

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA  
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

**JOSELMA PINHEIRO GONÇALVES VICENTE**

**CONTROLE DE CAOS EM UM SISTEMA MECÂNICO COM PARÂMETROS  
INCERTOS**

Ilha Solteira  
2019

**JOSELMA PINHEIRO GONÇALVES VICENTE**

**CONTROLE DE CAOS EM UM SISTEMA MECÂNICO COM PARÂMETROS  
INCERTOS**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de doutorado em Engenharia Mecânica. Área do Conhecimento: Mecânica dos sólidos.

Prof. Dr. Fábio Roberto Chavarette  
**Orientador**

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

V632c Vicente, Joselma Pinheiro Gonçalves.  
Controle de caos em um sistema mecânico com parâmetros incertos /  
Joselma Pinheiro Gonçalves Vicente. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2020  
106 f. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia.  
Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2020

Orientador: Fábio Roberto Chavarette  
Inclui bibliografia

1. Teoria do caos. 2. Teoria de controle. 3. Sistemas não lineares.  
4. Sistemas não ideais.

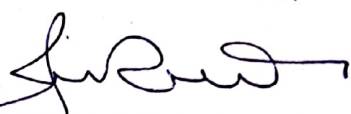
**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

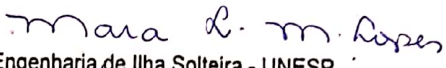
TÍTULO DA TESE: Controle de Caos em um Sistema Mecânico com Parâmetros Incertos

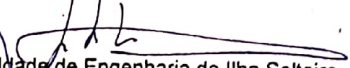
**AUTORA: JOSELMA PINHEIRO GONÇALVES VICENTE**

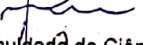
**ORIENTADOR: FABIO ROBERTO CHAVARETTE**

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em ENGENHARIA MECÂNICA, área: Mecânica dos Sólidos pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE   
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Profa. Dra. MARA LUCIA MARTINS LOPES   
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. APARECIDO CARLOS GONCALVES   
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. NELSON JOSÉ PERUZZI   
Departamento de Ciências Exatas / Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias de Jaboticabal - UNESP

Prof. Dr. DOUGLAS DA COSTA FERREIRA   
Câmpus Francisco Beltrão / Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

Ilha Solteira, 20 de dezembro de 2019

## **DEDICATÓRIA**

Aos meus familiares que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos da minha vida, não poupando esforços para que eu chegasse até aqui.

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por me conceder o dom da sabedoria e por me dar força necessária para enfrentar as dificuldades de minha missão neste mundo.

Ao professor Dr. Fábio Roberto Chavarette, que me acolheu e acreditou que eu seria capaz de fazer o doutorado. Gratidão infinita Chavarette. Jamais conquistaria esta vitória sem a sua ajuda. Você sempre esteve presente, me dando sua mão nos momentos cruciais desta jornada.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da UNESP de Ilha Solteira pela oportunidade, incentivo e cooperação científica.

Gratidão aos docentes prof. Dr. Márcio Antônio Bazani, Profa Dra. Mara Lucia Martins Lopes e Prof. Dr. Aparecido Carlos Gonçalves membros da Comissão Examinadora do meu Exame Geral de Qualificação de Doutorado

A Universidade Federal de Mato Grosso pelo apoio, me liberando das funções docentes para poder me dedicar a esse processo de qualificação.

Aos docentes do Departamento de Matemática – ICEN/UFMT pelo companheirismo e amizade.

Aos meus colegas do laboratório de Sistemas Complexos - SISPLEXOS pela ajuda e empenho nas dificuldades encontradas para o desenvolvimento desta tese.

Aos amigos Clayton Eduardo, Douglas Ferreira, Raildo, Lucas Zavonelo, Marco Travassos, Cazé e Daniela, pela ajuda durante este percurso.

Aos meus pais Adildo Pinheiro (in memorian) e Jacy Leite Pinheiro, pelos ensinamentos e luta para me proporcionar o direito de estudar.

A Antônio Gonçalves Vicente (in memorian) minha eterna gratidão.

A minha irmã Joelma Auxiliadora, que sempre foi uma segunda mãe para meus filhos na minha ausência.

Aos meus filhos Thaís e Thales Tatí, pelo amor e incentivo.

Aos meus netos Maria Luiza e Arthur, a quem pertence o futuro.

A Maurício Togni, pela disposição em sempre auxiliar e tornar minhas dificuldades do dia a dia mais leves.

As minhas professoras Dina Rosa de Oliveira e Neuza Ferrer Kojima minha eterna gratidão pelos ensinamentos.

As minhas tias Nely Leite e Erontina Leite Quixabeira, exemplos de luta na minha vida.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota”.

Madre Teresa de Calcutá.

## RESUMO

Nesta tese, apresenta-se um novo modelo de sistema não linear, autônomo, do tipo não ideal e com comportamento caótico, chamado sistema Não Ideal Mathieu-Vander Pol. A este sistema será acoplado uma fonte de excitação não ideal e considerando parâmetros incertos. O modelo físico é constituído de um motor de corrente contínua conectado com uma mola e um amortecedor ao plano fixo e acoplado com uma massa desbalanceada. Para suprimir o comportamento caótico e controlar o sistema é implementada a técnica de Controle Linear Ótimo. Os resultados das simulações demonstram a eficiência do Controle Linear Ótimo para estabilizar e minimizar o comportamento caótico dos modelos ideal e não ideal a um ponto estável.

**Palavras-chave:** Controle linear ótimo. Parâmetros incertos. Sistemas não ideais. Expoentes de Lyapunov.



## ABSTRACT

In this thesis, a new model of a non-linear, autonomous, non-ideal type with chaotic behavior is presented, called the Non Ideal Mathieu-Van der Pol system. This system will be accepted as a source of non-ideal excitation and considering uncertain values. The physical model consists of a direct current motor connected with a spring and a damper to the fixed plane and coupled with an unbalanced mass. In order to suppress chaotic behavior and control the system, the Optimal Linear Control technique is implemented. The results of the simulations demonstrate the efficiency of the Optimal Linear Control to stabilize and minimize the chaotic behavior of the ideal and non-ideal models at a stable point.

**Keywords:** Optimal linear control. Uncertain parameters. Non-ideal system. Lyapunov exponents.

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b>	- Estabilidade.....	25
<b>Figura 2</b>	- Mapa de Poincaré.....	28
<b>Figura 3</b>	- Diagrama da Estabilidade Estrutural $(x_1, x_2)$ .....	38
<b>Figura 4</b>	- Diagrama da Estabilidade Estrutural $(x_3, x_4)$ .....	39
<b>Figura 5</b>	- Dinâmica dos Expoentes de Lyapunov do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol.....	40
<b>Figura 6</b>	- Histórico no tempo do estado $x_1$ .....	41
<b>Figura 7</b>	- Zoom da figura 6 .....	41
<b>Figura 8</b>	- FFT do estado $x_1$ .....	42
<b>Figura 9</b>	- Histórico no tempo do estado $x_2$ .....	43
<b>Figura 10</b>	- Zoom da figura 9 .....	43
<b>Figura 11</b>	- FFT do estado $x_2$ .....	44
<b>Figura 12</b>	- Histórico no Tempo do estado $x_3$ .....	45
<b>Figura 13</b>	- Zoom da figura 12 .....	45
<b>Figura 14</b>	- FFT do estado $x_3$ .....	46
<b>Figura 15</b>	- Histórico no tempo do estado $x_4$ .....	47
<b>Figura 16</b>	- Zoom da figura 15 .....	47
<b>Figura 17</b>	- FFT do estado $x_4$ .....	48
<b>Figura 18</b>	- Plano de Fase dos estados $x_1$ e $x_2$ .....	49
<b>Figura 19</b>	- Plano de Fase dos estados $x_3$ e $x_4$ .....	49
<b>Figura 20</b>	- Motor Não Ideal - MNI.....	52
<b>Figura 21</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_1$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.....	56
<b>Figura 22</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_2$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos .....	57
<b>Figura 23</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_3$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos .....	57
<b>Figura 24</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_4$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.....	58
<b>Figura 25</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_5$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.....	58
<b>Figura 26</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_6$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.....	59
<b>Figura 27</b>	- Plano Fase dos estados $x_1$ e $x_2$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos .....	59
<b>Figura 28</b>	- Plano Fase dos estados $x_3$ e $x_4$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.....	60
<b>Figura 29</b>	- Plano Fase dos estados $x_5$ e $x_6$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.....	60
<b>Figura 30</b>	- Dinâmica dos Expoentes de Lyapunov do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol.....	62
<b>Figura 31</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_1$ do modelo	64

	Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	
<b>Figura 32</b>	- Zoom da figura 31.....	65
<b>Figura 33</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_2$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	66
<b>Figura 34</b>	- Zoom da figura 33.....	66
<b>Figura 35</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_3$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	67
<b>Figura 36</b>	- Zoom da figura 35.....	68
<b>Figura 37</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_4$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	69
<b>Figura 38</b>	- Zoom da figura 37.....	69
<b>Figura 39</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_5$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	70
<b>Figura 40</b>	- Zoom da figura 39.....	71
<b>Figura 41</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_6$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	72
<b>Figura 42</b>	- Zoom da figura 41.....	72
<b>Figura 43</b>	- Plano Fase dos estados $x_1$ e $x_2$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	73
<b>Figura 44</b>	- Zoom da figura 43.....	74
<b>Figura 45</b>	- Plano Fase dos estados $x_3$ e $x_4$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	74
<b>Figura 46</b>	- Plano Fase dos estados $x_5$ e $x_6$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.....	75
<b>Figura 47</b>	- Zoom da figura 46.....	75
<b>Figura 48</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_1$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado .....	85
<b>Figura 49</b>	- Zoom da figura 48 .....	85
<b>Figura 50</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_2$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.....	86
<b>Figura 51</b>	- Zoom da figura 50.....	87
<b>Figura 52</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_3$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.....	88
<b>Figura 53</b>	- Zoom da figura 52 .....	88

<b>Figura 54</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_4$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.....	89
<b>Figura 55</b>	Zoom da figura 54.....	90
<b>Figura 56</b>	- Plano de Fase dos estados $x_1$ e $x_2$ do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol.....	90
<b>Figura 57</b>	- Plano de Fase dos estados $x_3$ e $x_4$ do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol.....	91
<b>Figura 58</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_1$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	92
<b>Figura 59</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_2$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol ccom parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	93
<b>Figura 60</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_3$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	94
<b>Figura 61</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_4$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol ccom parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	95
<b>Figura 62</b>	- Histórico no Tempo: Deslocamento do estado $x_5$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol ccom parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	96
<b>Figura 63</b>	- Histórico no Tempo: Velocidade do estado $x_6$ do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol ccom parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	97
<b>Figura 64</b>	- Plano de Fase dos estados $x_1$ e $x_2$ com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado .....	98
<b>Figura 65</b>	- Plano de Fase dos estados $x_3$ e $x_4$ com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.....	98
<b>Figura 66</b>	- Plano de Fase dos estados $x_5$ e $x_6$ com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado .....	99

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b>	- Parâmetros adimensionais do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol.....	37
<b>Tabela 2</b>	- Estados do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol .....	38
<b>Tabela 3</b>	- Expoentes de Lyapunov do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol...	40
<b>Tabela 4</b>	- Parâmetros da Simulação para excitação do Modelo Não Ideal...	56
<b>Tabela 5</b>	- Expoentes de Lyapunov do Sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol .....	61
<b>Tabela 6</b>	- Parâmetros do Sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol.....	63
<b>Tabela 7</b>	- Parâmetros da Fonte Não Ideal.....	63

## LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

FFT	Transformada Rápida de Fourier
OLC	Optimal Linear Control – Controle Linear Ótimo
ARE	Algebraic Riccati Equation
CC	Corrente Contínua
DC	Direct Current
$\mathbb{R}^n$	Conjunto das $n$ -uplas ordenadas de Números Reais
MNI	Motor Não Ideal

## LISTA DE SÍMBOLOS

$m_1$	Massa do motor não ideal
$m_0$	Massa desbalanceada que gira ligado ao centro do motor
$c$	Coeficiente de amortecimento linear
$v$	Velocidade da massa desbalanceada
$k$	Coeficiente de elasticidade linear do motor
$r$	Distância da massa desbalanceada ao centro do eixo do motor
$X$	Deslocamento angular da massa desbalanceada em torno do eixo do motor
$J$	Momento de inércia da massa do eixo do motor
$I$	Momento de inércia da massa desbalanceada
$A$	Matriz de estados
$B$	Matriz constante do tipo $n \times m$ .
$Q, R$	Matrizes constantes, definidas positivas
$D$	Matriz limitada
$J_1$	Matriz jacobiana
$U$	Vetor da função controle
$x$	Vetor de estados
$x_i$	Vetor de controle
$\dot{x}$	Derivada primeira de $x$
$\tilde{u}$	Vetor de controle Feedforward
$u_t$	Vetor de controle Feedback
$\tilde{x}$	Trajetoária desejada
$y$	Desvio da trajetória
$z$	Posição angular adimensional de uma resposta de excitação não ideal
$t$	Tempo
$\omega$	Frequência natural
$\tau$	Tempo adimensional
$p, q$	Constante de torque do motor
$\lambda_i$	Expoentes de Lyapunov
$\varphi$	Posição Angular da Massa Desbalanceada
$\Sigma$	Seção de Poincaré

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
1.1	CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA .....	21
1.2	OBJETIVOS .....	21
<b>1.2.1</b>	<b>Objetivos gerais.....</b>	<b>21</b>
<b>1.2.2</b>	<b>Objetivos específicos.....</b>	<b>21</b>
1.3	METODOLOGIA .....	22
1.4	DELIMITAÇÃO DA PESQUISA .....	22
1.5	ESTRUTURA DA TESE .....	22
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>24</b>
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS .....	24
2.2	MAPAS DE POINCARÉ .....	27
2.3	CAOS .....	28
2.4	EXPOENTES DE LYAPUNOV .....	29
2.5	MÉTODO DE WOLF.....	31
2.6	CONTROLE DE CAOS.....	32
<b>3</b>	<b>SISTEMA IDEAL MATHIEU-VAN DER POL.....</b>	<b>34</b>
3.1	EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DOS SISTEMAS MATHIEU E DE VAN DER POL .....	34
<b>3.1.1</b>	<b>Equação de Mathieu .....</b>	<b>34</b>
<b>3.1.2</b>	<b>Equação de van der pol .....</b>	<b>34</b>
<b>3.1.3</b>	<b>Equações na forma de estado dos sistemas Mathieu e de van der pol.....</b>	<b>35</b>
3.2	PONTO DE EQUILÍBRIO MODELO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL .....	36
3.3	SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....	37
<b>4</b>	<b>SISTEMA NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL .....</b>	<b>51</b>
4.1	SISTEMA NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL.....	51
4.2	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL COM PARÂMETROS FIXOS .....	55

4.3	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL PARA OS MODELOS COM PARÂMETROS FIXOS E COM PARÂMETROS INCERTOS.....	62
<b>5</b>	<b>CONTROLE LINEAR ÓTIMO APLICADO AO MODELO IDEAL E NÃO IDEAL.....</b>	<b>77</b>
5.1	CONTROLE LINEAR ÓTIMO.....	77
5.2	PROJETO DE CONTROLE LINEAR ÓTIMO APLICADO AO MODELO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL.....	80
5.3	PROJETO DE CONTROLE LINEAR ÓTIMO APLICADO AO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL.....	81
<b>6</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>84</b>
6.1	RESULTADOS DO MODELO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL.....	84
6.2	RESULTADOS DO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL .....	91
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO.....</b>	<b>100</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE A – PUBLICAÇÕES.....</b>	<b>106</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Em 1963, Eduard Norton Lorenz, meteorologista, matemático e filósofo do Instituto Tecnológico de Massachussets (do inglês - *Massachussets Institute of Technology* - MIT), realizando pesquisas na área de previsão numérica do tempo, reduziu de seis para três casas decimais nos valores que alimentava seu computador, imaginando-se que com tais mudanças nas condições iniciais as alterações não seriam relevantes. O resultado surpreendeu Lorenz, os gráficos foram gerados com comportamento completamente distintos dos padrões já então obtidos. Evidenciando-se, a enorme sensibilidade do sistema estudado às condições iniciais, o que pôs em dúvida o princípio de causa e efeito, pelo qual estes dois eventos seriam dependentes em magnitude. Entretanto, como o sistema da pesquisa de Lorenz era não linear, mostrou-se que pequenas causas poderiam gerar grandes efeitos, independentes do espaço e do tempo.

Em 1972, Lorenz participa da 139ª reunião da American Association for the Advancement of Science e ministra uma palestra com o título “Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?” (o bater das asas de uma borboleta no Brasil pode ocasionar um tornado no Texas?). Tal fenômeno é conhecido por “Efeito Borboleta”, expressão que é utilizada para representar o efeito que pequenas alterações podem ter sobre o comportamento futuro dos sistemas.

As consequências teóricas desse trabalho foram compreendidas anos após 1960 com o desenvolvimento da Teoria do Caos pelo físico James Yorke, a partir da teoria dos grupos de Galois (KORSCH *et al.*, 2008).

