

Thais Godoy Vazquez

POLINÔMIOS ORTOGONAIS RELACIONADOS:
PROPIEDADES E APLICAÇÕES



1910001286



**POLINÔMIOS ORTOGONAIS RELACIONADOS:
PROPRIEDADES E APLICAÇÕES**

Thais Godoy Vazquez

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 086



Thais Godoy Vazquez

**POLINÔMIOS ORTOGONAIS RELACIONADOS:
PROPRIEDADES E APLICAÇÕES**

Thais Godoy Vazquez

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Alencar de Sá Ramos

Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000 - São José do Rio Preto - SP - Brasil
Telefone: (017) 221-2444
Fax: (017) 221-2445



Polinômios Ortogonais Relacionados: Propriedades e Aplicações

Thais Godoy Vazquez

Dissertação a ser apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga



1.1.286/04

São José do Rio Preto

Fevereiro de 2004



517.587
V393p

10104020

Polinômios Ortogonais Relacionados:
Propriedades e Aplicações

Thais Godoy Vazquez

Vazquez, Thais Godoy.

Polinômios ortogonais relacionados : propriedades e aplicações /
Thais Godoy Vazquez. – São José do Rio Preto : [s.n.], 2004
71 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Alagacone Sri Ranga

Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista. Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Análise numérica. 2. Polinômios ortogonais. 3. Polinômios
ortogonais - Medidas relacionadas entre si. 4. Polinômios ortogonais -
Medidas simétricas. 5. Frações contínuas. 6. Polinômios ortogonais -
Medidas não simétricas. I. Sri Ranga, Alagacone. II. Universidade
Estadual Paulista. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III.
Título.

CDU – 517.587



“O gênio é composto por 2% de talento
e de 98% de perseverante aplicação.”

Ludwig Van Beethoven



*Aos meus pais, Ramon e Elisabete e
aos meus irmãos, Mariana e Ramon,
ofereço.*



*À Deus,
dedico.*

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga, sempre disposto a me ajudar, adicionando conhecimentos com muita sabedoria, dedicação, paciência e amizade, tornando possível a realização deste trabalho.

À Prof. Dra. Cleonice Fátima Bracciali, pelo apoio constante, sempre com muita docilidade e gentileza.

À Prof. Dra. Eliana Xavier Linhares de Andrade, por todas as vezes que prontamente me atendeu nestes anos com muito carinho e, em especial, pelos momentos em que me acolheu em sua família.

Aos meus pais, Ramon e Elisabete, e aos meus irmãos, entrego minha eterna e inmensurável gratidão, com muito amor.

Em especial, à minha irmã Mariana, que me acompanhou, incentivou e ajudou durante minha trajetória acadêmica.

A todos os professores e funcionários, colegas de pós-graduação, em especial, Fernando, Flávia, Andrea, Cassius e Roberto, pela ajuda e companheirismo.

À Fapesp, pelo apoio financeiro.

Aos meus “amiguinhos” que sempre intercederam junto ao Pai em meu favor.

E, enfim, à Deus, que é o responsável por tudo.



Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar os zeros dos polinômios ortogonais cuja medida, quando multiplicada por um polinômio de grau 1 ou 2, está relacionada a uma das medidas de Gegenbauer, Jacobi ou Laguerre. As medidas consideradas neste trabalho têm saltos e o comportamento dos zeros é estudado em relação à posição e ao tamanho do salto.

No caso em que as medidas são simétricas, usamos seqüências encadeadas como auxiliar no estudo da monotonicidade dos zeros desses polinômios, o que não foi necessário no caso em que as medidas não são simétricas.

Palavras chaves: Polinômios ortogonais, relação de recorrência, medidas relacionadas, seqüências encadeadas, frações contínuas.



Abstract

The purpose of this dissertation is to study the zeros of certain orthogonal polynomials. The associated measures of these polynomials can be related to one of the measures associated with the Gegenbauer, Jacobi or Laguerre polynomials through a multiplication by a first or second degree polynomial. The measures considered in this work present jumps. The behavior of the zeros of the orthogonal polynomials is investigated with respect to the position and size of the jumps.

In the case when the measures are symmetric, we use chain sequences to study the monotonicity of the zeros of these polynomials, it is not necessary when the measures are not symmetric.

Key words: Orthogonal polynomials, recurrence relation, related measures, chain sequences, continued fractions.



Sumário

1	Introdução	1
2	Polinômios Ortogonais	5
2.1	Propriedades dos Polinômios Ortogonais	5
2.1.1	Teorema de Favard	7
2.2	Alguns Polinômios Ortogonais Clássicos	11
2.2.1	Polinômios de Jacobi	11
2.2.2	Polinômios de Gegenbauer	12
2.2.3	Polinômios de Laguerre	13
2.3	Polinômios de Koornwinder	14
3	Seqüências Encadeadas Positivas	15
3.1	Frações Contínuas	15
3.2	Seqüências Encadeadas Positivas	20
3.3	Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais	26
4	Medidas Relacionadas	31
4.1	Preliminares	31
4.2	Caso Simétrico	36



4.2.1	Seqüências Encadeadas Generalizadas	37
4.2.2	Seqüências Encadeadas Generalizadas e Medidas Relacionadas Simétricas	39
4.2.3	Uma Aplicação para os Polinômios $K_n^{(\lambda, M, \kappa)}$	41
4.2.4	Monotonicidade dos Zeros de $K_n^{(\lambda, M, \kappa)}$	45
4.3	Caso Não-Simétrico	51
4.3.1	Seqüências Encadeadas e Medidas Relacionadas Não-Simétricas	55
4.3.2	Aplicações aos Polinômios de Jacobi Generalizados	57
4.3.3	Aplicações aos Polinômios de Laguerre Generalizados	64
	Referências Bibliográficas	70

Capítulo 1

Introdução

Sejam $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e ϕ uma função real, limitada, não decrescente, definida em $[a, b]$, com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Se os valores $\mu_r^\phi = \int_a^b x^r d\phi(x)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, que chamamos de momentos existem, $d\phi$ representa uma medida (medida positiva) em (a, b) .

Dizemos que $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi(x)$ em (a, b) se P_n^ϕ é um polinômio de grau exatamente n , $\int P_n^\phi(x) P_m^\phi(x) d\phi(x) = 0$ para $n \neq m$ e $\int P_n^\phi(x) P_n^\phi(x) d\phi(x) > 0$.

Seja P_n^ϕ , $n \geq 0$, a seqüência de polinômios ortogonais mônicos, com relação a uma medida positiva $d\phi$ definida na reta real. Então, P_n^ϕ satisfaz à seguinte relação de recorrência

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1}^\phi) P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 1,$$

com $P_0^\phi(x) = 1$, $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, $\beta_n^\phi \in \mathbb{R}$, e $\alpha_{n+1}^\phi > 0$, $n \geq 1$. Além disso, todos os zeros de P_n^ϕ são reais, distintos e estão no interior do menor intervalo fechado contendo o suporte (conjunto dos pontos de aumento, denotado por E) da medida (veja Chihara [6] e Szegő [14]).

Sri Ranga [13] mostrou que se $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são duas medidas positivas simétricas relacionadas por $cd\phi_2(x) = (1 + qx^2)d\phi_1(x)$, onde q é real e positivo e c uma constante apropriada, então, associada a essas medidas, existe uma seqüência de números positivos $\{l_n\}_{n=0}^\infty$, com $l_0 = 1$, tal que

$$\begin{aligned} (l_n - 1)(l_{n-1} + 1) &= 4q\alpha_{n+1}^{\phi_1}, \\ (l_n - 1)(l_{n+1} + 1) &= 4q\alpha_{n+1}^{\phi_2}, \end{aligned} \quad n \geq 1. \quad (1.1)$$



Em [3], Sri Ranga e Berti concluíram que (1.1) vale para todo q real (não necessariamente positivo), desde que $d\phi_1$ e $d\phi_2$ permaneçam medidas válidas. Fazendo $k^2 = -1/q$ e $g_n = (1 + l_{n+1})/2$, os resultados associados a (1.1) podem ser escritos como

$$cd\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x) \quad (1.2)$$

e

$$(1 - g_{n-1})g_{n-2} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2}, \quad (1 - g_{n-1})g_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}, \quad n \geq 1, \quad (1.3)$$

com $g_{-1} = 1$. Então, como $\alpha_{n+1}^{\phi_1}/k^2 > 0$ e $\alpha_{n+1}^{\phi_2}/k^2 > 0$, temos $0 < g_n < 1$, $n \geq 1$, se $0 < g_0 = 1 - \alpha_2^{\phi_1}/k^2 < 1$ (veja Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [4]), ou seja, $\{g_k\}_{k=0}^\infty$ é uma seqüência de parâmetros associada à seqüência encadeada positiva $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}/k^2\}_{n=1}^\infty$. Dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ é uma seqüência encadeada positiva, se existe uma segunda seqüência $\{h_k\}_{k=0}^\infty$, tal que $0 \leq h_0 < 1$, $0 < h_n < 1$ e $(1 - h_{n-1})h_n = a_n$ para $n \geq 1$.

Com o uso das propriedades de seqüências encadeadas, juntamente com (1.1) e (1.2), em [4] foram obtidas relações entre alguns polinômios ortogonais e outros bem conhecidos, tal que foi possível encontrar informações sobre os zeros desses polinômios. Em especial, estudou-se alguns casos particulares de polinômios ortogonais considerados por Koornwinder [9], em 1984. Esses polinômios são ortogonais com relação à medida $d\phi$ definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\phi(x) = Mf(-1) + Nf(1) + L \int_{-1}^1 f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$

com $L = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}$, que tem saltos nos pontos -1 e 1 e sua parte contínua está relacionada aos polinômios de Jacobi. Seguindo Kiesel e Wimp [8] chamamos esses polinômios de *polinômios de Koornwinder*. Um de seus aspectos interessantes é que eles são soluções de certas equações diferenciais de segunda ordem. Ainda em [4], considerou-se os polinômios ortogonais $K_n^{(\lambda, M, k)}$ associados à medida $d\phi^{(\lambda, M, k)}(x)$ dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)d\phi^{(\lambda, M, k)}(x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-k) + f(k)] + \frac{\tilde{L}^{(\lambda, k)}[f]}{\tilde{L}^{(\lambda, k)}[1]} \right\},$$

com $\tilde{L}^{(\lambda, k)}[f] = \int_{-1}^1 f(x) \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2 - x^2} dx$ e $\lambda > -1/2$. Note que a medida tem saltos nos pontos $-k$ e k de tamanho $M/(2M+1)$. O valor de $\tilde{L}^{(\lambda, k)}(f)$ foi escolhido de tal modo que o aumento total da medida é 1. Quando $k = 1$ temos os polinômios de Koornwinder simétricos, cuja medida tem saltos nos pontos -1 e 1 e sua parte contínua é a medida associada aos polinômios de Gegenbauer.

Em Berti, Bracciali e Sri Ranga [2] mostrou-se como se relacionam os polinômios ortogonais cujas medidas satisfazem

$$c d\phi_0(x) = (x - q) d\phi_1(x),$$

onde q é real, $(x - q)$ não muda de sinal em E , comum das medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$, e c e q são constantes tais que $(x - q)/c$ é finito e positivo em E .

Neste trabalho, consideramos os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ associados à medida de probabilidade $d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(\kappa) + \frac{\mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[p]}{\mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[1]} \right\},$$

onde $0 \leq N < \infty$, $|\kappa| \geq 1$, p é qualquer polinômio e $\mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[p] = \int_{-1}^1 p(x) \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{\kappa - x} dx$. Aqui, se $|\kappa| > 1$, então $\alpha > -1$ e $\beta > -1$, se $\kappa = 1$, então $\alpha > 0$ e $\beta > -1$ e, se $\kappa = -1$, então $\alpha > -1$ e $\beta > 0$. Quando $N > 0$ a medida $d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ tem um salto no ponto κ de tamanho $N/(N+1)$, proporcional à medida com massa total igual a 1. Obtemos informações sobre os zeros desses polinômios em relação aos zeros dos conhecidos polinômios de Jacobi. Relacionamos, também, os zeros dos polinômios mônicos $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ com os zeros dos polinômios de Laguerre e, para isto, consideramos os polinômios ortogonais mônicos $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ associados à medida de probabilidade $d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(-\kappa) + \frac{\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]} \right\},$$

com $0 \leq N < \infty$, $\kappa \geq 0$, p é qualquer polinômio e $\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[p] = \int_0^\infty p(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{x + \kappa} dx$. Aqui, se $\kappa > 0$, então $\alpha > -1$ e, se $\kappa = 0$, então $\alpha > 0$. Quando $N > 0$ a medida $d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}$ tem um salto no ponto $-\kappa$ de tamanho $N/(N+1)$, proporcional a $\mu_0^{(\alpha, \kappa, N)} = 1$.

Os principais resultados, organizados no Capítulo 4 deste trabalho, foram demonstrados teoricamente e testados numericamente com o uso do software *Maple*®6.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2, fazemos um breve estudo sobre polinômios ortogonais e apresentamos um resumo sobre os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre, além dos polinômios de Koornwinder.

No Capítulo 3, apresentamos alguns conceitos e resultados sobre frações contínuas e seqüências encadeadas positivas, que possuem muitas aplicações nos estudos de polinômios ortogonais.



No Capítulo 4, apresentamos estudos sobre os polinômios ortogonais associados a duas medidas relacionadas entre si. Relatamos resultados do trabalho de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [4] sobre seqüências encadeadas generalizadas e medidas relacionadas, quando considera-se medidas simétricas que satisfazem $c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2) d\phi_1(x)$ e mostramos, como aplicação, um estudo do comportamento em relação ao tamanho e à posição do salto, dos zeros dos polinômios cuja medida tem salto, e a localização desses zeros entre os zeros dos polinômios de Gegenbauer. Apresentamos, ainda, os resultados de Berti, Bracciali e Sri Ranga [2], quando considera-se medidas não-simétricas que satisfazem $c d\phi_0(x) = (x - q) d\phi_1(x)$, acrescentando informações, também em relação ao tamanho e à posição do salto, sobre o comportamento dos zeros de determinados polinômios, cuja medida tem salto, e os relacionando aos zeros dos polinômios de Jacobi e Laguerre generalizados.

2.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais

Definição 2.1.1. Seja $(\mu, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ um espaço de medida, onde μ é uma medida positiva, $\mathcal{B}$ é uma σ -álgebra e $\mathbb{R}$ é o corpo dos números reais. Sejam f, g funções reais integráveis em relação a μ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, a função $\lambda f + g$ é integrável em relação a μ e

$$\int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Sejam f, g funções reais integráveis em relação a μ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, a função $\lambda f + g$ é integrável em relação a μ e

Definição 2.1.2. Sejam $(\mu, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ um espaço de medida, onde μ é uma medida positiva, $\mathcal{B}$ é uma σ -álgebra e $\mathbb{R}$ é o corpo dos números reais. Sejam f, g funções reais integráveis em relação a μ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, a função $\lambda f + g$ é integrável em relação a μ e

$$\int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu.$$

$$\int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu.$$



Capítulo 2

Polinômios Ortogonais

Inicialmente, apresentamos alguns resultados, encontrados nos textos de Chihara [6] e Szegő [14], sobre polinômios ortogonais de forma geral e algumas de suas propriedades. Consideramos, também, alguns polinômios ortogonais clássicos, tais como os polinômios de Jacobi e os polinômios de Gegenbauer, que são casos especiais dos polinômios de Jacobi, e os polinômios de Laguerre.

2.1 Propriedades dos Polinômios Ortogonais

Definição 2.1.1. *Sejam $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e ϕ uma função real, limitada, não decrescente, definida em $[a, b]$, com infinitos pontos de aumento em (a, b) . Os valores*

$$\mu_r^\phi = \int_a^b x^r d\phi(x), \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

*são chamados de **momentos**. Se os momentos μ_r^ϕ , $r = 0, 1, 2, \dots$, existem, $d\phi$ representa uma **medida** (medida positiva) em (a, b) . Quando $d\phi(x) = w(x)dx$, onde $w(x) \geq 0$ em (a, b) mas não identicamente nula, w é chamada **função peso**.*

Definição 2.1.2. *Dizemos que $\{Q_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é uma seqüência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi$ em (a, b) se*

i) Q_n^ϕ é de grau exatamente n ;

$$\text{ii) } \langle Q_n^\phi, Q_m^\phi \rangle = \int_a^b Q_n^\phi(x) Q_m^\phi(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \rho_n > 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$



Se $\rho_n = 1$, $n \geq 0$, dizemos que $\{Q_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ é uma sequência de polinômios ortonormais.

Seja $Q_n^\phi(x)$ dado por

$$Q_n^\phi(x) = \sum_{i=0}^n a_{n,i} x^i, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

O Teorema abaixo nos permite gerar uma sequência de polinômios ortogonais conhecendo-se apenas dois polinômios de graus consecutivos pertencentes à essa sequência.

Teorema 2.1.1. [Relação de recorrência de três termos] *Seja $\{Q_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais em (a, b) relativamente à medida $d\phi$. Então,*

$$Q_{n+1}^\phi(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})Q_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}Q_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 0,$$

com $Q_{-1}^\phi(x) = 0$, $Q_0^\phi(x) = 1$ e α_{n+1} , β_{n+1} , $\gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$, onde

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xQ_n^\phi, Q_n^\phi \rangle}{\langle Q_n^\phi, Q_n^\phi \rangle}, \quad n \geq 0,$$

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle Q_n^\phi, Q_n^\phi \rangle}{\langle Q_{n-1}^\phi, Q_{n-1}^\phi \rangle} \neq 0, \quad n \geq 1.$$

Seja $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ a sequência de polinômios ortogonais mônicos (o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1). Neste caso, $\gamma_{n+1} = 1$ e a relação de recorrência é da forma

$$P_{n+1}^\phi(x) = (x - \beta_{n+1})P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^\phi(x), \quad n \geq 0, \quad (2.1.1)$$

com $P_{-1}^\phi(x) = 0$, $P_0^\phi(x) = 1$ e β_{n+1} , $\alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$, onde

$$\beta_{n+1} = \frac{\langle xP_n^\phi, P_n^\phi \rangle}{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{\langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle}{\langle P_{n-1}^\phi, P_{n-1}^\phi \rangle} > 0.$$

Teorema 2.1.2. *Seja $\{Q_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ uma sequência de polinômios ortogonais no intervalo (a, b) relativamente à medida $d\phi$. Então, os zeros de Q_n^ϕ são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) .*

Definição 2.1.3. *Dada a sequência de polinômios ortogonais mônicos $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$, definimos os polinômios associados a P_n^ϕ por*

$$O_n^\phi(x) = \frac{1}{\mu_0} \int_a^b \frac{P_n^\phi(t) - P_n^\phi(x)}{t - x} d\phi(t), \quad n \geq 1.$$



Observe que os polinômios associados O_n^ϕ são polinômios mônicos de grau $n - 1$.

Teorema 2.1.3. *Seja $\{P_n^\phi\}_{n=0}^\infty$ uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos. Os polinômios associados mônicos O_n^ϕ satisfazem a mesma relação de recorrência dos polinômios P_n^ϕ com condições iniciais $O_0^\phi(x) = 0$ e $O_1^\phi(x) = 1$.*

2.1.1 Teorema de Favard

Vamos considerar, agora, um problema inverso associado com os polinômios ortogonais.

Teorema 2.1.4. [Teorema de Favard] *Sejam $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty$ e $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ seqüências de números reais arbitrários, com $\alpha_n > 0$ ($n \geq 1$), e seja $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ definido pela fórmula de recorrência*

$$P_n(x) = (x - \beta_n)P_{n-1}(x) - \alpha_n P_{n-2}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1.2)$$

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1.$$

Então, existe uma medida positiva $d\phi$ tal que

$$\int_a^b d\phi(x) = \alpha_1, \quad \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = 0 \quad \text{para } m \neq n, \quad m, n \geq 0.$$

Demonstração: Faremos aqui um esboço da demonstração do Teorema de Favard.

Além dos polinômios P_n , dados pela relação de recorrência (2.1.2), vamos considerar uma segunda seqüência de polinômios O_n dada por

$$O_n(x) = (x - \beta_n)O_{n-1}(x) - \alpha_n O_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.1.3)$$

$$O_0(x) = 0, \quad O_1(x) = \alpha_1 > 0.$$

De (2.1.2) e (2.1.3), temos que P_n é um polinômio mônico de grau n e O_n é um polinômio de grau $n - 1$ com coeficiente do termo de maior grau igual a α_1 .

Além disso,

$$V_n(x) = O_n(x)P_{n-1}(x) - O_{n-1}(x)P_n(x) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \tau_n > 0, \quad n \geq 1, \quad (2.1.4)$$

e

$$W_n(x) = P'_n(x)P_{n-1}(x) - P'_{n-1}(x)P_n(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\tau_n}{\tau_j} P_{j-1}^2(x) > 0 \quad n \geq 1. \quad (2.1.5)$$

Em (2.1.5), observamos que todos os zeros de P_n são reais, distintos e diferentes dos zeros de P_{n-1} . Da mesma forma, temos, de (2.1.4), que os zeros de O_n são diferentes dos zeros de P_n .



Considerando as funções racionais $\left\{ \frac{O_n(z)}{P_n(z)} \right\}$, obtemos

$$\frac{O_n(z)}{P_n(z)} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{z - x_{n,r}},$$

onde $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$ são os zeros de P_n e

$$\lambda_{n,r} = \frac{O_n(x_{n,r})}{P'_n(x_{n,r})} = \frac{V_n(x_{n,r})}{W_n(x_{n,r})} > 0.$$

Além disso,

$$\sum_{r=1}^n \lambda_{n,r} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z O_n(z)}{P_n(z)} = \alpha_1.$$

Se definirmos $\{\phi_n\}$, uma seqüência uniformemente limitada de funções não-decrescentes, por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 0, & t < x_{n,1} \\ \sum_{r=1}^{s-1} \lambda_{n,r}, & x_{n,s-1} \leq t < x_{n,s}, \quad s = 2, 3, \dots, n, \\ \alpha_1, & x_{n,n} \leq t \end{cases}$$

para $n \geq 1$, obtemos

$$\frac{O_n(z)}{P_n(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t} d\phi_n(t).$$

Se denotarmos por $O(\frac{1}{x^p})$ a série de potências que no termo cujo expoente do denominador é p e cresce até o infinito, para $n \geq 1$ temos

$$\frac{O_n(z)}{P_n(z)} - \frac{O_{n-1}(z)}{P_{n-1}(z)} = \frac{O_n(z)P_{n-1}(z) - O_{n-1}(z)P_n(z)}{P_n(z)P_{n-1}(z)} = \frac{\tau_n}{z^{2n-1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n}}\right).$$

Daí, temos que $\left\{ \frac{O_n(z)}{P_n(z)} \right\}$, $n \geq 1$, corresponde a alguma série da forma $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r}{z^{r+1}}$, tal que

$$\frac{O_n(z)}{P_n(z)} = \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \dots + \frac{\mu_{2n-2}}{z^{2n-1}} + \frac{\mu_{2n-1}}{z^{2n}} + \frac{c_n^{(n)}}{z^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad n \geq 1,$$

onde $c_n^{(n)} = \mu_{2n} - \tau_{n+1}$, $n \geq 1$.

