanto, alterar a amplitude da "roll wave" gerada. Ver figuras 5 e 6.



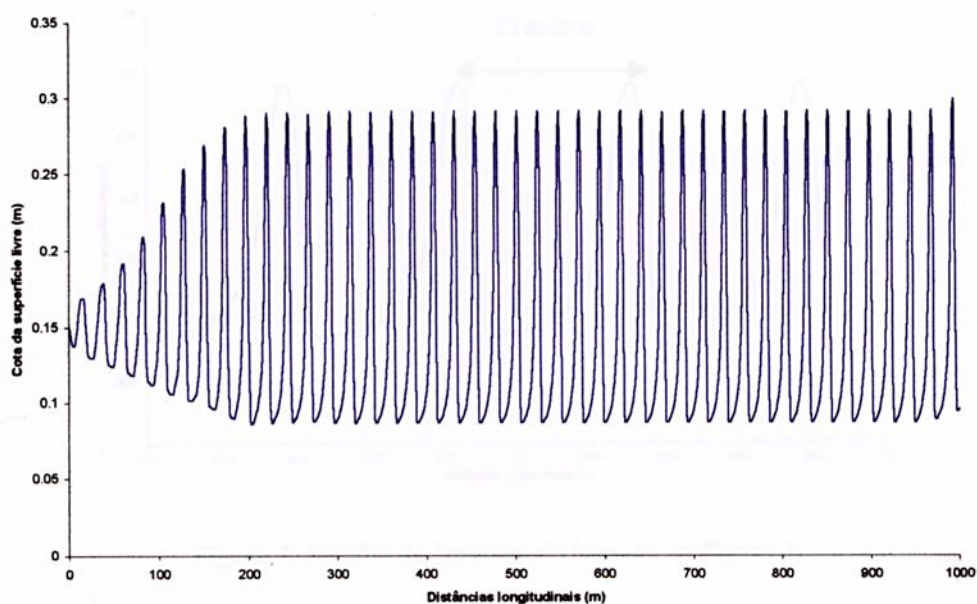


Figura 5: "Roll waves" geradas a partir de perturbação de 10% da vazão ($C^*=0$)

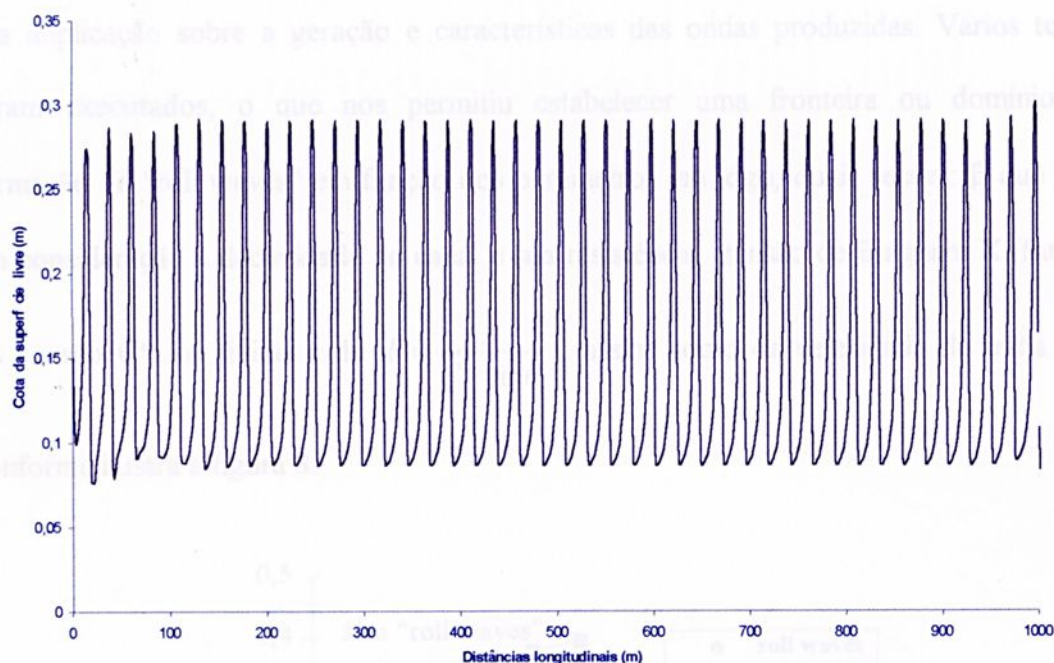


Figura 6: "Roll waves" geradas a partir de perturbação de 50% da vazão ($C^*=0$)

Quanto ao comprimento de onda da perturbação imposta, os ensaios numéricos mostram que a "roll wave" gerada possui o mesmo comprimento. Uma pequena perturbação de $T = 3,14$ s gerou uma "roll wave" de mesmo período (com respectivo comprimento de onda de 25 m). A figura 7 ilustra esse resultado.



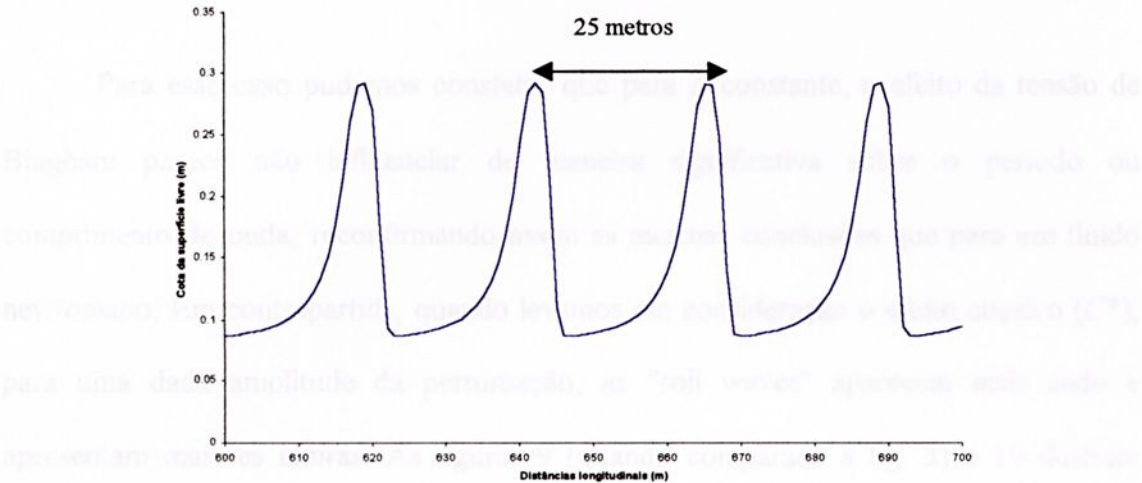


Figura 7: Detalhe da "roll wave" ilustrada na Figura 5.

Uma segunda série de testes foi realizada, levando em conta a nova reologia e sua implicação sobre a geração e características das ondas produzidas. Vários testes foram executados, o que nos permitiu estabelecer uma fronteira ou domínio de formação de "roll waves" em função dos parâmetros em jogo, quais sejam : β que leva em consideração a declividade do canal e sua resistência; tensão de Bingham X (função da coesão C^* do fluido e de $\beta = \frac{g}{C^2 \tan \theta}$; assim como da celeridade da onda W), conforme ilustra a figura 8.

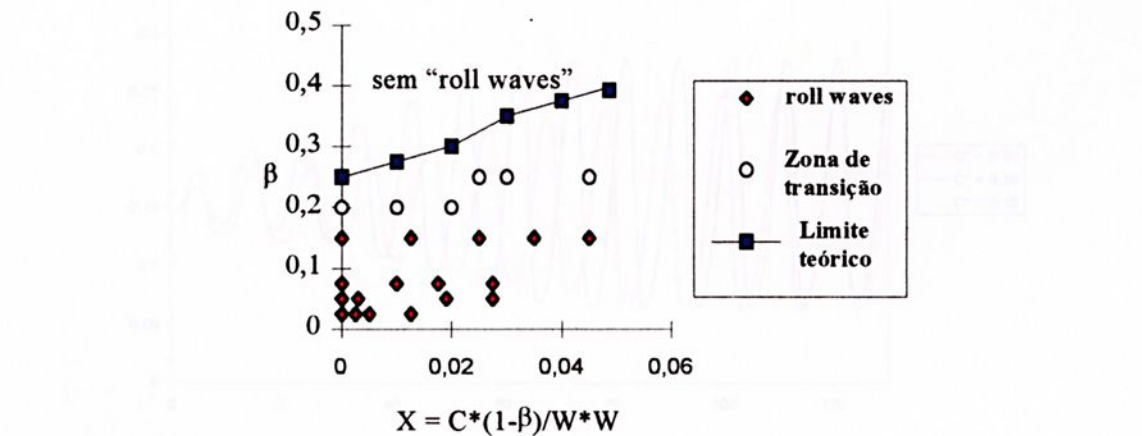


Figura 8: Domínios de geração de "roll waves" em função da declividade do canal e de Bingham.

Para esse caso pudemos constatar que para β constante, o efeito da tensão de Bingham parece não influenciar de maneira significativa sobre o período ou comprimento de onda, reafirmando assim as mesmas conclusões que para um fluido newtoniano. Em contrapartida, quando levamos em consideração o efeito coesivo (C^*), para uma dada amplitude da perturbação, as "roll waves" aparecem mais cedo e apresentam maiores alturas. As figuras 9 (quando comparada à fig. 3) e 10 ilustram esses resultados.

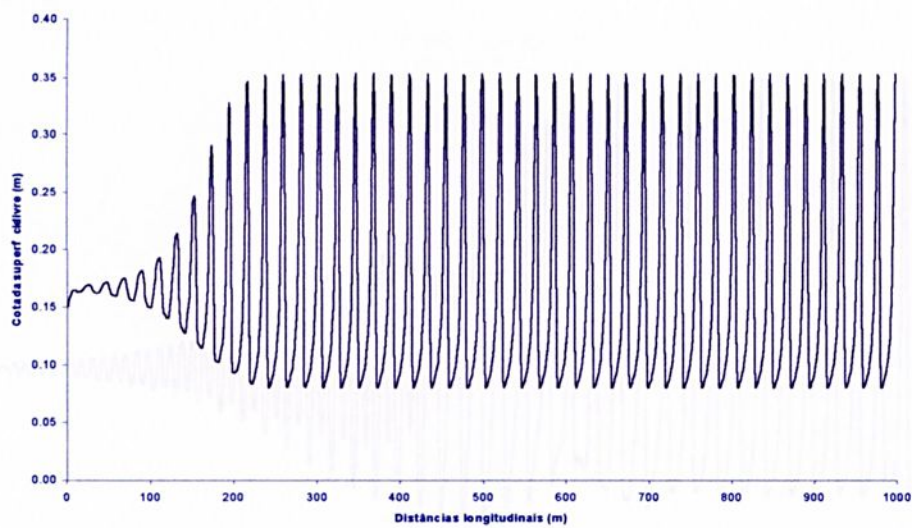


Figura 9: "Roll waves" com $T_{\text{perturbação}} = 3.14 \text{ s}$ ($C^* = 0.10$) e perturbação de 1% da vazão

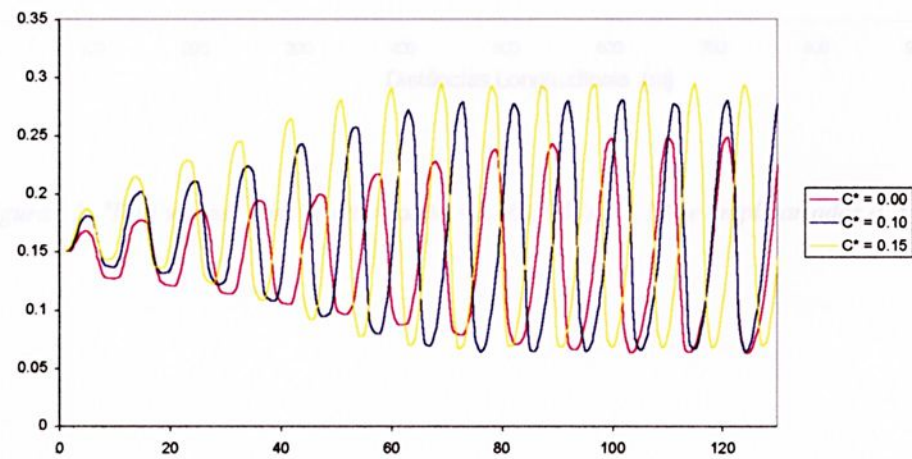


Figura 10: "Roll waves" com $T_{\text{perturbação}} = 3.14 \text{ s}$ – efeitos da coesão antecipando e aumentando as amplitudes das roll waves (10% da vazão)



Uma terceira série de testes consistiu em verificar a sensibilidade de nosso sistema não-linear quando submetido a pequenas perturbações simultâneas e de frequências e amplitude distintas da forma $h(x,t) = H_0(k) \exp (kx - w(t).t)$, onde k é o número de ondas e $w(t)$ as frequências. Os diagramas abaixo ilustram alguns resultados para diversas configurações: Figuras 11, 12 (para fluidos newtonianos) e Figuras 13, 14 (fluidos não-newtonianos).

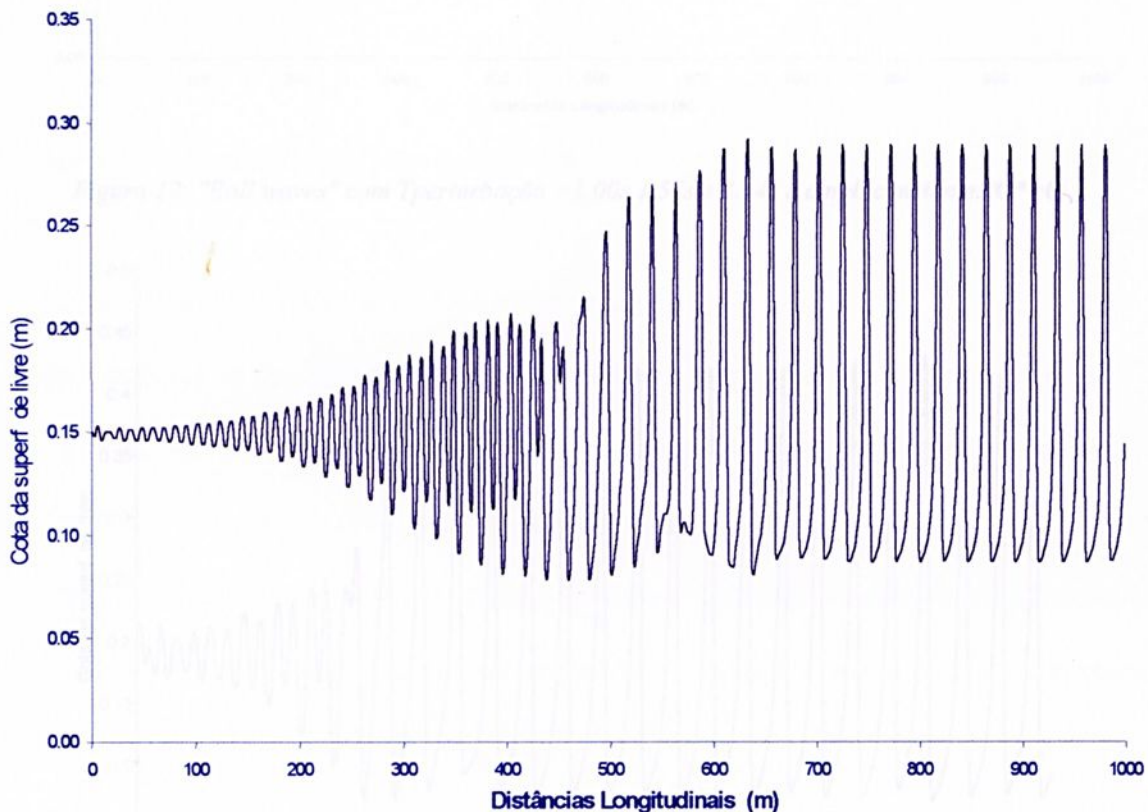


Figura 11: "Roll waves" com $T_{\text{perturbação}} = 1.00s, 1.57s$ e $3.14s$ e ampl. variadas ($C^* = 0$)

