



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Teoria de Conjuntos Fuzzy e aplicações

Érica Fernanda Aparecida Secco

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Renata Zotin G. de Oliveira

2013

511.3 Secco, Érica Fernanda Aparecida
S444t Teoria de Conjuntos Fuzzy e aplicações/ Érica Fernanda Aparecida Secco- Rio Claro: [s.n.], 2013.
87 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Renata Zotin G. de Oliveira

1. Lógica simbólica e matemática. 2. Função de Pertinência. 3. Lógica Fuzzy. 4. Regras Fuzzy. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Érica Fernanda Aparecida Secco
TEORIA DE CONJUNTOS FUZZY E APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin G. de Oliveira
Orientadora

Prof. Dra. Elaine Cristina Catapani Poletti
FT - UNICAMP - Limeira

Prof. Dr. Wladimir Seixas
Departamento - UFSCar - Sorocaba

Rio Claro, 16 de dezembro de 2013

*Aos meus pais e ao meu marido,
por todo o amor que eles me inspiram.*

Agradecimentos

No meu modo de ver, nunca realizamos um trabalho solitário pois sempre somos auxiliados, seja com ideias, com compreensão, com conselhos sinceros. Na realização desse trabalho tive muitos colaboradores e recebi apoios diversos, e é com alegria que agradeço:

Primeiramente, a Deus por estar sempre presente, auxiliando e amparando todos os momentos da minha vida.

À minha orientadora Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira por ter me proposto um trabalho tão interessante. Por ter acreditado em mim, pela compreensão, pela amizade que criamos, pela dedicação e por ter contribuído intensamente para o desenvolvimento da confiança e da autonomia do meu trabalho.

Ao Prof. Dr. Thiago de Melo, pela paciência e boa vontade em me ajudar na parte computacional, fazendo deste um trabalho mais completo.

Aos companheiros de estrada, por fazerem que o trajeto de toda sexta-feira ficasse menos cansativo, pela ajuda, pelo apoio, pelo carinho e por terem contribuído para que eu chegasse até aqui.

A minha amiga Thaisa Alves Pianoschi por ter me ajudado nos momentos mais difíceis do desenvolvimento do meu trabalho.

Aos meus pais amados, Edson e Geny, meus maiores exemplos. Obrigada pelas orações, pelo apoio, suporte, por me amarem e dedicarem o melhor de vocês para me dar sempre o melhor.

Ao meu marido, Gustavo Azem Calil Julio, meu amor. Por ter acreditado em mim todos os momentos, pelo carinho, pela paciência, pelo companheirismo, e por estar sempre ao meu lado me fazendo cada dia mais feliz.

Meu muito obrigado a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

Resumo

Neste trabalho são apresentados alguns conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy como: operações com conjuntos fuzzy, Princípio de Extensão de Zadeh, números fuzzy e noções de lógica fuzzy. As relações fuzzy são apresentadas com o objetivo de tratarmos de sistemas baseados em regras fuzzy e algumas aplicações.

Palavras-chave: Lógica simbólica e matemática, Função de Pertinência, Lógica Fuzzy, Regras Fuzzy.

Abstract

In this paper are presented some basic concepts of Fuzzy Sets Theory: operations with fuzzy sets, Zadeh extension principle, fuzzy numbers and fuzzy logic. The fuzzy relations are presented for the purpose of treating systems based on fuzzy rules and some applications.

Keywords: Symbolic logic and mathematics, Membership Function, Fuzzy Logic, Fuzzy Rules.

Lista de Figuras

2.1	Classificação segundo diâmetro das partículas do exemplo 2.1.	20
2.2	Função de pertinência para o conjunto do exemplo 2.2.	21
2.3	Função de pertinência para o conjunto do exemplo 2.4.	22
2.4	Funções de pertinência para o conjunto do exemplo 2.5.	22
2.5	Função de pertinência para os conjuntos A e B , respectivamente, do exemplo 2.6.	25
2.6	Função de pertinência para o conjunto $A \cup B$ e $A \cap B$, respectivamente, do exemplo 2.6.	26
2.7	Função de pertinência para o conjunto A' do exemplo 2.6.	26
2.8	Função de pertinência para o conjunto dos jovens e dos idosos, respectivamente, do exemplo 2.7, dados por (2.3) e (2.4).	27
2.9	Função de pertinência para o conjunto $\varphi_{(A \cup B)'} e \varphi_{A' \cup B'}$, respectivamente, do exemplo 2.8.	31
2.10	Função de pertinência para o conjunto A do exemplo 2.9.	32
2.11	Função de pertinência para o conjunto A do exemplo 2.10.	32
3.1	Ilustração do Princípio de extensão.	38
3.2	Gráfico de $\varphi_{\hat{f}(A)}$ do exemplo 3.2.	39
3.3	Função de pertinência φ_A para o conjunto do exemplo 3.5.	42
3.4	O número real 2,2 e o intervalo fechado $[2,15; 2,35]$, respectivamente, do exemplo 3.6.	43
3.5	O número fuzzy “próximo de 2,2” na forma triangular e na forma trapezoidal, respectivamente, do exemplo 3.6.	44
3.6	Exemplos de números fuzzy.	44
3.7	Número fuzzy triangular da definição 3.4.	45
3.8	Função de pertinência φ_A para o conjunto do exemplo 3.7.	45
3.9	Número fuzzy trapezoidal da definição 3.5.	46
3.10	Função de pertinência φ_A para o conjunto do exemplo 3.8.	47
3.11	Número fuzzy “em forma de sino” da definição 3.6.	47
5.1	Exemplo de representação de uma relação fuzzy binária: diagrama de flechas.	62
5.2	Diagrama de flechas do exemplo 5.3.	63

5.3	Diagrama de flechas do Exemplo 5.6.	65
6.1	Forma geral de uma base de regras fuzzy [1].	70
6.2	Esquema ilustrativo do sistema fuzzy.	73
6.3	Conjuntos fuzzy para a variável de entrada qualidade aprovada (a) e reprovada (b), respectivamente.	74
6.4	Conjuntos fuzzy para a variável de saída avaliação do fornecedor (a) e para a variável de entrada qualidade e pontualidade (b), respectivamente.	75
6.5	Conjuntos fuzzy para a variável de saída avaliação final do fornecedor.	76
6.6	Dados referentes a um fornecedor de pedras preciosas [2].	77
6.7	Taxa de crescimento do principal recife de corais, <i>Montastrea annularis</i> , da região do Caribe [3].	78
6.8	Comparação das soluções: equação diferencial e fuzzy [3].	79
6.9	Profundidade da água.	79
6.10	Taxa de crescimento dos corais.	80
6.11	Base de regras.	80
6.12	Índice de massa corporal (IMC) fuzzy.	82
6.13	Porcentagem de gordura corporal (%GC) fuzzy.	83
6.14	Miyahira Araujo fuzzy obesity index (MAFOI).	83
6.15	Matriz difusa para classificação da obesidade.	84
6.16	Sistema Miyahira Araujo Fuzzy Obesity Index (MAFOI). Duas entradas: IMC e %GC. Uma saída: MAFOI. Número de regras: 22 [4].	85
6.17	Superfície de mapeamento do Miyahira Araujo Fuzzy Obesity Index (MAFOI) [4].	85

Sumário

1	Introdução	15
2	Conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy	19
2.1	Introdução	19
2.2	Conjuntos Fuzzy	19
2.3	Operações com subconjuntos fuzzy	23
2.4	O conjunto α -nível	31
3	Princípio de Extensão e Números Fuzzy	37
3.1	O Princípio de Extensão	37
3.2	Números Fuzzy	42
4	Noções básicas da Lógica Fuzzy	49
4.1	Conectivos básicos da Lógica Clássica	49
4.2	Conectivos básicos da Lógica Fuzzy	51
4.2.1	T-Norma	51
4.2.2	T-Conorma	52
4.2.3	Negação	54
4.3	Raciocínio aproximado e variáveis linguísticas	57
5	Relações Fuzzy	59
5.1	Relações Clássicas e Fuzzy	59
5.2	Relações Fuzzy binárias	62
5.3	Composição e Junção entre Relações Fuzzy Binárias	63
5.4	Relações binárias sobre U	66
6	Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e aplicações	69
6.1	Controladores Fuzzy	69
6.2	Base de Regras Fuzzy	69
6.3	Funcionamento de um Controlador Fuzzy	70
6.3.1	Módulo de Fuzzificação	70
6.3.2	Módulo da Base de Regras	71
6.3.3	Módulo de Inferência Fuzzy	71

6.3.4	Módulo de Defuzzificação	72
6.4	Aplicações	72
6.4.1	Sistema de avaliação dos fornecedores [2]	73
6.4.2	Aplicação da Teoria Fuzzy para o Crescimento de Recife de Coral [3]	77
6.4.3	Condição clínica de obesidade e indicação de cirurgia ba-riátrica [4]	80
6.5	Considerações Finais	86
	Referências	87

1 Introdução

A teoria de conjuntos fuzzy foi introduzida pelo professor L. A. Zadeh (1965) que procurava uma teoria alternativa que pudesse formalizar termos imprecisos como "em torno de", "próximo de", etc. Em muitos problemas em Física e em Matemática não temos dificuldade em classificar elementos como pertencentes ou não a um dado conjunto clássico. Dessa forma, dado um conjunto A e um elemento x do conjunto universo U conseguimos muitas vezes afirmar $x \in A$ ou $x \notin A$. Por exemplo, afirmamos sem receio que o número 5 pertence ao conjunto dos números naturais e que o número -5 não pertence a este mesmo conjunto. Este é um caso sobre o qual não temos dúvidas, sendo a lógica booleana devidamente aplicada. No entanto, poderemos discordar quanto ao fato de o número 4,5 pertencer ou não ao conjunto dos números próximos de 5. Neste caso a resposta não é única e objetiva, pertencer ou não poderá depender do tipo de problema que estamos analisando.

Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico é caracterizado por uma função, a *função característica*. A partir dela, através de um "relaxamento" no contradomínio da função característica, passando do conjunto $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0, 1]$, Zadeh definiu a pertinência de um elemento a um conjunto de forma gradual, através da chamada *função de pertinência*.

A partir do conceito de função de pertinência foi desenvolvido um estudo em que foi possível caminhar teoricamente com a interpretação de termos imprecisos, podendo analisar fenômenos qualitativos, com certa confiabilidade.

A pesquisa na teoria de conjuntos fuzzy tem crescido consideravelmente desde a sua criação. Além disso, as aplicações ocorrem nas mais diversas áreas e têm apresentado resultados expressivos.

A teoria da lógica fuzzy enfrentou forte resistência por parte da comunidade científica no seu início, principalmente por parte de estatísticos norte americanos. Entretanto, a despeito de todo preconceito muitos pesquisadores vislumbraram as possibilidades de avanço e trabalhos surgiram em todo o mundo, particularmente no Japão, onde a lógica fuzzy encontrou um solo fértil para desenvolver-se rapidamente.

Já na primeira década (1965-1975) os pesquisadores se esforçaram por estender os fundamentos da lógica fuzzy, introduzindo conceitos novos e desenvolvendo outras abordagens da teoria, bem como as relações fuzzy, as variáveis linguísticas, os processos

de decisão fuzzy, a medida fuzzy, sistemas topológicos, álgebra com números fuzzy, etc.. Em 1972 formou-se no Japão o primeiro grupo de pesquisas em sistemas fuzzy, coordenado pelo professor Toshiro Terano, e em 1974 iniciou-se um importante capítulo no desenvolvimento desta teoria, com a apresentação do primeiro controlador fuzzy criado por E. Mamdani, no Reino Unido. A partir de então vários foram os pesquisadores que buscaram aplicar a teoria de lógica fuzzy para controlar sistemas em engenharia. Em 1976 temos a primeira aplicação industrial da lógica fuzzy, desenvolvido pelo Circle Cement e SIRA, na Dinamarca, que consistiu de um controlador fuzzy que incorporava o conhecimento e a experiência dos operários para controlar os fornos das fábricas. Em 1977, Didier Dubois aplicou os conjuntos fuzzy em um estudo sobre condições de tráfego e neste mesmo ano surgiu o primeiro sistema especialista fuzzy.

Em 1985 foi desenvolvido o primeiro chip fuzzy por Masaki Togai e Hiroyuki Watanabe, no laboratório Bell (EUA). Em 1987 foi inaugurado com sucesso o primeiro trem controlado com lógica fuzzy, no sistema do metrô de Sendai, no Japão. Foi também neste ano que a Yamaha desenvolveu seu helicóptero não-tripulado, Yamaha-50, totalmente controlado por um controlador fuzzy, dando origem a era do desenvolvimento tecnológico proporcionado por esta teoria. Em 1988 começou a operar no Yamaichi Fuzzy Fund o primeiro sistema de comércio financeiro fuzzy. Mas, foi em 1990 que esta teoria atingiu a popularidade com o lançamento no mercado da primeira máquina de lavar roupas fuzzy, da Matsushita Electric Industrial Co., marcando o início do desenvolvimento de produtos de consumo. Hoje é possível encontrar, principalmente no Japão, vários tipos de eletrodomésticos cujo sistema é baseado em controles fuzzy (televisão, câmera fotográfica, panela para cozimento de arroz, vídeos, etc.) e existem, atualmente, várias empresas (Siemens, Daimler-Benz, Klockner-Moeller, SGS-Thomson, General Motors, Motorola, Hewlett-Packard, etc.) com laboratórios de pesquisa na área para desenvolvimento de produtos.

Nesse breve histórico é possível perceber quão rápido se deu o desenvolvimento da teoria fuzzy e quão abrangente tem sido suas aplicações.

Os objetivos centrais deste trabalho são:

- o estudo de conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy, comparando-os com a Teoria de Conjuntos Clássica;
- apresentação de exemplos, que ilustram os conceitos, visando um texto que poderá ser utilizado numa disciplina (optativa) de graduação;
- estudo de aplicações, envolvendo essa teoria, em algumas áreas do conhecimento, principalmente no que se refere a sistemas baseados em regras fuzzy.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos de conjuntos fuzzy e as operações com subconjuntos fuzzy; no capítulo 3 introduzimos o princípio de extensão de Zadeh e os números fuzzy. Para um bom

entendimento do texto, noções básicas da lógica fuzzy são apresentadas no capítulo 4 e as relações fuzzy no capítulo 5. Finalmente, no capítulo 6 apresentamos o sistema baseado em regras fuzzy e aplicações.

2 Conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos Fuzzy

2.1 Introdução

É muito comum passarmos informações ou conceitos de uma maneira incerta, ou seja, com certo grau de imprecisão. Isso ocorre principalmente quando,

“ para descrever certos fenômenos relacionados ao mundo sensível, temos utilizado graus que representam qualidades ou verdades parciais... Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de alto, fumante, infeccioso, presa etc ” [1].

Estes conceitos são fuzzy no sentido de que não podem ser rigorosamente definidos.

Neste capítulo, iremos apresentar o conceito de subconjuntos fuzzy, algumas operações e aplicações.

2.2 Conjuntos Fuzzy

Para formalizar a definição de um conjunto fuzzy, Zadeh baseou-se no fato de que qualquer conjunto clássico pode ser caracterizado por uma função, chamada função característica, que é dada a seguir.

Definição 2.1. *Seja \mathcal{U} um conjunto e \mathcal{A} um subconjunto de \mathcal{U} . A função característica de \mathcal{A} é dada por*

$$X_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathcal{A} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

Assim, o domínio de $X_{\mathcal{A}}$ é \mathcal{U} e a imagem é o conjunto $\{0, 1\}$. Existem conjuntos que não estão bem definidos, ou seja, conjuntos onde não podemos usar esta função característica para dizer se um elemento pertence ou não ao conjunto. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1. [3] Em Geologia, os termos argila, lama, areia e pedregulho são utilizados para descrever o tamanho de partículas sedimentares do solo. Do ponto de vista “clássico”, um grão pode pertencer somente a uma destas classes de tamanho. Assim, um grão com diâmetro $1,999 \text{ mm}$ seria areia e um grão com $2,001 \text{ mm}$ de diâmetro seria pedregulho.

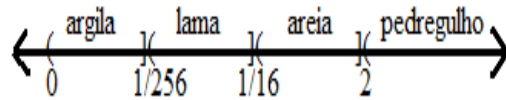


Figura 2.1: Classificação segundo diâmetro das partículas do exemplo 2.1.

Uma representação alternativa para descrever o conjunto “areia” seria atribuir o valor 1 para os grãos com diâmetro no intervalo $[0,0625,2] \text{ mm}$ e valor 0 para grãos cujo diâmetro estão fora desse intervalo.

Na representação de conjuntos fuzzy, a função utilizada para descrever “areia” poderá assumir qualquer valor no intervalo $[0,1]$ e não somente os valores 0 ou 1.

Assim, esses grãos com diâmetros $1,99 \text{ mm}$ e $2,001 \text{ mm}$ são membros de dois conjuntos (simultaneamente), areia e pedregulho, com graus de pertinência próximo de 0,5.

A seguir vamos definir e apresentar alguns exemplos de conjuntos fuzzy e uma possibilidade de representação para os conjuntos do exemplo 2.1.

Definição 2.2. *Seja \mathcal{U} um conjunto clássico. Um subconjunto fuzzy \mathcal{A} de \mathcal{U} é caracterizado por uma função de pertinência $\varphi_{\mathcal{A}}$ onde*

$$\varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{U} \rightarrow [0, 1].$$

O valor $\varphi_{\mathcal{A}}(x)$ em $[0, 1]$ indica o grau com que o elemento x de \mathcal{U} pertence ao conjunto fuzzy \mathcal{A} , com $\varphi_{\mathcal{A}}(x) = 0$ e $\varphi_{\mathcal{A}}(x) = 1$ indicando, respectivamente, a não pertinência e a pertinência completa de x ao conjunto fuzzy \mathcal{A} .

Observamos que a definição de conjunto fuzzy foi obtida simplesmente ampliando-se o contra domínio da função característica, isto é, do conjunto $\{0, 1\}$ para o intervalo $[0,1]$. Dessa forma, podemos notar que todo conjunto clássico é um caso particular de conjunto fuzzy, onde a função de pertinência que o caracteriza é a sua função característica.

Observação 2.1. 1. Um subconjunto clássico, na linguagem fuzzy, costuma ser denominado por *subconjunto crisp*.

2. Para tornar a leitura do texto mais simples, iremos nos referir a subconjunto fuzzy por conjunto fuzzy.

Exemplo 2.2. Retomando o exemplo 2.1, se usarmos conjuntos fuzzy, uma possibilidade de representação dos termos que descrevem o tamanho dos sedimentos, pode ser observada na Figura 2.2, sugerido por [3].

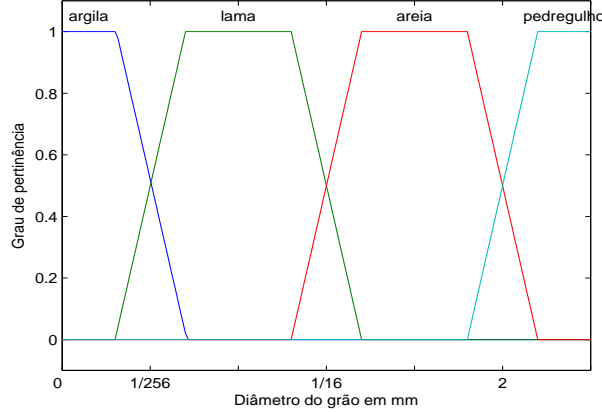


Figura 2.2: Função de pertinência para o conjunto do exemplo 2.2.

A imagem da função de pertinência não está restrita a valores 0 e 1, mas pode assumir qualquer valor no intervalo $[0,1]$. Assim, grãos de $1,999$ e $2,001$ mm pertencem aos conjuntos “areia” e “pedregulho” com grau próximo de 0,5.

Exemplo 2.3. Consideramos o conjunto dos números naturais ímpares:

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ é ímpar}\}.$$

O conjunto P tem como função característica $X_P(n) = 1$ se n é ímpar e $X_P(n) = 0$ se n é par. Portanto, o conjunto dos números ímpares é um particular conjunto fuzzy já que $X_P(n) \in [0, 1]$.

Exemplo 2.4. [5] Seja \mathcal{U} o conjunto de todos os números reais que podem indicar altura de uma pessoa. Vamos definir o conjunto \mathcal{A} como sendo o conjunto das pessoas altas. Uma função de pertinência que caracteriza \mathcal{A} pode ser dada por

$$\varphi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,60 \\ 5(x - 1,60), & \text{se } 1,60 < x < 1,80 \\ 1, & \text{se } x \geq 1,80 \end{cases},$$

cujos gráfico é dado pela Figura 2.3.

Exemplo 2.5. [6] Consideramos o subconjunto \mathcal{F} dos números reais próximo de 2:

$$\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ é próximo de } 2\}.$$

Podemos caracterizar a função de pertinência $\varphi_{\mathcal{F}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, que associa cada x real ao valor de proximidade ao ponto 2, de diferentes maneiras. Vejamos graficamente, algumas delas na Figura 2.4.

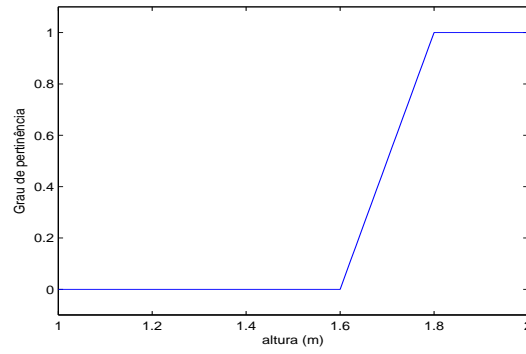


Figura 2.3: Função de pertinência para o conjunto do exemplo 2.4.