Isto é,

$$\frac{O_n(z)}{P_n(z)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\mu_r}{z^{r+1}} = \frac{c_n^{(n)} - \mu_{2n}}{z^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right) = \frac{-\tau_{n+1}}{z^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right).$$



Seja $G_n(z)$ definida por

$$z^{-2n-1}G_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t} d\phi(t) - \frac{O_n(z)}{P_n(z)}.$$

Agora, necessitaremos dos seguintes teoremas:

Teorema 2.1.5. [Primeiro Teorema de Helly] *Dada uma seqüência $\{\psi_n\}$ de funções não-negativas, não-decrescentes e uniformemente limitadas, existe uma subseqüência $\{\psi_{n_\nu}\}$ e uma função ϕ nas mesmas condições de ψ_n , para a qual essa subseqüência converge.*

Teorema 2.1.6. [Segundo Teorema de Helly] *Seja uma seqüência $\{\psi_n\}$ de funções não-negativas, não-decrescentes e uniformemente limitadas que converge para uma função ϕ nas mesmas condições de ψ_n . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) d\psi_n = \int_{\mathbb{R}} f(t) d\phi$$

para qualquer função contínua $f(t)$ em $\mathbb{R}$.

Usando o Primeiro e o Segundo Teoremas de Helly, Teoremas 2.1.5 e 2.1.6, respectivamente, concluímos que existe uma função ϕ não decrescente e com aumento total α_1 tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{O_n(z)}{P_n(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t} d\phi(t).$$

Assim, como

$$\frac{O_n(z)}{P_n(z)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-t} d\phi_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^r d\phi_n(t)}{z^{r+1}},$$

temos

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} t^r d\phi_n(t), \quad r = 0, 1, 2, \dots, 2n-1$$

e, pelos Teoremas de Helly,

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{\infty} t^r d\phi(t), \quad r \geq 0.$$

Podemos escrever

$$G_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zt^{2n}}{z-t} (d\phi(t) - d\phi_n(t)).$$

Considere a região U no plano complexo definido por $U \equiv \{x : x = iy, y > M > 1\}$. Temos que $G_n(z)$ é limitada em U .



Seja a identidade

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z - t} d\phi(t) - O_n(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z)}{z - t} d\phi(t) - O_n(z) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{z - t} d\phi(t) \\ &= x^{-2n-1} P_n(z) G_n(z) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{z - t} d\phi(t) \end{aligned}$$

Disso, temos que o lado direito é limitado em U e tende para zero quando z tende para o infinito. Assim, o lado esquerdo da identidade também tende para zero quando z tende para o infinito. Como o lado esquerdo é um polinômio, concluímos que é identicamente nulo. Isto é,

$$O_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(z) - P_n(t)}{z - t} d\phi(t).$$

Como o lado esquerdo é identicamente nulo, o lado direito também é. Daí,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n(t)}{z - t} d\phi(t) &= z^{-2n-1} P_n(z) G_n(z) \\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^r P_n(t) d\phi(t)}{z_{r+1}} &= z^{-2n-1} P_n(z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zt^{2n}}{z - t} (d\phi(t) - d\phi_n(t)) \end{aligned}$$

e concluímos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^r P_n(t) d\phi(t) = 0, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^n P_n(t) d\phi(t) = \tau_n.$$

A existência da medida $d\phi(x)$ é garantida pelo Teorema de Helly, mas ela não é necessariamente única. Para a unicidade da medida, os coeficientes α_n e β_n têm que satisfazer outras condições. Uma das condições suficientes para a unicidade da medida é que $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ sejam limitadas.

Agora surge uma questão: Dada uma medida, já vimos, no início deste capítulo, que existe uma sequência de polinômios ortogonais associado a ela. Esta sequência de polinômios ortogonais também pode ser associada a uma outra medida? Novamente a condição $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ limitadas garante que não existe outra medida. Esta condição vale se, e somente se, o intervalo onde a medida tem todos os saltos é finito.

Dizemos que a medida é determinada quando não existe outra medida que fornece a mesma sequência de polinômios ortogonais. Porém, se $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ não são limitadas, não implica sempre que a medida é indeterminada. Como exemplos de medidas determinadas, onde $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ não são limitadas, temos as medidas de Laguerre e Hermite.

Definição 2.1.4. Chamamos de **verdadeiro intervalo de ortogonalidade** o menor intervalo fechado $[\xi_1, \eta_1]$ que contém todos os zeros dos polinômios ortogonais P_n . Temos, ainda, que

$$\xi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,1} \quad e \quad \eta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n},$$

onde $x_{n,i}$, $i = 1, \dots, n$, são os zeros dos polinômios ortogonais P_n em ordem crescente, ou seja,

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}.$$

2.2 Alguns Polinômios Ortogonais Clássicos

Consideremos, agora, algumas propriedades dos polinômios de Jacobi (incluindo o caso especial de Gegenbauer) e Laguerre, que são chamados de polinômios ortogonais clássicos, veja Chihara [6]. Além desses, há, ainda, o polinômio ortogonal clássico de Hermite.

Apresentaremos, primeiramente, as definições de função gama e de série hipergeométrica.

Definição 2.2.1. A função gama foi definida por Euler, em 1729, da seguinte forma

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^x \left(\frac{k}{k+x} \right) \right] \text{ para } x \neq 0, -1, -2, \dots$$

A função gama também pode ser dada como integral de Euler de segunda espécie

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0.$$

Definição 2.2.2. Definimos uma série hipergeométrica por

$${}_2F_1(a, b, c; x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n,$$

com $(a)_n = a(a+1)(a+2) \dots (a+n-1)$, $n \geq 1$ e $(a)_0 = 1$, $a \neq 0$. O símbolo $(a)_n$ é chamado de símbolo de Pochhammer-Barnes (veja, por exemplo, Szegő [14]).

2.2.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi, denotados por $P_n^{(\alpha, \beta)}$, são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ com relação à medida $d\phi(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$, $\alpha, \beta > -1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Através da fórmula de



Rodrigues, podem ser dados por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}], \quad n \geq 0.$$

O coeficiente do termo de maior grau para tais polinômios é dado por

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}.$$

Teorema 2.2.1. *Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle P_n^{(\alpha, \beta)}, P_m^{(\alpha, \beta)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{(\alpha + \beta + 2n + 1) n! \Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Jacobi mônicos é dada por

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) = (x - \beta_{n+1}) P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \alpha_{n+1} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(x), \quad n \geq 0,$$

onde $P_{-1}^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$ e $P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$, com

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{(2n + \alpha + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)}, \quad n \geq 0,$$

e

$$\alpha_{n+1} = \frac{4n(\alpha + n)(\beta + n)(\alpha + \beta + n)}{(\alpha + \beta + 2n - 1)(\alpha + \beta + 2n)^2(\alpha + \beta + 2n + 1)}, \quad n \geq 1.$$

2.2.2 Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer, também chamados polinômios Ultraesféricos, são casos especiais dos polinômios de Jacobi com $\alpha = \beta = (\lambda - 1/2)$, $\lambda > -1/2$ e $\lambda \neq 0$. Quando $\lambda = 0$ temos os polinômios de Tchebichef. São ortogonais em $(-1, 1)$ com relação à medida $d\phi(x) = (1 - x^2)^{\lambda-1/2} dx$.

Em Chihara [6, p.144] os polinômios de Gegenbauer, $Q_n^{(\lambda)}$, são dados por

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n + 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x),$$

onde $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$ e $P_n^{(\alpha, \alpha)}$ são os polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$ e

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, \quad a \geq b.$$

Os polinômios de Gegenbauer na forma mônica, $P_n^{(\lambda)}$, são dados, em termos da série hipergeométrica, por

$$P_n^{(\lambda)}(x) = (2)^{-n} \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda)_n} {}_2F_1(-n, n+2\lambda; \lambda+1/2; \frac{1-x}{2}), \quad n \geq 1.$$

Satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$P_{n+1}^{(\lambda)}(x) = xP_n^{(\lambda)}(x) - \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda-1)} P_{n-1}^{(\lambda)}(x), \quad n \geq 0,$$

com $P_{-1}^{(\lambda)}(x) = 0$ e $P_0^{(\lambda)}(x) = 1$.

2.2.3 Polinômios de Laguerre

São polinômios ortogonais com relação à medida $d\phi(x) = x^\alpha e^{-x} dx$, $\alpha > -1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, no intervalo $[0, \infty]$. Podem ser dados, pela fórmula de Rodrigues, por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{\alpha+n} e^{-x}].$$

O coeficiente do termo de maior grau é 1 e, portanto, são mônicos.

Teorema 2.2.2. A relação de ortogonalidade para os polinômios de Laguerre é dada por

$$\langle L_n^{(\alpha)}, L_m^{(\alpha)} \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ n! \Gamma(n + \alpha + 1), & \text{se } m = n. \end{cases}$$

A relação de recorrência de três termos para os polinômios de Laguerre é da seguinte forma

$$L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (x - \beta_{n+1}) L_n^{(\alpha)}(x) - \alpha_{n+1} L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1,$$

com

$$\beta_{n+1} = 2n + \alpha + 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = n(n + \alpha).$$



2.3 Polinômios de Koornwinder

Em 1984, Koornwinder considerou os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}$ definidos por

$$P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}(x) = \left[\frac{(s)_n}{n!} \right]^2 \left\{ \frac{1}{s} [(1-x)MB_n - (1+x)NA_n] \frac{d}{dx} + A_n B_n \right\} P_n^{(\alpha, \beta)}(x),$$

para $n \geq 0$, onde $s = \alpha + \beta + 1$,

$$A_n = \frac{(\alpha + 1)_n n!}{(\beta + 1)_n (s)_n} + \frac{n(n+s)}{s(\beta + 1)} M, \quad B_n = \frac{(\beta + 1)_n n!}{(\alpha + 1)_n (s)_n} + \frac{n(n+s)}{s(\alpha + 1)} N$$

e $P_n^{(\alpha, \beta)}$ são os polinômios de Jacobi.

Os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta, M, N)}$ são ortogonais em $[-1, 1]$ associados à medida $d\phi$ dada por

$$\int_{-1}^{\infty} f(x) d\phi(x) = M f(-1) + N f(1) + L \int_{-1}^1 f(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx,$$

onde $L = \frac{\Gamma(s+1)}{2^s \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}$. Note que a medida tem saltos nos pontos -1 e 1 e sua parte contínua é a medida associada aos polinômios de Jacobi.

No caso $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$ e $M = N$, temos os polinômios de Koornwinder simétricos $P_n^{(\lambda-1/2, \lambda-1/2, M, M)}$, que denotaremos por $K_n^{(\lambda, M)}$.

Consideraremos, ainda, os polinômios ortogonais $K_n^{(\lambda, M, k)}$ associados à medida $d\phi^{(\lambda, M, k)}$ definida por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\phi^{(\lambda, M, k)}(x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-k) + f(k)] + \frac{\tilde{L}^{(\lambda, k)}[f]}{\tilde{L}^{(\lambda, k)}[1]} \right\}, \quad (2.3.1)$$

onde

$$\tilde{L}^{(\lambda, k)}[f] = \int_{-1}^1 f(x) \frac{(1-x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2 - x^2} dx,$$

$k, \lambda \in \mathbb{R}$ tais que $k > 1$ e $\lambda > -3/2$ ou $k = 1$ e $\lambda > -1/2$.

Se $k = 1$, obtemos os polinômios de Koornwinder simétricos ($K_n^{(\lambda, M)}(x) = K_n^{(\lambda, M, 1)}(x)$) e a medida $d\phi^{(\lambda, M, 1)}(x)$ é dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) d\phi^{(\lambda, M, 1)}(x) = \frac{1}{2M+1} \left\{ M[f(-1) + f(1)] + \frac{2^{-2\lambda} \Gamma(2\lambda+1)}{[\Gamma(\lambda+1/2)]^2} \int_{-1}^1 f(x) (1-x^2)^{\lambda-1/2} dx \right\}.$$

Esta medida tem saltos nos pontos -1 e 1 e sua parte contínua é a medida associada aos polinômios de Gegenbauer.



Capítulo 3

Seqüências Encadeadas Positivas

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados sobre frações contínuas e seqüências encadeadas positivas, acrescentando detalhes de demonstrações que podem ser encontradas em Chihara [6] e Wall [15], por exemplo. Esses resultados serão necessários no próximo capítulo.

3.1 Frações Contínuas

Uma fração contínua é uma expressão da forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n + \dots}}} \quad (3.1.1)$$

onde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ são seqüências arbitrárias de números complexos (ou funções complexas). Uma fração contínua pode ser finita ou infinita.

Adotaremos a seguinte notação simplificada para (3.1.1)

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots \quad (3.1.2)$$

Consideremos a seqüência $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$ construída da seguinte maneira



$$\begin{aligned}
C_0 &= b_0 \\
C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\
C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} \\
&\vdots \\
C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_n} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

C_n , que é uma fração contínua finita, é chamado de **n-ésimo convergente (ou aproximante)** da fração contínua (3.1.1).

Por se tratar de frações, é possível que certos convergentes sejam indefinidos. Por exemplo, C_2 não tem sentido se $b_1 b_2 = -a_2$. Contudo, se quisermos ainda considerar a correspondente fração contínua, fazemos uso da definição abaixo.

Definição 3.1.1. Dizemos que a fração contínua (3.1.2) **converge** para o valor K (finito) se no máximo um número finito de C_n é indefinido e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = K.$$

Caso contrário, dizemos que a fração contínua **diverge**.

Se a fração contínua converge para K , escrevemos

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \dots = K.$$

Da relação (3.1.3) podemos escrever $C_n = \frac{A_n}{B_n}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, onde

$$\begin{aligned}
A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\
A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\
A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\
&\vdots & &\vdots
\end{aligned}$$

Notemos, por exemplo, que $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$ e $B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0$. Deste modo, obtemos o resultado a seguir, facilmente demonstrável usando-se o princípio da indução matemática.



Teorema 3.1.1. *Sejam as seqüências $\{A_n\}$ e $\{B_n\}$ tais que*

$$\begin{aligned} A_n &= b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \\ B_n &= b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

com $A_{-1} = 1$, $A_0 = b_0$, $B_{-1} = 0$, $B_0 = 1$ e $b_n \neq 0$ para $n \geq 1$. Então, o n -ésimo convergente C_n , dado por (3.1.3), satisfaz $C_n = A_n/B_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Segundo Chihara [6], as fórmulas dadas por (3.1.4) são conhecidas por **fórmulas de Wallis**, onde A_n é chamado o **n -ésimo numerador parcial** e B_n é o **n -ésimo denominador parcial** da fração contínua.

Se multiplicarmos a primeira fórmula de Wallis (3.1.4) por B_{n-1} e a segunda por A_{n-1} , e subtrairmos uma da outra, obtemos

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = -a_n (A_{n-1} B_{n-2} - B_{n-1} A_{n-2}).$$

Daí,

$$A_n B_{n-1} - B_n A_{n-1} = (-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n, \quad n \geq 1.$$

Essa relação é conhecida como **fórmula do determinante**.

Além disso,

$$\frac{A_n}{B_n} - \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = \frac{(-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_n}{B_{n-1} B_n},$$

que nos fornece

$$\frac{A_n}{B_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \dots a_k}{B_{k-1} B_k}, \quad (3.1.5)$$

desde que $b_k \neq 0$ e $B_k \neq 0$ para $1 \leq k \leq n$, que é a n -ésima soma parcial da série $b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} a_1 a_2 \dots a_k}{B_{k-1} B_k}$, conhecida por série de Euler-Minding.

Definição 3.1.2. *Duas frações contínuas são chamadas equivalentes se os respectivos convergentes de ordem n , $n \geq 0$, são iguais.*

Definição 3.1.3. [Transformações Equivalentes] *Seja $x_i \neq 0$ para $i \geq 0$. A transformação que associa a fração contínua (3.1.1) a*

$$b_0 + \frac{x_1 a_1}{x_1 b_1} + \frac{x_1 x_2 a_2}{x_2 b_2} + \frac{x_2 x_3 a_3}{x_3 b_3} + \dots + \frac{x_{n-1} x_n a_n}{x_n b_n} + \dots \quad (3.1.6)$$

é chamada Transformação Equivalente.



Certamente (3.1.1) e (3.1.6) têm os mesmos convergentes.

Lema 3.1.1. *Seja $m_0 = 0$. Então, o n -ésimo denominador parcial da fração contínua*

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{(1 - m_0)m_1}{1} - \frac{(1 - m_1)m_2}{1} - \dots} \quad (3.1.7)$$

é

$$B_n = (1 - m_0)(1 - m_1) \dots (1 - m_{n-1}), \quad n \geq 1. \quad (3.1.8)$$

Demonstração: Usaremos indução. Da fração contínua (3.1.7), concluímos que $a_1 = -1$, $a_n = -(1 - m_{n-2})m_{n-1}$, $n \geq 2$ e $b_n = 1$, para $n \geq 0$. Deste modo, (3.1.8) vale para $n = 1$ pois, pela fórmula de Wallis, $B_1 = 1 - 0 = 1 - m_0$.

Suponhamos que (3.1.8) seja válido para $n \leq k$ e mostremos que vale para $n = k + 1$. Temos que

$$B_{k+1} = B_k + a_{k+1}B_{k-1}.$$

Substituindo o valor de a_{k+1} e usando a hipótese de indução, concluímos que

$$B_{k+1} = (1 - m_0)(1 - m_1) \dots (1 - m_{k-1})(1 - m_k).$$

Logo, demonstramos que a igualdade (3.1.8) vale para todo $n \geq 1$. ■

Lema 3.1.2. *Seja $\alpha_n = (1 - m_{n-1})m_n$, onde $m_0 = 0$, $0 < m_n < 1$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Então, a fração contínua*

$$1 - \frac{\alpha_1}{1} - \frac{\alpha_2}{1} - \frac{\alpha_3}{1} - \dots \quad (3.1.9)$$

converge para $(1 + L)^{-1}$, onde

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_1 m_2 \dots m_n}{(1 - m_1)(1 - m_2) \dots (1 - m_n)}.$$

Demonstração: Sejam $C_n = \frac{A_n}{B_n}$ o n -ésimo convergente da fração contínua (3.1.9) e

$$\frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*} = 1 - \frac{1}{\frac{A_n}{B_n}} = 1 - \frac{1}{1 - \frac{\alpha_1}{1} - \dots - \frac{\alpha_n}{1}}.$$

Pelo Lema 3.1.1, podemos dizer que $B_{n+1}^* = (1 - m_0) \dots (1 - m_n) > 0$. A positividade de B_{n+1}^* segue do fato de que todos os termos m_n são tais que $0 < m_n < 1$. Pela igualdade (3.1.5), obtemos, para $\alpha_0 = 1$, que

$$\begin{aligned} \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*} &= 1 - \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_k}{B_k^* B_{k+1}^*} \\ &= - \sum_{k=1}^n \frac{m_1 m_2 \dots m_k}{(1 - m_1)(1 - m_2) \dots (1 - m_k)}. \end{aligned}$$



Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{B_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{A_{n+1}^*}{B_{n+1}^*}} = \frac{1}{1 + L}.$$

■

Observação: Aqui, L pode ser infinito. Neste caso, a fração contínua converge para 0.

Teorema 3.1.2. Seja $\beta_n = (1 - g_{n-1})g_n$, onde $0 \leq g_0 < 1$ e $0 < g_n < 1$ para $n \geq 1$. Então,

$$1 - \frac{\beta_1}{1} - \frac{\beta_2}{1} - \frac{\beta_3}{1} - \dots - \frac{\beta_n}{1} - \dots = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \quad (3.1.10)$$

onde

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Demonstração: O caso $g_0 = 0$ é dado pelo Lema 3.1.2, onde $L = G$.

Suponhamos, então, que $g_0 > 0$. Sejam C_n e C_n^* os n -ésimos convergentes das respectivas frações contínuas (3.1.10) e

$$1 - \frac{\beta_1^*}{1} - \frac{\beta_2^*}{1} - \dots - \frac{\beta_n^*}{1} - \dots, \quad (3.1.11)$$

onde $\beta_1^* = g_0$ e $\beta_i^* = \beta_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$. Então,

$$C_n^* = 1 - \frac{\beta_1^*}{1} - \frac{\beta_2^*}{1} - \dots - \frac{\beta_n^*}{1},$$

onde $\beta_i^* = (1 - g_{i-1}^*)g_i^*$, com $g_0^* = 0$ e $g_i^* = g_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$.

De acordo com o Lema 3.1.2, C_n^* converge para $(1 + K)^{-1}$, onde K é dado por

$$\begin{aligned} K &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1^* g_2^* \cdots g_n^*}{(1 - g_1^*)(1 - g_2^*) \cdots (1 - g_n^*)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_0 g_1 \cdots g_{n-1}}{(1 - g_0)(1 - g_1) \cdots (1 - g_{n-1})} \\ &= \frac{g_0}{1 - g_0} [1 + G]. \end{aligned}$$

Sabemos que o $(n + 1)$ -ésimo convergente da fração contínua (3.1.11) pode ser escrito como $C_{n+1}^* = 1 - g_0 C_n^{-1}$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = g_0 + \frac{g_0}{K} = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}.$$

Portanto, a fração contínua (3.1.10) converge para $g_0 + (1 - g_0)(1 + G)^{-1}$, onde

$$G = \frac{1 - g_0}{g_0} K - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

■

3.2 Seqüências Encadeadas Positivas

Definição 3.2.1. Uma seqüência $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada **seqüência encadeada positiva** se existir uma seqüência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ tal que, para $n \geq 1$

$$\begin{aligned} i) \quad & 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \\ ii) \quad & a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

$\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada **seqüência de parâmetros** para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o **parâmetro inicial**.

Neste capítulo, vamos nos referir à seqüência encadeada positiva somente como seqüência encadeada, e abreviaremos $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ por $\{a_n\}$ e $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ por $\{g_k\}$.

Embora não seja difícil construir exemplos de seqüências encadeadas, não é tão simples determinar se uma dada seqüência é encadeada. Em alguns casos, podemos encontrar uma seqüência de parâmetros fazendo $g_0 = 0$, $g_1 = a_1$ e, resolvendo (3.2.1) sucessivamente, encontramos g_i . Como exemplo, consideremos a seqüência constante $\{1/4\}$ e calculemos sua seqüência de parâmetros. Assim,

$$g_0 = 0, \quad g_1 = \frac{1}{4}, \quad g_2 = \frac{1}{3}, \quad g_3 = \frac{3}{8}, \quad g_4 = \frac{2}{5}, \quad \dots$$

e, por indução, mostra-se que $g_n = \frac{n}{2(n+1)}$, $n \geq 0$.