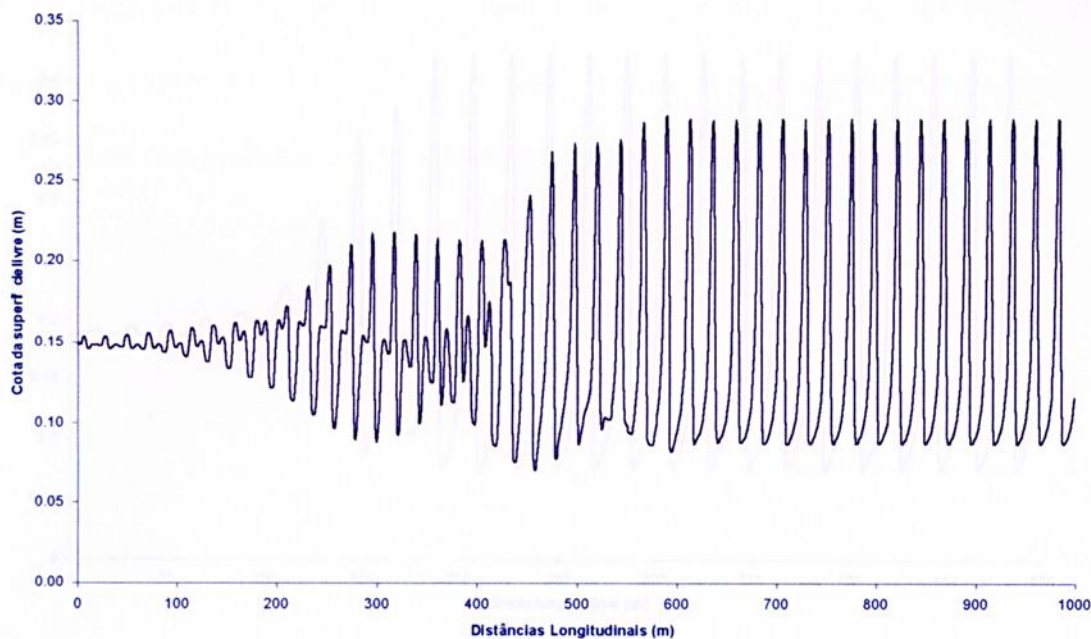


Figura 12: "Roll waves" com $T_{perturbação} = 1.00s, 1.57s$ e $3.14s$ e ampl. constantes ($C^*=0$)

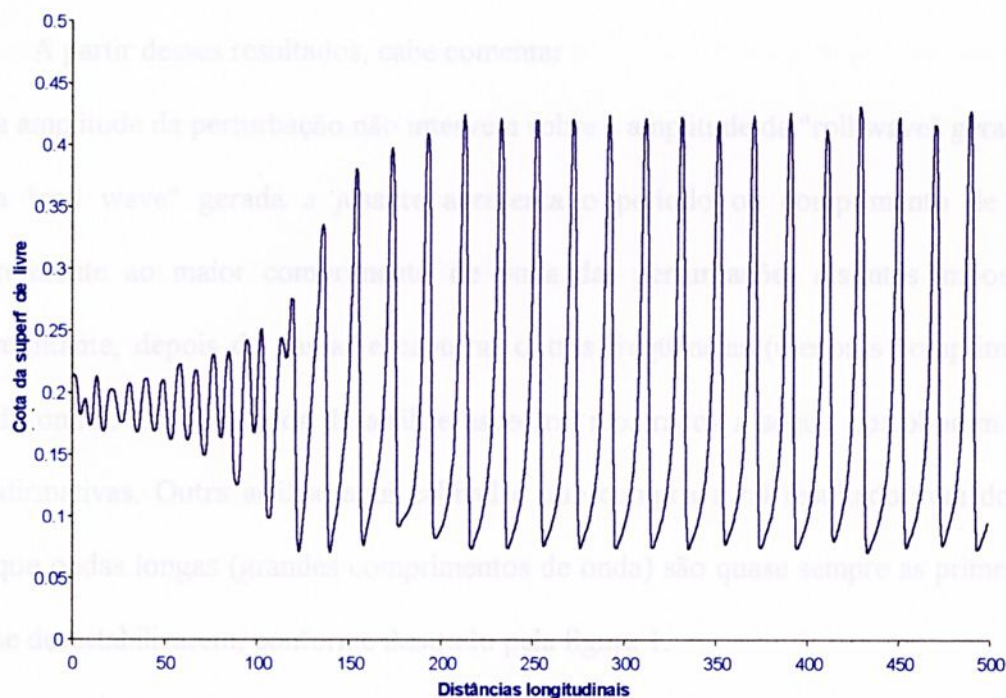


Figura 13: "Roll waves" com $T_{perturbação} = 1.00s, 1.57s$ e $3.14s$; amplitudes distintas ($C^*=0.2$)



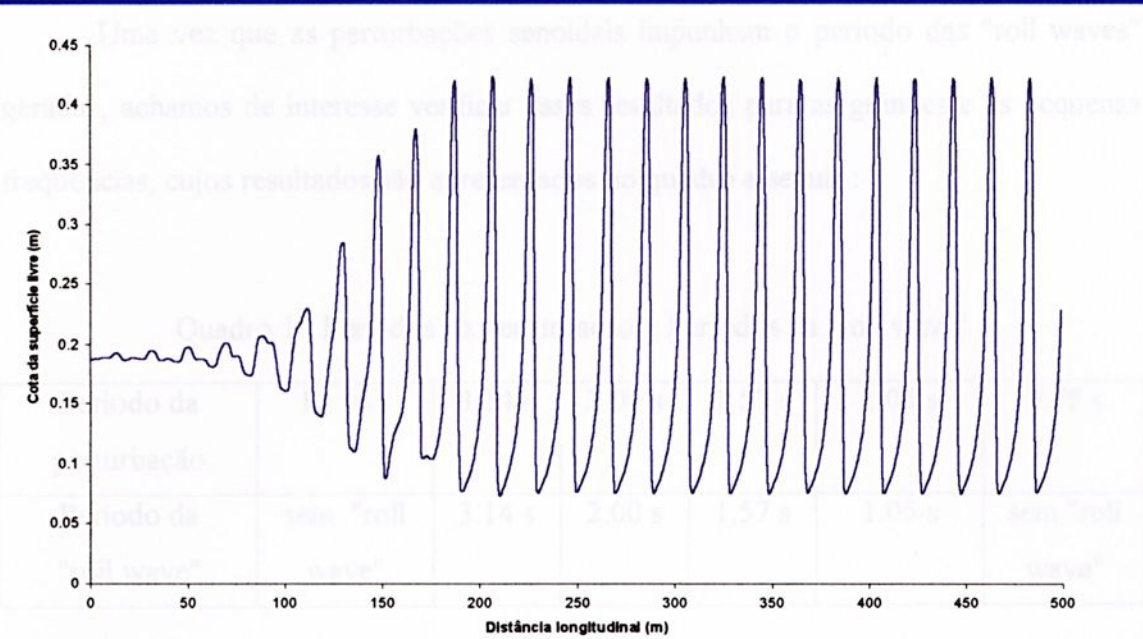


Figura 14: "Roll waves" com $T_{\text{perturbação}} = 1.00s, 1.57s \text{ e } 3.14s$; amplitudes constantes ($C^*=0.2$)

A partir desses resultados, cabe comentar :

- a) a amplitude da perturbação não intervém sobre a amplitude da "roll wave" gerada ;
- b) a "roll wave" gerada a jusante apresenta o período ou comprimento de onda referente ao maior comprimento de onda das perturbações distintas impostas a montante, depois de passar e capturar outras frequências (menores comprimentos de onda). Os resultados da análise espectral mostrados a seguir corroboram essas afirmativas. Outra análise aqui cabível e que comprova tal resultado vem do fato que ondas longas (grandes comprimentos de onda) são quase sempre as primeiras a se desestabilizarem, conforme ilustrado pela figura 1.
- c) para a nova reologia binghamiana, constatamos com base nas figuras 9, 10, que as tendências são as mesmas apontadas para o fluido newtoniano, entretanto as "roll waves" aparecem mais cedo e com alturas maiores, na nova reologia(ver fig. 3 e 9).



Uma vez que as perturbações senoidais impunham o período das "roll waves" geradas, achamos de interesse verificar esses resultados para as grandes e as pequenas frequências, cujos resultados são apresentados no quadro a seguir :

Quadro 1 : Períodos da perturbação x Períodos da "roll wave"

Período da perturbação	12.56 s	3.14 s	2.00 s	1.57 s	1.05 s	0.78 s
Período da "roll wave"	sem "roll wave"	3.14 s	2.00 s	1.57 s	1.05 s	sem "roll wave"

Pôde-se observar que uma pequena perturbação, ainda que infinitesimal, para uma certa dinâmica do escoamento no canal com declividade, resistência e frequência bem definidas, gerava "roll waves", se a frequência dessa perturbação (senoidal, no caso) estivesse compreendida entre um valor mínimo e um valor máximo, que dependia, entre outros, da própria dinâmica do sistema.

A partir dos resultados apontados anteriormente procedemos à determinação das frequências preferenciais ou dominantes quando da interação de várias perturbações. Para isso utilizamos o programa computacional "MatLab", utilizando a Toolbox de Sinais e Sistemas – Power Spectral Density Function – para o cálculo de resposta de frequência, sob a seguinte rotina:

```
» A2 = A(:, 2); % dados obtidos do programa de simulação
» Fs = 0.1; % frequência de alturas de onda da amostragem
» T = 0: 1/Fs :1; % incremento de tempo
» [Pxx,f] = psd (A2,1001,Fs);
» plot (f, Pxx), xlabel ('(1/L,característico'), ylabel ('Densidade Espectral, Db')
```



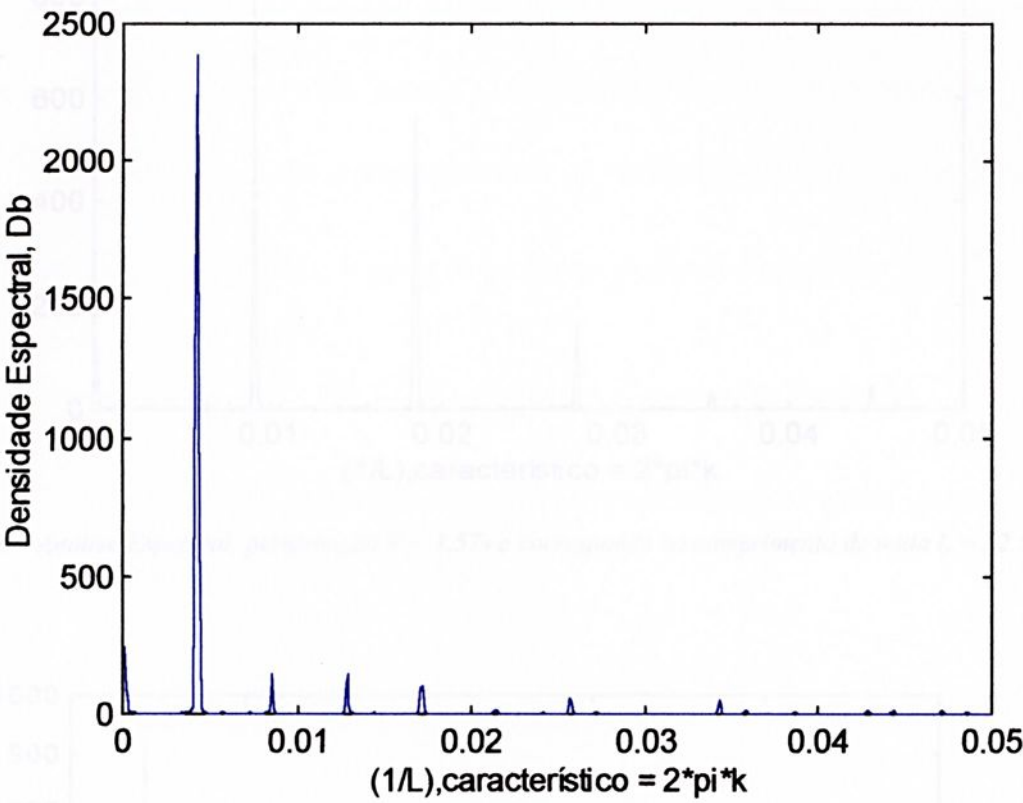


Figura 15 – Análise Espectral, perturbação $T = 3.14s$ e corresponde ao comprimento de onda $L = 25m$, onde $k = 2\pi/L$ é o número de onda da roll wave gerada



RESULTADOS COMPLEMENTARES VIS-A-VIS DA TEORIA - CÁLCULO

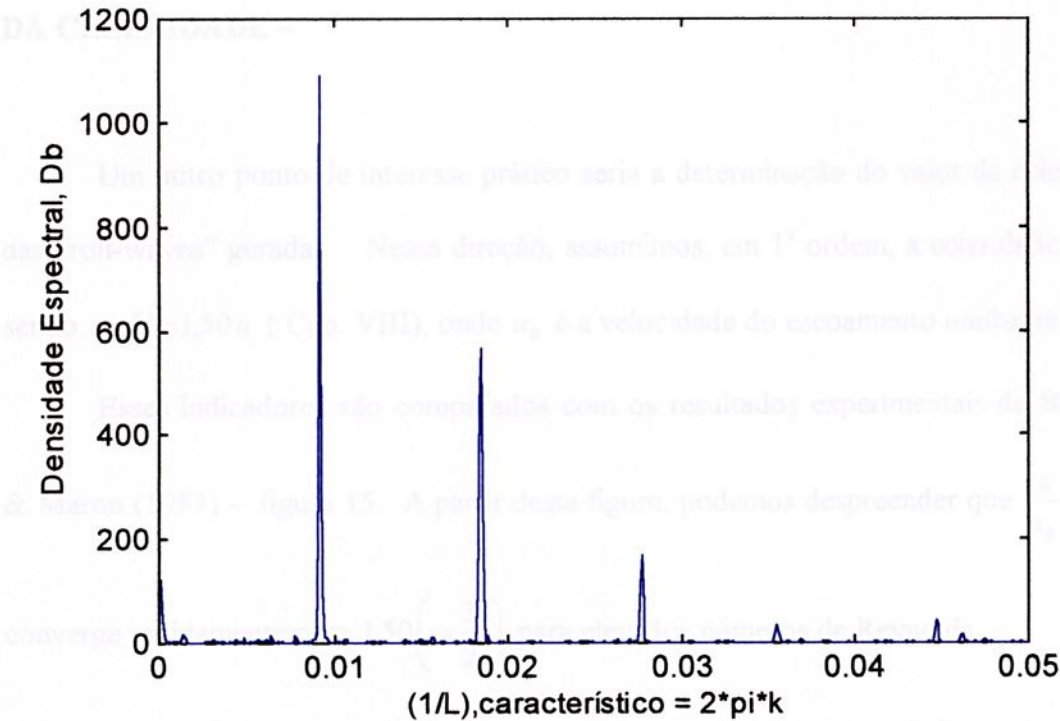


Figura 16 – Análise Espectral, perturbação $T = 1.57s$ e corresponde ao comprimento de onda $L = 12.5m$

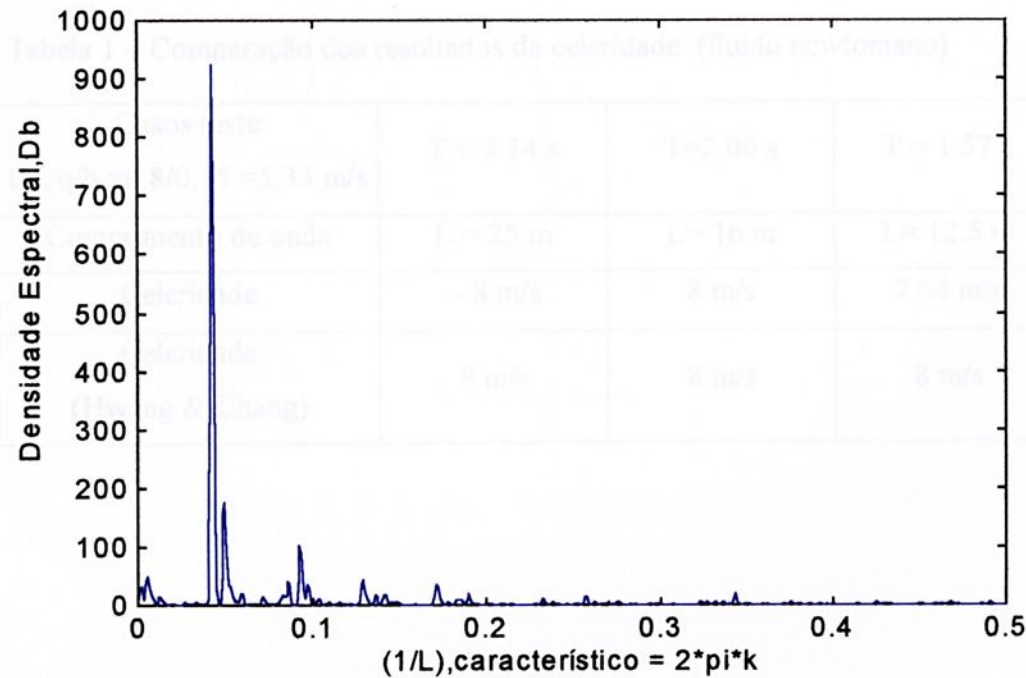


Figura 17 – Análise Espectral, perturbações superpostas $T = 3.14s$ e $T = 1.57s$ correspondente ao comprimento de onda $L = 25m$



RESULTADOS COMPLEMENTARES VIS-À-VIS DA TEORIA – CÁLCULO DA CELERIDADE –

Um outro ponto de interesse prático seria a determinação do valor da celeridade das “roll-waves” geradas. Nessa direção, assumimos, em 1ª ordem, a celeridade como sendo $c=U=1,50u$ (Cap. VIII), onde u_0 é a velocidade do escoamento uniforme.