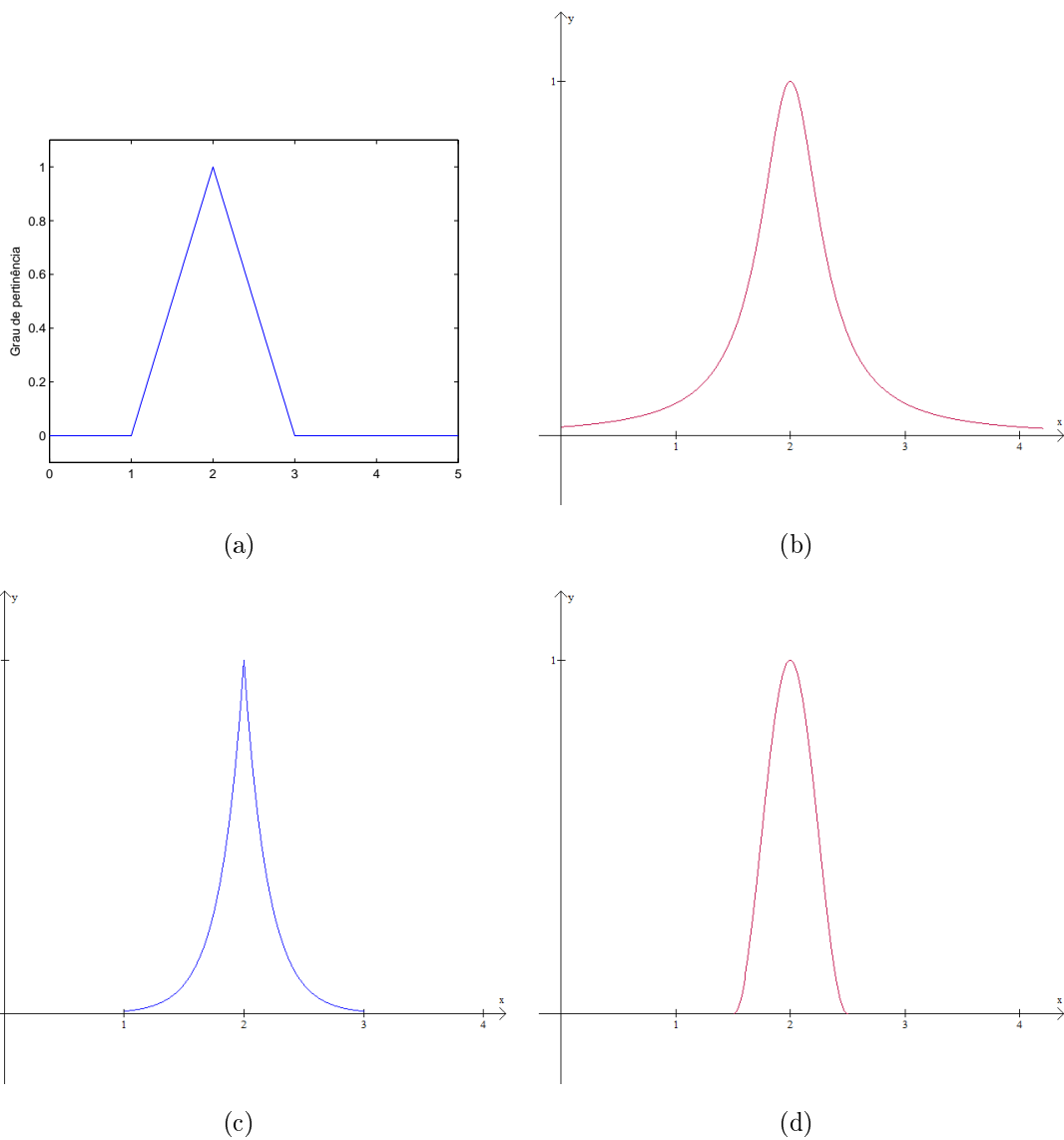


Figura 2.4: Funções de pertinência para o conjunto do exemplo 2.5.

As funções de pertinência dos itens (a) e (c) da figura 2.4 são parecidas no sentido que os números pertencentes ao intervalo $]1, 3[$ tem grau de pertinência estritamente positivo, enquanto que fora desse intervalo o grau de pertinência é nulo. Já para a função do item (d) elementos no intervalo $[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$ tem pertinência não-nula. A seguir apresentamos as expressões analíticas das funções de pertinência φ_1 , φ_2 , φ_3 e φ_4 para os itens (a), (b), (c) e (d), respectivamente, da figura 2.4.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} (x - 2) + 1, & \text{se } x \in [1, 2] \\ (2 - x) + 1, & \text{se } x \in (2, 3] \\ 0, & \text{se } x \notin (1, 3) \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{1 + 10(x - 2)^2}$$

$$\varphi_3(x) = e^{-|5(x-2)|}$$

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \frac{(1 + \cos(2\pi(x-2)))}{2}, & \text{se } x \in [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}] \\ 0, & \text{se } x \notin (\frac{3}{2}, \frac{5}{2}) \end{cases}$$

A escolha da função que deve ser adotada para o conjunto em questão depende do problema a ser estudado.

Do ponto de vista da teoria dos conjuntos fuzzy, qualquer uma das funções de pertinência dadas anteriormente pode ser uma representante do conjunto \mathcal{F} . Porém, o que deve ser notado é que cada uma dessas funções produz conjuntos fuzzy distintos e assim, a escolha da função de pertinência a ser utilizada depende do problema e do especialista.

2.3 Operações com subconjuntos fuzzy

Apresentaremos a seguir as definições de conjunto *união*, *interseção* e *complementar* de conjuntos fuzzy, comparandos-as com o caso clássico.

Um conjunto fuzzy é dito *vazio* se e somente se a função de pertinência for identicamente nula em \mathcal{U} .

Consideraremos agora \mathcal{A} e \mathcal{B} dois conjuntos fuzzy de \mathcal{U} .

Definição 2.3. Dizemos que os conjuntos \mathcal{A} e \mathcal{B} são iguais e escrevemos $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, se e somente se, $\varphi_{\mathcal{A}}(x) = \varphi_{\mathcal{B}}(x)$ para todo x em \mathcal{U} . Dizemos que \mathcal{A} é um subconjunto de \mathcal{B} , e escrevemos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, se $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \leq \varphi_{\mathcal{B}}(x)$ para todo $x \in \mathcal{U}$.

Da definição anterior, observamos que só há igualdade de dois conjuntos fuzzy se possuem as mesmas funções de pertinência.

Definição 2.4. A união de dois conjuntos fuzzy \mathcal{A} e \mathcal{B} é um conjunto fuzzy \mathcal{C} , e escrevemos $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{C}}(x) = \max[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)], x \in \mathcal{U}. \quad (2.1)$$

Esta função está bem definida pois o máximo sempre existe.

Segundo [7], a *união* de \mathcal{A} e \mathcal{B} é, intuitivamente, o **menor** conjunto fuzzy que contém \mathcal{A} e \mathcal{B} . Mais precisamente, se \mathcal{D} é um conjunto fuzzy qualquer que contém ambos \mathcal{A} e \mathcal{B} , então \mathcal{D} contém a união de \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Para mostrar esta afirmação, observe primeiramente que \mathcal{C} , como definido em (2.1), contém \mathcal{A} e \mathcal{B} , pois

$$\max[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \geq \varphi_{\mathcal{A}}(x) \text{ e } \max[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \geq \varphi_{\mathcal{B}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

Além disso, se \mathcal{D} é um conjunto fuzzy qualquer que contém \mathcal{A} e \mathcal{B} , então

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) \geq \varphi_{\mathcal{A}}(x) \text{ e } \varphi_{\mathcal{D}}(x) \geq \varphi_{\mathcal{B}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

e portanto,

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) \geq \max[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] = \varphi_{\mathcal{C}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

que implica $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

Definição 2.5. A interseção de dois conjuntos fuzzy \mathcal{A} e \mathcal{B} é um conjunto fuzzy \mathcal{C} , e escrevemos $\mathcal{C} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{C}}(x) = \min[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)], x \in \mathcal{U}. \quad (2.2)$$

De modo análogo, a *interseção* de \mathcal{A} e \mathcal{B} é o **maior** conjunto fuzzy que está contido em \mathcal{A} e \mathcal{B} . Mais precisamente, se \mathcal{D} é um conjunto fuzzy qualquer que está contido tanto em \mathcal{A} quanto em \mathcal{B} , então \mathcal{D} está contido na intersecção de \mathcal{A} e \mathcal{B} .

Para mostrar esta afirmação, observe primeiramente que \mathcal{C} , como definido em (2.2), contém \mathcal{A} e \mathcal{B} , pois

$$\min[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \leq \varphi_{\mathcal{A}}(x) \text{ e } \min[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \leq \varphi_{\mathcal{B}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Além disso, se \mathcal{D} é um conjunto fuzzy qualquer que está contido em \mathcal{A} e \mathcal{B} , então

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) \leq \varphi_{\mathcal{A}}(x) \text{ e } \varphi_{\mathcal{D}}(x) \leq \varphi_{\mathcal{B}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

e portanto,

$$\varphi_{\mathcal{D}}(x) \leq \min[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] = \varphi_{\mathcal{C}}(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

que implica $\mathcal{C} \supset \mathcal{D}$.

Definição 2.6. O complementar de um conjunto fuzzy A é o subconjunto fuzzy A' de \mathcal{U} cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A'}(x) = 1 - \varphi_A(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Note que, ao contrário do conjunto clássico, para conjuntos fuzzy podemos ter:

- $\varphi_{A \cap A'}(x) \neq 0 = \varphi_{\emptyset}(x), \forall x \in \mathcal{U}$, ou seja, $A \cap A' \neq \emptyset$.
- $\varphi_{A \cup A'}(x) \neq 1 = \varphi_U(x), \forall x \in \mathcal{U}$, ou seja, $A \cup A' \neq U$.

Como $\varphi_{A \cap A'}(x) = \min[\varphi_A(x), 1 - \varphi_A(x)], x \in U, \varphi_{A \cap A'}(x) \neq 0$ sempre que $\varphi_A(x) \in (0, 1)$, ou seja, $A \cap A' \neq \emptyset$. Além disso, $\varphi_{A \cap A'}(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi_A(x) \in \{0, 1\}$, ou seja, o princípio do terceiro excluído é válido somente para conjuntos clássicos.

Vejamos alguns exemplos envolvendo os conceitos apresentados nesta seção.

Exemplo 2.6. Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, A e B conjuntos fuzzy de \mathcal{U} definidos por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ 4 - x, & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{se } x > 4 \end{cases} \quad \varphi_B(x) = \begin{cases} e^{x-3}, & \text{se } 0 \leq x < 3 \\ 1, & \text{se } 3 \leq x < 5 \\ 1 - \frac{x-5}{2}, & \text{se } 5 \leq x \leq 7 \\ 0, & \text{se } x > 7 \end{cases}$$

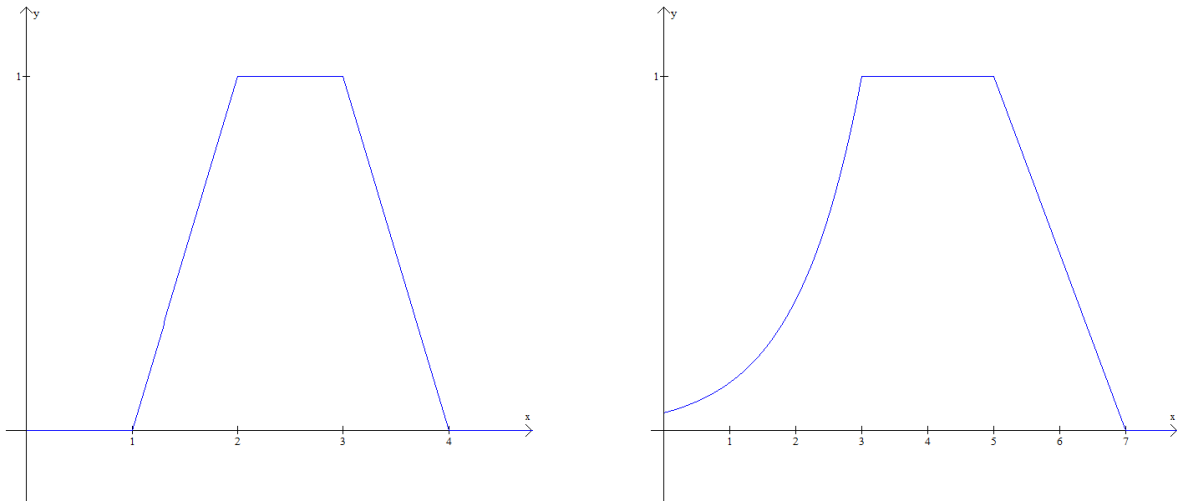


Figura 2.5: Função de pertinência para os conjuntos A e B , respectivamente, do exemplo 2.6.

Assim,

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} e^{x-3}, & \text{se } 0 \leq x < 1.16 \\ x - 1, & \text{se } 1.16 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ \varphi_B(x), & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad \varphi_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - 1, & \text{se } 1 < x < 1.16 \\ e^{x-3}, & \text{se } 1.16 \leq x < 3 \\ \varphi_A(x), & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

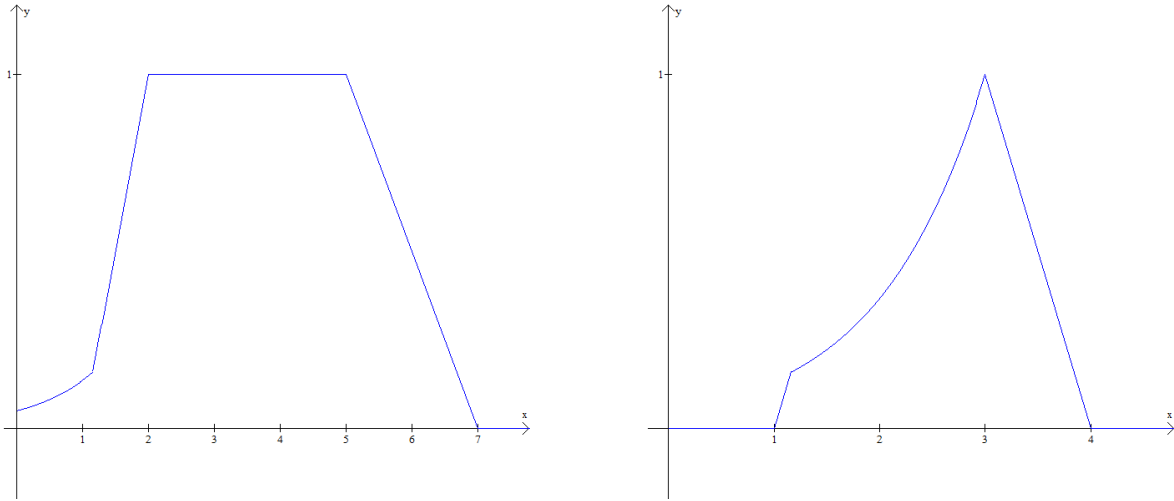


Figura 2.6: Função de pertinência para o conjunto $A \cup B$ e $A \cap B$, respectivamente, do exemplo 2.6.

$$\varphi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x, & \text{se } 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{se } 2 \leq x < 3 \\ x - 3, & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \\ 1, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

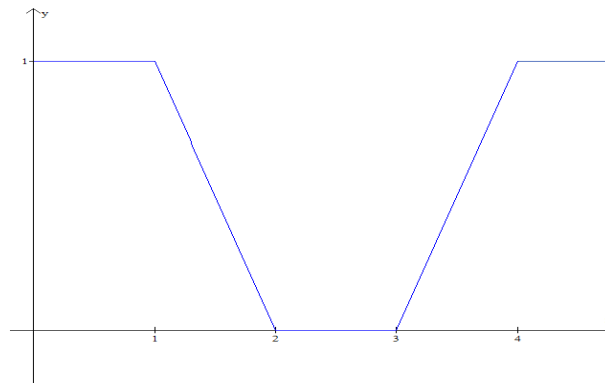


Figura 2.7: Função de pertinência para o conjunto A' do exemplo 2.6.

Exemplo 2.7. [1] Consideramos que o conjunto fuzzy que define os jovens seja dado por

$$\varphi_J(x) = \begin{cases} \left(\frac{40-x}{40}\right)^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 40 \\ 0, & \text{se } 40 < x \leq 120 \end{cases} \quad (2.3)$$

onde $\mathcal{U} = [0, 120]$ e as idades dos indivíduos são dadas em anos.

Uma possibilidade para a função de pertinência do conjunto fuzzy dos idosos é

$$\varphi_I(x) = 1 - \varphi_J(x),$$

onde o conjunto fuzzy dos idosos é o complementar do conjunto fuzzy dos jovens.

No entanto, embora os termos linguísticos jovens e idosos tenham significados aparentemente opostos, eles podem ser definidos por conjuntos fuzzy que não sejam complementares. Por exemplo, φ_I pode ser tomado como em [1] (veja Figura 2.8)

$$\varphi_I(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-40}{80}\right)^2, & \text{se } 40 < x \leq 120 \\ 0, & \text{se } x \leq 40 \end{cases} \quad (2.4)$$

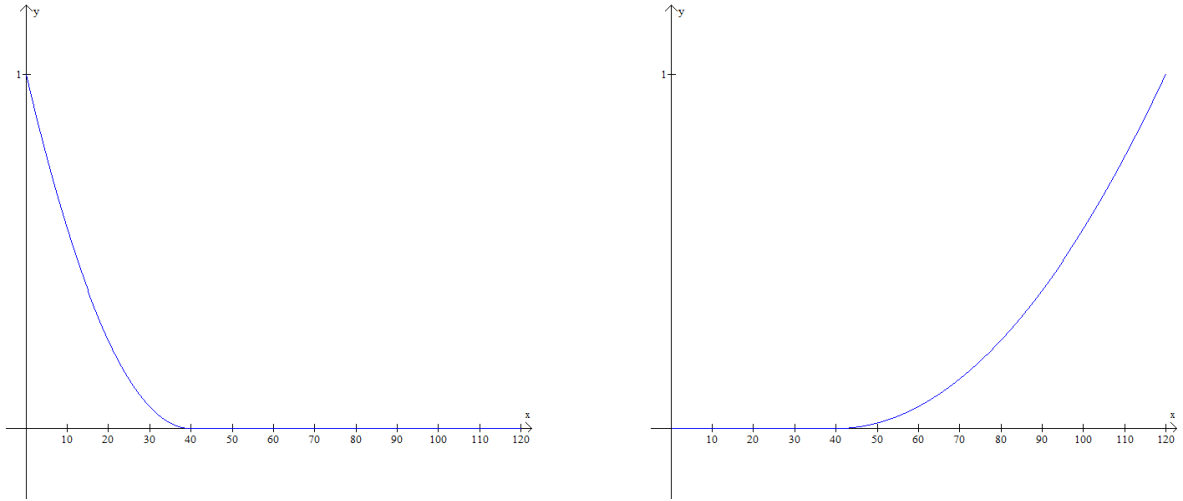


Figura 2.8: Função de pertinência para o conjunto dos jovens e dos idosos, respectivamente, do exemplo 2.7, dados por (2.3) e (2.4).

Segundo [1], esta operação de complemento permuta os graus de pertinência dos subconjuntos fuzzy J e I . Esta é a propriedade que caracteriza o complementar fuzzy, isto é, enquanto φ_A indica o grau de compatibilidade de x com o conceito em questão, $\varphi_{A'}$ expressa a incompatibilidade de x com tal conceito.

No exemplo anterior, um indivíduo que pertence ao conjunto fuzzy dos jovens J com grau 0,8, pertence também ao seu complementar I com grau 0,2. Um elemento pode pertencer a um conjunto e ao seu complementar com o mesmo grau de pertinência indicando que, quanto mais dúvida se tem da pertinência de um elemento a um conjunto, mais próximo de 0,5 é seu grau de pertinência a este conjunto.

A seguir apresentaremos algumas propriedades das operações entre subconjuntos fuzzy.

Proposição 2.1. *Sejam A , B e C conjuntos fuzzy de U . As operações de união, interseção e complementar satisfazem as seguintes propriedades:*

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}$

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$

$$(c) \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cup \mathcal{C}$$

$$(d) \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cap \mathcal{C}$$

$$(e) \mathcal{A} \cup \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$(f) \mathcal{A} \cap \mathcal{A} = \mathcal{A}$$

$$(g) \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$$

$$(h) \mathcal{A} \cap (\mathcal{B} \cup \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{C})$$

$$(i) \mathcal{A} \cap \emptyset = \emptyset \text{ e } \mathcal{A} \cup \emptyset = \mathcal{A}$$

$$(j) \mathcal{A} \cap \mathcal{U} = \mathcal{A} \text{ e } \mathcal{A} \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$$

$$(k) (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}' \text{ e } (\mathcal{A} \cap \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}' \text{ (leis de De Morgan)}$$

Faremos as demonstrações dos itens **(a)**, **(b)**, **(g)** e **(k)**. As demais são imediatas ou semelhantes às que apresentaremos.

Demonstração. Sejam φ_A e φ_B funções de pertinência dos conjuntos fuzzy \mathcal{A} e \mathcal{B} , respectivamente.

$$(a) \mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \max\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} = \mathcal{B} \cup \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

$$(b) \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \min\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\} = \min\{\varphi_B(x), \varphi_A(x)\} = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

A propriedade a seguir pode ser demonstrada considerando os possíveis casos.

$$(g) \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{C}) = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) \cap (\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$$

Essa propriedade, em termos das funções de pertinência para \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} é escrita como

$$\max[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] = \min[\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\}]. \quad (2.5)$$

A verificação da validade de (2.5) é realizada considerando 6 possíveis casos, $\forall x \in \mathcal{U}$:

1. $\varphi_A(x) > \varphi_B(x) > \varphi_C(x)$
2. $\varphi_A(x) > \varphi_C(x) > \varphi_B(x)$
3. $\varphi_B(x) > \varphi_A(x) > \varphi_C(x)$
4. $\varphi_B(x) > \varphi_C(x) > \varphi_A(x)$
5. $\varphi_C(x) > \varphi_A(x) > \varphi_B(x)$

$$6. \varphi_C(x) > \varphi_B(x) > \varphi_A(x)$$

Provemos o primeiro caso e, a partir deste, os outros casos podem ser verificados de modo análogo.

Se $\varphi_A(x) > \varphi_B(x) > \varphi_C(x)$, $\forall x \in \mathcal{U}$ temos:

$$\max[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] = \max[\varphi_A(x), \varphi_C(x)] = \varphi_A(x)$$

$$\min[\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\}] = \min[\varphi_A(x), \varphi_A(x)] = \varphi_A(x)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \max[\varphi_A(x), \min[\varphi_B(x), \varphi_C(x)]] &= \varphi_A(x) = \\ &= \min[\max\{\varphi_A(x), \varphi_B(x)\}, \max\{\varphi_A(x), \varphi_C(x)\}]. \end{aligned}$$

A demonstração de algumas propriedades como as lei de De Morgan, é uma aplicação imediata das propriedades de máximo e mínimo entre funções, isto é,

$$\begin{aligned} \max[\varphi(x), \psi(x)] &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|] \\ \min[\varphi(x), \psi(x)] &= \frac{1}{2}[\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|] \end{aligned}$$

onde, φ e ψ são funções com imagens em $[0, 1]$.

Vejam os:

$$(k) (\mathcal{A} \cup \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}' \cap \mathcal{B}'}(x) &= \min[1 - \varphi_A(x), 1 - \varphi_B(x)] \\ &= \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x)) - |(1 - \varphi_A(x)) - (1 - \varphi_B(x))|] \\ &= \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x)) - |-(\varphi_A(x) - \varphi_B(x))|] \\ &= \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|)] \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) + |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] \\ &= 1 - \max[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\ &= 1 - \varphi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}}(x) = \varphi_{(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})'}(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{U}$.

$$(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})' = \mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}' \cup \mathcal{B}'}(x) &= \max[1 - \varphi_A(x), 1 - \varphi_B(x)] \\ &= \frac{1}{2}[(1 - \varphi_A(x)) + (1 - \varphi_B(x)) + |1 - \varphi_A(x) - 1 + \varphi_B(x)|] \\ &= \frac{1}{2}[2 - (\varphi_A(x) + \varphi_B(x)) + |\varphi_B(x) - \varphi_A(x)|] \\ &= 1 - \frac{1}{2}[\varphi_A(x) + \varphi_B(x) - |\varphi_A(x) - \varphi_B(x)|] \\ &= 1 - \min[\varphi_A(x), \varphi_B(x)] \\ &= 1 - \varphi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) = \varphi_{(\mathcal{A} \cap \mathcal{B})'}(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathcal{U}$.