Por outro lado, $\{a_n\} = \{1/4\}$ também tem uma seqüência de parâmetros simples $\{1/2\}$. Desta maneira, observamos que a seqüência encadeada $\{1/4\}$ não possui uma única seqüência de parâmetros. Podemos, ainda, mostrar que a seqüência de parâmetros da seqüência encadeada $\{a_n\} = \{a\}$, onde $0 < a \leq \frac{1}{4}$, não é única. De fato, seja $\{l\}$ uma seqüência de parâmetros para $\{a\}$. Então, $a = (1-l)l$, de onde concluímos que $l = \frac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$ quando $0 < a \leq \frac{1}{4}$. Assim,

$$\begin{aligned} a &= \left(1 - \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2}\right) \frac{1 + \sqrt{1-4a}}{2} \\ &= \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}\right) \frac{1 - \sqrt{1-4a}}{2}, \end{aligned}$$

para $0 < a \leq \frac{1}{4}$ e $0 < l < 1$. Portanto, existem pelo menos duas seqüências de parâmetros $\{h_k\}$ e $\{g_k\}$ para a seqüência encadeada constante $\{a\}$:

$$h_k = \frac{1}{2}[1 + \sqrt{1-4a}] \quad \text{e} \quad g_k = \frac{1}{2}[1 - \sqrt{1-4a}], \quad k \geq 0,$$



com $0 < a \leq \frac{1}{4}$.

Teorema 3.2.1. *Sejam $\{a_n\}$ uma seqüência encadeada e $\{g_k\}$ e $\{h_k\}$ seqüências de parâmetros para $\{a_n\}$. Então, $g_k < h_k$ para $k \geq 1$ se, e somente se, $g_0 < h_0$.*

Demonstração: Se $(1 - g_{n-1})g_n = a_n = (1 - h_{n-1})h_n$, então

$$\frac{g_k}{h_k} = \frac{(1 - h_{k-1})}{(1 - g_{k-1})}, \quad k \geq 1.$$

Deste modo, $0 < g_k < h_k < 1$ se, e somente se, $0 < g_{k-1} < h_{k-1} < 1$. Logo, $g_0 < h_0$ se, e somente se, $g_k < h_k$, para $k \geq 1$. ■

Teorema 3.2.2. *Seja $\{a_n\}$ uma seqüência encadeada. Se $\{a_n\}$ tem uma seqüência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que $g_0 > 0$, então, para cada h_0 satisfazendo $0 \leq h_0 < g_0$, existe uma correspondente seqüência de parâmetros $\{h_k\}$.*

Demonstração: Se $0 \leq h_0 < g_0$, temos $0 < \frac{1}{1 - h_0} < \frac{1}{1 - g_0}$ e, ainda, como a_1 é positivo, $0 < \frac{a_1}{1 - h_0} < \frac{a_1}{1 - g_0}$. Mas, $\frac{a_1}{1 - g_0} = g_1$, pois g_1 satisfaz $a_1 = (1 - g_0)g_1$. Deste modo,

$$0 < \frac{a_1}{1 - h_0} < \frac{a_1}{1 - g_0} = g_1 < 1 \quad \text{pois} \quad 0 < g_1 < 1.$$

Assim, existe h_1 tal que

$$\frac{a_1}{1 - h_0} = h_1 < g_1, \quad \text{com} \quad a_1 = (1 - h_0)h_1, \quad 0 < h_1 < 1.$$

Suponhamos que exista h_k tal que $a_k = (1 - h_{k-1})h_k$, com $0 < h_k < g_k < 1$. Então,

$$0 < \frac{1}{1 - h_k} < \frac{1}{1 - g_k}$$

e, ainda, como $a_{k+1} > 0$, temos

$$0 < \frac{a_{k+1}}{1 - h_k} < \frac{a_{k+1}}{1 - g_k} = g_{k+1}.$$

Deste modo, existe h_{k+1} tal que $h_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{1 - h_k}$. Assim, $a_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}$, com $0 < h_{k+1} < g_{k+1} < 1$. Portanto, por indução, mostramos que existe uma seqüência de parâmetros $\{h_k\}$. ■

O Teorema 3.2.2 nos mostra que, se o parâmetro inicial de uma seqüência de parâmetros for positivo, sempre existe uma outra seqüência de parâmetros. Além disso, toda seqüência encadeada possui uma seqüência de parâmetros $\{m_k\}$ tal que $m_0 = 0$ e, pelo Teorema 3.2.1, temos que $m_n < g_n$ para qualquer outra seqüência de parâmetros $\{g_k\}$.



Definição 3.2.2. Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{m_k\}$ é chamada **sequência de parâmetros minimais** se $m_0 = 0$.

Caso a sequência de parâmetros minimais seja a única sequência de parâmetros para $\{a_n\}$, dizemos que $\{a_n\}$ determina seus parâmetros unicamente.

Definição 3.2.3. Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Uma sequência de parâmetros $\{M_k\}$ é chamada **sequência de parâmetros maximais** se, para qualquer outra sequência de parâmetros $\{g_k\}$, $M_k > g_k$, $k \geq 0$.

Teorema 3.2.3. Toda sequência encadeada possui uma sequência de parâmetros maximais.

Demonstração: Se $\{a_n\}$ é uma sequência encadeada que determina seus parâmetros unicamente, então sua sequência de parâmetros minimais é também sua sequência de parâmetros maximais.

Suponhamos que $\{a_n\}$ não determina seus parâmetros unicamente e seja M_0 o menor limite superior para o conjunto de todos os parâmetros iniciais. Assim, $0 < M_0 \leq 1$. Para cada x tal que $0 \leq x < M_0$, existe uma sequência de parâmetros $\{g_k(x)\}$ tal que $g_0(x) = x$. Para cada valor de n fixo, $g_n(x)$ é uma função crescente, pois se $x_1 < x_2$, temos

$$g_0(x_1) = x_1 < x_2 = g_0(x_2)$$

e, portanto, pelo Teorema 3.2.1, $g_n(x_1) < g_n(x_2)$, para $n \geq 1$.

Como $g_n(x)$ é uma função crescente e limitada (veja (3.2.1)), podemos definir

$$M_n = \lim_{x \rightarrow M_0^-} g_n(x).$$

Portanto, $0 < g_n(x) < M_n \leq 1$, $n > 0$ e, quando $x \rightarrow M_0^-$ em $(1 - g_{n-1}(x))g_n(x) = a_n$, obtemos

$$(1 - M_{n-1})M_n = a_n.$$

Deste modo, $0 < M_n < 1$ para todo n , pois $0 < a_n < 1$. Logo, $\{M_k\}$ é a sequência de parâmetros maximais para $\{a_n\}$. ■

Dada uma sequência $\{a_n\}$, definimos a sequência $\{a_n^{(k)}\}$ por $a_n^{(k)} = a_{n+k}$, $n = 1, 2, \dots$.

Teorema 3.2.4. (i) $\{a_n^{(1)}\}$ é uma sequência encadeada com sequência de parâmetros $\{g_k^{(1)}\}_{k=0}^\infty$, onde $\{g_k\}$ é uma sequência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$.

(ii) Se $\{m_{1k}\}_{k=0}^\infty$ denota a sequência de parâmetros minimais para $\{a_n^{(1)}\}$, então $m_{1k} < m_k^{(1)}$, $k \geq 0$.

(iii) $\{M_k^{(1)}\}_{k=0}^\infty$ é a sequência de parâmetros maximais para $\{a_n^{(1)}\}$.



Demonstração: (i) Temos que $a_n^{(1)} = a_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1} = (1 - g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)}$, $n \geq 1$. Logo, $\{a_n^{(1)}\}$ é uma seqüência encadeada tal que $g_k^{(1)}$ satisfaz $0 < g_n^{(1)} < 1$ para $n \geq 0$. Portanto, $\{g_k^{(1)}\}_{k=0}^\infty$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n^{(1)}\}$.

(ii) Como $\{m_{1k}\}_{k=0}^\infty$ é a seqüência de parâmetros minimais para $\{a_n^{(1)}\}$ e como $m_1 > 0$, temos que $m_{10} = 0 < m_1 = m_0^{(1)}$. Então, pelo Teorema 3.2.1,

$$m_{1k} < m_k^{(1)}, \quad k \geq 0.$$

(iii) Seja $\{M'_k\}$ a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n^{(1)}\}$. Como $\{M_k^{(1)}\}$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n^{(1)}\}$, então $0 < M_1 = M_0^{(1)} \leq M'_0$. Logo, $(1 - M_0)M'_0 \geq (1 - M_0)M_1$. Assim, existe $M^* \geq M_0$ tal que $(1 - M^*)M'_0 = (1 - M_0)M_1 = a_1$. Por hipótese, $\{M'_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n^{(1)}\}$. Logo,

$$(1 - M'_{k-1})M'_k = a_k^{(1)} = a_{k+1}.$$

Fazendo $k = 1, 2, 3, \dots$, obtemos

$$(1 - M'_0)M'_1 = a_2$$

$$(1 - M'_1)M'_2 = a_3$$

$$\vdots \quad \vdots$$

Desta forma, $\{M^*, M'_0, M'_1, M'_2, \dots\}$ é uma seqüência de parâmetros para $\{a_n\}$, o que é uma contradição pois, como $\{M_k\}$ a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n\}$, não pode ocorrer $M^* \geq M_0$, a menos que $M^* = M_0$. Neste caso, temos que $M'_k = M_k^{(1)}$, $k \geq 0$. Portanto, $\{M_k^{(1)}\}$ é a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n^{(1)}\}$. ■

Teorema 3.2.5. *Seja $\{b_n\}$ uma seqüência encadeada com seqüência de parâmetros $\{h_k\}$. Se $a_n \leq b_n$, $n \geq 1$, então $m_k \leq h_k \leq M_k$, $k \geq 0$.*

Demonstração: Provemos por indução. Se $a_1 \leq b_1 = (1 - h_0)h_1$, então existe um g_1 tal que $a_1 = (1 - h_0)g_1$, $0 < g_1 \leq h_1 < 1$.

Suponhamos que $g_0, g_1, g_2, \dots, g_n$, com $g_0 = h_0$, existam e sejam tais que

$$a_k = (1 - g_{k-1})g_k, \quad 0 < g_k \leq h_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, por hipótese, $a_{n+1} \leq b_{n+1} = (1 - h_n)h_{n+1} \leq (1 - g_n)h_{n+1}$. Deste modo, existe g_{n+1} tal que

$$a_{n+1} = (1 - g_n)g_{n+1}, \quad 0 < g_{n+1} \leq h_{n+1} < 1.$$



Então, $\{a_n\}$ tem uma sequência de parâmetros $\{g_k\}$ tal que

$$g_0 = h_0 \quad \text{e} \quad 0 < g_n \leq h_n < 1, \quad \text{para } n \geq 1. \quad (3.2.2)$$

Desde que $m_0 = 0 \leq g_0 = h_0$. Pelo Teorema 3.2.1, temos que $m_k \leq g_k$ e, por (3.2.2), $m_k \leq h_k$, $k \geq 0$. Além disso, $M_0 \geq g_0 = h_0$. Aplicando este raciocínio para $\{a_n^{(k)}\}$ e $\{b_n^{(k)}\}$, pelo Teorema 3.2.4 obtemos que

$$h_k = h_0^{(k)} \leq M_0^{(k)} = M_k, \quad \text{para } k \geq 1.$$

Portanto, $m_k \leq h_k \leq M_k$. ■

De acordo com o Teorema 3.2.5, se $\{a_n\}$ determina seus parâmetros unicamente, então $\{a_n\}$ não é “dominada” por outra sequência encadeada. Porém, se $\{a_n\}$ não determina seus parâmetros unicamente, podemos construir uma nova sequência encadeada $\{b_n\}$ que domina $\{a_n\}$ tomando, por exemplo, $b_n = (1 - h_{n-1})h_n$, onde

$$(a) \quad h_k = \sqrt{m_k M_k} \quad \text{ou}$$

$$(b) \quad h_k = \lambda m_k + (1 - \lambda)M_k, \quad 0 < \lambda < 1.$$

No caso (a), temos

$$\begin{aligned} b_n^2 &= (1 - \sqrt{m_{n-1} M_{n-1}})^2 m_n M_n \\ &> (1 - m_{n-1} - M_{n-1} + m_{n-1} M_{n-1}) m_n M_n \\ &= [(1 - m_{n-1}) - M_{n-1}(1 - m_{n-1})] m_n M_n \\ &= (1 - m_{n-1}) m_n (1 - M_{n-1}) M_n = a_n^2. \end{aligned}$$

Logo, $b_n > a_n$.

No caso (b), como $\lambda^2 < \lambda$,

$$\begin{aligned} b_n &= [(1 - M_{n-1}) + \lambda(M_{n-1} - m_{n-1})][M_n - \lambda(M_n - m_n)] \\ &= (1 - M_{n-1})M_n - \lambda(M_n - m_n)(1 - M_{n-1}) + \lambda(M_{n-1} - m_{n-1})M_n \\ &\quad - \lambda^2(M_{n-1} - m_{n-1})(M_n - m_n) \\ &> a_n - \lambda(M_n - m_n)(1 - M_{n-1}) + \lambda(M_{n-1} - m_{n-1})m_n \\ &= a_n - \lambda[(1 - M_{n-1})M_n - (1 - m_{n-1})m_n] = a_n. \end{aligned}$$

Assim, $b_n > a_n$.



Teorema 3.2.6. [Teste da comparação] *Seja $\{a_n\}$ uma sequência encadeada. Se $0 < c_n \leq a_n$ para $n \geq 1$, então $\{c_n\}$ também é uma sequência encadeada.*

Demonstração: Definindo $h_0 = 0$ e $h_1 = c_1$, temos

$$c_1 = (1 - h_0)h_1, \quad 0 < h_1 \leq a_1 = m_1 < 1.$$

Suponhamos que

$$c_k = (1 - h_{k-1})h_k, \quad 0 < h_k \leq m_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Por hipótese, $c_{k+1} \leq a_{k+1}$. Então,

$$c_{k+1} \leq a_{k+1} = (1 - m_k)m_{k+1} \leq (1 - h_k)m_{k+1}.$$

Deste modo, existe h_{k+1} tal que $0 < h_{k+1} \leq m_{k+1} < 1$, onde

$$c_{k+1} = (1 - h_k)h_{k+1}.$$

Portanto, provamos por indução que $\{c_n\}$ é uma sequência encadeada. ■

Através do teorema do teste da comparação, conhecendo-se uma sequência encadeada é possível saber se uma outra dada sequência também é encadeada comparando-se os seus termos.

Denotemos, agora, por $\{m_{kn}\}_{n=0}^{\infty}$ a sequência de parâmetros minimais da sequência encadeada $\{a_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$.

De acordo com o Lema 3.1.2, a fração contínua

$$F_k = 1 - \frac{a_1^{(k)}}{1} - \frac{a_2^{(k)}}{1} - \frac{a_3^{(k)}}{1} - \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.2.3)$$

converge para $(1 + L_k)^{-1}$, ou seja, $F_k = (1 + L_k)^{-1}$ e

$$L_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{k1}m_{k2} \cdots m_{kn}}{(1 - m_{k1})(1 - m_{k2}) \cdots (1 - m_{kn})} > 0.$$

A positividade de L_k é facilmente demonstrada pois $0 < m_{kn} < 1$, $n = 1, 2, \dots$. Então, como $L_k > 0$, temos que $0 \leq F_k < 1$. Se considerarmos (3.2.3) para dois valores consecutivos de k , obtemos

$$F_k = 1 - \frac{a_{k+1}}{F_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Deste modo $F_{k+1} \neq 0$ para $k \geq 0$ e $a_{k+1} = (1 - F_k)F_{k+1}$, com $0 \leq F_0 < 1$ e $0 < F_k < 1$, $k \geq 1$. Logo, $\{F_k\}$ é uma sequência de parâmetros para $\{a_n\}$.



Teorema 3.2.7. *A seqüência $\{F_k\}$ definida por (3.2.3) é a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n\}$.*

Demonstração: Seja $\{g_k\}$ uma seqüência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$. Então, pelo Teorema 3.1.2,

$$F_0 = g_0 + \frac{1 - g_0}{1 + G}, \quad (3.2.4)$$

onde

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)}.$$

Como $0 \leq g_0 < 1$ e $G > 0$ temos que $F_0 \geq g_0$. Desta forma, pelo Teorema 3.2.1, $F_k \geq g_k$ para $k \geq 1$. Como $\{g_k\}$ é uma seqüência de parâmetros qualquer para $\{a_n\}$, então $\{F_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n\}$. ■

Teorema 3.2.8. *Uma seqüência de parâmetros $\{g_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n\}$ se, e somente se,*

$$G = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_1 g_2 \cdots g_n}{(1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n)} = \infty.$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.2.7, F_0 é o parâmetro inicial da seqüência de parâmetros maximal. Deste modo, se F_0 for igual a g_0 , então $\{g_k\}$ é a seqüência maximal. Mas, em (3.2.4), $F_0 = g_0$ se, e somente se, $\frac{1 - g_0}{1 + G} = 0$, ou seja, se $G = \infty$. Portanto, $\{g_k\}$ é a seqüência de parâmetros maximais para $\{a_n\}$ se, e somente se, $G = \infty$. ■

3.3 Seqüências Encadeadas e Polinômios Ortogonais

Seja $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma seqüência de polinômios ortogonais mônicos. Vamos obter uma relação entre o verdadeiro intervalo de ortogonalidade $[\xi_1, \eta_1]$, dado pela Definição 2.1.4, e as seqüências de coeficientes $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ da relação de recorrência para P_n .

Teorema 3.3.1. *Uma condição necessária e suficiente para que $[\xi_1, \eta_1]$ seja um subconjunto de $[0, \infty)$ é que $\beta_n > 0$ e $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}}{\beta_n \beta_{n+1}} \right\}$ seja uma seqüência encadeada.*

A demonstração deste teorema, embora simples, é bastante extensa e pode ser encontrada em Chihara [6, p.48].

Se escrevermos $R_n(x) = P_n(x + s)$ temos, então, que $\{R_n\}$ é a seqüência de polinômios ortogonais mônicos cujo verdadeiro intervalo de ortogonalidade é $[\xi_1 - s, \eta_1 - s]$.



Obtemos, da relação de recorrência (2.1.2), que

$$P_n(x+s) = (x+s-\beta_n)P_{n-1}(x+s) - \alpha_n P_{n-2}(x+s)$$

e, deste modo,

$$R_n(x) = (x-c_n)R_{n-1}(x) - \rho_n R_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

onde $c_n = \beta_n - s$ e $\rho_n = \alpha_n$.

Pelo Teorema 3.3.1, temos que $[\xi_1 - s, \eta_1 - s] \subset [0, \infty]$ se, e somente se, $c_n > 0$, para $n \geq 1$, e $\left\{ \frac{\rho_{n+1}}{c_n c_{n+1}} \right\}$ é uma seqüência encadeada.

Vamos introduzir a seguinte notação

$$a_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x)}. \quad (3.3.1)$$

Do Teorema 3.3.1, obtemos

Corolário 3.3.1. $\xi_1 \geq s$ se, e somente se,

(i) $\beta_n > s$, $n \geq 1$,

(ii) $\{a_n(s)\}$ é uma seqüência encadeada.

Demonstração: Pelo teorema 3.3.1, $\xi_1 \geq s$, ou seja, $[\xi_1 - s, \eta_1 - s] \subset [0, \infty]$ se, e somente se, $\beta_n - s > 0$ e $\frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - s)(\beta_{n+1} - s)} = a_n(s)$ é uma seqüência encadeada. ■

Corolário 3.3.2. $\eta_1 \leq t$ se, e somente se,

(i) $\beta_n < t$, $n \geq 1$

(ii) $\{a_n(t)\}$ é uma seqüência encadeada.

Demonstração: Sabemos que o polinômio $(-1)^n P_n(-x)$ satisfaz à relação de recorrência (2.1.1) desde que β_n seja substituído por $-\beta_n$. O verdadeiro intervalo de ortogonalidade correspondente é $[-\eta_1, -\xi_1]$.

Do Corolário 3.3.1, para o intervalo $[-\eta_1, -\xi_1]$, temos que $-\eta_1 \geq -t$ se, e somente se, $-\beta_n > -t$, $n \geq 1$ e $\tilde{a}_n(-t)$ é seqüência encadeada, onde $\tilde{a}_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(-\beta_n - x)(-\beta_{n+1} - x)}$. Mas, $\tilde{a}_n(-t) = a_n(t)$. Logo, $\{a_n(t)\}$ é seqüência encadeada. ■

Corolário 3.3.3. $\xi_1 < \beta_n < \eta_1$, $n \geq 1$.

Demonstração: Supondo $s = \xi_1$ no Corolário 3.3.1 e $t = \eta_1$ no Corolário 3.3.2, obtemos $\xi_1 < \beta_n < \eta_1$, $n \geq 1$. ■



Teorema 3.3.2. $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado se, e somente se, ambas as seqüências $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ são limitadas.

Demonstração: Se $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado, pelo Corolário 3.3.3 temos que $\{\beta_n\}$ é limitada. Como, pelo Teorema 3.3.1, $\{a_n(\xi_1)\}$ é uma seqüência encadeada, então tal seqüência é limitada e, daí, $\{\alpha_n\}$ é limitada.

Por outro lado, se $\{\beta_n\}$ e $\{\alpha_n\}$ são limitadas e, como $\alpha_n > 0$, então

$$A \leq \beta_n \leq B, \quad 0 < \alpha_n \leq C, \quad n \geq 1.$$

Escolhendo $a < A$, obtemos $\beta_n - a > \beta_n - A \geq 0$. Deste modo,

$$(\beta_n - a)(\beta_{n+1} - a) > (\beta_n - A)(\beta_{n+1} - A) \geq 0.$$

Podemos escolher $a < A$ de tal forma que $(\beta_n - a)(\beta_{n+1} - a)$ seja grande o suficiente para que

$$0 < 4\alpha_{n+1} \leq 4C \leq (\beta_n - a)(\beta_{n+1} - a).$$

Então, $0 < a_n(a) \leq 1/4$. Como $\{1/4\}$ é uma seqüência encadeada, pelo Teorema 3.2.6 (Teste da Comparação), $\{a_n(a)\}$ é uma seqüência encadeada. Logo, pelo Teorema 3.3.1, se $\{a_n(a)\}$ é uma seqüência encadeada e $\beta_n > a$, $\xi_1 \geq a$.

Agora, se tomarmos $b > B$, temos, da mesma forma, $\beta_n - b < 0$. Analogamente, $\{a_n(b)\}$ é uma seqüência encadeada. Assim, pelo Corolário 3.3.2, temos que $\eta_1 \leq b$. Como $\xi_1 < \eta_1$, segue que $a \leq \xi_1 < \eta_1 \leq b$. Portanto, $[\xi_1, \eta_1]$ é limitado. ■

Teorema 3.3.3. $[\xi_1, \eta_1] = [-\infty, \infty]$ se, e somente se, $\{a_n(x)\}$ não é uma seqüência encadeada para todo x real.