Esses indicadores são comparados com os resultados experimentais de Brauner & Maron (1983) - figura 15. A partir desta figura, podemos despreender que $\frac{c}{u_0} = \frac{U}{u_0}$

converge rapidamente para $1,50\left(=\frac{3}{2}\right)$ para elevados números de Reynolds.

A partir de nossas experiências numéricas apresentamos, na tabela que se segue, alguns resultados que confortam tal proposição.

Tabela 1 – Comparação dos resultados da celeridade (fluido newtoniano)

Casos teste $u_0=q/h=0.8/0.15=5.33\text{ m/s}$	$T=3.14\text{ s}$	$T=2.00\text{ s}$	$T=1.57\text{ s}$
Comprimento de onda	$L=25\text{ m}$	$L=16\text{ m}$	$L=12.5\text{ m}$
Celeridade	$\sim 8\text{ m/s}$	8 m/s	7.64 m/s
Celeridade (Hwang & Chang)	8 m/s	8 m/s	8 m/s



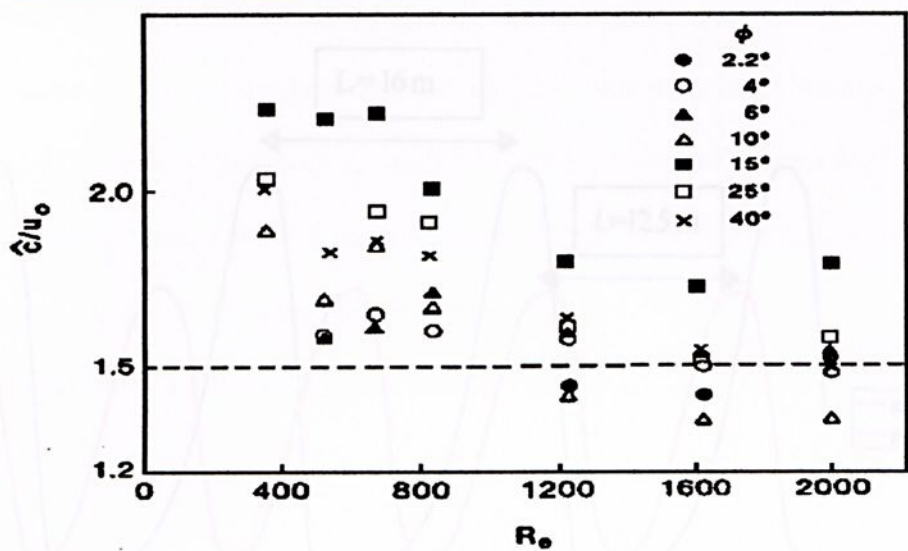


Figura 15: Resultados experimentais de Brauner & Maron (1983)

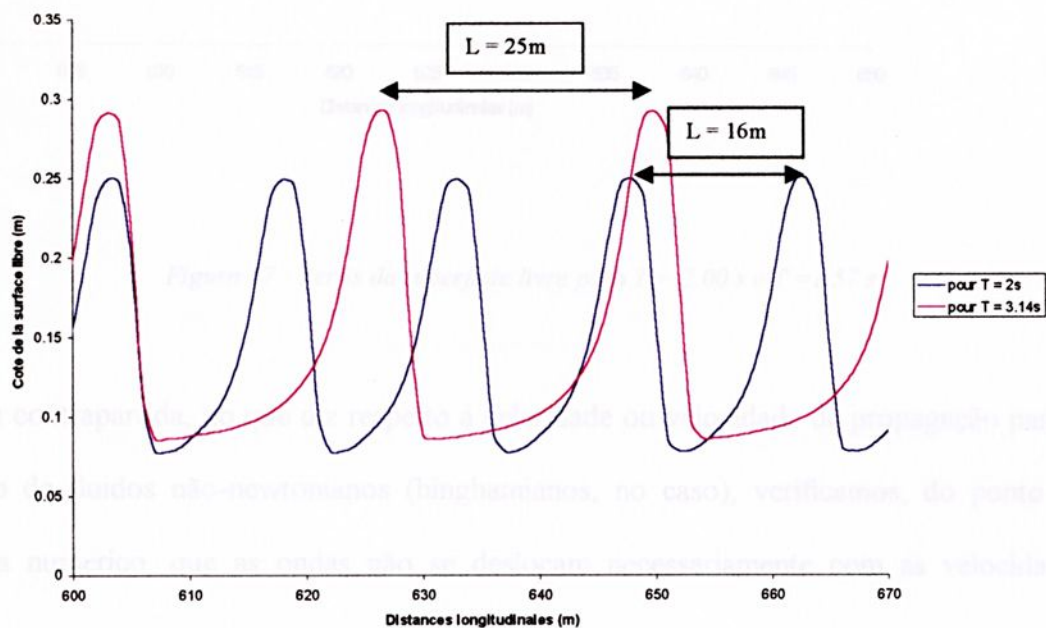


Figura 16: Perfis da superfície livre para $T = 3.14\text{ s}$ e $T = 2.00\text{ s}$



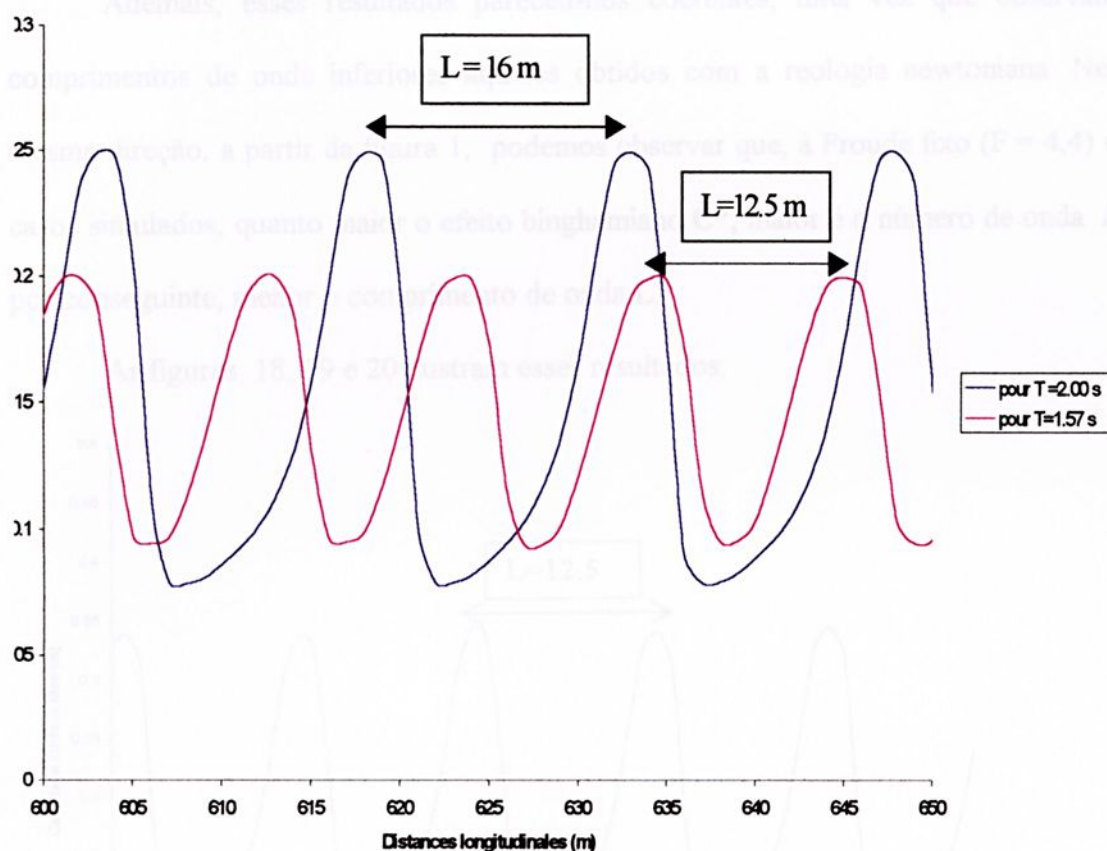


Figura 17 : Perfis da superfície livre para $T = 2.00$ s e $T = 1.57$ s

Em contrapartida, no que diz respeito à celeridade ou velocidade de propagação para o caso de fluidos não-newtonianos (binghamianos, no caso), verificamos, do ponto de vista numérico, que as ondas não se deslocam necessariamente com as velocidades

máximas, a saber :

$$1 < \frac{C}{u_0} = \frac{U}{u_0} < \frac{3-2C^*}{2(1-C^*)}$$

Para $C^* = 0,20$, espera-se $1 < \frac{C}{u_0} = \frac{U}{u_0} < 1,63$. Os resultados numéricos nos

apontam para $\frac{C}{u_0} = \frac{U}{u_0} = 1,25$.

Ademais, esses resultados pareceu-nos coerentes, uma vez que observamos comprimentos de onda inferiores àqueles obtidos com a reologia newtoniana. Nessa mesma direção, a partir da figura 1, podemos observar que, à Froude fixo ($F = 4,4$) nos casos simulados, quanto maior o efeito binghamiano C^* , maior é o número de onda k e, por conseguinte, menor o comprimento de onda L .

As figuras 18, 19 e 20 ilustram esses resultados.

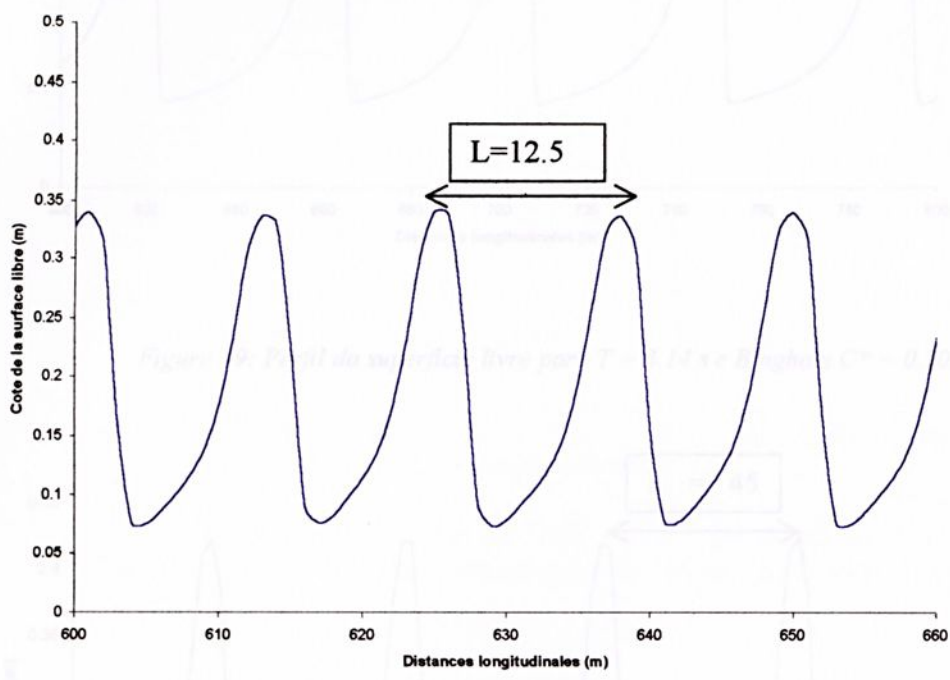


Figura 18: Perfil da superfície livre para $T = 2,00\text{ s}$ e Bingham $C^* = 0,20$.



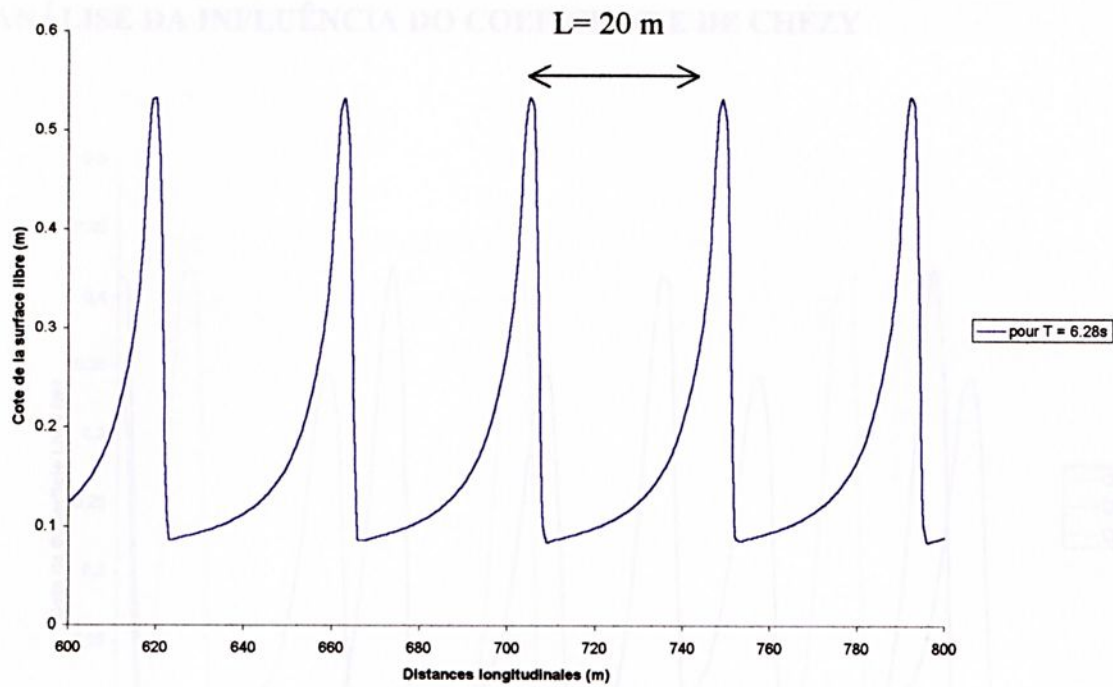


Figura 19: Perfil da superfície livre para $T = 3.14$ s e Bingham $C^* = 0.20$.