□

Exemplo 2.8 (Exercício 1.3 / [1]). Consideramos o subconjunto fuzzy das *peças altas* (em metros) do Brasil, definido por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,4}(x - 1,4), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,8 \\ 1, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

e das peças de estatura mediana por

$$\varphi_B(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,2}(x - 1,4), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 1, & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,1}(1,8 - x), & \text{se } 1,7 < x \leq 1,8 \\ 0, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

onde x é a altura em metros.

Conseqüentemente, temos:

$$\varphi_{A'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,4}(1,8 - x), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,8 \\ 0, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

$$\varphi_{B'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,2}(1,6 - x), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 0, & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,1}(x - 1,7), & \text{se } 1,7 < x \leq 1,8 \\ 1, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

Dadas as duas funções de pertinência φ_A e φ_B obteremos $(A \cup B)'$, $A' \cup B'$.

Através das expressões de φ_A e φ_B obtemos

$$\varphi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,2}(x - 1,4), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 1, & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,1}(1,8 - x), & \text{se } 1,7 < x \leq 1,72 \\ \frac{1}{0,4}(x - 1,4), & \text{se } 1,72 < x \leq 1,8 \\ 1, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

Calculando a função de pertinência $\varphi_{(A \cup B)'}$, onde

$$\varphi_{(A \cup B)'}(x) = 1 - \varphi_{A \cup B}(x)$$

obtemos

$$\varphi_{(A \cup B)'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,2}(-x + 1,6), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ 0, & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,1}(x - 1,7), & \text{se } 1,7 < x \leq 1,72 \\ \frac{1}{0,4}(1,8 - x), & \text{se } 1,72 < x \leq 1,8 \\ 0, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}$$

Das expressões de $\varphi_{A'}$ e $\varphi_{B'}$ obtemos

$$\varphi_{A' \cup B'}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 1,4 \\ \frac{1}{0,4}(-x + 1,8), & \text{se } 1,4 < x \leq 1,6 \\ \frac{1}{0,4}(-x + 1,8), & \text{se } 1,6 < x \leq 1,7 \\ \frac{1}{0,4}(1,8 - x), & \text{se } 1,7 < x \leq 1,72 \\ \frac{1}{0,1}(x - 1,7), & \text{se } 1,72 < x \leq 1,8 \\ 1, & \text{se } x > 1,8 \end{cases}.$$

Observe que, como era esperado, $\varphi_{(A \cup B)'} \neq \varphi_{A' \cup B'}$. Veja na Figura 2.9.

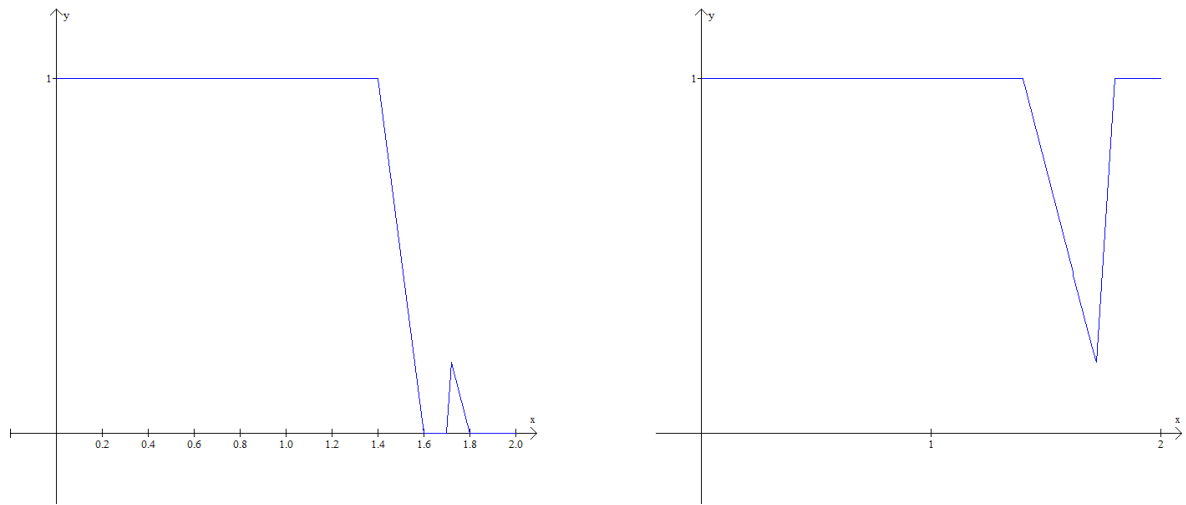


Figura 2.9: Função de pertinência para o conjunto $\varphi_{(A \cup B)'}$ e $\varphi_{A' \cup B'}$, respectivamente, do exemplo 2.8.

Nesta última seção, trataremos um pouco de uma classe especial de conjuntos clássicos que está estritamente relacionada com cada subconjunto fuzzy.

2.4 O conjunto α -nível

Um dos conceitos mais importantes envolvendo conjuntos fuzzy é o conceito de α -nível, dado a seguir.

Definição 2.7. *Seja \mathcal{A} um subconjunto fuzzy de \mathcal{U} e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de \mathcal{A} é o subconjunto clássico de \mathcal{U} definido por*

$$[\mathcal{A}]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\} \quad \text{para } 0 < \alpha \leq 1.$$

Definição 2.8. *O subconjunto clássico de \mathcal{U} definido por*

$$\text{supp}\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_{\mathcal{A}}(x) > 0\}$$

é denominado suporte de \mathcal{A} .

Visto isso, o nível zero de um subconjunto fuzzy \mathcal{A} é definido como sendo o menor subconjunto (clássico) fechado de \mathcal{U} que contém o conjunto suporte de \mathcal{A} , ou seja, $[\mathcal{A}]^0$ é o fecho do suporte de \mathcal{A} e é indicado por $\overline{\text{supp}}\mathcal{A}$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.9. Consideramos $\mathcal{U} = [0, 10]$ e o conjunto fuzzy \mathcal{A} de números reais definido pela função de pertinência $\varphi_{\mathcal{A}}(x) = \frac{x}{x+2}$ que é um ramo de hipérbole (ver Figura 2.10).

Neste caso temos: $[\mathcal{A}]^\alpha = [\frac{2\alpha}{1-\alpha}, 10]$ para $0 < \alpha < 1$ e $[\mathcal{A}]^0 = \overline{]0, 10]} = [0, 10] = \mathcal{U}$.

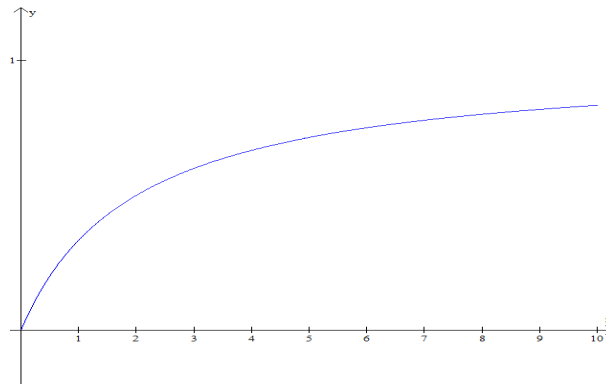


Figura 2.10: Função de pertinência para o conjunto \mathcal{A} do exemplo 2.9.

Exemplo 2.10. Sejam $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ e \mathcal{A} o subconjunto fuzzy de \mathcal{U} cuja função de pertinência é dada por $\varphi_{\mathcal{A}}(x) = 2x - x^2$ (ver figura 2.11). Então,

$$[\mathcal{A}]^\alpha = [1 - \sqrt{1 - \alpha}, 1 + \sqrt{1 - \alpha}] \text{ para todo } \alpha \in]0, 1]$$

e

$$[\mathcal{A}]^0 = [0, 2] \neq \mathcal{U}.$$

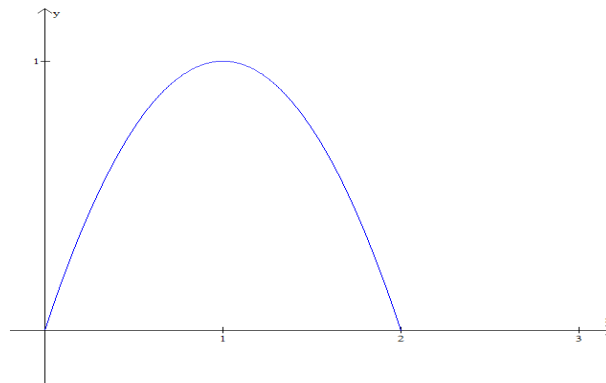


Figura 2.11: Função de pertinência para o conjunto \mathcal{A} do exemplo 2.10.

Observação 2.2. 1. Para calcularmos o α -nível de um subconjunto fuzzy \mathcal{A} qualquer, como no exemplo anterior, basta igualarmos a função de pertinência a α e calcularmos o valor de x .

2. Se x é um elemento de $[\mathcal{A}]^\alpha$, então x pertence ao conjunto fuzzy \mathcal{A} com, no mínimo, grau α . Temos também que

$$\text{se } \alpha \leq \beta \text{ então } [\mathcal{A}]^\beta \subset [\mathcal{A}]^\alpha.$$

Vejam os:

Sejam $[\mathcal{A}]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha\}$ e $[\mathcal{A}]^\beta = \{x \in \mathcal{U} : \varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \beta\}$.

Se $\alpha \leq \beta$ então se $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \beta, x \in [\mathcal{A}]^\beta \Rightarrow \varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha$, ou seja, se $x \in [\mathcal{A}]^\beta$, então $x \in [\mathcal{A}]^\alpha$ e portanto $[\mathcal{A}]^\beta \subset [\mathcal{A}]^\alpha$.

O teorema seguinte nos permite determinar o conjunto fuzzy A , conhecendo os conjuntos clássicos $[\mathcal{A}]^\alpha$.

Teorema 2.1. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} subconjuntos fuzzy de \mathcal{U} . Uma condição necessária e suficiente para que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ é que $[\mathcal{A}]^\alpha = [\mathcal{B}]^\alpha$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Demonstração. [1] É claro que $\mathcal{A} = \mathcal{B} \Rightarrow [\mathcal{A}]^\alpha = [\mathcal{B}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Suponhamos agora que $[\mathcal{A}]^\alpha = [\mathcal{B}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Se $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ então existe $x \in \mathcal{U}$ tal que $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \neq \varphi_{\mathcal{B}}(x)$. Logo, temos que $\varphi_{\mathcal{A}}(x) < \varphi_{\mathcal{B}}(x)$ ou $\varphi_{\mathcal{A}}(x) > \varphi_{\mathcal{B}}(x)$. Supondo $\varphi_{\mathcal{A}}(x) > \varphi_{\mathcal{B}}(x)$. Seja $\alpha = \varphi_{\mathcal{A}}(x)$, ou seja, $x \in [\mathcal{A}]^\alpha$. Daí podemos concluir que $x \in [\mathcal{A}]^{\varphi_{\mathcal{A}}(x)}$ e $x \notin [\mathcal{B}]^{\varphi_{\mathcal{A}}(x)}$ e, portanto, $[\mathcal{A}]^{\varphi_{\mathcal{A}}(x)} \neq [\mathcal{B}]^{\varphi_{\mathcal{A}}(x)}$, o que contradiz a hipótese $[\mathcal{A}]^\alpha = [\mathcal{B}]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. De maneira análoga chegamos a uma contradição se admitirmos que $\varphi_{\mathcal{A}}(x) < \varphi_{\mathcal{B}}(x)$. \square

Teorema 2.2. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} subconjuntos fuzzy de \mathcal{U} . Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$,*

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \text{ se e somente se } [\mathcal{A}]^\alpha \subseteq [\mathcal{B}]^\alpha.$$

Demonstração. [6] Suponhamos que existe $\alpha_0 \in [0, 1]$ tal que $[\mathcal{A}]^{\alpha_0} \not\subseteq [\mathcal{B}]^{\alpha_0}$, isto é, existe $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $x_0 \in [\mathcal{A}]^{\alpha_0}$ e $x_0 \notin [\mathcal{B}]^{\alpha_0}$. Então, $\varphi_{\mathcal{A}}(x_0) \geq \alpha_0$ e $\varphi_{\mathcal{B}}(x_0) < \alpha_0$. Assim, $\varphi_{\mathcal{B}}(x_0) < \varphi_{\mathcal{A}}(x_0)$, que contradiz $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Agora assumimos que $\mathcal{A} \not\subseteq \mathcal{B}$, isto é, existe $x_0 \in \mathcal{U}$ tal que $\varphi_{\mathcal{A}}(x_0) > \varphi_{\mathcal{B}}(x_0)$. Seja $\alpha = \varphi_{\mathcal{A}}(x_0)$ então $x_0 \in [\mathcal{A}]^\alpha$ e $x_0 \notin [\mathcal{B}]^\alpha$. Daí, $[\mathcal{B}]^\alpha \subset [\mathcal{A}]^\alpha$ que é o mesmo que $[\mathcal{A}]^\alpha \not\subseteq [\mathcal{B}]^\alpha$. Absurdo, pois $[\mathcal{A}]^\alpha \subseteq [\mathcal{B}]^\alpha$. \square

Note que no teorema que veremos a seguir usamos somente a definição de α -nível.

Teorema 2.3. *Sejam \mathcal{A} e \mathcal{B} subconjuntos fuzzy de \mathcal{U} . Então, as seguintes propriedades se mantêm para todo $\alpha, \beta \in [0, 1]$:*

(a)

$$[\mathcal{A} \cap \mathcal{B}]^\alpha = [\mathcal{A}]^\alpha \cap [\mathcal{B}]^\alpha$$

(b)

$$[\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]^\alpha = [\mathcal{A}]^\alpha \cup [\mathcal{B}]^\alpha$$

Demonstração. [6]

(a) Para qualquer $x \in [\mathcal{A} \cap \mathcal{B}]^\alpha$, temos $\varphi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) \geq \alpha$ e, $\min[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \geq \alpha$. Isto significa que $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha$ e $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha$ e assim, $x \in [\mathcal{A}]^\alpha \cap [\mathcal{B}]^\alpha$. Consequentemente, $[\mathcal{A} \cap \mathcal{B}]^\alpha \subseteq [\mathcal{A}]^\alpha \cap [\mathcal{B}]^\alpha$. Reciprocamente, para qualquer $x \in [\mathcal{A}]^\alpha \cap [\mathcal{B}]^\alpha$, temos $x \in [\mathcal{A}]^\alpha$ e $x \in [\mathcal{B}]^\alpha$, isto é, $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha$ e $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha$. Logo, $\min[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \geq \alpha$, que significa $\varphi_{\mathcal{A} \cap \mathcal{B}}(x) \geq \alpha$. Assim $x \in [\mathcal{A} \cap \mathcal{B}]^\alpha$ e, consequentemente, $[\mathcal{A}]^\alpha \cap [\mathcal{B}]^\alpha \subseteq [\mathcal{A} \cap \mathcal{B}]^\alpha$. Onde se conclui a prova que $[\mathcal{A} \cap \mathcal{B}]^\alpha = [\mathcal{A}]^\alpha \cap [\mathcal{B}]^\alpha$.

(b) Para qualquer $x \in [\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]^\alpha$, temos $\max[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \geq \alpha$ e, $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha$. Isto implica que $x \in [\mathcal{A}]^\alpha \cup [\mathcal{B}]^\alpha$ e, consequentemente, $[\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]^\alpha \subseteq [\mathcal{A}]^\alpha \cup [\mathcal{B}]^\alpha$. Reciprocamente, para qualquer $x \in [\mathcal{A}]^\alpha \cup [\mathcal{B}]^\alpha$, temos $x \in [\mathcal{A}]^\alpha$ ou $x \in [\mathcal{B}]^\alpha$, isto é, $\varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha$ ou $\varphi_{\mathcal{B}}(x) \geq \alpha$. Logo, $\max[\varphi_{\mathcal{A}}(x), \varphi_{\mathcal{B}}(x)] \geq \alpha$, que significa que $\varphi_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \geq \alpha$. E isto implica que $x \in [\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]^\alpha$ e, consequentemente, $[\mathcal{A}]^\alpha \cup [\mathcal{B}]^\alpha \subseteq [\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]^\alpha$. Onde se conclui a prova que $[\mathcal{A} \cup \mathcal{B}]^\alpha = [\mathcal{A}]^\alpha \cup [\mathcal{B}]^\alpha$.

□

Para concluir esta seção, vamos introduzir uma notação especial que é frequentemente usada na definição de conjuntos fuzzy e depois finalizamos com um exemplo desta notação.

Dado um subconjunto fuzzy \mathcal{A} definido em um conjunto \mathcal{U} qualquer. É comum descrevermos \mathcal{A} como:

$$\mathcal{A} = \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_2)}{x_2} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_i)}{x_i},$$

quando \mathcal{A} tem suporte enumerável, e

$$\mathcal{A} = \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_1)}{x_1} + \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_2)}{x_2} + \dots + \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_n)}{x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_i)}{x_i},$$

se \mathcal{A} tem suporte finito, ou seja, $\mathcal{A} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

Note que $\frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_i)}{x_i}$ não é uma divisão e sim uma forma de visualizar o elemento x_i e o seu respectivo grau de pertinência $\varphi_{\mathcal{A}}(x_i)$. O “somatório” também é somente uma notação para exibir todos os elementos de \mathcal{A} e seus respectivos graus de pertinência.

Exemplo 2.11. Seja \mathcal{A} um subconjunto fuzzy finito de $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ representado por

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^6 \frac{\varphi_{\mathcal{A}}(x_i)}{x_i} = \frac{1}{20} + \frac{0,86}{22} + \frac{0,66}{25} + \frac{0,4}{29} + \frac{0,2}{32} + \frac{0,06}{34}.$$

Seu complementar é

$$\mathcal{A}' = \sum_{i=1}^6 \frac{1 - \varphi_A(x_i)}{x_i} = \frac{0}{20} + \frac{0,14}{22} + \frac{0,34}{25} + \frac{0,6}{29} + \frac{0,8}{32} + \frac{0,94}{34}.$$

Sendo assim, por exemplo,

$$[\mathcal{A}]^{0,20} = \{20, 22, 25, 29, 32\}$$

e o 0,20-nível de \mathcal{A}' é

$$[\mathcal{A}']^{0,20} = \{25, 29, 32, 34\}.$$

No próximo capítulo apresentaremos o Princípio da Extensão de Zadeh e trataremos do conceito de número fuzzy, com alguns exemplos.

3 Princípio de Extensão e Números Fuzzy

Neste capítulo apresentaremos o princípio de extensão para conjuntos fuzzy que é um método utilizado para estender operações dos conjuntos clássicos. Veremos também os números fuzzy que nos permitem quantificar termos linguísticos e dar um tratamento matemático aos mesmos.

3.1 O Princípio de Extensão

O princípio de extensão proposto por Zadeh é um método utilizado para estender conceitos matemáticos *não fuzzy* em *fuzzy* [1]. O princípio afirma que se aplicarmos $f : X \rightarrow Z$ em um subconjunto fuzzy A de X , o conjunto imagem também será fuzzy e caracteriza a sua função de pertinência.

Definição 3.1. [*Princípio de Extensão de Zadeh*] Sejam f uma função tal que $f : X \rightarrow Z$ e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que aplicada a A , fornece o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \varphi_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases}$$

onde $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ denomina-se a pré-imagem de z . A figura 3.1 ilustra tal princípio.

Observação 3.1. 1. Se A é um subconjunto fuzzy de X , com função de pertinência φ_A , e se f é bijetora então, a função de pertinência de $\hat{f}(A)$ é

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x:f(x)=z\}} \varphi_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \varphi_A(x) = \varphi_A(f^{-1}(z)).$$

Observamos que $z = f(x)$ pertence ao subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, com o mesmo grau α com que x pertence a A . Isto pode não ocorrer se f não for injetora.

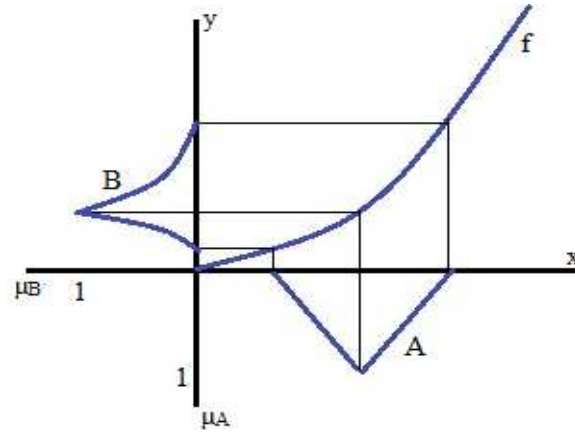


Figura 3.1: Ilustração do Princípio de extensão.

2. Seja $f : X \rightarrow Z$ uma função injetora e A um subconjunto fuzzy de X , enumerável (ou finito), dado por

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_A(x_i)}{x_i}.$$

Então, o Princípio de Extensão garante que $\hat{f}(A)$ é um subconjunto fuzzy de Z , dado por

$$\hat{f}(A) = \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_A(x_i)}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_A(x_i)}{f(x_i)}.$$

Portanto, a imagem de A por f pode ser deduzida do conhecimento das imagens de x_i por f . O grau de pertinência de $z_i = f(x_i)$ em $\hat{f}(A)$ é o mesmo de x_i em A .

Exemplo 3.1. Seja A um subconjunto fuzzy definido em $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10\}$ com função de pertinência $\varphi_A(x) = \frac{1}{1+10x}$. Tomando $f(x) = x^2$ para todo $x \in X$, calculemos $\hat{f}(A)$ e o grau de pertinência para $z = 4$.

Como f é uma função injetora em X e A é um subconjunto fuzzy finito dado por $A = \sum_{i=1}^{11} \frac{\varphi_A(x_i)}{x_i}$, temos

$$\begin{aligned} \hat{f}(A) &= \hat{f}\left(\sum_{i=1}^{11} \frac{\varphi_A(x_i)}{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{11} \frac{\varphi_A(x_i)}{f(x_i)} = \sum_{i=1}^{11} \frac{\varphi_A(x_i)}{x_i^2} = \\ &= \frac{1}{0} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \frac{1}{81} + \frac{1}{100} = \\ &= \frac{1}{0} + \frac{0,09}{1} + \frac{0,05}{4} + \frac{0,03}{9} + \frac{0,02}{16} + \frac{0,01}{25} + \frac{0,0163}{36} + \frac{0,0140}{49} + \frac{0,0123}{64} + \frac{0,0109}{81} + \frac{0,0099}{100}. \end{aligned}$$

Como $f : X \rightarrow [0, \infty)$ é bijetora, então

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(4) = \sup_{\{x:f(x)=4\}} \varphi_A(x) = \varphi_A(f^{-1}(4)) = \varphi_A(2) = \frac{1}{21}.$$

Assim, o grau de pertinência para $z = 4$ é $\frac{1}{21}$.