Segundo Ge e Yang (1999) a teoria do caos, alterou a maneira científica de se observar a dinâmica dos sistemas naturais não lineares e sociais, e tem sido amplamente estudada ao longo das últimas décadas, por engenheiros, matemáticos e físicos. O grande interesse pela teoria do caos se baseia no fato de que fenômenos caóticos são bastante úteis em aplicações tais como mistura de fluidos, dinâmica do cérebro humano e regulação do batimento cardíaco, processamento de informações, dentre outras (GE; YI, 2007).

O caos representa a imprevisibilidade de sistemas dinâmicos complexos, não significa desordem, pelo contrário a teoria do caos tem como propósito provar que existe alguma lógica por trás do suposto acaso.

Na literatura destacam-se muitos sistemas com comportamentos caóticos, porém os mais famosos são os sistemas de Lorenz, Duffing e Rössler (GE; YANG, 1999). Os sistemas de Van der Pol e Mathieu são também sistemas caóticos, com aplicações importantes na física, engenharia e biologia. A equação do matemático francês Émile Léonard Mathieu, ou simplesmente, equação de Mathieu é uma equação diferencial linear com coeficientes periódicos e, se tornou conhecida em 1868, quando Mathieu estudava a vibração das membranas elípticas. Já a equação do físico holandês Balthazar Van der Pol, conhecida por equação de Van der Pol foi sugerida em 1922, para modelar o funcionamento de um circuito elétrico que existia nos primeiros aparelhos de rádio (MONTEIRO, 2006).

Dentre as características dos sistemas caóticos destaca-se a sensibilidade às condições iniciais, que significa que a evolução no tempo do sistema pode ser alterada por pequenas perturbações e a imprevisibilidade, isto é, a impossibilidade de se prever a evolução posterior do sistema, mesmo conhecendo o estado dele durante um longo intervalo de tempo (KORSCH *et al.*, 2008).

A priori, pode-se afirmar que uma resposta caótica pode ser compreendida a partir de uma série de transformações do tipo contração-expansão-dobra e dentre as ferramentas empregadas para caracterizar o caos se destaca os expoentes de Lyapunov, que é um dos invariantes geométricos do sistema, sendo inclusive utilizado para avaliar outros invariantes (SAVI, 2017).

Em virtude do evento caótico que pode acontecer no processo de desenvolvimento de um projeto, a alternativa é buscar minimizar esse estado de desordem, ou seja, gerenciar o caos inerente ao sistema, averiguando as fraquezas que se manifestam de forma inesperada, de modo a não prejudicar a fase de produção. Atualmente a Engenharia do Caos contribui para fazer tais experimentos na infraestrutura para apontar as fraquezas do sistema, antes que elas se apresentem.

Os pesquisadores Ott, Grebogi e Yorque (1990) apresentaram um método para eliminar comportamento caótico, forçando o sistema dinâmico a trilhar uma determinada órbita periódica. Controlar sistemas caóticos tem sido de grande interesse na engenharia mecânica e significa projetar leis de controle de feedback de estado que estabiliza o sistema caótico em torno dos pontos de equilíbrio instáveis. Muitas técnicas de controle podem ser usadas para se controlar um sistema e cada técnica dispõe de peculiaridades e resultados distintos,

principalmente na prática. Para estabilizar sistemas caóticos, foi utilizado, em vários trabalhos, o controle linear realimentado (RAFIKOV; BALTAZHAR, 2008; CHAVARETTE; BALTHAZAR; FELIX, 2010; CHAVARETTE, 2013a). Nesta tese aplicamos a metodologia do Controle Linear Ótimo (do inglês - *Optimal Linear Control* - OLC) proposta por Rafikov e Balthazar (2008) que garante a aplicação do controle linear em sistemas não lineares. Dentre as principais características do Controle Linear Ótimo, destaca-se a utilização do modelo de representação em espaço de estado, a obtenção do sinais de controle ótimo por meio da resolução da Equação de Riccati (do inglês, *Algebraic Riccati Equation* - ARE) e da função-objetivo parametrizada pelas matrizes  $Q$  e  $R$  de modo a ponderar os vetores de estado e controle, respectivamente (RAFIKOV; BALTAZHAR, 2008).

A grande contribuição da modelagem matemática é representar aspectos importantes do sistema dinâmico, com a finalidade de formular equações que representem seu comportamento. Conseqüentemente, um modelo matemático é considerado bom quando contém a maior quantidade possível de informações que descreva o sistema, sem torná-lo complexo além do necessário para cada análise de interesse.

De acordo com Tusset *et al.* (2015) o projeto de controle é, em geral, embasado nos parâmetros do modelo matemático obtido a partir das leis físicas que descrevem o comportamento do sistema dinâmico. Entretanto, devido às limitações do conhecimento do processo, os modelos utilizados não representam, com exatidão, a dinâmica do sistema. Assim sendo, o projeto de controle não pode operar como desejado, quando aplicado em processo real, já que os parâmetros usados no controle podem conter erros paramétricos. E dentre as formas de solucionar este tipo de problema é incorporar as incertezas associadas as estruturas reais em simulação numérica para garantir confiança nos resultados. As incertezas paramétricas estão associadas às discrepâncias entre os valores dos sistemas físicos reais e os parâmetros de entrada usados para a análise.

O estudo de sistemas dinâmicos modelados matematicamente, especialmente os modelos de sistemas não ideais é justificado pela relevância que exerce no desenvolvimento das ciências, dentre elas a Engenharia. E, pesquisadores renomados como Kononenko (1969), Nayfeh (1979) e Balthazar *et al.* (2003) veem publicando ao longo dos últimos anos artigos que retratam a dinâmica

do comportamento de modelos não ideais e suas aplicações em diversas áreas (CHAVARETTE, 2013a, 2013b).

Um sistema dinâmico é chamado de ideal quando a excitação não influencia a resposta do sistema, isto é, a excitação ideal tem uma fonte de energia ideal (BELATO *et al.*, 2001; TSUCHIDA; GUILHERME; BALTHAZAR, 2005; PICCIRILLO *et al.*, 2008; CHAVARETTE, 2010; CHAVARETTE; BALTHAZAR; FELIX, 2010). Quando a excitação é influenciada pela resposta do sistema, diz-se que a excitação não é ideal (CHAVARETTE *et al.*, 2011), ou seja, são os sistemas alimentados por fontes de energia não ideais. E fontes de energia não ideais são aquelas com limitado suprimento de potência e são influenciadas pelo objeto que está sendo excitado (SOUZA *et al.*, 2008).

Em outras palavras, define-se que os sistemas dinâmicos, modelados matematicamente, como sendo não ideais, possuem um grau de liberdade<sup>1</sup> (ou mais dependendo do número de motores presentes no sistema) superior ao sistema ideal correspondente.

Os sistemas ideais e não ideais apresentam características que os diferenciam, a primeira delas é que o sistema não ideal apresenta uma equação que descreve a interação da fonte de energia com o sistema dinâmico ideal e a segunda característica é observada que a dinâmica de um sistema não ideal se aproxima do caso ideal quando a fornecida potência aumenta (BALTHAZAR *et al.*, 2013).

No processo de modelagem matemática muitas vezes desconsidera-se a influência do movimento do próprio sistema em seu estado de excitação, porém sendo a excitação influenciada pela própria resposta do sistema, em algumas situações esta simplificação no modelo matemático, não é admissível (FELICIO, 2010). Esta particularidade do sistema com a sua fonte de energia torna a dinâmica dos sistemas não ideais bastante complexa com o aparecimento de alguns fenômenos, principalmente perto da região de ressonância, a saber, aumento da potência exigida pela fonte, fenômeno de salto e caos. Os dois primeiros fenômenos são manifestações de um efeito evidenciado pelo físico alemão Sommerfeld (1904), sendo o primeiro a observar que a velocidade do motor é função do tempo, mas da amplitude de oscilação também. Portanto, denominado em sua homenagem, de

---

<sup>1</sup> Grau de liberdade é o número de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante.

Efeito Sommerfeld. Já a ocorrência do caos nos sistemas não ideais está associada, tanto a presença de termos não lineares quanto à presença de pontos de bifurcação e surgimento de regiões de instabilidade e regimes não estacionários na região de ressonância (ORBOLATO; OKABAYASHI; BRASIL, 2007).

## 1.1 CONTRIBUIÇÃO CIENTÍFICA

A contribuição relevante desta tese é que através dos resultados obtidos, estes podem ser utilizados em pesquisas futuras em projetos de produtos tecnológicos avançados, como na fabricação de veículos elétricos e autônomos no setor automotivo.

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivos gerais

- Propor um novo modelo para o sistema Mathieu-Van der Pol acoplado a uma fonte com desbalanceamento rotativo e considerando parâmetros incertos;
- Implementar a técnica do Controle Linear Ótimo ao modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol ainda não abordada na literatura.

### 1.2.2 Objetivos específicos

- Modelar o Sistema Ideal Mathieu-Van der Pol tornando-o um sistema do tipo Não Ideal;
- Aplicar a técnica do Controle Linear Ótimo para controlar o sistema;
- Realizar uma análise considerando as incertezas sobre a variação dos parâmetros no modelo proposto, para testar a robustez do controlador na supressão do comportamento caótico;
- Por meio do uso de simulações numéricas, utilizando o software Octave, verificar a eficiência do modelo proposto;
- Tornar os parâmetros do modelo em parâmetros incertos;
- Analisar o comportamento dinâmico do sistema sujeito a fonte não ideal em comparação com o modelo ideal.

### 1.3 METODOLOGIA

A metodologia desta tese, resumem-se a:

justificar o comportamento dinâmico do sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol, que será exibido nos próximos capítulos através do Plano de Fase, utilizando-se as técnicas da análise dinâmica não linear: Espectro de Frequência (FFT), Mapa de Poincaré e Expoentes de Lyapunov. As simulações são implementadas no software Octave, através do integrador numérico Runge-Kutta<sup>2</sup> de 4ª ordem.

### 1.4 DELIMITAÇÃO DA PESQUISA

Esta pesquisa se baseia na modelagem matemática, simulação computacional e controle do sistema Não Ideal de Mathieu-Van der Pol e a verificação da eficiência do sistema controlado. Não serão abordados resultados experimentais.

### 1.5 ESTRUTURA DA TESE

Esta tese está organizada em seis Capítulos, conforme descrito a seguir:

#### **Capítulo 1: Introdução**

No primeiro capítulo apresenta-se as motivações, contribuição científica, objetivos gerais e específicos, proposta, delimitação da pesquisa e estrutura da tese.

#### **Capítulo 2: Revisão Bibliográfica**

No segundo capítulo realiza-se uma revisão bibliográfica de conceitos de Sistemas Dinâmicos, Mapa de Poincaré, Caos, Expoentes de Lyapunov, Método de Wolf e Controle de Caos.

---

<sup>2</sup> O método de Runge Kutta de 4ª ordem faz parte da família de métodos iterativos e explícitos para a resolução numérica (aproximação) de soluções de equações diferenciais ordinárias. É dito de quarta ordem pois o termo que representa o erro por passo é de ordem quatro mais um, enquanto o erro total acumulado tem ordem 4.

### **Capítulo 3: Modelo Mathieu-Van der Pol**

No terceiro capítulo apresenta-se um estudo do comportamento e simulações da dinâmica do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol.

### **Capítulo 4: Modelo Não Ideal**

No quarto capítulo realiza-se a modelagem matemática do modelo Não Ideal, a partir do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol.

### **Capítulo 5: Controle Linear Ótimo**

No quinto capítulo apresenta-se a implementação da técnica do controle Linear Ótimo e os projetos de controle linear ótimo para os modelos Ideal e Não Ideal Mathieu-Van der Pol.

### **Capítulo 6: Resultados e Discussão**

No sexto capítulo destaca-se os resultados obtidos através das simulações numéricas dos modelos ideal e não ideal.

### **Capítulo 7: Conclusão**

No sétimo capítulo destaca-se as conclusões sobre o estudo realizado e as publicações decorrentes desse trabalho.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo é abordado uma visão geral dos conteúdos necessários para a compreensão desta tese.

### 2.1 SISTEMAS DINÂMICOS

De acordo com Savi (2017) um sistema dinâmico é uma descrição quadro a quadro da realidade. Um quadro é uma representação do estado do sistema que significa a quantidade de informação necessária para a descrição de um determinado fenômeno em um instante. O estado de um sistema é definido por variáveis de estado e sua evolução no tempo é governada por uma equação de movimento.

Matematicamente, um sistema dinâmico pode ser representado por um sistema de equações diferenciais ordinárias que evolui no tempo e pode ser expresso na forma:

$$\dot{x} = F(x), x \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

A equação (1) estabelece que  $F$  atua sobre as variáveis de estado  $x$ , definindo o próximo instante de tempo (SAVI, 2017).

As soluções de um sistema dinâmico são representadas por curvas num espaço  $n$ -dimensional, sendo  $n$  a dimensão do sistema. Tais curvas são chamadas de trajetórias e o espaço é chamado de espaço de estados, ou espaço de fases, que é o espaço abstrato no qual se realiza o estudo qualitativo de um sistema dinâmico. Investigando o espaço de estados é possível obter informações sobre as soluções do sistema. A solução do sistema é sempre um ponto fixo ou ponto de equilíbrio, que pode ser um atrator<sup>3</sup> (ou poço), um repulsor<sup>4</sup> (ou fonte) ou um ponto de sela, quando se trata de sistemas dinâmicos unidimensionais. Do ponto de vista mecânico, um

---

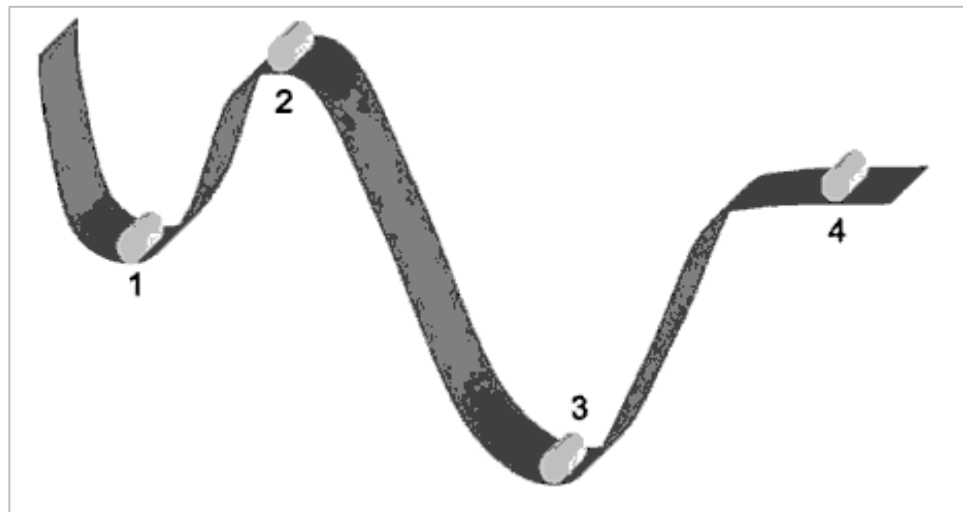
<sup>3</sup> Um ponto fixo é um atrator se todas as trajetórias do sistema são atraídas para ele.

<sup>4</sup> Um ponto fixo é um repulsor se todas as trajetórias são repelidas para longe dele.

ponto de equilíbrio está associado a uma posição onde o sistema possui velocidade e aceleração nulas (sistema em repouso). Para sistemas bidimensionais, além dos pontos fixos, temos um outro tipo de solução que são os ciclos limites. Este tipo de comportamento é representado por trajetórias fechadas e isoladas que podem aparecer no retrato de fases<sup>5</sup>. Classifica-se ciclo limite como assintoticamente estável quando as trajetórias vizinhas internas e externas se aproximam. Caso as trajetórias vizinhas se afastam, o ciclo limite é instável e, se, as trajetórias se aproximam por um lado, mas se afastam pelo outro, o ciclo limite é dito de semi-estável (MONTEIRO, 2006).

Em sistemas dinâmicos o conceito de estabilidade é importante, visto que, a estabilidade está associada a característica de uma dada solução do sistema. De modo intuitivo, pode-se entendê-la em termos de como o sistema responde a uma determinada perturbação. Caso a perturbação não afete de maneira significativa uma dada solução, a mesma é denominada estável, caso contrário ela é chamada de instável. A figura 1, ilustra o conceito de estabilidade com algumas situações de movimento do corpo, justificadas a seguir (SAVI, 2017).

Figura 1 - Estabilidade



Fonte: Savi (2017).

Na situação (1) o equilíbrio é meta estável e significa que após uma pequena perturbação, o corpo retorna à configuração inicial. Já na situação (2) o equilíbrio é

<sup>5</sup> Retrato de fases é o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais nas quais as funções que definem o campo de velocidades desse sistema são definidas.

instável e implica que após a perturbação, o corpo não retorna à configuração inicial, assumindo uma nova posição distante da original. Em (3) o equilíbrio é estável mostrando que após uma perturbação, o corpo retorna à configuração inicial. E, finalmente, na situação (4) o equilíbrio é neutro ou indiferente, ou seja, após uma perturbação, o corpo tende a permanecer na sua nova configuração (SAVI, 2017).

