UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CÂMPUS DE BAURU

Sílvio Marcelino da Silva

# CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA

Bauru
2018

Sílvio Marcelino da Silva

# CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Orientador: Prof. Dr. Valter Locci

Bauru
2018

Silva, Sílvio Marcelino da.
Construções geométricas planas e espaciais no ensino da geometria / Sílvio Marcelino da Silva . -- Bauru, 2018
66 f. : il.

Orientador: Valter Locci
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Ensino fundamental. 4. Ensino médio. 5. Matemática – Metodologia. I. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. II. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Sílvio Marcelino da Silva

**CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS NO ENSINO DA GEOMETRIA**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Faculdade de Ciências da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de Bauru.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Valter Locci
UNESP – Bauru
Orientador

Prof. Dr. Gustavo Antonio Pavani
UNICENTRO - Universidade Estadual do Centro-Oeste do Paraná

Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Tatiana Miguel Rodrigues de Souza
UNESP – Bauru

Bauru
29 de junho de 2018

## DEDICATÓRIA

À minha esposa Camila, grande amiga, companheira e o grande amor da minha vida, que sempre esteve ao meu lado e me motivou a continuar estudando. Principal responsável por esse trabalho.

Aos meus pais Conceição Paula da Silva e José Paula da Silva, que sempre foram exemplos de luta e garra.

Aos meus filhos Bruno e Lucas que me dão energia para que eu sempre lute e deixe um legado positivo para eles.

Aos meus irmãos e irmãs, Maria dos Prazeres, Paulo, Matilde, Maria Delza, Alício, Benê, Izilda, Cris, João e principalmente Luís Antônio da Silva que sempre serviu de exemplo de ética, bondade, humildade, luta, garra e sabedoria.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me dado força e saúde para poder trabalhar e estudar ao mesmo tempo, por toda a minha vida. As lutas foram contínuas e árduas, mas a vitória muito gloriosa. E, nesse momento, mais uma batalha vencida, graças à ajuda de Deus.

Não poderia deixar de agradecer aos meus queridos e amados PAIS, Conceição Paula da Silva e José Paula da Silva, que já não estão mais nesse mundo, mas, sem eles, nada disso poderia acontecer. Minha mãe, exemplo de bondade, serenidade, honestidade, perseverança e trabalho. Meu pai é o maior exemplo de determinação, garra e trabalho. Esse legado deixado por vocês é o que me dá força para continuar.

O meu agradecimento especial é para a minha companheira e amada esposa Camila Aparecida da Silva que me incentivou e me conduziu a fazer tudo isso. Sempre ao meu lado, apoiando, me orientando e motivando. Tenho certeza que é a pessoa mais importante que me motivou a chegar até aqui. Agradeço profundamente por todas as vezes que foi dirigindo o carro até Londrina, para que eu pudesse repousar por duas horas, para que eu recuperasse as energias depois de uma semana cheia de trabalhos, e assim conseguir assistir as aulas do PROFMAT. Nunca vi uma pessoa tão dedicada e companheira que realmente fez e faz toda diferença na minha vida. Camila, meu amor, sem você o meu caminho é mais escuro e inseguro, obrigado por iluminá-lo e por me ajudar a desviar das pedras e dos precipícios.

Dedico esse trabalho a todos os meus irmãos e irmãs que são pessoas importantíssimas na minha vida. O meu muito obrigado a Izilda, Maria Delza, Cristina, Benê, João Batista, Paulo e José Alício. Sempre ao meu lado e me apoiando. São exemplos de sabedoria, bondade, garra, persistência e de trabalho. Representam o legado deixado pelos nossos pais.

Não poderia deixar de citar meu irmão Luís Antônio da Silva, minhas irmãs Matilde e Maria dos Prazeres, que já partiram para a outra vida, porém deixaram exemplos de sabedoria e bondade. Foram e são muito especiais na minha vida. São luzes que iluminam o meu caminho.

Também dedico esse trabalho aos meus filhos Bruno Marcelino da Silva e Lucas Vital Costa da Silva, para que sirva de exemplo para as suas próprias realizações. Quero servir de exemplo de luta, garra, trabalho, honestidade e perseverança, para que também deixe um legado de fraternidade, amor e conquistas.

Aos professores de toda a minha vida, principalmente aos professores do mestrado PROFMAT: Tati, Agnaldo, Fabiano, Toninho e ao meu orientador Valter Locci. Agradeço profundamente o carinho, atenção, profissionalismo e pela força que tem me dado. Que Deus abençoe todos vocês.

Agradeço o apoio de todos os meus amigos que acreditaram em mim. Um abraço e o meu muito obrigado.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”. - Marthin Luther King

## RESUMO

Este trabalho foi formulado, visando diminuir as dificuldades apresentadas na aprendizagem da geometria, e também, proporcionar aos professores da área mais um recurso didático para trabalhar este assunto que é de total relevância no ensino da Matemática. Vivemos em um mundo real e não abstrata. Além de demonstrações virtuais das figuras planas e espaciais, podemos muitas vezes, construí-las e torná-las reais manualmente, e assim, colaborar com o desenvolvimento das habilidades de construção dos educandos, além do que a aprendizagem se torna mais prazerosa e mais prática. Nosso objetivo geral é reafirmar que a geometria está presente em toda parte, que tudo o que nos cerca tem formas geométricas, tanto na natureza quanto nas coisas produzidas pelo homem no decorrer da evolução da espécie humana. E nosso objetivo específico tem como estrutura os seguintes pensamentos: facilitar uma maior compreensão da geometria plana e espacial para os alunos do Ensino Fundamental e Médio, através de construções geométricas; desenvolver um estudo mais aprofundado sobre esta temática, visando colaborar com o trabalho do professor que atua no ensino de geometria; oferecer um recurso didático adicional para facilitar a exposição do conteúdo de geometria.



**Palavras-chave:** Geometria. Construções Geométricas. Ensino de Matemática.

***ABSTRACT***

*This work was formulated aiming to reduce the difficulties presented in the learning of geometry, and also to provide to the teachers of this field an extra didactic resource to work on this subject which is of total relevance in the teaching of Mathematics. We live in a real world, not in a virtual one. In addition to virtual demonstrations of flat and spatial figures, we can often construct them and make them real by hand, and thus collaborate with the development of the students' construction skills, and the learning becomes more pleasurable and more practical. Our general objective is to reaffirm that geometry is present everywhere, and everything around us has geometric forms, both in nature and in things produced by man in the course of the evolution of the human species. And our specific objectives are structured as follows: facilitate a better understanding of flat and spatial geometry for elementary, middle and high school students through geometric constructions; develop a more detailed study on this subject, aiming to collaborate with teachers who work in the teaching of geometry, and offer an additional didactic resource to facilitate the exposure of the geometry contents.*

***Keywords:*** *Geometry. Geometric Constructions. Mathematics Teaching.*

**LISTA DE FIGURAS**


| | | | |
|---|---|---|---|
| Figura 1 | - | Arco de Parábola e o Triângulo ABC | 19 |
| Figura 2 | - | Polígonos | 24 |
| Figura 3 | - | Transformações Geométricas e Isométricas no Plano | 24 |
| Figura 4 | - | Circunferência, Elipse e Obtenção de Arco | 25 |
| Figura 5 | - | Cilindro, Cone e Tronco de Cone | 25 |
| Figura 6 | - | Mediatriz de um Segmento de Reta AB | 35 |
| Figura 7 | - | Reta t paralela à reta r | 35 |
| Figura 8 | - | Construção do Triângulo Equilátero ABC | 36 |
| Figura 9 | - | Construção de uma Circunferência de Centro O | 36 |
| Figura 10 | - | Circunferência com Retas Perpendiculares | 37 |
| Figura 11 | - | Mediatriz do Segmento OF | 37 |
| Figura 12 | - | Traço da Circunferência com Centro em H e Raio HE | 37 |
| Figura 13 | - | Segmento EI como lado do Pentágono Regular | 38 |
| Figura 14 | - | Traço da Circunferência com Centro em E e Raio EI | 38 |
| Figura 15 | - | Divisão da Circunferência de Centro O em Arcos de Comprimento EA | 38 |
| Figura 16 | - | Pentágono Regular ABCDE | 39 |
| Figura 17 | - | Triângulo ABC | 39 |
| Figura 18 | - | Circunferência de Centro O e o Triângulo Destacado KOF | 40 |
| Figura 19 | - | Quadrado APBQ | 41 |
| Figura 20 | - | Forma planificada de um tetraedro regular | 41 |
| Figura 21 | - | Forma planificada de um cubo | 42 |
| Figura 22 | - | Forma planificada de uma pirâmide quadrangular regular | 42 |
| Figura 23 | - | Forma planificada de um prisma pentagonal regular | 42 |
| Figura 24 | - | Forma planificada de um prisma triangular regular | 42 |
| Figura 25 | - | Forma planificada de um dodecaedro regular | 43 |
| Figura 26 | - | Forma planificada de um icosaedro regular | 43 |
| Figura 27 | - | Forma planificada de um cilindro reto | 43 |
| Figura 28 | - | Forma Planificada da Lateral de um Cone Reto a partir de um Setor Circular de Raio g e Centro em V | 43 |
| Figura 29 | - | Ponto A se aproximando de B | 44 |
| Figura 30 | - | Cone Circular Reto | 44 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Figura 31 | - | Forma Planificada de uma Pirâmide Triangular Regular .......................... | 44 |
| Figura 32 | - | Forma Planificada de um Prisma Hexagonal Regular .............................. | 45 |
| Figura 33 | - | Forma planificada de uma pirâmide hexagonal regular ........................... | 45 |
| Figura 34 | - | Cubo, Octaedro Regular e Tetraedro Regular .......................................... | 49 |
| Figura 35 | - | Pirâmide Quadrangular Regular ................................................................ | 50 |
| Figura 36 | - | Cone Circular Reto e Cubo ........................................................................ | 51 |
| Figura 37 | - | Cilindro Equilátero e Tetraedro Regular .................................................. | 52 |
| Figura 38 | - | Esfera Inscrita no Cone Equilátero e a Secção Meridiana ........................ | 53 |
| Figura 39 | - | Esfera Circunscrita ao Cone Equilátero e a Secção Meridiana ................ | 53 |

**SUMÁRIO**


| | | |
|---|---|---|
| 1 | Introdução ........................................................................................................ | 14 |
| 2 | Um pouco da História da Geometria ................................................................... | 17 |
| 3 | Tecnologia no Ensino da Geometria .................................................................... | 23 |
| 4 | Geometria no Currículo do Ensino Brasileiro ...................................................... | 27 |
| 5 | A Importância das Construções Geométricas ....................................................... | 29 |
| 6 | Construções Geométricas Planas e Espaciais......................................................... | 34 |
| 6.1 | Algumas Construções Elementares com Régua e Compasso ................................ | 34 |
| 6.2 | Alguns Modelos Planificados Para a Construção dos Sólidos Geométricos .......... | 41 |
| 7 | Abordagem Metodológica e Pedagógica das Construções Geométricas com os Alunos .......................................................................................................... | 46 |
| 7.1 | Depoimentos......................................................................................................... | 54 |
| 8 | Considerações Finais ........................................................................................... | 56 |
| | Referências .......................................................................................................... | 58 |
| | Apêndice ............................................................................................................. | 61 |

# 1 INTRODUÇÃO

Desenvolver uma pesquisa relacionada a esse tema, visa elencar elementos para colaborar com o profissional da área da Matemática, no desenvolvimento de seu trabalho quando este vai apresentar aos seus alunos a construção geométrica de figuras espaciais e planas em Geometria. Nossa sociedade educacional, atua com base em parâmetros curriculares e currículos que direcionam o ensino de geometria de forma que muitas vezes não permitem que o aluno compreenda de forma significativa o objetivo da aprendizagem destes conceitos. Vivemos em um mundo em que podemos enxergar a geometria em tudo. Temos um laboratório natural ao nosso redor. Como ignorar os prismas hexagonais construídos pelas abelhas, os pentágonos da casca do abacaxi, as flores cujas pétalas formam quadrados, hexágonos, octógonos e outros, os troncos cilíndricos e cônicos? Sem falar das esferas representadas por laranjas, melancias, uvas, etc.? E das medidas que obedecem a um mesmo padrão, que é o número de ouro? E os caracóis que possuem medidas relacionadas à sequência de Fibonacci? Sem falar de um gomo de laranja com casca para representar uma cunha esférica? E as construções feitas pelo homem? Tudo tem formas e teve um projeto plano para obtê-las.

A base curricular dificulta a compreensão dos nossos alunos, quando partimos de elementos abstratos para o ensino da geometria tendo que tornar concreto conceitos como ponto, reta e plano sendo que o aluno tem ao seu redor uma infinidade de figuras espaciais, que deveriam ser vistas no todo para os elementos menores, ou seja, esmiuçar os sólidos a partir de sua totalidade, para depois destacar então os elementos mais específicos. Como a utilização de construções geométricas pode auxiliar no ensino de geometria plana e espacial? Quando construímos figuras planas e espaciais saímos de um mundo abstrato e virtual, para um mundo real e concreto. É através das construções que passamos a compreender melhor os elementos geométricos euclidianos, propriedades, medidas, teoremas, superfícies e capacidades. Muitas figuras planas e objetos espaciais quando construídos, tornam reais as suas propriedades e elementos, permitindo que o sujeito que as constrói, possa explorar todos os seus sentidos, pois poderá visualizar, manusear e observar estas formas.

Sentimos otimismo quanto ao ensino da Geometria Plana e Espacial, por sabermos que mais pesquisadores se interessam pelo tema e o resultado é que após o ano de 2010, de acordo com o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GREPEM da Universidade Federal de Juiz de Fora, o qual fez um levantamento sobre as publicações de trabalhos nesta área, mostrou que é evidente o número crescente de pesquisas voltadas para o ensino da Geometria.

Percebe-se também, que começa a haver um resgate do desenho geométrico, que desde 1990 desapareceu das grades curriculares, e inclusive, dos livros didáticos. Pensamos que seja bom que isso esteja acontecendo, visto que construir figuras planas usando régua e compasso, ou sólidos geométricos partindo de suas planificações, significa fazer sentido e a partir daí o aluno começa a desenvolver habilidades, compreensão, raciocínio que facilitam a resolução de problemas.

De acordo com nossa experiência profissional, notamos uma grande dificuldade dos alunos na resolução de problemas geométricos. Muitas vezes não conseguem imaginá-los e interpretá-los, então propomos a estes alunos que façam uma construção dos desenhos geométricos no plano, e a partir daí, os elementos se tornem mais significativos, e os alunos conseguem resolver o problema proposto com outro olhar, dimensionando a resolução para uma perspectiva em que a abstração se materializa de forma a colaborar ainda mais com a aprendizagem desse aluno.

Notemos então a grande importância do desenho geométrico plano com o uso de régua, compasso, esquadros e transferidor, pois com isso conseguimos dar sentido às resoluções dos problemas. Esses desenhos planos que são construídos servirão como base para o estudo da Geometria Espacial, sobretudo em relação aos sólidos geométricos. A união do desenho geométrico plano e os projetos planificados de sólidos geométricos que serão dobrados e montados, tem uma expressiva significância dos conceitos que serão estudados, como: superfície total, volume e diagonais dos sólidos.

A presente pesquisa pretende resgatar a importância do desenho geométrico usando materiais simples como réguas, transferidores, compassos, softwares como o GeoGebra e as construções dos sólidos geométricos para o ensino da geometria no ensino médio.