Exemplo 3.2. [8] Seja \mathcal{A} o conjunto fuzzy dos números reais ‘próximo de 2’ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{se } x \notin (1, 3) \end{cases}$$

Então a extensão de Zadeh da $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ é dada por

$$\hat{f}(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1],$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{f}(\mathcal{A})}(y) &= \sup\{\varphi(x) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 = y\} \\ &= \begin{cases} \sqrt{y} - 1, & \text{se } 1 \leq y \leq 4 \\ 3 - \sqrt{y}, & \text{se } 4 \leq y \leq 9 \\ 0, & \text{se } y \notin (1, 9) \end{cases} \end{aligned}$$

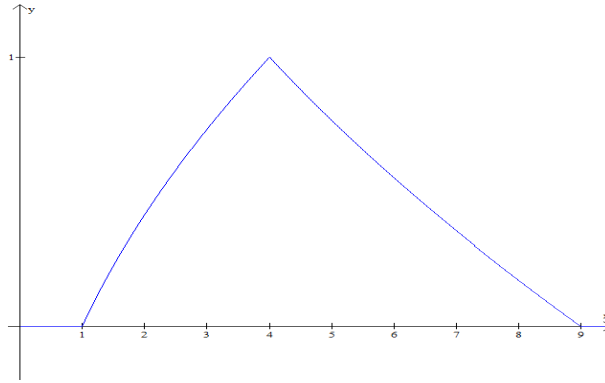


Figura 3.2: Gráfico de $\varphi_{\hat{f}(\mathcal{A})}$ do exemplo 3.2.

Teorema 3.1. *Sejam $f : X \rightarrow Y$ uma função e A um subconjunto fuzzy de X . Então,*

- a) $\forall \alpha \in (0, 1] \quad [\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha),$
- b) $\forall \alpha \in [0, 1] \quad [\hat{f}(A)]^\alpha \supseteq f([A]^\alpha).$

Demonstração. a)

Por definição, $y \in [\hat{f}(A)]^\alpha, y \in Y$, se e somente, se $\varphi_{\hat{f}(A)}(y) \geq \alpha$.

$$\begin{aligned} \text{Assim, } y \in [\hat{f}(A)]^\alpha &\Leftrightarrow \sup_{\{x: y=f(x)\}} \varphi_{\mathcal{A}}(x) \geq \alpha \\ &\Leftrightarrow (\exists x_0 \in X)(y = f(x_0) \text{ e } \varphi_{\mathcal{A}}(x_0) \geq \alpha) \\ &\Leftrightarrow (\exists x_0 \in X)(y = f(x_0) \text{ e } x_0 \in [A]^\alpha) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y \in f([A]^\alpha)$$

Portanto, $[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$.

b) Se $y \in f([A]^\alpha)$, então $\exists x_0 \in [A]^\alpha$ tal que $f(x_0) = y$. Logo,

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(y) = \sup_{\{x: f(x)=y\}} \varphi_A(x) \geq \varphi_A(x_0) \geq \alpha \text{ e consequentemente,}$$

$$y \in [\hat{f}(A)]^\alpha. \text{ Portanto, } f([A]^\alpha) \subseteq [\hat{f}(A)]^\alpha. \quad \square$$

Note que o teorema anterior nos mostra que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem (pelo item (a)) para $\alpha \in (0, 1]$ ou contém (pelo item (b)) para $\alpha \in [0, 1]$ com as imagens dos α -níveis pela função crisp.

Agora veremos quais são as exigências para que a igualdade ocorra no item (b).

Teorema 3.2. *Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X . Então, para todo $\alpha \in [0, 1]$ vale*

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

Este último resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função crisp, quando a função é contínua e $\alpha \in [0, 1]$.

Observação 3.2. 1. Temos, pelo Princípio de Extensão que a função de pertinência do conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$, onde A é um subconjunto clássico, coincide com a função característica do conjunto crisp $f(A)$, isto é, o conjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ coincide com o conjunto clássico $f(A)$:

$$\hat{f}(A) = f(A) = \{f(a) : a \in A\}.$$

2. Se A for um conjunto clássico então, $[A]^\alpha = A$ para todo $\alpha \in (0, 1]$. Consequentemente,

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = [f(A)]^\alpha = f(A) = f([A]^\alpha).$$

3. [6] Vejamos que a igualdade $[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, nem sempre é verdadeira, onde A é um subconjunto fuzzy de X .

Seja $X = \mathbb{N}$, $Y = \{a, b\}$

$$f(n) = \begin{cases} a, & \text{se } n \leq 10 \\ b, & \text{se } n > 10 \end{cases},$$

e

$$\varphi_A(n) = 1 - \frac{1}{n},$$

para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Então,

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(a) = \sup_{n|a=f(n)} \varphi_A(n) = \frac{9}{10} \quad (n \leq 10),$$

$$\varphi_{\hat{f}(A)}(b) = \sup_{n|b=f(n)} \varphi_A(n) = 1.$$

Tomando $\alpha = 1$, podemos ver que $[\hat{f}(A)]^1 = \{b\}$ enquanto $f([A]^1) = \emptyset$ (desde $[A]^1 = \emptyset$). Portanto, $[\hat{f}(A)]^\alpha \neq f([A]^\alpha)$ para este caso.

Exemplo 3.3. Considere o subconjunto fuzzy A de números reais cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & \text{se } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{se } x \notin (0, 2) \end{cases}.$$

Os α -níveis de A são os intervalos

$$[A]^\alpha = [1 - \sqrt{1 - \alpha}, 1 + \sqrt{1 - \alpha}].$$

Consideremos a função real $f(x) = x^3$ para $x \geq 0$. Como f é crescente (contínua), temos

$$\begin{aligned} f([A]^\alpha) &= [f(1 - \sqrt{1 - \alpha}), f(1 + \sqrt{1 - \alpha})] \\ &= [(1 - \sqrt{1 - \alpha})^3, (1 + \sqrt{1 - \alpha})^3] \\ &= [\hat{f}(A)]^\alpha \end{aligned}$$

Calculando $[\hat{f}(A)]^\alpha$ para $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ e para $\alpha = 0.5$, teremos $[\hat{f}(A)]^0 = [0, 2]$, $[\hat{f}(A)]^1 = \{1\}$ e $[\hat{f}(A)]^{0.5} = [0.29, 1.71]$.

Agora veremos o Princípio de Extensão para funções com duas variáveis.

Definição 3.2. *Sejam $f : X \times Y \rightarrow Z$ e, A e B subconjuntos fuzzy de X e Y , respectivamente. A extensão \hat{f} de f , aplicada a A e B , é o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A, B)$ de Z , cuja função de pertinência é dada por:*

$$\varphi_{\hat{f}(A,B)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)], & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

onde $f^{-1}(z) = \{(x, y) : f(x, y) = z\}$.

Exemplo 3.4. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função dada por $f(x, y) = 2x + y$. Considere os subconjuntos fuzzy finitos de \mathbb{R}

$$\begin{aligned} A &= \frac{0,4}{3} + \frac{0,5}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0,5}{6} + \frac{0,2}{7} \\ B &= \frac{0,2}{6} + \frac{0,5}{7} + \frac{1}{8} + \frac{0,5}{9} + \frac{0,2}{10} \end{aligned}$$

Vamos determinar o grau de pertinência de $z = 18$ em $\hat{f}(A, B)$:

$$\begin{aligned} \varphi_{\hat{f}(A,B)}(18) &= \sup_{\{2x+y=18\}} \min[\varphi_A(x), \varphi_B(y)] = \\ &= \max\{\min[\varphi_A(4), \varphi_B(10)], \min[\varphi_A(5), \varphi_B(8)], \min[\varphi_A(6), \varphi_B(6)]\} = \\ &= \max\{0, 2; 1; 0, 2\} = 1. \end{aligned}$$

Nesta próxima seção veremos a definição de número fuzzy.

3.2 Números Fuzzy

Entre os vários tipos de conjuntos fuzzy, em especial trataremos nesta seção de conjuntos fuzzy que estão definidos em \mathbb{R} , ou seja, as funções de pertinência são definidas da seguinte forma:

$$\varphi_A(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1].$$

Definição 3.3 (Número Fuzzy). *Um subconjunto fuzzy A é chamado de número fuzzy quando o conjunto universo no qual φ_A está definida, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e satisfaz às condições:*

1. $[A]^\alpha \neq \emptyset, \forall \alpha \in [0, 1]$
2. $[A]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in [0, 1]$
3. O suporte de A , $\text{supp } A = \{x \in \mathbb{R} : \varphi_A(x) > 0\}$, é limitado.

Exemplo 3.5. Observe que o conjunto fuzzy A cuja função de pertinência $\varphi_A(x) : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ que é dada na figura 3.3 é um exemplo de um NÃO número fuzzy pois, como é possível observar, o suporte não é limitado, ou seja, não satisfaz o terceiro item da definição de número fuzzy.

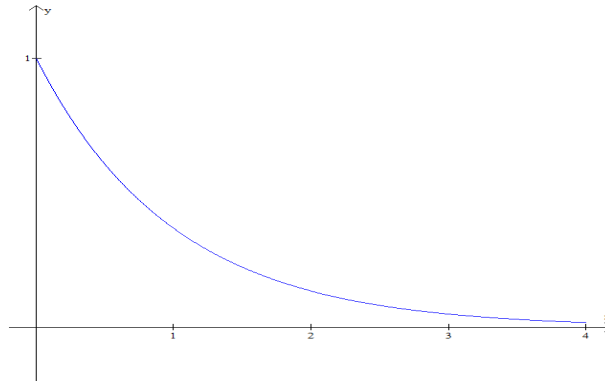


Figura 3.3: Função de pertinência φ_A para o conjunto do exemplo 3.5.

Observação 3.3. 1. Vamos denotar os α -níveis do número fuzzy A por

$$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha].$$

2. Todo número real r é um número fuzzy particular cuja função de pertinência é a sua função característica:

$$X_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = r \\ 0, & \text{se } x \neq r \end{cases}.$$

3. Notemos que o suporte limitado de um número fuzzy e todos os seus α -níveis devem ser intervalos fechados para podermos definir operações aritméticas com números fuzzy em termos de operações aritméticas em intervalos fechados.

Exemplo 3.6. Neste exemplo veremos casos especiais de números fuzzy incluindo números reais e intervalos de números reais que são ilustrados na Figura 3.4: (a) O número real 2,2 e (b) O intervalo clássico fechado $[2,15; 2,35]$. Na Figura 3.5 podemos ver um número fuzzy expressando “próximo de 2,2” na forma triangular e um número fuzzy “próximo de 2,2” na forma trapezoidal.

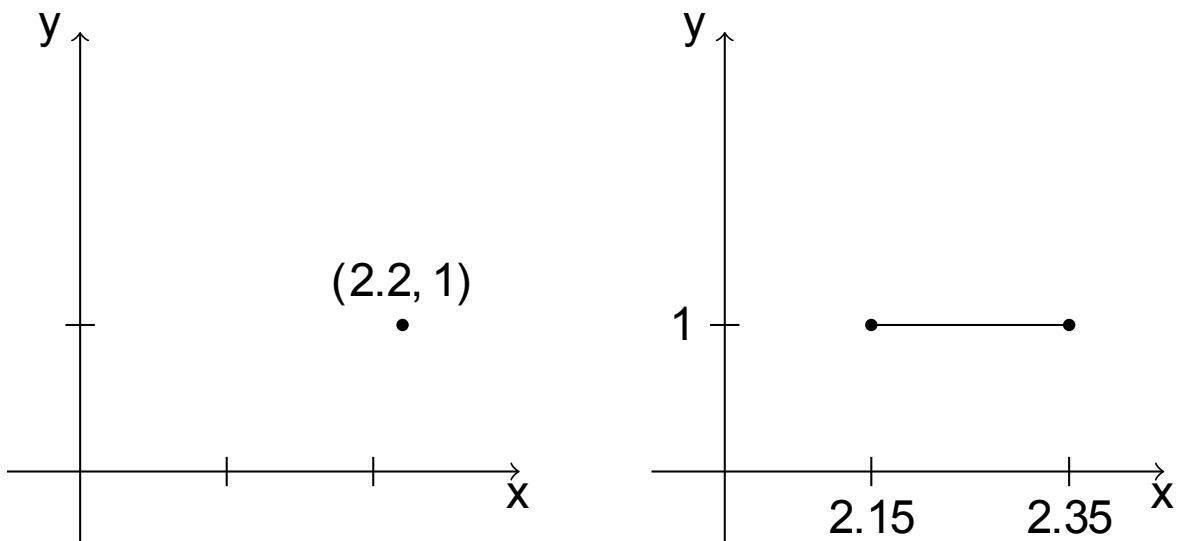


Figura 3.4: O número real 2,2 e o intervalo fechado $[2,15; 2,35]$, respectivamente, do exemplo 3.6.

Os números fuzzy mais comuns são os *triangulares*, os *trapezoidais* e os em forma de *sino*. Apesar dessas três formas serem as mais usadas para representar números fuzzy, outras formas podem ser preferencialmente usadas em algumas aplicações. Veja Figura 3.6.

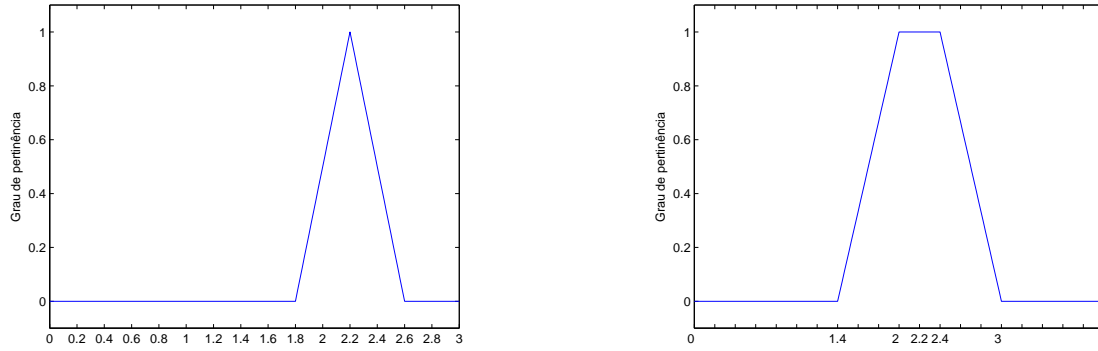


Figura 3.5: O número fuzzy “próximo de 2,2” na forma triangular e na forma trapezoidal, respectivamente, do exemplo 3.6.

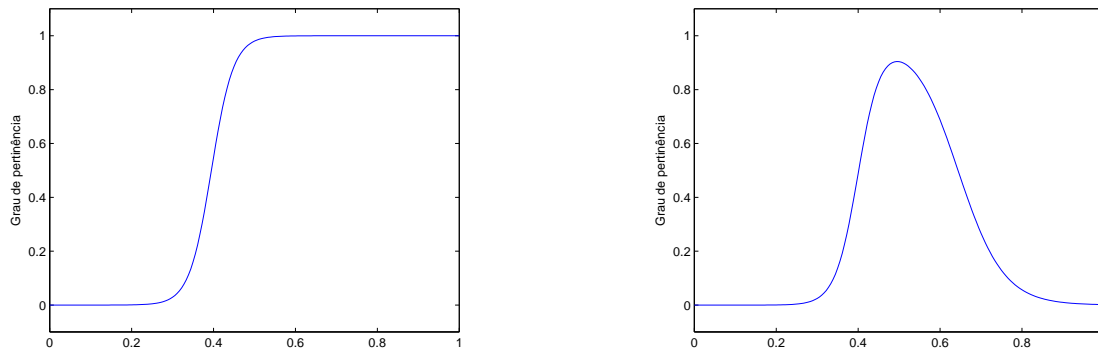


Figura 3.6: Exemplos de números fuzzy.

Definição 3.4. Um número fuzzy A é dito **triangular** se sua função de pertinência é da forma

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{u-a}, & \text{se } a \leq x < u \\ \frac{x-b}{u-b}, & \text{se } u \leq x < b \\ 0, & \text{se } x \geq b \end{cases}.$$

O gráfico de uma função de pertinência de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo $[a, b]$ e como único vértice fora desta base o ponto $(u, 1)$, como mostra a figura 3.7.

Deste modo, os números reais a , u e b definem o número fuzzy triangular A que aqui será denotado pela terna ordenada (a, u, b) .

Observação 3.4. 1. Os α -níveis desses números fuzzy podem ser escritos na forma

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(u - a)\alpha + a, (u - b)\alpha + b],$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, ou seja, usando as expressões de $\varphi_A(x)$, obtém-se os extremos a_1^α e a_2^α . Resolvendo a equação, os α -níveis desses números fuzzy são calculados

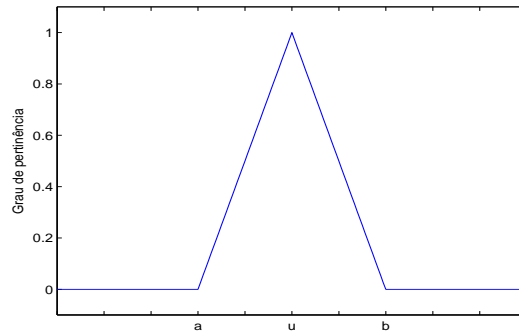


Figura 3.7: Número fuzzy triangular da definição 3.4.

de forma que a_1^α é obtido fazendo $\frac{x-a}{u-a} = \alpha$. Isolando x , teremos $x = \alpha(u - a) + a$. E o outro extremo do intervalo é obtido fazendo $\frac{x-b}{u-b} = \alpha$.

2. Notemos que o conjunto fuzzy da definição 3.4 não é necessariamente simétrico, uma vez que $u - a$ pode ser diferente de $b - u$, mas $\varphi_A(u) = 1$ sempre. Para a expressão “em torno de u ” espera-se uma simetria. A imposição da simetria acarreta uma simplificação na definição de número fuzzy triangular.

Exemplo 3.7. O número fuzzy triangular A “por volta dos 9 metros” pode ser descrito pela função de pertinência dada por:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 7 \\ \frac{x-7}{2}, & \text{se } 7 \leq x < 9 \\ \frac{11-x}{2}, & \text{se } 9 \leq x < 11 \\ 0, & \text{se } x \geq 11 \end{cases}$$

que está representado na Figura 3.8.

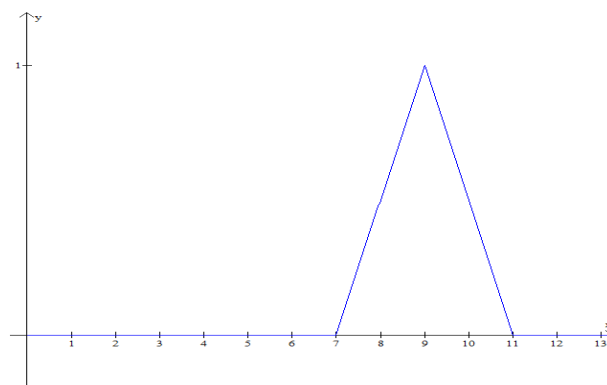


Figura 3.8: Função de pertinência φ_A para o conjunto do exemplo 3.7.

Notemos que neste exemplo o número fuzzy A “por volta dos 9 metros” é um número fuzzy simétrico. E os α -níveis desse subconjunto fuzzy triangular são os intervalos

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [2\alpha + 7, -2\alpha + 11].$$

Definição 3.5. Um número fuzzy A é dito **trapezoidal** se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

para $a < b < c < d$.

Notemos que os números reais a, b, c, d definem o número fuzzy trapezoidal A como mostra a Figura 3.9.

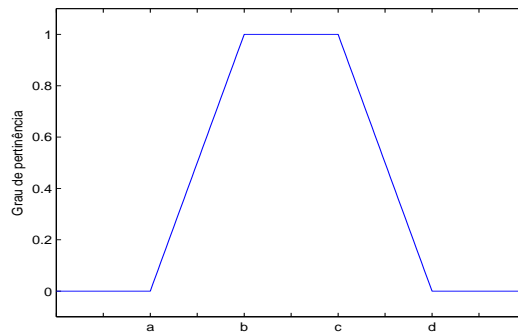


Figura 3.9: Número fuzzy trapezoidal da definição 3.5.

Deste modo, o número fuzzy trapezoidal A será denotado pela quadra ordenada (a, b, c, d) .

Observação 3.5. Os α -níveis de números fuzzy trapezoidais podem ser escritos na forma

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = [(b-a)\alpha + a, (c-d)\alpha + d]$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$, que são calculados da mesma forma que os triangulares, ou seja, igualamos $\frac{x-a}{b-a} = \alpha$ e, isolando x , obtemos $(b-a)\alpha + a = a_1^\alpha$. De maneira análoga fazemos para o outro extremo do intervalo.

Exemplo 3.8. Seja A o conjunto fuzzy que descreve quão jovem é uma pessoa, em função da sua idade. Será representado por um número fuzzy trapezoidal, cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \frac{x-18}{3}, & \text{se } 18 \leq x < 21 \\ 1, & \text{se } 21 \leq x \leq 24 \\ \frac{27-x}{3}, & \text{se } 24 < x \leq 27 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

que está representado na Figura 3.10.

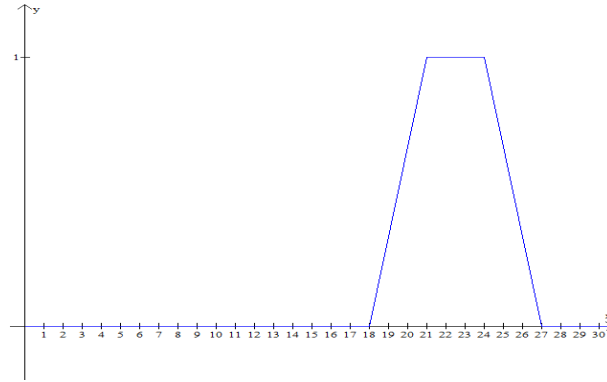


Figura 3.10: Função de pertinência φ_A para o conjunto do exemplo 3.8.

Os α -níveis para este exemplo são

$$[A]^\alpha = [3\alpha + 18, -3\alpha + 27], \quad \text{para } \alpha \in [0, 1].$$

Definição 3.6. [1] Um número fuzzy tem forma de **sino** se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real u . A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para u , a e δ dados.

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} \exp(-(\frac{x-u}{a})^2), & \text{se } u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

A Figura 3.11 ilustra este caso.

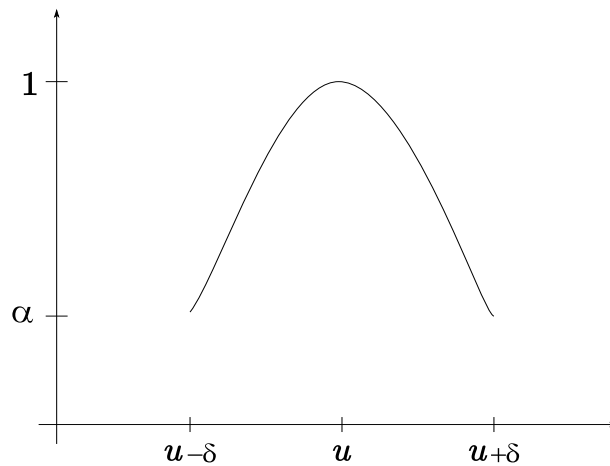


Figura 3.11: Número fuzzy “em forma de sino” da definição 3.6.