A estabilidade de pontos fixos e ciclos limites pode mudar de acordo com os parâmetros adotados no sistema e, o procedimento de linearização é usado para avaliar a estabilidade de uma dada solução.

Quando se trata de sistemas dinâmicos com duas dimensões ou mais, outro tipo de comportamento das soluções pode ocorrer, e tal comportamento é conhecido como caótico. Mais adiante, teremos uma seção dedicada a este tipo de comportamento.

Os sistemas dinâmicos podem ser classificados segundo sua evolução no tempo como contínuos, descrito por equações diferenciais, e discretos, representado por mapas. Por determinísticos quando os estados se desenvolvem a partir dos estados anteriores, de acordo com uma determinada lei preestabelecida e, estocástico se suas variáveis são aleatórias.

Quanto ao tipo de modelo, um sistema dinâmico pode ser linear ou não linear. Para sistemas lineares, valem o princípio da aditividade e o princípio da proporcionalidade entre excitação e resposta, que também é conhecido por princípio da homogeneidade. A linearidade pressupõe o princípio da superposição de efeitos, quando é admissível avaliar isoladamente os efeitos decorrentes de várias causas e, então, somá-los para obter o efeito resultante. Já as não linearidades de um modo geral podem ser geométricas ou físicas. As geométricas estão associadas ao movimento, e as físicas ao comportamento do sistema (SAVI, 2017). Em outras palavras, as não linearidades têm a capacidade de amplificar exponencialmente pequenas diferenças nas condições iniciais, o que nos permite encontrar o chamado caos determinístico. Dessa maneira, as próprias leis de evolução podem levar a comportamentos aperiódicos, inclusive na ausência de perturbações de natureza estocástica, tais como ruído ou flutuações externas.

Em sistemas não lineares, em geral não é possível obter soluções analíticas. Assim, torna-se necessário um estudo qualitativo do sistema dinâmico o qual se dedica em identificar características relevantes de suas soluções sem propriamente resolver as equações. Para um estudo qualitativo dos sistemas dinâmicos não

lineares pode-se recorrer à construção do seu espaço de fase, o qual ilustra como o sistema evolui à medida que o tempo passa, tornando viável identificar as principais características das soluções.

Diz-se que um sistema é autônomo, quando ele não depende explicitamente do tempo. Caso contrário, o sistema é dito não autônomo, ou seja, quando existe uma dependência explícita do tempo (MONTEIRO, 2006).

## 2.2 MAPAS DE POINCARÉ

Entende-se por mapa uma representação visual de uma região e, em geral, são representações bidimensionais de um espaço tridimensional.

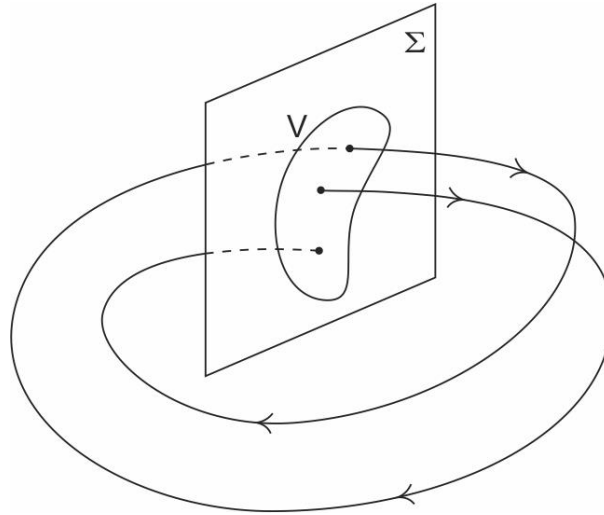
O mapa de Poincaré é um subespaço do espaço de estado que representa uma redução do sistema original, contínuo no tempo (fluxo), em um discreto (mapa). Em outras palavras, o mapa de Poincaré é uma ferramenta que reduz o estudo de um fluxo contínuo num espaço de fases de dimensão  $n$  para o estudo de um mapa num espaço de fases com dimensão  $n-1$ . A seção e o mapa de Poincaré possibilitam distinguir entre movimentos quase periódicos, periódicos e caóticos. Na maioria dos casos, o uso da seção de Poincaré é limitado aos sistemas cujo comportamento assintótico é restrito a um espaço  $n$ -dimensional, tipicamente  $n \leq 3$ . Para  $n > 3$ , usualmente usa-se projeções bidimensionais ou tridimensionais da seção de Poincaré para verificar se um movimento é caótico.

A construção do mapa de Poincaré consiste em definir uma superfície  $\Sigma$  (seção de Poincaré), de dimensão  $n-1$ , transversa ao campo vetorial em um ponto  $x$  e definir uma aplicação  $P$  de  $W$  em  $\Sigma$ , que leva  $x$  pertencente a  $W$  em  $\sigma(x, \delta(x))$ , onde  $\delta$  é o tempo do primeiro retorno de  $x$  a  $\Sigma$ , e  $W$  é um conjunto de pontos (SAVI, 2017).

Em situações experimentais, a construção da seção de Poincaré é complexa, já que, não existe um completo conhecimento anterior do espaço de estados associado ao sistema, neste caso, pode-se usar técnicas de interpolação para a construção da seção de Poincaré.

A figura 2 ilustra uma seção de Poincaré construída para um movimento com período fundamental  $T$ .

Figura 2 - Mapa de Poincaré



Fonte: Wiggins (2003).

### 2.3 CAOS

O caos visto sob o prisma da inclusão a sensibilidade às condições iniciais, imprevisibilidade de longo prazo, entropia, expoentes de Lyapunov, dentre outros aspectos, desenvolveu-se de forma significativa a partir do final dos anos 60. Porém, anos após, pesquisadores e cientistas perceberam que a irregularidade dos sistemas aparecia em basicamente tudo, desde a cotação da bolsa de valores, ataques epilépticos, ritmo dos batimentos cardíacos e até as mudanças climáticas. Fatos que impulsionaram de forma exponencial o número de publicações sobre sistemas com comportamento caótico (KORSCH *et al.*, 2008).

Estudar o caos se resume a identificar situações sob as quais pode-se evitá-lo ou preservá-lo sob determinadas condições, estabilizá-lo ou controlá-lo.

Para verificar se um sistema apresenta comportamento caótico basta avaliar como se comporta face a pequenas variações nas condições iniciais. Se, para pequenas variações nas condições iniciais ao fim de um tempo o estado do sistema afasta-se exponencialmente no tempo, na métrica do espaço de fases, então o sistema tem sensibilidade às condições iniciais. O sistema caótico mais simples é o

modelo conhecido por transformação de pasteleiro ou ferradura de Smale e um outro exemplo clássico é o atrator estranho de Lorenz (KORSCH *et al.*, 2008).

O comportamento caótico representa uma das mais importantes características dos sistemas não lineares e dentre suas propriedades fundamentais é a dependência sensível à condição inicial, ou seja, condições iniciais muito próximas geram trajetórias inicialmente próximas que, após um certo tempo, passam a apresentar comportamentos completamente divergentes entre si. Gerando a impossibilidade de se fazer previsões de longa duração baseadas em modelos matemáticos quando se tem um sistema caótico.

Sistemas caóticos também pode possuir atratores<sup>6</sup>, e uma das maneiras de se visualizar esses atratores caóticos é por meio do mapa de Poincaré, onde observa-se uma coleção de pontos dispostos de uma maneira organizada. Por outro lado, os atratores, diferentes dos pontos fixos e ciclos limites, são conhecidos como atratores estranhos, ou seja, apresenta uma estrutura fractal, que por sua vez se identifica com a do tipo conjunto de Cantor (SAVI, 2017).

Define-se fractais como conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada, apresentando essencialmente o mesmo padrão em todas as escalas. A existência de uma estrutura fractal no sistema dinâmico é uma condição necessária, porém não suficiente, para a existência de caos.

## 2.4 EXPOENTES DE LYAPUNOV

Nesta seção, direciona-se a atenção aos expoentes de Lyapunov de um sistema dinâmico, que recebe este nome em homenagem ao físico e matemático russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. Os expoentes de Lyapunov representam um método de medida do afastamento entre dos pontos iniciais considerando que a taxa de aumento da distância entre eles seja exponencial (BAKER; GOLLUB, 1996). A seguir apresenta-se os passos para a expressão dos expoentes de Lyapunov.

Seja um sistema de  $n$  equações diferenciais ordinárias. Considere uma hiper-esfera de condições iniciais centrada num ponto  $\vec{x}(t_0)$ . A medida que o tempo passa, esse volume deforma. Assuma que, ao longo da  $j$ -ésima dimensão ( $j = 1, \dots, n$ ), o

---

<sup>6</sup> Atrator é definido como sendo o comportamento que um sistema dinâmico que independe do ponto de partida, tende a convergir para um ponto.

raio inicial  $\delta_j(t_0)$  tenha variado exponencialmente no tempo, de modo que a relação entre  $\delta_j(t_0)$  e o valor correspondente no instante  $t$ , definido por  $\delta_j(t)$ , valha:

$$\delta_j(t) = \delta_j(t_0) \exp^{\lambda_j(t-t_0)} \quad \text{com} \quad j = 1, \dots, n.$$

Reescrevendo a relação tem-se:

$$\lambda_j = \frac{\ln[\delta_j(t)/\delta_j(t_0)]}{t - t_0}$$

Os números  $\lambda_j$  são chamados de expoentes de Lyapunov (MONTEIRO, 2006).

O significado destes expoentes está associado à previsibilidade de um sistema, sendo o maior expoente responsável por quantificar a sensibilidade às condições iniciais, verificando a divergência exponencial no tempo de trajetórias vizinhas. Os sinais dos expoentes definem as características de divergência ou convergência entre as órbitas (SAVI, 2017). Um expoente negativo implica que as órbitas tendem assintoticamente a um ponto fixo comum, isto é, expoentes de Lyapunov com valores negativos indicam a estabilidade. Um expoente zero corresponde a um eixo ao longo do qual a distância entre as trajetórias permanece constante ou aumenta a uma taxa menor que a exponencial. Por este fato o expoente zero é às vezes chamado de marginalmente estável<sup>7</sup> (KORSCH *et al.*, 2008). Em outras palavras, a presença do expoente zero indica que as órbitas mantêm suas posições relativas, ou seja, elas estão sobre um atrator estável (órbita periódica).

Finalmente, um expoente positivo implica que as órbitas estão sobre um atrator caótico, ou seja, mede ou quantifica a dependência sensível das condições iniciais mostrando a taxa média, avaliada sobre todo o atrator, na qual dois pontos próximos se separam com o tempo (KORSCH *et al.*, 2008). Porém, dois expoentes positivos de Lyapunov confirmam a natureza hiper caótica de sua dinâmica.

Teoricamente, podem existir tantos expoentes de Lyapunov quanto o número de dimensões associadas ao espaço de fases (TSONIS, 1992; CHERIF, 2011). Um caso unidimensional fornece apenas um expoente. Outra característica deste

---

<sup>7</sup> Marginalmente estável: significa que qualquer perturbação permanece aproximadamente no mesmo nível, à medida que o sistema evolui.

invariante é que o comportamento caótico é caracterizado pela existência de, pelo menos, um dos expoentes de Lyapunov positivos (MOON, 1992; MULLIN, 1993; MONTEIRO, 2006).

Na literatura encontra-se vários métodos para se calcular os expoentes de Lyapunov. Dentre eles os de Wright (1984), Eckmann e Ruelle (1985), Sano e Sawada (1985), Wolf *et al.* (1985), Briggs (1990), Bryan *et al.* (1990), Stoop e Parisi (1991), Zeng *et al.* (1991) e Nychka *et al.* (1992). O método de Wright (1984) aplica-se apenas a condições relativamente limitadas. Já os demais métodos a ideia central é seguir conjuntos de trajetórias sobre intervalos de tempo curtos e computar suas taxas de separação, e finalmente calcular a média dessas taxas sobre o atrator (KORSH *et al.*, 2008).

A seguir apresenta-se o método de Wolf *et al.* (1985) que será usado nesta tese, para o cálculo dos expoentes de Lyapunov (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1995), com o objetivo de identificar o comportamento caótico dos sistemas Ideal e Não Ideal.

## 2.5 MÉTODO DE WOLF

O método das trajetórias proposto por Wolf *et al.* (1985) foi o primeiro algoritmo que descreve todas as etapas para se calcular os expoentes de Lyapunov para séries temporais<sup>8</sup>. Sua ideia principal está relacionada com a evolução da distância, no espaço tangente, de duas trajetórias inicialmente próximas (SAVI, 2017).

Dada a série temporal  $s(t)$ , um retrato de fase  $d$ -dimensional é reconstruído pelas coordenadas defasadas. Busca-se um vizinho do ponto inicial  $\{s(t_0), \dots, s(t_0 + [d - 1]\tau)\}$  e denota-se a distância entre esses dois pontos por  $L_0(t_0)$ , ou seja,  $L_0(t_0) = |s(t_0) - z_0(t_0)|$ , onde  $z_0(t_0)$  é o vizinho mais próximo de  $s(t_0)$ . No tempo posterior  $t_1$ , essa distância evolui para  $L'(t_1)$ . Essa distância é averiguada ao longo do sinal. Procura-se por um ponto onde a distância entre ele e o ponto recolocado seja pequena. Se esse ponto não for encontrado, retorna-se aos pontos que já foram

---

<sup>8</sup> Série temporal é um conjunto discreto de uma observação de um sistema dinâmico.

usados. Este procedimento é repetido até que a trajetória fiducial<sup>9</sup> seja percorrida para todos os pontos da série de dados e, então, para cada ponto estima-se

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_E - t_0} \sum_{i=1}^E \log_2 \left( \frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \right)$$

sendo  $E$  o número de passos de reposição (SAVI, 2017).

## 2.6 CONTROLE DE CAOS

Controle de caos se refere as técnicas que visam suprimir o comportamento instável e/ou caótico do sistema dinâmico (MONTEIRO, 2006). Neste caso, o controlador é projetado para estabilizar uma órbita periódica instável que pertence à dinâmica do sistema.

De acordo com Savi (2017) o controle de caos é baseado na exuberância de uma resposta caótica e, fundamentalmente, explora três características: a riqueza de padrões periódicos associada ao caos, que significa que uma resposta caótica possui uma infinidade de órbitas periódicas estáveis; a sensibilidade às condições iniciais; e o caráter ergódico do caos, isto é, o sistema visita todos os pontos do atrator.

Na maior parte dos casos, o controle de caos possui duas fases. A primeira é denominada aprendizagem e a segunda etapa é o controle propriamente dito e consiste na aplicação de perturbações no sistema visando estabilizar uma órbita instável.

O controle de caos, explora características de sistemas caóticos que não são encontradas em sistemas não caóticos. Deste modo, o controlador é projetado para estabilizar uma órbita periódica instável de período qualquer que pertence à dinâmica do sistema, (SAVI, 2017).

Os métodos de controle de caos podem ser classificados em métodos discretos e contínuos.

---

<sup>9</sup> Trajetória fiducial, também chamada de trajetória de referência é a trajetória dada pela solução do sistema dinâmico.

Um sistema de controle com realimentação é todo sistema que estabelece uma relação de comparação entre a saída e a entrada de referência, utilizando a diferença como meio de controle. São frequentemente denominados também como sistemas de controle de malha fechada. No sistema de malha fechada, o sinal atuante, que é a diferença entre o sinal de entrada e o sinal de realimentação (*feedback*), realimenta o controlador, de modo a minimizar o erro e acertar a saída do sistema ao valor desejado. Apresenta como vantagem o fato de que o uso da realimentação faz com que a resposta do sistema seja relativamente insensível a distúrbios externos e a variações internas nos parâmetros do sistema (OGATA, 2010). Já, os sistemas de controle de malha aberta são aqueles em que o sinal de saída não exerce nenhuma ação de controle no sistema. Isso quer dizer que, em um sistema de controle de malha aberta, o sinal de saída não é medido nem realimentado para comparação com a entrada. Também é conhecido como *feedforward*. Em qualquer sistema de controle de malha aberta, a saída não é comparada com a entrada de referência. Assim, a cada entrada de referência corresponde uma condição fixa de operação (OGATA, 2010).

Em teoria do controle existem dois tipos de problemas, o primeiro problema consiste em encontrar a função do controle  $u(t)$  como uma função do tempo, visto que, essa função de controle ótimo, determina uma trajetória ótima que corresponde a uma condição inicial dada do sistema. No segundo, a função de controle  $u(t, x)$ , que depende do tempo e de variáveis de estado; pode ser aplicado para qualquer condição inicial. Este tipo de controle é chamado controle com realimentação (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2005).

Se as variáveis do sistema são desvios do regime desejado, o Controle Linear Ótimo estabiliza em torno da trajetória desejada, minimizando o funcional que caracteriza os desvios quadrados da trajetória e do controle do regime desejado (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2005).

### 3 SISTEMA IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

Neste capítulo estuda-se o comportamento dinâmico do sistema hiper-caótico com três expoentes positivos de Lyapunov, sistema Mathieu-Van der Pol. Trata-se de um sistema autônomo, não linear e que nesta tese será chamado de Sistema Ideal Mathieu-Van der Pol.