> Olhar, classificar, comparar são princípios da Matemática. Se alguém estender uma mão cheia de balas e outra com poucas para que uma criança escolha, ela reconhece a diferença de quantidades e vai optar pela mão cheia. Isso é uma aplicação cotidiana e prática da Matemática. [D'AMBRÓSIO, 2002].

As figuras tridimensionais, quando vistas em um plano se tornam muito abstratas, e quando construímos, obtemos um maior entendimento, facilitando a visualização e os resultados obtidos. É por isso que nesse momento os materiais concretos são indispensáveis.

Em muitos trabalhos de pesquisas, livros didáticos e artigos científicos, os autores ressaltam a grande dificuldade de ensinar geometria, que dentre os assuntos abordados da Matemática, é o mais complicado. Essa dificuldade fica bem clara no artigo de Eduardo

Pereira de Santana e Eduardo Alves (2008) “A dificuldade de ensinar geometria”, apresentado à Universidade Estadual Vale do Acaraú – SE.

Podemos notar que há certa rejeição por parte de alguns professores para trabalhar esse assunto e, em nosso ponto de vista, discordamos destas visões e opiniões, pois encontramos grande facilidade e notamos que a maioria dos alunos compreendem e gostam de aprendê-la. É para isso que mais uma vez voltamos a afirmar que tais dificuldades são minimizadas quando construímos e tornamos os problemas abstratos em situações concretas, palpáveis e reais.

Torna-se evidente e necessária a intensificação das pesquisas e desenvolvimentos de metodologias alternativas para o ensino da geometria com construções de sólidos partindo de um projeto planificado cujas figuras planas foram desenhadas com o uso de régua, compasso, esquadros e transferidor, e também, o uso de *softwares* que auxiliam tais construções, como o GeoGebra.

Tudo o que olhamos a nossa volta tem formas, medidas e ocupam um espaço e a maioria são construídas pelo homem. Então, como podemos ignorar a geometria plana e espacial, sendo que a mesma vem sendo desenvolvida pelo homem há milhares de anos? É através da geometria que passamos a compreender muitos assuntos de Matemática. Podemos dizer que uma das formas de aplicarmos e entendermos a Matemática é através da geometria.

## 2 UM POUCO DA HISTÓRIA DA GEOMETRIA

Apresentaremos um resumo da história da geometria desde os tempos mais antigos até os dias atuais. Esse resumo mostra a contribuição de povos do mundo todo, sobretudo das civilizações mais antigas que se tem conhecimento. As informações mais antigas foram documentadas em papiros, escritas em argilas, em desenhos nas grandes construções e estão em muitos museus, espalhados em vários países.

A Geometria vem do grego antigo, onde geo = terra e metron = medição e surgiu com a necessidade do homem em medir, ocupar espaço. A geometria era um dos campos da matemática pré-moderna, sendo que o outro campo era a aritmética, que traz o estudo dos números.

É notável que o ensino da Geometria é um desafio na maioria das escolas, sobretudo nas escolas públicas. Muitos professores da área não detêm os conhecimentos geométricos necessários para a realização das suas práticas pedagógicas.

A Geometria está quase ausente da sala de aula e não recebe a mesma importância em relação às outras partes da matemática. Podemos notar isso nos livros didáticos, entre professores, alunos, etc.

As demonstrações são baseadas no raciocínio lógico dedutivo que prevalecem, isso não quer dizer que não seja importante, mas existe uma omissão dos conceitos básicos e da prática geométrica, incluindo suas aplicações e construções.

Nota-se que em grande parte, o ensino da Matemática de um modo geral, ainda busca sua essência nos moldes arcaicos utilizados no passado, baseando-se apenas na resolução de problemas e deixando de lado a exploração de desenhos geométricos, construções e representações de figuras planas e poliédricas.

> A "geometria" dos babilônios e egípcios era essencialmente uma geometria métrica, isto é, preocupada em calcular comprimentos, áreas e volumes. Para isso, eram utilizadas algumas propriedades geométricas de figuras planas e de sólidos geométricos, sem que saibamos como chegaram a estes resultados. Como ainda hoje acontece na Matemática escolar, os exemplos de problemas babilônios e egípcios às vezes são bem artificiais, modelos simplificados de situações reais, proposto para exercitar ou verificar as habilidades de cálculo dos escribas. (ROQUE; CARVALHO, 2012, p. 45)

É simplesmente maravilhoso conhecer um pouco da história da matemática, sobretudo no campo da Geometria. Centenas de construções milenares existem no mundo, todas com suas peculiaridades e regularidades que até hoje o homem contemporâneo não consegue entender. Sabemos que os pesquisadores citariam as pirâmides, que surpreendentemente, estão pelo mundo todo, sobretudo as pirâmides egípcias. Se viajarmos para o continente asiático, não podemos deixar de citar a Grande Muralha da China (aproximadamente 20 séculos de construção – 215 a.C. a 1568), além de outros templos, que são verdadeiras obras de arte.

Devemos também, citar a Índia com suas contribuições fenomenais nas construções de templos, que marcam a capacidade do homem no decorrer da história. Pouco sabemos sobre os Impérios Inca e Maias, mas, o que temos, é suficiente para concluirmos que suas construções e templos mostram a beleza e capacidade humana de realizar obras incríveis, com uma precisão incontestável.

> ‘’[...] Os registros primordiais mais antigos da geometria podem ser atribuída a povos primitivos, que descobriram triângulos obtusos no antigo Vale do Indo (ver a matemática dos harappeanos), e antiga Babilônia (ver matemática babilônica) em torno de 3000 a.C.. Geometria primitiva era uma coleção de princípios empiricamente descobertos em matéria de comprimentos, ângulos, áreas e volumes, que foram desenvolvidos para satisfazer alguma necessidade prática em agrimensura, construção, astronomia e vários ofícios. Entre estes estavam alguns princípios surpreendentemente sofisticados, e a um matemático moderno pode ser difícil derivar alguns deles sem o uso de cálculo. Por exemplo, tanto os antigos egípcios como os babilônios estavam cientes de versões do teorema de Pitágoras cerca de 1500 anos antes de Pitágoras; egípcios tinha uma fórmula correta para o volume de um tronco de uma pirâmide de base quadrada”. (WIKIPEDIA, 2017)

É perceptível o grande conhecimento matemático e geométrico em tudo isso. Medir, construir e repartir são necessidades naturais do ser humano, e daí é que surgiram todas essas maravilhas. Não poderíamos deixar de citar as construções realizadas pelo homem moderno, seus arranha céus que desafiam as leis da natureza, e que determinam formas geométricas que fogem dos padrões clássicos e representam a grande capacidade do homem na cadeia evolutiva do conhecimento.

**Descobertas e criações de grandes geômetras**

Segundo informações do site Mundo Educação, ao longo da história da Geometria, que se constituiu como ciência organizada na Grécia Antiga, destacaram-se geômetras como Arquimedes, Descartes, Tales de Mileto, Euclides (considerado o pai da Geometria), entre outros. A esses estudiosos, que formularam axiomas, postulados e teorias, podemos atribuir descobertas e criações como:

- A área sob o arco de uma parábola (Arquimedes);

  Arquimedes foi um célebre cientista, matemático e inventor grego que é muitas vezes lembrado pelo Princípio de Arquimedes. É atribuída a Arquimedes a notável determinação da área de um segmento parabólico. Provou que a área da figura formada por um arco de parábola e um segmento de reta é igual a 4/3 da área de um triângulo cuja base seja o mesmo segmento e cujo terceiro vértice seja a intersecção de uma tangente à parábola que seja paralela ao segmento dado AC da Figura 1.

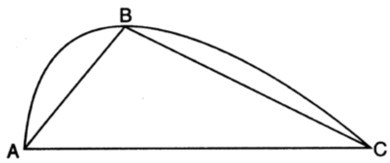



Figura 1 – Arco de Parábola e o Triângulo ABC

- A aproximação do valor numérico do número PI (Arquimedes);

  Os primeiros indícios escritos sobre o PI datam de 1900 a.C. Babilônios e egípcios tinham uma ideia do valor aproximado. Precisamente, os babilônios estimaram o PI em uma relação de 25/8, enquanto os egípcios chegaram a um valor de 256/81.

  O matemático grego Arquimedes de Siracusa (287 – 212 a.C.) é considerado a primeira pessoa a calcular o valor de PI com mais precisão. Ele partiu da ideia de encontrar a área de dois polígonos encaixados na circunferência, um inscrito e outro circunscrito. Arquimedes não chegou ao valor exato, mas conseguiu uma ótima aproximação. Ele usou polígonos de 96 lados para encontrar um valor médio de 3,1485.

- O volume de superfícies de revolução (Arquimedes);

  Sobre a esfera e o cilindro é o mais profundo de todos os tratados escritos por Arquimedes, pois contém, entre outras coisas, uma prova rigorosa de suas grandes descobertas do Volume e da Área da superfície de uma esfera. No tratado sobre conóides esferóides, Arquimedes examina sólidos de revolução gerados por parábolas, hipérboles e elipses em torno de seus eixos.
- Sistema de coordenadas: René Descartes (1596 - 1650);
- A união da geometria com a álgebra, o que resultou na geometria analítica (Descartes);
- O diâmetro que divide o círculo em duas partes iguais: Tales de Mileto (624-546 a.C.).

- Os ângulos opostos pelo vértice são iguais (Tales de Mileto);
- Geometria euclidiana: Euclides (aproximadamente século III a.C.)

Segundo Larissa Zúniga: “A Geometria é a mais antiga manifestação da atividade matemática conhecida. Já cerca de 3000 a. C. os antigos Egípcios possuíam os conhecimentos de Geometria necessários para reconstituir as marcações de terrenos destruídos pelas cheias do rio Nilo, bem como para construir as célebres pirâmides”.

Alguns séculos mais tarde, por volta do ano 500 a.C., houve na Grécia um grande desenvolvimento do interesse pela ciência e vários sábios se dedicaram ao estudo da Geometria. Um dos mais importantes foi Tales de Mileto, que usou propriedades de figuras geométricas para a determinação de distância sobre a superfície terrestre.

Quase ao mesmo tempo viveu Euclides de Alexandria, o mais célebre dos geômetras de todos os tempos. Euclides sintetizou toda a geometria conhecida na sua época no seu tratado “Elementos”, composto por 13 livros, que ainda há poucos anos era o principal instrumento de trabalho dos estudantes de Geometria. Este define termos como: pontos, linhas, planos, etc, mas não define outros tais como: comprimento, distância ou declive que hoje tanto se usa atualmente nas aulas.

A influência desta obra foi tão grande que durante quase 1500 anos poucos progressos se fizeram na geometria, a não ser a aplicação dos conhecimentos existentes ao traçado de mapas e Astronomia.

Só cerca do ano de 1600 o matemático francês René Descartes introduziu uma verdadeira inovação na Geometria: descobriu que havia uma relação estreita entre as figuras geométricas e certos cálculos numéricos – Geometria Cartesiana – que é algébrica, embora se conheça por Geometria Analítica. Assim, foi possível resolver facilmente, através do cálculo, problemas que eram muito difíceis à luz da geometria. É o método inventado por Descartes que permite, por exemplo, que um computador represente imagens e lhes dê movimento.

Desargues com a sua Geometria Projetiva (perspectiva) e Monge com Geometria Descritiva apresentam, pela primeira vez em muitos séculos, as primeiras verdadeiras “alternativas” à Geometria Euclidiana sem que isto signifique, contudo, que os princípios desta tenham sido questionados com as alternativas criadas.

O matemático português José Anastácio da Cunha viveu na época do Marquês de Pombal e notabilizou-se por ter escrito um tratado de Geometria no qual, a exemplo de Euclides, sintetizou os conhecimentos da época sobre essa ciência.

No fim do século passado, o caminho iniciado por Euclides teve mais um ponto de viragem. O matemático alemão David Hilbert escreveu um livro – “Fundamentos de Geometria” – em que colocou sobre bases rigorosas e modernas a Geometria. A partir do seu trabalho houve grandes progressos na Geometria e, hoje em dia, usam-se métodos muito variados para resolver problemas também muito variados e interessantes.

Zúniga ainda destaca algumas conceituações sobre Ângulos e Figuras: “Tanto entre os sumérios como entre os egípcios, os campos primitivos tinham forma retangular. Também os edifícios possuíam plantas regulares, o que obrigava os arquitetos a construírem muitos ângulos retos (de 90º). Embora de bagagem intelectual reduzida, aqueles homens já resolviam o problema como um desenhista de hoje. Por meio de duas estacas cravadas na terra assinalavam um segmento de reta. Em seguida prendiam e esticavam cordas que funcionavam à maneira de compassos: dois arcos de circunferência se cortam e determinam dois pontos que, unidos, secionam perpendicularmente a outra reta, formando os ângulos retos. O problema mais comum para um construtor é traçar, por um ponto dado, a perpendicular a uma reta. O processo anterior não resolve este problema, em que o vértice do ângulo reto já está determinado de antemão. Os antigos geômetras, o solucionavam por meio de três cordas, colocadas de modo a formar os lados de um triângulo-retângulo. Essas cordas tinham comprimentos equivalentes a 3, 4 e 5 unidades respectivamente. O teorema de Pitágoras explica porque em todo triângulo-retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa (lado oposto ao ângulo reto). E $3^2+4^2=5^2$, isto é, 9+16=25.
Qualquer trio de números, inteiros ou não, que respeitem tal relação definem triângulos-retângulos, que já na antiguidade foram padronizados na forma de esquadros”.

Zúniga também fala das Novas figuras: “Por volta de 500 a.C., as primeiras universidades eram fundadas na Grécia. Tales e seu discípulo Pitágoras coligiram todo o conhecimento do Egito, da Etúrria, da Babilônia, e mesmo da Índia, para desenvolvê-los e aplicá-los à matemática, navegação e religião. A curiosidade crescia e os livros sobre Geometria eram muito procurados. Um compasso logo substituiu a corda e a estaca para traçar círculos, e o novo instrumento foi incorporado ao arsenal dos geômetras. O conhecimento do Universo aumentava com rapidez e a escola pitagórica chegou a afirmar que a Terra era esférica, e não plana. Surgiam novas construções geométricas, e suas áreas e perímetros eram agora fáceis de calcular. Uma dessas figuras foi chamada polígono, do grego polygon, que significa "muitos ângulos". Atualmente até rotas de navios e aviões são traçadas por intermédio de avançados métodos de Geometria, incorporados ao equipamento de radar e outros aparelhos. O que não é de estranhar desde os tempos da antiga Grécia, a Geometria sempre foi uma ciência aplicada, ou seja, empregada para resolver problemas práticos. Dos problemas que os gregos conseguiram solucionar, dois merecem referência: o cálculo da distância de um objeto a um observador e o cálculo da altura de uma construção. No primeiro caso, para calcular, por exemplo, a distância de um barco até a costa, recorria-se a um curioso artifício. Dois observadores se postavam de maneira que um deles pudesse ver o barco sob um ângulo de 90º com relação à linha da costa e o outro sob um ângulo de 45º. Isto feito, a nave e os dois observadores ficavam exatamente nos vértices de um triângulo isósceles, porque os dois ângulos agudos mediam 45º cada um, e portanto os catetos eram iguais. Bastava medir a distância entre os dois observadores para conhecer a distância do barco até a costa. O cálculo da altura de uma construção, de um monumento ou de uma árvore é também muito simples: crava-se verticalmente uma estaca na terra e espera-se o instante em que a extensão de sua sombra seja igual à sua altura. O triângulo formado pela estaca, sua sombra e a linha que une os extremos de ambos é isósceles. Basta medir a sombra para conhecer a altura”.