Os α -níveis dos números fuzzy em forma de sino são os intervalos:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} \left[u - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha a^2}\right)}, u + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha a^2}\right)} \right], & \text{se } \alpha \geq \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \\ (u - \delta, u + \delta), & \text{se } \alpha < \bar{\alpha} = e^{-\left(\frac{\delta}{a}\right)^2} \end{cases},$$

que são calculados da mesma forma que os anteriores, ou seja, igualamos $\varphi_A(x) = \exp(-(\frac{x-u}{a})^2) = \alpha$, aplicamos \ln em ambos os lados, assim teremos $\ln \alpha = -\frac{(x-u)^2}{a^2}$ e, isolando x obtemos $x = u \pm \sqrt{\ln \alpha^{-\alpha^2}} = u \pm \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha a^2}\right)}$.

É imediato que $\varphi_A(x) > \alpha$ se $\alpha < -(\frac{\delta}{a})^2$.

Após a apresentação de alguns conceitos preliminares, trataremos a seguir de algumas noções de lógica fuzzy aliadas ao estudo de relações fuzzy.

4 Noções básicas da Lógica Fuzzy

Lógica é o estudo dos métodos e princípios de raciocínio em todas as formas possíveis. A lógica clássica trata de proposições que são verdadeiras ou falsas. Cada proposição tem o seu oposto que é, em geral, chamado de negação. Uma proposição e sua negação assumem valores opostos.

A principal diferença entre a proposição clássica e a proposição fuzzy é a variedade dos seus valores verdades. Enquanto a proposição clássica só assume os valores verdadeiro ou falso (lógica bivalente), a proposição fuzzy é uma questão de grau. Na lógica clássica a verdade e a falsidade assumem os valores 1 e 0, respectivamente. No entanto, a lógica fuzzy atribui valores no intervalo $[0, 1]$.

A lógica fuzzy é utilizada na literatura de duas formas: a primeira para representar e manipular informações inexatas com o propósito de tomar decisões, lançando mão da teoria dos conjuntos fuzzy, suas funções de pertinência e sua álgebra em geral. A segunda refere-se à extensão da lógica clássica.

Antes de tratarmos da lógica fuzzy, veremos alguns conceitos da lógica tradicional que servirá como base para um bom entendimento da lógica fuzzy.

4.1 Conectivos básicos da Lógica Clássica

Observe a seguinte sentença:

$$\textit{Se } x \textit{ está em } A \textit{ e } y \textit{ está em } B \textit{ então } z \textit{ está em } C \textit{ ou } w \textit{ não está em } D. \quad (4.1)$$

Para traduzirmos matematicamente esta sentença, será necessário o uso dos conectivos “e”, “ou”, “se...então”. Cada conectivo assume um valor lógico que é representado por meio das tabelas verdades. O valor lógico de cada sentença é formado por duas ou mais proposições e é obtido por meio de composição das tabelas verdades dos conectivos presentes nesta sentença.

Se p e q são duas proposições, as tabelas verdades para os conectivos lógicos possuem somente os valores 0 e 1 e é por isso que a lógica clássica é também chamada de *lógica a dois valores*.

Temos que os conectivos lógicos citados anteriormente podem ser vistos como operadores matemáticos. Vejamos então os conectivos “e”, “ou” e “se...então”, que são

operações binárias, com exceção da negação.

- Conectivo **e**: \wedge

$$\begin{aligned}\wedge : \{0, 1\} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (p, q) &\longrightarrow \wedge(p, q) = p \wedge q = \min\{p, q\}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\wedge(1, 1) &= 1 \wedge 1 = 1; \\ \wedge(1, 0) &= 1 \wedge 0 = 0; \\ \wedge(0, 1) &= 0 \wedge 1 = 0; \\ \wedge(0, 0) &= 0 \wedge 0 = 0.\end{aligned}$$

- Conectivo **ou**: \vee

$$\begin{aligned}\vee : \{0, 1\} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (p, q) &\longrightarrow \vee(p, q) = p \vee q = \max\{p, q\}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\vee(1, 1) &= 1 \vee 1 = 1; \\ \vee(1, 0) &= 1 \vee 0 = 1; \\ \vee(0, 1) &= 0 \vee 1 = 1; \\ \vee(0, 0) &= 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

- Implicação: \implies

$$\begin{aligned}\implies : \{0, 1\} \times \{0, 1\} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ (p, q) &\longrightarrow \implies(p, q) = (p \implies q).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\implies(1, 1) &= (1 \implies 1) = 1; \\ \implies(1, 0) &= (1 \implies 0) = 0; \\ \implies(0, 1) &= (0 \implies 1) = 1; \\ \implies(0, 0) &= (0 \implies 0) = 1.\end{aligned}$$

- A **negação** pode ser considerada como uma operação unária: \neg

$$\begin{aligned}\neg : \{0, 1\} &\longrightarrow \{0, 1\} \\ p &\longrightarrow \neg p,\end{aligned}$$

onde, $\neg 1 = 0$ e $\neg 0 = 1$. É interessante notar que $\neg p = 1 - p$.

Vamos agora obter o valor lógico da sentença (4.1) por meio dos valores lógicos dos conectivos.

Exemplo 4.1. Voltemos a sentença:

$$\underbrace{\text{Se } x \text{ está em } A}_{p} \text{ e } \underbrace{y \text{ está em } B}_{q} \text{ então } \underbrace{z \text{ está em } C}_{r} \text{ ou } \underbrace{w \text{ não está em } D}_{s}.$$

Os valores de cada uma das expressões p , q , r e s podem ser apenas 0 ou 1, dependendo da pertinência ou não ao conjunto indicado.

Por exemplo, $p = 1$ se x está em A e $p = 0$ se x não está em A . Analogamente, temos os valores de q , r e s .

Então, avaliemos a sentença (4.1) para cada situação:

$x \in A$ ($p=1$); $y \in B$ ($q=1$); $z \in C$ ($r=1$); $w \notin D$ ($s=0$).

Logo, o valor lógico dessa sentença será

$(1 \wedge 1) \implies (1 \vee 0) = (1 \implies 1) = 1.$

Portanto, o valor lógico da sentença (4.1) é 1.

Os valores lógicos 0 e 1 coincidem com o valor obtido da função característica. Na lógica fuzzy esses valores serão os graus de pertinência que cada proposição tem em seu determinado conjunto fuzzy e, para realizar a avaliação lógica dos conectivos no sentido fuzzy é necessário estender os conectivos da lógica clássica através dos conceitos de t-normas, t-conormas e outros que serão apresentados a seguir.

4.2 Conectivos básicos da Lógica Fuzzy

Considere a seguinte afirmação:

“Se o mamão está alaranjado então ele está maduro”. (4.2)

Nesta afirmação, entre outras situações do dia-dia, usamos termos subjetivos como uma tentativa de transmitir uma determinada informação. Em nosso exemplo, “alaranjado” e “maduro” são termos subjetivos que podem ser modelados por conjuntos fuzzy.

Vejamos então os conectivos lógicos fuzzy que nada mais são do que extensões da lógica clássica. As definições aqui apresentadas são baseadas em [1].

4.2.1 T-Norma

Sejam A e B dois conjuntos clássicos. A expressão “ x está em A e x está em B ” nos diz que x está na interseção de A com B . Logo, o conectivo “e”, na teoria de conjuntos clássica, é a interseção de conjuntos. Sendo assim, se estendermos para a teoria fuzzy, o conectivo “e” será a interseção de dois conjuntos fuzzy, que na lógica fuzzy será definida pela operação *t-norma*.

Definição 4.1. (*t-norma*). O operador $\Delta : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $\Delta(x, y) = x \Delta y$, é uma **t-norma**, se satisfizer as seguintes condições:

- t_1) Elemento Neutro: $\Delta(1, x) = 1 \Delta x = x$;
- t_2) Comutativa: $\Delta(x, y) = x \Delta y = y \Delta x = \Delta(y, x)$;
- t_3) Associativa: $x \Delta (y \Delta z) = (x \Delta y) \Delta z$;
- t_4) Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \Delta y \leq u \Delta v$.

A operação t-norma estende o operador \wedge que define o conectivo “e”.

Exemplo 4.2. O operador $\Delta(x, y) = xy$ é uma t-norma pois

- t_1) Elemento Neutro: $\Delta(1, x) = 1 \cdot x = x$;
- t_2) Comutativa: $\Delta(x, y) = x \cdot y = y \cdot x = \Delta(y, x)$;
- t_3) Associativa: $x \Delta (y \Delta z) = x \Delta (y \cdot z) = x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z = (x \cdot y) \Delta z = (x \Delta y) \Delta z$;
- t_4) Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$ então, $xy \leq uy$ e $uy \leq uv$. Assim, $xy \leq uy \leq uv$ então, $x \Delta y \leq u \Delta v$.

4.2.2 T-Conorma

Sejam A e B dois conjuntos clássicos. A expressão “ x está em A ou x está em B ” nos diz que x está na união de A com B . Logo, o conectivo “ou”, na teoria de conjuntos clássica, é a união de conjuntos. Sendo assim, se estendermos para a teoria fuzzy, o conectivo “ou” será a união de dois conjuntos fuzzy que na lógica fuzzy será definido pela operação *t-conorma*.

Definição 4.2. (*t-conorma*). O operador $\nabla(x, y) = x \nabla y$ é uma **t-conorma** se satisfizer as seguintes condições:

- c_1) Elemento Neutro: $\nabla(0, x) = 0 \nabla x = x$;
- c_2) Comutativa: $\nabla(x, y) = x \nabla y = y \nabla x = \nabla(y, x)$;
- c_3) Associativa: $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$;
- c_4) Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \nabla y \leq u \nabla v$.

A operação t-conorma estende o operador \vee que modela o conectivo “ou”.

Exemplo 4.3. O operador $\nabla(x, y) = \max\{x, y\}$ é uma t-conorma pois

- c_1) Elemento Neutro: $\nabla(0, x) = \max\{0, x\} = x$;

c_2) Comutativa: $\nabla(x, y) = \max\{x, y\} = \max\{y, x\} = \nabla(y, x)$;

c_3) Associativa: $x \nabla (y \nabla z) = \max\{x, \max\{y, z\}\} =$

$$= \begin{cases} \max\{x, y\}, & \text{se } y \geq z = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y \geq z; \\ y, & \text{se } x < y \text{ e } y \geq z; \end{cases} \\ \max\{x, z\}, & \text{se } y < z = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq z > y; \\ z, & \text{se } x < z \text{ e } z > y. \end{cases} \end{cases}$$

Assim,

$$x \nabla (y \nabla z) = \begin{cases} z, & \text{se } x < z \text{ e } z > y \\ x, & \text{se } x \geq y \geq z \text{ ou } x \geq z > y \\ y, & \text{se } x < y \text{ e } y \geq z \end{cases} .$$

Por outro lado,

$$(x \nabla y) \nabla z = \max\{\max\{x, y\}, z\} =$$

$$= \begin{cases} \max\{x, z\}, & \text{se } x \geq y = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq z \text{ e } x \geq y; \\ z, & \text{se } z > x \geq y; \end{cases} \\ \max\{y, z\}, & \text{se } x < y = \begin{cases} y, & \text{se } y \geq z \text{ e } x < y; \\ z, & \text{se } z > y > x; \end{cases} \end{cases}$$

$$(x \nabla y) \nabla z = \begin{cases} z, & \text{se } z > x \geq y \text{ ou } z > y \geq x \\ x, & \text{se } x \geq z \text{ e } x \geq y \\ y, & \text{se } x < y \text{ e } y \geq z \end{cases}$$

Logo, $x \nabla (y \nabla z) = (x \nabla y) \nabla z$.

c_4) Monotonicidade: Se $x \leq u$ e $y \leq v$, então $x \nabla y \leq u \nabla v$.

$$x \nabla y = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y \\ y, & \text{se } x < y \end{cases} = \begin{cases} x \leq u \leq \max\{u, v\}, & \text{se } x \geq y \\ y \leq v \leq \max\{u, v\}, & \text{se } x < y \end{cases}$$

$$x \nabla y \leq \max\{u, v\}$$

$$x \nabla y \leq u \nabla v$$

Agora veremos o modificador “não”, ou seja, “negação”.

4.2.3 Negação

Seja A um subconjunto clássico. A expressão “ x não está em A ” nos diz que x está no complementar de A . Logo, estenderemos a noção de complementar para o caso fuzzy.

Definição 4.3. (*negação*). Uma aplicação $\eta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma negação se satisfaz as seguintes condições:

n_1) *Fronteira*: $\eta(0) = 1$ e $\eta(1) = 0$;

n_2) *Involução*: $\eta(\eta(x)) = x$;

n_3) *Monotonicidade*: η é decrescente.

Exemplo 4.4. A aplicação $\eta(x) = 1 - x$ é uma negação, pois:

- $\eta(0) = 1 - 0 = 1$, $\eta(1) = 1 - 1 = 0$ (fronteira);
- $\eta(\eta(x)) = \eta(1 - x) = 1 - (1 - x) = 1 - 1 + x = x$ (involução);
- $\eta(x) = 1 - x$ é decrescente,

e reproduz a tabela verdade da negação da lógica clássica.

Observação 4.1. 1. As operações $\Delta = \wedge$, $\nabla = \vee$ e $\eta = 1 - x$, satisfazem as leis de De Morgan, isto é, para todo par (x, y) de $[0, 1] \times [0, 1]$ valem

$$\eta(x \Delta y) = \eta(x) \nabla \eta(y)$$

$$\eta(x \nabla y) = \eta(x) \Delta \eta(y)$$

2. Dizemos que a t-norma Δ e a t-conorma ∇ são duais em relação a uma negação η se satisfazem a uma das duas leis de De Morgan.

Exemplo 4.5. Considere as operações abaixo:

$$\begin{cases} x \Delta y = xy \\ x \nabla y = x + y - xy \end{cases}$$

Temos que a t-norma e a t-conorma acima são duais em relação à negação $\eta(x) = 1 - x$, pois:

$$\bullet \eta(x \Delta y) = \eta(xy) = 1 - xy \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} \bullet \eta(x) \nabla \eta(y) &= (1 - x) \nabla (1 - y) \\ &= (1 - x) + (1 - y) - (1 - x)(1 - y) \\ &= 1 - x + 1 - y - (1 - y - x + xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 - x + 1 - y - 1 + y + x - xy \\
 &= 1 - xy
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

De (4.3) e (4.4), temos

$$\eta(x \Delta y) = \eta(x) \nabla \eta(y).$$

A seguir, será definido o conectivo “se...então”, ou seja, a implicação fuzzy.

Definição 4.4 (Implicação Fuzzy). *Um operador $\Rightarrow: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ é uma implicação fuzzy se satisfaz as seguintes condições:*

1. *Reproduz a tabela da implicação clássica;*
2. *É decrescente na primeira variável, ou seja, para cada $x \in [0, 1]$, tem-se*

$$(a \Rightarrow x) \leq (b \Rightarrow x) \quad \text{se } a \geq b;$$

3. *É crescente na segunda variável, ou seja, para cada $x \in [0, 1]$, tem-se*

$$(x \Rightarrow a) \geq (x \Rightarrow b) \quad \text{se } a \geq b.$$

O exemplo que veremos mostrará duas implicações que são obtidas a partir de combinações de t-normas e t-conormas. Outras implicações podem ser encontradas em [1].

Exemplo 4.6. Implicação de Goguen:

$$(x \Longrightarrow y) = g_n(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq y \\ \frac{y}{x}, & \text{se } x > y \end{cases}.$$

para todo $x, y \in [0, 1]$.

Verificando as condições:

- 1) $0 \Rightarrow 1 = g_n(0, 1) = 1$ pois $x < y$
 $1 \Rightarrow 0 = g_n(1, 0) = \frac{0}{1} = 0$ pois $x > y$
 $0 \Rightarrow 0 = g_n(0, 0) = 1$ pois $x = y$
 $1 \Rightarrow 1 = g_n(1, 1) = 1$ pois $x = y$.

Logo, esta implicação reproduz a tabela da implicação clássica.

- 2) *Mostrar que é decrescente na primeira variável, ou seja, $\forall x \in [0, 1]$ tem-se*

$$(a \Rightarrow x) \leq (b \Rightarrow x) \quad \text{se } a \geq b.$$

Seja $x \in [0, 1]$ e $a \geq b$

$$(a \Rightarrow x) = g_n(a, x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq x \\ \frac{x}{a}, & \text{se } a > x \end{cases}.$$

Como $a \geq b$ e $x \in [0, 1]$, temos $x \geq a$, $x \leq b$ ou $b < x < a$.

Assim,

$$(a \Rightarrow x) = \begin{cases} 1, & \text{se } a \leq x \Rightarrow x \geq b \Rightarrow g_n(b, x) = 1 = g_n(a, x) \\ \frac{x}{a}, & \text{se } a > x \Rightarrow \begin{cases} x < b \Rightarrow g_n(b, x) = \frac{x}{b} > g_n(a, x) \\ b < x < a \Rightarrow g_n(b, x) = 1 > \frac{x}{a} \end{cases} \end{cases} .$$

Assim, se $a \geq b$ então $(a \Rightarrow x) \leq (b \Rightarrow x)$.

3) É crescente na segunda variável, ou seja, $\forall x \in [0, 1]$ tem-se

$(x \Rightarrow a) \geq (x \Rightarrow b)$ se $a \geq b$.

$$(x \Rightarrow a) = g_n(x, a) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq a \\ \frac{a}{x}, & \text{se } x > a \end{cases}$$

$$(x \Rightarrow b) = g_n(x, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq b \\ \frac{b}{x}, & \text{se } x > b \end{cases} .$$

Assim,

$$(x \Rightarrow a) = g_n(x, a) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq a \Rightarrow \begin{cases} x \leq b \Rightarrow g_n(x, b) = 1 = g_n(x, a) \\ b < x < a \Rightarrow g_n(x, b) = \frac{b}{x} < \frac{a}{x} \end{cases} \\ \frac{a}{x}, & \text{se } x > a \Rightarrow x > b \Rightarrow g_n(x, b) = \frac{b}{x} < \frac{a}{x} \end{cases} .$$

Logo, $(x \Rightarrow a) > (x \Rightarrow b)$.

Assim, se $a \geq b$, temos $(x \Rightarrow a) \geq (x \Rightarrow b)$.

Um outro exemplo de implicação fuzzy é a de Zadeh que é dada por:

$$(x \Longrightarrow y) = z(x, y) = \max\{(1 - x), \min(x, y)\}.$$

para todo $x, y \in [0, 1]$.

Exemplo 4.7. Vamos voltar à expressão (4.1) e obter seu valor lógico quando considerarmos $\Delta = \wedge$, $\nabla = \vee$, $\eta(x) = 1 - x$ e a implicação de Goguen.

Inicialmente, para cada célula p , q , r e s , da expressão (4.1), tomamos seu valor lógico como o grau de pertinência de cada elemento ao conjunto relacionado.

Consideremos, por exemplo, que tais valores sejam:

$$\varphi_A(x) = 0,8; \varphi_B(y) = 0,4; \varphi_C(z) = 0,6; \varphi_D(w) = 0,7.$$

Então,

$$p \Delta q = \min(0,8; 0,4) = 0,4;$$

$$s = 1 - \varphi_D(w) = 1 - 0,7 = 0,3;$$

$$r \nabla s = \max(0, 6; 0, 3) = 0, 6.$$

Logo, o valor lógico de (4.1) é o resultado da aplicação

$$(p \triangle q) \implies (r \nabla s).$$

Supondo que a implicação seja a de Goguen, então

$$(p \triangle q) \implies (r \nabla s) = \begin{cases} 1, & \text{se } (p \triangle q) \leq (r \nabla s) \\ \frac{(r \nabla s)}{(p \triangle q)}, & \text{se } (p \triangle q) > (r \nabla s) \end{cases} = 1;$$

pois $(p \triangle q) = 0, 4$ e $(r \nabla s) = 0, 6$.

Assim, para as pertinências acima, a expressão (4.1) assume valor lógico 1.

Agora, veremos o valor lógico desta expressão supondo que a implicação seja a de Zadeh:

$$\begin{aligned} (p \triangle q) \implies (r \nabla s) &= \max\{(1 - p \triangle q); \min(p \triangle q, r \nabla s)\} \\ &= \max\{0, 6; 0, 4\} \\ &= 0, 6. \end{aligned}$$

Assim, para as pertinências dadas acima e usando a implicação de Zadeh, a expressão (4.1) assume valor lógico 0,6.

4.3 Raciocínio aproximado e variáveis linguísticas

Raciocínio aproximado refere-se ao processo onde obtém-se conclusões a partir de premissas incertas. Em nossa vida diária é muito comum nos depararmos com tais premissas e, a partir delas, tirarmos nossas próprias conclusões. Vejamos então dois exemplos.

“Se a pessoa está com muita fome então ela comerá muito.”

ou

“Se a pessoa está com pouca fome então ela comerá pouco.”

Esta é uma generalização do conhecido método dedutivo “*modus ponens*”([1]). A diferença para o *modus ponens* clássico está na subjetividade dos predicados envolvidos. Nosso objetivo é tomar sentenças como a que foi dada acima que estão expressas em uma linguagem “natural” e modelá-las usando a lógica fuzzy.

Para modelar estas sentenças é preciso reescreve-lás, mas antes disso será necessário o conceito de *variável linguística*.

Definição 4.5. *Uma variável linguística X no universo U é uma variável cujos valores assumidos são subconjuntos fuzzy de U .*

De modo geral, uma variável linguística é um substantivo, enquanto seus valores são adjetivos, representados por conjuntos fuzzy. Por exemplo, “dor de dente” é uma variável linguística que pode assumir os atributos de “fraca”, “média” e “forte”, que são modelados por conjuntos fuzzy.

Uma sentença é chamada de proposição fuzzy quando aparecem variáveis linguísticas juntamente com seus valores subjetivos (atributos).

No capítulo seguinte trataremos de relações fuzzy para posteriormente abordarmos base de regras fuzzy.

5 Relações Fuzzy

5.1 Relações Clássicas e Fuzzy

Uma relação clássica representa uma associação ou interação entre os elementos de dois ou mais conjuntos. Este conceito pode ser estendido observando o grau de interação entre os elementos onde, em uma relação clássica, o grau é representado pela sua função característica e numa relação fuzzy é representado por uma função de pertinência. Na verdade, uma relação fuzzy nada mais é que uma generalização natural das relações matemáticas clássicas, ou seja, indica, como na relação clássica, se há ou não alguma relação e além do mais, indica o grau desta relação.

Neste capítulo, os conceitos e propriedades de relação serão discutidas, primeiramente para relações clássicas e depois estendidas para relações fuzzy.

Definição 5.1. Uma **relação** (clássica) \mathcal{R} sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, é qualquer subconjunto (clássico) do produto cartesiano $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é denominada **relação binária** sobre $U_1 \times U_2$. Se $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$, diz que \mathcal{R} é uma **relação n-ária** sobre U .

Como a relação \mathcal{R} é um subconjunto do produto cartesiano, então ela pode ser representada por sua função característica

$$X_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow \{0, 1\},$$

com

$$X_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R} \\ 0, & \text{se } (x_1, x_2, \dots, x_n) \notin \mathcal{R} \end{cases} .$$

A definição de relação fuzzy é formulada a partir da definição de produto cartesiano clássico e estendendo a função característica de uma relação clássica para uma função de pertinência.