Demonstração: Suponhamos que $\{a_n(x)\}$ seja uma seqüência encadeada para algum x real. Então,

$$0 < \frac{\alpha_{n+1}}{(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x)} < 1.$$

Como $\alpha_{n+1} > 0$, temos $(\beta_n - x)(\beta_{n+1} - x) > 0$ para $n \geq 1$ e x fixo. Isso implica que $(\beta_n - x)$ e $(\beta_{n+1} - x)$ preservam os sinais para um $x \in \mathbb{R}$ fixo. Analisemos os dois casos. Primeiramente, se $\beta_n - x > 0$ para x fixo, então $\beta_n > x$, $n \geq 1$ e, como $a_n(x)$ é uma seqüência encadeada para algum x , pelo Teorema 3.3.1 temos $\xi_1 \geq x$, x fixo. Além disso, como $\xi_1 < \eta_1$, temos que $x \leq \xi_1 < \eta_1$. Portanto, ξ_1 é finito.

Agora, se $\beta_n - x < 0$ para x fixo, então $\beta_n < x$, $n \geq 1$ e, como $a_n(x)$ é uma seqüência encadeada para algum x , pelo Corolário 3.3.2 temos $\eta_1 \leq x$, x fixo. Além disso, como $\xi_1 < \eta_1$ temos que $\xi_1 < \eta_1 \leq x$. Logo, η_1 é finito. Mas, se $[\xi_1, \eta_1] = [-\infty, \infty]$ temos, em ambos os casos, uma contradição. Portanto, $\{a_n(x)\}$ não é uma seqüência encadeada para todo x real.



Reciprocamente, se $\{a_n(x)\}$ não é uma seqüência encadeada para todo x real, pelo Teorema 3.3.1 temos que $\xi_1 < x$ para todo x real, ou seja, $\xi_1 = -\infty$. Do mesmo modo, pelo Corolário 3.3.2, temos que $\eta_1 > x$ para todo x real, ou seja, $\eta_1 = \infty$. Portanto, $[\xi_1, \eta_1] = [-\infty, \infty]$. ■

Teorema 3.3.4. *Seja $x \notin (\xi_1, \eta_1)$ tal que $\{a_n(x)\}$, dada por (3.3.1), é uma seqüência encadeada. Então, a correspondente seqüência de parâmetros minimais $\{m_k(x)\}$ é dada por*

$$m_k(x) = 1 - \frac{P_{k+1}(x)}{(x - \beta_{k+1})P_k(x)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3.2)$$

Demonstração: Dividindo a relação de recorrência de três termos (2.1.1), isto é,

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

por $P_n(x)$, com $x \notin (\xi_1, \eta_1)$, obtemos

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = (x - \beta_{n+1}) - \alpha_{n+1} \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}.$$

Então,

$$\alpha_{n+1} = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)} \left[(x - \beta_{n+1}) - \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} \right]$$

e, ainda,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})} = \frac{P_n(x)}{(x - \beta_n)P_{n-1}(x)} \left[1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} \right].$$

Portanto, de (3.3.1),

$$a_n(x) = \frac{P_n(x)}{(x - \beta_n)P_{n-1}(x)} \left[1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} \right], \quad n \geq 1.$$

Fazendo

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)}, \quad (3.3.3)$$

obtemos

$$[1 - m_{n-1}(x)] = \frac{P_n(x)}{(x - \beta_n)P_{n-1}(x)}.$$

Daí,

$$a_n(x) = [1 - m_{n-1}(x)]m_n(x), \quad n \geq 1,$$

onde $m_n(x)$ é dado exatamente por (3.3.2).

Como $\{a_n(x)\}$ é uma seqüência encadeada, temos que $\{m_k(x)\}$ é uma seqüência de parâmetros que será a minimal se $m_0(x) = 0$. De fato, de (3.3.3) obtemos

$$m_0(x) = 1 - \frac{P_1(x)}{(x - \beta_1)P_0(x)}.$$

Mas,

$$P_1(x) = (x - \beta_1)P_0(x) - \alpha_1 P_{-1}(x) = (x - \beta_1).$$

Então, $m_0(x) = 0$. Logo, $\{m_k(x)\}$ é a seqüência de parâmetros minimais para a seqüência encadeada $\{a_n(x)\}$. ■

Observação: Pela definição de seqüência encadeada e para $x \notin (\xi_1, \eta_1)$, temos que

$$1 - m_n(x) = \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 0.$$

Como $0 \leq m_0(x) < 1$ e $0 < m_k < 1$, $k \geq 1$, então $0 < 1 - m_0(x) \leq 1$ e $0 < 1 - m_n(x) < 1$, $n \geq 1$. Logo,

$$0 < \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} < 1, \quad n \geq 1. \quad (3.3.4)$$

Podemos ainda escrever $m_n(x)$ da seguinte forma

$$m_n(x) = 1 - \frac{P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} = \frac{(x - \beta_{n+1})P_n(x) - P_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)} = \frac{\alpha_{n+1}P_{n-1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)},$$

ou seja,

$$m_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}P_{n-1}(x)}{(x - \beta_{n+1})P_n(x)}, \quad n \geq 0, \quad x \notin (\xi_1, \eta_1).$$



Capítulo 4

Medidas Relacionadas

Neste capítulo, apresentamos estudos sobre os polinômios ortogonais associados a duas medidas relacionadas entre si. Relatamos resultados do trabalho de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [4] sobre seqüências encadeadas generalizadas e medidas relacionadas, quando considera-se medidas simétricas que satisfazem $c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2) d\phi_1(x)$ e mostramos, como aplicação, um estudo do comportamento, em relação ao tamanho e à posição do salto, dos zeros dos polinômios cuja medida tem salto e a localização desses zeros entre os zeros dos polinômios de Gegenbauer.

Apresentamos, também, os resultados de Berti, Bracciali e Sri Ranga [2] quando considera-se medidas não-simétricas que satisfazem $c d\phi_0(x) = (x - q) d\phi_1(x)$, acrescentando informações sobre o comportamento dos zeros de determinados polinômios cuja medida tem salto, em relação ao tamanho e à posição do salto. Relacionamos esses zeros aos zeros dos polinômios de Jacobi e Laguerre generalizados.

4.1 Preliminares

Seja $d\phi$ uma medida definida sobre a reta real. Seja $Supp(\phi)$ o suporte desta medida e seja $I^\phi = [\xi_1, \eta_1]$ o menor intervalo fechado contendo este suporte, ou seja, I^ϕ é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade.

Denotemos por $X^\phi = (-\infty, \infty) \setminus I^\phi$ o complemento do intervalo I^ϕ em $(-\infty, \infty)$. Do mesmo modo $Z^\phi = \bar{\mathbb{C}} \setminus I^\phi$ onde $\bar{\mathbb{C}}$ é o plano complexo estendido. O fecho de X^ϕ dentro da reta real será denotado por $\tilde{X}^\phi$. Como $X^\phi = (-\infty, \xi_1) \cup (\eta_1, \infty)$, então $\tilde{X}^\phi = (-\infty, \xi_1] \cup [\eta_1, \infty)$, ou seja, os pontos extremos de I^ϕ são pontos de $\tilde{X}^\phi$. Mas, ∞ e $-\infty$ não são pontos de $\tilde{X}^\phi$.



Sejam $\{P_n^\phi\}$ os polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $d\phi$ e $\{O_n^\phi\}$ os polinômios associados mônicos definidos por

$$O_n^\phi(x) = \frac{1}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n^\phi(x) - P_n^\phi(t)}{x - t} d\phi(t), \quad n \geq 0,$$

onde $\mu_r^\phi = \int_{-\infty}^{\infty} t^r d\phi(t)$, $r \geq 0$, são os momentos dados pela Definição 2.1.1.

Pelos estudos feitos no Capítulo 2, sabemos que os polinômios $\{P_n^\phi\}$ e $\{O_n^\phi\}$ satisfazem às seguintes relações de recorrência, respectivamente,

$$\begin{aligned} P_{n+1}^\phi(x) &= (x - \beta_{n+1}^\phi) P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x), \\ O_{n+1}^\phi(x) &= (x - \beta_{n+1}^\phi) O_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi O_{n-1}^\phi(x), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (4.1.1)$$

onde $P_0^\phi(x) = 1$, $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, $O_0^\phi(x) = 0$ e $O_1^\phi(x) = 1$, os coeficientes β_n^ϕ , $n \geq 1$ são reais e α_{n+1}^ϕ , $n \geq 1$, são todos positivos.

Seja a fração contínua

$$\frac{1}{(x - \beta_1^\phi) - \frac{\alpha_2^\phi}{(x - \beta_2^\phi) - \frac{\alpha_3^\phi}{(x - \beta_3^\phi) - \cdots - \frac{\alpha_n^\phi}{(x - \beta_n^\phi) - \cdots}}}.$$

Calculando os convergentes $C_n = \frac{A_n}{B_n}$ pelo Teorema 3.1.1 (fórmulas de Wallis), concluímos que

$$\frac{O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \frac{1}{(x - \beta_1^\phi) - \frac{\alpha_2^\phi}{(x - \beta_2^\phi) - \frac{\alpha_3^\phi}{(x - \beta_3^\phi) - \cdots - \frac{\alpha_n^\phi}{(x - \beta_n^\phi)}}}. \quad (4.1.2)$$

Temos, ainda, que $\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)}$ converge uniformemente para $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi(t)$ em todo subconjunto compacto de Z^ϕ . De fato, como

$$P_n^\phi(x) = (x - x_{n,1}^\phi)(x - x_{n,2}^\phi) \cdots (x - x_{n,n}^\phi),$$

onde $x_{n,1}^\phi < x_{n,2}^\phi < \cdots < x_{n,n}^\phi$ são os zeros de $P_n^\phi(x)$, então

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} &= \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{(x - x_{n,1}^\phi) \cdots (x - x_{n,n}^\phi)} = \frac{\lambda_{n,1}}{(x - x_{n,1}^\phi)} + \frac{\lambda_{n,2}}{(x - x_{n,2}^\phi)} + \cdots + \frac{\lambda_{n,n}}{(x - x_{n,n}^\phi)} \\ &= \frac{\lambda_{n,1}(x - x_{n,2}^\phi) \cdots (x - x_{n,n}^\phi) + \cdots + \lambda_{n,n}(x - x_{n,1}^\phi) \cdots (x - x_{n,n-1}^\phi)}{(x - x_{n,1}^\phi) \cdots (x - x_{n,n}^\phi)}. \end{aligned}$$

Para $x = x_{n,r}^\phi$, obtemos

$$\mu_0^\phi O_n^\phi(x_{n,r}^\phi) = \lambda_{n,r} (x_{n,r}^\phi - x_{n,1}^\phi) \cdots (x_{n,r}^\phi - x_{n,r-1}^\phi) (x_{n,r}^\phi - x_{n,r+1}^\phi) \cdots (x_{n,r}^\phi - x_{n,n}^\phi).$$

Portanto,

$$\lambda_{n,r} = \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x_{n,r}^\phi)}{P_n'^\phi(x_{n,r}^\phi)},$$

onde $P_n'^\phi$ representa a derivada de P_n^ϕ . Então, $\lambda_{n,r} > 0$, $r = 1, 2, 3, \dots, n$, pois, substituindo-se $\mu_0^\phi O_n^\phi(x_{n,r}^\phi)$ na equação acima, encontramos

$$\lambda_{n,r} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_n^\phi(x)}{(x - x_{n,r}^\phi) P_n'^\phi(x_{n,r}^\phi)} d\phi(x),$$

que são os pesos da Quadratura Gaussiana e sabemos que são positivos.

Podemos então escrever

$$\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{(x - x_{n,r}^\phi)}. \quad (4.1.3)$$

Pelas condições iniciais da relação de recorrência de O_n^ϕ e P_n^ϕ sabemos que P_n^ϕ é um polinômio de grau n e O_n^ϕ é um polinômio de grau $n - 1$. Logo, em (4.1.3), temos que

$$\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \frac{\mu_0^\phi (x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \cdots + c_0)}{x^n + d_{n-1}x^{n-1} + \cdots + d_0} = \sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{(x - x_{n,r}^\phi)}.$$

Multiplicando-se o primeiro e último membros por x e aplicando-se o limite para $x \rightarrow \infty$, obtemos

$$\mu_0^\phi = \sum_{r=1}^n \lambda_{n,r}.$$

Seja $\{\phi_n\}$ uma seqüência uniformemente limitada de funções não-decrescentes definida por

$$\phi_n(t) = \begin{cases} 0, & t < x_{n,1}^\phi \\ \sum_{r=1}^{s-1} \lambda_{n,r}, & x_{n,s-1}^\phi \leq t < x_{n,s}^\phi, \quad s = 2, 3, \dots, n, \\ \mu_0^\phi, & x_{n,n}^\phi \leq t \end{cases}$$

para $n \geq 1$. Assim, pela definição da integral de Stieltjes (veja, por exemplo, Widder [16]),

$$\sum_{r=1}^n \frac{\lambda_{n,r}}{(x - x_{n,r}^\phi)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x - t} d\phi_n(t).$$



Logo,

$$\frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\phi_n(t).$$

De acordo com o Primeiro e o Segundo Teoremas de Helly, Teoremas 2.1.5 e 2.1.6, respectivamente, existe uma subsequência n_κ tal que

$$\lim_{n_\kappa \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^\phi O_{n_\kappa}^\phi(x)}{P_{n_\kappa}^\phi(x)} = \lim_{n_\kappa \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\phi_{n_\kappa}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\psi(t),$$

onde $\psi(t)$ é uma função não-decrescente em $(-\infty, \infty)$.

Se a medida $d\phi$ é determinada, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\phi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\phi(t), \quad x \in Z^\phi.$$

Como observação, sabemos que quando o intervalo de ortogonalidade é finito, isto é, quando β_n e α_n são limitados, a medida é determinada.

Seja $S_n^\phi(x) = \frac{(x - \beta_1^\phi) O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)}$, $n \geq 0$. Logo, $S_0^\phi(x) = 0$, $S_1^\phi(x) = 1$ e, de (4.1.2), podemos escrever

$$S_n^\phi(x) = \frac{1}{1} - \frac{a_1^\phi(x)}{1} - \frac{a_2^\phi(x)}{1} - \dots - \frac{a_{n-1}^\phi(x)}{1}, \quad n \geq 2, \quad (4.1.4)$$

onde $a_n^\phi(x) = \alpha_{n+1}^\phi / [(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)]$, $n \geq 1$.

Seja também $S^\phi(x)$ definido em Z^ϕ por

$$S^\phi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\phi(x).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^\phi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - \beta_1^\phi) O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} \\ &= \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0^\phi O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} = \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\phi(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$S^\phi(x) = \frac{(x - \beta_1^\phi)}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-t} d\phi(t). \quad (4.1.5)$$



Para S_n^ϕ os seguintes resultados são válidos

$$\begin{aligned} S_n^\phi(x) - S_{n-1}^\phi(x) &= \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)}, \\ S_n^\phi(x) &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_j^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{j-1}^\phi(x) P_j^\phi(x)}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned} S_n^\phi(x) - S_{n-1}^\phi(x) &= \frac{(x - \beta_1^\phi) O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)} - \frac{(x - \beta_1^\phi) O_{n-1}^\phi(x)}{P_{n-1}^\phi(x)} \\ &= \frac{(x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} [O_n^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x) - O_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)] \\ &= \frac{(x - \beta_1^\phi) \alpha_n^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} [O_{n-1}^\phi(x) P_{n-2}^\phi(x) - O_{n-2}^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x)] \\ &= \cdots = \frac{(x - \beta_1^\phi) \alpha_n^\phi \alpha_{n-1}^\phi \cdots \alpha_2^\phi}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Então, para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_n^\phi(x) &= \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} + S_{n-1}^\phi(x) = \cdots \\ &= \frac{\alpha_2^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} + \frac{\alpha_2^\phi \cdots \alpha_{n-1}^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-2}^\phi(x) P_{n-1}^\phi(x)} + \cdots + \frac{\alpha_2^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_1^\phi(x) P_2^\phi(x)} + S_1^\phi(x) \\ &= 1 + \sum_{j=2}^n \frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_j^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{j-1}^\phi(x) P_j^\phi(x)}. \end{aligned}$$

Para qualquer $x \in \tilde{X}^\phi$, $S_n^\phi(x) > 1$, $n > 1$, e $\{S_n^\phi\}$ é uma seqüência crescente, isto é, $1 < S_2^\phi(x) < \cdots < S_n^\phi(x) < \cdots < S^\phi(x)$. De fato, para que $S_n^\phi(x) > S_{n-1}^\phi(x)$, basta mostrarmos (veja (4.1.6)) que

$$\frac{\alpha_2^\phi \alpha_3^\phi \cdots \alpha_n^\phi (x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} > 0, \quad n \geq 2.$$

Já sabemos que $\alpha_n^\phi > 0$ para $n \geq 2$. Vamos então analisar o sinal de $\frac{(x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)}$, $n \geq 2$.

Como $P_1^\phi(x) = x - \beta_1^\phi$, temos que β_1^ϕ é um zero de P_1^ϕ . Então, $\beta_1^\phi \in I^\phi$. Mas, como $x \in \tilde{X}^\phi$, ou seja, $x \notin I^\phi$, obtemos os seguintes casos:

(i) Se $x > \beta_1^\phi$, então $x - \beta_1^\phi > 0$. Sabemos, ainda, que $P_n^\phi(x) > 0$, para $n \geq 1$. Portanto,

$$\frac{(x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x) P_n^\phi(x)} > 0.$$



(ii) Se $x < \beta_1^\phi$, então $x - \beta_1^\phi < 0$. Mas, se $P_n^\phi(x) > 0$, então $P_{n-1}^\phi(x) < 0$ ou, ainda, se $P_n^\phi(x) < 0$, então $P_{n-1}^\phi(x) > 0$. Logo, $P_n^\phi(x)P_{n-1}^\phi(x) < 0$, $n \geq 2$. Portanto,

$$\frac{(x - \beta_1^\phi)}{P_{n-1}^\phi(x)P_n^\phi(x)} > 0.$$

Então $S_n^\phi(x) > S_{n-1}^\phi(x)$, $n \geq 2$, para $x \in \tilde{X}^\phi$. Conseqüentemente,

$$S_1^\phi(x) < S_2^\phi(x) < \cdots < S_n^\phi(x) < \cdots < S^\phi(x). \quad (4.1.7)$$

Mas, $S_1^\phi(x) = 1$ e, então, $1 < S_2^\phi(x) < \cdots < S_n^\phi(x) < \cdots < S^\phi(x)$ para $x \in \tilde{X}^\phi$. Deste modo, $S_n^\phi(x) > 1$ para $n \geq 2$.

4.2 Caso Simétrico

Apresentamos, aqui, resultados do trabalho de Bracciali, Dimitrov e Sri Ranga [4], que estudaram algumas propriedades dos polinômios $K_n^{(\alpha, M, \kappa)}$ usando seqüências encadeadas generalizadas e medidas relacionadas por $c d\phi_2(x) = (\kappa^2 - x^2) d\phi_1(x)$, incluindo alguns detalhes de demonstrações que foram omitidos no artigo.

Se $d\phi$ é uma medida simétrica, ou seja, $d\phi(-t) = -d\phi(t)$, então $\beta_n^\phi = 0$, $n \geq 1$ (veja Chihara [6, p.21]) e

$$\begin{aligned} S^\phi(x) &= \frac{1}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x-t} d\phi(t) = \frac{1}{\mu_0^\phi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{x}{x+t} d\phi(-t) + \int_0^{\infty} \frac{x}{x-t} d\phi(t) \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0^\phi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^2 - t^2} d\phi(t). \end{aligned}$$

Além disso, se $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são medidas simétricas relacionadas por

$$c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2) d\phi_1(x) \quad (4.2.1)$$

a relação entre os polinômios $\{P_n^{\phi_1}\}$ e $\{P_n^{\phi_2}\}$ dadas pela fórmula de Christoffel (veja, por exemplo, Berti e Sri Ranga [2]) é

$$(x^2 - k^2)P_n^{\phi_2}(x) = P_{n+2}^{\phi_1}(x) - \frac{P_{n+2}^{\phi_1}(k)}{P_n^{\phi_1}(k)} P_n^{\phi_1}(x), \quad n \geq 0. \quad (4.2.2)$$

Outras relações entre esses polinômios e os coeficientes da correspondente relação de recorrência dada em [2] podem ser escritas da seguinte maneira:



Se (4.2.1) é válida, existe uma seqüência de números reais $\{l_n\}$, com $l_0 = 1$, tal que os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\phi_1}$ e $P_n^{\phi_2}$ satisfazem

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - \frac{k^2}{4}(1 - l_n)(1 - l_{n-1})P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad (4.2.3)$$

$$\alpha_{n+1}^{\phi_1} = \frac{k^2}{4}(1 - l_n)(1 + l_{n-1}) \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{k^2}{4}(1 - l_n)(1 + l_{n+1}), \quad n \geq 1.$$

Este resultado foi demonstrado primeiramente em Sri Ranga [13] para $k^2 < 0$ e $c < 0$ e, posteriormente, em [3] para todas as escolhas possíveis de k e c , de forma que as medidas $d\phi_1$ e $d\phi_2$ tenham suporte comum em um subconjunto dos reais onde $(k^2 - x^2)$ não muda de sinal.

4.2.1 Seqüências Encadeadas Generalizadas

Apresentaremos, aqui, a definição de seqüências encadeadas generalizadas e todas as seqüências de parâmetros para a seqüência encadeada generalizada $a_n^\phi(x) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)}$.

Definição 4.2.1. *Seja $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ uma seqüência de números complexos tal que $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Dizemos que $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ é uma **seqüência encadeada generalizada** se existe uma seqüência de parâmetros $\{m_n\}_{n=0}^\infty$ tal que $m_0 = 0$, m_n é finito e $(1 - m_{n-1})m_n = a_n$, $n \geq 1$.*

Como $a_n \neq 0$, então $m_n \neq 0$ e $m_n \neq 1$ para $n \geq 1$.

Denotemos, ainda, por $\{m_n\}$ a seqüência de parâmetros minimais da seqüência encadeada generalizada $\{a_n\}$. A classe das seqüências encadeadas positivas é uma subclasse das seqüências encadeadas generalizadas.

Por exemplo, a seqüência encadeada $a_n^\phi(x) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)(x - \beta_n^\phi)}$ é uma seqüência encadeada generalizada para qualquer valor de $x \in Z^\phi$ tal que $x \neq \infty$. O seguinte teorema dá a expressão geral para os elementos de uma seqüência de parâmetros qualquer de $\{a_n^\phi(x)\}$.

Teorema 4.2.1. *Dada a seqüência encadeada generalizada*

$$\left\{ a_n^\phi(x) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)} \right\},$$

seja $\{g_n^\phi(x, t)\}$ sua seqüência de parâmetros tal que o parâmetro inicial $g_0^\phi(x, t) = t$. Se $t^{-1} \neq S_n^\phi(x)$ para todo $n \geq 1$, então $\{g_n^\phi(x, t)\}$ existe e pode ser dada por

$$g_n^\phi(x, t) = \frac{P_{n-1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)}, \quad n \geq 1. \quad (4.2.4)$$



Além disso, se $\{a_n^\phi(x)\}$ é uma seqüência encadeada positiva, então suas seqüências de parâmetros $\{g_n^\phi(x, t)\}$, tais que $0 \leq g_0^\phi(x, t) < 1$ e $0 < g_n^\phi(x, t) < 1$, são obtidas para $0 \leq t \leq 1/S^\phi(x)$.