#### 3.1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DOS SISTEMAS DE MATHIEU E DE VAN DER POL

##### 3.1.1 Equação de Mathieu

O sistema Mathieu amortecido é um sistema não autônomo, não linear definido pela equação diferencial (2):

$$\ddot{x} = -(a + b \operatorname{sen}\omega t)x - (a + b \operatorname{sen}\omega t)x^3 - c\dot{x} + d \operatorname{sen}\omega t \quad (2)$$

onde  $a, b, c, d$  são parâmetros constantes,  $e, \omega$  frequência circular (GE, YI, 2007).

##### 3.1.2 Equação de Van der Pol

O sistema Van der Pol é um sistema não autônomo, não linear definido pela equação diferencial (3):

$$\ddot{x} = -ex + f(1 - x^2)\dot{x} \quad (3)$$

onde o termo  $f(1 - x^2)$  introduz um amortecimento que assume valores negativos e positivos, respectivamente para pequenas e grandes amplitudes de movimento (LIMA, 2008).

À equação (3) adiciona-se uma função  $g \text{sen}(\omega t)$ , assim tem-se a equação (4):

$$\ddot{x} = -ex + f(1 - x^2)\dot{x} + g \text{sen}(\omega t) \quad (4)$$

que representa a equação diferencial do oscilador de Van der Pol forçado, onde  $e, f, g$  são parâmetro constantes,  $e, \omega$  frequência circular.

### 3.1.3 Equações na forma de estados dos sistemas de Mathieu e de Van der Pol

Escrevendo as equações dos sistemas não autônomos e não lineares de Mathieu dada por (2) e de Van der Pol dada por (4) na forma de equações de estado, obtêm-se as equações (5) e (6):

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(a + b \text{sen}\omega t)x_1 - (a + b \text{sen}\omega t)x_1^3 - cx_2 + d \text{sen}\omega t \quad (5)$$

e,

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + g \text{sen}\omega t \quad (6)$$

Para gerar o modelo Ideal Mathieu-Van der Pol ou tri caos, com quatro variáveis de estado e três expoentes positivos de Lyapunov, faz-se o acoplamento linear dos sistemas, substituindo-se  $\text{sen}\omega t$  na equação (5) por  $x_3$  e  $\text{sen}\omega t$  em (6) por  $x_1$ , assim obtêm-se as equações diferenciais dadas por (7).

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(a + b x_3)x_1 - (a + b x_3)x_1^3 - cx_2 + d x_3 \quad (7)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + gx_1$$

As equações (7) definem-se o modelo autônomo não linear Ideal Mathieu-Van der Pol, onde  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  são as quatro variáveis de estado, sendo que  $x_1$ ,  $x_3$  representam deslocamento e  $x_2$ ,  $x_4$  velocidade e  $a, b, c, d, e, f$  e  $g$  os parâmetros do modelo (SHIH-YU *et al.*, 2012).

### 3.2 PONTO DE EQUILÍBRIO DO SISTEMA IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

O ponto de equilíbrio do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol pode ser encontrado, resolvendo-se o sistema de equações (8) simultaneamente:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ -(a + b x_3)x_1 - (a + b x_3)x_1^3 - cx_2 + d x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + gx_1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Substituindo-se os valores de  $x_2$  e  $x_4$ , tem-se as equações (9) e (10):

$$-(a + b x_3)x_1 - (a + b x_3)x_1^3 + d x_3 = 0 \quad (9)$$

$$-ex_3 + gx_1 = 0 \quad (10)$$

Isolando  $x_3$  na equação (10), tem-se:  $x_3 = \frac{g}{e} x_1$ ;  $e \neq 0$ .

Substituindo-se  $x_3$  na equação (9), obtêm-se:  $x_1 = 0$ . Logo,  $x_3 = 0$ .

Assim, a linearização da equação (7) para o ponto de equilíbrio  $E_1 = (0,0,0,0)$  é definida pela equação (11):

$$\dot{Y} = J_1 Y \quad (11)$$

onde

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -a & -c & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ g & 0 & -e & f \end{pmatrix} \quad (12)$$

e  $Y = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$ . A matriz  $J_1$  é chamada de Matriz Jacobiana.

Calculando-se os autovalores para  $E_1$ :

$$|J_1 - \Lambda I| = \begin{vmatrix} -\Lambda & 1 & 0 & 0 \\ -a & -c - \Lambda & d & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda & 1 \\ g & 0 & -e & f - \Lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Assim, a equação característica é obtida:

$$\det|J_1 - \Lambda I| = \Lambda^4 + (c - f)\Lambda^3 + (e - a - cf)\Lambda^2 + (ce + af)\Lambda + (-ae - dg) = 0 \quad (14)$$

Substituindo-se os valores adimensionais do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol, listados na tabela 1, cujos valores gera caos no sistema (SHIH-YU *et al.*, 2012), obtêm-se os autovalores correspondentes ao ponto de equilíbrio  $E_1 = (0,0,0,0)$ , a saber:

$$\Lambda_1, \Lambda_2 = 0,2540 \pm 9,7678i$$

$$\Lambda_3, \Lambda_4 = 8,6510 \pm 1,7457i$$

sendo todos os autovalores números complexos conjugados com a parte real positiva. De acordo com o Primeiro Método de Lyapunov o ponto de equilíbrio é instável.

Tabela 1 - Parâmetros adimensionais do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol

Parâmetro	Valor
$a$	91,7
$b$	5,023

<i>c</i>	0,01
<i>d</i>	91
<i>e</i>	87,001
<i>f</i>	18
<i>g</i>	9,057

Fonte: Shih-Yu *et al.* (2012).

### 3.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Para análise da estabilidade do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol, descrito na Eq. 7, plotou-se os diagramas da Estabilidade Estrutural dos pares de estados  $x_1, x_2$  e  $x_3, x_4$ , segundo o primeiro Método de Estabilidade de Lyapunov, para exibir os pontos instáveis do modelo. Os asteriscos no diagrama representam pontos instáveis.

Em seguida, escolhe-se um ponto da região de instabilidade, com o propósito de se averiguar a presença de comportamento caótico no modelo, por meio dos Expoentes de Lyapunov, através do Método de Wolf (WOLF *et al.*, 1985).

Para a obtenção da resposta do comportamento ao longo do tempo do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol esboçou-se as figuras 6 a 19 que exibem o histórico no tempo, espectro de frequência e plano de fase para os quatro estados do sistema levando-se em consideração o intervalo de tempo adimensional  $0 \leq \tau \leq 100$ . Os valores dos parâmetros utilizados, conforme tabela 1 e dos estados tabela 2, em conformidade com (SHIH-YU *et al.*, 2012).

Tabela 2 – Estados do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol

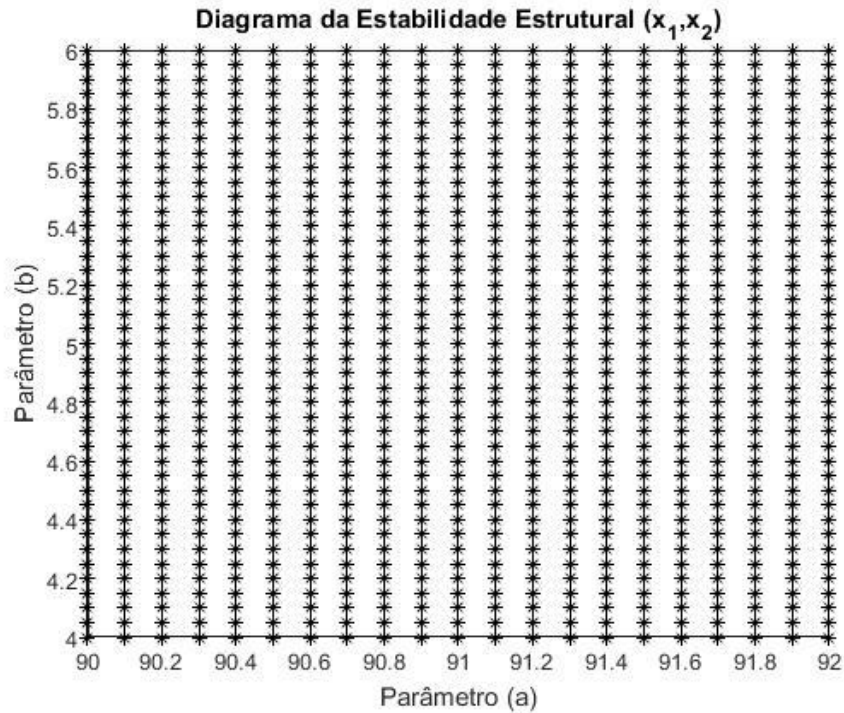
<b>Estados</b>	<b>Valor</b>
$x_1$	0,01
$x_2$	0,01
$x_3$	0,01
$x_4$	0,01

Fonte: Shih-Yu *et al.* (2012).

Para analisar a estabilidade do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, plotou-se os diagramas de estabilidade estrutural dos pares de estados  $x_1, x_2$  e  $x_3, x_4$ , variando-se os parâmetros  $a$  e  $b$  (devido a não linearidade cúbica do sistema) no ponto de origem, para se determinar os pontos estáveis e instáveis do modelo.

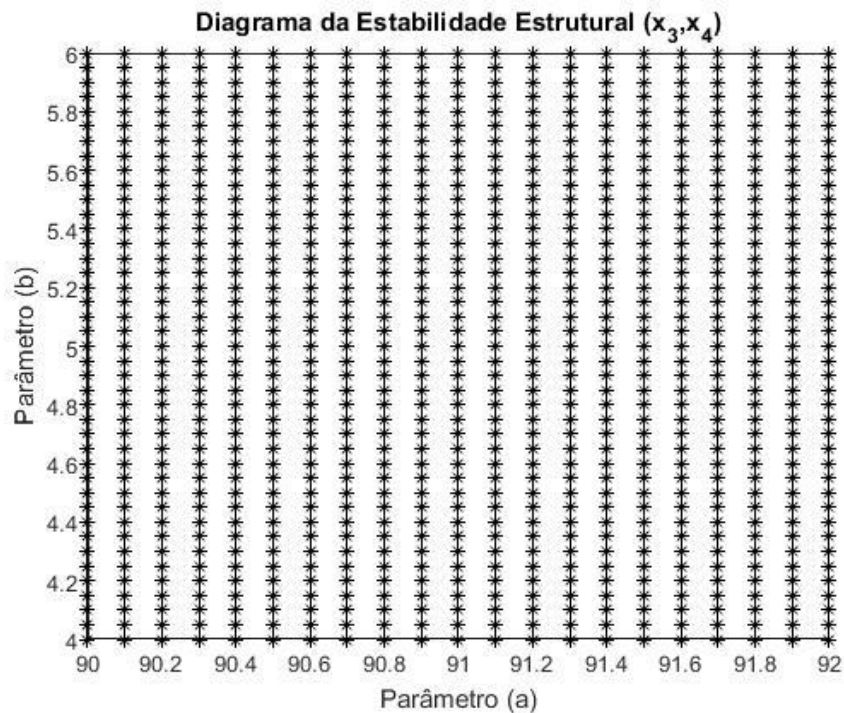
As figuras 3 e 4, apresentam-se os diagramas da Estabilidade Estrutural dos pares de estados  $x_1, x_2$  e  $x_3, x_4$ .

Figura 3 - Diagrama da Estabilidade Estrutural ( $x_1, x_2$ )



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 4 - Diagrama da Estabilidade Estrutural ( $x_3, x_4$ )



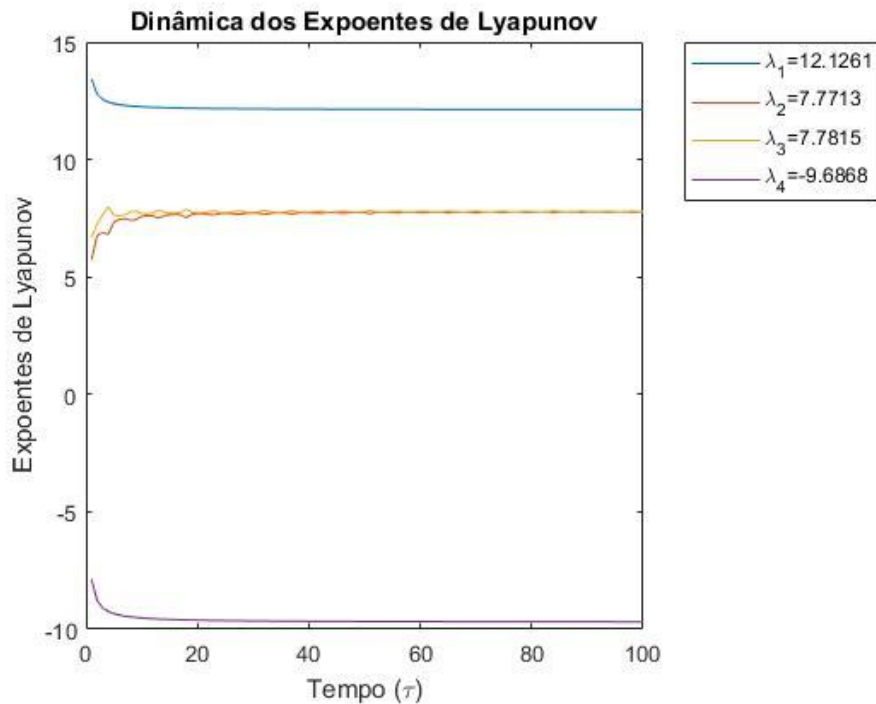
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nas figuras 3 e 4, verifica-se que de acordo com o Primeiro Método de Lyapunov todos os pontos apresentam comportamentos instáveis para ambos os sistemas (SAVI, 2017).

O ponto (91.7, 5.0) nas figuras 3 e 4, se encontra numa região instável, então escolhe-se este ponto, como pode-se escolher qualquer outro dentro desta região, para mostrar o comportamento caótico do modelo. A análise que caracteriza o comportamento caótico ou não do modelo, para os parâmetros conforme tabelas 1 e dos estados, tabela 2, é feita através do cálculo dos expoentes de Lyapunov, usando-se o método de Wolf (WOLF *et al.*, 1985).

A figura 5 exibe o comportamento dos expoentes de Lyapunov, de acordo com os parâmetros, conforme tabelas 1 e 2. Já na tabela 3, encontra-se os valores dos expoentes de Lyapunov.

Figura 5 - Dinâmica dos Expoentes de Lyapunov do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Tabela 3 – Expoentes de Lyapunov do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol

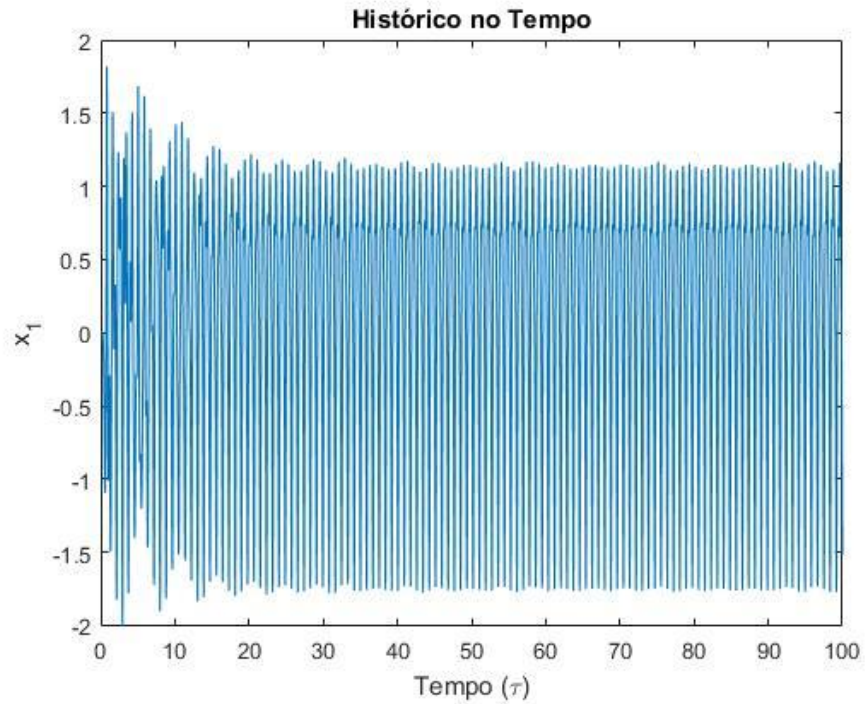
<b>Expoente</b>	<b>Valor</b>
$\lambda_1$	12,1261
$\lambda_2$	7,7713
$\lambda_3$	7,7815
$\lambda_4$	-9,6868

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando a tabela 3, constata-se que, para os parâmetros conforme tabelas 1 e 2, o sistema Ideal Mathieu-Van der Pol apresenta comportamento caótico, visto que, dos quatro expoentes de Lapunov obtidos, três são de valores positivos.