Definição 5.2. Uma **relação fuzzy** \mathcal{R} sobre $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ é qualquer subconjunto fuzzy de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$. Assim, uma relação fuzzy \mathcal{R} é definida por uma função de pertinência

$$\varphi_{\mathcal{R}} : U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \longrightarrow [0, 1].$$

Se o produto cartesiano for formado por apenas dois conjuntos $U_1 \times U_2$, a relação é chamada de **fuzzy binária** sobre $U_1 \times U_2$.

Se os conjuntos U_i , $i = 1, 2, \dots, n$, forem todos iguais a U , dizemos que \mathcal{R} é uma relação **fuzzy n-ária** sobre U .

Observação 5.1. Se a função de pertinência da relação fuzzy \mathcal{R} for indicada por $\varphi_{\mathcal{R}}$, então o número

$$\varphi_{\mathcal{R}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]$$

indica o grau com que os elementos x_i , que compõem a n -upla (x_1, x_2, \dots, x_n) , estão relacionados segundo a relação \mathcal{R} .

Definição 5.3. O **produto cartesiano fuzzy** dos subconjuntos fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n de $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$, respectivamente, é a relação fuzzy A_1, A_2, \dots, A_n , cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_{A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{A_1}(x_1) \wedge \varphi_{A_2}(x_2) \wedge \dots \wedge \varphi_{A_n}(x_n),$$

onde \wedge representa o mínimo.

Observação 5.2. 1. O produto cartesiano é parecido com a interseção, vista no Capítulo 1. A principal diferença é que os subconjuntos fuzzy, na interseção, são de um mesmo conjunto universo, já no produto cartesiano, eles podem ser diferentes.

2. Se A_1, A_2, \dots, A_n forem conjuntos clássicos, então o produto cartesiano clássico $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ pode ser obtido substituindo as funções de pertinência pelas respectivas funções característica dos conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n .

Exemplo 5.1. Seja \mathcal{R} uma relação fuzzy definida nos conjuntos

$$X_1 = \{a, b, c\}, \quad X_2 = \{s, t\}, \quad X_3 = \{x, y\}, \quad X_4 = \{i, j\}.$$

Esta relação pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R(X_1, X_2, X_3, X_4) = & 0.4/(b, t, y, i) + 0.6/(a, s, x, i) + 0.9/(b, s, y, i) + 1/(b, s, y, j) \\ & + 0.6/(a, t, y, j) + 0.2/(c, s, y, i). \end{aligned}$$

Vimos neste exemplo uma forma de representar uma relação com seus respectivos graus de pertinência.

Exemplo 5.2. [1] Suponha que o conjunto universo U seja composto pelos pacientes de uma clínica, identificados pelos números 1, 2, 3, 4, 5. Sejam A , B e C os subconjuntos fuzzy que representam os pacientes com febre, mialgia e coriza, respectivamente. A tabela a seguir ilustra os 5 pacientes com os três sintomas e com seus respectivos graus de pertinência:

Paciente	F: Febre	M: Mialgia	C: Coriza
1	0,7	0,8	0,7
2	0	0,6	0,4
3	0,3	0,7	0,6
4	0,5	0,5	0,5
5	1,0	1,0	1,0

Tabela 5.1: Diagnóstico de paciente.

Para diagnosticarmos um paciente, o médico parte de certas avaliações de sintomas (ou sinais) que são características de cada doença. Algumas doenças podem apresentar sintomas como febre, mialgia e coriza com intensidade e medições diversas. Para o caso da gripe, por exemplo, o paciente apresenta sintomas de “febre”, “mialgia” e “coriza” com intensidades que, se representadas por subconjuntos fuzzy, devem ter universos distintos. O universo indicador de febre pode ser dado pelas temperaturas possíveis de um indivíduo, enquanto que a mialgia pode ser avaliada pelo número de regiões doloridas e a coriza pela intensidade.

Para indicarmos o quanto um paciente tem gripe poderia ter tomado, por exemplo, a intersecção dos três sintomas escolhidos: febre, mialgia e coriza. O paciente 1 da tabela acima, por exemplo, tem uma temperatura x cuja pertinência ao conjunto febre F é $\varphi_F(x) = 0,7$, tem um valor y de mialgia que faz com que $\varphi_M(y) = 0,8$ e tem z de coriza que faz com que $\varphi_C(z) = 0,7$. O diagnóstico do paciente 1 para saber se ele está gripado é dado por:

$$\text{Paciente 1 : } \varphi_{Gripe}(x, y, z) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_M(y) \wedge \varphi_C(z) = 0,7 \wedge 0,8 \wedge 0,7 = 0,7.$$

Isso significa que o paciente 1 está no subconjunto fuzzy dos febris, com mialgia e com coriza, tendo grau de pertinência 0,7; que coincide com o grau de seu diagnóstico para a gripe. Vendo isso, o médico tomará as providências necessárias para o tratamento da gripe deste paciente. Vejamos outro paciente. Para o paciente 4, por exemplo, o seu diagnóstico é:

$$\text{Paciente 4 : } \varphi_{Gripe}(x, y) = \varphi_F(x) \wedge \varphi_M(y) \wedge \varphi_C(z) = 0,5 \wedge 0,5 \wedge 0,5 = 0,5,$$

ou seja, este paciente tem grau de pertinência 0,5 ao conjunto das pessoas gripadas e consequentemente o mesmo grau de pertinência ao conjunto das pessoas que não estão gripadas, o que leva o médico a analisar se há outros sintomas para que possa realizar o tratamento adequado.

Se observarmos do ponto de vista da teoria de conjuntos clássica, para o exemplo que foi dado anteriormente, o único paciente que seria indicado gripe seria o paciente 5, pois ele tem grau 1 para febre, para mialgia e para coriza que implica ter grau 1 para gripe, ou seja, somente os pacientes que tem grau 1 estariam gripados.

5.2 Relações Fuzzy binárias

Nesta seção, destacaremos as formas de representação e algumas propriedades das relações fuzzy binárias. A forma mais comum de representar as relações fuzzy binárias em $X \times Y$, quando X e Y são finitos, é a matricial.

Sejam $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ e a relação fuzzy \mathcal{R} sobre $X \times Y$, com função de pertinência dada por $\varphi_{\mathcal{R}}(x_i, y_j) = r_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. A representação de \mathcal{R} na forma de matriz é dada a seguir.

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{bmatrix}$$

Uma outra forma de representar relações fuzzy binárias é a de diagrama de flechas, onde cada elemento de X é conectado ao de Y por uma linha e com seu respectivo grau de pertinência, desde que seja não nulo. Vejamos na figura 5.1 :

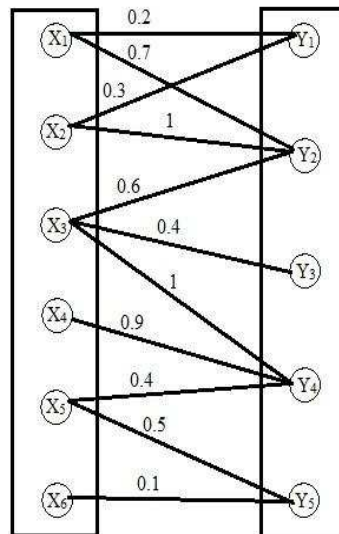


Figura 5.1: Exemplo de representação de uma relação fuzzy binária: diagrama de flechas.

Exemplo 5.3. Sejam $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ e \mathcal{R} uma relação sobre $X \times Y$. Então a representação da relação fuzzy binária \mathcal{R} na forma matricial é dada a seguir:

$$M = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.6 \\ 1 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$$

No diagrama de flechas, essa relação pode ser representada pela figura 5.2:

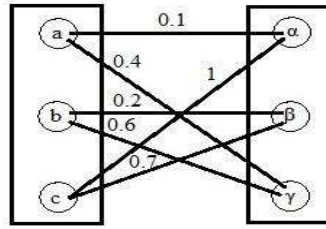


Figura 5.2: Diagrama de flechas do exemplo 5.3.

Vejam agora a definição de uma relação fuzzy binária inversa.

Definição 5.4. *Seja \mathcal{R} uma relação fuzzy binária definida em $X \times Y$. A relação fuzzy binária inversa, \mathcal{R}^{-1} , definida em $Y \times X$, tem função de pertinência $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}} : Y \times X \rightarrow [0, 1]$ dada por $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$.*

Observação 5.3. 1. Observe que a matriz de \mathcal{R}^{-1} coincide com a transposta de \mathcal{R} , já que $\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x) = \varphi_{\mathcal{R}}(x, y)$.

2. Note também que se calcularmos a inversa de uma dada matriz que representa uma relação fuzzy binária e depois calcularmos novamente a sua inversa obtaremos a matriz original, ou seja,

$$(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}.$$

Exemplo 5.4. Se \mathcal{R} é a relação do exemplo anterior, então a representação matricial de sua inversa \mathcal{R}^{-1} é dada pela sua transposta:

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0 \end{bmatrix}$$

5.3 Composição e Junção entre Relações Fuzzy Binárias

Nesta seção trataremos da composição e junção entre relações fuzzy binárias. Embora existam vários tipos de composição, nesta seção abordaremos a forma tradicional.

Definição 5.5. *Considere \mathcal{R} e \mathcal{S} duas relações fuzzy binárias em $U \times V$ e $V \times W$, respectivamente. A **composição** $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é uma relação fuzzy binária em $U \times W$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\varphi_{\mathcal{R} \circ \mathcal{S}}(x, z) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_{\mathcal{S}}(y, z))].$$

Observação 5.4. 1. Composição de relação fuzzy binária pode ser realizada convenientemente em termos de matrizes de pertinência da relação. Sejam $P = [p_{ik}]$, $Q = [q_{kj}]$ e $R = [r_{ij}]$ matrizes de pertinência da relação binária tal que $R = P \circ Q$. Então podemos escrever, usando a notação de matriz, $[r_{ij}] = [p_{ik}] \circ [q_{kj}]$, onde $r_{ij} = \max_k [\min(p_{ik}, q_{kj})]$.

2. Quando os conjuntos U , V e W são finitos, então a forma matricial da relação $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$, dada pela composição $[\max - \min]$, é obtida como uma multiplicação de matrizes, substituindo-se o produto pelo mínimo e a soma pelo máximo.

O exemplo a seguir ilustra a definição de composição de duas relações fuzzy binárias.

Exemplo 5.5. Sejam \mathcal{R} e \mathcal{S} duas relações fuzzy binárias em $X \times Y$ e $Y \times Z$, respectivamente, onde $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ e $Z = \{z_1, z_2, z_3\}$. Considere M_1 a matriz de pertinência da relação fuzzy binária de \mathcal{R} e M_2 a matriz de pertinência da relação fuzzy binária \mathcal{S} que são dadas a seguir:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.7 \\ 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando a definição de composição entre relações fuzzy binárias, temos que $T = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ é

$$T = \mathcal{R} \circ \mathcal{S} = M_1 \circ M_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.6 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, para calcular $t_{11} = 0.6$ da composição $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ temos que:

$$\begin{aligned} t_{11} &= \max[\min(1, 0.6), \min(0, 0), \min(0.7, 0)] \\ &= \max[\min(p_{11}, q_{11}), \min(p_{12}, q_{21}), \min(p_{13}, q_{31})] = 0.6, \end{aligned}$$

e para calcular $t_{32} = 0.5$ temos que:

$$\begin{aligned} t_{32} &= \max[\min(0, 0.6), \min(0.5, 0.6), \min(1, 0.1)] \\ &= \max[\min(p_{31}, q_{12}), \min(p_{32}, q_{22}), \min(p_{33}, q_{32})] = 0.5. \end{aligned}$$

A seguir veremos a definição de junção entre relações fuzzy binárias.

Definição 5.6. Sejam P e Q duas relações fuzzy binárias sobre $X \times Y$ e $Y \times Z$, respectivamente. A **junção** da relação, $P * Q$, é uma relação ternária $R(X, Y, Z)$ definida por

$$\varphi_{P*Q}(x, y, z) = \min_{y \in Y} [\varphi_P(x, y), \varphi_Q(y, z)]$$

para cada $x \in X$, $y \in Y$ e $z \in Z$.

Observação 5.5. A composição pode ser obtida pela troca do min pela junção, ou seja,

$$\varphi_{P \circ Q}(x, z) = \max_{y \in Y} [\varphi_{P * Q}(x, y, z)]$$

para cada $x \in X$ e $z \in Z$.

Exemplo 5.6. [6] A junção $S = P * Q$ da relação P e Q dada na figura 5.3 tem a função de pertinência dada na tabela de junção a seguir. Para convertermos esta junção na correspondente composição $R = P \circ Q$, os valores de $\varphi_S(x, y, z)$ indicados na tabela de junção são agregados pelo operador max que se encontra na tabela composição.

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \varphi_R(1, \beta) &= \max[S(1, a, \beta), S(1, b, \beta)] \\ &= \max[0.7, 0.5] = 0.7. \end{aligned}$$

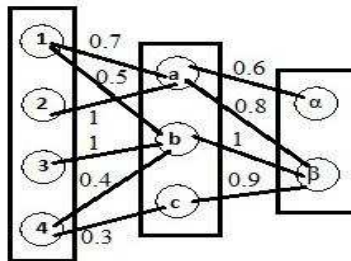


Figura 5.3: Diagrama de flechas do Exemplo 5.6.

Junção: $S = P * Q$			
x	y	z	$\varphi_S(x, y, z)$
1	a	α	0.6
1	a	β	0.7
1	b	β	0.5
2	a	α	0.6
2	a	β	0.8
3	b	β	1
4	b	β	0.4
4	c	β	0.3

Composição: $R = P \circ Q$		
x	z	$\varphi_R(x, z)$
1	α	0.6
1	β	0.7
2	α	0.6
2	β	0.8
3	β	1
4	β	0.4

Definição 5.7. (*Regra de composição de inferência*). Sejam U e V dois conjuntos, $\mathcal{F}(U)$ e $\mathcal{F}(V)$ as classes dos subconjuntos fuzzy de U e V respectivamente, e \mathcal{R} uma relação binária sobre $U \times V$.

- (i) A relação \mathcal{R} define um funcional de $\mathcal{F}(U)$ em $\mathcal{F}(V)$ que, a cada elemento $A \in \mathcal{F}(U)$, faz corresponder o elemento $B \in \mathcal{F}(V)$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_B(y) = \varphi_{\mathcal{R}(A)}(y) = \sup_{x \in U} [\min(\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_A(x))].$$

Essa composição é conhecida como **regra de composição de inferência**, a qual dará origem a outras regras, como veremos no próximo capítulo.

- (ii) A relação \mathcal{R} também define um funcional de $\mathcal{F}(V)$ em $\mathcal{F}(U)$ da seguinte forma: a cada $B \in \mathcal{F}(V)$ faz corresponder o elemento $A \in \mathcal{F}(U)$ cuja função de pertinência é

$$\varphi_A(x) = \varphi_{\mathcal{R}^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in V} [\min(\varphi_{\mathcal{R}^{-1}}(y, x), \varphi_B(y))].$$

A é denominado imagem inversa de B por \mathcal{R} .

5.4 Relações binárias sobre U

As relações binárias clássicas ou fuzzy sobre U são semelhantes às relações binárias clássicas ou fuzzy sobre $U \times V$. A seguir enunciaremos algumas definições importantes que serão primeiramente para relações binárias clássicas e depois para relações fuzzy binárias onde teremos um bom entendimento de relações fuzzy binárias sobre U .

Seja $X_{\mathcal{R}} : U \times U \rightarrow \{0, 1\}$ a função característica da relação binária clássica \mathcal{R} .

Definição 5.8. *Seja \mathcal{R} uma relação binária clássica sobre U . Então, para quaisquer x, y, z de U , a relação \mathcal{R} é*

- (i) **reflexiva:** se $X_{\mathcal{R}}(x, x) = 1$, ou seja, todo elemento de U está relacionado com ele mesmo. Caso contrário, \mathcal{R} é chamada de *irreflexiva*. Mas se $(x, x) \notin \mathcal{R}$ então, a relação é chamada de *anti-reflexiva*.
- (ii) **simétrica:** se $X_{\mathcal{R}}(x, y) = 1$ implica $X_{\mathcal{R}}(y, x) = 1$, ou seja, se x está relacionado com y então y está relacionado com x . Caso isso não ocorra, a relação é chamada de *assimétrica*.
- (iii) **transitiva:** se $X_{\mathcal{R}}(x, y) = X_{\mathcal{R}}(y, z) = 1$ implica $X_{\mathcal{R}}(x, z) = 1$, ou seja, se x está relacionado com y e y está relacionado com z então x está relacionado com z . A relação que não satisfizer esta propriedade é chamada de *não transitiva*. Se $X_{\mathcal{R}}(x, y) = X_{\mathcal{R}}(y, z) = 1$ e $X_{\mathcal{R}}(x, z) \neq 1$ então, a relação é chamada de *anti-transitiva*.
- (iv) **anti-simétrica:** se $X_{\mathcal{R}}(x, y) = X_{\mathcal{R}}(y, x) = 1$ implica $x = y$.

Observação 5.6. As definições anteriores são usadas na teoria clássica de conjuntos, porém o uso da função característica foi para tornar mais claro o entendimento de relações fuzzy binárias.

Essas propriedades podem ser estendidas para relações fuzzy, em termos de funções de pertinência, porém com algumas diferenças nas extensões dos conceitos.

Definição 5.9. *Seja \mathcal{R} uma relação fuzzy binária sobre U , cuja função de pertinência é $\varphi_{\mathcal{R}}$. Então, para quaisquer x, y e z de U , a relação fuzzy \mathcal{R} é*

- (i) *reflexiva: se $\varphi_{\mathcal{R}}(x, x) = 1$;*
- (ii) *simétrica: se $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = \varphi_{\mathcal{R}}(y, x)$;*
- (iii) *transitiva: se $\varphi_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \min_y \{\varphi_{\mathcal{R}}(x, y), \varphi_{\mathcal{R}}(y, z)\}$;*
- (iv) *antissimétrica: se $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) > 0$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y, x) > 0$ implica $x = y$.*

- Observação 5.7.**
1. *Reflexiva:* É aquela em que todo indivíduo tem relação máxima consigo próprio;
 2. *Simétrica:* É caracterizada pela reciprocidade, com mesma intensidade, entre os indivíduos;
 3. *Transitiva:* Indica que a relação entre dois indivíduos quaisquer não deve ser, simultaneamente, inferior a relação de cada um destes dois com os demais;
 4. *Antissimétrica:* É aquela que não admite qualquer reciprocidade entre os indivíduos distintos;
 5. Uma relação que é reflexiva, simétrica e transitiva é chamada de *relação de equivalência*. E quando for reflexiva e simétrica é chamada de *relação de compatibilidade ou de tolerância*.

Para concluirmos este capítulo, iremos apresentar um exemplo onde será verificada as definições que foram vistas anteriormente.

Exemplo 5.7. Seja \mathcal{R} uma relação binária sobre $U = \{x, y, z\}$. A matriz de pertinência da relação \mathcal{R} é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Analisando a matriz M , temos que \mathcal{R} é reflexiva, pois $\varphi_{\mathcal{R}}(x, x) = \varphi_{\mathcal{R}}(y, y) = \varphi_{\mathcal{R}}(z, z) = 1$; \mathcal{R} é simétrica, pois $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = \varphi_{\mathcal{R}}(y, x) = 0$, $\varphi_{\mathcal{R}}(x, z) = \varphi_{\mathcal{R}}(z, x) = 0.7$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y, z) = \varphi_{\mathcal{R}}(z, y) = 0$; \mathcal{R} é transitiva, pois $\varphi_{\mathcal{R}}(x, z) \geq \varphi_{\mathcal{R}}(x, y) \wedge \varphi_{\mathcal{R}}(y, z) \implies 0.7 \geq 0 \wedge 0 \implies 0.7 \geq 0$; \mathcal{R} não é antissimétrica, pois $\varphi_{\mathcal{R}}(x, y) = 0$ e $\varphi_{\mathcal{R}}(y, x) = 0$.

Logo, \mathcal{R} é reflexiva, simétrica e transitiva. Portanto, \mathcal{R} é uma relação de equivalência.

Após tratarmos de algumas definições sobre relações fuzzy, no capítulo seguinte falaremos de base de regras fuzzy e algumas aplicações.

6 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy e aplicações

Em nosso dia-dia, ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Em geral, o controle e a execução de tarefas devem seguir uma sequência de “ordens” linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras capazes de serem decodificadas pelo controlador.

A partir dessas regras obtém-se um sistema que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy, conhecido como sistema baseado em regras fuzzy.

6.1 Controladores Fuzzy

Uma tentativa de reproduzir a estratégia de um controlador humano, na execução de suas tarefas, é dada pelos "controladores fuzzy"[1].

Em controladores fuzzy, as tarefas são comandadas por meio de termos da linguagem usual, relacionando com alguma variável de interesse onde as variáveis linguística, neste contexto, desempenham papel fundamental.

Os termos linguísticos, traduzidos por conjuntos fuzzy, são utilizados para transcrever a base de conhecimentos por especialistas com o intuito de controlarem suas tarefas por meio de um conjunto de regras fuzzy. Por meio dessas regras fuzzy obtém-se a relação fuzzy, a qual produzirá a saída (ação) para cada entrada (condição, estado).

Nas próximas seções apresentaremos a metodologia de controladores fuzzy.

6.2 Base de Regras Fuzzy

Uma base de regras fuzzy, tem a forma apresentada na Figura 6.1, e consiste num conjunto de proposições fuzzy escritas na forma:

Se “condição” Então “ação”.

Cada “condição” e “ação” serão valores assumidos por variáveis linguísticas, e essas

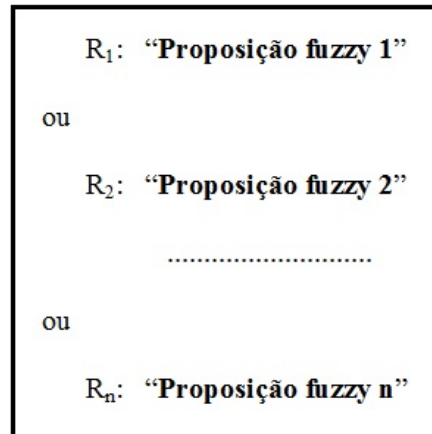


Figura 6.1: Forma geral de uma base de regras fuzzy [1].

por sua vez, serão modelados por conjuntos fuzzy. Os conjuntos fuzzy que compõem a condição e a ação são chamados de antecedentes e consequentes, respectivamente.

Cada uma das classificações das variáveis que constam na base de regras é modelada por um conjunto fuzzy. A lógica fuzzy é a outra parte utilizada na obtenção da relação fuzzy que sintetiza as informações matemáticas contidas na base de regras.

A base de regras cumpre o papel de “traduzir” matematicamente as informações que formam a base de conhecimentos do sistema fuzzy. Intuitivamente, quanto maior o número de regras, melhor a representação da base regras. Numa situação ideal, tal relação pode mesmo ser uma função no sentido clássico.

6.3 Funcionamento de um Controlador Fuzzy

Num sistema de base de regras fuzzy, a cada entrada fuzzy faz se responder uma saída fuzzy e se a entrada for crisp (ponto de \mathbb{R}^n), espera-se que a saída também seja crisp (ponto de \mathbb{R}^m). Sendo assim, um sistema fuzzy é uma função de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m construída de alguma maneira. A forma de se obter essa função será apresentadas em módulos.