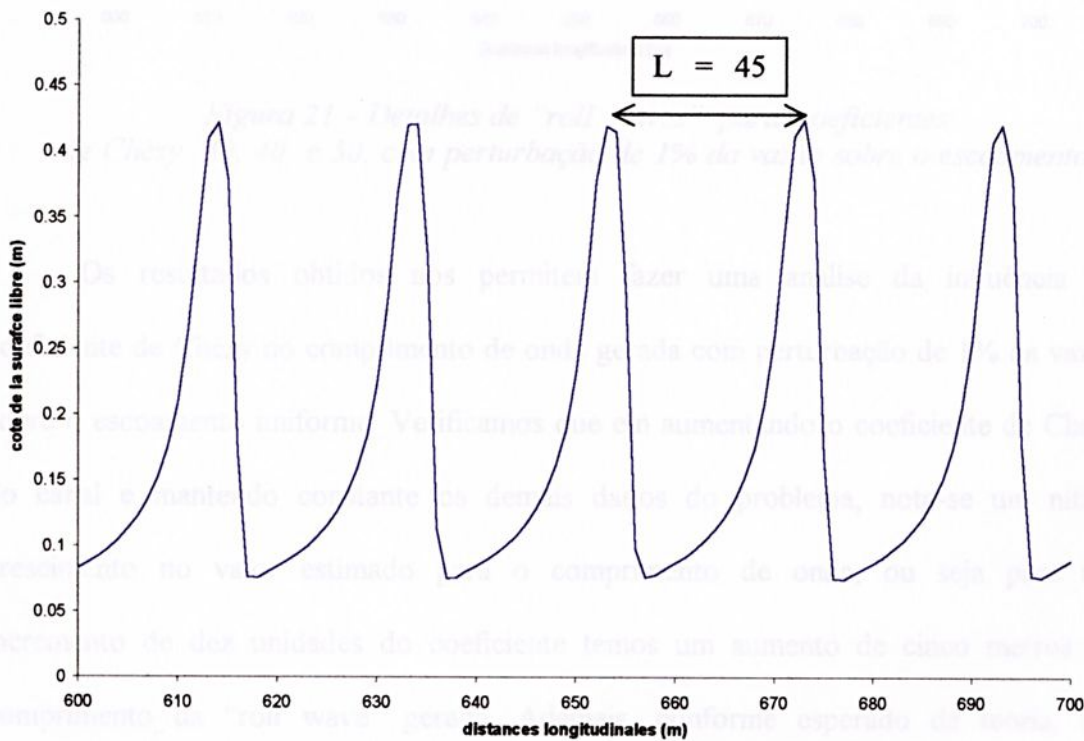


Figura 20: Perfil da superfície livre para $T = 6.28$ s e Bingham $C^* = 0.20$.



ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO COEFICIENTE DE CHÉZY

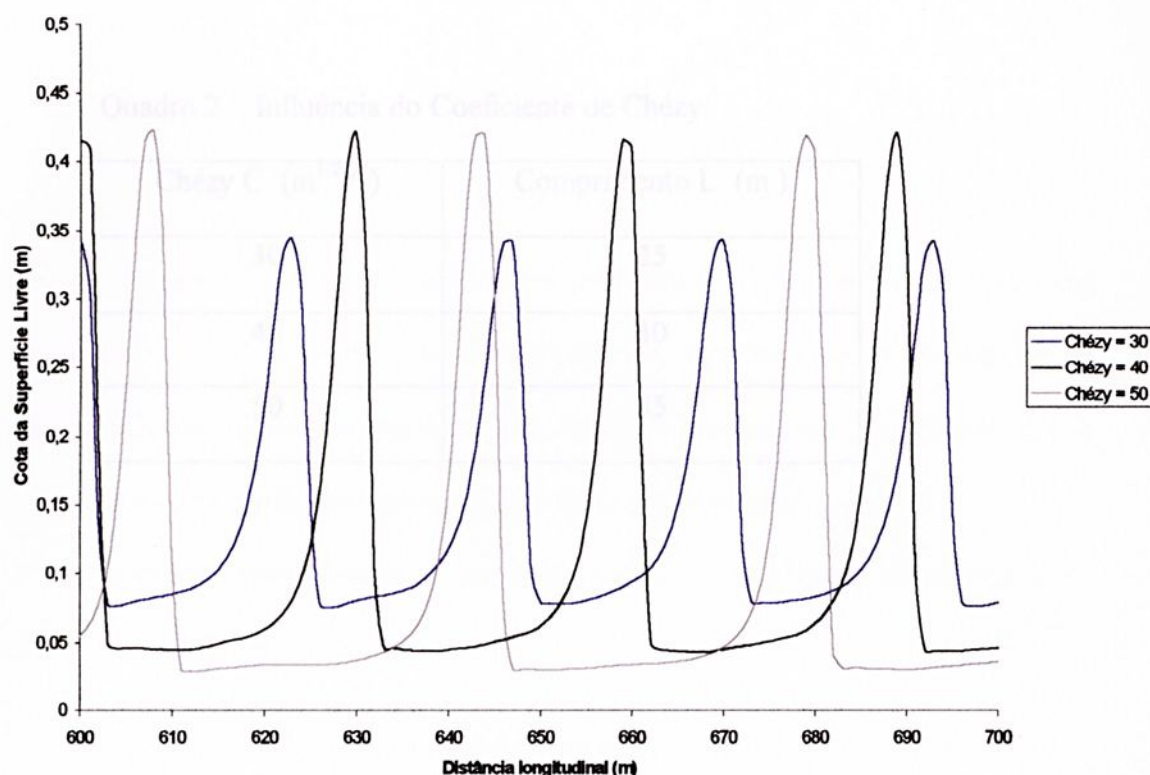


Figura 21 – Detalhes de “roll waves” para coeficientes de Chézy 30, 40 e 50, com perturbação de 1% da vazão sobre o escoamento

Os resultados obtidos nos permitem fazer uma análise da influência do coeficiente de Chézy no comprimento de onda gerada com perturbação de 1% da vazão sobre o escoamento uniforme. Verificamos que em aumentando o coeficiente de Chézy do canal e mantendo constante os demais dados do problema, nota-se um nítido crescimento no valor estimado para o comprimento de onda, ou seja para um incremento de dez unidades do coeficiente temos um aumento de cinco metros no comprimento da “roll wave” gerada. Ademais, conforme esperado da teoria, um aumento no coeficiente de Chézy (efeito resistivo), resultou em ondas de maiores amplitudes. Notamos também que para um efeito quase inexistente de Chézy, as “roll



waves" não aparecem assim como para valores elevados do mesmo. O Quadro 2 ilustra esses resultados.

Quadro 2 : Influência do Coeficiente de Chézy

Chézy C (m ^{1/2} /s)	Comprimento L (m)
30	25
40	30
50	35



XIII – RESULTADOS NUMERICOS A PARTIR DA EQUAÇÃO DE "ROLL WAVES"

O objetivo deste item é, partindo do modelo global viscoso, na nova reologia não-newtoniana, resolver a equação de "roll-waves" (equação (7) - Capítulo X). Os resultados apontados na sequência mostram a evolução da amplitude dessas ondas em função do número de Reynolds, do número de Froude, da velocidade de propagação ou celeridade deixando nítido o efeito marcante do efeito viscoso sob o perfil, ou seja, o desaparecimento dos perfis descontínuos do problema não viscoso.

Os resultados apresentados na sequência foram obtidos com o desenvolvimento de rotinas em MATLAB :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} - \frac{1}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + \frac{\text{Re}}{F^2 (1-U)} \cdot \left\{ h^3 - \alpha F^2 (1-U)^2 + \alpha \left[U^2 h^2 \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \frac{\partial h}{\partial z} +$$

$$+ \frac{\tan(\theta)(h-1)(h-h_1^*)(h-h_2^*)}{\varepsilon \cdot F^2 (U-1)h} = 0$$

sendo :

$$h_1^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ |U+1| - \sqrt{\left((U+1)_+ \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right)} \cdot \left((U+1) - \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right) \right\}$$

$$h_2^* = \frac{1}{2}(U-1) \left\{ |U+1| - \sqrt{\left((U+1)_+ \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right)} \cdot \left((U+1) - \sqrt{1 + \frac{3+C^*}{1-C^*}} \right) \right\}$$

$$C^* = \frac{\tau_c}{\rho \cdot g \cdot h \cdot \sin(\theta)}$$

Dentre os testes realizados, podemos ilustrar :



a) variando Reynolds

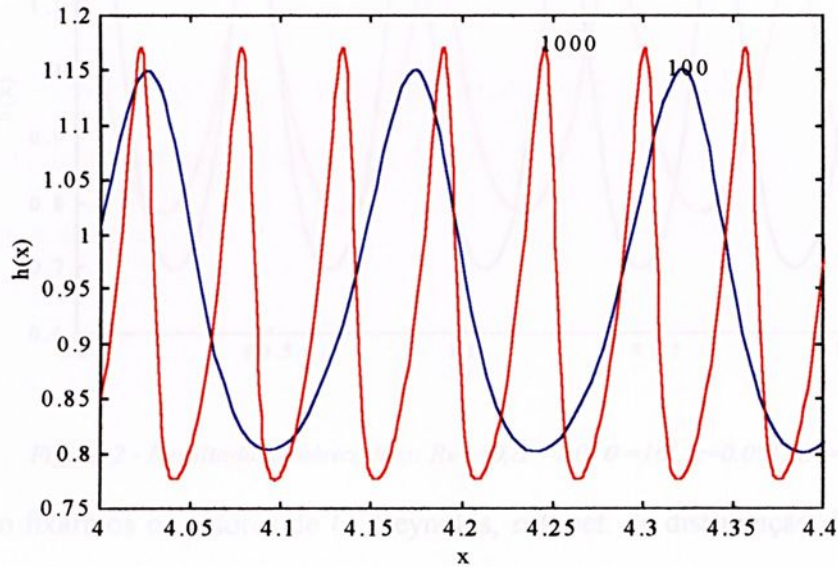


Figura 1 - Resultado numérico $h(z)$: $F=2.5$, $U=1.39$, $\alpha=1.0$, $\theta=16^\circ$, $\varepsilon=0.001$ e $C^*=0$

Verifica-se que ao fixarmos os valores de U , Froude, α (coef. de distribuição de velocidade), θ (declividade do canal) e ε (esbeltez da onda); e aumentando o número de Reynolds, notamos um aumento da amplitude e uma diminuição do comprimento das "roll waves".



b) - variando Froude

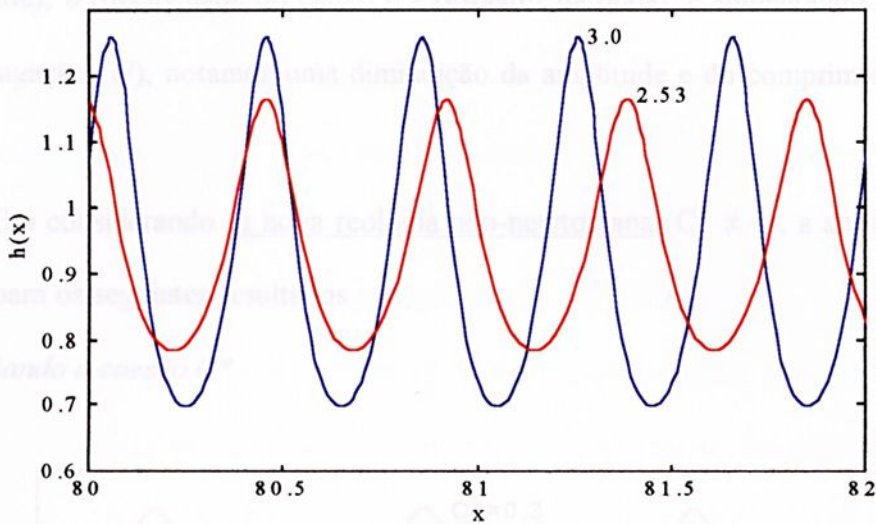


Figura 2 - Resultado numérico $h(z)$: $Re=10, \alpha=1.0, \theta=16^\circ, \varepsilon=0.001, C^*=0$

Ao fixarmos os valores de U , Reynolds, α (coef. de distribuição de velocidade), θ (declividade do canal) e ε (esbeltez da onda); e aumentando o número de Froude, observamos um aumento da amplitude e uma diminuição do comprimento das "roll waves".

c) – variando a velocidade de propagação (celeridade) das ondas (U)

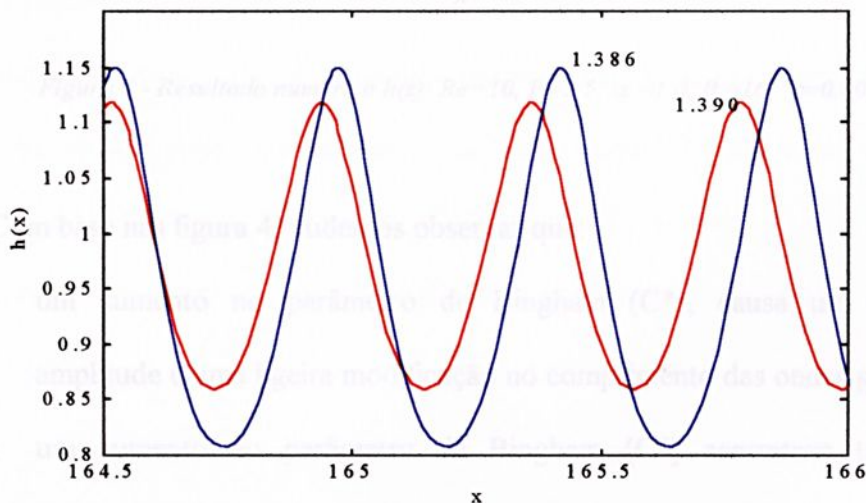


Figura 3 - Resultado numérico $h(z)$: $Re=10, F=2.5, \alpha=1.0, \theta=16^\circ, \varepsilon=0.001$.



Ao fixarmos os valores de Reynolds, Froude, α (coef. de distribuição de velocidade), θ (declividade do canal) e ε (esbeltez da onda); e aumentando a velocidade de propagação (U), notamos uma diminuição da amplitude e do comprimento das "roll waves".

Em considerando a nova reologia não-newtoniana ($C^* \neq 0$), a análise numérica aponta para os seguintes resultados :

d) - variando a coesão C^*

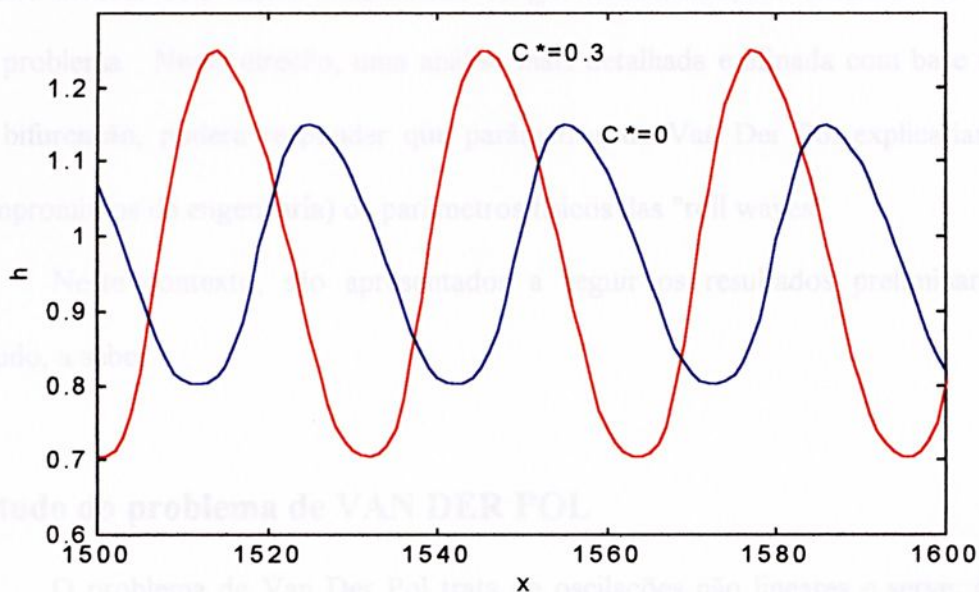


Figura 4 - Resultado numérico $h(z)$: $Re=10$, $F=2.5$, $\alpha=1.0$, $\theta=16^\circ$, $\varepsilon=0.001$.

Com base nas figura 4, pudemos observar que:

- um aumento no parâmetro de Bingham (C^*), causa um aumento na amplitude e uma ligeira modificação no comprimento das ondas geradas ;
- um aumento no parâmetro de Bingham (C^*) acarretava também uma antecipação na formação das ondas geradas , o que vai ao encontro dos estudos matemáticos anteriores (que prediziam a antecipação da formação de "roll waves" para a reologia "binghamiana").