Demonstração: Se $g_n^\phi(x, t) = \frac{P_{n-1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)}$ então,

$$\begin{aligned} 1 - g_n^\phi(x, t) &= 1 - \frac{P_{n-1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)} \\ &= \frac{[(x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi P_{n-1}^\phi(x)]}{[P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)](x - \beta_{n+1}^\phi)} \\ &\quad - \frac{t(x - \beta_1^\phi)[(x - \beta_{n+1}^\phi)O_n^\phi(x) - \alpha_{n+1}^\phi O_{n-1}^\phi(x)]}{[P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)](x - \beta_{n+1}^\phi)}. \end{aligned}$$

Usando a relação de recorrência (4.1.1), obtemos

$$1 - g_n^\phi(x, t) = \frac{P_{n+1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n+1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{1}{(x - \beta_{n+1}^\phi)}.$$

Desta forma, temos que

$$[1 - g_{n-1}^\phi(x, t)]g_n^\phi(x, t) = \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)} = a_n^\phi(x).$$

Além disso, $g_n^\phi(x, t)$ existe se, e somente se, $P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x) \neq 0$, isto é, se, e somente se, $t^{-1} \neq S_n^\phi(x) = (x - \beta_1^\phi) \frac{O_n^\phi(x)}{P_n^\phi(x)}$. Isto mostra a primeira parte do teorema.

Temos, ainda, que

$$\begin{aligned} 1 - g_n^\phi(x, t) &= \frac{P_{n+1}^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_{n+1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - t(x - \beta_1^\phi)O_n^\phi(x)} \frac{1}{(x - \beta_{n+1}^\phi)} \\ &= \frac{1 - tS_{n+1}^\phi(x)}{1 - tS_n^\phi(x)} \frac{P_{n+1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x)(x - \beta_{n+1}^\phi)}. \end{aligned}$$

Para que $0 < g_n^\phi(x, t) < 1$, basta mostrarmos que $0 < 1 - g_n^\phi < 1$. Mas, de (3.3.4), obtemos que

$$0 < \frac{P_{n+1}^\phi(x)}{(x - \beta_{n+1}^\phi)P_n^\phi(x)} < 1, \quad n \geq 1,$$

se $\{a_n^\phi(x)\}$ é uma seqüência encadeada positiva. Isso acontece quando $x \in \tilde{X}^\phi$.

Como $S^\phi(x) > S_{n+1}^\phi(x) > S_n^\phi(x)$, para $t \geq 0$ temos que

$$1 - tS^\phi(x) < 1 - tS_{n+1}^\phi(x) < 1 - tS_n^\phi(x).$$



Além disso, se $1 - tS^\phi(x) \geq 0$, então $0 < 1 - tS_{n+1}^\phi(x) < 1 - tS_n^\phi(x)$. Deste modo,

$$0 < \frac{1 - tS_{n+1}^\phi(x)}{1 - tS_n^\phi(x)} < 1$$

se $0 \leq t \leq 1/S^\phi(x)$. Portanto, $0 < g_n^\phi(x, t) < 1$ se $0 \leq t \leq 1/S^\phi(x)$.

Também, podemos mostrar que as sequências de parâmetros minimais e maximais são obtidas para $t = 0$ e $t = 1/S^\phi(x)$, respectivamente.

Como $g_0^\phi(x, t) = t$, então $g_0^\phi(x, 0) = 0 = m_0^\phi(x)$. Logo, pelo Teorema 3.2.1, $g_n^\phi(x, 0) = m_n^\phi(x)$. De (4.2.4), temos que

$$t^{-1} = (x - \beta_1^\phi) \frac{O_n^\phi(x) - \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)g_n^\phi(x, t)} O_{n-1}^\phi(x)}{P_n^\phi(x) - \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)g_n^\phi(x, t)} P_{n-1}^\phi(x)}$$

e, usando frações contínuas, podemos escrever

$$t^{-1} = \frac{(x - \beta_1^\phi)}{(x - \beta_1^\phi) - \frac{\alpha_2^\phi}{(x - \beta_2^\phi) - \frac{\alpha_3^\phi}{(x - \beta_3^\phi) - \cdots - \frac{\alpha_n^\phi}{(x - \beta_n^\phi) - \frac{\alpha_{n+1}^\phi}{(x - \beta_{n+1}^\phi)g_n^\phi(x, t)}}}}$$

que é equivalente a

$$t^{-1} = \frac{1}{1 - \frac{a_1^\phi(x)}{1} - \frac{a_2^\phi(x)}{1} - \cdots - \frac{a_{n-1}^\phi(x)}{1} - \frac{a_n^\phi(x)}{g_n^\phi(x, t)}},$$

onde $a_n^\phi(x) = \alpha_{n+1}^\phi / [(x - \beta_n^\phi)(x - \beta_{n+1}^\phi)]$, $n \geq 1$.

Mas, de (4.1.4), $t^{-1} = S^\phi(x)$ se, e somente se,

$$g_n^\phi(x, t) = 1 - \frac{a_{n+1}^\phi(x)}{1} - \frac{a_{n+2}^\phi(x)}{1} - \frac{a_{n+3}^\phi(x)}{1} - \frac{a_{n+4}^\phi(x)}{1} - \cdots, \quad n \geq 1$$

e, portanto, pelo Teorema 3.2.7, $g_n^\phi(x, t) = M_n^\phi(x)$. ■

4.2.2 Sequências Encadeadas Generalizadas e Medidas Relacionadas Simétricas

Nesta subseção, analisaremos as sequências encadeadas que surgem quando consideramos a relação entre as medidas $d\phi_1$ e $d\phi_2$ dada por $c d\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x)$.

Substituindo-se $g_n = \frac{(1 - l_n)}{2}$, $n \geq 0$, em (4.2.3), obtemos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2 g_n g_{n-1} P_{n-2}^{\phi_2}(x).$$



Pelo Teorema 3.3.4, podemos escrever $[1 - m_{n-1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2}$, com $m_n^{\phi_1}(k) = 1 - \frac{P_{n+1}^{\phi_1}(k)}{kP_n^{\phi_1}(k)}$, $n \geq 0$, lembrando que as medidas $d\phi_1$ e $d\phi_2$ são simétricas, ou seja, $\beta_{n+1}^{\phi} = 0$. Mas, de (4.2.3), $(1 - g_{n-1})g_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2}$. Então, $[1 - m_{n-1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = (1 - g_{n-1})g_n$. Como $g_0 = 0 = m_0^{\phi_1}(k)$, comparando g_n com os parâmetros $m_n^{\phi_1}(k)$ temos que $g_n = m_n^{\phi_1}(k)$. Deste modo, as equações em (4.2.3) podem ser escritas como

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2 m_n^{\phi_1}(k) m_{n-1}^{\phi_1}(k) P_{n-2}^{\phi_2}(x),$$

$$[1 - m_{n-1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2} \quad \text{e} \quad [1 - m_{n+1}^{\phi_1}(k)]m_n^{\phi_1}(k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}$$

para $n \geq 1$, onde $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2} \right\}$ é uma sequência encadeada generalizada (e é uma sequência encadeada positiva se k for real e não pertencer ao suporte da medida, ou seja, se k não pertencer ao verdadeiro intervalo de ortogonalidade).

A fórmula de Christoffel (4.2.2) pode ser escrita como

$$(x^2 - k^2)P_n^{\phi_2}(x) = P_{n+2}^{\phi_1}(x) - k^2[1 - m_{n+1}^{\phi_1}(k)][1 - m_n^{\phi_1}(k)]P_n^{\phi_1}(x), \quad n \geq 0,$$

pois $1 - m_n^{\phi_1}(k) = \frac{P_{n+1}^{\phi_1}(k)}{kP_n^{\phi_1}(k)}$.

As relações acima nos permitem obter informações sobre os polinômios $P_n^{\phi_2}$ através de $P_n^{\phi_1}$.

Veremos, agora, como podemos obter informações sobre os polinômios $P_n^{\phi_1}$ através de $P_n^{\phi_2}$. Substituindo $g_n = \frac{1 + l_{n+1}}{2}$, $n \geq -1$, em (4.2.3), chegamos em

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2(1 - g_{n-1})(1 - g_{n-2})P_{n-2}^{\phi_2}(x),$$

$$(1 - g_{n-1})g_{n-2} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_1}}{k^2} \quad \text{e} \quad (1 - g_{n-1})g_n = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2}$$

para $n \geq 1$. Neste caso, temos $g_{-1} = \frac{1 + l_0}{2} = 1$.

A sequência $\left\{ \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2} \right\}$ é uma sequência encadeada generalizada e $\{g_n\}$ é uma sequência de parâmetros com parâmetro inicial $g_0 = \frac{1 + l_1}{2}$. Mas, de (4.2.3), $\alpha_2^{\phi_1} = \frac{k^2}{2}(1 - l_1)$. Então, $1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2} = \frac{1 + l_1}{2}$. Deste modo, o parâmetro inicial é dado por $g_0 = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2}$.



Pelo Teorema 4.2.1, obtemos

$$g_n = g_n^{\phi_2}(k, t), \quad n \geq 0, \quad (4.2.5)$$

onde $g_0^{\phi_2}(k, t) = t = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2}$. Se $0 < g_0^{\phi_2}(k, t) < 1$, então k precisa ser real e, de (4.2.5) e (4.2.5),

$$g_n^{\phi_2}(k, t) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - g_{n-1}^{\phi_2}(k, t)]} \quad \text{e} \quad [1 - g_n^{\phi_2}(k, t)] = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{k^2 g_{n-1}^{\phi_2}(k, t)}, \quad n \geq 1.$$

Conseqüentemente, $0 < g_n^{\phi_2}(k, t) < 1$ para todo $n \geq 0$. Nestas condições, $\{\alpha_{n+1}^{\phi_2}/k^2\}$ é uma sequência encadeada positiva.

4.2.3 Uma Aplicação para os Polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$

Usaremos as relações da subseção anterior para obter informações sobre os polinômios ortogonais $K_n^{(\lambda, M, k)}$ associados à medida $d\phi^{(\lambda, M, k)}$ dada por (2.3.1). Lembremos que, quando $k = 1$, $K_n^{(\lambda, M, 1)}$ são os polinômios de Koornwinder simétricos.

Se fizermos $d\phi_1(x) = d\phi^{(\lambda, M, k)}(x)$, como $d\phi_2(x) = (k^2 - x^2)d\phi_1(x)$, obtemos

$$d\phi_2(x) = \{(2M + 1)\tilde{L}^{(\lambda, k)}[1]\}^{-1}(1 - x^2)^{\lambda+1/2}dx,$$

onde

$$\tilde{L}^{(\lambda, k)}[f] = \int_{-1}^1 f(x) \frac{(1 - x^2)^{\lambda+1/2}}{k^2 - x^2} dx.$$

Deste modo, a medida $d\phi_2$ é a medida associada aos polinômios de Gegenbauer, $P_n^{(\lambda+1)}$. Como foi visto no Capítulo 2, os polinômios mônicos $P_n^{(\lambda+1)}(x) = P_n^{\phi_2}(x)$ são dados por

$$P_0^{\phi_2}(x) = 1 \quad \text{e} \quad P_n^{\phi_2}(x) = (2)^{-n} \frac{(2 + 2\lambda)_n}{(1 + \lambda)_n} {}_2F_1(-n, n + 2\lambda + 2; \lambda + 3/2; \frac{1 - x}{2}), \quad n \geq 1$$

e os coeficientes da relação de recorrência são

$$\alpha_{n+1}^{\phi_2} = \alpha_{n+1}^{(\lambda+1)} = \frac{1}{4} \frac{n(n + 2\lambda + 1)}{(n + \lambda)(n + \lambda + 1)}, \quad n \geq 1.$$

De (4.2.5) e (4.2.5), escrevendo $g_n^{\phi_2}(k, 1 - \alpha_2^{\phi_1}/k^2) = h_n^{\phi_2}(M, k)$ obtemos, para $K_n^{(\lambda, M, k)}(x) = P_n^{\phi_1}(x)$ e $\alpha_n^{(\lambda, M, k)} = \alpha_n^{\phi_1}$, que

$$K_n^{(\lambda, M, k)}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)][1 - h_{n-2}^{\phi_2}(M, k)]P_{n-2}^{\phi_2}(x), \quad (4.2.6)$$

$$\alpha_{n+1}^{(\lambda, M, k)} = k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]h_{n-2}^{\phi_2}(M, k), \quad n \geq 2$$

e $\alpha_2^{(\lambda, M, k)} = k^2[1 - h_0^{\phi_2}(M, k)]$, onde

$$h_0^{\phi_2}(M, k) = g_0^{\phi_2}(k, 1 - \alpha_2^{\phi_1}/k^2) = 1 - \frac{\alpha_2^{\phi_1}}{k^2} = 1 - \frac{\mu_2^{\phi_1}}{k^2 \mu_0^{\phi_1}} = \frac{k^2 \mu_0^{\phi_1} - \mu_2^{\phi_1}}{k^2 \mu_0^{\phi_1}}.$$

Mas, $\mu_0^{\phi_1} = 1$. Então,

$$\begin{aligned} h_0^{\phi_2}(M, k) &= \frac{\int_{-1}^1 (k^2 - x^2) d\phi_1(x)}{k^2} = \frac{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\lambda+1/2} dx}{(2M+1)k^2 \tilde{L}^{(\lambda, k)}[1]} \\ &= \frac{1}{(2M+1)\mu_0^{\phi_2}} \left\{ \int_{-1}^1 \frac{k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x) \right\}^{-1} \\ &= \frac{1}{(2M+1)S^{\phi_2}(k)} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

e

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]}, \quad n \geq 1,$$

que, pelo Teorema 4.2.1, pode ser escrito explicitamente como

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkO_{n-1}^{\phi_2}(k)}{P_n^{\phi_2}(k) - tkO_n^{\phi_2}(k)} \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k}.$$

Mas, $S_n^{\phi_2}(k) = \frac{kO_n^{\phi_2}(k)}{P_n^{\phi_2}(k)}$. Logo,

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k)\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{kP_n^{\phi_2}(k)} \frac{1 - tS_{n-1}^{\phi_2}(k)}{1 - tS_n^{\phi_2}(k)}, \quad n \geq 1,$$

com $t = h_0^{\phi_2}(M, k) = 1 - \frac{\alpha_2^{(\lambda, M, k)}}{k^2}$.

Em (4.1.6), temos

$$S_{n+1}^{\phi_2}(k) = S_n^{\phi_2}(k) + \frac{\alpha_2^{\phi_2} \alpha_3^{\phi_2} \cdots \alpha_{n+1}^{\phi_2} k}{P_n^{\phi_2}(k)P_{n+1}^{\phi_2}(k)}, \quad n \geq 1.$$

Mas, $\alpha_2^{\phi_2} \alpha_3^{\phi_2} \cdots \alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{n!}{4^n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n(2+\lambda)_n}$. Então, $S_{n+1}^{\phi_2}$ satisfaz à relação de recorrência

$$S_{n+1}^{\phi_2}(k) = S_n^{\phi_2}(k) + \frac{n!}{4^n} \frac{(2+2\lambda)_n}{(1+\lambda)_n(2+\lambda)_n} \frac{k}{P_n^{\phi_2}(k)P_{n+1}^{\phi_2}(k)}, \quad n \geq 1,$$

com $S_1^{\phi_2}(k) = 1$. Como $S_0^{\phi_2}(k) = 0$ temos que esta relação vale também para $n = 0$.

Quando $k = 1$, obtemos

$$P_n^{\phi_2}(1) = (2)^{-n} \frac{(2 + 2\lambda)_n}{(1 + \lambda)_n}, \quad n \geq 1,$$

pois ${}_2F_1(-n, n + 2\lambda + 2; \lambda + 3/2; 0) = 1$ e, para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{\phi_2}(1) &= S_n^{\phi_2}(1) + \frac{n!}{4^n} \frac{(2 + 2\lambda)_n}{(1 + \lambda)_n(2 + \lambda)_n} \frac{1}{P_n^{\phi_2}(1)P_{n+1}^{\phi_2}(1)} \\ &= S_n^{\phi_2}(1) + \frac{2n!(1 + \lambda)_{n+1}}{(2 + \lambda)_n(2 + 2\lambda)_{n+1}} \\ &= S_n^{\phi_2}(1) + \frac{n!}{(3 + 2\lambda)_n}. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, podemos escrever

$$S_{n+1}^{\phi_2}(1) = 1 + \sum_{j=1}^n \frac{j!}{(3 + 2\lambda)_j}.$$

Então, como ${}_2F_1(1, 1; 3 + 2\lambda; 1) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j!}{(3 + 2\lambda)_j}$, temos que sua n -ésima soma parcial é dada por $S_{n+1}^{\phi_2}(1)$.

Para o caso especial $\lambda = 0$, obtemos $\alpha_{n+1}^{\phi_2} = \frac{1}{4}$, $n \geq 1$ e $O_n^{\phi_2}(x) = P_{n-1}^{\phi_2}(x)$, que são os polinômios de Tchebichef de segunda espécie de grau $n - 1$. Então, podemos escrever

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkP_{n-2}^{\phi_2}(k)}{P_n^{\phi_2}(k) - tkP_{n-1}^{\phi_2}(k)} \frac{1}{4k}.$$

Como $P_n^{\phi_2}$ são os polinômios de Tchebichef de segunda espécie mônicos, sua relação de recorrência de três termos (veja, por exemplo, Szegő [14]) é dada por

$$P_n^{\phi_2}(k) = kP_{n-1}^{\phi_2}(k) - \frac{1}{4}P_{n-2}^{\phi_2}(k).$$

Assim,

$$\begin{aligned} h_n^{\phi_2}(M, k) &= \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkP_{n-2}^{\phi_2}(k)}{k(1-t)P_{n-1}^{\phi_2}(k) - \frac{1}{4}P_{n-2}^{\phi_2}(k)} \frac{1}{4k} \\ &= \frac{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - tkP_{n-2}^{\phi_2}(k)}{P_{n-1}^{\phi_2}(k) - \frac{1}{4k(1-t)}P_{n-2}^{\phi_2}(k)} \frac{1}{4k^2(1-t)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, se $tk = [4k(1-t)]^{-1}$ então $h_n^{\phi_2}(M, k)$ é uma constante. Isto acontece quando $t = \frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}]$ com os valores para os parâmetros $h_n^{\phi_2}(M, k)$ dados por

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}] = \frac{1}{2k[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]}, \quad n \geq 1.$$



De $h_0^{\phi_2} = t = \frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}]$ e de (4.2.7), temos que

$$\frac{1}{2k}[k \pm \sqrt{k^2 - 1}] = \frac{1}{(2M + 1)S^{\phi_2}(k)}.$$

Então, $2M + 1 = \frac{2k[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]}{S^{\phi_2}(k)}$. Deste modo, os coeficientes da relação de recorrência para os polinômios $K_n^{(0, M, k)}$, quando $2M + 1 = 2k[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]/S^{\phi_2}(k)$, são dados por

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(0, M, k)} &= k^2[1 - h_0^{\phi_2}(M, k)] = k^2\left[1 - \frac{1}{(2M + 1)S^{\phi_2}(k)}\right] \\ &= \frac{k}{2}[k \mp \sqrt{k^2 - 1}]\end{aligned}$$

e

$$\alpha_{n+2}^{(0, M, k)} = k^2[1 - h_n^{\phi_2}(M, k)]h_{n-1}^{\phi_2}(M, k) = \frac{1}{4}, \quad n \geq 1.$$

Vamos analisar os valores de M para os correspondentes sinais de mais e menos. Para obtermos o valor de $S^{\phi_2}(k) = \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{k - x} d\phi_2(x)$, fazendo a mudança de variáveis $x = \cos \theta$, vamos primeiramente calcular a seguinte integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{k - x} (1 - x^2)^{-1/2} dx = \int_0^\pi \frac{1}{k - \cos \theta} d\theta.$$

Fazendo $t = \tan(\theta/2)$, temos que $\cos \theta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{k - x} (1 - x^2)^{-1/2} dx &= \frac{2}{k - 1} \int_0^\infty \frac{1}{1 + \left(\frac{k+1}{k-1}\right)t^2} dt \\ &= \frac{2}{k - 1} \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}}{1 + \left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\right)^2 t^2} dt.\end{aligned}$$

Como $\frac{d}{dt} \arctan(ct) = \frac{c}{1 + c^2 t^2}$ com c constante, então

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{k - x} (1 - x^2)^{-1/2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}.$$

Podemos, agora, calcular a integral

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{1/2} dx &= \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx - \int_{-1}^1 \frac{x^2}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} - \int_{-1}^1 \frac{k^2 - k^2 + x^2}{k-x} (1-x^2)^{-1/2} dx \\
 &= \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} - k^2 \frac{\pi}{\sqrt{k^2-1}} + k\pi = \pi[k - \sqrt{k^2-1}].
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 S^{\phi_2}(k) &= \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} d\phi_2(x) \\
 &= \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \{(2M+1)\tilde{L}^{(0,k)}[1]\}^{-1} \int_{-1}^1 \frac{1}{k-x} (1-x^2)^{1/2} dx \\
 &= \frac{k}{\mu_0^{\phi_2}} \{(2M+1)\tilde{L}^{(0,k)}[1]\}^{-1} \pi[k - \sqrt{k^2-1}].
 \end{aligned}$$

Mas,

$$\mu_0^{\phi_2} = \{(2M+1)\tilde{L}^{(0,k)}[1]\}^{-1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{1/2} dx = \{(2M+1)\tilde{L}^{(0,k)}[1]\}^{-1} \frac{\pi}{2}.$$

Portanto, $S^{\phi_2}(k) = 2k[k - \sqrt{k^2-1}]$. Assim,

$$M = \frac{\mp\sqrt{k^2-1} + \sqrt{k^2-1}}{2[k - \sqrt{k^2-1}]}.$$

Então, para o sinal negativo obtemos $M = 0$ e, para o sinal positivo, $M = \frac{\sqrt{k^2-1}}{[k - \sqrt{k^2-1}]}$.

4.2.4 Monotonicidade dos Zeros de $K_n^{(\lambda, M, \kappa)}$

Nesta subseção, estudaremos o comportamento dos zeros de $K_n^{(\lambda, M, \kappa)}$ como uma função de seus parâmetros, λ , M e k e apresentaremos a relação desses zeros com os zeros dos polinômios de Gegenbauer.

Como $K_n^{(\lambda, M, \kappa)}$ e $P_n^{\phi_2}(x) = P_n^{(\lambda+1)}(x)$ são ortogonais com respeito a medidas simétricas, esses polinômios são funções pares (ímpares) quando n é par (ímpar). Então, seus zeros são simétricos com relação à origem, sendo suficiente analisar somente os zeros positivos.