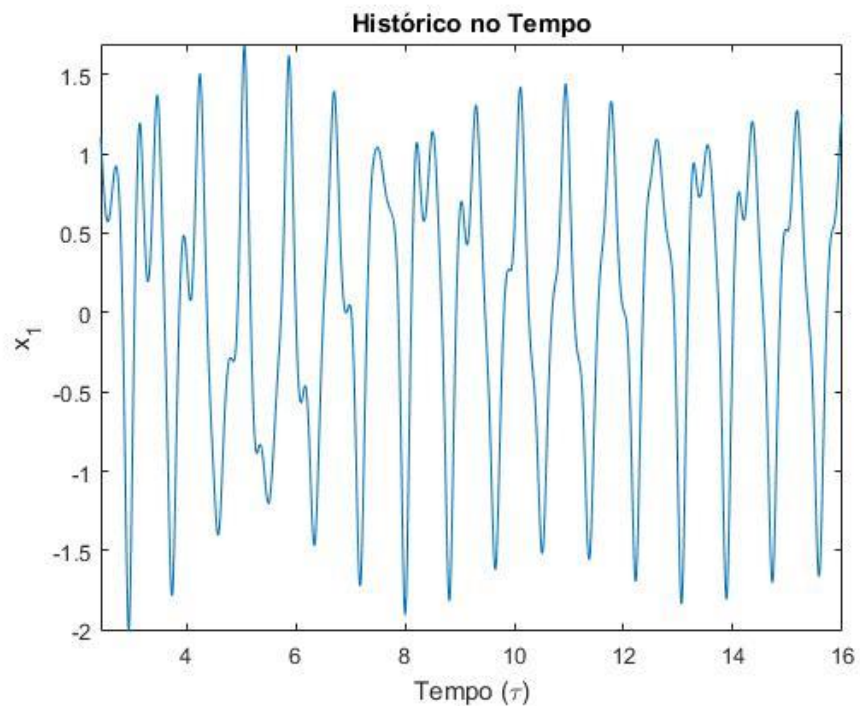
As figuras 6 a 17, exibem respectivamente o Histórico no Tempo e o Espectro da Frequência - FFT para os quatro estados do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol.

O Histórico no Tempo e a FFT do estado  $x_1$  do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol, são apresentados nas figuras 6 e 8, respectivamente e, na figura 7 o zoom da figura 6.

Figura 6 - Histórico no Tempo do estado  $x_1$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

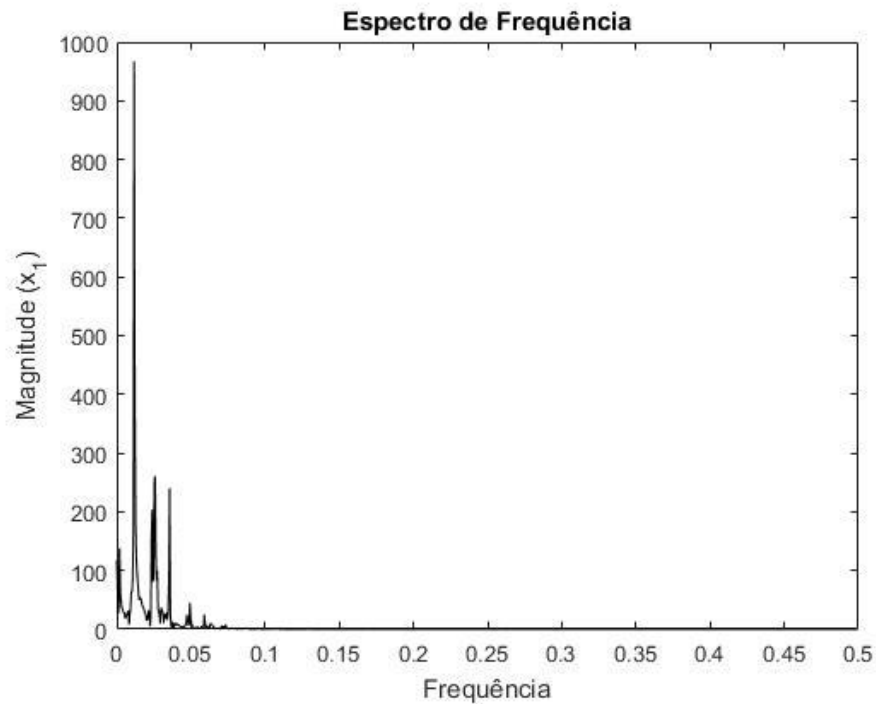
Figura 7 - Zoom da figura 6



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 7, exibe oscilações no modelo, que se estende à medida que o tempo evolui.

Figura 8 - FFT do estado  $x_1$

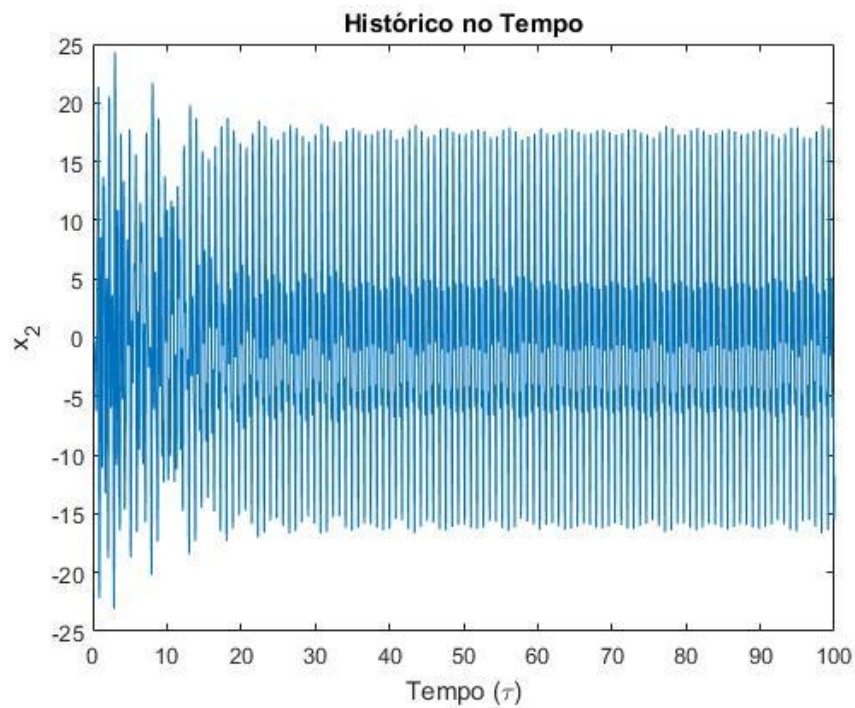


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 8 representa a FFT do estado  $x_1$  e apresenta três picos bem destacados, o que pode caracterizar que o modelo é periódico e de período três.

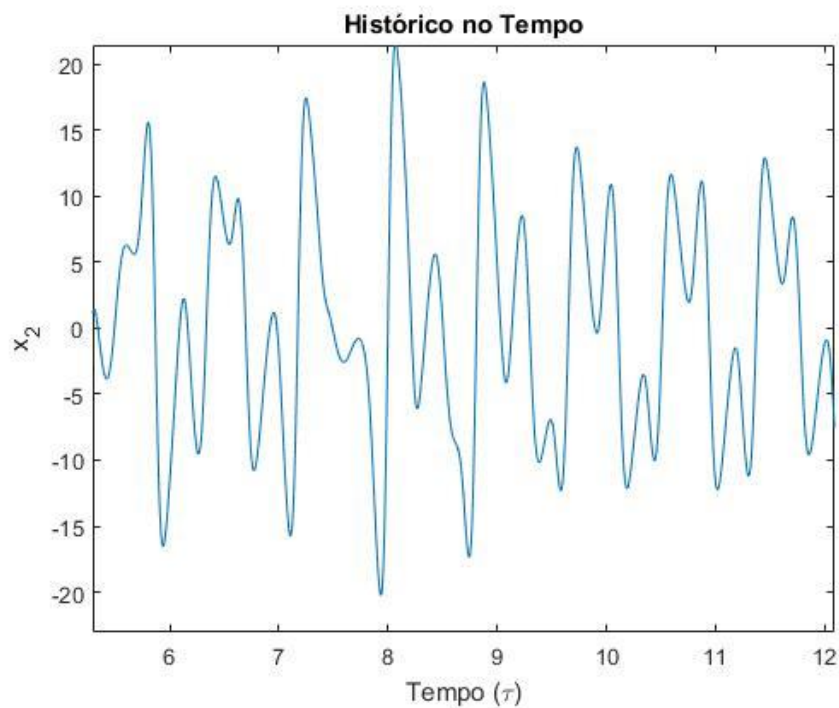
O Histórico no Tempo e a FFT do estado  $x_2$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, são apresentados nas figuras 9 e 11, respectivamente e, na figura 10 o zoom da figura 9.

Figura 9 - Histórico no Tempo do estado  $x_2$



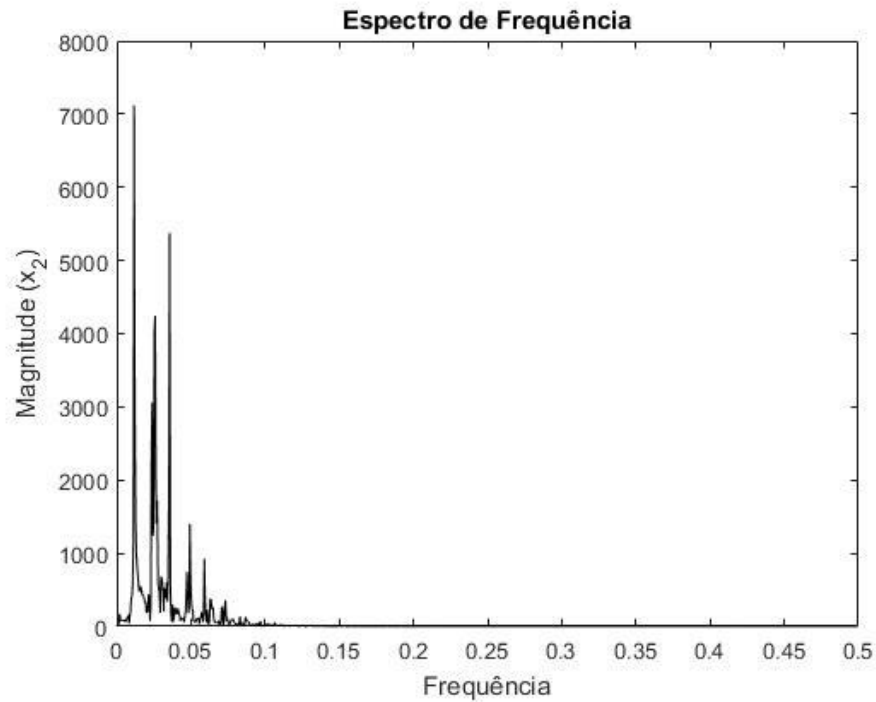
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 10 - Zoom da figura 9



Fonte: Elaboração do próprio autor.

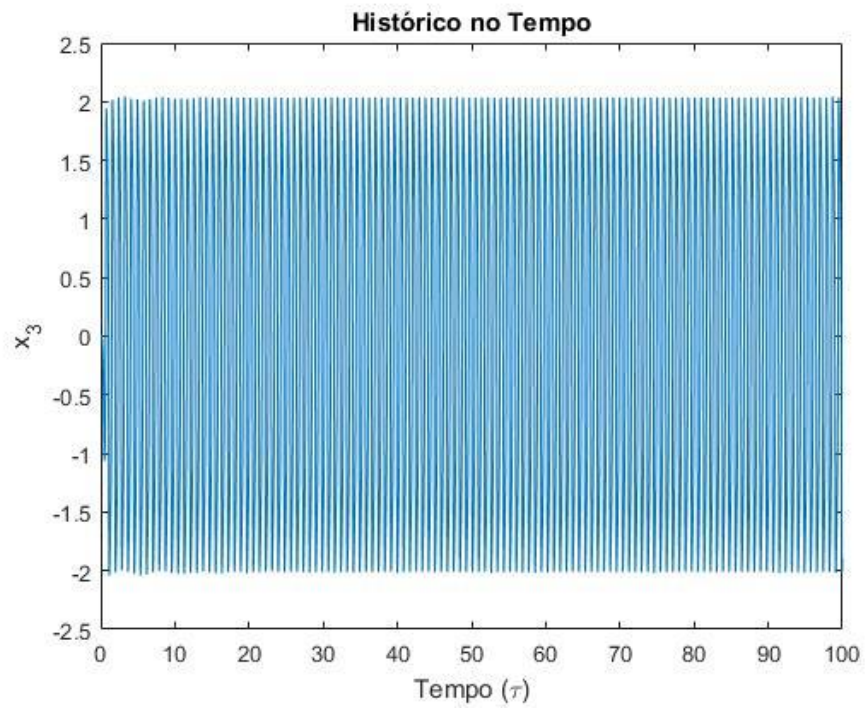
Um zoom da figura 9 é exibido na figura 10, que ilustra as oscilações bastante significativas no modelo, que se estende à medida que o tempo evolui.

Figura 11 – FFT do estado  $x_2$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

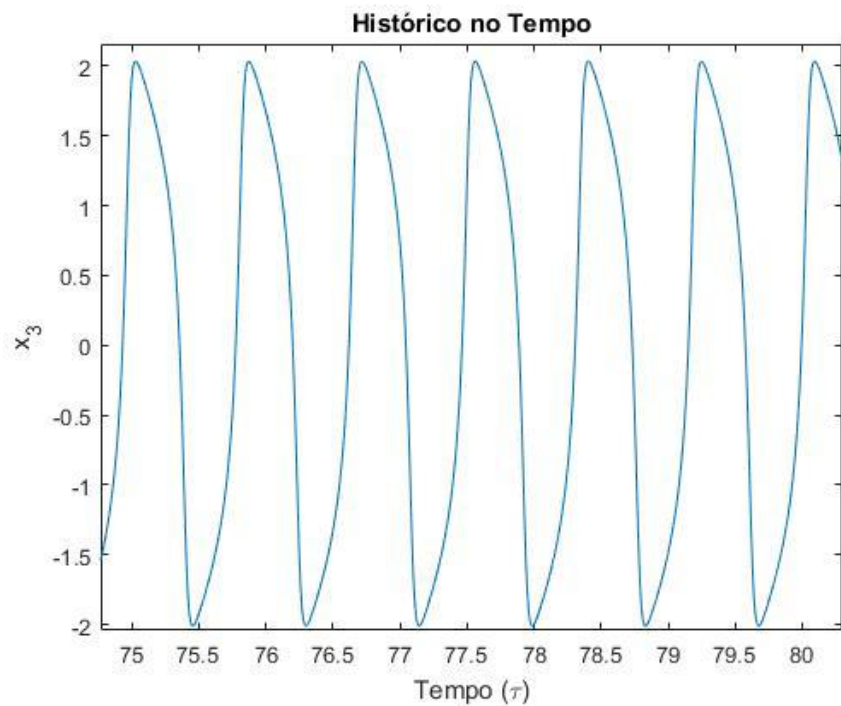
Na figura 11 a FFT exibe quatro picos em destaque, o que pode caracterizar que o modelo é periódico e de período quatro, o que evidencia o comportamento caótico no modelo.

O Histórico no Tempo e a FFT do estado  $x_3$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, são apresentados nas figuras 12 e 14, respectivamente e, na figura 13 o zoom da figura 12.

Figura 12 - Histórico no Tempo do estado  $x_3$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

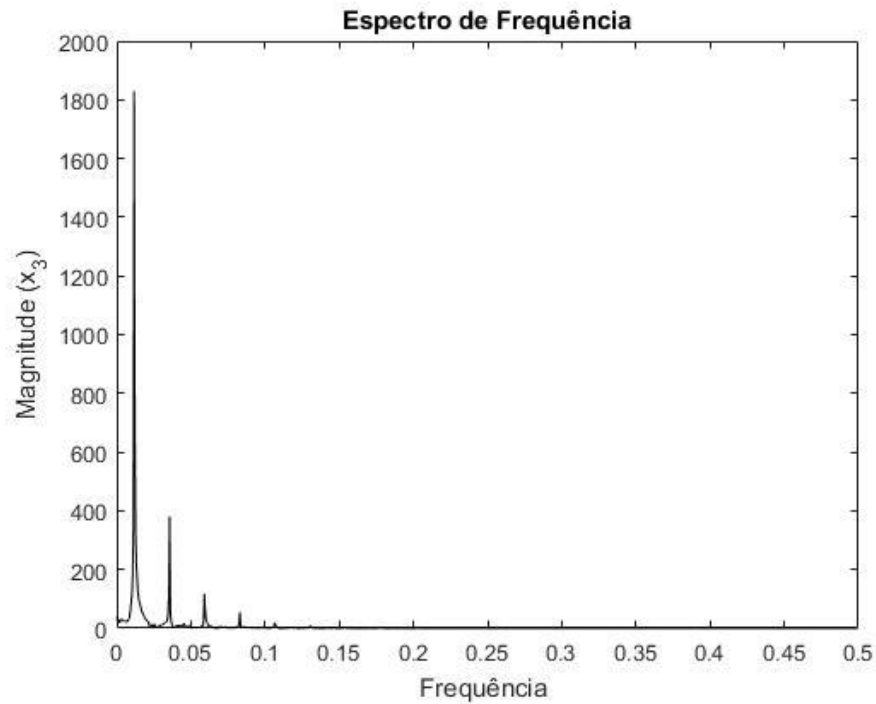
Figura 13 - Zoom da figura 12



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Um zoom da figura 12 é exibido na figura 13, que ilustra as oscilações periódicas no modelo, que se estende à medida que o tempo evolui.