XIV – PERSPECTIVAS FUTURAS

Dando sequência a abordagem matemática de "roll waves" em canais de forte declividade, o pesquisador desenvolve um estudo de Analogia que existiria entre o problema "roll wave" e o de Van Der Pol. Uma análise preliminar foi empreendida, cujos resultados são apontados em seguida. Em recente discussão com o grupo da Matemática Aplicada do Departamento de "Génie Mathématique" do Insa de Toulouse, valeria investir com maior consistência e rigor matemático, na discussão da topologia do problema. Nessa direção, uma análise mais detalhada e afinada com base na teoria da bifurcação, poderá responder que parâmetros de Van Der Pol explicariam (com compromissos de engenharia) os parâmetros físicos das "roll waves".

Neste contexto, são apresentados a seguir os resultados preliminares desse estudo, a saber :

Estudo do problema de VAN DER POL

O problema de Van Der Pol trata de oscilações não lineares e serve, de plano, para tratar o problema de ciclo limite, assim como explicar alguns dos métodos assintóticos. Nossa proposta é verificar uma "certa analogia" entre o problema de Van Der Pol e o fenômeno de "roll waves" em superfície livre. Para tanto, numa primeira análise, passaremos a tratar as propriedades do problema de Van Der Pol, que pode ser escrito na forma:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \mu(h^2 - 1) \frac{\partial h}{\partial z} + a.h = 0 \quad ; \quad a = \text{constante} \quad (1)$$

Rescrevendo (1) na forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = y = f(h, y) \\ \frac{\partial y}{\partial z} = \mu \cdot (1 - h^2) \cdot y - h \cdot a = g(h, y) \end{cases}$$

e fazendo uma linearização em torno do ponto crítico (0,0), temos:

$$f(h, y) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial h} \cdot (h-0) + \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} \cdot (y-0)$$

$$g(h, y) = \frac{\partial g(0,0)}{\partial h} \cdot (h-0) + \frac{\partial g(0,0)}{\partial y} \cdot (y-0)$$

logo:

$$\frac{\partial f}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial h} = -2h\mu y - a \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \mu(1 - h^2)$$

Voltando ao sistema inicial, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = h \cdot 0 + y \cdot 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = h \cdot (0 - a) + y \cdot \mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial z} = 0 + y \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -h \cdot a + \mu \cdot y \end{cases}$$

Obtemos, assim, a matriz :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & \mu \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -a & \mu - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-\lambda \cdot (\mu - \lambda) + a = 0$$

$$-\lambda \cdot \mu + \lambda^2 + a = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda \cdot \mu + a = 0$$

cujo estudo das raízes nos fornece:



$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4a}}{2}$$

Adotando a hipótese $a = 1$, temos:

$$\lambda = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2} \quad (2)$$

Trabalhando com as duas raízes λ_1 e λ_2 e através do aplicativo Microsoft Excel obtemos o gráfico a seguir:

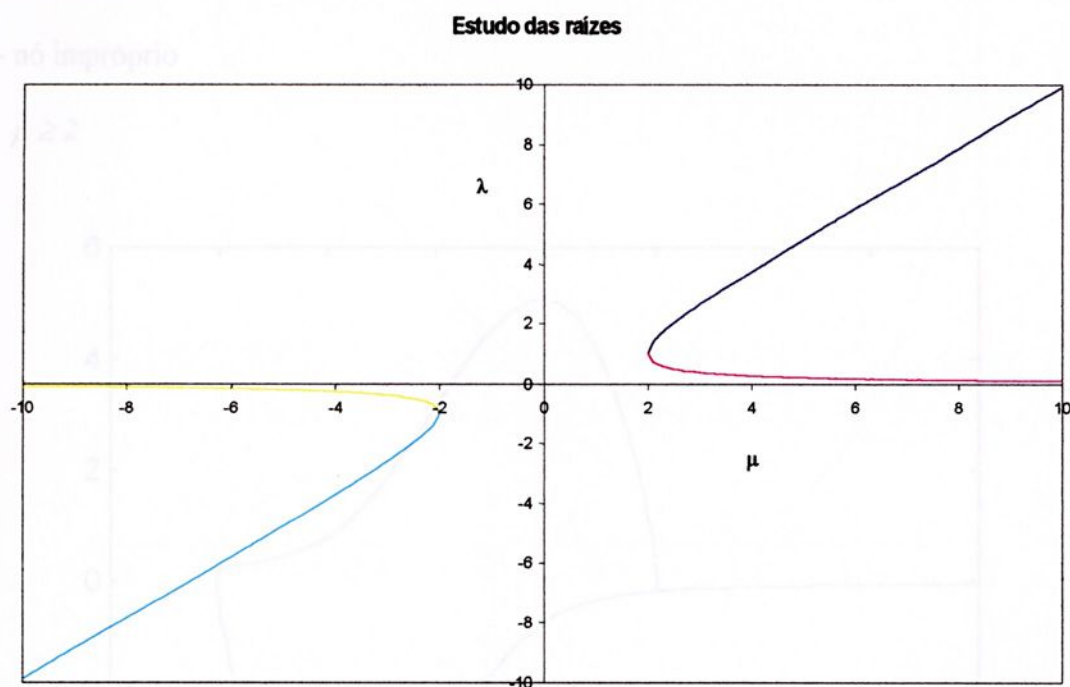


Figura 1 - Estudo da equação (2)

Com base em uma análise no gráfico acima e na equação de λ , dentro do conceito de sistemas não-lineares, podemos definir as seguintes situações:

$\mu > 2$ - raízes reais desiguais positivas

$\mu < -2$ - raízes reais desiguais negativas

$\mu = \pm 2$ - raízes reais iguais de mesmo sinal

$-2 < \mu < 0$ - raízes complexas conjugadas

$0 < \mu < 2$ - raízes complexas conjugadas

$\mu = 0$ - raízes imaginárias puras

Analisando o tipo de ponto crítico temos :

$\mu \geq 2$ e $\mu \leq -2$ *Nó Impróprio*

$-2 < \mu < 0$ e $0 < \mu < 2$ *Ponto Espiral*

$\mu = 0$ *Centro*

A seguir ilustraremos os tipos de ponto crítico, com seus devidos comentários:

i) - nó impróprio

a) $\mu \geq 2$

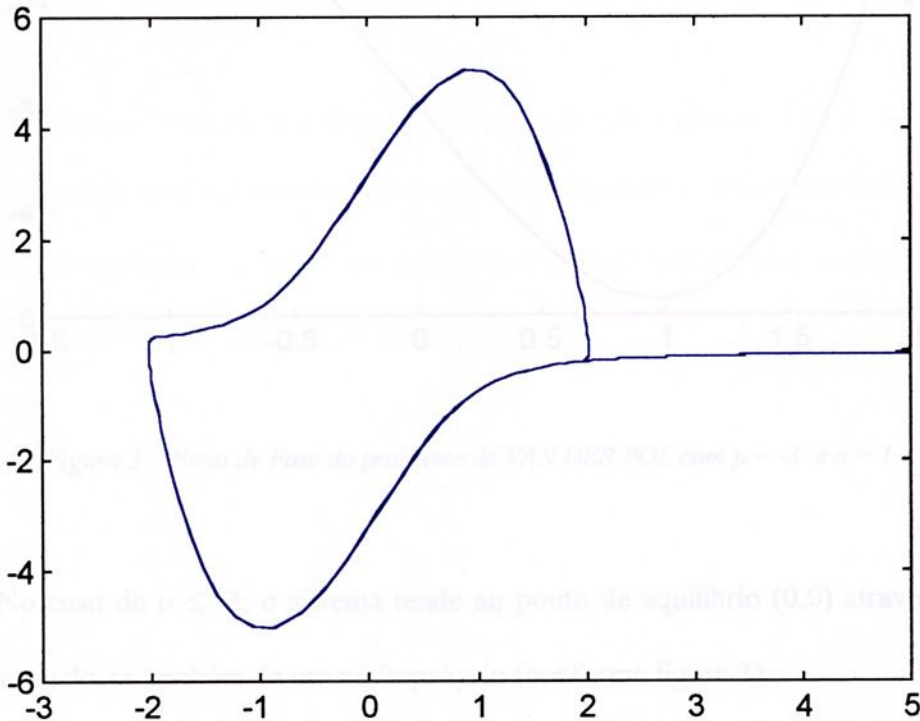


Figura 2 - Plano de Fase do problema de VAN DER POL com $\mu = 3$ e $a = 1$

Como podemos notar na figura 2, o sistema parte do ponto inicial (5,0) e tende para o ponto de equilíbrio (0,0) através de uma curva no plano de fases, esta condição



verifica o ponto crítico tipo nó impróprio. O sistema não atinge o ponto de equilíbrio, pois o mesmo é capturado pelo possível ciclo limite existente; o que não impede o julgamento do tipo de ponto crítico que nos é apresentado.

b) $\mu \leq -2$

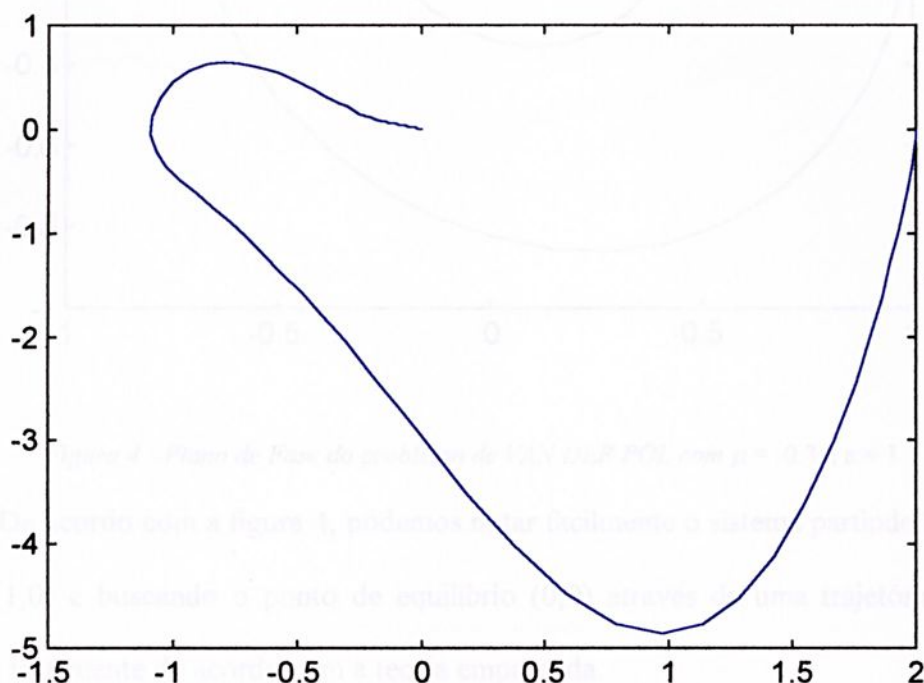


Figura 3 - Plano de Fase do problema de VAN DER POL com $\mu = -3$ e $a = 1$

No caso de $\mu \leq -2$, o sistema tende ao ponto de equilíbrio (0,0) através de uma curva, tratando-se também de um nó impróprio (conforme figura 3).

ii) - espiral

a) $-2 < \mu < 0$

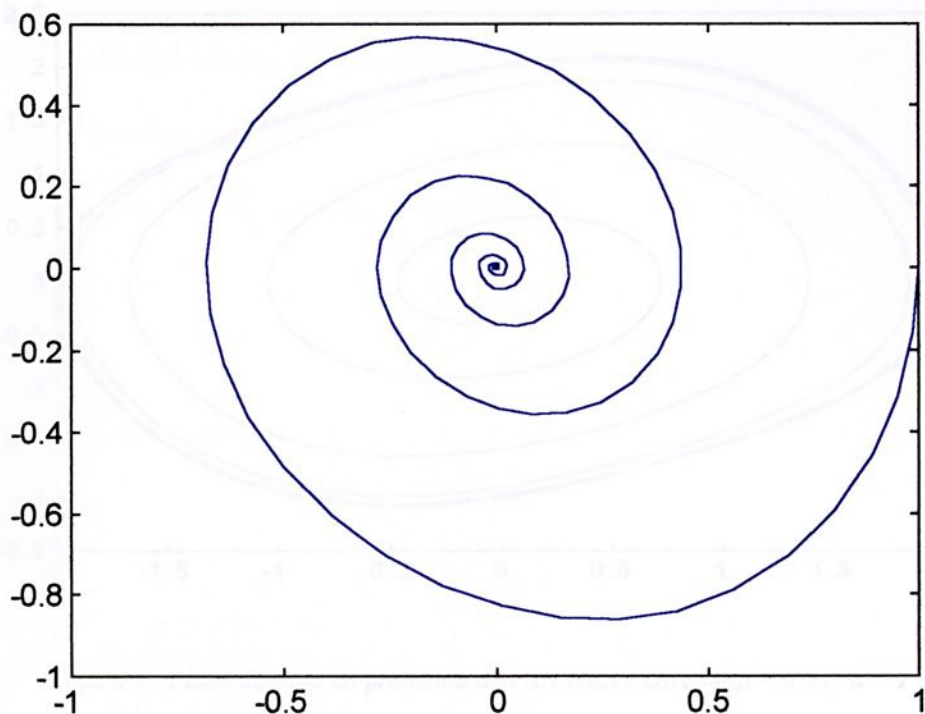


Figura 4 - Plano de Fase do problema de VAN DER POL com $\mu = -0.3$ e $a = 1$

De acordo com a figura 4, podemos notar facilmente o sistema partindo do ponto inicial (1,0) e buscando o ponto de equilíbrio (0,0) através de uma trajetória espiral; estando totalmente de acordo com a teoria empregada.

b) $0 < \mu < 2$

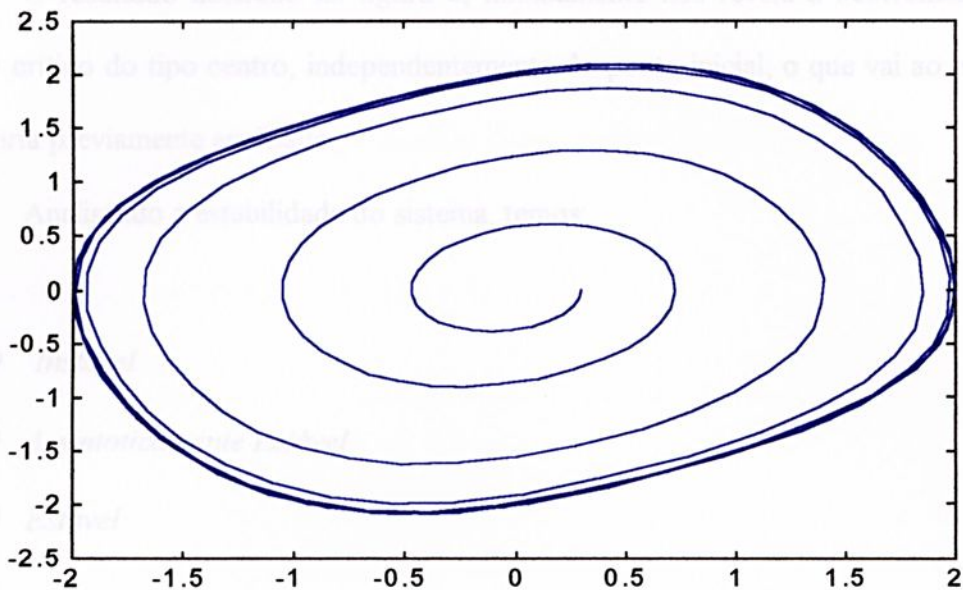


Figura 5 - Plano de Fase do problema de VAN DER POL com $\mu = 0.3$ e $a = 1$

A figura 5 apresenta o sistema partindo do ponto inicial $(0.4,0)$ e espiralando até o provável ciclo limite, se tratando obviamente de uma espiral.