Denotemos por $x_{n,j}^{(\lambda, M, \kappa)}$ e $x_{n,j}^{(\lambda+1)}$, $j = 1, 2, \dots, [n/2]$, os zeros positivos de $K_n^{(\lambda, M, \kappa)}$ e $P_n^{(\lambda+1)}$, respectivamente, em ordem decrescente.



Lema 4.2.1. Sejam $q_n(x) = (x-x_1) \cdots (x-x_n)$ e $q_{n-1}(x) = (x-y_1) \cdots (x-y_{n-1})$ polinômios com zeros reais e que se entrelaçam, isto é,

$$x_n < y_{n-1} < x_{n-1} < \cdots < y_1 < x_1.$$

Então, para qualquer constante c real, o polinômio

$$Q(x) = q_n(x) - cq_{n-1}(x)$$

tem n zeros reais $\xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_2 < \xi_1$ que se entrelaçam com os zeros de $q_n(x)$ e $q_{n-1}(x)$. Mais precisamente,

(A) se $c > 0$, então

$$x_1 < \xi_1,$$

$$x_r < \xi_r < y_{r-1}, \quad r = 2, \dots, n; \quad (4.2.8)$$

(B) se $c < 0$, então

$$y_r < \xi_r < x_r, \quad r = 1, \dots, n-1,$$

$$\xi_n < x_n. \quad (4.2.9)$$

(C) Além disso, cada ξ_r é uma função crescente de c .

Demonstração: Para $c = 0$ temos que $Q(x) = q_n(x)$. Então, $\xi_r = x_r$, $r = 1, \dots, n$.

Suponhamos $c > 0$. Então, como $Q(x_r) = -cq_{n-1}(x_r)$, $r = 2, \dots, n$, temos

$$\text{sin}al(Q(x_r)) = -\text{sin}al(q_{n-1}(x_r)) = (-1)(-1)^{r-1} = (-1)^r$$

e, como $Q(y_{r-1}) = q_n(y_{r-1})$, $r = 2, \dots, n$, temos

$$\text{sin}al(Q(y_{r-1})) = \text{sin}al(q_n(y_{r-1})) = (-1)^{r-1}.$$

Conseqüentemente, $Q(x)$ muda de sinal entre x_r e y_{r-1} , $r = 2, \dots, n$. Então, $Q(x)$ possui zeros ξ_r , $r = 2, \dots, n$ satisfazendo (4.2.9). Temos ainda que $Q(x_1) = -cq_{n-1}(x_1) < 0$ e, além disso, quando $x \rightarrow \infty$ o polinômio $q_n(x)$ vai mais rápido para o infinito que $q_{n-1}(x)$. Então, $Q(x)$ vai para o infinito. Logo, existe ξ_1 tal que $\xi_1 > x_1$. Portanto, (A) está demonstrado.

Suponhamos, agora, $c < 0$. Então, como $Q(x_r) = -cq_{n-1}(x_r)$, temos

$$\text{sin}al(Q(x_r)) = \text{sin}al(q_{n-1}(x_r)) = (-1)^{r-1}, \quad r = 1, \dots, n-1$$

e, como $Q(y_r) = q_n(y_r)$, temos

$$\text{sin}al(Q(y_r)) = \text{sin}al(q_n(y_r)) = (-1)^r, \quad r = 1, \dots, n-1.$$



Portanto, $Q(x)$ muda de sinal entre x_r e y_r , $r = 1, \dots, n-1$. Logo, $Q(x)$ possui zeros ξ_r , $r = 1, \dots, n-1$ com $y_r < \xi_r < x_r$. Temos, ainda, $Q(x_n) = -cq_{n-1}(x_n)$. Então,

- se n for par, $Q(x_n) < 0$ e, ainda, quando $x \rightarrow -\infty$, o polinômio $q_n(x)$ vai mais rápido para o infinito que $q_{n-1}(x)$ vai para $-\infty$. Então, $Q(x)$ tende para infinito. Logo, existe $\xi_n < x_n$ tal que ξ_n é um zero de $Q(x)$;

- se n for ímpar, $Q(x_n) > 0$. Além disso, quando $x \rightarrow -\infty$, $q_n(x)$ vai mais rápido para $-\infty$ que $q_{n-1}(x)$ vai para ∞ . Então, $Q(x)$ tende para $-\infty$. Logo, existe $\xi_n < x_n$ tal que ξ_n é um zero de $Q(x)$.

Portanto, existe $\xi_n < x_n$ para todo n . Deste modo, demonstramos (B).

Provemos, agora, a monotonicidade dos zeros de $Q(x)$ com respeito a c . Seja

$$Q_\epsilon(x) = q_n(x) - (c + \epsilon)q_{n-1}(x),$$

com $\epsilon \geq 0$. Sejam os zeros de $Q_\epsilon(x)$ dados por $\xi_n(\epsilon) < \dots < \xi_1(\epsilon)$. Podemos notar que $\xi_r = \xi_r(0)$ e, como $Q(x) = q_n(x) - cq_{n-1}(x)$, temos

$$Q_\epsilon(x) = Q(x) - \epsilon q_{n-1}(x).$$

Como, para ambos os casos $c > 0$ e $c < 0$, y_r e ξ_r se entrelaçam, por (A) podemos concluir que $\xi_r < \xi_r(\epsilon)$. ■

Uma modificação do Lema 4.2.1 para polinômios pares ou ímpares pode ser dado pelo seguinte resultado:

Lema 4.2.2. *Sejam $Q_n(x)$ e $Q_{n-2}(x)$ polinômios pares(ímpares) com os coeficientes dos termos de maior grau positivos e com somente zeros reais cujos respectivos zeros positivos $x_1 > \dots > x_{\lfloor n/2 \rfloor}$ e $y_1 > \dots > y_{\lfloor (n-2)/2 \rfloor}$ se entrelaçam, isto é,*

$$x_{\lfloor n/2 \rfloor} < y_{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} < \dots < y_1 < x_1.$$

Então, para qualquer constante c real, o polinômio

$$Q(x) = Q_n(x) - cQ_{n-2}(x)$$

tem n zeros e seus zeros positivos $\xi_{\lfloor n/2 \rfloor} < \dots < \xi_2 < \xi_1$ se entrelaçam com os zeros positivos de $Q_n(x)$ e $Q_{n-2}(x)$. Mais precisamente,



(A) se $c > 0$, então

$$x_1 < \xi_1,$$

$$x_r < \xi_r < y_{r-1}, \quad r = 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor;$$

(B) se $c < 0$, então

$$y_r < \xi_r < x_r, \quad r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor - 1,$$

$$\xi_{\lfloor n/2 \rfloor} < x_{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

(C) Além disso, todo zero positivo ξ_r , para $r = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$, é uma função crescente de c .

Teorema 4.2.2. Para quaisquer $k \geq 1$ e $M \geq 0$ os zeros dos polinômios $K_n^{(\lambda, M, k)}$ e $P_n^{(\lambda+1)}$, $n \geq 2$, satisfazem

$$x_{n,1}^{(\lambda+1)} < x_{n,1}^{(\lambda, M, k)}$$

e

$$x_{n,r}^{(\lambda+1)} < x_{n,r}^{(\lambda, M, k)} < x_{n-2,r-1}^{(\lambda+1)}, \quad r = 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor.$$

Além disso,

a) para quaisquer n e r tais que $1 \leq r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $n \geq 2$, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de M para $M \in [0, \infty)$;

b) para quaisquer n e r tais que $1 \leq r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $n \geq 3$, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é função crescente de k para $k \in [\hat{k}(\lambda, M), \infty)$, onde $\hat{k}(\lambda, M) = \sqrt{\left(1 + \frac{2\lambda + 3}{4(\lambda + 2)M}\right)}$.

Demonstração: De (4.2.6), podemos escrever

$$K_n^{(\lambda, M, k)}(x) = P_n^{\phi_2}(x) - c_n(\lambda, M, k)P_{n-2}^{\phi_2}(x),$$

onde $c_n(\lambda, M, k) = k^2(1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k))(1 - h_{n-2}^{\phi_2}(M, k))$.

De (4.2.7), temos que

$$h_0^{\phi_2}(M, k) = \frac{1}{(2M + 1)S^{\phi_2}(k)}.$$

Como $S^{\phi_2}(k) > 1$ e $M \geq 0$, então $0 < h_0^{\phi_2}(M, k) < 1$. Conseqüentemente, como $\alpha_{n+1}^{\phi_2} = k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]h_n^{\phi_2}(M, k)$, obtemos

$$h_n^{\phi_2}(M, k) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_2}}{k^2[1 - h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)]} \quad \text{e} \quad [1 - h_n^{\phi_2}(M, k)] = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{k^2 h_{n-1}^{\phi_2}(M, k)}, \quad n \geq 1.$$

Podemos, então, concluir que $0 < h_n^{\phi_2}(M, k) < 1$, $n \geq 1$. Assim, $c_n(\lambda, M, k) > 0$ e obtemos, do Lema 4.2.2, que

vamos analisar os valores de k cuja derivada de $f(k) = k^2 \left[1 - \frac{1}{(2M+1)S^{\phi_2}(k)} \right]$ é positiva. Como

$$S^{\phi_2}(k) = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_{-1}^1 \frac{k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x) = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{2k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x),$$

obtemos

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 2k \left[1 - \frac{1}{(2M+1)S^{\phi_2}(k)} \right] + \frac{k^2}{(2M+1)\{S^{\phi_2}(k)\}^2} \frac{\partial S^{\phi_2}(k)}{\partial k}.$$

Mas,

$$\frac{\partial S^{\phi_2}(k)}{\partial k} = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{-4kx^2}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x).$$

Assim,

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 2k \left[1 - \frac{S^{\phi_2}(k)\mu_0^{\phi_2} + 2k^2 \int_0^1 \frac{x^2}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x)}{(2M+1)\{S^{\phi_2}(k)\}^2 \mu_0^{\phi_2}} \right].$$

De $S^{\phi_2}(k) = \frac{1}{\mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{2k^2}{k^2 - x^2} d\phi_2(x)$ obtemos

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} = 2k \left[1 - \frac{2k^4}{(2M+1)\{S^{\phi_2}(k)\}^2 \mu_0^{\phi_2}} \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x) \right].$$

Então, para $k > 1$,

$$\int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x) < \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - 1)(k^2 - x^2)} d\phi_2(x) = \frac{1}{(k^2 - 1)} \int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)} d\phi_2(x).$$

Deste modo,

$$\int_0^1 \frac{1}{(k^2 - x^2)^2} d\phi_2(x) < \frac{\mu_0^{\phi_2}}{(k^2 - 1)2k^2} S^{\phi_2}(k).$$

Logo,

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 2k \left[1 - \frac{k^2}{(2M+1)S^{\phi_2}(k)(k^2 - 1)} \right].$$

Mas, de (4.1.4), temos que

$$S_2^{\phi_2}(k) = \frac{k^2}{k^2 - \alpha_2^{\phi_2}}.$$

Como $S_2^{\phi_2}(k) < S^{\phi_2}(k)$ então (para $k > 1$)

$$\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 2k \left[1 - \frac{k^2 - \alpha_2^{\phi_2}}{(2M+1)(k^2 - 1)} \right].$$



Para descobrirmos os valores de k tais que, $\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$, precisamos analisar

$$1 - \frac{k^2 - \alpha_2^{\phi_2}}{(2M+1)(k^2-1)} \geq 0.$$

Mas, $\alpha_2^{\phi_2} = \frac{1}{2(\lambda+2)}$. Então,

$$1 - \frac{2(\lambda+2)k^2 - 1}{2(\lambda+2)(k^2-1)(2M+1)} \geq 0$$

e, além disso,

$$k^2 \geq 1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}.$$

Portanto, se $k^2 \geq 1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}$ então $\frac{\partial f(k)}{\partial k} > 0$. Assim, $h_1^{\phi_2}(M, k)$ é uma função decrescente de k para $k \geq \sqrt{1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}}$. Então, $c_n(\lambda, M, k)$ é uma função crescente de k para $n = 3, 4, \dots$. Deste modo, pelo Lema 4.2.2, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de $c_n(\lambda, M, k)$. Então, $x_{n,r}^{(\lambda, M, k)}$ é uma função crescente de k , para $1 \leq r \leq \lfloor n/2 \rfloor$ e $n \geq 3$, e, também, para $k \in [\hat{k}(\lambda, M), \infty)$, onde $\hat{k}(\lambda, M) = \sqrt{1 + \frac{(2\lambda+3)}{4(\lambda+2)M}}$. ■

4.3 Caso Não-Simétrico

Primeiramente, apresentamos resultados do artigo [4] que nos fornecem a relação entre duas seqüências de polinômios ortogonais cujas medidas associadas estão relacionadas entre si por uma multiplicação (ou divisão) por um polinômio de grau 1. Acrescentamos um estudo sobre o comportamento dos zeros dos polinômios generalizados relacionados com os polinômios de Jacobi e Laguerre.

Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ duas medidas definidas sobre o mesmo suporte $E \subseteq [a, b]$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, satisfazendo

$$c d\phi_0(x) = (x - q) d\phi_1(x). \quad (4.3.1)$$

Aqui, q admite um valor real tal que $x - q$ não muda de sinal em E . Os valores c e q são tais que $(x - q)/c$ é finito e positivo no menor intervalo que contém o suporte comum das medidas. Isto é, se $q \geq b$ então $c < 0$ e, se $q \leq a$, então $c > 0$.

Expressando $P_n^{\phi_1}$ como uma combinação linear dos polinômios $\{P_n^{\phi_0}\}$, obtemos

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + b_{n-1} P_{n-1}^{\phi_0}(x), \quad n \geq 1, \quad (4.3.2)$$



onde

$$b_{n-1} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{c \rho_{n-1}^{\phi_0}}, \quad n \geq 1, \quad (4.3.3)$$

com $\rho_0^\phi = \mu_0^\phi$ e $\rho_n^\phi = \langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle_\phi = \alpha_{n+1}^\phi \alpha_n^\phi \cdots \alpha_2^\phi \mu_0^\phi$, $n \geq 1$.

De fato: pela propriedade de ortogonalidade,

$$\left\langle P_n^{\phi_1}, P_j^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \left\langle P_n^{\phi_1}, \frac{(x-q)}{c} P_j^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_1} = 0 \quad \text{se } j \leq n-2.$$

Mas, como $P_n^{\phi_1}(x) = \sum_{k=0}^n \sigma_k P_k^{\phi_0}(x)$,

$$\left\langle P_n^{\phi_1}, P_j^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \sum_{k=0}^n \sigma_k \left\langle P_k^{\phi_0}, P_j^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \sigma_j \left\langle P_j^{\phi_0}, P_j^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = 0 \quad \text{se } \sigma_j = 0.$$

Portanto, $\sigma_j = 0$, $j \leq n-2$ e assim,

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + \sigma_{n-1} P_{n-1}^{\phi_0}(x).$$

Agora,

$$\left\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \sum_{k=0}^n \sigma_k \left\langle P_k^{\phi_0}, P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \sigma_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\phi_0}, P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0}.$$

Além disso,

$$\left\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \left\langle P_n^{\phi_1}, \frac{(x-q)}{c} P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_1}$$

e, assim,

$$\sigma_{n-1} \left\langle P_{n-1}^{\phi_0}, P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_0} = \left\langle P_n^{\phi_1}, \frac{(x-q)}{c} P_{n-1}^{\phi_0} \right\rangle_{\phi_1} = \frac{1}{c} \left\langle P_n^{\phi_1}, P_{n-1}^{\phi_0} x \right\rangle_{\phi_1} = \frac{1}{c} \left\langle P_n^{\phi_1}, P_n^{\phi_1} \right\rangle_{\phi_1}.$$

Logo,

$$\sigma_{n-1} = \frac{\rho_n^{\phi_1}}{c \rho_{n-1}^{\phi_0}}, \quad n \geq 1,$$

e, portanto,

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + \frac{\rho_n^{\phi_1}}{c \rho_{n-1}^{\phi_0}} P_{n-1}^{\phi_0}(x)$$

com $\rho_n^\phi = \langle P_n^\phi, P_n^\phi \rangle_\phi$.



Da relação de recorrência para os polinômios ortogonais (4.1.1), sabemos que

$$\alpha_{n+1}^\phi = \frac{\rho_n^\phi}{\rho_{n-1}^\phi}, \quad \text{ou seja,} \quad \rho_n^\phi = \alpha_{n+1}^\phi \alpha_n^\phi \dots \alpha_2^\phi \mu_0^\phi, \quad n \geq 1.$$

Berti, Bracciali e Sri Ranga [2] demonstraram os seguintes resultados, que serão importantes no restante desta seção.

Lema 4.3.1. *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que (4.3.1) vale. Então, os coeficientes de conexão b_n na relação (4.3.2) satisfazem*

$$(i) \quad b_n/b_{n-1} = \alpha_{n+2}^{\phi_1}/\alpha_{n+1}^{\phi_0};$$

$$(ii) \quad b_n - b_{n-1} = \beta_{n+1}^{\phi_0} - \beta_{n+1}^{\phi_1};$$

$$(iii) \quad (\beta_{n+1}^{\phi_1} - \beta_n^{\phi_0})b_{n-1} = \alpha_{n+1}^{\phi_0} - \alpha_{n+1}^{\phi_1},$$

para $n \geq 1$, onde $b_0 = \beta_1^{\phi_0} - \beta_1^{\phi_1} = \alpha_2^{\phi_1}/(\beta_1^{\phi_1} - q)$.

Demonstração: O resultado (i) segue de (4.3.3). De (4.3.2) e da relação de recorrência (4.1.1) para $P_n^{\phi_0}$,

$$P_n^{\phi_1}(x) = \left[1 + \frac{b_{n-1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}(x - \beta_{n+1}^{\phi_0}) \right] P_n^{\phi_0}(x) - \frac{b_{n-1}}{\alpha_{n+1}^{\phi_0}} P_{n+1}^{\phi_0}(x), \quad n \geq 1.$$

Substituindo esta relação e (4.3.2) em (4.1.1) para $P_n^{\phi_1}$ e em seguida, usando o resultado (i) do lema, obtemos

$$P_{n+1}^{\phi_0}(x) = [x - (\beta_{n+1}^{\phi_1} + b_n - b_{n-1})]P_n^{\phi_0}(x) + [b_{n-1}(\beta_n^{\phi_0} - \beta_{n+1}^{\phi_1}) - \alpha_{n+1}^{\phi_1}]P_{n-1}^{\phi_0}(x)$$

para $n \geq 1$. Deste modo, comparando este resultado com a relação de recorrência (4.1.1) para $P_n^{\phi_0}$, chegamos aos resultados (ii) e (iii). As condições iniciais são facilmente estabelecidas de (4.3.2) e (4.3.3). ■

Lema 4.3.2. *Sejam $d\phi_0$ e $d\phi_1$ tais que (4.3.1) vale. Então,*

$$\frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{b_n} - \beta_{n+1}^{\phi_1} + b_{n-1} = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}} - \beta_{n+1}^{\phi_0} + b_n = -q.$$

Conseqüentemente, os coeficientes b_n , $n \geq 1$, podem ser gerados por

$$b_n = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{-q + \beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1}} \quad \text{ou} \quad b_n = (\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}}.$$

Demonstração: De (i) do Lema 4.3.1, obtemos

$$b_n \alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1} \alpha_{n+2}^{\phi_0} = b_{n-1} (\alpha_{n+2}^{\phi_1} - \alpha_{n+2}^{\phi_0}), \quad n \geq 1.$$

Aplicando o resultado (iii) do Lema 4.3.1, a equação acima pode ser escrita como

$$b_n \alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1} \alpha_{n+2}^{\phi_0} = b_{n-1} b_n (\beta_{n+1}^{\phi_0} - \beta_{n+2}^{\phi_1}), \quad n \geq 1,$$

que é equivalente a

$$b_n (\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1} \beta_{n+1}^{\phi_0}) = b_{n-1} (\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n \beta_{n+2}^{\phi_1}), \quad n \geq 1.$$

De (ii) do Lema 4.3.1, desde que $\beta_{n+2}^{\phi_1} = \beta_{n+2}^{\phi_0} - b_{n+1} + b_n$, $n \geq 0$, então

$$b_n (\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1} \beta_{n+1}^{\phi_0}) = b_{n-1} (\alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n \beta_{n+2}^{\phi_0} + b_n b_{n+1}) - b_{n-1} b_n^2, \quad n \geq 1.$$

Isto mostra que $[\alpha_{n+1}^{\phi_0} - b_{n-1} \beta_{n+1}^{\phi_0} + b_{n-1} b_n] / b_{n-1}$ é uma constante para $n \geq 1$. Para encontrar o valor desta constante, temos, de (ii) e (iii) do Lema 4.3.1, que

$$\frac{\alpha_2^{\phi_0} - b_0 \beta_2^{\phi_0} + b_0 b_1}{b_0} = \frac{\alpha_2^{\phi_0} - b_0 \beta_2^{\phi_1} + b_0^2}{b_0} = \frac{\alpha_2^{\phi_1} - b_0 \beta_1^{\phi_0} + b_0^2}{b_0}.$$

Deste modo, usando as condições iniciais do Lema 4.3.1, é fácil mostrar que o lado direito da igualdade anterior é igual a $-q$.

Finalmente, também de (ii) e (iii) do Lema 4.3.1, encontramos que

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1} - b_n (\beta_{n+1}^{\phi_1} - b_{n-1}) = \alpha_{n+2}^{\phi_0} - b_n (\beta_{n+2}^{\phi_0} - b_{n+1}),$$

concluindo, assim, a demonstração do lema. ■

Os resultados dos Lemas 4.3.1 e 4.3.2 também podem ser encontrados em Belmehdi [1], Marcellán e Petronilho [10] e Maroni [11].

Além desses, serão necessários ainda os seguintes resultados:

Lema 4.3.3. *Sejam $f(x, y)$ e $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ funções contínuas de x, y , em $a \leq x \leq b$, $y_1 \leq y \leq y_2$. Então,*

$$\frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$$

para todos os valores finitos de $b > a$.

Lema 4.3.4. *Seja $\int_a^\infty f(x, y) dx$ convergente quando $y_1 \leq y \leq y_2$. Além disso, seja $\int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx$ uniformemente convergente em $y_1 \leq y \leq y_2$. Então, em $y_1 \leq y \leq y_2$,*

$$\frac{d}{dy} \int_a^\infty f(x, y) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx.$$



As provas dos últimos dois lemas podem ser encontradas, por exemplo, em Ferrar [7] e Widder [16].

Teorema 4.3.1. [A. Markoff] *Seja $w(x) = w(x, \kappa)$ uma função peso no intervalo $[a, b]$, que depende do parâmetro κ , tal que $w(x, \kappa)$ é positiva e contínua para $a < x < b$ e $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$. Consideremos, também, que a derivada parcial $w_\kappa(x, \kappa)$ existe e é contínua para $a < x < b$ e $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ e que as integrais*

$$\int_a^b x^k w_\kappa(x, \kappa) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1,$$

convergem uniformemente em todo subintervalo fechado $\kappa' \leq \kappa \leq \kappa''$ do intervalo aberto (κ_1, κ_2) . Se os zeros de $p_n(x) = p_n(x, \kappa)$ (ortogonal com relação a $w(x, \kappa)$) são denotados por $x_{n,1}^{(\kappa)} > x_{n,2}^{(\kappa)} > \dots > x_{n,n}^{(\kappa)}$, então o r -ésimo zero, $x_{n,r}^{(\kappa)}$, (para um valor fixo de r) é uma função crescente de κ se w_κ/w é uma função crescente de x e $x_{n,r}^{(\kappa)}$ é uma função decrescente de κ se w_κ/w é uma função decrescente de x , $a < x < b$.