6.3.1 Módulo de Fuzzificação

Este é o estágio onde as entradas do sistema são modeladas por conjuntos fuzzy com seus respectivos domínios. É nele que justifica-se a grande importância de especialista do fenômeno a ser modelado. Juntamente com os especialistas, as funções de pertinência são formuladas para cada conjunto fuzzy envolvido no processo. Mesmo que a entrada seja crisp, essa será fuzzificada por meio de sua função característica.

6.3.2 Módulo da Base de Regras

O módulo da base de regras pode ser considerado como um módulo que faz parte do “núcleo” do controlador fuzzy. Ele é composto pelas proposições fuzzy e cada uma destas proposições é descrita na forma linguística

Se x_1 é A_1 e/ou x_2 é A_2 e/ou ... e/ou x_n é A_n

Então u_1 é B_1 e/ou u_2 é B_2 e/ou ... e/ou u_m é B_m

de acordo com as informações de um especialista. É neste ponto que as variáveis e suas classificações linguísticas são catalogadas e, em seguida, modeladas por conjuntos fuzzy, isto é, funções de pertinência.

6.3.3 Módulo de Inferência Fuzzy

É no módulo de inferência fuzzy que cada proposição fuzzy é “traduzida” matematicamente por meio das técnicas da lógica fuzzy. É onde se define quais t-normas, t-conormas e regras de inferência (que podem ser implicações fuzzy) serão utilizadas para se obter a relação fuzzy que modela a base de regras. Este módulo tem tanta importância quanto o módulo da base de regras. É basicamente dele que depende o sucesso do controlador fuzzy, já que ele fornecerá a saída (controle) fuzzy a ser adotado pelo controlador, a partir de cada entrada fuzzy.

Em nosso trabalho dentre as possibilidades usaremos o Método de Inferência de Mamdani que será introduzido a seguir.

O Método de Inferência de Mamdani

O método de Mamdani é baseado na regra de composição de inferência max-min segundo o procedimento:

1. Em cada regra R_j , da base de regras fuzzy, a condicional “se x é A_j então u é B_j ” é modelada pela aplicação \wedge (mínimo) que, erroneamente, costuma ser denominada implicação de Mamdani (\wedge não é uma implicação fuzzy pois não preserva a tabela de uma implicação clássica);
2. Adota-se a t-norma \wedge (mínimo) para o conectivo lógico “e”;
3. Para o conectivo lógico “ou” adota-se a t-conorma \vee (máximo) que conecta as regras fuzzy da base de regras.

Formalmente, a relação fuzzy M é o subconjunto fuzzy de $X \times U$ cuja função de pertinência é dada por

$$\varphi_M(x, u) = \max_{1 \leq j \leq r} (\varphi_{R_j}(x, u)) = \max_{1 \leq j \leq r} [\varphi_{A_j}(x) \wedge \varphi_{B_j}(u)],$$

onde r é o número de regras que compõem a base de regras e, A_j e B_j são os subconjuntos fuzzy da regra j . Cada um dos valores $\varphi_{A_j}(x)$ e $\varphi_{B_j}(u)$ são interpretados como os graus com que x e u estão nos subconjuntos fuzzy A_j e B_j , respectivamente.

6.3.4 Módulo de Defuzzificação

Na teoria dos conjuntos fuzzy, a defuzzificação é um processo que permite representar um conjunto fuzzy por um valor crisp (número real). A seguir veremos um método de defuzzificação.

Método de Defuzzificação

Para um sistema fuzzy, a cada entrada fuzzy o módulo de inferência produz uma saída fuzzy, que indica o controle a ser adotado. Dessa forma, se a entrada for um número real, espera-se que a saída correspondente seja, também, um número real. Em geral, mesmo se a entrada for crisp, a saída será fuzzy. Portanto, usando o método de defuzzificação tal como o de “Centro de Massa” (que veremos a seguir, para defuzzificar a saída), obteremos um número real que indicará o controle a ser adotado.

Defuzzificador Centro de Massa (Centro de Gravidade, Centróide ou Centro de Área)

Este método de defuzzificação é semelhante à média aritmética para uma distribuição de frequências de uma dada variável, com a diferença que os pesos aqui são os valores $\varphi_B(u_i)$, que indicam o grau de compatibilidade do valor u_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy B .

O centro de gravidade dá a média das áreas de todas as figuras que representam os graus de pertinência de um subconjunto fuzzy. Entre todos os métodos de defuzzificação ele é o mais preciso e preferido, mesmo sendo o mais complicado.

Para o domínio discreto tem-se:

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \varphi_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \varphi_B(u_i)}.$$

Para o domínio contínuo tem-se:

$$G(B) = \frac{\int_{\mathbb{R}} u \varphi_B(u) d(u)}{\int_{\mathbb{R}} \varphi_B(u) d(u)}.$$

6.4 Aplicações

A utilização de sistemas baseados em regras fuzzy está presente em diversas áreas do conhecimento. Em [9] apresentam sistemas baseados em regras fuzzy para o estudo de alguns modelos clássicos de dinâmica populacional. Em [10] apresentam aplicações

envolvendo diagnóstico médico, eliminação de fármacos, qualidade de água e dentre outros.

Apresentaremos aqui algumas aplicações que não estão presentes nessas referências citadas.

6.4.1 Sistema de avaliação dos fornecedores [2]

Uma empresa possui um sistema de avaliação somente na matéria prima recebida (pedras preciosas e ouro), porém não possui um sistema de avaliação e classificação dos fornecedores. O sistema fuzzy proposto para avaliação dos fornecedores, além de avaliar a matéria prima, irá avaliar a qualidade e assistência no relacionamento.

Este sistema de avaliação possui 3 blocos: blocos fuzzy I, II e III. O bloco I é responsável pela avaliação do produto como sendo: qualidade, quantidade, preço e pontualidade. O bloco fuzzy II é responsável pela avaliação do processo, sendo definido como: qualidade no relacionamento e assistência. Já o bloco III é responsável pela avaliação final dos fornecedores, ou seja, os resultados obtidos nas avaliações do bloco I e bloco II.

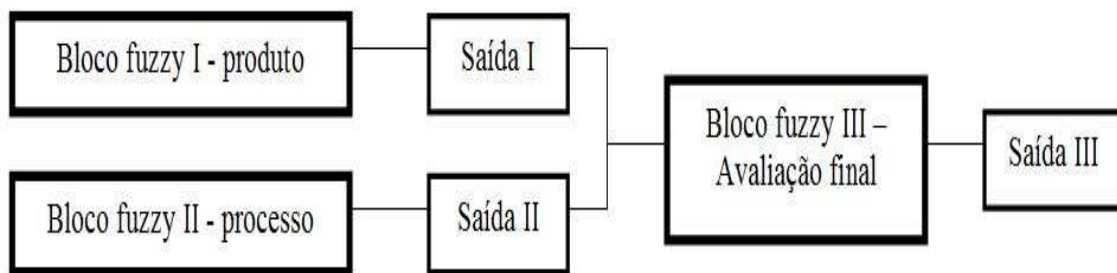


Figura 6.2: Esquema ilustrativo do sistema fuzzy.

Vejam os então a estrutura de cada bloco fuzzy:

Bloco fuzzy I: O bloco fuzzy I é estruturado em duas camadas onde a primeira camada contém fatores referentes aos indicadores de produto, e a saída desta camada serve como entrada para a segunda camada que resultará na avaliação final do fornecedor quanto aos indicadores de produto.

A primeira camada do bloco I é constituída de quatro fatores, cada qual com suas variáveis, conforme indicado a seguir:

- a) Fatores que definem a qualidade do produto: aprovada, condicional (aprovado com restrição) e reprovada;
- b) Fatores que definem a quantidade do pedido: completa e incompleta;
- c) Fatores que definem a pontualidade de entrega: sem atraso, até 7 dias e acima de 7 dias;

- d) Fatores que definem o preço do produto: maior que x , até x e menor ou igual ao preço alvo.

O valor x indica um percentual definido pela empresa, acima do preço alvo para o produto. Todos os fatores possuem três variáveis linguísticas, conforme especificado pelos conjuntos fuzzy: vermelho, amarelo e verde.

O universo do discurso definido para todos os conjuntos, dos fatores da primeira camada, está representado entre 0 e 100 em que para o conjunto fuzzy qualidade aprovada, figura 6.3(a), quanto mais próximo do extremo direito (100), mais próximo de um valor ótimo, ao contrário do conjunto fuzzy qualidade reprovada, figura 6.3(b), quanto mais próximo do extremo direito indica um percentual ruim dos produtos que não cumprem os requisitos de qualidade estabelecidos.

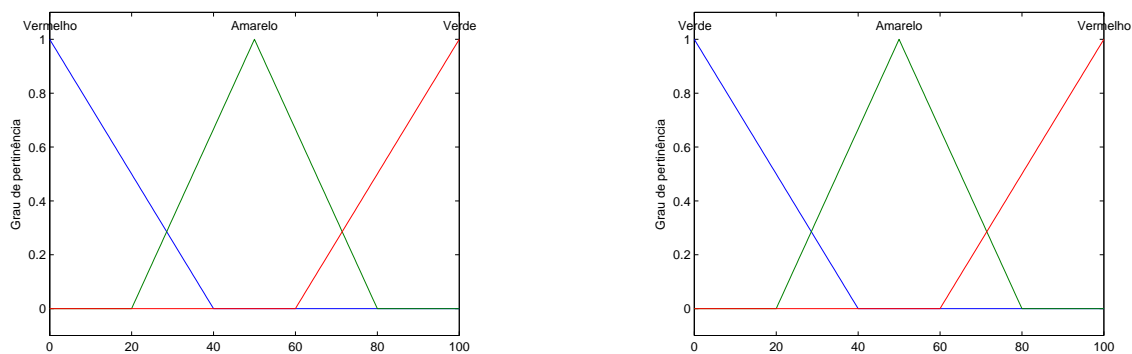


Figura 6.3: Conjuntos fuzzy para a variável de entrada qualidade aprovada (a) e reprovada (b), respectivamente.

A segunda camada do bloco I é constituída pelas variáveis que definem a avaliação final referente ao produto.

As saídas da primeira entrada são as variáveis de entrada da segunda camada. Estas saídas possuem 3 variáveis linguísticas, ruim, média e boa, figura 6.4(a). Por exemplo, os conjuntos fuzzy para a variável de entrada (segunda camada) qualidade e pontualidade são os mesmos conjuntos das variáveis de saída qualidade e pontualidade da primeira camada. Os valores linguísticos para a saída da segunda camada do bloco I são definidos pelos conjuntos fuzzy: ruim, regular, bom e ótimo, figura 6.4(b).

Para variável preço foi definido os conjuntos: ruim, médio e bom. Para variável quantidade foi definido como não-conforme, condicional e conforme.

Para avaliar o fornecedor quanto aos indicadores de produtos foi estabelecida a seguinte ordem de avaliação: qualidade seguida de quantidade, pontualidade e preço. Vejamos algumas regras para avaliação do fornecedor:

Se \langle Pontualidade \rangle e \langle Quantidade \rangle e \langle Qualidade \rangle e \langle Valor \rangle então \langle Avaliação \rangle ;

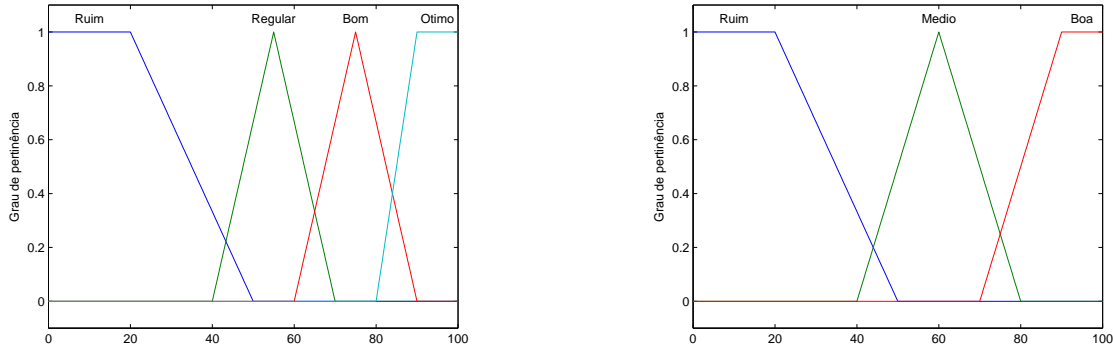


Figura 6.4: Conjuntos fuzzy para a variável de saída avaliação do fornecedor (a) e para a variável de entrada qualidade e pontualidade (b), respectivamente.

<i>Pontualidade</i>	<i>Quantidade</i>	<i>Qualidade</i>	<i>Valor</i>	<i>Avaliação</i>
Sem Atraso	Completa	Aprovada	$> x$	Ruim
Atraso ≤ 7	Incompleta	Reprovada	$< x$	Regular
Atraso > 7	Conforme	Condicional	$= x$	Bom
				Ótimo

Se Pontualidade é Boa e Quantidade é Conforme e Qualidade é Boa e Valor é Médio então Avaliação é Ótimo;

Se Pontualidade é Boa e Quantidade é Conforme e Qualidade é Ruim e Valor é Ruim então Avaliação é Ruim;

Se Pontualidade é Médio e Quantidade é Conforme e Qualidade é Média e Valor é Ruim então Avaliação é Regular.

No total, foram definidas 81 regras para a variável de saída avaliação do fornecedor quanto a indicadores de produto.

Bloco fuzzy II: O bloco fuzzy II contém duas variáveis para avaliar o fornecedor quanto ao seu processo: qualidade no relacionamento e assistência. A variável qualidade no relacionamento é avaliada por nota onde esta nota é dada pelo indivíduo encarregado no relacionamento com o fornecedor (empresa e fornecedor). A variável assistência é avaliada pelo técnico de inspeção da matéria prima. Estes dados são obtidos pelas assistências efetuadas pelo fornecedor.

Os conjuntos do bloco fuzzy II são definidos conforme estabelecidos para os conjuntos do bloco fuzzy I.

Para ambas as variáveis do bloco fuzzy II, o formato e suporte dos valores linguísticos são os mesmos apresentados na figura 6.4(b). Para a saída do bloco II são definidas as mesmas especificações da figura 6.4(a). No total foram utilizadas 9 regras.

Se $\langle \text{Qualidade Relacionamento} \rangle$ e $\langle \text{Assistência} \rangle$ então $\langle \text{Avaliação Fornecedor} \rangle$.

<i>Qualidade Relacionamento</i>	<i>Assistência</i>	<i>Avaliação Fornecedor</i>
Ruim	Ruim	Ruim
Médio	Médio	Regular
Bom	Bom	Bom
		Ótimo

Bloco fuzzy III: O bloco fuzzy III é responsável pela avaliação final do fornecedor. As entradas para este bloco são as saídas dos blocos I e II, e o conjunto de saída é apresentado na figura 6.5. Para a base de regras do bloco III foram consideradas 16 regras.

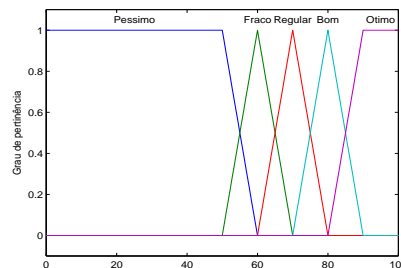


Figura 6.5: Conjuntos fuzzy para a variável de saída avaliação final do fornecedor.

Se \langle Avaliação Produto \rangle e \langle Avaliação Processo \rangle então \langle Avaliação Final \rangle .

<i>Avaliação Produto</i>	<i>Avaliação Processo</i>	<i>Avaliação Final</i>
Ruim	Ruim	Péssimo
Regular	Regular	Fraco
Bom	Bom	Regular
Ótimo	Ótimo	Bom
		Ótimo

Inferência e defuzzificação

O método utiliza a implicação de Mandani e o valor real para a avaliação do fornecedor é obtido através do método de defuzzificação do Centro de Massa. O intervalo de $[0,100]$ para o universo do discurso da variável de saída indica a nota do fornecedor.

Testando o sistema com dados reais

A empresa de fabricação de jóias forneceu valores de um fornecedor de pedras preciosas no período de novembro de 2004 a fevereiro de 2005. Vejamos os dados fornecidos do fornecedor A na tabela 6.6.

O fornecedor A foi avaliado com um desempenho “ótimo” para ambos os indicadores de produto (91,53) e processo (91,99), obtendo avaliação final de 92,48 classificando como um fornecedor “ótimo”. De acordo com especialista do setor, todos os resultados situaram-se dentro das expectativas para os dados amostrados, o que mostra que

FORNECEDOR A		
Quantidade de lotes no período amostrado	19	
INDICADORES DE PRODUTO	QUANTIDADE DE LOTES	%
QUALIDADE		
Aprovada	13	68,43
Condicional	0	0,0
Reprovada	06	31,57
QUANTIDADE		
Completa	19	100,0
Incompleta	0	0,0
Conforme	0	0,0
PREÇO		
Menor ou igual ao preço alvo	15	78,95
Até 10% acima	03	15,79
Maior que 10%	01	5,26
PONTUALIDADE		
Sem atraso	19	100,0
Até 7 dias de atraso	0	0,0
Mais de 7 dias de atraso	0	0,0
INDICADORES DE PROCESSO		
Relacionamento	-	90,0
Assistência	-	100,0

Figura 6.6: Dados referentes a um fornecedor de pedras preciosas [2].

o sistema é suficientemente consistente para ser empregado. Caso necessário, ajustes podem ser feitos nos conjuntos fuzzy e na base de regras.

O principal objetivo deste trabalho foi fornecer a indústria joalheira, meios simples e de baixo custo para avaliação e classificação dos fornecedores. A lógica fuzzy foi utilizada para atender esse objetivo.

6.4.2 Aplicação da Teoria Fuzzy para o Crescimento de Recife de Coral [3]

Os recifes de corais são formados com o acúmulo de corais. Com o tempo, em condições favoráveis, um recife de corais pode transformar-se numa ilha. São ecossistemas com grande produtividade e grande biodiversidade e são capazes de uma fixação rápida do carbonato de cálcio. A produção de carbonato de cálcio nestes animais está ligada à penetração da luz no oceano raso.

Demicco e Klir [3] comparam os modelos baseados em regras fuzzy por eles propostos com os modelos determinísticos de Bosscher e Schlager, que utilizam a seguinte equação:

$$G(z) = G(0) \tanh\left(\frac{I_0 e^{-kz}}{I_k}\right), \quad (6.1)$$

para ajustar dados de taxas de crescimento do principal recife de corais do Caribe (Figura 6.7).

Sejam z a profundidade da água, $G(z)$ a taxa de crescimento a uma dada profundidade (z), $G(0)$ a taxa de crescimento máxima (G em $z = 0$), I_0 a intensidade da luz na superfície, I_k a saturação da intensidade da luz e k o coeficiente de extinção dado

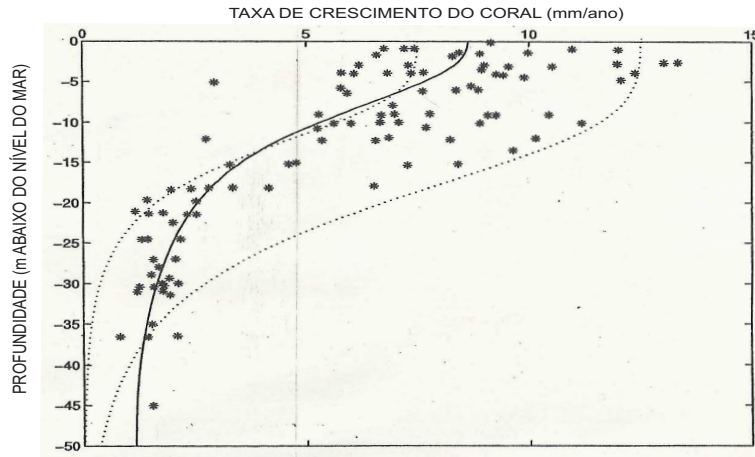


Figura 6.7: Taxa de crescimento do principal recife de corais, *Montastrea annularis*, da região do Caribe [3].

por Beer-Lambert Law,

$$I_z = I_0 e^{-kz}.$$

Pode-se observar que na Figura 6.7 as curvas pontilhadas são solução da equação (6.1), porém com valores diferentes para os parâmetros citados anteriormente ($G(0)$, I_0 , I_k , k). A curva não pontilhada é solução, porém usando o sistema lógico fuzzy.

Bosscher e Schlager estenderam esta equação e desenvolveram um modelo numérico do crescimento de recife de coral, segundo a equação diferencial:

$$\frac{dh}{dt}(t) = G_m \tanh\left(\frac{I_0 \exp\{-k[h_0 + h(t)] - [s_0 + s(t)]\}}{I_k}\right), \quad (6.2)$$

onde $\frac{dh}{dt}(t)$ é a variação da altura da superfície de coral com o tempo, h_0 a altura inicial da superfície no início do passo de tempo, $h(t)$ é o incremento no crescimento do coral no passo de tempo, s_0 é a posição inicial do nível do mar para um passo de tempo e $s(t)$ é a variação do nível do mar para o passo de tempo.

A Figura 6.8a mostra uma simulação do crescimento de recife de coral baseado na equação (6.2) com valores iniciais para G_m (taxa de crescimento máxima), I_0 (intensidade inicial da luz na superfície), k (coeficiente de extinção) e com a altura do nível do mar dado pela Figura 6.8c. Já a Figura 6.8b mostra a solução da taxa de crescimento de recife de coral, baseando-se nas mesmas variáveis da equação (6.2), porém usando o sistema lógico fuzzy que é proposto pelos autores.

Demicco e Klir usaram o sistema lógico fuzzy para modelar a taxa de crescimento de *Montastrea annularis* baseado em uma linguagem simples de acordo com os dados:

- Se a profundidade da água é rasa, então a taxa de crescimento de coral é rápida.
- Se a profundidade da água é profunda, então a taxa de crescimento de coral é lenta.

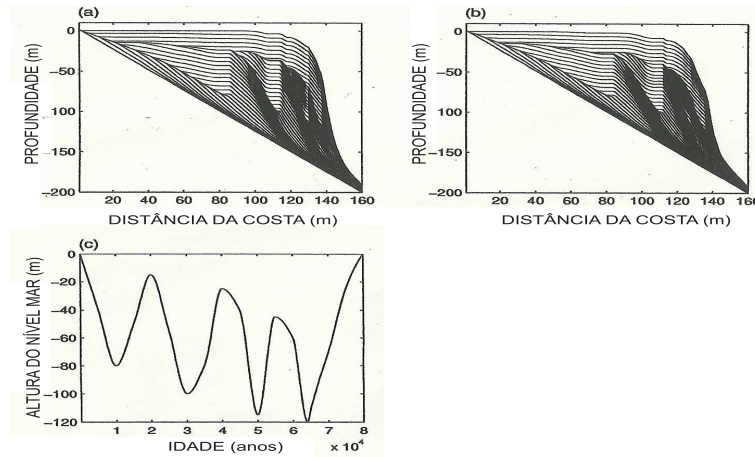


Figura 6.8: Comparação das soluções: equação diferencial e fuzzy [3].