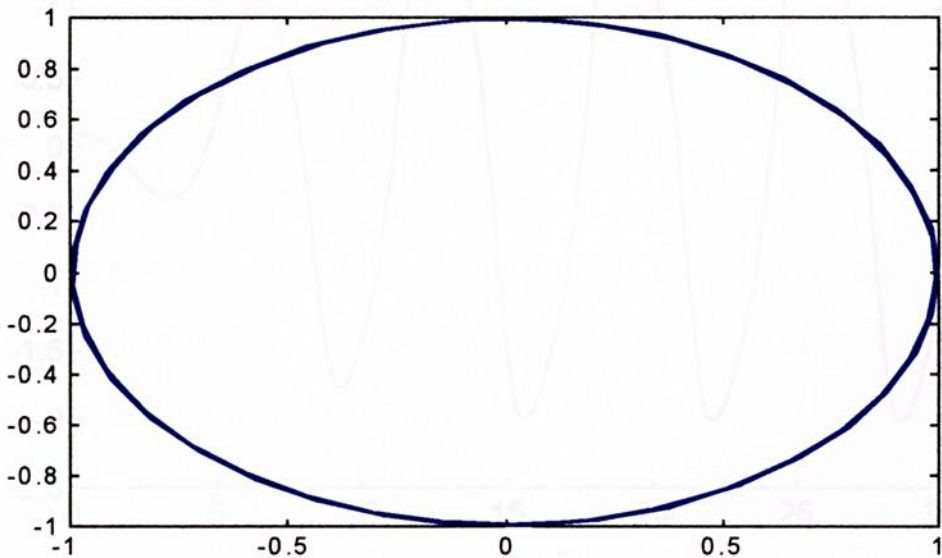


Figura 06 - Plano de Fase do problema de VAN DER POL com $\mu = 0$. e $a = 1$



O resultado ilustrado na figura 6, notadamente nos revela a ocorrência de um ponto crítico do tipo centro, independentemente do ponto inicial; o que vai ao encontro da teoria previamente analisada.

Analisando a estabilidade do sistema, temos:

$\mu > 0$ *Instável*

$\mu < 0$ *Assintoticamente Estável*

$\mu = 0$ *Estável*

i) - sistema instável ($\mu > 0$).

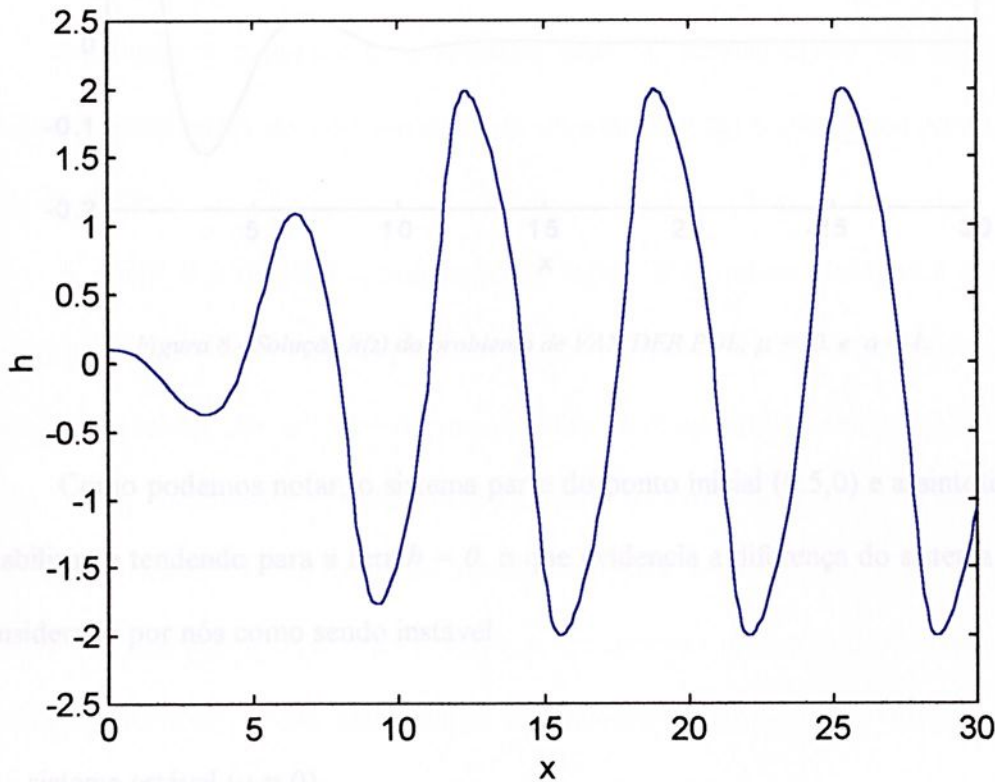


Figura 7 - Solução $h(z)$ do problema de VAN DER POL, $\mu = 0.8$ e $a = 1$



O resultado apresentado na figura 7 nos revela a instabilidade inicial do sistema que no caso particular de Van Der Pol, tenderá ao cabo de tempo finito para uma estabilidade, devido a presença de um ciclo limite que atrai as soluções para si.

ii) - sistema assintoticamente estável ($\mu < 0$).

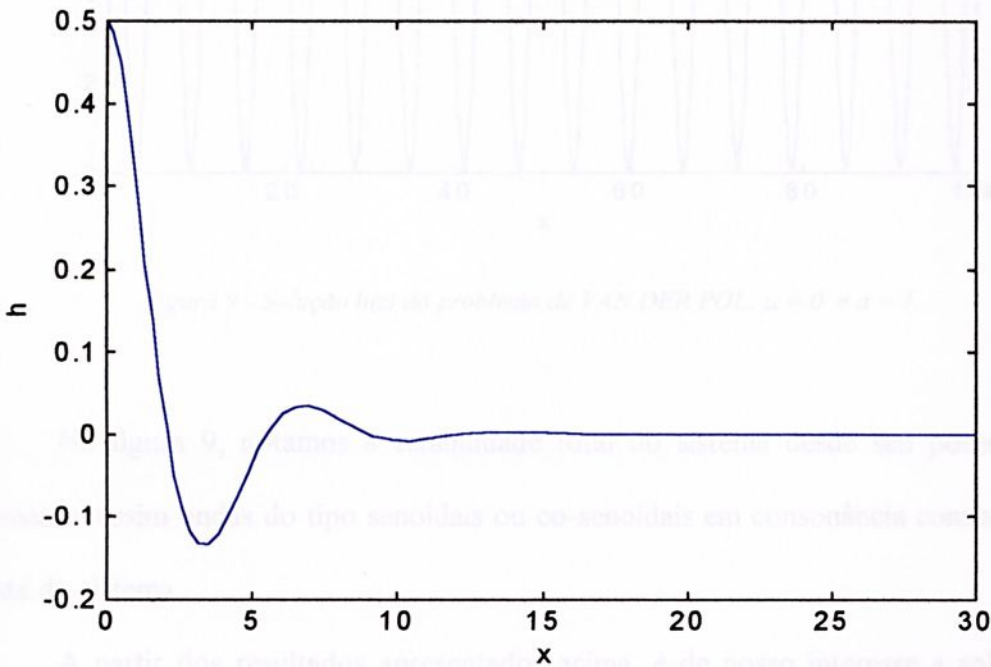


Figura 8 - Solução $h(z)$ do problema de VAN DER POL, $\mu = -0.$ e $a = 1.$

Como podemos notar, o sistema parte do ponto inicial (0.5,0) e assintoticamente estabiliza-se tendendo para a reta $h = 0$, o que evidencia a diferença do sistema anterior considerado por nós como sendo instável.

iii) - sistema estável ($\mu = 0$).



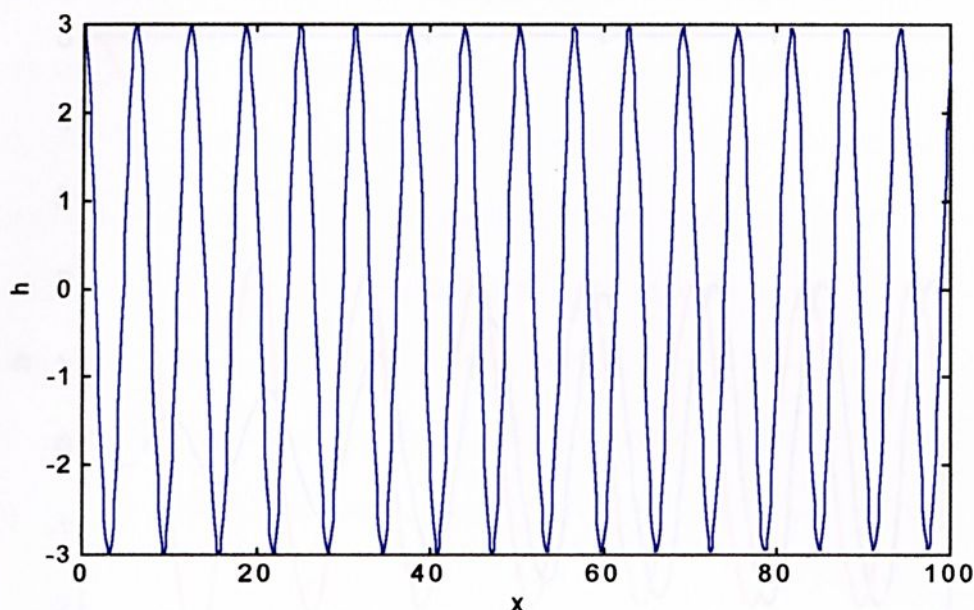


Figura 9 - Solução $h(z)$ do problema de VAN DER POL, $\mu = 0$ e $a = 1$.

Na figura 9, notamos a estabilidade total do sistema desde seu ponto inicial, formando assim ondas do tipo senoidais ou co-senoidais em consonância com a solução exata do sistema.

A partir dos resultados apresentados acima, é de nosso interesse a solução do problema de Van Der Pol do tipo instável ($\mu > 0$), isso devido a ocorrência de uma instabilidade inicial que ao cabo de tempo finito se torna estável em torno de um ciclo limite. Essa "instabilidade", que posteriormente se torna um padrão estabilizado (a própria "roll wave") vai ao encontro de nossa analogia com o fenômeno em estudo que, através de uma perturbação inicial sobre o escoamento uniforme supercrítico, parece estabilizar-se depois de um certo tempo ou distância de propagação. No item seguinte, serão tratados mais especificamente os estudos de caso de nosso interesse, quais sejam: $\mu > 0$.

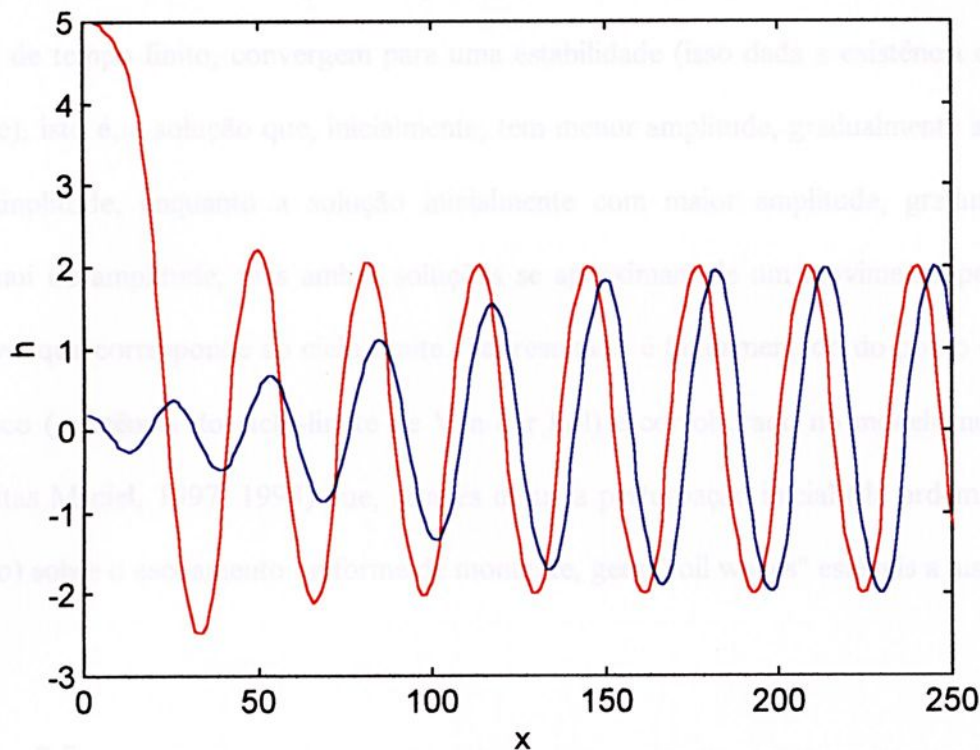


Figura 10 - Solução $h(x)$ do problema de VAN DER POL, para $\mu = 0.2$ e $a=1$, com pontos iniciais distintos.

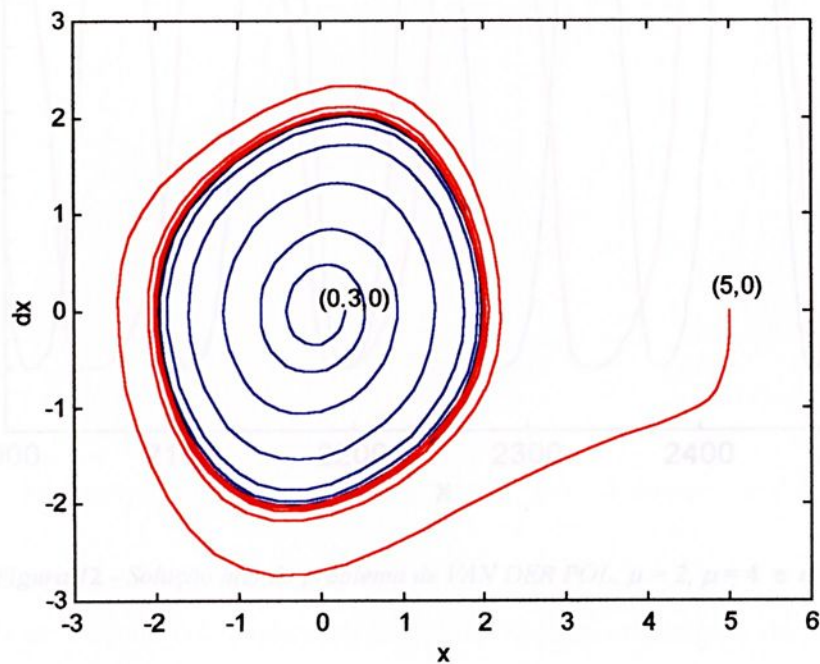


Figura 11 –Plano de fases da solução anterior.

Em se tratando da figura 10, pudemos observar que pontos iniciais distintos, ao cabo de tempo finito, convergem para uma estabilidade (isso dada a existência de ciclo limite), isto é; a solução que, inicialmente, tem menor amplitude, gradualmente aumenta de amplitude, enquanto a solução inicialmente com maior amplitude, gradualmente diminui de amplitude, mas ambas soluções se aproximam de um movimento periódico estável que corresponde ao ciclo-limite. Tal resultado é fundamentado do ponto de vista teórico (existência do ciclo-limite de Van der Pol) e corroborado no modelo numérico (Freitas Maciel, 1997, 1998) que, através de uma perturbação inicial (da ordem do por cento) sobre o escoamento uniforme de montante, gera "roll waves" estáveis a jusante.