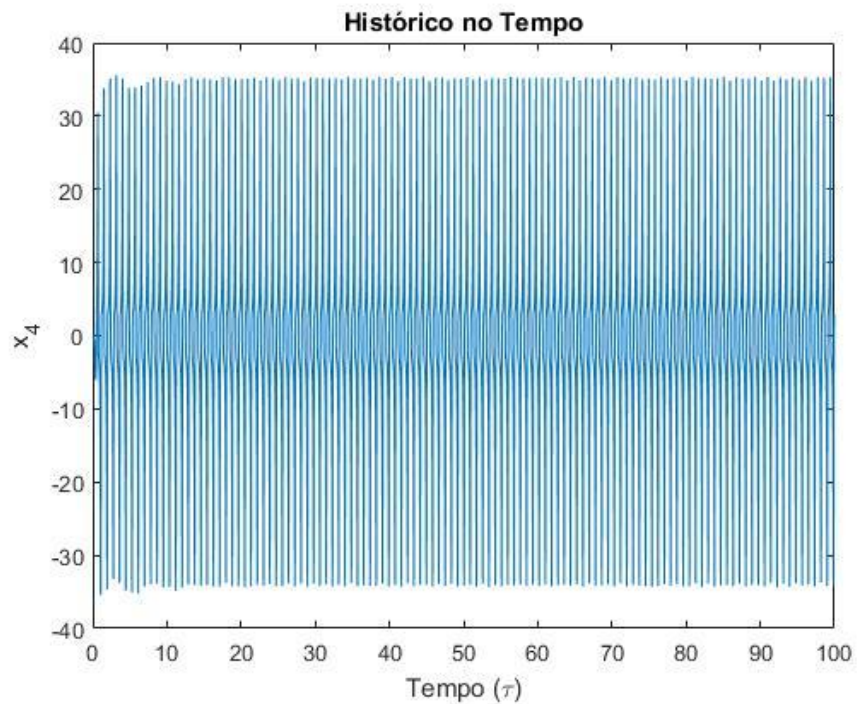
Figura 14 - FFT do estado  $x_3$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

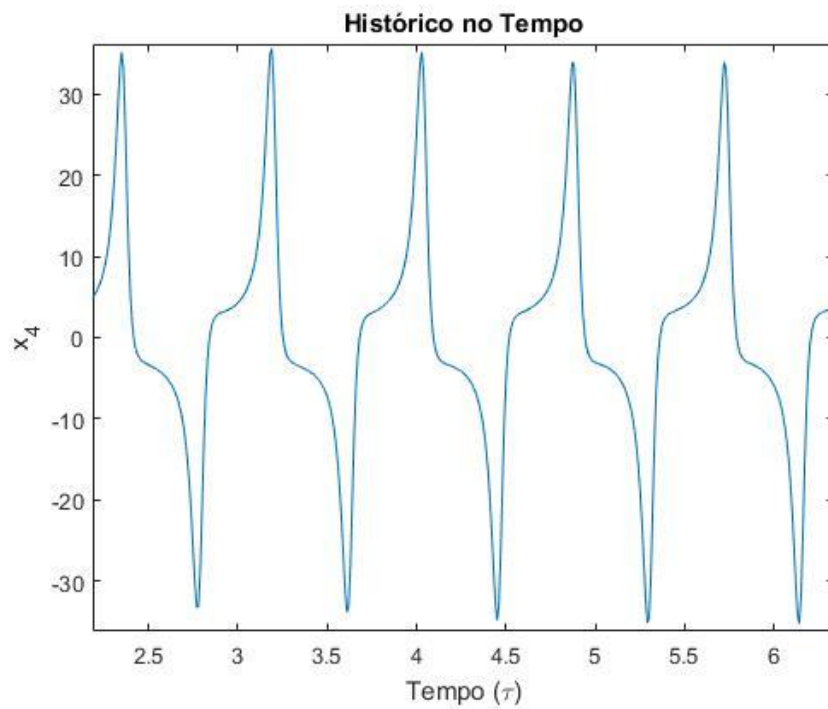
Na figura 14 a FFT exibe dois picos em destaque, o que pode caracterizar que o modelo é periódico e de período dois.

O Histórico no Tempo e a FFT do estado  $x_4$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, são apresentados nas figuras 15 e 17 e, na figura 16 o zoom da figura 15.

Figura 15 - Histórico no Tempo do estado  $x_4$ 

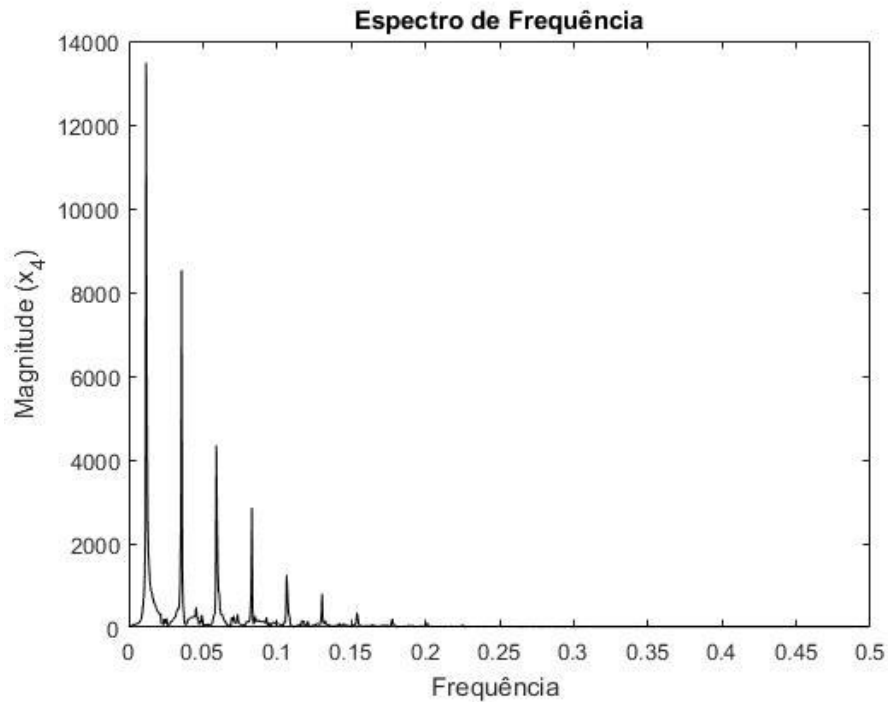
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 16 - Zoom da figura 15



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Um zoom da figura 15 é exibido na figura 16, que mostra as oscilações no modelo.

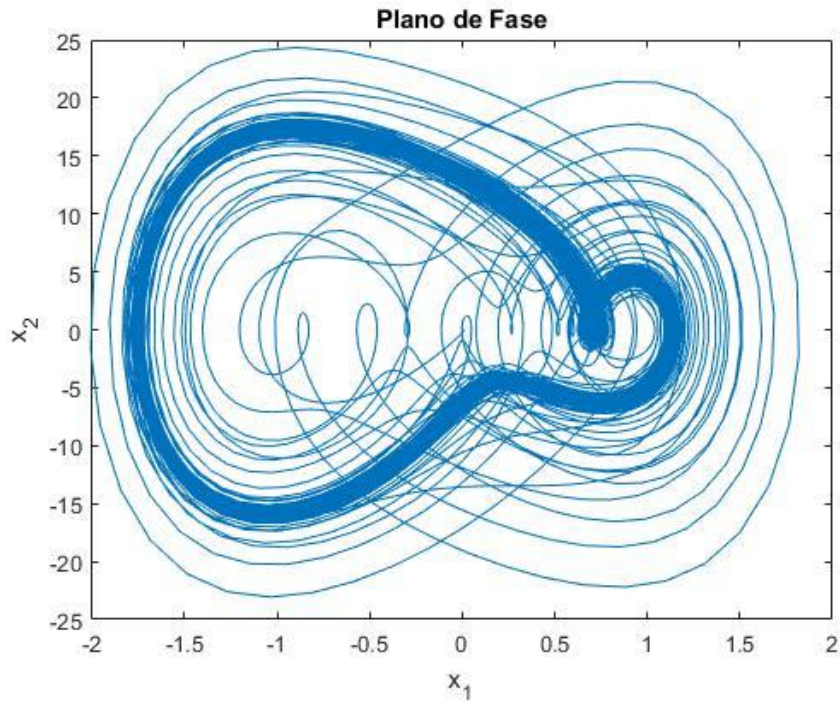
Figura 17 - FFT do estado  $x_4$ 

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na figura 17 a FFT exibe cinco picos em destaque, o que pode caracterizar que o modelo é periódico e de período cinco, isto é, o que caracteriza a rota para o comportamento caótico.

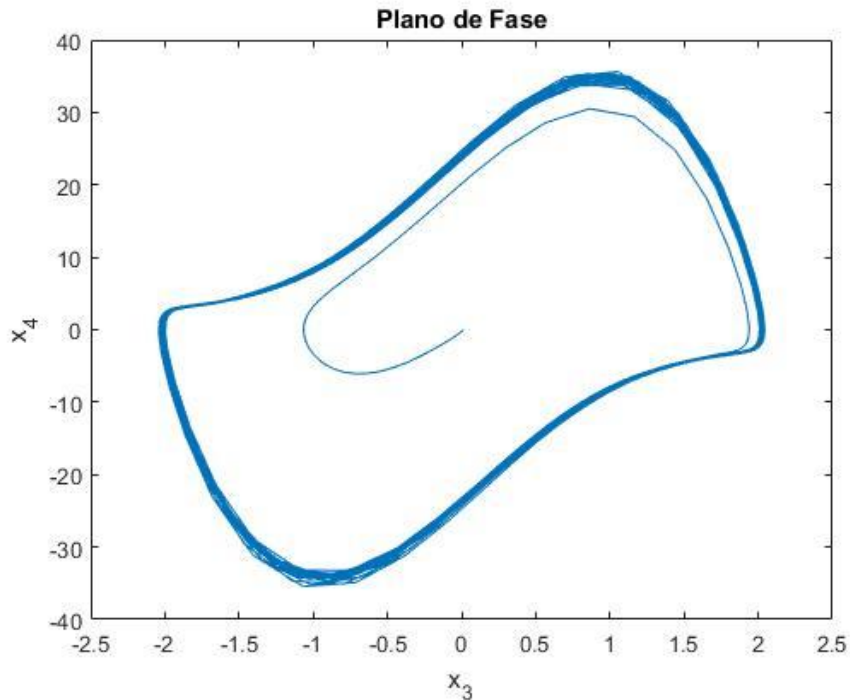
As figuras 18 e 19 ilustra-se os planos de fase dos pares de estados do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol.

Figura 18 - Plano de Fase dos estados  $x_1$  e  $x_2$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 19 - Plano de Fase dos estados  $x_3$  e  $x_4$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Constata-se pelas figuras 18 e 19, que há uma situação desordenada no traçado, exibindo-se comportamento instável. Esse comportamento é consequência

da imprevisibilidade que caracteriza o caos. Verifica-se então, que o modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, possui comportamento caótico com três expoentes positivos de Lyapunov. Concluindo-se que o sistema é caracterizado como um sistema hiper caótico.

## 4 SISTEMA NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

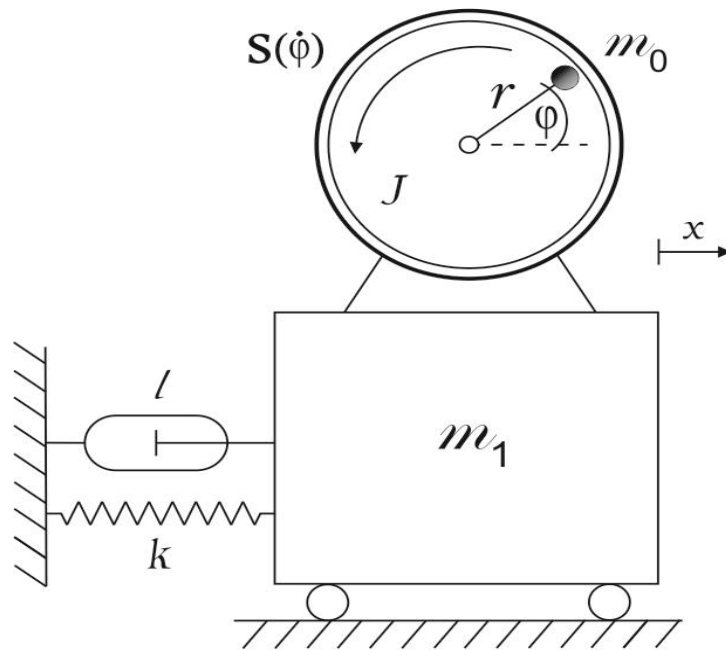
Neste capítulo, antes de propor um controlador ao modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol, que é o foco desta tese, é necessário entender a dinâmica não linear do sistema não ideal.

Ao modelo Ideal Mathieu-Van der Pol será acoplado uma fonte de excitação não-ideal, a qual não foi estudada até o momento para o sistema proposto.

### 4.1 SISTEMA NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

Nesta tese, a configuração proposta para o modelo matemático não ideal adimensional (PICCIRILLO *et al.*, 2008; CHAVARETTE, 2012) da fonte de energia não ideal encontra-se na figura 20. O modelo físico consiste em uma massa  $m_1$  presa a um suporte rígido que oscila horizontalmente através de um amortecedor e uma mola, cujos coeficientes são  $l$  (coeficiente de amortecimento linear) e  $k$  (coeficiente de elasticidade linear da mola). Para perturbar o sistema, um motor de corrente contínua (do inglês – *Direct Current* - DC) com fonte de alimentação limitada está conectado à massa  $m_1$ , provocando uma interação entre a estrutura vibratória e a fonte de energia. Tem-se ainda, uma massa desbalanceada  $m_0$  que gira ligada ao centro do motor, dois deslocamentos, o horizontal do sistema  $X(t)$ ;  $t$  tempo e o angular da massa desbalanceada  $\varphi(t)$ , a função  $S(\dot{\varphi}) = p - q \dot{\varphi}$  que exprime o torque líquido do motor, sendo  $\dot{\varphi}$  a velocidade angular do eixo do motor e  $p$  e  $q$  as constantes do motor que está sendo utilizado (FERREIRA, 2015), da excentricidade  $r$  da massa  $m_0$  e do momento de inércia de massa do eixo do motor  $J$  (CVETICANIN; ZUDOVIC; BALTHAZAR, 2018).

Figura 20 – Motor Não Ideal – MNI



Fonte: Cveticanin, Zudovic e Balthazar (2018).

O modelo descrito na figura 20, tem dois graus de liberdade. O deslocamento do movimento horizontal do motor  $x$  e o deslocamento angular da massa desbalanceada em torno do eixo do motor representada por  $\varphi$ .

A modelagem matemática do modelo proposto é feita por intermédio das equações de Lagrange, sendo o deslocamento horizontal da massa desbalanceada  $m_0$  dado por:

$$\begin{aligned}x &= X + r \cos \varphi \Rightarrow \dot{x} = \dot{X} - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\y &= r \sin \varphi \Rightarrow \dot{y} = r \dot{\varphi} \cos \varphi.\end{aligned}$$

A energia cinética é dada pela equação (15):

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 \dot{X}^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 \quad (15)$$

onde  $v$  é a velocidade da massa desbalanceada  $m_0$ .

A energia potencial do modelo é dada pela equação (16):

$$E_p = \frac{1}{2} k X^2 \quad (16)$$

Sendo a relação de velocidade da massa desbalanceada  $m_0$  dada por

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

tem-se:

$$v^2 = \dot{X}^2 - 2\dot{X}r\dot{\varphi}\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2 \quad (17)$$

Substituindo (17) em (15), obtém-se:

$$E_c = \frac{1}{2}(m_0 + m_1)\dot{X}^2 - m_0\dot{X}r\dot{\varphi}\sin\varphi + \frac{1}{2}(J + m_0r^2)\dot{\varphi}^2 \quad (18)$$

As equações de movimento do modelo, são obtidas usando-se as equações diferenciais de movimento de Lagrange.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{X}} - \frac{\partial E_c}{\partial X} + \frac{\partial E_p}{\partial X} = N_X, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = N_\varphi,$$

em que  $N_X$  e  $N_\varphi$  são as forças generalizadas. A força não conservadora na direção  $X$  é a força de amortecimento  $N_X = -l\dot{X}$  enquanto a força generalizada  $N_\varphi$ , se refere ao torque  $S(\varphi)$  aplicado ao motor.

Aplicando-se as equações (16), (18) e (19) e a força generalizada, obtém-se as equações de movimento do motor não ideal dadas pelas equações (20) e (21):

$$(m_0 + m_1)\ddot{X} + l\dot{X} + kX = m_0r(\dot{\varphi}^2\cos\varphi + \ddot{\varphi}\sin\varphi) \quad (20)$$

e

$$(J + m_0r^2)\ddot{\varphi} - m_0r\dot{X}\sin\varphi = S(\varphi) \quad (21)$$

Para a análise numérica do modelo não ideal, as equações (20) e (21) devem ser adimensionais, sem prejuízo algum para o estudo físico do modelo, visto que transformar um sistema em adimensional não altera suas propriedades dinâmicas.