# 3 TECNOLOGIA NO ENSINO DA GEOMETRIA

Além das construções manuais, podemos pensar em explorar também as representações geométricas através da tecnologia, que é um grande atrativo no ensino contemporâneo, servindo como ferramenta para atrair a atenção dos jovens estudantes.

Dentre estas alternativas tecnológicas, temos conhecimento da existência de *softwares* para computadores e aplicativos para *smartphones* e *tablets*. Alguns desses programas já estão instalados nos aparelhos, mas outros, através da internet podem ser baixados e instalados. Esses recursos permitem a resolução de problemas mais complexos de uma maneira mais rápida e precisa.

> Além do *Excel* é possível encontrar outros programas interativos, conhecidos como *Softwares* Livres, que podem ser acessados pela internet de qualquer computador. Obtê-los é uma questão de liberdade e não de preço. No que se refere a essa liberdade temos os seguintes conceitos: - A liberdade de executar o programa, para qualquer propósito; - A liberdade de estudar como o programa funciona, e adaptá-lo para as suas necessidades; - A liberdade de redistribuir cópias de modo que você possa ajudar ao seu próximo; - A liberdade de aperfeiçoar o programa, e liberar os seus aperfeiçoamentos, de modo que toda a comunidade se beneficie. (SILVA, 2016, p. 31)

Uma opção que vem sendo muito utilizada como *software* livre é o GeoGebra, que também está disponível em formato de aplicativo para celulares, e explora uma infinidade de possibilidades de construções Matemáticas tanto algébricas, quanto geométricas.

> O GeoGebra se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. Disponibiliza recursos para desenvolver conteúdos de Geometria, Álgebra e Planilha de Cálculo estando interconectadas e sendo totalmente dinâmicas. (SILVA, 2016, p. 34-35)

Dentre estas possíveis construções, podemos destacar algumas relacionadas à geometria:

**I**- A ferramenta Polígono possibilita construir polígonos a partir de pontos já construídos na Janela de Visualização ou mesmo a partir de pontos criados no momento do uso da ferramenta (Figura 2).

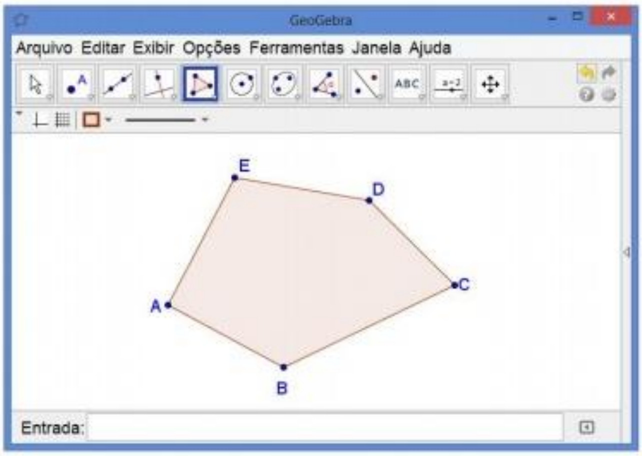



Figura 2 – Polígonos

Fonte: O GEOGEBRA. Apostila. Capítulo 5. p. 15. Disponível em: http://ogeogebra.com.br/arquivos/05-poligonos.pdf. Acesso em: 15 jul. 2017.

**II-** Na simetria de translação obtém-se uma imagem da figura original deslocada uma medida c dada, a qual pode ser representada por um vetor.

Na simetria de reflexão há um segmento passando pela figura ou fora dela que atua como espelho, refletindo a imagem desenhada. Esse segmento recebe o nome de eixo de simetria.

Na simetria de rotação, obtemos a imagem de um objeto por meio de um giro em torno de um ponto fixo, chamado de centro de rotação.

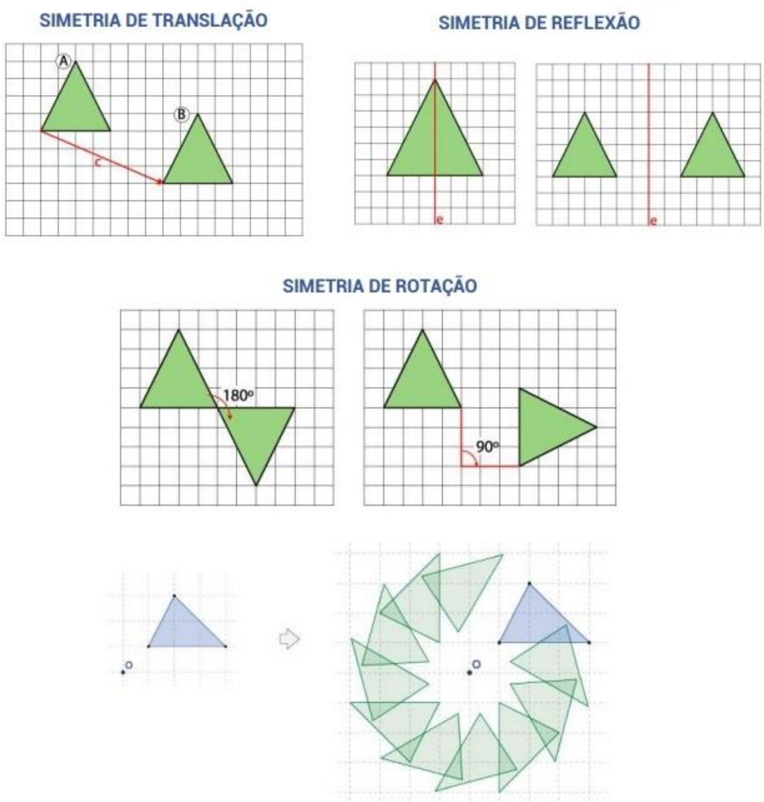



Figura 3 –Transformações Geométricas e Isométricas no Plano

Fonte: O GEOGEBRA. Apostila. Capítulo 6. p. 18-22. Disponível em: http://ogeogebra.com.br/arquivos/06-isometriasnoplano.pdf. Acesso em: 15 jul. 2017.

**III-** Cônicas: Circunferência e Elipse. Obtenção de um arco.

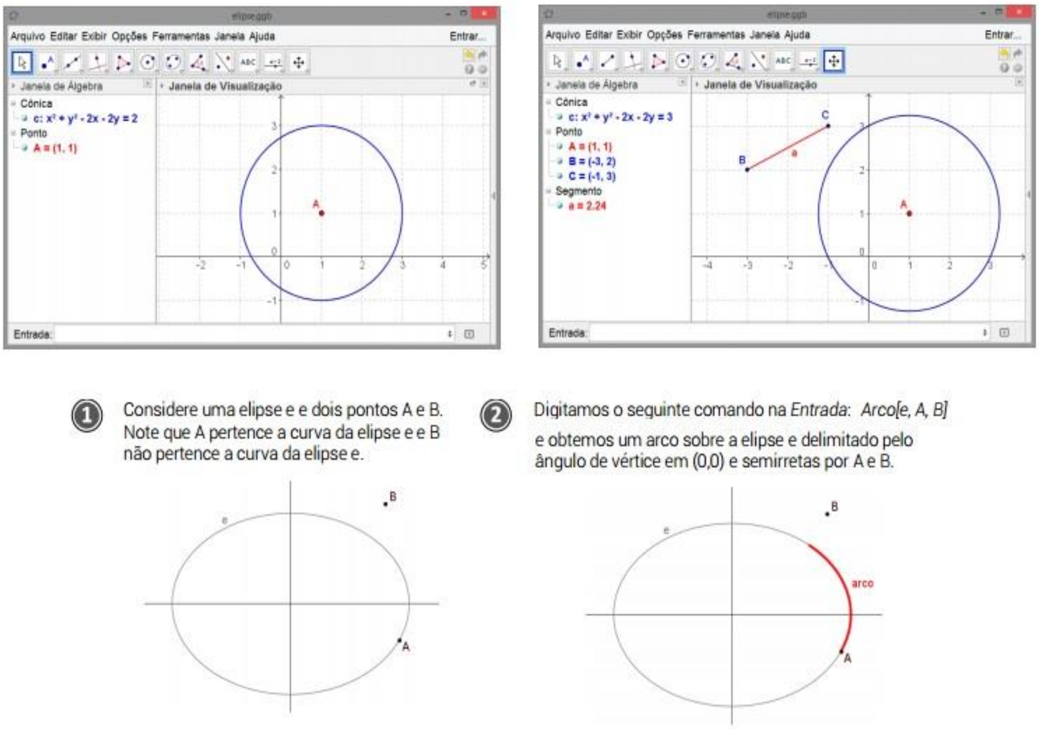



Figura 4 – Circunferência, Elipse e Obtenção de Arco

Fonte: O GEOGEBRA. Apostila. Capítulo 10. p. 36-38. Disponível em: http://ogeogebra.com.br/arquivos/10-circuloarcosetor.pdf. Acesso em: 15 jul. 2017.

**IV-** Alguns sólidos de revolução que são obtidos após a rotação completa de uma figura plana, em torno de um eixo que pode ser um de seus lados ou altura (Figura 5).

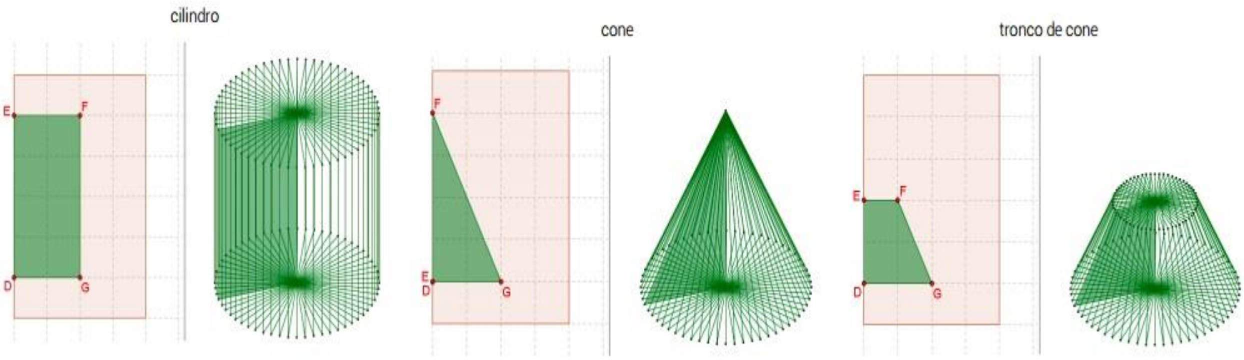



Figura 5 – Cilindro, Cone e Tronco de Cone

Fonte: O GEOGEBRA. Apostila. Capítulo 15. p. 64-65. Disponível em: http://ogeogebra.com.br/arquivos/15_3d.pdf. Acesso em: 15 jul. 2017.

Não é questão de saudosismo quando temos que falar de algumas técnicas e experiências desenvolvidas por alguns pesquisadores. Algumas práticas pedagógicas têm-se mostradas muito eficazes no que se diz respeito à aprendizagem. Mais uma vez citamos trabalhos de pesquisas que reforçam essa ideia. Sabemos que muitas pesquisas estão focadas no uso de softwares para auxiliar o trabalho do professor e a melhor compreensão do aluno. Para Sardinha, em sua pesquisa sobre O Uso do Geogebra no Ensino de Desenho Geométrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental, diz:

> [...] o Geogebra, não tem pretensão nenhuma de substituir por completo o uso das ferramentas usuais, ou seja, os materiais didáticos manipuláveis, tais como régua e compasso. Não que seja isso seja algo errado ou anti-didático. Cabe nesta questão, o bom senso de cada professor responsável e o contexto em que a ferramenta gráfica será aplicada. (SARDINHA, 2014, p. 35).

Ainda podemos citar outros pesquisadores que reforçam essa ideia. Para Lorenzato:

> O uso do material didático manipulável ainda tem-se mostrado uma eficiente ferramenta para muitos alunos que, por não compreenderem a mensagem visual expressa pela tela do computador, recorrem ao material didático disponível e então prosseguem sem maiores dificuldades com o uso do recurso computacional. Portanto, para muitos alunos, o material didático ainda desempenha uma importante função de pré-requisito para que se dê a aprendizagem por meio do uso de recursos computacionais. (LORENZATO (org.), 2010).

# 4 GEOMETRIA NO CURRÍCULO DO ENSINO BRASILEIRO

No que se refere à geometria plana, sabemos que Desenho Geométrico permaneceu oficialmente por 40 anos consecutivos nos currículos escolares de 1931 a 1971.

Em 1971 os currículos escolares sofreram grandes mudanças com a promulgação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional nº 5692. A partir daí o Desenho Geométrico tornava-se uma disciplina optativa e praticamente foi abolida dos vestibulares da época e da grade curricular da maioria das escolas. Exemplo disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática de 1998 ressalta com pouca importância o uso da régua e do compasso no ensino da Geometria Plana.

Atualmente é fácil observarmos a grande dificuldade dos discentes nos cursos de Engenharia e Arquitetura, por exemplo, por não saberem usar e manusear um compasso e uma régua em suas construções.

Ensinar Geometria utilizando desenhos e construções permite que o educando concretize os conhecimentos teóricos, confirmando graficamente as propriedades das figuras geométricas com o desenho. O educando aprende a linguagem gráfica, precisa e concisa. O desenho geométrico desenvolve capacidades importantes como: organização, autodisciplina iniciativa, serenidade e capricho, além de estimular a conexão de neurônios cerebrais, desenvolve-se a visão espacial.

Costa (1981) destaca que:

> "[...] a falta da geometria repercute seriamente em todo o estudo das ciências exatas, da arte e da tecnologia. Mas o desenho geométrico foi afetado na sua própria razão de ser, já que em si é uma forma gráfica de estudo de geometria e de suas aplicações. Muito antes de desaparecer, como matéria obrigatória no ensino do 1° grau, o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, onde muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho, pois geralmente estes se reduziam à régua e compasso." (COSTA, 1981, p.89-90).

Na Geometria Espacial é indispensável o uso de sólidos, de preferência os que são construídos pelos próprios alunos, como: poliedros, pirâmides, cones, cilindros e outros. O contato com estes objetos, permite uma maior compreensão sobre o espaço tridimensional, capacidades e superfícies destes sólidos e o estabelecimento de relações simples envolvendo os elementos componentes.

Tais problemas de Geometria Espacial, somente serão resolvidos se o aluno tiver um conhecimento em Geometria Plana e suas propriedades. Daí a importância destas duas disciplinas andarem juntas.

Portanto, pensa-se que é de grandiosa importância que o ensino de Matemática, resgate o ensino de Geometria de forma mais dinâmica e prática para:

> Elevar os conhecimentos a respeito dos objetivos geométricos planos e da esfera; desenvolver a intuição geométrica e seu uso na resolução de problemas; aumentar o raciocínio matemático através do exercício de indução e dedução de conceitos geométricos; visualizar os objetos planos e espaciais; fundamentar e examinar a evolução histórica dos conceitos de geometria espacial; conceituar e definir as principais noções de geometria espacial (D'AMBROSIO, 2009, p. 17).