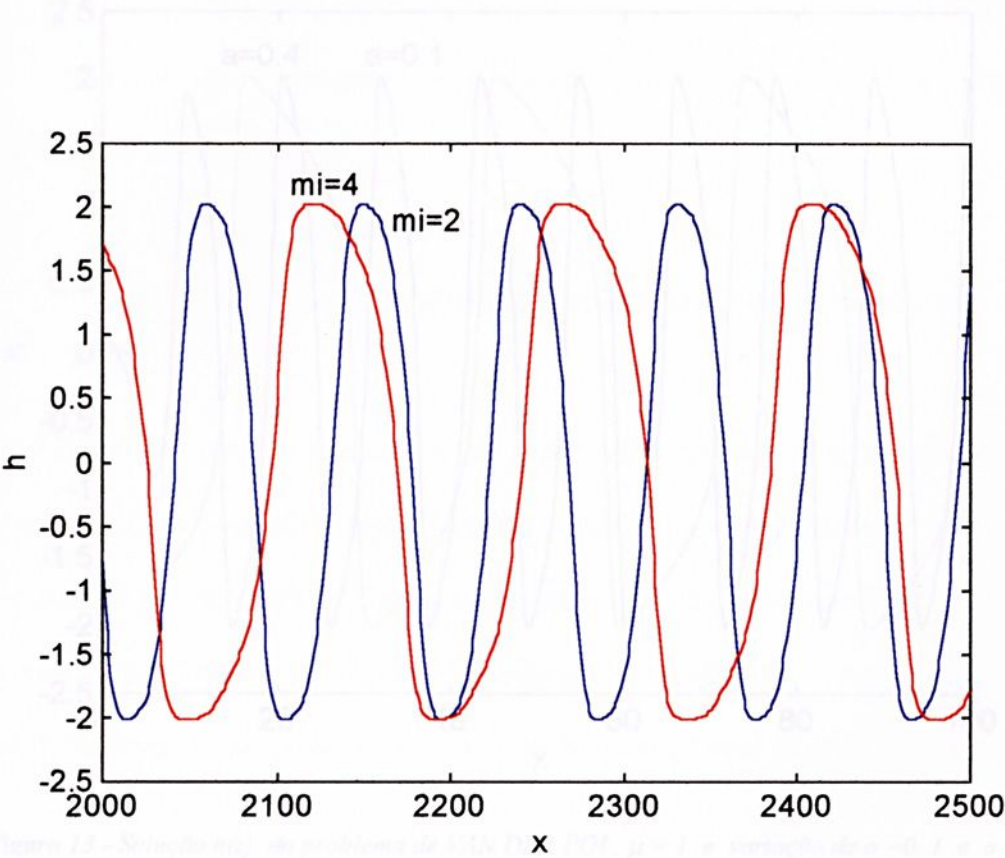


Figura 12 - Solução $h(z)$ do problema de VAN DER POL, $\mu = 2$, $\mu = 4$ e $a = 1$.

Se $\mu > 0$ a segunda parcela do 1º membro da equação (1) representará o termo resistivo, proporcional a $\frac{\partial h}{\partial z}$. Quando h for grande, esse termo é positivo e reduz a



amplitude das respostas. No entanto, se h for pequeno, o termo resistivo é negativo e provoca o crescimento da resposta. Isto sugere que, talvez, exista uma solução de dimensões intermediárias, da qual se aproxima as outras soluções, à medida que z cresce. Em sumo, as observações experimentais numéricas indicam que a equação de Van Der Pol tem uma solução periódica estável cujo período e amplitude depende do parâmetro μ .

No caso da figura 12, notamos um aumento do comprimento da onda com μ , permanecendo-se constante a amplitude da resposta.

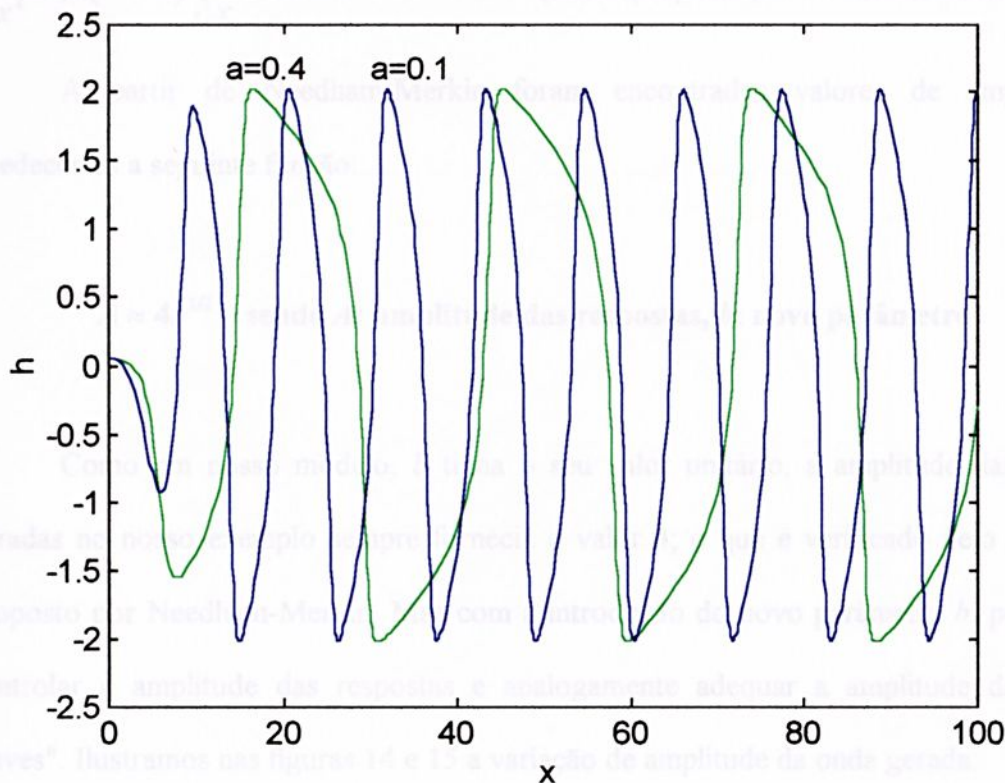


Figura 13 - Solução $h(z)$ do problema de VAN DER POL, $\mu = 1$ e variação de $a = 0.1$ e $a = 0.4$

Nota-se através dos resultados da figura 13, que o aumento do parâmetro " a ", mantendo μ constante; gera uma diminuição do comprimento de onda, mas ainda continua constante a amplitude das mesmas.



Controle da amplitude das ondas geradas.

Ainda no contexto do problema Van Der Pol, e com base no artigo de Needham - Merkin ("On Infinite Periodical Bifurcations With an Application to Roll Waves", 198 ???), introduzimos uma pequena modificação na proposta do modelo Van Der Pol. A fim de controlar mais de perto a amplitude das ondas geradas, seria necessária a introdução de um novo parâmetro como se segue:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \mu(h^2 - 1)\frac{\partial h}{\partial x} + a.h = 0 \quad (\text{forma analisada por nós})$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \mu(h^2 - b)\frac{\partial h}{\partial x} + a.h = 0 \quad (\text{forma proposta por Needham-Merkin})$$

A partir de Needham-Merkin foram encontrados valores de amplitudes obedecendo a seguinte função:

$$A \approx 4b^{1/2} \quad \text{sendo } A: \text{ amplitude das respostas, } b: \text{ novo parâmetro} \quad (2)$$

Como em nosso modelo, b tinha o seu valor unitário, a amplitude das ondas geradas no nosso exemplo sempre fornecia o valor 4; o que é verificado pelo modelo proposto por Needham-Merkin. Mas com a introdução do novo parâmetro b , pudemos controlar a amplitude das respostas e analogamente adequar a amplitude das "roll waves". Ilustramos nas figuras 14 e 15 a variação de amplitude da onda gerada:

Figura 14 – Plano de fase

Como podemos notar, um aumento no parâmetro b provoca um aumento na amplitude das respostas segundo aproximadamente a expressão (2). Ou seja, para um valor de $b = 9$ e $b = 16$ a amplitude da resposta é da ordem de 12 e 16 respectivamente (verifique plano de fase – figura 15).



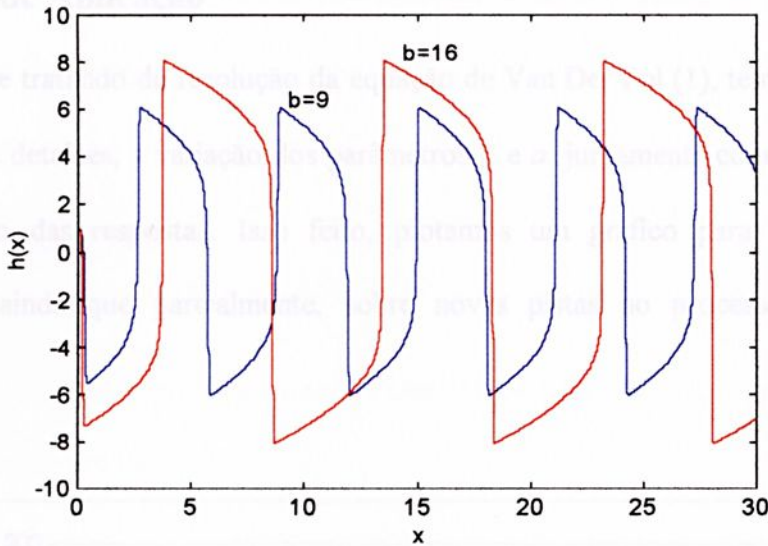


Figura 14 - Solução $h(z)$ do problema de VAN DER POL variando b , $a = 1$ e $\mu = 2$.

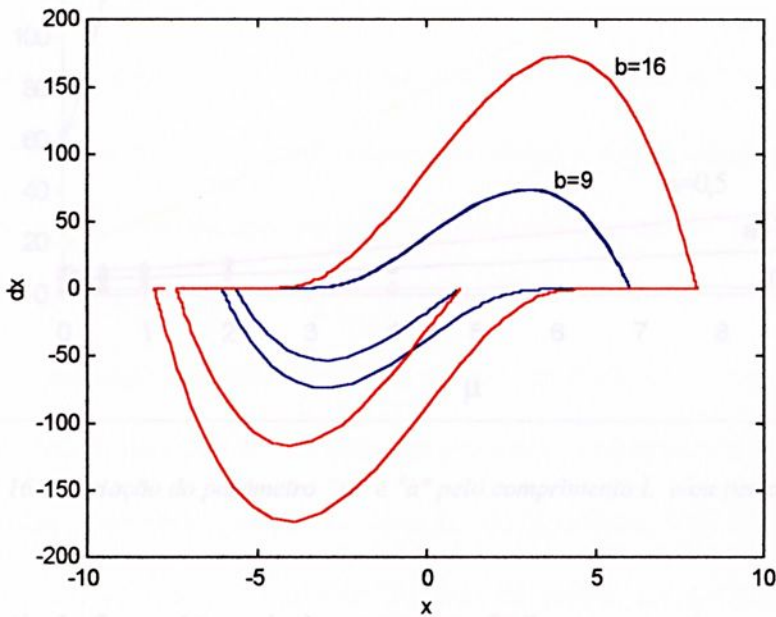


Figura 15 – Plano de fases.

Como podemos notar, um aumento no parâmetro b provoca um aumento na amplitude das respostas seguindo aproximadamente a expressão (2). Ou seja, para um valor de $b=9$ e $b=16$, a amplitude da resposta é da ordem de 12 e 16 respectivamente (conforme plano de fases – figura 15).



Exemplos de Aplicação

Em se tratando da resolução da equação de Van Der Pol (1), tentamos verificar, com maiores detalhes, a variação dos parâmetros μ e α juntamente com o comprimento e/ou período das respostas. Isso feito, plotamos um gráfico para poder observar tendências, ainda que parcialmente, sobre novas pistas no processo de “analogia funcional”.

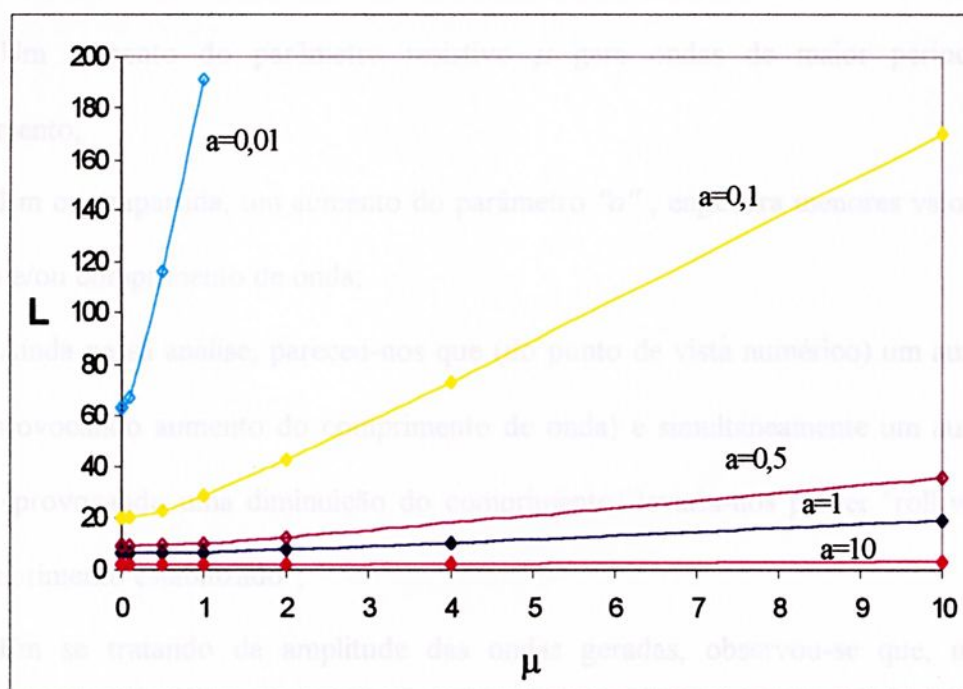


Figura 16 – Variação do parâmetro “ μ ” e “ α ” pelo comprimento L e/ou período de onda

A partir da figura 16, podemos encontrar facilmente os valores aproximados dos parâmetros “ μ ” e “ α ” para comprimentos de onda desejados, assim como os valores aproximados do parâmetro “ b ”, para amplitudes de onda desejadas (equação (2)). Exemplificando: para uma onda gerada com um comprimento e/ou período da ordem de 7.60 e amplitude da ordem de 12; temos que, para a reprodução da mesma com a

resolução do problema Van Der Pol, necessitamos de valores para μ , a e b da ordem de 2, 1 e 9 respectivamente.

Discussão e Comentários

No que tange o problema de Van Der Pol propriamente dito, podemos apontar para os seguintes resultados:

Um aumento do parâmetro resistivo μ gera ondas de maior período ou comprimento;

Em contrapartida, um aumento do parâmetro " a ", engendra menores valores de período e/ou comprimento de onda;

Ainda nessa análise, pareceu-nos que (do ponto de vista numérico) um aumento de μ (provocando aumento do comprimento de onda) e simultaneamente um aumento de " a " (provocando uma diminuição do comprimento) levaria-nos prever "roll waves" de "comprimento estabilizado";

Em se tratando da amplitude das ondas geradas, observou-se que, mesmo alterando a estrutura da equação inicialmente proposta, conseguimos controlar e prever a amplitude das respostas quando da solução do problema Van Der Pol. Isso, nos permite tratar, não só o novo parâmetro (b), mas adequá-lo aos parâmetros da equação das "roll waves" (Froude, Reynolds e velocidade de propagação das ondas); controlando assim, a amplitude das respostas. Ou seja, através de exemplos anteriores notamos que uma variação nos parâmetros Re , U e F , repercutia na amplitude das ondas geradas; com isso, podemos ajustar valores do parâmetro b que forneçam a mesma amplitude das ondas geradas, quando da variação de Re , U e F .



No que tange os resultados da equação do fenômeno "roll waves" (oriundo do sistema "shallow water"), chegamos às seguintes conclusões:

Quando aumentávamos a velocidade de propagação (U), diminuíamos tanto o comprimento quanto a amplitude das ondas. Quando aumentávamos o número de Reynolds (Re) e o Froude (F), aumentávamos a amplitude e diminuíamos o comprimento das "roll waves"; o que vai ao encontro das conclusões citadas anteriormente quando nos referíamos ao parâmetro μ , ao parâmetro " a " e ao novo parâmetro " b " do modelo Van Der Pol, respectivamente.

XV - COMENTÁRIOS FINAIS

De uma maneira geral pudemos tratar ao longo desta Tese alguns aspectos julgados importantes na geração, propagação e tentativa de controle de "roll waves" que, de forma resumida, poderíamos enunciar da seguinte forma :

No campo de Fluidos Newtonianos ...