A prova deste teorema pode ser encontrada em Szegő [14, p.115].

4.3.1 Seqüências Encadeadas e Medidas Relacionadas Não-Simétricas

Diferentemente do caso simétrico, aqui não será necessário utilizar seqüências encadeadas para o estudo da monotonicidade dos zeros. Porém, nesta seção analisaremos seqüências encadeadas que surgem quando consideramos a relação (4.3.1) entre as medidas $d\phi_0$ e $d\phi_1$ e, através da teoria de seqüências encadeadas, podemos encontrar os valores dos coeficientes da relação de recorrência para os polinômios $P_n^{\phi_1}$. Isto é particularmente interessante para facilitar a geração, principalmente computacional, de tais polinômios de grau elevado.

Do Lema 4.3.2, obtemos

$$b_n = (\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}},$$

que equivale a

$$\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)} = 1 - \frac{b_n}{(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)}.$$

Seja $g_{n-1}^{\phi_0}(q) = \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)}$, $n \geq 0$. Podemos mostrar que $\{g_{n-1}^{\phi_0}(q)\}$ é uma seqüência de parâmetros para a seqüência encadeada $\{a_n^{\phi_0}(q)\}$, onde

$$a_n^{\phi_0}(q) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)}, \quad n \geq 1.$$

De fato,

(i) Se $q \leq a$, temos $c > 0$. Então, $b_{n-1} > 0$ e $(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) > 0$ (pois $\beta_{n+1}^{\phi_0} \in [a, b]$). Logo, $g_{n-1}^{\phi_0}(q) > 0$ e, do Lema 4.3.2,

$$1 - g_{n-1}^{\phi_0}(q) = 1 - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)} = \frac{\beta_{n+1}^{\phi_0} - q - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}}}{(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)} = \frac{b_n}{(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)} > 0.$$

Portanto, $0 < g_{n-1}^{\phi_0}(q) < 1$, $n \geq 1$.

(ii) Se $q \geq b$, temos $c < 0$. Então, $b_{n-1} < 0$ e $(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) < 0$ (pois $\beta_{n+1}^{\phi_0} \in [a, b]$). Logo, $g_{n-1}^{\phi_0}(q) > 0$ e, do Lema 4.3.2,

$$1 - g_{n-1}^{\phi_0}(q) = \frac{b_n}{(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)} > 0.$$

Portanto, $0 < g_{n-1}^{\phi_0}(q) < 1$, $n \geq 1$.

Além disso,

$$(1 - g_{n-1}^{\phi_0}(q))g_n^{\phi_0}(q) = a_n^{\phi_0}(q), \quad n \geq 1,$$

com $0 < a_n^{\phi_0}(q) < 1$.

Podemos também escrever

$$g_{n-1}^{\phi_0}(q) = 1 - \frac{a_n^{\phi_0}(q)}{1} - \frac{a_{n+1}^{\phi_0}(q)}{1} - \frac{a_{n+2}^{\phi_0}(q)}{1} - \dots,$$

onde $a_n^{\phi_0}(q) = \alpha_{n+2}^{\phi_0} / [(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)]$, $n \geq 1$. Deste modo, temos que $\{g_{n-1}^{\phi_0}(q)\}$ é a seqüência de parâmetros maximais para a seqüência encadeada $\{a_n^{\phi_0}(q)\}$ (veja Chihara [6]).

Tendo informações sobre a medida $d\phi_0$, temos de (4.3.2), que

$$P_n^{\phi_1}(x) = P_n^{\phi_0}(x) + \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{g_{n-1}^{\phi_0}(k)(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)} P_{n-1}^{\phi_0}(x),$$

com

$$g_n^{\phi_0} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)(1 - g_{n-1}^{\phi_0})}, \quad n \geq 1$$

e

$$g_0^{\phi_0} = \frac{\alpha_2^{\phi_0}}{(\beta_1^{\phi_0} - q + \mu_0^{\phi_0})(\beta_2^{\phi_0} - q)}.$$

Podemos, ainda, encontrar os valores dos coeficientes da relação de recorrência para os polinômios $P_n^{\phi_1}$. Do Lema 4.3.2, obtemos

$$b_n = (\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) - \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}}$$



e, do Lema 4.3.1 (i), $\frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{b_{n-1}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{b_n}$. Então,

$$b_n = (\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) - \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_1}}{b_n}.$$

Mas, $b_n = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{g_n^{\phi_0}(q)(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)}$. Logo,

$$\alpha_{n+2}^{\phi_0} = \left[(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q) - \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{g_n^{\phi_0}(q)(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)} \right] \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{g_n^{\phi_0}(q)(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)}.$$

Mas,

$$g_n^{\phi_0}(q) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)(1 - g_{n-1}^{\phi_0}(q))}.$$

Assim,

$$\alpha_{n+2}^{\phi_1} = g_{n-1}^{\phi_0}(q)(1 - g_{n-1}^{\phi_0}(q))(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)^2, \quad n \geq 1.$$

Além disso, do Lema 4.3.1, obtemos

$$\alpha_2^{\phi_1} = b_0(\beta_1^{\phi_1} - q) = c\mu_0^{\phi_0}(\beta_1^{\phi_0} - q - c\mu_0^{\phi_0}).$$

Agora, do Lema 4.3.1 (ii), temos que $b_n - b_{n-1} = \beta_{n+1}^{\phi_0} - \beta_{n+1}^{\phi_1}$. Então,

$$\beta_{n+1}^{\phi_1} = \beta_{n+1}^{\phi_0} - \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{g_n^{\phi_0}(q)(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)} + \frac{\alpha_{n+1}^{\phi_0}}{g_{n-1}^{\phi_0}(q)(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)}.$$

Mas,

$$(\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)(1 - g_{n-1}^{\phi_0}(q)) = \frac{\alpha_{n+2}^{\phi_0}}{(\beta_{n+2}^{\phi_0} - q)g_n^{\phi_0}(q)}.$$

Portanto,

$$\beta_{n+1}^{\phi_1} = q + (\beta_{n+1}^{\phi_0} - q)g_{n-1}^{\phi_0}(q) + (\beta_n^{\phi_0} - q)(1 - g_{n-2}^{\phi_0}(q)), \quad n \geq 1,$$

e

$$\beta_1^{\phi_1} = \frac{\mu_1^{\phi_1}}{\mu_0^{\phi_1}} = q + c\mu_0^{\phi_0}.$$

4.3.2 Aplicações aos Polinômios de Jacobi Generalizados

Nesta subseção, estudaremos o comportamento, com relação à posição e ao tamanho do salto, dos zeros dos polinômios associados à medida apresentada abaixo (4.3.4), e os relacionaremos aos zeros dos polinômios de Jacobi.

Sejam $0 \leq N < \infty$ e $|\kappa| \geq 1$. Consideremos os polinômios ortogonais mônicos $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ associados à medida de probabilidade $d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(\kappa) + \frac{\mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[p]}{\mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (4.3.4)$$

onde p é qualquer polinômio e $\mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[p] = \int_{-1}^1 p(x) \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta}{\kappa-x} dx$. Aqui, se $|\kappa| > 1$, então $\alpha > -1$, $\beta > -1$, se $\kappa = 1$, então $\alpha > 0$, $\beta > -1$ e, se $\kappa = -1$, então $\alpha > -1$, $\beta > 0$.

Quando $N > 0$ a medida $d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ tem um salto no ponto κ . Em (4.3.4) a medida é escrita de forma que o valor do salto em κ é $N/(N+1)$, proporcional à sua massa total, que é igual a 1.

Quando $|\kappa| = 1$ então os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ são casos particulares dos polinômios de Koornwinder [9].

Seja

$$P_{n+1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}) P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(z),$$

com $P_0^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} = 1$ e $P_1^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(z) = z - \beta_1^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$.

Agora, se tomarmos $d\phi_1 = d\phi^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}$ e aplicarmos (4.3.1) com $q = \kappa$ e $c = -\kappa$, obtemos

$$\int p(x) d\phi_0(x) = \frac{1}{(N+1)\kappa \mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[1]} \int_{-1}^1 p(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx.$$

A medida $d\phi_0$ está associada com os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$, dados aqui com a massa total

$$\mu_0^{\phi_0} = \frac{\mu_0^{(\alpha, \beta)}}{(N+1)\kappa \mathcal{L}^{(\alpha, \beta, \kappa)}[1]},$$

onde $\mu_0^{(\alpha, \beta)} = \int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$. De (4.3.2),

$$P_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}(z) = P_n^{(\alpha, \beta)}(z) + b_{n-1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} P_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(z), \quad n \geq 1. \quad (4.3.5)$$

De (4.3.3) e do Lema 4.3.2, concluímos que $\text{sinal}(b_{n-1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}) = \text{sinal}(-\kappa)$, $n \geq 1$, e

$$\alpha_{n+2}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} = \alpha_{n+1}^{(\alpha, \beta)} \frac{b_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}}{b_{n-1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}}, \quad \beta_{n+1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} = \beta_{n+1}^{(\alpha, \beta)} - b_n^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} + b_{n-1}^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}, \quad n \geq 1,$$

com

$$\alpha_2^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} = b_0^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} (\beta_1^{(\alpha, \beta)} - b_0^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} - \kappa) \quad \text{e} \quad \beta_1^{(\alpha, \beta, \kappa, N)} = \beta_1^{(\alpha, \beta)} - b_0^{(\alpha, \beta, \kappa, N)}.$$



A sequência $\{b_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}\}$ pode ser gerada por

$$b_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} = (\beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} - \kappa) - \frac{\alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)}}{b_{n-1}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}, \quad n \geq 1, \quad (4.3.6)$$

com

$$\begin{aligned} b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} &= \beta_1^{(\alpha,\beta)} - \beta_1^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} \\ &= \beta_1^{(\alpha,\beta)} - \kappa + \frac{\mu_0^{(\alpha,\beta)}}{(N+1)\mathcal{L}^{(\alpha,\beta,\kappa)}[1]}. \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Lembremos que, para $n \geq 1$,

$$\beta_n^{(\alpha,\beta)} = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta - 1)^2 - 1} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} = \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta)^2[(2n + \alpha + \beta)^2 - 1]}.$$

Se definirmos

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{1}{1} - \frac{a_1^{(\alpha,\beta)}(z)}{1} - \frac{a_2^{(\alpha,\beta)}(z)}{1} - \dots - \frac{a_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{1}, \quad n \geq 2,$$

onde $a_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} / [(z - \beta_n^{(\alpha,\beta)})(z - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)})]$, então, de (4.1.7) e de (4.1.5),

$$1 < S_2^{(\alpha,\beta)}(\kappa) < \dots < S_n^{(\alpha,\beta)}(\kappa) < \dots < S^{(\alpha,\beta)}(\kappa) = \frac{\kappa - \beta_1^{(\alpha,\beta)}}{\mu_0^{(\alpha,\beta)}} \mathcal{L}^{(\alpha,\beta,\kappa)}[1], \quad (4.3.8)$$

para $\kappa \in [1, \infty)$ ou $\kappa \in (-\infty, -1]$. Observemos em (4.3.4) que, para o caso $|\kappa| = 1$, os valores de α e β devem ser apropriadamente escolhidos.

Teorema 4.3.2. *Sejam $x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ e $x_{n,r}^{(\alpha,\beta)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os respectivos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ e $P_n^{(\alpha,\beta)}$ organizados em ordem decrescente. Então, seguem os resultados:*

(1) Se $\kappa > 1$, então

$$x_{n,1}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,1}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} < \kappa \quad \text{e} \quad x_{n,r}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} < x_{n-1,r-1}^{(\alpha,\beta)}, \quad r = 2, \dots, n.$$

(2) Se $\kappa < -1$, então

$$x_{n-1,r}^{(\alpha,\beta)} < x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} < x_{n,r}^{(\alpha,\beta)}, \quad r = 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad x_{n,n}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} < x_{n,n}^{(\alpha,\beta)}.$$

(3) Se $\kappa > 1$, então $x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função crescente de N .

(4) Se $\kappa < -1$, então $x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função decrescente de N .

(5) Se $N = 0$, então $x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função decrescente de κ .

(6) Se $N > 0$, então $x_{n,r}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função crescente de κ para κ variando no intervalo $(-\infty, \tilde{\kappa}^{(\alpha,\beta,N)})$ ou no intervalo $[\hat{\kappa}^{(\alpha,\beta,N)}, \infty)$, onde

$$\hat{\kappa}^{(\alpha,\beta,N)} = \frac{N(1+\beta_2^{(\alpha,\beta)})+(1-\beta_1^{(\alpha,\beta)})+\sqrt{[N(1-\beta_2^{(\alpha,\beta)})+(1-\beta_1^{(\alpha,\beta)})]^2-4N\alpha_2^{(\alpha,\beta)}}}{2N},$$

$$\tilde{\kappa}^{(\alpha,\beta,N)} = \frac{-N(1-\beta_2^{(\alpha,\beta)})-(1+\beta_1^{(\alpha,\beta)})-\sqrt{[N(1+\beta_2^{(\alpha,\beta)})+(1+\beta_1^{(\alpha,\beta)})]^2-4N\alpha_2^{(\alpha,\beta)}}}{2N}.$$



Demonstração: Desde que $\text{ sinal}(b_{n-1}^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}) = \text{ sinal}(-\kappa)$, aplicações dos resultados das partes A e B do Lema 4.2.1 para a relação (4.3.5) fornecem as partes (1) e (2) deste teorema, respectivamente.

Agora, se $\kappa > 1$ ($\kappa < -1$) então $\mathcal{L}^{(\alpha,\beta,\kappa)}[1]$ é positivo (negativo) e, portanto, de (4.3.7) $b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função decrescente (crescente) de N . Assim, de (4.3.6), $b_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função decrescente (crescente) de N para qualquer $n \geq 0$. Aplicando o resultado da parte C do Lema 4.2.1, obtemos a parte (3) (parte (4)) do teorema.

Para obter a parte (5), note que $\{P_n^{(\alpha,\beta,\kappa,0)}\}$ pode ser considerado como o polinômio ortogonal associado com a função peso $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta(\kappa-x)^{-1}$, definido em $[-1, 1]$. Portanto, o resultado segue da aplicação do teorema de A. Markoff (Teorema 4.3.1).

Agora, vamos obter a parte (6) deste teorema. De (4.3.7),

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}{\partial \kappa} = -1 + \frac{\mu_0^{(\alpha,\beta)} \int_{-1}^1 \frac{1}{(\kappa-x)^2} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx}{(N+1) \left(\int_{-1}^1 \frac{1}{\kappa-x} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \right)^2}.$$

Disso,

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{\mu_0^{(\alpha,\beta)}}{(N+1)(\kappa-1)\mathcal{L}^{(\alpha,\beta,\kappa)}[1]}, \quad \text{se } \kappa > 1$$

e

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{\mu_0^{(\alpha,\beta)}}{(N+1)(\kappa+1)\mathcal{L}^{(\alpha,\beta,\kappa)}[1]}, \quad \text{se } \kappa < -1.$$

De (4.3.8), desde que $S_2^{(\alpha,\beta)}(\kappa) < \frac{\kappa-\beta_1^{(\alpha,\beta)}}{\mu_0^{(\alpha,\beta)}} \mathcal{L}^{(\alpha,\beta,\kappa)}[1]$, temos, então, que

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{(\kappa - \beta_1^{(\alpha,\beta)})(\kappa - \beta_2^{(\alpha,\beta)}) - \alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{(N+1)(\kappa-1)(\kappa - \beta_2^{(\alpha,\beta)})}, \quad \text{se } \kappa > 1$$

e

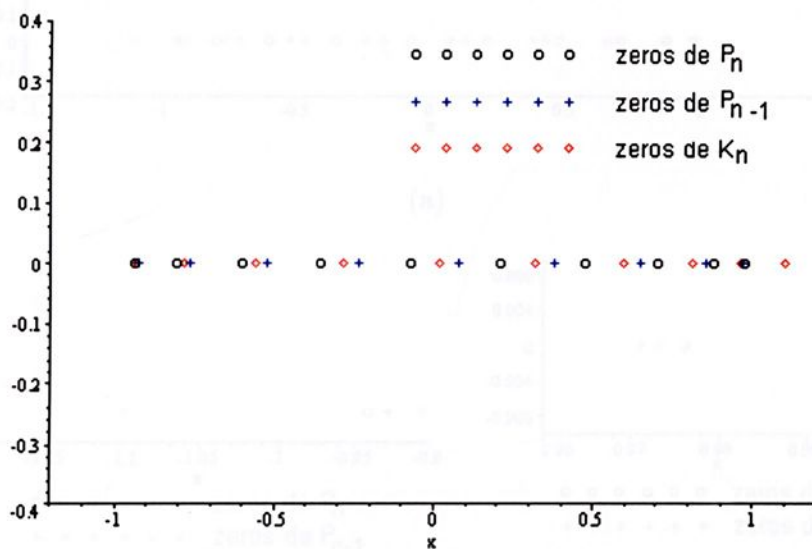
$$\frac{\partial b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}}{\partial \kappa} < -1 + \frac{(\kappa - \beta_1^{(\alpha,\beta)})(\kappa - \beta_2^{(\alpha,\beta)}) - \alpha_2^{(\alpha,\beta)}}{(N+1)(\kappa+1)(\kappa - \beta_2^{(\alpha,\beta)})}, \quad \text{se } \kappa < -1.$$

Olhemos para os valores de κ para os quais o lado direito das inequações acima são negativos e encontramos, respectivamente, os dois intervalos $[\hat{\kappa}^{(\alpha,\beta,N)}, \infty)$ e $(-\infty, \check{\kappa}^{(\alpha,\beta,N)}]$ onde isso vale. Dentro desses intervalos, temos então que $b_0^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função decrescente de κ . Conseqüentemente, de (4.3.6), dentro desses intervalos temos também que $b_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ é uma função decrescente de κ para todo $n \geq 0$. Portanto, da parte C do Lema 4.2.1, a parte (6) do teorema segue. ■

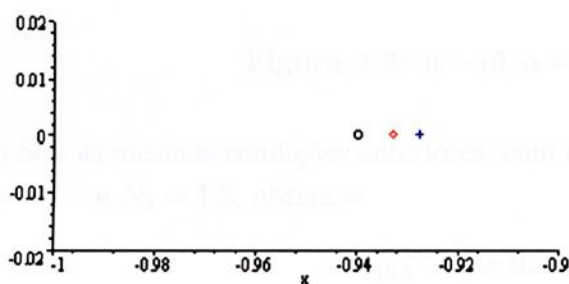


Ilustração Numérica: Denotemos $P_n^{(\alpha,\beta)} = P_n$, $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)} = P_{n-1}$ e $P_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)} = K_n$. Tomemos $n = 10$, $\alpha = 0$ e $\beta = 1$.

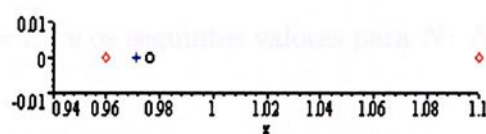
(1) A Figura 4.1(a) mostra a localização de todas as raízes de $P_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ em relação aos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ com $N = 1$ e $\kappa = 1.1$. Em 4.1(b), ampliamos o intervalo em que aparecem as raízes n -ésimas e, em 4.1(c), mostramos o comportamento da primeira raiz de cada polinômio.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.1: $n = 10$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $N = 1$, $\kappa = 1.1$

(2) A Figura 4.2(a) mostra a localização de todas as raízes de $P_n^{(\alpha,\beta,\kappa,N)}$ em relação aos zeros de $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e $P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}$ com $N = 1$ e $\kappa = -1.1$. Em 4.2(b) mostramos o comportamento da primeira raiz de cada polinômio e, em 4.2(c), ampliamos o intervalo em que aparecem as raízes n -ésimas.

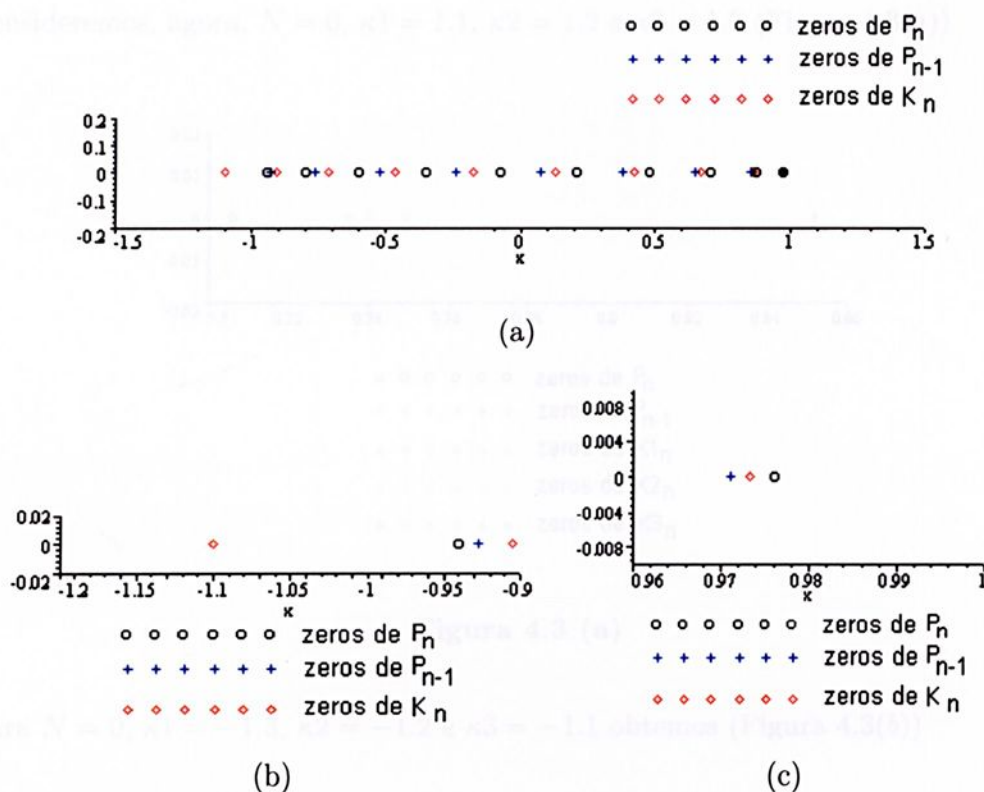


Figura 4.2: $n = 10$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $N = 1$, $\kappa = -1.1$

(3) Sob as mesmas condições anteriores, com $\kappa = 1.1$ e os seguintes valores para N : $N_1 = 1$, $N_2 = 1.1$ e $N_3 = 1.2$, obtemos

$$\begin{aligned} x_{10,6}^{(0,1,1.1,1)} &= 0.31933106410643\dots \\ x_{10,6}^{(0,1,1.1,1.1)} &= 0.31933226667616\dots \\ x_{10,6}^{(0,1,1.1,1.2)} &= 0.31933326885518\dots \end{aligned}$$

(4) Consideremos, agora, $\kappa = -1.1$ e $N_1 = 1$, $N_2 = 1.1$ e $N_3 = 1.2$. Obtemos, então,

$$\begin{aligned} x_{10,6}^{(0,1,1.1,1)} &= 0.1286288635480\dots \\ x_{10,6}^{(0,1,1.1,1.1)} &= 0.1286287337912\dots \\ x_{10,6}^{(0,1,1.1,1.2)} &= 0.1286286256599\dots \end{aligned}$$

Como em (3) e (4) as raízes estão muito próximas, não foi possível mostrá-las em um gráfico através do software *Maple*®6. Porém, as informações acima ilustram, respectivamente, o caracter crescente e decrescente em relação a N .