Assim a Geometria Espacial permite a representação e visualização de partes do mundo real, possibilitando um conhecimento geométrico para a leitura, compreensão e ações a serem tomadas sobre a realidade, tudo isso é importantíssimo numa escola e na formação dos discentes, o que reforça Lorenzato (1995):

> Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão utilizar a Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. (LORENZATO, 1995)

Segundo a pesquisadora Lynk dos Santos Cardia (2014):

> Em grande parte das instituições, o ensino da Geometria parece ficou esquecido das séries iniciais do Ensino Fundamental e até mesmo na grade curricular do Ensino Superior. Hoje, na grade curricular da Licenciatura em Matemática, temos poucas disciplinas associadas ao Ensino de Geometria. Na própria Arquitetura, temos um número ínfimo de disciplinas voltados para essa área. Podemos citar diversos fatores, dentre eles: a má formação de alguns professores (que o Mestrado Profissional em Ensino de Matemática veio a tentar solucionar grande parte do problema), o desconhecimento da matéria, a má organização das estratégias de ensino e a organização dos conteúdos na maioria dos livros didáticos, que deixam esta matéria reservada para os últimos capítulos. O problema é mais frequente nas séries do Ensino Fundamental, gerando, portanto, uma defasagem no ensino da Geometria Plana, que aumenta com a entrada dos alunos no Ensino Médio; onde se inicia o estudo da Geometria em terceira dimensão, cujo pré-requisito necessário é a Geometria Plana. Nesta fase o problema torna-se acumulativo. Portanto é necessária, a implementação de uma metodologia diferenciada de ensino, que possibilite aos educandos compreenderem as duas geometrias de uma forma natural e instigante, que estimule a curiosidade e gere a motivação para a aprendizagem de novos conteúdos. A concepção construtivista deu o suporte teórico para o desenvolvimento deste trabalho, que tem como principal objetivo o ensino da Geometria Espacial, propiciando que o educando construa seu próprio conhecimento. Com a criação e manipulação dos objetos em terceira dimensão os alunos descobriram os conceitos de forma significativa, respeitando o tempo de aprendizagem de cada um. A abordagem histórica do tema exposto, amplia os horizontes e permite que os leitores percebam que a Matemática, principalmente a Geometria, não foi criada, mas sim descoberta e decodificada pela sua linguagem e, pelo homem, propiciando a quebra do mito de que a Matemática é inalcançável e distante da realidade.

O que nos leva a concluir o quão importante é a Geometria no Ensino de Matemática e como é grande a necessidade de resgatar um olhar mais cuidadoso para esta parte, para colaborar com os estudantes de forma com que consigam ampliar a capacidade de compreensão do mundo que os cerca, e principalmente, conseguirem ter uma compreensão significativa do conteúdo de Geometria ensinado na escola.

## 5 A IMPORTÂNCIA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

O objetivo deste capítulo é destacar a importância das construções geométricas planas e espaciais no aprendizado dos educandos, sobretudo os que estão no ensino médio. Para isso, elencamos vários trabalhos desenvolvidos nesta vertente, que tomaremos como referência para o desenvolvimento desta pesquisa, onde destacaremos a grande importância das construções, planas e espaciais, no processo de ensino e de aprendizagem dos estudantes de Matemática.

De acordo com Nascimento, Rehfeldt e Quartieri (2016) no artigo *"A construção de sólidos geométricos a partir de materiais alternativos"*, conclui-se que "CONSTRUIR" é mais interessante do que simplesmente ler, interpretar e calcular. Os próprios alunos relataram que as aulas práticas de construções são muito mais atrativas e o aprendizado é praticamente certo, uma vez que temos uma aula diferente. Construir algo real e concreto facilita a compreensão das propriedades que antes eram muito abstratas. Não importa o material a ser usado, de preferência podemos optar por aqueles de menor custo, o que importa é que os alunos adquiram uma maior percepção e base para compreenderem melhor a disciplina. Fica muito claro que através desse artigo e com suas experiências práticas em construções geométricas os alunos saem ganhando e não ficam presos a tantas fórmulas, e naturalmente conseguem identificar seus elementos e relacioná-los. Há um verdadeiro crescimento de ambas as partes, inclusive dos professores. Então, vale a pena ensinar esse conteúdo fazendo as construções e tornando as aulas mais atraentes e práticas.

Outro trabalho de pesquisa que chamou nossa atenção foi o artigo cujo tema é "*A Geometria Trabalhada a Partir da Construção de Figuras e Sólidos Geométricos"* de Altair Baldissera. Segundo Baldissera, o projeto teve a pretensão de incentivar o conhecimento e o gosto pela geometria, fazendo com que os alunos se sentissem envolvidos pelo trabalho e perceberam durante seu desenvolvimento que a atividade com formas geométricas pode ser agradável e bem compreendida.

E para colaborar novamente com a nossa pesquisa, outro trabalho de grande relevância foi a dissertação de mestrado da pesquisadora Lynk dos Santos Cardia (2014), cujo título é: *"Uma Abordagem do Ensino de Geometria Espacial: A Otimização de Embalagens como Contextualização do Conceito de Áreas de Figuras Planas e Volumes dos Sólidos Geométricos"*, neste trabalho ela traz algumas contribuições conforme seguem:

> A Matemática é uma das principais linguagens utilizada para o crescimento tecnológico e social. O desenvolvimento do trabalho de campo confirmou as hipóteses deste trabalho: o uso de uma metodologia diferenciada para o ensino,

> propiciou o reconhecimento das embalagens como sólidos geométricos e seus elementos, cálculo da área, explorando a Geometria plana, e o cálculo de volume, explorando a Geometria Espacial. A participação ativa dos estudantes nas atividades propostas e a busca pelo conhecimento mostrou para toda a equipe de matemática o quão importante é uma atividade como essa. Os resultados sugerem que é possível o ensino da Geometria de forma prática, sem comprometer a qualidade do ensino e dos conteúdos abordados, quebrando um outro paradigma quando tratamos de projetos, que é a questão do cumprimento do planejamento. A gama variada de grupos, fez com que surgissem variados tipos de embalagem, explorando os diversos tipos de situações problema encontrados na manipulação e necessidade de resolução desses problemas, para o desenvolvimento do produto que eles próprios tiveram a ideia da criação. Através da análise dos resultados, concluímos que, a metodologia abordada, para o ensino do tema, gerou o resultado esperado, pois os alunos ficaram comprometidos com o trabalho e focados nas atividades propostas, não havendo dispersão. Conseguimos também, uma evolução significativa dos rendimentos qualitativos e quantitativos. A relação professor x aluno, também foi um ponto positivo do projeto. A confiança, a procura do saber, a troca e a admiração mútua, ficaram evidenciadas durante todo o ano. Nós professores, passamos a entender e nos aproximar mais do universo dos nossos alunos, que por sua vez, passam a perceber que podem contar com o professor em qualquer problemática relacionada a disciplina que possa aparecer. Muitos alunos apresentaram dificuldades em Geometria, e na maioria dos relatos, esse problema parece ser resultante da ausência de visão geométrica e associação do concreto com o abstrato. Portanto, ao acompanhar esses grupos de alunos na série seguinte, percebesse a facilidade e o desenvolver dos conteúdos de uma forma surpreendente. Os professores, nas escolas de modo geral, representam figuras de três dimensões, em desenhos nos quadros, em segunda dimensão, o que empobrece o aprendizado, uma vez que os alunos precisam desenvolver a visão espacial, e não sejam obrigados a decorar fórmulas e reproduzir exercícios modelos. (CARDIA, 2014)

Outra pesquisadora que muito contribui com nossa pesquisa é Mariângela Assumpção de Castro (2013), com sua dissertação: *“A Construção e a Desconstrução das Ideias Geométricas: Intervenção no Ensino e na Aprendizagem na Perspectiva da Matemática Inclusiva”*. Castro deixa muito clara a importância das construções geométricas planas e espaciais no processo de aprendizagem dos alunos do ensino fundamental e médio, tornando mais fácil a compreensão e assimilação do conteúdo. Sem falar na inter-relação entre professor e aluno que tornam cada vez maior a confiança e o respeito entre as partes. Tudo isso é um ganho enorme para o crescimento de professor e aluno. Então, vale a pena ensinar esse conteúdo de Geometria Espacial através de construções, partindo de suas formas planificadas, que são projetos que necessitam de desenho geométrico plano.

Chamamos a atenção para a pesquisa de mestrado de Bruno Augusto Eloi da Costa sobre a *“Construção de Sólidos: Uma Aplicação de Atividades”*, na qual Costa (2013) destaca que as habilidades dos alunos do segundo ano do ensino médio em manipular e construir sólidos cresceu significativamente, propiciando uma maior compreensão, facilitando a aprendizagem. Além do mais, ficou claro que o desempenho dos alunos cresceu, quando comparado com anos anteriores, conforme podemos comprovar em sua pesquisa.

A pesquisa de José Kilmer Tavares Silva, intitulada: *“Um Estudo Complementar dos Poliedros Voltado para Professores e Alunos do Ensino Básico”*, nos traz a clareza de que os livros e apostilas adotados no ensino fundamental e médio são ineficientes quanto ao assunto e a abordagem do tema é muito pouco explorada ou muitas vezes nem é citado. Segundo Tavares, essa parte da geometria espacial é importantíssima para o desenvolvimento e compreensão do conteúdo. De acordo com Tavares os conteúdos relacionados à geometria espacial podem ser inseridos com mais profundidade no currículo do ensino médio e com isso nossos alunos teriam uma melhor compreensão e visualização das formas geométricas.

> Este trabalho aborda alguns tópicos que não são apresentados nos livros adotados no ensino médio. Isto evidencia a deficiência de tais livros, ao tempo que mostra que é possível fazer um estudo mais detalhado sobre Poliedros. Na verdade o assunto é amplo e merece um tratamento mais completo e rigoroso. Uma visão mais ampla no estudo dos poliedros certamente iria minorar a ojeriza que os estudantes têm da Geometria Espacial. A principal motivação deste trabalho foi gerar um material mais amplo, mais rigoroso acerca dos poliedros. Foram definidos e classificados os vários tipos de poliedros. Uma atenção especial foi dada aos poliedros convexos. Demonstramos o Teorema de Euler e a existência de apenas cinco tipos de poliedros de Platão. Calculamos a área e o volume destes poliedros. A principal conclusão é que, não só os tópicos acima, mas todos os conteúdos deste trabalho deveriam e poderiam ser inseridos no currículo do ensino médio de nossas escolas. Com eles a compreensão e a visualização das formas geométricas poderiam ser melhor entendidas. (SILVA, 2014)

No Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul, mais uma vez foi ressaltado a importância de trabalhar geometria com construções e materiais concretos. O aluno passa a construir seu próprio conhecimento, tendo sempre o professor como um mediador dos fatos. As pesquisadoras Mohr e Pacheco (2014) com o artigo *“Poliedros Duais e a Geometria Sendo Ensinada de Forma Construtiva”*, compartilham que:

> Diante de estudos percebe-se que o ensino da Matemática, em especial o da Geometria, tem alto índice de rejeição tanto por parte do professor quanto do aluno, pois muitas vezes por ser trabalhada de forma mecânica, exigindo um grande empenho do professor para tentar demonstrar a ligação dos conceitos com o cotidiano. Para que o conhecimento do educando seja construído de forma satisfatória o professor precisa estar capacitado conseguindo ser o mediador de informações, tendo a função de estimular situações que promovam a atualização e a expansão das potencialidades intelectuais do aluno, desenvolvendo o espírito crítico e a capacidade de construção do conhecimento. Portanto a aprendizagem precisa acontecer no aluno e não para o aluno, pois quando ele interage, participa e traz consigo tudo o que vê, vive e ouve, está construindo o seu conhecimento. Sendo assim, fica evidente a grande importância da utilização de materiais concretos na Educação Matemática, pois tal recurso é uma possibilidade de proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa por constituir-se como um material potencialmente significativo, de acordo com a definição de Moreira (1999). Obtemos como resultados que o estudo dos poliedros duais pode ser uma alternativa viável para a visualização dos esqueletos dos sólidos e suas propriedades geométricas, tornando a Geometria um estudo agradável. Desse modo, os educando poderão ter a possibilidade de perceber que na Matemática, tudo é construído progressivamente. Para desenvolver uma aula é extremamente necessário um professor qualificado, pois o sucesso do trabalho está na confiança, no conhecimento do educador sobre o potencial dos recursos educativos. Diante destes estudos, temos

> a oportunidades de levantar questionamentos incentivando os educandos a buscarem através da pesquisa o gosto pela Matemática, em especial a Geometria. (MOHR; PACHECO, 2014)

Baldissera confirma mais uma vez a importância de trabalhar com materiais concretos na geometria espacial. De acordo com as suas experiências como educador esses trabalhos práticos deixa a matemática mais atraente, significativa e presente, tornando mais fácil o aprendizado. Eis o seu relato:

> Este estudo tem como objetivo principal uma alternativa metodológica de ensino. Assim, a partir desta confecção ensinar a geometria espacial aos alunos para que possam descobrir as formas e as representações espaciais, com o intuito de tornar mais significativa e presente a matemática na sala de aula, valorizando os saberes prévios dos alunos. Nesse projeto foi observado que os alunos compreenderam com maior facilidade os conteúdos estudados quando utilizado o material concreto que os ajudou a desenvolver ideias sobre as situações propostas. Ao manipular esse material a percepção espacial dos alunos foi ampliada, haja vista que os mesmos estavam em contato direto com os objetos. Notou-se também que os alunos aprenderam a fazer as construções a eles propostas, permitindo assim resolver problemas utilizando os conceitos mais básicos, evitando, desta forma, decorar as fórmulas. (BALDISSERA, 1987)

Não poderíamos deixar de citar a importância do Desenho Geométrico Plano, com o uso de régua e compasso. Essa disciplina, mais conhecida como desenho geométrico, praticamente está extinta do currículo das maiorias das escolas, sobretudo da rede pública. É lamentável que essa disciplina deixou de existir, pois auxiliava no aprendizado e fazia com que o conteúdo fizesse sentido para o aluno. Além do mais, construir significa manipular o concreto. O aluno passa a construir seu próprio conhecimento. A Matemática e a Geometria ficam mais atrativas e interativas. É muito triste a realidade de termos alunos que não sabem usar um compasso, esquadro ou transferidor. A tecnologia também é uma grande parceira e disponibiliza vários recursos para trabalharmos as construções e demonstrarmos suas propriedades. Dentre eles podemos citar o GeoGebra que tem auxiliado muitos professores a desempenharem suas atividades com mais eficácia.

Segundo o pesquisador Jailson Pimentel, em sua dissertação: *"O Ensino de Geometria por meio de Construções Geométricas"*, fica evidente em sua conclusão que:

> Durante esses 18 anos de trabalho, como professor de Matemática, tive a oportunidade de ensinar aos alunos do 8º e 9º ano um pouco de construções geométricas com o uso de régua e compasso. Percebi muitas dificuldades no início. No entanto, no decorrer do processo era fácil de perceber a satisfação dos alunos diante de atividades diferenciadas e envolventes. Notei grande interesse e bom desempenho dos alunos, atingindo satisfatório aprendizado em Geometria plana e espacial, pois construímos polígonos e alguns poliedros como o cubo, o prisma triangular reto e a pirâmide de base quadrada, sempre evidenciando as propriedades geométricas aplicadas nas construções. (PIMENTEL, 2013)

O que nos chama a atenção é que o interesse em ensinar geometria a partir de construções planas e espaciais vem crescendo. O Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GREPEM – da Universidade Federal de Juiz de Fora realizou uma pesquisa documental a partir dos artigos publicados em periódicos da área de Educação Matemática no período de 2000 a 2014. Neste trabalho há um levantamento de dissertações que tem como tema o estudo da geometria. O resultado foi o seguinte:

> Observamos que a maioria dos trabalhos (11 deles) foi publicado depois do ano de 2010, indicando um aumento no interesse pela temática ensino e aprendizagem da geometria. Além disso, as categorias conteúdos de geometria euclidiana e geometrias não euclidianas são as que mais tem artigos (seis cada uma). Os trabalhos discutem diferentes aspectos relacionados à geometria, como a resolução de problemas, os livros didáticos, as dificuldades dos estudantes, os conteúdos geométricos e diversas geometrias não-euclidianas. De certa forma, esse leque de abordagens evidencia a preocupação com o ensino e a aprendizagem desses conceitos e conteúdos, principalmente, aqueles referentes à geometria não-euclidiana que comumente não são abordados em sala de aula. Contudo, ainda parece haver uma abordagem axiomática da geometria. Mesmo os trabalhos que apresentam de maneira prática esses conteúdos, de alguma forma, apoiam-se nos postulados de Euclides. Por mais que se tente pensar os elementos geométricos, isso só acontece pelo viés teórico, tornando-se dicotômico, o que também influencia o processo de ensino e de aprendizagem. Dessa forma, embora ainda existam lacunas e problemáticas que precisam ser discutidas e investigadas, consideramos um avanço, visto que até a década de 1990, os pesquisadores da área relatavam questões do abandono do ensino de geometria. (CLEMENTE, 2014)

Fechamos esta seção percebendo a importância de ensinarmos construções geométricas aos alunos. Vivemos rodeados de representações geométricas, nosso mundo é espacial, e infelizmente percebemos uma dificuldade imensa por parte dos nossos alunos em compreender esta parte da Geometria.