- partimos do clássico de Dressler (1949) e após alguns desenvolvimentos matemáticos, pudemos definir as condições de existência de "roll waves";
- adquirimos conhecimentos na formulação do problema "shallow water", suas propriedades, decorrências e sua larga aplicabilidade na hidráulica de superfície livre. Ainda nesse contexto, avançamos na compreensão clara e sistematizada dos sistemas lineares e não lineares, problemas de instabilidades de equações diferenciais, culminando com a teoria da bifurcação. A partir dessa base, definimos as condições de existência, unicidade e estabilidade do fenômeno; o que nos permitiu controlá-lo;
- apontamos para uma eventual analogia de "roll waves" com o problema de Van Der Pol. Para tanto, utilizando-se do software "Matlab", pudemos resolver, mais rapidamente, o problema do oscilador Van Der Pol e a equação que regia as "roll waves". Conseguimos, pois, "ajustar" os parâmetros de Van Der Pol aos parâmetros físicos do fenômeno "roll waves" (Froude, Reynolds, velocidade de propagação das ondas, amplitude e comprimento e/ou período das ondas geradas). A partir de uma base experimentalista numérica, pudemos apontar para alguns resultados quando da variação de parâmetros físicos e suas respectivas respostas sobre as ondas geradas.



No campo de Fluidos não-Newtonianos ...

- impusemo-nos a necessidade de analisar os principais modelos reológicos representativos da evolução de fluidos hiperconcentrados, apresentando uma breve validação do modelo por nós adotado (fluido de Bingham);
- seguindo o mesmo protocolo supracitado, agora dentro da nova reologia binghamiana, conseguimos apontar para as condições de existência e estabilidade do sistema; obtendo assim um novo critério de geração e estabilidade das "roll waves".
- em se tratando da utilização do código de cálculo implementado, pudemos apontar para novos horizontes quando da variação do parâmetro de resistência do escoamento (coeficiente de Chézy) e variação do parâmetro de Bingham (C^*); resultados esses comentados no decorrer desse trabalho.

Por fim, ainda que de forma global, acreditamos que este estudo deva ser continuado e sistematizado. No que diz respeito a critérios de engenharia, deixamos no esquema que se segue algumas notas importantes, que poderão ser úteis para engenheiros eventualmente envolvidos com este fenômeno. De qualquer maneira, uma vertente física (experiências em laboratório) deverá ser empreendida em via de validação das pistas apontadas ao longo deste trabalho.



ROLL WAVES

Aproximação teórico-numérica

Newtoniano

Condição de Existência

$$F > 2$$

Condições de Estabilidade

$$1 < U < \frac{3}{2}$$

Propriedades

- o período da "roll wave" é definido pelo período da perturbação imposta,
- um aumento na amplitude da perturbação causa uma antecipação na geração da "roll wave", mas não altera sua amplitude,
- um aumento no termo resistivo (Chézy) causa um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da "roll wave" gerada,
- a perturbação de maior período caracteriza o comprimento da "roll wave" gerada.

Não-Newtoniano

Condições de Existência

$$2 \cdot \frac{1}{F^2} \left[\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{F^2} + \frac{C^* \cdot \left(1 - \frac{1}{F^2}\right)}{W^2}}}{-\frac{1}{F^2} + \sqrt{\frac{1}{F^2} + \frac{C^* \cdot \left(1 - \frac{1}{F^2}\right)}{W^2}}} \right] < 1$$

C^* - efeito de Bingham ; W - celeridade da onda

Condições de Estabilidade

$$1 < U < \frac{3 - 2 \cdot C^*}{2 \cdot (1 - C^*)}$$

Propriedades

- o período da "roll wave" é definido pelo período da perturbação imposta,
- um aumento na amplitude da perturbação causa uma antecipação na geração da "roll wave", mas não altera sua amplitude,
- um aumento no termo resistivo (Chézy) causa um aumento na amplitude e uma diminuição no comprimento da "roll wave" gerada,
- a perturbação de maior período caracteriza o comprimento da "roll wave" gerada.
- um aumento no termo de Bingham antecipa a formação e eleva a amplitude da "roll wave".

Van Der Pol

- um aumento do parâmetro resistivo μ gera ondas de maior período ou comprimento;
- em contrapartida, um aumento do parâmetro "a", engendra menores valores de período e/ou comprimento de onda;
- ainda nessa análise, pareceu-nos que, do ponto de vista numérico, um aumento de μ (provocando aumento do comprimento de onda) e simultaneamente um aumento de "a" (provocando uma diminuição do comprimento) levaria-nos prever "roll waves" de "comprimento estabilizado";
- em se tratando da amplitude das ondas geradas, conseguimos controlar e prever respostas quando da solução do problema Van Der Pol, através da variação do parâmetro (b);
- por fim, notamos que uma variação nos parâmetros Re , U e F , repercutia na amplitude das ondas geradas; com isso, podemos ajustar valores do parâmetro b que forneçam a mesma amplitude das ondas geradas, quando da variação de Re , U e F .

Necessidade de uma base experimentalista física em via de validação de resultados e/ou previsões de cunho teórico-numérico.

Referências Bibliográficas

- ARNOLD, V.I, "Chapitres Supplémentaires de la Théorie des Équations Différentielles Ordinaires (Mir, Moscou, 1980).
- ARNOLD, V.I, "Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique, (Mir, Moscou, 1976).
- ARNOLD, V.I, "Ordinary Differential Equations (MIT Press, Cambridge, MA, 1973).
- BAGNOLD, R.A. "Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under sheer, Proc. Roy. Soc. London, Series A, 225, pp 49-63.
- BARRE DE SAINT-VENANT, 1871. Théorie du mouvement non permanent des eaux, Institut de France, Académie des sciences, Comptes rendus, Paris Juillet 1871, vol 73, p 147-237.
- BERNARDI, C., PIRONNEAU, O., "On the shallow water equations at low Reynolds number", Comm. In Partial Differential Equations, 16(1), 59-104, 1991.
- BINGHAM, E. C., "Fluidity and Plasticity", McGraw-Hill, New York, 1992.
- BORGES, A.L.O., TARQUI, J.L.Z., "Determinação das Propriedades Reológicas de Sedimentos Finos em Suspensão Obtidos de Três Tipos de Solos do Estado do Rio Grande do Sul do Brasil". CD ROM do IV Silusba - Coimbra-Portugal, maio 1999.
- BROOK, B.S., FALLE, S.A.E.G., PEDLEY T.J., "Numerical Solutions for Unsteady Gravity-Driven Flows in Collapsible Tubes: Evolution an Roll Wave Instability of a Steady State", J. Fluid Mech., Vol 396, 223-256, 1999.
- CHARLIER, C., MARTINET, G. NAAIM, M., MACIEL, G.F., "Étude de l'interaction de l'avalanche du Boulangeard et du Bassin du Verney", CEMAGREF, Rapport Technique, 1990.
- CHEN. C.-L. "General solution for viscoplastic debris flow." Journ. Hydr. Div., ASCE 114, p 259-282, 1988.
- CHEN. C.-L. "Generalized viscoplastic modeling of debris flow." Journ. Hydr. Div., ASCE 114, p 237-258, 1988.
- COUSSOT, P., "Rhéologie des boues et laves torrentielles - Étude de dispersions et suspensions concentrées". Tese de doutorado - Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.
- COUSSOT, P., LAIGLE, D., ARATTANO, M., DEGANUTTI, A., MARCHI, L., "Direct determination of rheological characteristics of debris flow". Journal of Hydraulic Engineering - ASCE 124: (8), p 865-868, 1998.



- COUSSOT, P., PIAU J.-M., "On the behavior of mud suspensions". *Rheologica Acta*, Vol. 33, Nº 3, p 175-184, 1994.
- COUSSOT, P., PIAU J.-M., "On the behavior of mud suspensions". *Rheologica Acta*, Vol. 33, Nº 3, p 175-184, 1994.
- COUSSOT, P., PROUST, S., ANCEY, C., "Rheological interpretation of deposits of yield stress fluids". *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, Vol. 66 - p 55-70, 1996.
- COUSSOT, P.; MEUNIER, M., "Recognition, classification and mechanical description of debris flows". *Earth-Science Reviews*, Volume: 40, Issue: 3-4, June, pp. 209-227, 1996.
- CRAYA, A. "The criteria for the possibility of roll waves formation. Gravity waves, National bureau of Standards, Circular 521, 1951, p 141-151.
- DRAZIN, P.G., "Nonlinear Systems", *Cambridge Texts in Applied Mathematics* - Cambridge University Press, New York, 1992.
- DRESSLER, R.F., "Mathematical solution of the problem of roll waves in inclined open channels". *Communs pure appl. Math.*, 1949, vol 2, p 149-194.
- EDWARDS, C.H., PENNEY, D.E., "Equações Diferenciais Elementares, com Problemas de Contorno" Editora Prentice Hall do Brasil, 3ª edição, 1993, Rio de Janeiro.
- FEDERICO, V.D., "Free-surface flow of hyperconcentrations". *Fluid Dynamics Research*, Vol 24, p 23-26, 1999.
- FREITAS MACIEL, G., "Uma proposta de modelação de Roll waves em fluidos de Bingham" XVII Congresso Nacional Del Agua. Santa Fe, Argentina. 1998.
- FREITAS MACIEL, G., "Uma proposta de modelação de Roll waves em fluidos de Bingham" - XVII Congresso Nacional Del Agua. Santa Fe, Argentina. 1998.
- FREITAS MACIEL, G., VILA, J.P, MARTINET, G. "Estudo teórico Numérico sobre "roll waves" - artigo submetido ao XII Simpósio Brasileiro de recursos Hídricos/ABRH - 1997, Vitória, E.S.
- FREITAS MACIEL, G., VILA, J.P, MARTINET, G. "Roll wave formation in the non Newtonian flows" - artigo submetido ao XIV COBEM, 1997 Bauru/S.P.
- GERBEAU, J.-F., PERTHAME, B., "Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water; Numerical Validation", *Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series B*, Vol 1, nº 1, p 89-102, 1999.
- GODUNOV, S.K., "A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics", *Math.Sb.*, 47(89), 1959, 271-300.
- GUCKENHEIMER, J, HOLMES, P., "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of vector Fields (Springer-Verlag, New york, 1983).



- GUO, J. C. Y., "Roll Waves in High Gradient Channels", International Water Resources Association, Vol 24, Nunber 01, 65-69, 1999.
- HUANG, X., GARCIA, M.H., "A Herschel-Bulkley model for mud flow down a slope". J. Fluid Mech., Vol. 374, p 305-333, 1998.
- HUERTA, A., LIU, W.K., "Viscous Flow with Large Surface Motion", Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol 69, 277-324, 1988.
- HUTTER, K., SAVAGE, S.B. 1988 "Avalanche dynamics: The motion of a finite mass of gravel down a mountain side". Proceeding of the 5th International Symposium on Landslides, July 7-9, Lausanne, Switzerland, 7pp.
- HWANG, S.-H. & CHANG, H.-C. 1987 Turbulent and inertial roll waves in inclined film flow. *Phys. Fluids* 30, 1259-1268.
- HWANG, S.-H., CHANG, H.-C., 1987 "Turbulent and inertial roll waves in inclined film flow". *Phys. Fluids* 30, 1259-1268.
- HWANG, S.-H., CHANG, H.-C., 1987 "Turbulent and inertial roll waves in inclined film flow". *Phys. Fluids* 30, 1259-1268.
- IOSS, G., "Bifurcation Theory" - Springer -Verlag.
- JIONGXIN, X., "Erosion caused by hyperconcentrated flow on the Loess Plateau of China". *Catena*, Vol. 36, Issue: 1-2, pp. 1-19, 1999.
- JOHNSON, A.M. 1984 "Debris Flow (with contributions from J.R. Roudine)". Slope Instability (ed. D. Brunsten & D.B. Prior), 257-361.
- JOHNSON, A.M., "Physical process in Geology", Freeman Coper. and Co., pp 577, 1970.
- JOHNSON, R.S., "A Modern Introduction to the Mathematical Theory of Water Waves", Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- KRANENBURG, C. 1992, "On the evolution of roll waves", J. Hydraulic Research, vol. 245, 249-261.
- LAX, P.D., "Shock waves and entropy", in contribution to non-linear functional analysis, E.H; Zerantonello ed. academic Press, NY, 1971.
- LI JIAN, YUAN JIANMO, BI CHENG & LUO DEFU 1983 "The main features of the mudflow in Jiang-Jia River. *Zeit. Geomorph*, 27, 3, 325-341.
- LI JIAN, YUAN JIANMO, BI CHENG & LUO DEFU 1983 "The main features of the mudflow in Jiang-Jia River. *Zeit. Geomorph*, 27, 3, 325-341.
- LI, G.; WEI, H.; HAN, Y.; CHEN, Y., "Sedimentation in the Yellow River delta, part I: flow and suspended sediment structure in the upper distributary and the estuary". *Marine Geology*, Vol. 149, Issue: 1-4, pp. 93-111, 1998.



- LIU, K., MEI, C.C., "Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane", J. Fluid Mech. 207, 505 (1989).
- LIU, K., MEI, C.C., "Slow spreading of a sheet of Bingham fluid on an inclined plane", J. Fluid Mech. 207, 505 (1989).
- MAJOR, J.J., PIERSON, T.C., "Rheological analysis of fine-grained natural debris flow material", Symposium Proceedings of Hydraulics/Hydrology of Arid Land (American Society of Chemical Engineering, San Diego), p 228-231, 1990.
- MAJOR, J.J., PIERSON, T.C., "Water Resource Res.", Vol 28, p 941, 1992.
- MAYER, P.G.W 1957. "A study of roll waves and slug flows in inclined open channels". Dissertation Cornell Univ.
- NEEDHAM, D.J., MERKIN, J.H. - "An infinite period bifurcation arising in roll waves down an open inclined channel", Proc. R. Soc. London A 405, 1986, pp 103-116.
- NEEDHAM, D.J., MERKIN, J.H., "On roll waves down an open inclined channel." Proc. R. Soc. Lond A 394, 1984, p 259-278.
- O'BRIEN, J.S., JULIEN, P.Y., "Laboratory analysis of mudflows properties.", J. Hydr. Eng., ASCE 114 (8), p 877-887, 1988.
- PIAU, J.M., "Flow of a yield stress fluid in a long domain, application to flow on an inclined plane". J. Rheology, Vol. 40, p 711-723, 1996.
- POMÉS, C.H.R., "Desenvolvimento de um modelo conceitual para simulação de uma avalanche de detritos ("debris flow") qualquer". Tese de Doutorado - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - Hidráulica e Saneamento, São Paulo, 1994.
- SAVAGE, S.B., "Gravity flow of cohesion less granular materials in chutes and channels." J. Fluid. Mech., Vol. 92, p 53-96, 1979.
- SAVAGE, S.B., JENKINS, J.T. "Granular flows down rough inclines review and extension." Mech. of Granular Materials: New Models and Constitutive Relations. Elsevier, p 261-282, 1983.
- SERRE, D., "Systèmes de Lois de Conservation", I & II. Diderot Editeur, Paris, 1996.
- STOKER, J.J. "Water waves. Mathematical Hydraulics, Wiley Interscience, 1957, p 451-509.
- TAKAHASHI, T. "Debris Flow ", Ann. Ver. Fluid Mech., 13, 57-77, 1981.
- TAKAHASHI, T. "Debris Flow on prismatic channel", Journ. Hydr. Div., ASCE 106, 381-395, 1980.
- TAKAHASHI, T. "Debris Flow", Monograph, IAHR, Balkema, Rotterdam, 1990.



- TESHUKOV, V.M., "The Riemann Problem for the Integrodifferential Equations of the Shallow Water Theory", In *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications*, Vol 130, 953-962, 1999.
- VANLEER B., "Toward the ultimate conservative difference scheme", *Journal of Comp. Phys.* 32,1981,101-136.
- VILA, J.P., "Simplified Godounov schemes for (2,2) systems of conservation laws". *SIAM J.Numerical Anal.* vol.23 num.6, 1986, p.1173-1192.
- WAN, Z. "Bed material movement in hyperconcentrated flow". Ser. Pap. 31 Inst. of Hydrodyn. and Hydraul. Engrg., Tech. Univ. of Denmark, Lyngby, 1982.
- WHITHAM, G.B., "Linear and Nonlinear Waves", John Wiley & Sons Inc, New York, 1999.
- YU, J., KEVORKIAN, J., "Nonlinear evolution of small disturbances into roll waves in a inclined open channel", *J. F. Mechanics*, 1992, vol. 243, 575-594.