A variável de entrada profundidade (profundo e raso), mostrado na Figura 6.9, é um conjunto fuzzy e sua função de pertinência tem domínio entre 0 e -50 metros. Já na Figura 6.10 mostra a variável de saída, taxa de crescimento (lento e rápido), e sua função de pertinência tem domínio entre 0 e 10 mm/ano.

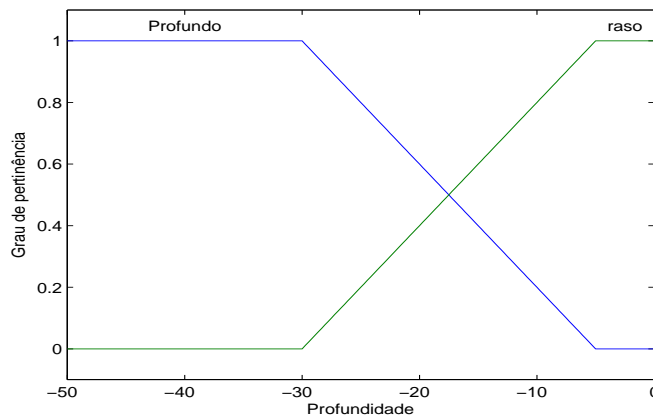


Figura 6.9: Profundidade da água.

Na figura 6.11 mostra o método de inferência de Mamdani das regras se-então com a variável de entrada (profundidade) -10 metros. Esta entrada aciona a base de regras, ou seja, para cada entrada (profundo e raso) é calculado o grau de pertinência. Com isso a variável de saída para cada entrada é o conjunto de todas as entradas com grau de pertinência menor que o da entrada -10 metros. Feito isso, o conjunto fuzzy de saída final é tomado como a união de cada conjunto de saída (lento e rápido) e usando o método de defuzzificador centro de massa obtém-se como saída 6.4 mm/ano.

Demicco e Klir desenvolveram um modelo do crescimento de recife baseado no sistema de inferência fuzzy (Figuras 6.9, 6.10 e 6.11) e o resultado (Figura 6.8b) é comparado com a solução da equação diferencial (6.2) (Figura 6.8a).

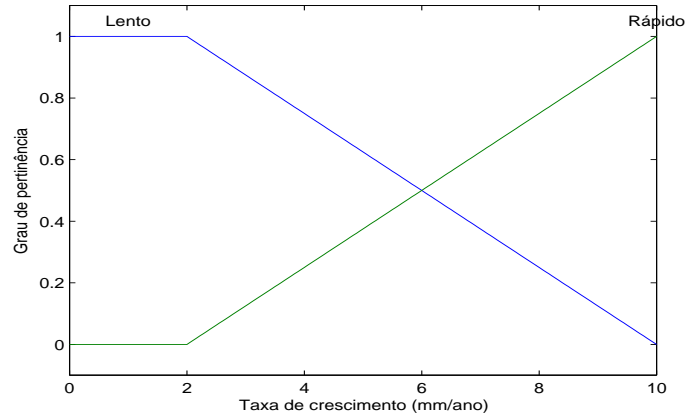


Figura 6.10: Taxa de crescimento dos corais.

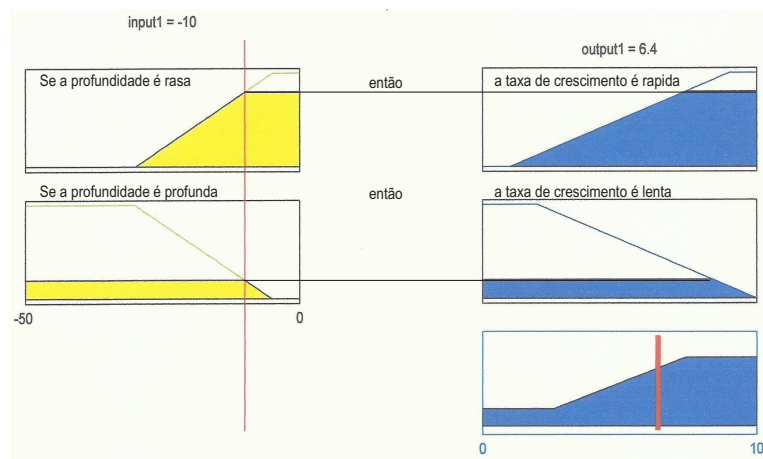


Figura 6.11: Base de regras.

6.4.3 Condição clínica de obesidade e indicação de cirurgia bariátrica [4]

A obesidade é um dos problemas mais importantes que a saúde pública enfrenta hoje no Brasil e em outros países do mundo. A Organização Mundial da Saúde (OMS) considera que, atualmente, nos países desenvolvidos e até em países em desenvolvimento, ela seja o principal problema de saúde a enfrentar. O excesso de peso está associado a uma série de doenças que comprometem a qualidade e a duração da vida.

Por esse motivo, muitas pessoas que se encontram muito acima do peso desejam fazer a cirurgia bariátrica. Um dos critérios para verificar se uma pessoa está acima do peso é o cálculo do IMC (índice de massa corporal) que é uma relação matemática de proporcionalidade entre o peso corporal do indivíduo em quilogramas (P) e o quadrado da sua altura expressa em metros (A): $IMC = \frac{P}{A^2}$.

O IMC é consensualmente utilizado na orientação da abordagem terapêutica da obesidade, inclusive na indicação de cirurgia bariátrica (ICB). Os valores de corte do IMC apresentam boa especificidade em diagnosticar obesidade, porém demonstram

baixa sensibilidade em identificar adiposidade, sendo que indivíduos com grau alto de gordura corporal (GC) deixam de ser considerados obesos e o fator prejudicial na obesidade é o acúmulo de gordura no corpo.

Considerando-se que a obesidade especificamente refere-se ao excesso de gordura corporal, o ideal seria basear-se também na %GC para dar uma real ideia ao paciente e até uma indicação para fazer a cirurgia bariátrica. As medições na %GC são dadas de acordo com as variações: idade, sexo e grupo étnico.

<i>Sobrepeso e Obesidade</i>		IMC
<i>Sobrepeso</i>		25 a 29,9
<i>Obesidade</i>	Grau I	30 a 34,9
<i>Obesidade</i>	Grau II	35 a 39,9
<i>Obesidade Morbida</i>	Grau III	>40

Tabela 6.1: Classificação do IMC

<i>%GC</i>	Mulheres	Homens
<i>Adequada</i>	<25%	<15%
<i>Leve</i>	25 - 30%	15 - 20%
<i>Moderada</i>	30 - 35%	20 - 25%
<i>Elevada</i>	35 - 40%	25 - 30%
<i>Mórbida</i>	>40%	>30%

Tabela 6.2: Classificação da %GC

Avaliação da obesidade usando a teoria fuzzy

Considere um paciente com o IMC=39 e outro paciente com IMC=40. Segundo a classificação booleana, estes pacientes são classificados, de acordo com a OMS, em distintas categorias de obesidade e recebem tratamentos diferentes. Mesmo que a diferença entre os IMC dos dois pacientes seja pequena, o paciente com IMC=39 não está indicado a fazer a cirurgia bariátrica, a menos que seja portador de doenças relacionadas a obesidade (comorbidades), já o paciente com o IMC=40 está indicado a fazer a cirurgia. É importante observar que estes dois pacientes podem não apresentar diferenças relevantes às suas condições clínicas e biológicas que explicam essa enorme diferença nos tratamentos.

Visto que esses limites fazem com que certos pacientes tenham tratamentos inadequados, a lógica fuzzy é usada a fim de minimizar esses erros. A lógica fuzzy será usada por ser uma ferramenta poderosa para lidar com valores imprecisos, incertos, apontando soluções consistentes e de baixo custo.

	IMC > 35 e < 40	IMC > 40
<i>Sem comorbidades</i>	Sem indicação	Com indicação
<i>Com comorbidades</i>	Com indicação	Com indicação

Tabela 6.3: Indicação ao tratamento cirúrgico

Na lógica fuzzy, o paciente com o IMC=39 estaria no conjunto com indicação ao tratamento cirúrgico com um certo grau de pertinência e também no conjunto sem indicação ao tratamento cirúrgico com um determinado grau de pertinência.

Para indicar o melhor tratamento da obesidade incluindo a ICB, é proposto em [4] um modelo baseado em regras fuzzy no qual foram tomadas como variáveis de entrada o IMC (índice de massa corporal) e a %GC (porcentagem de gordura corporal), tendo como variável de saída o índice MAFOI (Miyahira Araujo Fuzzy Obesity Index). Este índice foi construído a partir da junção do IMC e %GC onde este terá a capacidade de avaliar com mais propriedade a real composição e quais pacientes devem ser encaminhados à cirurgia bariátrica.

Métodos

Para avaliação do desempenho de diagnóstico de obesidade através do IMC foi utilizado o padrão de referência da OMS e para a avaliação do desempenho de diagnóstico de obesidade através da %GC foram considerados os valores %GC > 35% para mulheres e %GC > 25% para homens.

Inicialmente, as variáveis de entrada IMC e %GC, que eram conjuntos clássicos, foram fuzzificadas (Figura 6.12 e Figura 6.13).

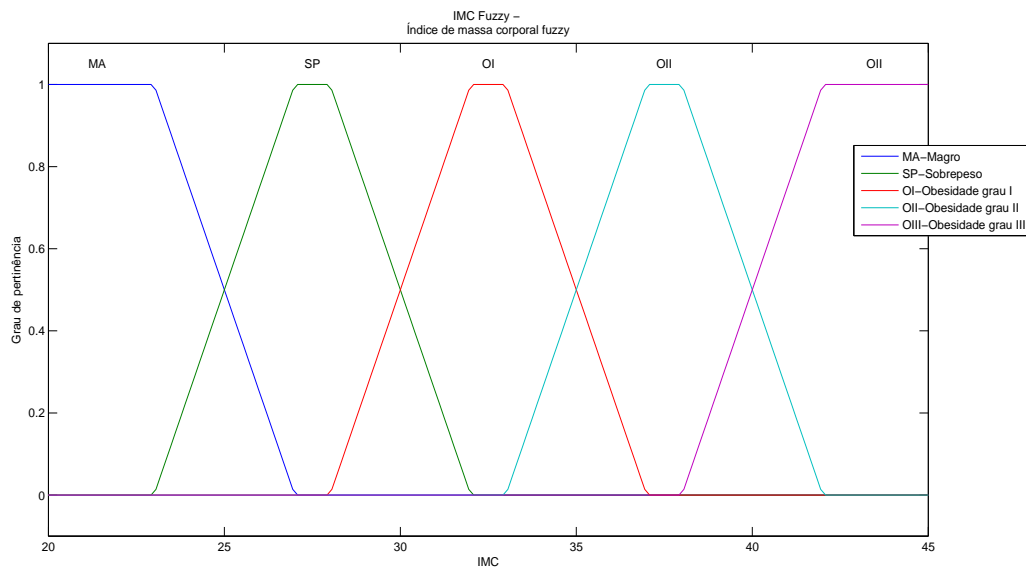


Figura 6.12: Índice de massa corporal (IMC) fuzzy.

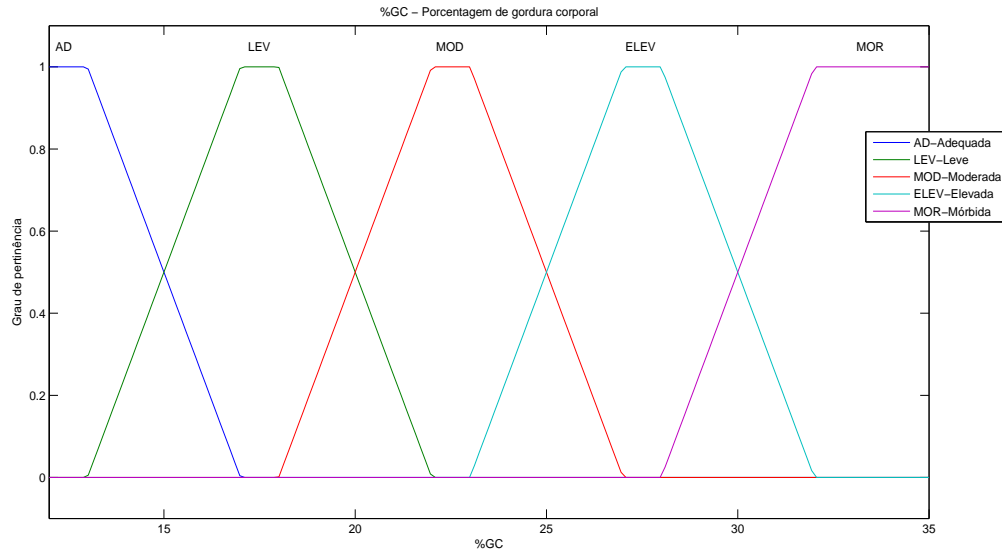


Figura 6.13: Porcentagem de gordura corporal (%GC) fuzzy.

A partir disso, o IMC e %GC foram relacionadas num sistema de inferência fuzzy constituído de 22 regras e teve como variável de saída o índice MAFOI (Figura 6.14). Esta relação está associada à estimativa da obesidade (entrada) e à classificação da obesidade e ICB (saída).

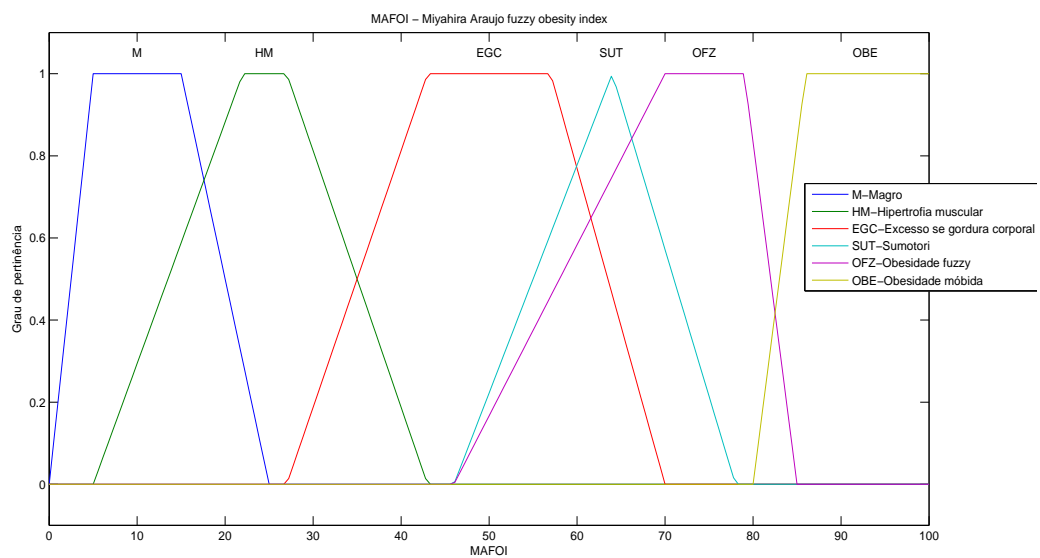


Figura 6.14: Miyahira Araujo fuzzy obesity index (MAFOI).

As regras ficaram restritas somente àquelas consideradas compatíveis com a existência humana e a base de regras será apresentada na tabela 6.15:

% GC \ IMC	MA	SP	OI	OII	OIII
AD	M	HM	HM	HM	-
LEV	M	HM	HM	HM	-
MOD	EGC	EGC	SUT	SUT	OBE
ELEV	EGC	OFZ	OFZ	OFZ	OBE
MOR	-	OFZ	OFZ	OFZ	OBE

Figura 6.15: Matriz difusa para classificação da obesidade.

Legenda:

AD - Adequada

LEV - Leve

MOD - Moderada

ELEV - Elevada

MOR - Mórbida

MA - Magro

SP - Sobrepeso

OI - Obesidade grau I

OII - Obesidade grau II

OIII - Obesidade grau III

M - Magro fuzzy

HM - Hipertrofia muscular

EGC - Excesso de gordura corporal

SUT - Sumotori

OFZ - Obesidade fuzzy

OBE - Obesidade mórbida

Este índice (MAFOI) admitiu a classificação de obesidade nas categorias EGC, OFZ, SUT e OBE e a indicação à cirurgia nas categorias OFZ com comorbidades, OFZ sem comorbidades e com grau de pertinência em OBE e OBE independente da presença de comorbidades.

Para tomada de decisão foi utilizado o método de Mamdani e para a defuzzificação o centro de massa. O esquema do sistema de inferência utilizado é apresentado na Figura 6.16.

A superfície de mapeamento para classificação da obesidade está graficamente representada na Figura 6.17.

Conclusão

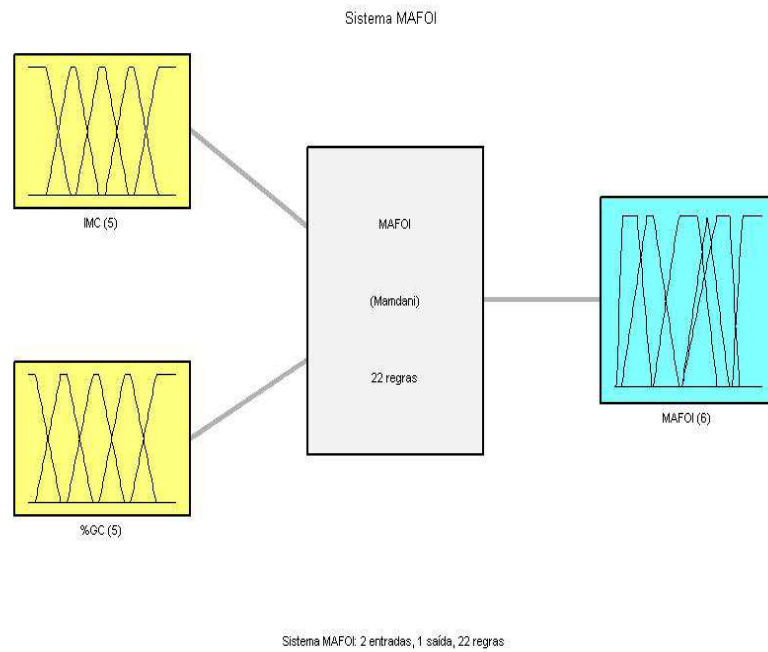


Figura 6.16: Sistema Miyahira Araujo Fuzzy Obesity Index (MAFOI). Duas entradas: IMC e %GC. Uma saída: MAFOI. Número de regras: 22 [4].

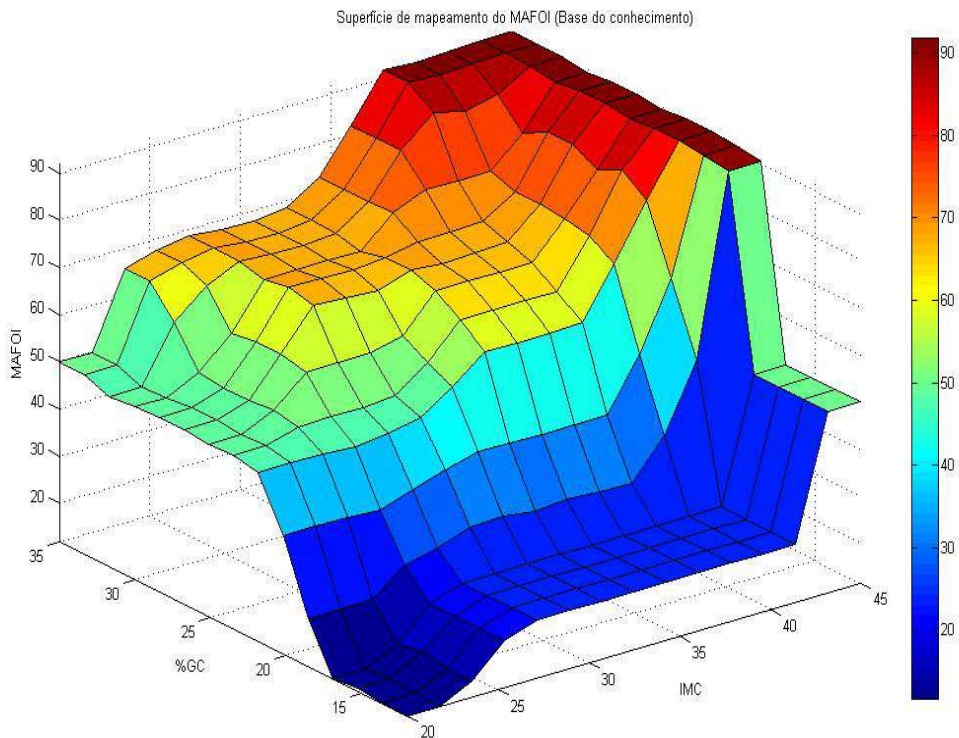


Figura 6.17: Superfície de mapeamento do Miyahira Araujo Fuzzy Obesity Index (MAFOI) [4].

Segundo [4] ficou demonstrado em seu trabalho que o índice MAFOI está mais próximo da real condição clínica obesidade do indivíduo do que o IMC e %GC considerados isoladamente. Além disso, sua utilização demonstrou ser uma alternativa adequada para classificação da obesidade, bem como para ICB. Maiores detalhes podem ser encontrados em [4].

6.5 Considerações Finais

Apresentamos nesse trabalho conceitos básicos da Teoria de Conjuntos Fuzzy, procurando incluir exemplos e, quando possível, fazer conexões com a Teoria Clássica. O estudo de sistemas baseados em regras fuzzy permitiu conhecer várias áreas onde a lógica fuzzy tem sido utilizada. Espera-se que esse material apresentado possa ser útil para alguma disciplina de introdução à teoria, à nível de graduação.

Referências

- [1] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. 2. ed. Campinas-SP: Grupo de Biomatemática-Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-Universidade Estadual de Campinas, 2010.
- [2] ZORZATE, E. H. et al. Proposta para avaliação de fornecedores de matéria prima para uma indústria joalheira utilizando um sistema fuzzy. *XII SIMPEP-Bauru, SP*, 2005.
- [3] DEMICCO, R. V.; KLIR, G. J. *Fuzzy logic in Geology*. San Diego: Elsevier, 2004.
- [4] MIYAHIRA, S. A. *Sistema de suporte à decisão baseado na lógica fuzzy para classificação da condição clínica obesidade e indicação de cirurgia bariátrica*. Tese (Doutorado) — UNIFESP - Universidade Federal de São Paulo, 2012.
- [5] DIAS, M. R. B. *Equações Diferenciais Ordinárias com campo de direções parcialmente conhecido*. Tese (Doutorado) — IMECC - UNICAMP, 2006.
- [6] KLIR, G. J.; B.YUAN. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. 5. ed. Rio de Janeiro: Prentice Hall, 1995.
- [7] ZADEH, L. A. Fuzzy Sets. *Information and Control*, v. 8, p. 338–353, 1965.
- [8] KRUSE, R.; GEBHARDT, J.; KLAWONN, F. *Foundations of Fuzzy Systems*. Germany: John Wiley e Sons, 1995.
- [9] CECCONELLO, M. S.; SILA, J. D. M.; BASSANEZI, R. C. *Sistemas Dinâmicos fuzzy: Modelagens alternativas para sistemas biológicos - Volume 50*. São Carlos - SP: Notas em matemática aplicada, SBMAC, 2010.
- [10] JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Usando a Teoria Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*. Sorocaba - SP: Simpósio de Aplicações em Lógica Fuzzy, 2008.