O fato do estudo do desenho geométrico ter deixado de ser uma disciplina escolar e ter sido diluído entre as disciplinas de Matemática e muito suscintamente para a disciplina de Artes, tira a essência que era dar um olhar mais específico para este segmento. Os professores de Matemática e Artes podem ensinar muito bem a estrutura das construções, porém ficará vaga a questão do aprofundamento das construções geométricas planas e espaciais, o que poderia ajudar o aluno a encontrar de forma mais clara as relações geométricas com os cálculos matemáticos.

# 6 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS

Neste capítulo apresentamos algumas construções planas e espaciais feitas pelos alunos com a supervisão e orientação do professor Sílvio. Partimos de modelos planos, feitos com régua e compasso para obtermos os sólidos geométricos, depois de feitas as dobraduras e colagens.

## 6.1 Algumas Construções Elementares com Régua e Compasso

Segundo Eduardo Wagner,

> "As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas". (WAGNER, 2015).

Para obtermos alguns polígonos regulares, dentre eles o triângulo equilátero, o pentágono, quadrado, hexágono e decágono, partimos de construções mais simples para que o aluno adquira segurança e domínio das ferramentas. Eis algumas construções:

**1- Construção da mediatriz de um segmento de reta AB.**

Considere um segmento de reta AB. A reta mediatriz do segmento AB é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo seu ponto médio, que iremos denominar de M.
Com a orientação do professor, foram seguidos os seguintes passos:

I- Com centros em A e B, traçar dois círculos de mesmo raio, dado que esse raio tenha comprimento maior que a metade da medida do segmento AB. Os círculos se interceptam em dois pontos que denominaremos de P e Q.

II- Com a régua traçar a reta que passa pelos pontos P e Q. Essa reta é a mediatriz do segmento AB (Figura 6).
É fácil justificarmos, basta notar que os pontos P, A, Q e B são vértices de um losango, pois PA = AQ = QB = BP. Assim, sabemos e podemos provar por congruência de triângulos que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si e se interceptam nos seus respectivos pontos médios.

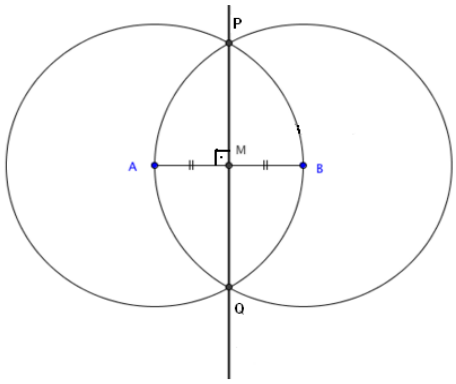



Figura 6 – Mediatriz de um Segmento de Reta AB

**2- Construção de uma reta paralela a uma reta dada que passa por um ponto P exterior.**

Considere uma reta r e um ponto P exterior à reta r. Podemos traçar uma reta t, que passa por P e é paralela à reta r . Para isso devemos seguir os passos:

I- Utilizando o compasso centrado em P traçar um arco de circunferência que intercepte a reta r em um ponto que será denominado de Q.

II- Com centro em Q e raio igual ao do arco anterior, traçar um arco que intercepta r num ponto que chamaremos de R.

III- Com centro em R e raio PQ traçar um arco que intercepte o arco de circunferência de raio PQ inicial. Chamaremos de D este ponto.

IV- Traçar a reta t que passa por P e D, ela será a paralela a reta r (Figura 7).

A justificativa é simples, note que PQ = QR = RD = DP. Assim, PQRD é um losango e PD é paralelo ao segmento QR. Logo, a reta t é paralela à reta r.

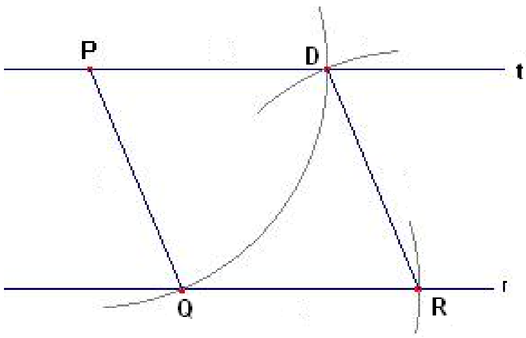



Figura 7 – Reta t paralela à reta r

**3- Dado um segmento AB, construa o triângulo equilátero ABC (Figura 8).**

É um exercício simples e de grande importância. Até então, muitos alunos tinham dificuldades para desenhar um triângulo equilátero. Veja e siga cada passo:

I- traçar um segmento AB, de qualquer medida.

II- Colocar a ponta seca do compasso em A e abri-lo até B, ou seja, podemos traçar um arco de circunferência de raio AB.

III- Manter a abertura do compasso, raio AB, colocar a ponta seca do mesmo em B e traçar um arco de circunferência, de modo que intercepte o anterior em C.

IV- É só ligar com a régua os segmentos AC e BC e obter o triângulo equilátero ABC. Ver figura 7.

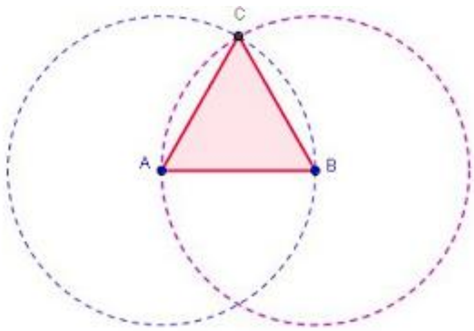



Figura 8 – Construção do Triângulo Equilátero ABC

**4- Construção de um pentágono regular (Figura 16).**

Siga os passos:

I- Construa uma circunferência de centro O de raio qualquer (Figura 9).

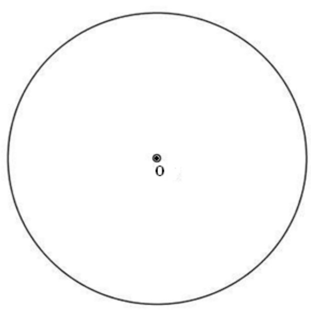



Figura 9 – Construção de uma Circunferência de Centro O

II- Trace, agora, dois seguimentos de retas perpendiculares entre si, interceptando-se no centro O da circunferência. Nas intersecções com a circunferência, marque os pontos E, F e G (Figura 10).

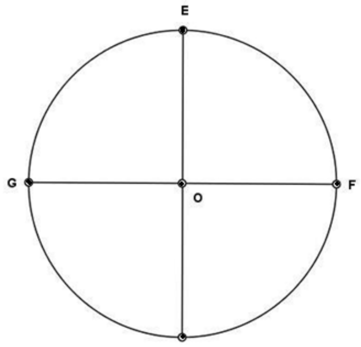



Figura 10 – Circunferência com Retas Perpendiculares

III- Use os conceitos de reta mediatriz e trace a reta mediatriz do segmento OF, passando por H (Figura 11).

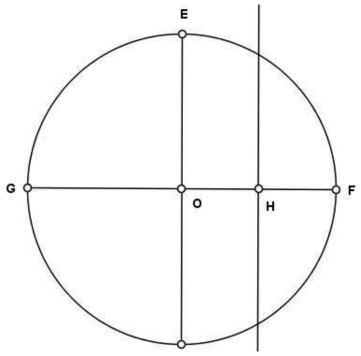



Figura 11 – Mediatriz do Segmento OF

IV- Com centro em H, descreva uma circunferência de raio HE e seja I a intersecção com segmento OG (Figura 12).

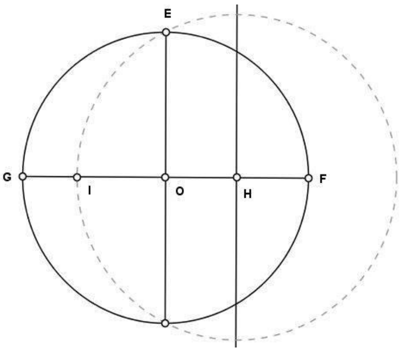



Figura 12 – Traço da Circunferência com Centro em H e Raio HE

V- O segmento EI é o comprimento do lado do pentágono (Figura 13).

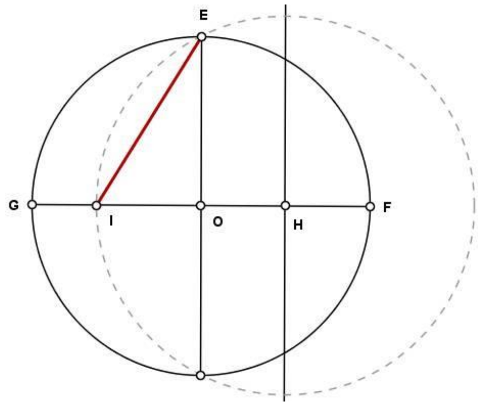



Figura 13 – Segmento EI como lado do Pentágono Regular

VI- Coloque a ponta seca do compasso em E e, com abertura EI, traçar um arco de circunferência, de forma que o mesmo intercepte a circunferência de centro O, no ponto A (Figura 14).

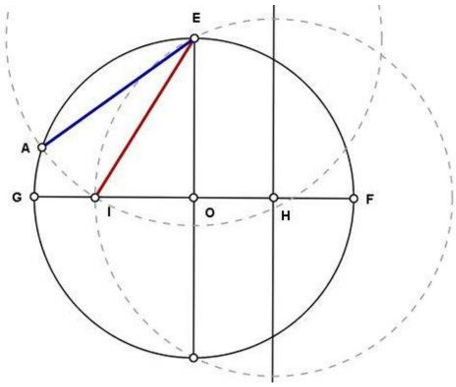



Figura 14 – Traço da Circunferência com Centro em E e Raio EI

VII- Mantendo a medida de abertura do compasso EI, partindo do A, marque os pontos B, C e D na circunferência de centro em O (Figura 15).

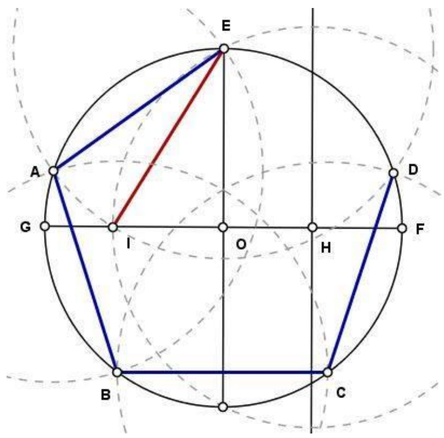



Figura 15 – Divisão da Circunferência de Centro O em Arcos de Comprimento EA

VIII- Unindo os pontos D e E, formamos o pentágono ABCDE:

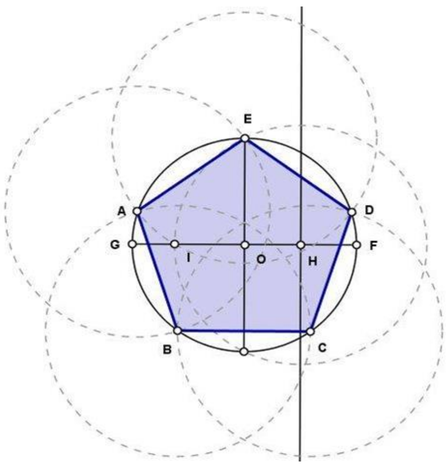



Figura 16 – Pentágono Regular ABCDE

Além do Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo devemos citar o Teorema dos Cossenos que pode ser aplicado em qualquer triângulo. A demonstração é bastante simples e é uma aplicação do próprio Teorema de Pitágoras nos triângulos ABH e BCH da Figura 17, que resulta em:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(B\hat{A}C)$. Dados: AB = c, BC = a, AC = b, AH = x e BH = h.

I- $\Delta BCH$: $a^2 = h^2 + (b-x)^2$, onde CH = b – x

II – $\Delta ABH$: $x^2 + h^2 = c^2$

III – $\Delta ABH$: $\cos(\hat{A}) = x/c$

De I, II e III, vem: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$

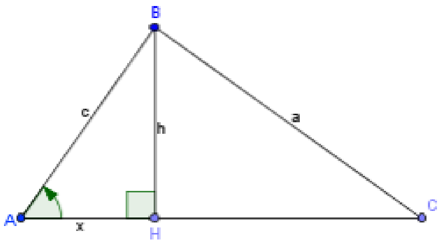



Figura 17 – Triângulo ABC

Justificativa:

I- A medida do ângulo interno do pentágono regular é $\frac{360°}{5} = 72°$

II- Na figura 16 devemos aplicar Pitágoras no triângulo EOH e calcular EH. Encontramos EH $= \frac{r\sqrt{5}}{2}$, considerando que OE = r e OH = $\frac{r}{2}$.

III- Notamos que HE = HI e OI = $\frac{r\sqrt{5}}{2}$ - $\frac{r}{2}$ = $\frac{r}{2}$ ( $\sqrt{5}$ - 1).

IV- Aplicando Pitágoras no triângulo retângulo EOI, encontramos EI = $\frac{r}{2}$ (-2 $\sqrt{5}$ + 10).

V- Temos que EI = EA = $\frac{r}{2}$ (-2 $\sqrt{5}$ + 10), que representa o lado do pentágono regular.

VI- Aplicando o teorema dos cossenos no triângulo AOE, sabendo que AO = OE = r, EA = $\frac{r}{2}$ (-2 $\sqrt{5}$ + 10) e que o ângulo AÔE = 72°, obtemos cos 72° = $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

VII- Agora, vamos justificar que cos 72° = $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

VIII- Considere na Figura 18 o triângulo isósceles KOF, em que o ângulo KÔF = 36°e que os lados KO e FO são iguais a r. Logo, podemos notar que os ângulos OKF e OFK são iguais a 72°.

IX- Traçamos a bissetriz interna do ângulo OKF, de forma que essa bissetriz intercepte o lado OF no ponto N. Note que os ângulos OKN e FKN são iguais a 36°.

X- Observamos que os triângulos OKN e FKN são isósceles. Daí, temos que ON = NK = KF.

XI- Notamos também que OI da Figura 15 é a medida do lado de um decágono regular inscrito numa circunferência de raio r de centro O. Aplicando o Teorema dos cossenos no triângulo KOF encontramos a medida de KF, que é igual a $\frac{r}{2}$ ( $\sqrt{5}$ - 1).

XII- Notamos que a medida do segmento KF é igual à medida do segmento OI da Figura 15.