Sejam κ_1 , κ_2 e κ_3 relacionados aos polinômios K_{1n} , K_{2n} e K_{3n} respectivamente.

(5) Consideremos, agora, $N = 0$, $\kappa_1 = 1.1$, $\kappa_2 = 1.2$ e $\kappa_3 = 1.3$ (Figura 4.3(a))

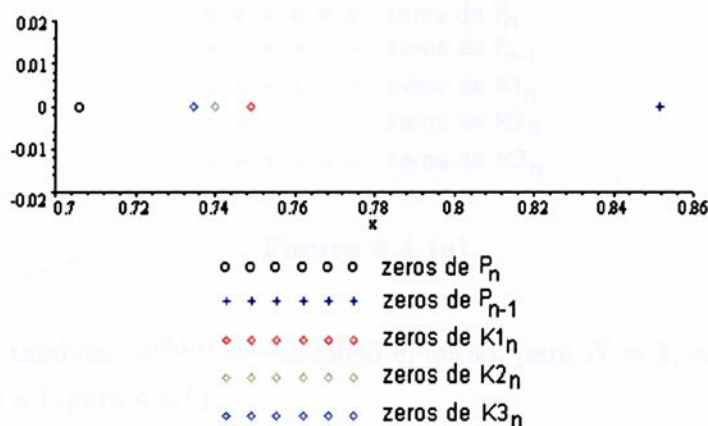


Figura 4.3 (a)

Para $N = 0$, $\kappa_1 = -1.3$, $\kappa_2 = -1.2$ e $\kappa_3 = -1.1$ obtemos (Figura 4.3(b))

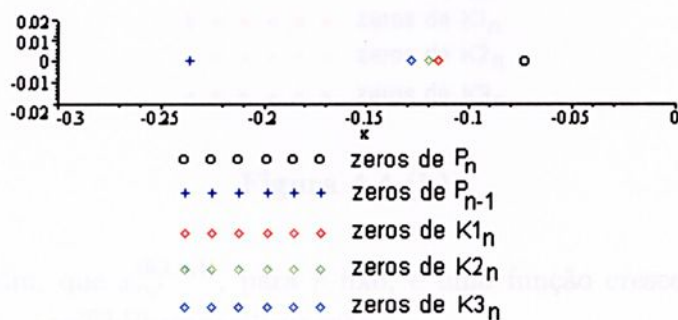


Figura 4.3 (b)

Observamos que os zeros de K_n , $x_{n,r}^{(0,1,\kappa,0)}$, para r fixo, é uma função decrescente de κ .

(6) Após alguns cálculos, encontramos $\hat{\kappa}^{(0,1,1)} = 1,51302$ e, então, para $N = 1$, $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 4$ e $\kappa_3 = 5$, (Figura 4.4(a))

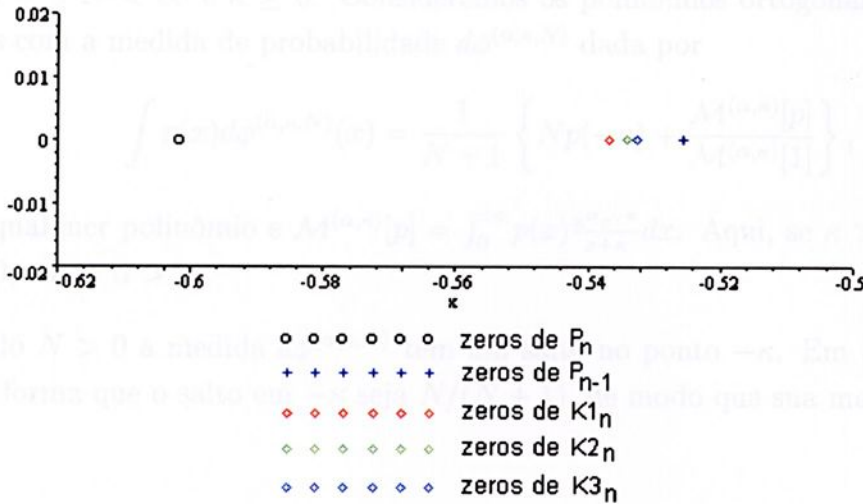


Figura 4.4 (a)

Encontramos, também, $\tilde{\kappa}^{(0,1,1)} = -2.23686$ e, então, para $N = 1$, $\kappa_1 = -5$, $\kappa_2 = -4$ e $\kappa_3 = -3$, obtemos a Figura 4.4(b),

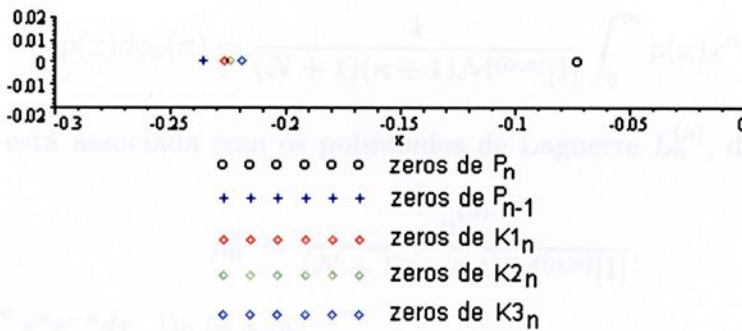


Figura 4.4 (b)

Mostramos, assim, que $x_{n,r}^{(0,1,\kappa,1)}$, para r fixo, é uma função crescente de κ , para $\kappa \in [\tilde{\kappa}^{(0,1,1)}, \infty)$ ou $\kappa \in (-\infty, \tilde{\kappa}^{(0,1,1)}]$ respectivamente.

4.3.3 Aplicações aos Polinômios de Laguerre Generalizados

Analogamente à subseção anterior, apresentaremos aqui um estudo sobre os zeros dos polinômios associados com a medida (4.3.9) abaixo e os relacionaremos aos zeros dos polinômios de Laguerre.



Sejam $0 \leq N < \infty$ e $\kappa \geq 0$. Consideremos os polinômios ortogonais mônicos $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ associados com a medida de probabilidade $d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}$ dada por

$$\int p(x) d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}(x) = \frac{1}{N+1} \left\{ Np(-\kappa) + \frac{\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[p]}{\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]} \right\}, \quad (4.3.9)$$

onde p é qualquer polinômio e $\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[p] = \int_0^\infty p(x) \frac{x^\alpha e^{-x}}{x+\kappa} dx$. Aqui, se $\kappa > 0$, então $\alpha > -1$ e, se $\kappa = 0$, então $\alpha > 0$.

Quando $N > 0$ a medida $d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}$ tem um salto no ponto $-\kappa$. Em (4.3.9) a medida é escrita de forma que o salto em $-\kappa$ seja $N/(N+1)$, de modo que sua massa total é igual a 1.

Seja

$$L_{n+1}^{(\alpha, \kappa, N)}(z) = (z - \beta_{n+1}^{(\alpha, \kappa, N)}) L_n^{(\alpha, \kappa, N)}(z) - \alpha_{n+1}^{(\alpha, \kappa, N)} L_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)}(z),$$

com $L_0^{(\alpha, \kappa, N)} = 1$ e $L_1^{(\alpha, \kappa, N)}(z) = z - \beta_1^{(\alpha, \kappa, N)}$.

Agora, se tomarmos $d\phi_1 = d\phi^{(\alpha, \kappa, N)}$ e aplicarmos (4.3.1) com $q = -\kappa$ e, por exemplo, $c = \kappa + 1$, obtemos

$$\int p(x) d\phi_0(x) = \frac{1}{(N+1)(\kappa+1)\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]} \int_0^\infty p(x) x^\alpha e^{-x} dx.$$

A medida $d\phi_0$ está associada com os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}$, dada aqui com a massa total

$$\mu_0^{(\alpha)} = \frac{\mu_0^{(\alpha)}}{(N+1)(\kappa+1)\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]},$$

onde $\mu_0^{(\alpha)} = \int_0^\infty x^\alpha e^{-x} dx$. De (4.3.2),

$$L_n^{(\alpha, \kappa, N)}(z) = L_n^{(\alpha)}(z) + b_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)} L_{n-1}^{(\alpha)}(z), \quad n \geq 1, \quad (4.3.10)$$

onde, de (4.3.3), $b_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)} > 0$, $n \geq 1$ e

$$\alpha_{n+2}^{(\alpha, \kappa, N)} = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} \frac{b_n^{(\alpha, \kappa, N)}}{b_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)}}, \quad \beta_{n+1}^{(\alpha, \kappa, N)} = \beta_{n+1}^{(\alpha)} - b_n^{(\alpha, \kappa, N)} + b_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)}, \quad n \geq 1,$$

com

$$\alpha_2^{(\alpha, \kappa, N)} = b_0^{(\alpha, \kappa, N)} (\beta_1^{(\alpha)} - b_0^{(\alpha, \kappa, N)} - \kappa) \quad \text{e} \quad \beta_1^{(\alpha, \kappa, N)} = \beta_1^{(\alpha)} - b_0^{(\alpha, \kappa, N)}.$$

A sequência $\{b_n^{(\alpha, \kappa, N)}\}$ pode ser gerada por

$$b_n^{(\alpha, \kappa, N)} = (\beta_{n+1}^{(\alpha)} + \kappa) - \frac{\alpha_{n+1}^{(\alpha)}}{b_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)}}, \quad n \geq 1, \quad (4.3.11)$$

com

$$\begin{aligned} b_0^{(\alpha, \kappa, N)} &= \beta_1^{(\alpha)} - \beta_1^{(\alpha, \kappa, N)} \\ &= \beta_1^{(\alpha)} + \kappa - \frac{\mu_0^{(\alpha)}}{(N+1)\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]}. \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Lembremos que, para $n \geq 1$,

$$\beta_n^{(\alpha)} = 2n + \alpha - 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(\alpha)} = n(n + \alpha).$$

Se definirmos

$$S_n^{(\alpha)}(z) = \frac{1}{1} - \frac{a_1^{(\alpha)}(z)}{1} - \frac{a_2^{(\alpha)}(z)}{1} - \dots - \frac{a_{n-1}^{(\alpha)}(z)}{1}, \quad n \geq 2,$$

onde $a_n^{(\alpha)}(z) = \alpha_{n+1}^{(\alpha)} / [(z - \beta_n^{(\alpha)})(z - \beta_{n+1}^{(\alpha)})]$, então, de (4.1.7) e (4.1.5),

$$1 < S_2^{(\alpha)}(-\kappa) < \dots < S_n^{(\alpha)}(-\kappa) < \dots < S^{(\alpha)}(-\kappa) = \frac{\kappa + \beta_1^{(\alpha)}}{\mu_0^{(\alpha)}} \mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1], \quad (4.3.13)$$

para $\kappa \in [0, \infty)$. Observemos, de (4.3.9), que para o caso $\kappa = 0$ os valores de α devem ser escolhidos apropriadamente.

Teorema 4.3.3. *Sejam, para $n \geq 1$, $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ e $x_{n,r}^{(\alpha)}$, $r = 1, 2, \dots, n$, os zeros respectivos de $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ e $L_n^{(\alpha)}$ organizados em ordem decrescente. Então, seguem os resultados:*

- (1) $x_{n-1,r}^{(\alpha)} < x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)} < x_{n,r}^{(\alpha)}$, $r = 1, \dots, n-1$ e $-\kappa < x_{n,n}^{(\alpha, \kappa, N)} < x_{n,n}^{(\alpha)}$.
- (2) $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de N para $N \in [0, \infty)$.
- (3) $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, 0)}$ é uma função crescente de κ para $\kappa \in (0, \infty)$.
- (4) Se $N > 0$, então $x_{n,r}^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função decrescente de κ para $\kappa \in [\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)}, \infty)$, onde

$$\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)} = \frac{-N(3 + \alpha) + (1 + \alpha) + \sqrt{(2N + 1)(1 + \alpha)^2 + N^2(3 + \alpha)^2}}{2N}.$$

Demonstração: Desde que $b_{n-1}^{(\alpha, \kappa, N)} > 0$, aplicações do resultado da parte B do Lema 4.2.1 na relação (4.3.10) leva à parte (1) deste teorema.

Agora, como $\kappa \geq 0$, então $\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]$ é positivo e, portanto, de (4.3.12), $b_0^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função crescente de N . Assim, de (4.3.11), $b_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função crescente de N para qualquer $n \geq 0$. Aplicando o resultado na parte C do Lema 4.2.1 temos a parte (2) do teorema.

Para obter a parte (3) deste teorema, note que $\{L_n^{(\alpha, \kappa, 0)}\}$ pode ser considerado como o polinômio ortogonal associado com a função peso $x^\alpha e^{-x}(x + \kappa)^{-1}$, definido em $[0, \infty]$. Portanto, o resultado segue da aplicação do Teorema de A. Markoff (Teorema 4.3.1).



Agora, vamos demonstrar a parte (4). De (4.3.12),

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha, \kappa, N)}}{\partial \kappa} = 1 + \frac{\mu_0^{(\alpha)}}{(N+1)\{\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]\}^2} \frac{\partial \mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]}{\partial \kappa}.$$

Portanto, para $\kappa \geq \epsilon > 0$, do Lema 4.3.4,

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha, \kappa, N)}}{\partial \kappa} = 1 - \frac{\mu_0^{(\alpha)}}{(N+1)\{\mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]\}^2} \int_0^\infty \frac{1}{(x+\kappa)^2} x^\alpha e^{-x} dx.$$

Assim,

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha, \kappa, N)}}{\partial \kappa} > 1 - \frac{\mu_0^{(\alpha)}}{(N+1)\kappa \mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]}.$$

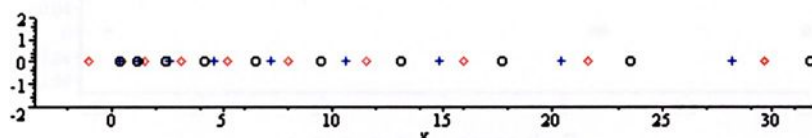
De (4.3.13), como $S_2^{(\alpha)}(-\kappa) < \frac{\kappa + \beta_1^{(\alpha)}}{\mu_0^{(\alpha)}} \mathcal{M}^{(\alpha, \kappa)}[1]$, temos então

$$\frac{\partial b_0^{(\alpha, \kappa, N)}}{\partial \kappa} > 1 - \frac{(\kappa + \beta_1^{(\alpha)})(\kappa + \beta_2^{(\alpha)}) - \alpha_2^{(\alpha)}}{(N+1)\kappa(\kappa + \beta_2^{(\alpha)})}.$$

Olhemos para os valores de κ tais que o lado direito da inequação acima é positivo e encontramos o intervalo $[\tilde{\kappa}^{(\alpha, N)}, \infty)$ em que isso vale. Então, nesse intervalo, $b_0^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função crescente de κ . Conseqüentemente, de (4.3.11), nesse intervalo $b_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ é uma função crescente de κ para qualquer $n \geq 0$. Assim, da parte C do Lema 4.2.1, segue a parte (4) do teorema. ■

Ilustração Numérica: Denotemos, $L_n^{(\alpha)} = P_n$, $L_{n-1}^{(\alpha)} = P_{n-1}$ e $L_n^{(\alpha, \kappa, N)} = K_n$. Tomemos $n = 10$, $\alpha = 1$.

(1) A Figura 4.5(a) mostra a localização de todas as raízes de $L_n^{(\alpha, \kappa, N)}$ em relação aos zeros de $L_n^{(\alpha)}$ e $L_{n-1}^{(\alpha)}$ com $N = 1$ e $\kappa = 1$. Em 4.5(b), ampliamos o intervalo em que aparecem as raízes n -ésimas.



(a)

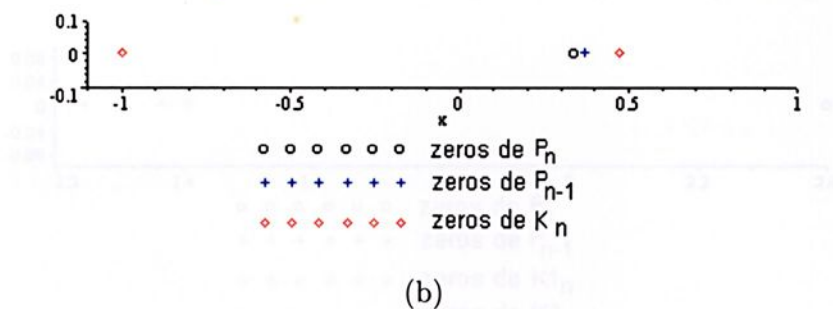


Figura 4.5: $n = 10$, $\alpha = 1$, $N = 1$, $\kappa = 1$

(2) Sob as mesmas condições anteriores, com $N_1 = 1$, $N_2 = 1.1$ e $N_3 = 1.2$, obtemos

$$x_{10,2}^{(1,1,1)} = 0.465909509911 \dots$$

$$x_{10,2}^{(1,1,1.1)} = 0.465908094421 \dots$$

$$x_{10,2}^{(1,1,1.2)} = 0.465906914855 \dots$$

Como as raízes estão muito próximas, não foi possível mostrá-las num gráfico através do software *Maple*®6. Porém, as informações acima ilustram o caracter decrescente em relação a N .

Sejam κ_1 , κ_2 e κ_3 relacionados aos polinômios K_{1n} , K_{2n} e K_{3n} respectivamente.

(3) Agora, fazendo $N = 0$, $\kappa_1 = 1$, $\kappa_2 = 1.1$ e $\kappa_3 = 1.2$, observemos que $x_{n,r}^{(\alpha,\kappa,N)}$, para r fixo, é uma função crescente de κ . (Figura 4.6)

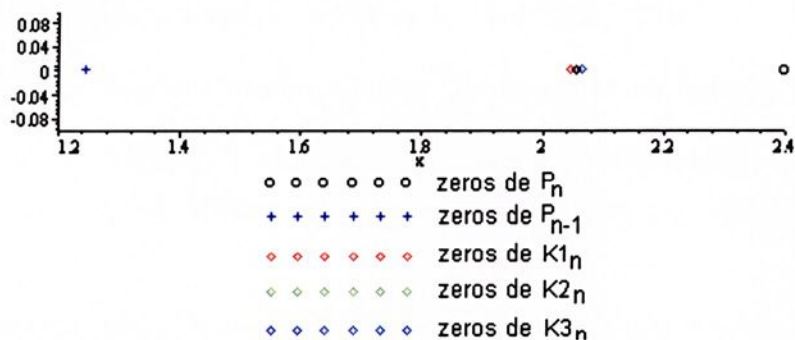


Figura 4.6

(4) Após alguns cálculos, encontramos $\tilde{\kappa}^{(1,1)} = 1,64575$ e, então, para $N = 1$, $\kappa_1 = 3$, $\kappa_2 = 4$ e $\kappa_3 = 5$, ilustramos o caracter decrescente de κ , para $\kappa \in [\tilde{\kappa}^{(1,1)}, \infty)$, na figura abaixo.

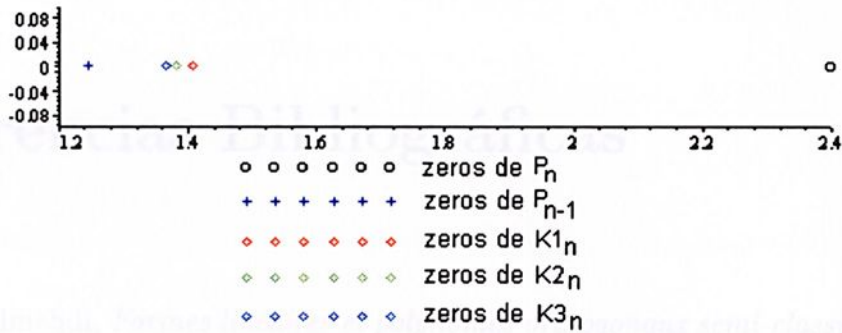


Figura 4.7



Referências Bibliográficas

- [1] S. Belmehdi, *Formes linéaires et polynômes orthogonaux semi-classiques de classe $s=1$. Description et classification*, Thèse d'Etat, Université P. et M. Curie, Paris, 1990.
- [2] A.C. Berti, C.F. Bracciali, A. Sri Ranga, Orthogonal polynomials associated with related measures and sobolev orthogonal polynomials, *Numerical Algorithms*, **34**, (2003) 203-216.
- [3] A.C. Berti, A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials: some applications, *Applied Numerical Mathematics*, **39** (2001) 127-149.
- [4] C.F. Bracciali, D.K. Dimitrov, A. Sri Ranga, Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **143**, (2002) 95-106.
- [5] C.F. Bracciali, A.P. da Silva, A. Sri Ranga, Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **153** (2003) 79-88.
- [6] T.S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Mathematics and its Applications series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [7] W.L. Ferrar, *Integral Calculus*, Oxford University Press, London, 1958.
- [8] H. Kiesel, J. Wimp, A note on Koornwinder's polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Numerical Algorithms* **11**, (1996) 229-241.
- [9] T.H. Koornwinder, Orthogonal polynomials with weight function $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$, *Canadian Mathematical Bulletin* **27** (1984) 205-214.
- [10] F. Marcellán and J. Petronilho, Orthogonal polynomials, and coherent pairs: the classical case, *Indagationes Mathematicae*, **6** (1995), 287-307.



- [11] P. Maroni, Sur la suite de polynômes orthogonaux associée à la forme $u = \delta_c + \lambda(x - c)^{-1}L$, *Periodica Mathematica Hungarica*, **21** (3) (1990), 223-248.
- [12] J. A. Shohat, J. B. Tamarkin, *The Problem of Moments*, Mathematical Surveys, American Math Society, Rhode Island, 1943.
- [13] A. Sri Ranga, Companion orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **75** (1996), 23-33.
- [14] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematics Society, Colloquium Publications, New York, Vol. 23, 1959.
- [15] H.S. Wall, *Analytic Theory of Continued Fractions*, The University Series in Higher Mathematics, Chelsea, Van Nostrand, New York, Vol. 01, 1948.
- [16] D.V. Widder, *Advanced Calculus*, Dover, New York, 1989.