XIII- Aplicando o Teorema dos cossenos no triângulo KOF, encontramos uma expressão para o cosseno de 72°. Assim, $(KO)^2 = (OF)^2 + (KF)^2 - 2.(OF).(KF).\cos 72°$. Desenvolvendo os cálculos com os devidos valores de cada segmento, obtemos cos 72° = $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

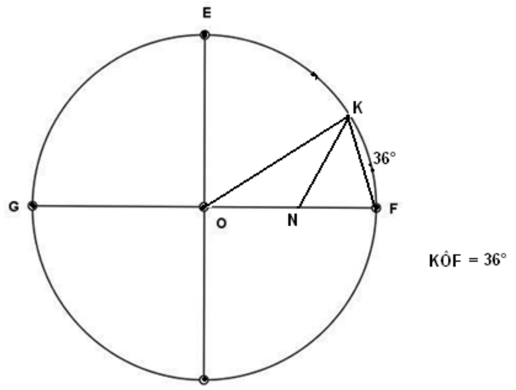



Figura 18 – Circunferência de Centro O e o Triângulo Destacado KOF

Portanto, fica justificado que o segmento EI da Figura 15, representa a medida do lado do pentágono regular.

Não podemos deixar de citar a medida do segmento OI da Figura 15 que representa a medida do lado do decágono inscrito na circunferência de centro em O e raio r.

**5 – Construção do quadrado inscrito numa circunferência de raio r.**

Siga os passos:

I – Construir uma circunferência de centro O e raio r (qualquer medida).

II – Marcar a diagonal AB que também é diâmetro da circunferência.

III – Construir a reta mediatriz do segmento AB. Obviamente essa reta também passará pelo centro O da circunferência. Faça com que essa reta intercepte a circunferência nos pontos P e Q.

IV – Ligando os pontos P, A, Q e B obtemos o quadrado AQBP.

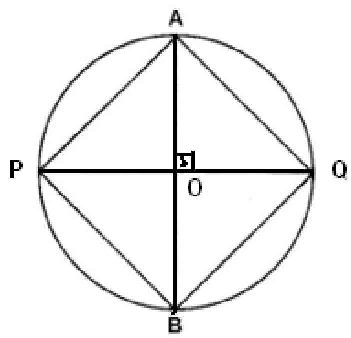



Figura 19 – Quadrado APBQ

Justificativa: o segmento PQ está contido na reta mediatriz do diâmetro AB, portanto, PQ é perpendicular a AB, ou seja, a medida do ângulo AÔQ = 90° e AO = OB = OP = OQ = r.

## 6.2 Alguns Modelos Planificados para a Construção dos Sólidos Geométricos

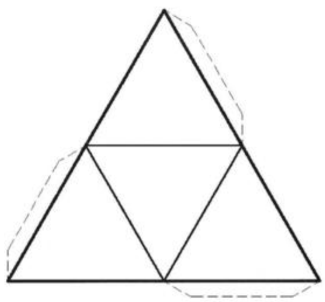


Figura 20 – Forma planificada de um tetraedro regular

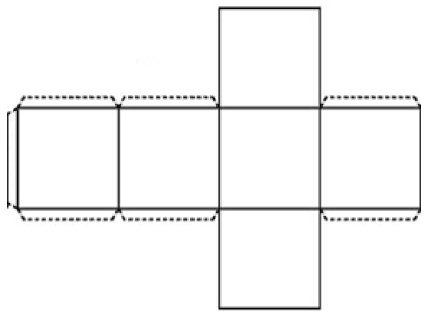


Figura 21– Forma planificada de um cubo

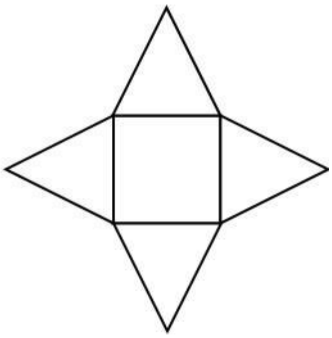


Figura 22 – Forma planificada de uma pirâmide quadrangular regular

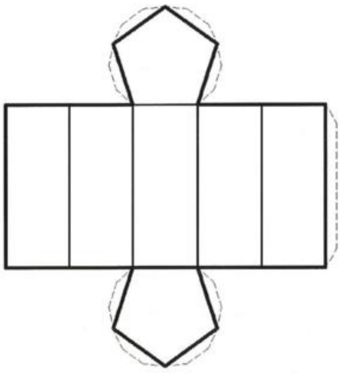


Figura 23 – Forma planificada de um prisma pentagonal regular

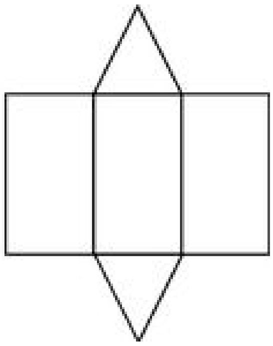


Figura 24 – Forma planificada de um prisma triangular regular

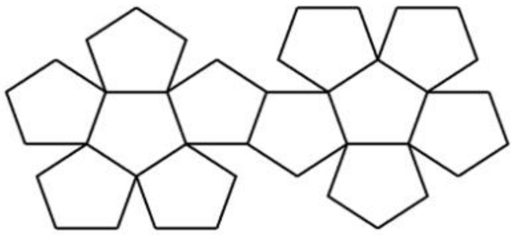


Figura 25 – Forma planificada de um dodecaedro regular

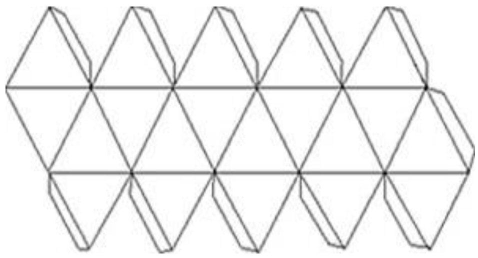


Figura 26 – Forma planificada de um icosaedro regular

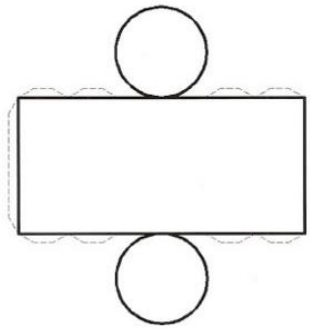


Figura 27 – Forma planificada de um cilindro reto

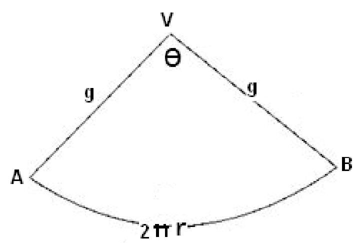



Figura 28 – Forma Planificada da Lateral de um Cone Reto a Partir de um Setor Circular de Raio g e Centro em V

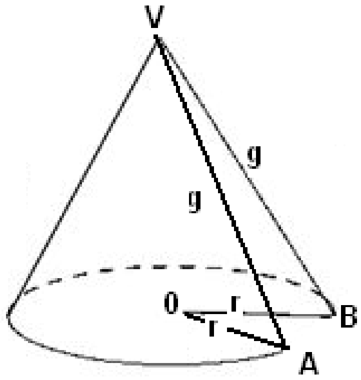



Figura 29 - Ponto A se Aproximando de B

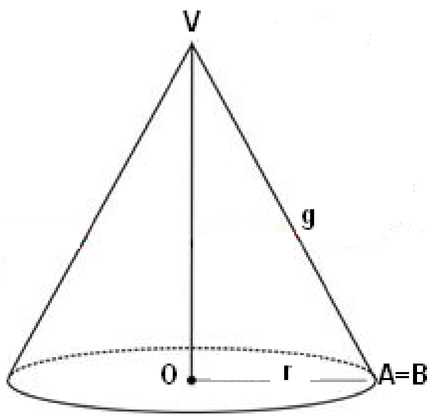



Figura 30 - Cone Circular Reto

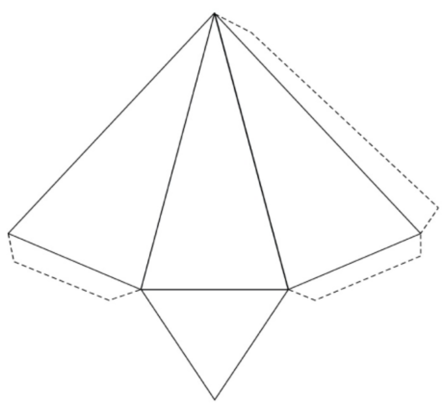


Figura 31 – Forma Planificada de uma Pirâmide Triangular Regular

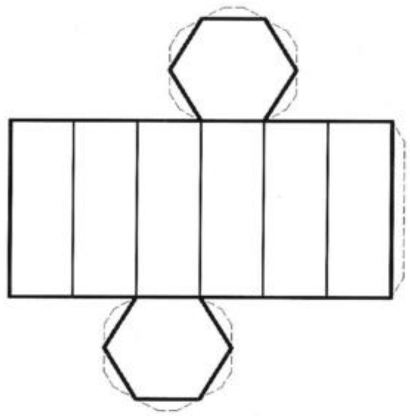


Figura 32 – Forma Planificada de um Prisma Hexagonal Regular

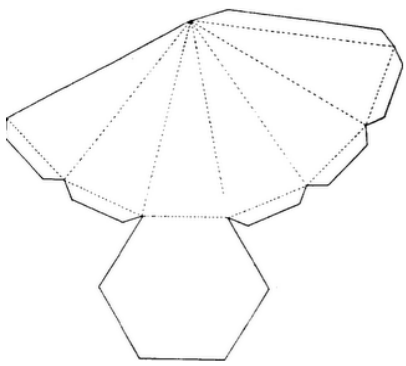


Figura 33 – Forma Planificada de uma Pirâmide Hexagonal Regular

# 7 ABORDAGEM METODOLÓGICA E PEDAGÓGICA DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS COM OS ALUNOS

Depois de verificar a importância de construções planas e espaciais para explicar geometria, foi feita a experiência com os alunos da segunda e terceira séries do ensino médio dos colégios Cristo Rei e Criativo, ambos de Marília - SP. Primeiramente propomos aos alunos a construção dos poliedros de Platão com o uso de papel cartão.

Para obtermos os sólidos geométricos, foi decidido que os alunos teriam que fazer os seus projetos planificados com o uso de régua e compasso. Estas construções serviriam para a fabricação dos moldes planificados, que posteriormente, após serem dobrados, representaram os principais poliedros feitos pelos alunos.

Os poliedros (poli = vários, edros = faces) são sólidos limitados por superfícies planas. As superfícies do poliedro são polígonos planos e denominam-se faces do poliedro. Os lados das faces chamam-se arestas e os vértices das faces são os vértices do poliedro. Sendo assim, se os poliedros tivessem todas as arestas iguais e faces congruentes entre si, permitiria uma compreensão mais detalhada e significativa dos poliedros regulares. Foi nesse momento que surgiram algumas perguntas: Como construir um quadrado, um triângulo equilátero, um pentágono regular com o uso de compasso e régua? É nesse instante que a mediação do professor faz a diferença e o aprendizado começa a acontecer de forma significativa e eficaz. As perguntas seguintes foram: Qual a forma planificada de um tetraedro regular? De um hexaedro? De um octaedro? Do dodecaedro? E de um icosaedro? Como colocar no papel o projeto desses poliedros, para depois dobrarmos e obtermos o poliedro?

Tudo isso é extremamente enriquecedor, pois é a partir daí que o aluno começa a construir seu próprio conhecimento.

Com isso, depois dos poliedros prontos, foi possível discutir a Relação de Euler (Número de Vértices V + número de faces F = número de arestas A+ 2), a soma S dos ângulos das faces ($S = (V - 2).360°$) e o conhecimento real e prático sobre faces, vértices e arestas de um poliedro.

Com os poliedros regulares construídos pudemos conhecer os Poliedros de Platão e fazer a diferença entre eles. Foi mais um momento de aprendizado, pois a teoria foi colocada em prática. Pois para ser de Platão um poliedro tem que:

1º Obedecer a relação de Euler;

2º Todas as faces têm que ter o mesmo número de arestas;

3º Todos os vértices têm que ter o mesmo número de arestas.

A partir daí, chegamos à conclusão que todo poliedro regular é de Platão, mas todos os poliedros de Platão, não necessariamente são regulares.

Com isso, foi possível introduzir o conteúdo dos principais poliedros convexos que são explorados e existentes no nosso meio, dentre eles os prismas e pirâmides.

Foi feita uma oficina de construções, onde cada grupo de cinco alunos construiu, com papel cartão, um prisma triangular regular, quadrangular regular e hexagonal regular. Mais uma vez veio a importância do desenho geométrico plano, que foi extremamente usado. Foi pedido que esses prismas e pirâmides tivessem uma medida padrão para as arestas da base e lateral. Assim, com os objetos prontos, foi possível entender bem melhor a Relação de Euler, o cálculo do volume e da área da superfície total desses poliedros. Foi possível notar a satisfação dos alunos em construir e formar o próprio conhecimento. Tudo ficou mais fácil.

Com o uso do GeoGebra, foi possível explicar as secções planas que podíamos fazer nesses sólidos além dos segmentos como diagonais, apótemas e altura. Com esse recurso tecnológico ficou mais fácil a visualização dos triângulos retângulos, secções, rotações e seus cálculos. Aproveito para destacar a grande ajuda desses recursos tecnológicos servem para complementar e enriquecer o processo de aprendizagem. A maioria deles é de livre acesso e são disponibilizados gratuitamente. São os famosos *Softwares* Livres.

Silva explica sobre os *Softwares* Livres:

> “[...] é possível encontrar outros programas interativos, conhecidos como *Softwares* Livres, que podem ser acessados pela internet de qualquer computador. Obtê-los é uma questão de liberdade e não de preço. No que se refere a essa liberdade temos os seguintes conceitos: - A liberdade de executar o programa, para qualquer propósito; - A liberdade de estudar como o programa funciona, e adaptá-lo para as suas necessidades; - A liberdade de redistribuir cópias de modo que você possa ajudar ao seu próximo; - A liberdade de aperfeiçoar o programa, e liberar os seus aperfeiçoamentos, de modo que toda a comunidade se beneficie. (SILVA, 2016).

Ainda referente à construção de prismas, foi feito um estudo particular sobre o Paralelepípedo Reto-Retângulo e do Cubo. Como já tínhamos construído o cubo, aproveitamos embalagens no formato de paralelepípedos para explorar seus elementos, capacidade e superfícies.

Os alunos comprovaram que é melhor compreender e não simplesmente decorar fórmulas.

Construímos também sólidos de revolução, ou sólidos redondos, como cilindro, cone e esfera. O cilindro e o cone circulares retos foram construídos com papel cartão e foi um sucesso. Foi estabelecida uma medida padrão para o raio da base e para as geratrizes. Partindo de uma construção plana foi possível construir as superfícies desses dois sólidos. Ficou muito fácil para os alunos entenderem os elementos, áreas e volumes. Assim, através dos projetos planificados ficou constatado que a compreensão dos cálculos das áreas dos dois sólidos passou a ter significado para os alunos. Em seguida usamos o GeoGebra, para mostrar a montagem e destacar os elementos, sobretudo fazer as secções meridionais e transversais desses sólidos e os seus devidos cálculos.

Para o estudo da esfera (sólido limitado por uma superfície esférica fechada e que tem todos os seus pontos à mesma distância de um ponto em seu interior) foi pedido que os alunos trouxessem qualquer objeto que a representasse, como: bola de sinuca, de gude, de futebol, além de algumas frutas que foram escolhidas por representarem uma esfera quase perfeita: uma uva, laranja e melancia. Ficou simples para o aluno entender que a casca da laranja é um bom exemplo para explicar a superfície esférica, assim como, o couro da bola de futebol ou a casca da melancia. Aproveitamos para obter e explicar as secções feitas em uma esfera e suas áreas. Quando foi retirado um gomo da laranja e um pedaço da melancia, os alunos puderam compreender o que significa uma cunha esférica com facilidade, o que significa fuso esférico e sua superfície e o volume da cunha. Foi possível fazer uma relação entre o planeta terra e uma esfera, que permitiu explorar os conceitos estudados em geografia relacionados ao nosso planeta, tais como: linha do equador, polos, os paralelos de câncer e capricórnio, meridiano, calotas e anéis esféricos. Tão simples e dinâmico, que além de aprender o conteúdo, os alunos, no final, degustaram as frutas que tinham levado.

Para fechar o trabalho com os alunos, foi pedido para cada grupo resolver cinco problemas. Esses problemas propostos têm como objetivo relacionar áreas, volumes, arestas, alturas entre sólidos equivalentes (volumes iguais) e inscrição e circunscrição de sólidos na esfera.

**Problema 1-** São dados os seguintes sólidos: cubo de aresta “a”, um prisma triangular regular e uma pirâmide triangular regular de arestas das bases iguais a “a” e alturas, ”h”. Obtenha a medida h da altura desses dois sólidos em função da aresta “a” para que os mesmos tenham volumes iguais ao do cubo.
Resolução apresentada:

I) Sabemos que o volume do cubo de aresta *a* é igual V = $a^3$.

II) O volume do prisma triangular regular Vp é dado por, Vp = Área da base (Ab) x altura (h).

Notemos que a base do prisma é um triângulo equilátero de lado a. Logo, Ab = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

De I e II temos: $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ x h = $a^3$ $\Rightarrow$ h = $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

III) Sabemos que o volume da pirâmide é $\frac{1}{3}$ x Ab x h. Então, como a base também é um triângulo equilátero de lado a, temos que $\frac{1}{3}$ x $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ x H = $a^3$, sendo assim, fazendo as devidas simplificações e operações, temos que H = $4a\sqrt{3}$

Assim as medidas das alturas são, respectivamente, h = $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ e H = $4a\sqrt{3}$

Observação: esses cálculos foram apresentados pelos alunos e apenas registrados por mim.

Apesar de ser um exercício simples, o uso dos sólidos geométricos construídos como o cubo, prisma triangular e pirâmide triangular regular, foi extremamente importante para a resolução do problema. Dos alunos presentes na sala de aula, alguns tiveram dificuldades de visualização, mas no final, com o auxílio dos sólidos, todos conseguiram entender e resolver o exercício. Comprovando assim a importância das representações físicas desses sólidos.

**Problema 2-** Calcule a medida da aresta de um cubo e de um octaedro regular, em função da aresta "a" de um tetraedro regular, para que os volumes do cubo e do octaedro sejam iguais ao volume do tetraedro regular (Figura 34).

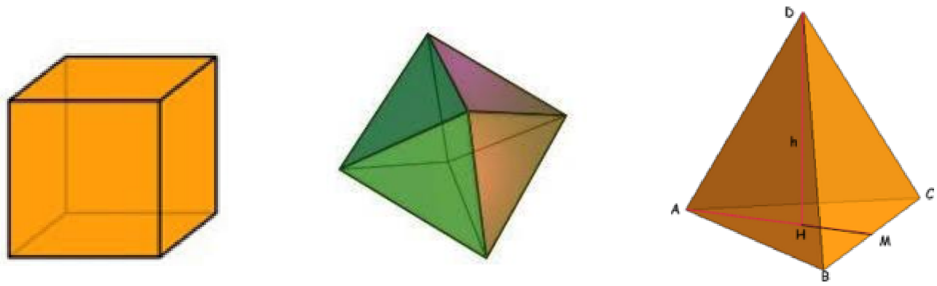



Figura 34 – Cubo, Octaedro Regular e Tetraedro Regular

Resolução apresentada:

I) Primeiramente, temos que achar o volume do tetraedro regular em função de sua aresta a.

O tetraedro regular é uma pirâmide triangular regular que possui todas as arestas congruentes entre si. Considerando M o ponto médio da aresta BC e H o baricentro do triângulo ABC da base do tetraedro regular, temos: HM = $\frac{1}{3}$ x $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ = $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ e DM = altura do triângulo equilátero BCD, então, DM = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DHM, obtemos a medida de DH = h, que é a medida da altura do tetraedro regular. Sendo assim, temos que h = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Sendo o V volume da pirâmide igual ac x Ab x h, temos que o volume do tetraedro é:

V = $\frac{1}{3}$ x $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ x $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ = $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

II) Cálculo da aresta b do cubo em função de a.

$b^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow b = \sqrt[3]{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}} \Rightarrow b = a \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{12}} \Rightarrow b = a \cdot \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[3]{12}} \Rightarrow b = a \cdot \frac{\sqrt[6]{648}}{6}$, que é a resposta de b em função de a.

III) Cálculo da aresta c do octaedro regular para que seu volume seja igual a $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, que é o volume do tetraedro regular.

O volume do octaedro regular de aresta c é igual ao volume de duas pirâmides quadrangulares e regulares que possuem todas as arestas iguais a c, conforme a figura 35.

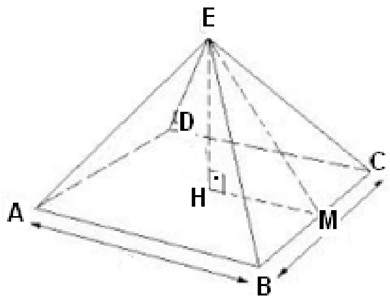



Figura 35 – Pirâmide Quadrangular Regular

(AB = BC = CD = DA = AE = BE = CE = DE = c)

Da pirâmide acima, considere M o ponto médio da aresta BC e H o centro do quadrado ABCD da pirâmide.

Notemos que HM = $\frac{c}{2}$ e EM = $\frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo EHM, temos que EH = $\frac{c\sqrt{2}}{2}$, que é a altura de uma das pirâmides quadrangulares do octaedro regular.
Sendo assim, temos:

2 × $\left[\frac{1}{3} \times c^2 \times \frac{c\sqrt{2}}{2}\right]$ = $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Logo, $\frac{c^3\sqrt{2}}{3}$ = $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. Assim, c = $a\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$, que representa a medida da aresta c do octaedro em função da aresta do tetraedro regular, de forma que seus volumes sejam iguais.

**Problema 3-** Determine a medida da geratriz g (geratriz é qualquer segmento de linha que tenha uma extremidade no vértice do cone e a outra na curva que envolve a base deste) de um cone circular reto de raio da base "a" para que esse cone tenha o mesmo volume do cubo, também, de aresta "a" Figura 36). Dado que R = a.

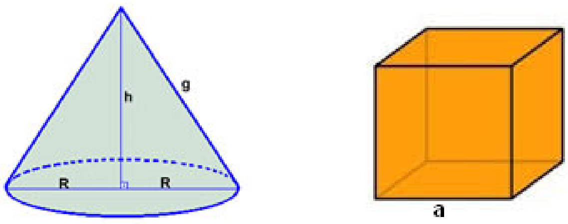



Figura 36 – Cone Circular Reto e Cubo

Resolução apresentada:
I) Temos que o volume do cone é igual ao volume do cubo, e que a medida do raio da base do cone é igual a medida da aresta a do cubo.

II) Devemos calcular a medida da altura h do cone em função de a.

Vol. Cone = Vol. Cubo ⇒ $\frac{1}{3} \times \pi a^2 \times h = a^3 \Rightarrow h = \frac{3a}{\pi}$.

Sabemos que o cone é reto, então, $g^2 = a^2 + h^2$, temos: $g^2 = a^2 + \left(\frac{3a}{\pi}\right)^2 \Rightarrow g = \frac{a\sqrt{9+\pi^2}}{\pi}$.

Portanto, g = $\frac{a\sqrt{9+\pi^2}}{\pi}$.

**Problema 4-** Determine a medida do raio da base de um cilindro equilátero em função da aresta a de um tetraedro regular para que seus volumes sejam equivalentes, ou seja, sejam iguais (Figura 37).

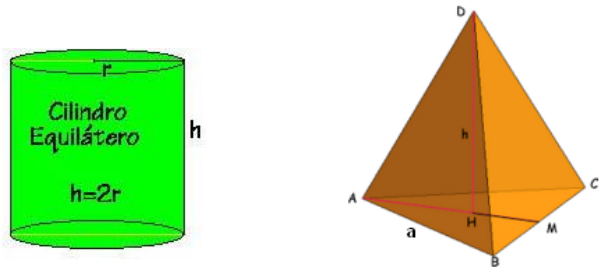



Figura 37 – Cilindro Equilátero e Tetraedro Regular

Resolução apresentada:

I) Já calculamos anteriormente que o volume do tetraedro regular de aresta a é V = $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

II) O cilindro equilátero tem altura (ou geratriz) igual ao diâmetro do círculo da base.

III) O volume do cilindro é dado por V = Área da base x altura, ou seja,

$V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi r^2(2r) \Rightarrow V = 2\pi r^3$

IV) Dos itens I e III e igualando os volumes temos:

Vol. Cilindro = Vol. Tetraedro Regular, ou seja,

$$2\pi r^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow r^3 = \frac{a^3\sqrt{2}}{24\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{a^3\sqrt{2}}{24\pi}} \Rightarrow r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3\pi}}$$

Logo, a medida do raio r do cilindro em função de *a* é r = $\frac{a}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{3\pi}}$

**Problema 5 -** Sendo r e R os raios das esferas inscrita e circunscrita num cone equilátero de raio da base igual a α, calcule r e R em função de α (Figuras 38 e 39).

Resolução apresentada:

I) Cálculo do raio r da esfera inscrita no cone equilátero de raio da base α (Figura 38).

Note que: AB = BC = AC = 2α e AE = altura de um triângulo equilátero de lado 2α,

Logo, AE = $(2\alpha\sqrt{3}) \div 2 \Rightarrow AE = \alpha\sqrt{3}$.

Se DE = r $\Rightarrow$ AD = $\alpha\sqrt{3} - r$ e que CE = CF = α (segmentos tangentes), aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo ADF, temos:

$(AD)^2 = (AF)^2 + (DF)^2 \Rightarrow (\alpha\sqrt{3} - r)^2 = \alpha^2 + r^2 \Rightarrow r = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, provando mais uma vez que DE é igual à um terço da altura AE do triângulo equilátero ABC, ou que AE é uma mediana (segmento que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice) e D é baricentro (ponto de encontro das três medianas) e incentro do triângulo equilátero ABC, pois as medianas são também bissetrizes dos ângulos dos vértices.

Logo, $r = \dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

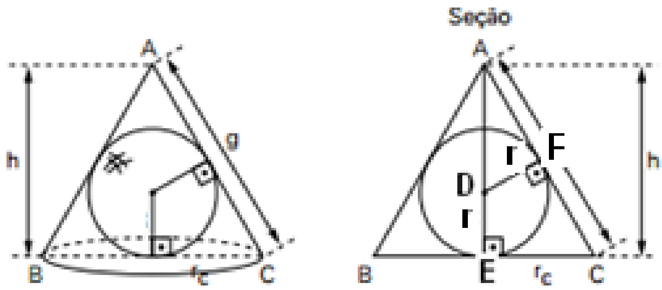



Figura 38 – Esfera Inscrita no Cone Equilátero e a Secção Meridiana

II) Calculemos agora o raio R da esfera circunscrita ao cone equilátero (Figura 39). Podemos notar que o triângulo ABC é equilátero de lado 2α, portanto o ponto D, além de baricentro, incentro é também circuncentro, pois AE e BF são mediatrizes. Então, AD = BD = CD = R.

Se DE = $\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$, temos que AD = R = $\dfrac{2DE}{3}$. Então, R = $\dfrac{2}{3}$ de $\alpha\sqrt{3}$.

Sendo assim, a medida do raio R da esfera circunscrita no cone equilátero é: R = $\dfrac{2\alpha\sqrt{3}}{3}$.

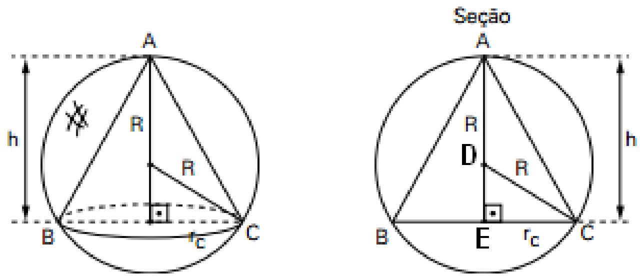



Figura 39 – Esfera Circunscrita ao Cone Equilátero e a Secção Meridiana

Na conclusão destas atividades notamos que os resultados foram surpreendentes. Mesmo os alunos que possuíam mais dificuldades, compreenderam perfeitamente o conteúdo, e o mais importante, sabiam o que tinham que fazer. A maioria dos alunos resolveram os cinco exercícios e apresentaram os resultados num tempo de aproximadamente de 40 minutos.

Para alunos da segunda série do Ensino Médio, tudo isso foi bastante expressivo, e tive que registrar a fala de uma aluna, que disse: "C*onsegui fazer sozinha todos os exercícios e com muita rapidez. Representar os sólidos geométricos com papel cartão, partindo de um projeto plano, facilitou demais a visualização e percepção. Pude aprender com o professor a fazer os desenhos básicos, e pude através disso interpretar e resolver os exercícios, coisas que, até então, eu nem imaginava como fazia."*

Os recursos tecnológicos, como *softwares* e às vezes uma simples busca na internet para localizar algo relacionado ao assunto, permite uma compreensão ainda melhor por parte do aluno, uma vez que os mesmos, naturalmente estão envolvidos com um mundo virtual. O que mais ouvi dos alunos foi: "*Valeu a pena desenhar, construir e conhecer alguns softwares tecnológicos, enfim, pudemos entender melhor."*

## 7.1 Depoimentos

Aluno Gustavo: *"No começo achei bastante complicado fazer os desenhos no papel, usando régua e compasso e depois dobrá-los para obter as superfícies dos sólidos. Mas, em pouco tempo, passei a tomar gosto e percebi as aulas passavam rápidas demais, pois estava totalmente interagido com elas. Foi maravilhoso construir, pude perfeitamente compreender os elementos de um poliedro e tirar as minhas conclusões. Precisamos de mais aulas desse tipo. Práticas e eficientes."*

Aluna Isabela: *"Deu trabalho no começo, mas depois compensou, pude compreender* tudo. *Valeu pelas aulas."*

Aluna Beatriz: *"Agora entendo o porquê das representações desses poliedros. Consigo fazer tudo sozinha e entender tudo. Nunca vi algo tão fácil de entender após as construções."*

Aluno Paulo Henrique: *"Eu detestava geometria plana, e tinha na minha mente que iria detestar geometria espacial, pois tudo era visto em desenhos e nunca construí nada. Tomei gosto e hoje, a matéria que mais gosto é geometria. Passei a entender tudo."*

Aluna Giulia: *"Jamais teria entendido o volume e área total de prismas e pirâmides se não tivesse construído. Deu um pouco de trabalho, mas, não esquecerei o quanto ajudou. Hoje, percebo a geometria em todos os lugares, sobretudos os poliedros e os sólidos circulares. Vejo e lembro-me do professor. Valeu por tudo."*

Aluno Vítor: *"Nunca havia entendido que a lateral do cone era proveniente de um setor circular. Ficou muito fácil entender depois das construções.*
*Pedro disse: temos diariamente em nossas mãos esses objetos e nunca parei para pensar sobre isso. Como ficou simples a compreensão depois das construções e representações. Valeu professor."*

Aluna Aline: *"Nunca descasquei uma laranja na minha vida, não sabia como descascar. Fiz isso pela primeira vez aqui na sala de aula e consegui compreender geometria ao mesmo tempo. O estudo da esfera e suas partes ficou brincadeira. Professor, valeu pelas aulas, foram feras."*

# 8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desenvolver esta pesquisa foi gratificante, pois foi possível trazer de volta ao ensino da Geometria uma alternativa diferente que era desenvolvida até certo tempo atrás e que ficou esquecida pelos autores. Construir com régua e compasso e produzir sólidos geométricos, poliedros e sólidos redondos, tornam as aulas mais atrativas e práticas no estudo da Geometria Plana e Espacial. As aulas passam a ser mais interativas e prazerosas e permite uma melhor relação entre os alunos e principalmente entre professor e aluno. Tudo isso é relevante e significativo no processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

O levantamento teórico permitiu que localizássemos muitos pontos a respeito das construções geométricas e o lugar que elas ocuparam e ocupam no processo de ensino e de aprendizagem Matemática.

Outros pesquisadores evidenciaram que é muito importante propiciar que os estudantes contemporâneos tenham acesso ao estudo planificado e espacial de polígonos, pois sem dúvida alguma, nossos estudantes estão rodeados de figuras sólidas, e compreender o mundo que os cerca, os motiva a interessar-se pelo mundo das ciências, sobretudo das ciências exatas.

A trajetória profissional e os anos cursados de PROFMAT propiciaram para mim uma vasta experiência e conhecimentos valiosos, que enriqueceram muito a proposta didático-pedagógica desenvolvida neste trabalho.

Após estas aulas diferenciadas, percebemos o quanto foi gratificante poder trabalhar com os alunos desta forma. Foi possível observar a satisfação do aluno em projetar, construir, interagir com os colegas em se aproximar da figura do professor, que se torna um parceiro experiente para o desenvolvimento e execução do trabalho. Podemos destacar que, de acordo com os depoimentos dos alunos, o aprendizado foi significativo e a compreensão foi evidente.

Concluímos também que cada vez que tentarmos trabalhar matemática de uma forma menos abstrata, tornando-a mais aplicada e real, mais os alunos aprendem e tomam gosto pelo estudo, pois o que era abstrato passa a tomar forma e fazer sentido. É bastante verdade também que, não podemos desconsiderar que em muitos assuntos da matemática, não é possível materializar as abstrações, pois o que prevalece é o raciocínio lógico para o desenvolvimento da situação problema, o que exige muito mais da capacidade de desenvolvimento cognitivo do aluno.

Percebemos também que falta nas escolas um laboratório de matemática, ou pelo menos um espaço mais adequado para facilitar as construções, demonstração teoremas através de construções geométricas e que tenham as ferramentas básicas para a execução das tarefas. Se quisermos melhorar o ensino da matemática, temos que partir de trabalhos práticos. Temos que investir em tornar a Matemática, uma disciplina prazerosa de se aprender e desenvolver.

O aluno quando faz parte diretamente do processo de ensino aprendizagem, se sente mais importante e capaz de construir seu próprio conhecimento, pois deixa de ser um simples receptor de informações e passa a ser protagonista do seu conhecimento e aprendizagem. Não devemos agir como se os alunos fossem meros depósitos:

> Em lugar de comunicar-se, o educador faz “comunicados” e depósitos que os educandos, meras incidências, recebem paciente-mente, memorizam e repetem. Eis aí a concepção “bancária” da educação, em que a única margem de ação que se oferece aos educandos é a de receberem os depósitos, guardá-los e arquivá-los. Margem para serem colecionadores ou fichadores das coisas que arquivam. No fundo, porém, os grandes arquivados são os homens, nesta (na melhor das hipóteses) equivocada concepção ‘‘bancaria da educação. Arquivados, porque, fora da busca, fora da práxis, os homens não podem ser. Educador e educandos se arquivam na medida em que, nesta distorcida visão da educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem no mundo, com o mundo e com os outros. Busca esperançosa também. (FREIRE, 1987, p. 33)

Não poderíamos deixar de citar a importância dos recursos tecnológicos que também contribuem para a melhor visualização e compreensão dos assuntos estudados. Estes recursos devem ser cada vez mais inseridos na educação, visto que a tecnologia é expansiva, e seria algo terrível restringir ou até mesmo proibir o uso da tecnologia na escola, ela é muito colaborativa quando usada de forma correta, com as devidas orientações, foco e direcionamentos.

Quanto aos exercícios propostos, que foram desafiadores, notamos que os alunos tiveram maiores facilidades em resolvê-los depois de terem construídos os sólidos geométricos e, naturalmente, puderam associar o real com o abstrato através do raciocínio lógico e observação. O mais importante é que todos compreenderam o que estavam calculando e sentiram-se mais seguros, pois se apropriaram dos conhecimentos de forma construtiva e significativa.

Enfim, foi uma jornada longa, árdua, trabalhosa, porém muito gratificante. Ver os alunos se desenvolvendo e apreciando cada dia mais o estudo da Geometria é, sem dúvidas, algo muito positivo, mostra que, o nosso trabalho está sendo reconhecido e valorizado. Ficou claro para mim que vale a pena trabalhar com construções e materiais concretos confeccionados pelos próprios alunos, a geometria torna-se mais simples e representativa. Sei que influenciei positivamente a trajetória educacional dos alunos.

## REFERÊNCIAS

BALDISSERA, Altair. **A geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos**, 1987**.** Disponível em: <http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/producoes_pde/artigo_altair_baldissera.pdf>. Acesso em: 27 mai. 2017.

BARBOSA, João Paulo Carneiro. **Investigação histórica referente à base algébrica das construções geométricas com régua e compasso: o trabalho de Pierre Laurent Wantzel.** 2011. 74 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Programa de Pós de Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2011.

CARDIA, Lynk dos Santos. **Uma abordagem do ensino de geometria espacial: a otimização de embalagens como contextualização do conceito de áreas de figuras planas e volumes dos sólidos geométricos.** 2014. 97 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2014.

CASTRO, Mariângela Assumpção de. **A construção e a desconstrução das ideias geométricas: intervenção no ensino e na aprendizagem na perspectiva da matemática inclusiva.** 2013. 105 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

CLEMENTE, João Carlos. **O estudo da Geometria. In: GREPEM – Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática.** Universidade Federal de Juiz de Fora. 2014.

COSTA, Mário Duarte da. O desenho básico na área tecnológica. In: CONGRESSO NACIONAL DE DESENHO, 2., 1981, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 1982. p. 89-93.

COSTA, Bruno Augusto Eloi da. **Construção de sólidos:** uma aplicação de atividades. 2013. 82 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2013.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática:** elo entre as tradições e a modernidade. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

D'AMBROSIO, B. Prefácio. In: LOPES, C. E.; NACARATO, A. M. (Org.). **Educação matemática, leitura e escrita:** armadilhas, utopias e realidades. Campinas: Mercado de Letras, 2009. p. 9-17.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia do oprimido.** 17. ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

GEOGEBRA. **O que é o GeoGebra?** Disponível em: <http://www.geogebra.org/about>. Acesso em: 15 jul. 2017.

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar geometria? **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, ano 3, n. 4, p. 3-13, jan./jun. 1995.

MOHR, Ana Regina da Rocha; PACHECO, Leila Leatrice Saldanha. Poliedros duais e a geometria ensinada de forma construtiva. In: ENCONTRO REGIONAL DE ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 20., 2014. Bagé. **Anais...** Bagé: UNIPAMPA, 2014.

MUNDO EDUCAÇÃO. **Geometria.** Disponível em: <http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/geometria-1.htm>. Acesso em: 27 mai. 2017.

NASCIMENTO, Janio Benevides de Souza; REHFELDT, Márcia Jussara Hepp; QUARTIERI, Marli Teresinha. A construção de sólidos geométricos a partir de materiais alternativos. **Revista Educação Online,** Rio de Janeiro, n. 23, p. 97-126, set-dez 2016.

O GEOGEBRA. **Polígonos.** Apostila. Capítulo 5. p. 15. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/arquivos/05-poligonos.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2017.

O GEOGEBRA. **Apostila.** Capítulo 6. p. 18-22. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/arquivos/05-poligonos.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2017.

O GEOGEBRA. **Círculo, arco e setor.** Apostila. Capítulo 10. p. 36-38. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/arquivos/10-circuloarcosetor.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2017.

O GEOGEBRA. **3D.** Apostila. Capítulo 15. p. 64-65. Disponível em: <http://ogeogebra.com.br/arquivos/15_3d.pdf>. Acesso em: 15 jul. 2017.

PIMENTEL, Jailson. **O ensino de geometria por meio de construções geométricas.** 2013. 60 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. **Tópicos de história da matemática.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTANA, Eduardo Pereira de; ALVES, Eduardo. A dificuldade de ensinar geometria. Administradores.com. 2008/09. Disponível em: <http://www.administradores.com.br/artigos/cotidiano/a-dificuldade-de-ensinar-geometria/55118/>. Acesso em: 15 jul. 2017.

SARDINHA, Reinaldo Loubach. **O uso do Geogebra no ensino de desenho geométrico nos anos finais do ensino fundamental.** 2014. 50 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2014.

SILVA, José Kilmer Tavares. **Um estudo complementar dos poliedros voltado para professores e alunos do ensino básico.** 2014. 69 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2014.

SILVA, Camila Aparecida. **Modelagem matemática e tecnologia no processo de ensino e aprendizagem: perspectivas.** 2016. 55 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Pedagogia) - Faculdade de Filosofia e Ciências, Universidade Estadual Paulista, Marília, 2016.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas.** Rio de Janeiro: Impa, 2015.

WIKIPEDIA. **História da Geometria.** Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Hist%C3%B3ria_da_geometria>. Acesso em: 27 mai. 2017.

ZÚNIGA, Larissa. A História da Geometria. Disponível em: < http://tudo-matematica.blogspot.com.br/2011/02/historia-da-geometria.html>. Acesso em: 27 mai. 2017.

**APÊNDICE**

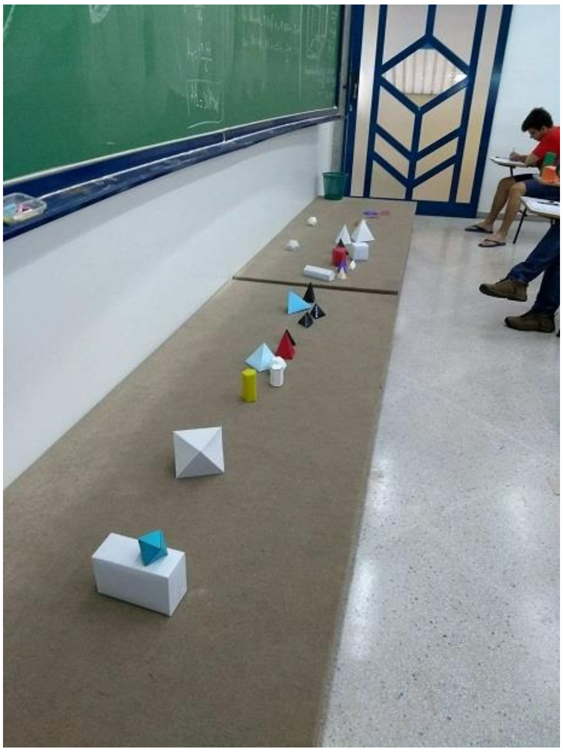
Planificações: tetraedro, pirâmide quadrangular e octaedro regulares

Alguns poliedros montados: cubo, pirâmide quadrangular e prismas

Poliedros construídos, e alguns sólidos circulares: cone e cilindro. Alunos fazendo os cálculos

Sólidos Geométricos construídos pelos alunos

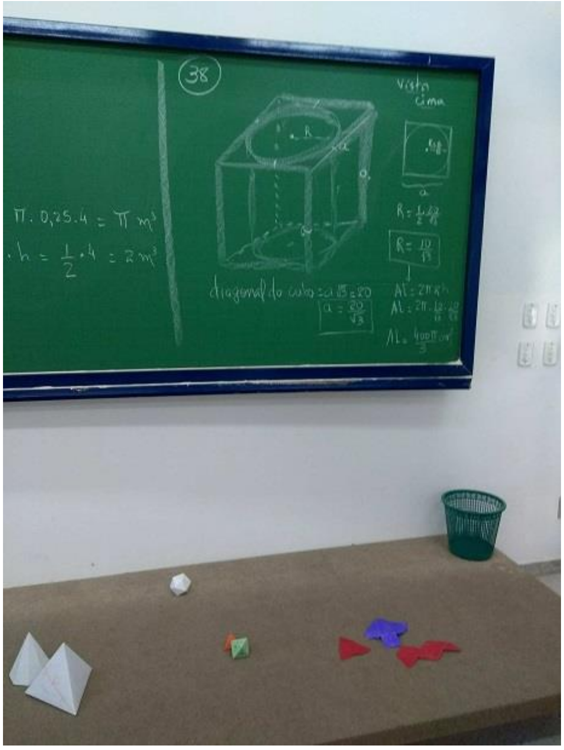
Prisma triangular regular
e paralelepípedo



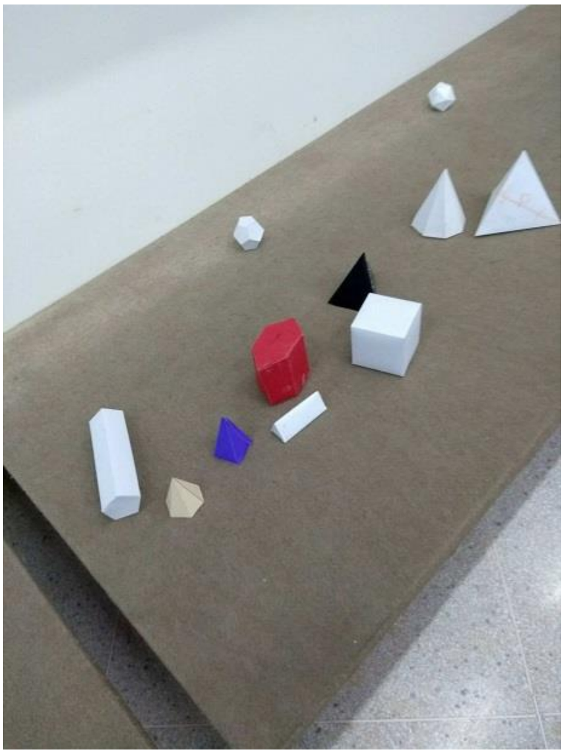
Exposição dos poliedros construídos

Forma planificada do Tetraedro Regular
e Pirâmide Quadrangular Regular

Prismas: Triangular e Hexagonal Regulares
e Pirâmides



Cálculo do Cilindro Inscrito no Prisma Quadrangular Regular e Cálculos



Poliedros Construídos: um destaque para Dodecaedro e Icosaedro regulares além de Prismas e Pirâmides

Poliedros Regulares

Prismas e Pirâmides

Poliedros Regulares

Poliedros Construídos pelos alunos

Aluno fazendo cálculos dos problemas solicitados

Poliedros construídos por uma aluna: Prismas e Pirâmides

Pirâmides: triangular, quadrangular e Hexagonal

Alunos resolvendo os problemas solicitados

Prismas e Pirâmides

Alunos resolvendo os Exercícios

Poliedros Construídos


Poliedros construídos e algumas planificações

Principais Pirâmides Construídas

Principais Pirâmides Construídas