Escrevendo as equações (20) e (21) na forma adimensional, considera-se como unitária a massa do modelo  $m_0 + m_1 = 1 \text{ kg}$  (FERREIRA, 2015) e introduzindo os parâmetros relativos com sufixo  $r$ , então se definem-se os parâmetros adimensionais, sendo:  $\chi = \frac{X}{X_r}$  taxa de deslocamento,  $z = \frac{\varphi}{\varphi_r}$  taxa de posição angular,  $\zeta = \frac{l}{l_r - l_{r-1}}$  fator de amortecimento por massa ou  $2\zeta = \frac{l}{l_r}$ ,  $\vartheta = \frac{k}{k_r}$  taxa de rigidez e neste estudo  $\vartheta = \frac{1}{2}$  (FERREIRA, 2015).

Tomando-se a excentricidade da massa desbalanceada de  $\Gamma = m_0r$ , então se define  $\mu = \frac{\Gamma}{\Gamma_r}$  como a taxa de excentricidade da massa desbalanceada. O momento

de inércia do motor CC é dado por  $I = J + m_0 r^2$ , então se define  $\xi = \frac{\mu}{I}$  como taxa de excentricidade pelo momento de inércia. Define-se também, a taxa de torque líquido aplicado ao motor pelo momento de inércia como  $\alpha = \frac{p}{p_{rI}}$  e  $\beta = \frac{q}{q_{rI}}$  como a taxa de resistência do torque líquido pelo momento de inércia (FERREIRA, 2015). Desta maneira, o modelo adimensional excitado por uma fonte não ideal é dado pelas equações (22) e (23).

$$\ddot{X} + 2\zeta\dot{X} + \frac{1}{2}X = \mu (\dot{z}^2 \cos z + \ddot{z} \text{senz}) \quad (22)$$

$$\ddot{z} = \xi \ddot{X} \text{senz} + \alpha - \beta \dot{z} \quad (23)$$

Considerando apenas as equações do motor desbalanceado, acrescenta-se na equação (22) as equações que o descrevem e na equação (23) acopla-se à equação do componente que representa a velocidade de movimentação. Assim, o modelo fica do seguinte modo, de acordo com as equações (24) e (25).

$$MNI = \mu (\dot{z}^2 \cos z + \ddot{z} \text{senz}) \quad (24)$$

$$\ddot{z} = \xi \ddot{x}_1 \text{senz} + \alpha - \beta \dot{z} \quad (25)$$

As equações (26) representam o modelo não ideal adimensional.

$$\ddot{x}_1 = -(a + b x_2)x_1 - (a + b x_2)x_1^3 - c\dot{x}_1 + dx_2 + \mu(\dot{z}^2 \cos z + \ddot{z} \text{senz})$$

$$\ddot{x}_2 = -ex_2 + f(1 - x_2^2)\dot{x}_2 + gx_1 \quad (26)$$

$$\ddot{z} = \xi \ddot{x}_1 \text{senz} + \alpha - \beta \dot{z}$$

sendo  $x_1, x_2$  e  $a, b, c, d, e, f$ , e  $g$  definidos no capítulo anterior. A posição angular  $z$  é uma resposta de excitação não ideal,  $\alpha, \beta$  são constantes de torque do motor,  $\xi$  é a distância da massa desbalanceada ao centro de rotação do motor CC e  $\mu$  é relacionado ao momento de inércia do sistema.

Todos os parâmetros são positivos constantes adimensionais. Os termos  $\mu(\dot{z}^2 \cos z + \ddot{z} \text{senz})$  são devido a interação entre o sistema dinâmico e uma fonte de energia, por exemplo, um motor CC com fonte de alimentação limitada. A expressão  $\mu(\dot{z}^2 \cos z + \ddot{z} \text{senz})$  é responsável pela não-idealização do sistema. O parâmetro  $\alpha$  é a constante de torque aplicada e depende das condições iniciais e  $\beta$  é torque líquido resistivo e não tem influência das condições iniciais e é considerado como amortecimento interno do Motor CC (FERREIRA, 2015).

Substituindo  $\ddot{z}$  na equação de  $\ddot{x}_1$ , obtêm-se:

$$\ddot{x}_1 = \frac{-(a + b x_2)x_1 - (a + b x_2)x_1^3 - c\dot{x}_1 + dx_2 + \mu z^2 \cos z + (\alpha - \beta \dot{z})\mu \operatorname{senz}}{1 - \mu \xi (\operatorname{senz})^2}$$

Agora, substituindo  $\ddot{x}_1$  na equação de  $\ddot{z}$ , obtêm-se:

$$\ddot{z} = \frac{\xi[-(a + b x_2)x_1 - (a + b x_2)x_1^3 - c\dot{x}_1 + dx_2] \operatorname{senz} + \mu \xi \dot{z}^2 \cos z \operatorname{senz} + \alpha - \beta \dot{z}}{1 - \mu \xi (\operatorname{senz})^2}$$

Usando-se as novas variáveis, definidas como:  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = \dot{x}_1$ ,  $y_3 = z$ ,  $y_4 = \dot{z}$ ,  $y_5 = x_2$  e  $y_6 = \dot{x}_2$ , obtêm-se o seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem dadas pela equação (27).

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= \frac{-(a + b y_5)y_1 - (a + b y_5)y_1^3 - cy_2 + dy_5 + \mu y_4^2 \cos y_3 + (\alpha - \beta y_4)\mu \operatorname{sen} y_3}{1 - \mu \xi (\operatorname{sen} y_3)^2} \\ \dot{y}_3 &= y_4 \\ \dot{y}_4 &= \frac{\xi[-(a + b y_5)y_1 - (a + b y_5)y_1^3 - cy_2 + dy_5] \operatorname{sen} y_3 + \mu \xi y_4^2 \cos y_3 \operatorname{sen} y_3 + \alpha - \beta y_4}{1 - \mu \xi (\operatorname{sen} y_3)^2} \\ \dot{y}_5 &= y_6 \\ \dot{y}_6 &= -ey_5 + f(1 - y_5^2)y_6 + gy_1 \end{aligned} \tag{27}$$

## 4.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS PARA O MODELO NÃO IDEL MATHIEU-VAN DER POL COM PARÂMETROS FIXOS

As simulações numéricas para a obtenção das respostas de deslocamento e velocidade do sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol, foram realizadas aplicando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem na equação (27), mantendo-se os parâmetros listados nas tabelas 1, 2 apresentadas no capítulo 3 e tabela 4, que exhibe os parâmetros para a excitação do modelo não ideal (CHAVARETTE, 2012). O intervalo de tempo adimensional considerada foi,  $0 \leq \tau \leq 50$ .

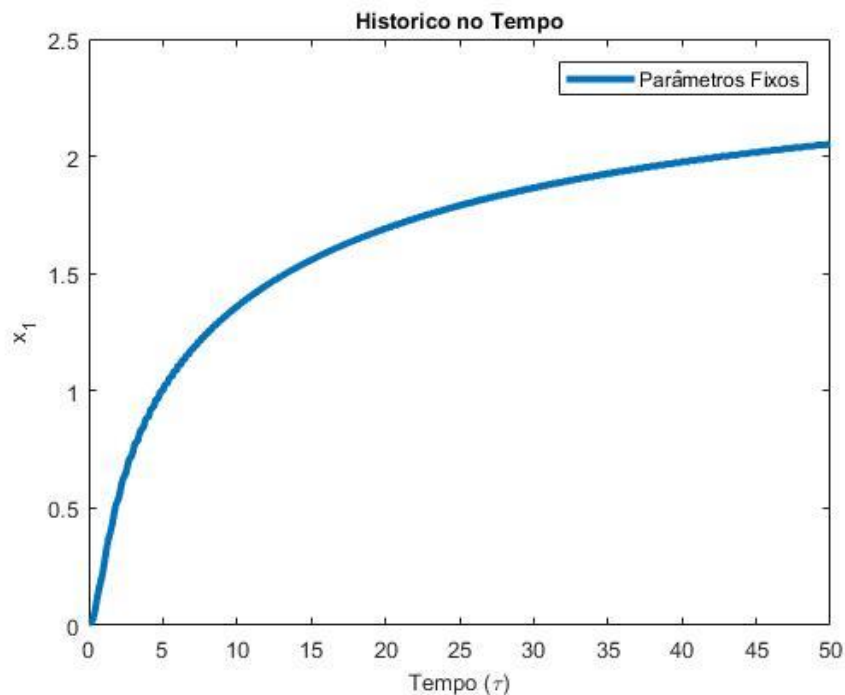
Tabela 4 - Parâmetros da Simulação para excitação do Modelo Não Ideal

Parâmetro	Valor
$\alpha$	0,8
$\beta$	1,5
$\xi$	0,3
$\mu$	0,2

Fonte: Chavarette (2012).

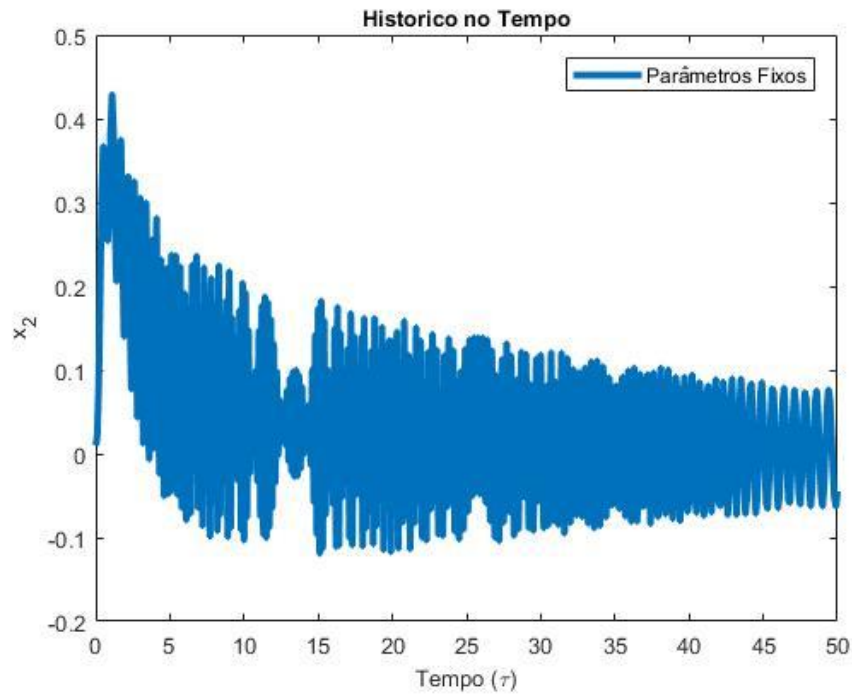
As figuras 21, 23 e 25 exibem-se o Histórico no Tempo do deslocamento dos estados  $x_1$ ,  $x_3$  e  $x_5$ , as figuras 22, 24 e 26 ilustram-se as velocidades dos estados  $x_2$ ,  $x_4$  e  $x_6$  e as figuras 27, 28 e 29 apresentam-se os planos de fase dos pares de estados do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos.

Figura 21 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos



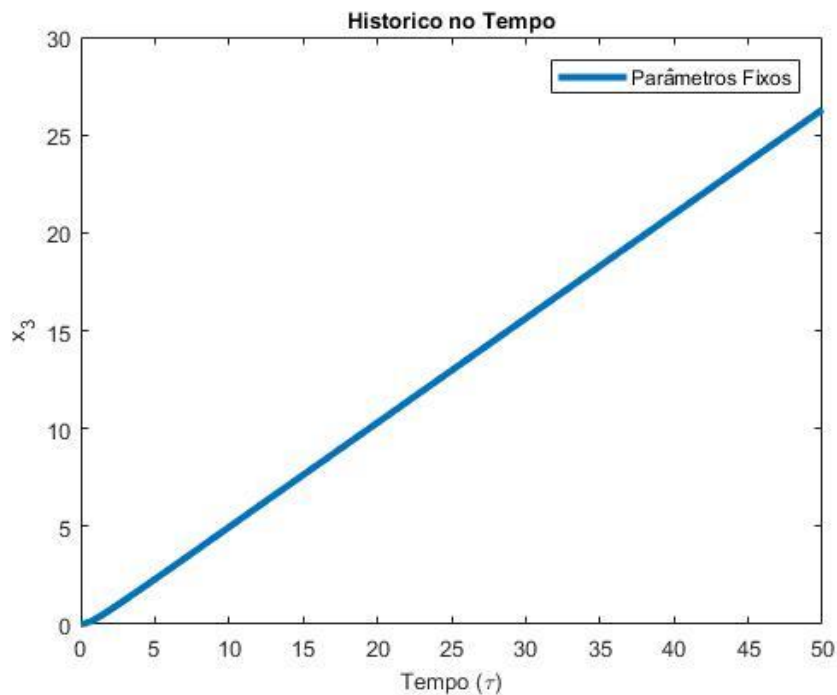
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 22 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos



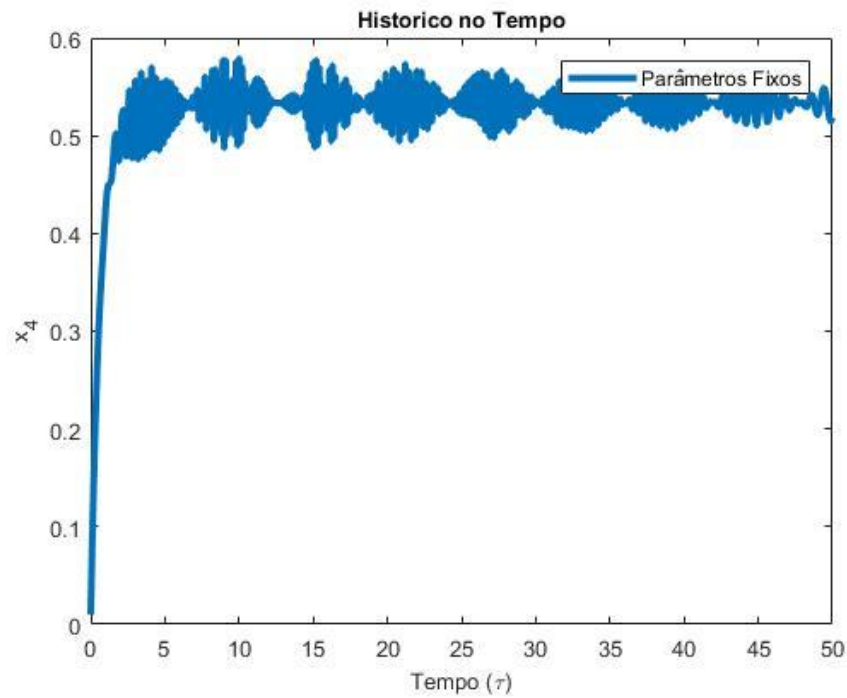
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 23 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_3$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos



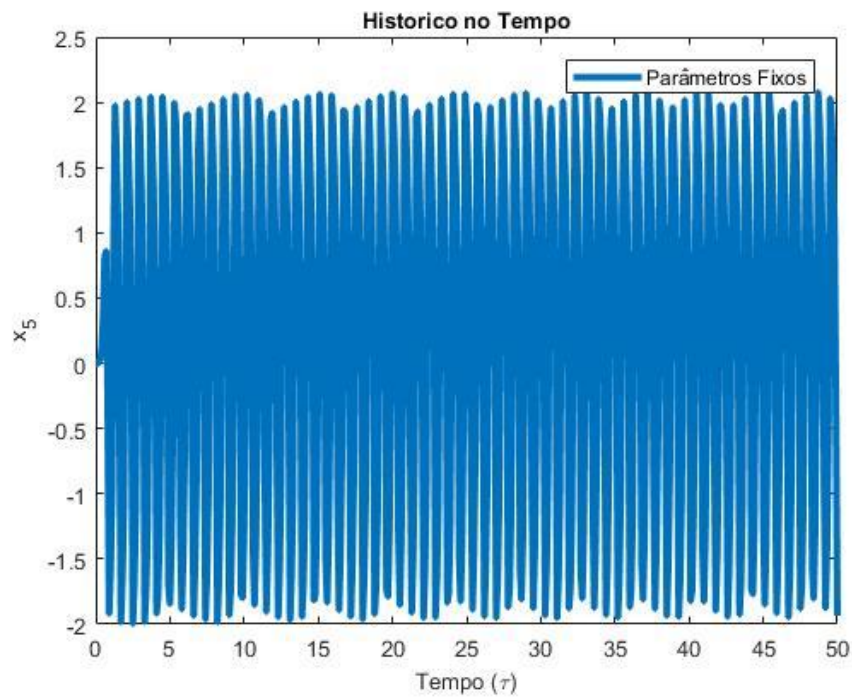
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 24 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_4$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos



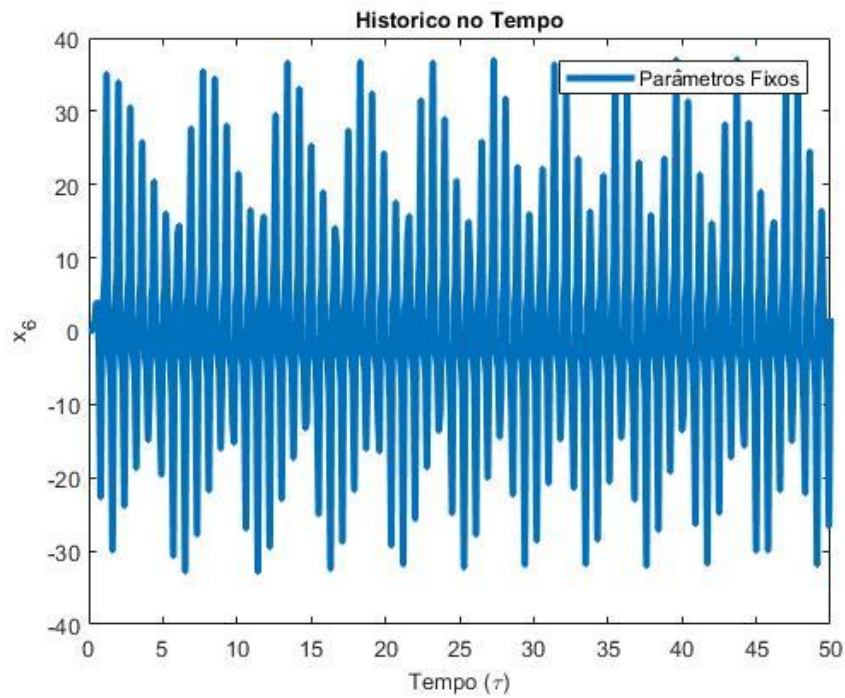
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 25 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_5$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos



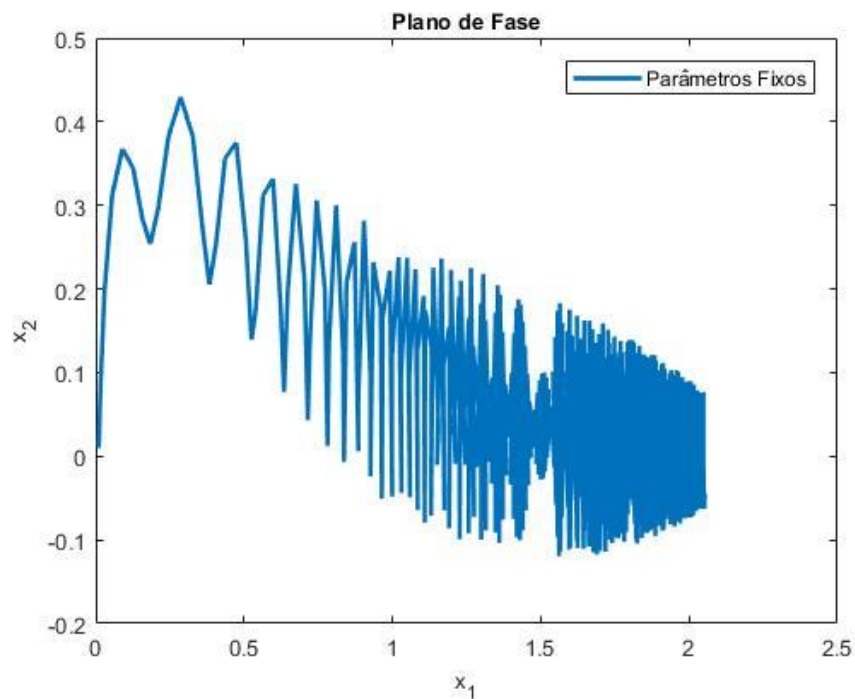
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 26 - Histórico no Tempo: Velocidade para o estado  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos



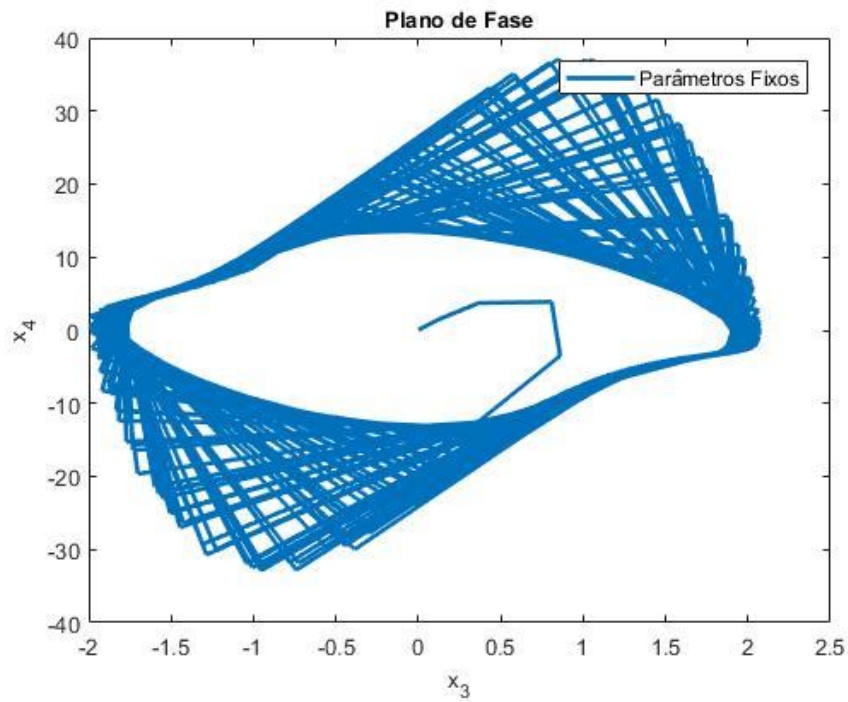
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 27 - Plano de Fase dos estados  $x_1$  e  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu- Van der Pol com parâmetros fixos



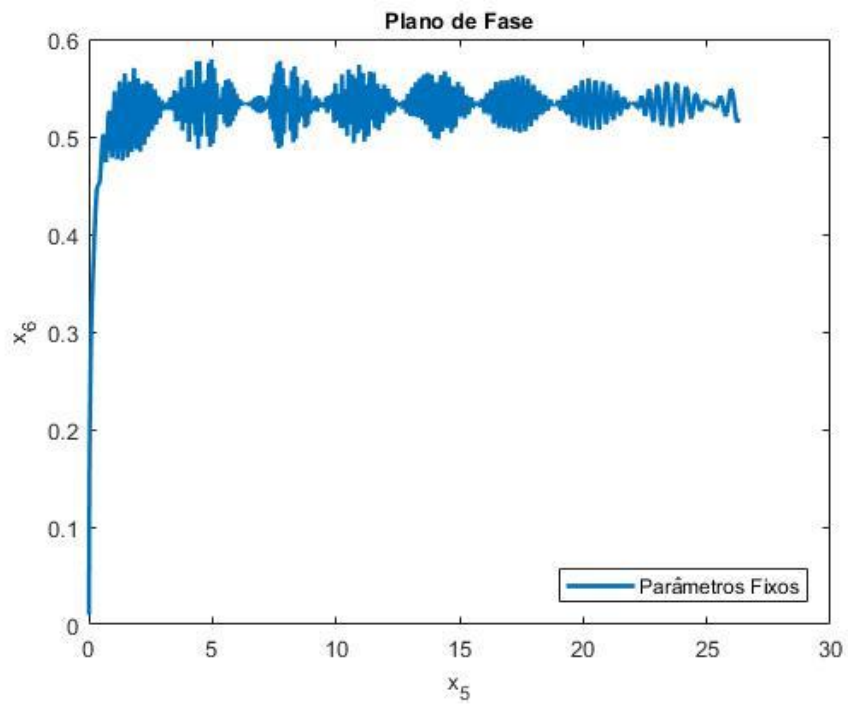
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 28 - Plano de Fase dos estados  $x_3$  e  $x_4$  do modelo Não Ideal Mathieu-Vander Pol com parâmetros fixos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 29 - Plano de Fase dos estados  $x_5$  e  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Vander Pol com parâmetros fixos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Através das figuras 21 a 29, nota-se que o modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos apresenta comportamento caótico, devido a irregularidade das trajetórias. Entretanto, uma outra forma de confirmar esta situação é por meio dos expoentes de Lyapunov.

Aplicando o método de Wolf (WOLF *et al.*, 1985) determina-se os expoentes de Lyapunov do sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol, levando-se em consideração o intervalo de tempo adimensional de,  $0 \leq \tau \leq 100$ .

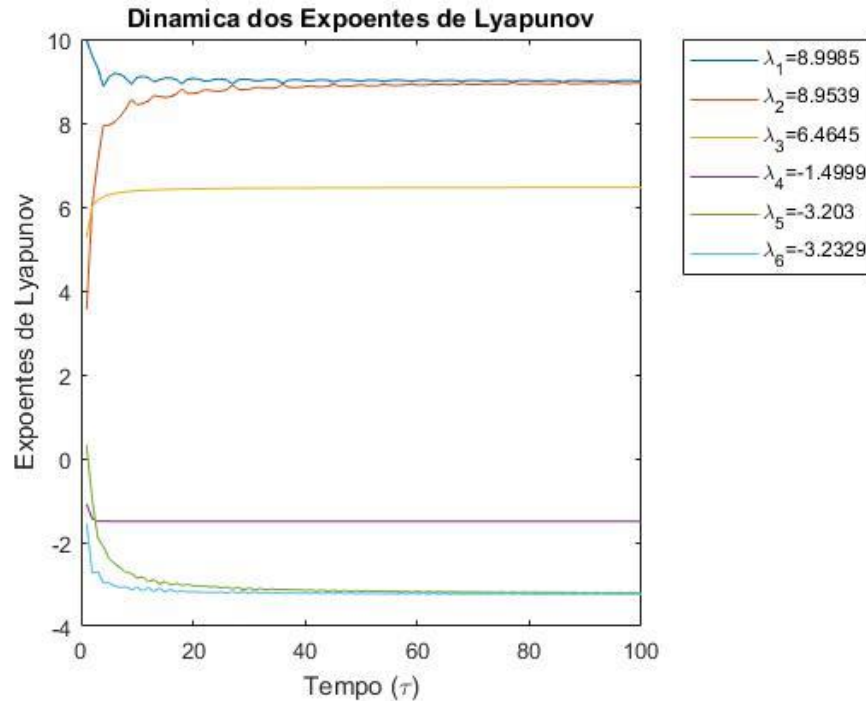
A figura 30 ilustra a evolução dos expoentes de Lyapunov em função do número de iterações. Na tabela 4, encontra-se os valores dos expoentes de Lyapunov.

Tabela 5 – Expoentes de Lyapunov do sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol

<b>Expoente</b>	<b>Valor</b>
$\lambda_1$	8,9985
$\lambda_2$	8,9539
$\lambda_3$	6,4645
$\lambda_4$	-1,4999
$\lambda_5$	-3,2029
$\lambda_6$	-3,2329

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 30 - Dinâmica dos Expoentes de Lyapunov do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Analisando os expoentes de Lyapunov, constata-se que o modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol apresenta comportamento caótico, visto que, dos seis expoentes de Lapunov obtidos, três são de valores positivos.

A presença de três expoentes positivos de Lyapunov confirma que o modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol é hiper caótico.

#### 4.3 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS DO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL COM PARÂMETROS FIXOS E COM PARÂMETROS INCERTOS

No processo de modelagem dos sistemas dinâmicos as incertezas podem ser consideradas através de uma formulação probabilística, com intervalos previamente definidos, ou ainda, por meio da teoria das possibilidades (MOLLER; BEER, 2004). Para considerar o efeito das incertezas do parâmetro no desempenho do controlador, elas são adicionadas ao estado, isto é, as mesmas são associadas à diferença entre valores reais e os parâmetros do modelo matemático com uma

variação de 20%, sendo a função aleatória distribuída normalmente  $r(t) \in [0,1], \forall t$  (CHAVARETTE, 2013).

As simulações numéricas para a obtenção das respostas de deslocamento e velocidade dos sistemas Mathieu, Não Ideal Excitado e Van der Pol foram realizadas aplicando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem na equação (27), usando-se os parâmetros reais listados nas tabelas 5 e 6 (CHAVARETTE, 2012). O intervalo de tempo adimensional considerada foi,  $0 \leq \tau \leq 50$ .

Nas figuras que se seguem adota-se linhas da cor azul para destacar as trajetórias do sistema com parâmetros fixos e linhas da cor vermelha para o sistema com parâmetros incertos.

Tornando-se os parâmetros reais do sistema da seguinte forma, conforme listados nas tabelas 5 e 6 (CHAVARETTE, 2012). Exemplo do procedimento para o parâmetro  $a = 91,7$ .

$$\bar{a} = (91,7 - 20\%) + [91,7 - (91,7 - 20\%)] \times 2 \times r(t) = 73,36 + 36,68 r(t).$$

Tabela 6 - Parâmetros do Modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol

Parâmetro	Valor
$\bar{a}$	$73,36 + 36,68 r(t)$
$\bar{b}$	$4,0184 + 2,0092 r(t)$
$\bar{c}$	$0,008 + 0,004 r(t)$
$\bar{d}$	$72,8 + 36,4 r(t)$
$\bar{e}$	$69,6008 + 34,8004 r(t)$
$\bar{f}$	$14,4 + 7,2 r(t)$
$\bar{g}$	$7,2456 + 3,6228 r(t)$

Fonte: Chavarette (2012).

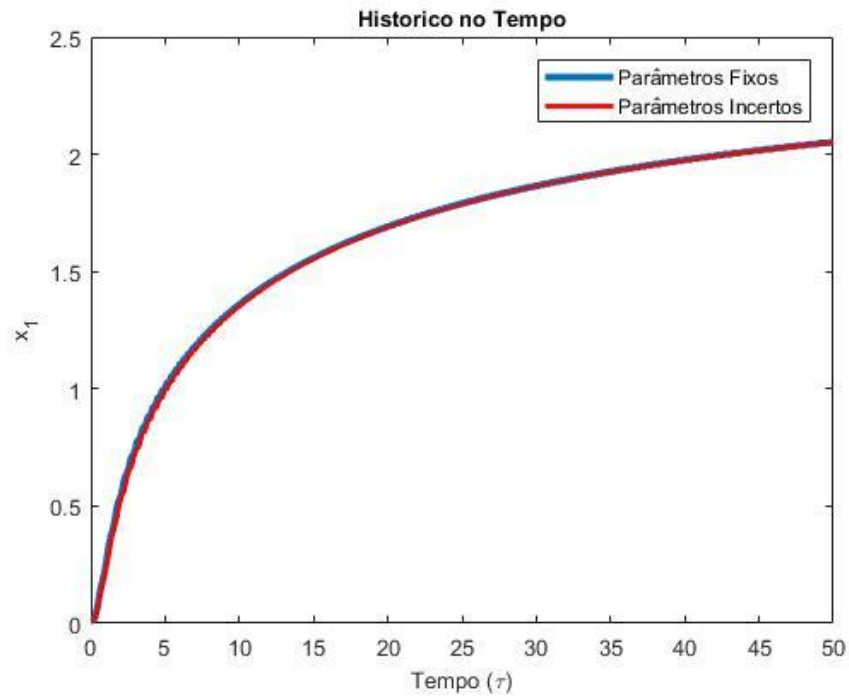
Tabela 7 - Parâmetros da Fonte Não Ideal

Parâmetro	Valor
$\bar{\alpha}$	$0,64 + 0,32 r(t)$
$\bar{\beta}$	$1,2 + 0,6 r(t)$
$\bar{\xi}$	$0,24 + 0,12 r(t)$
$\bar{\mu}$	$0,16 + 0,08 r(t)$

Fonte: Chavarette (2012).

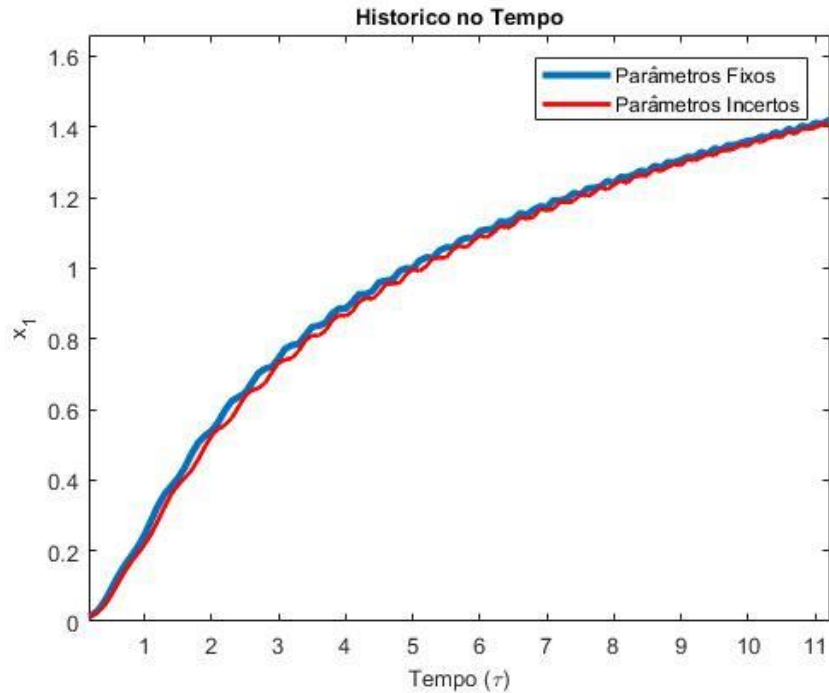
A figura 31 e seu respectivo zoom figura 32 apresenta o histórico no tempo de deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 31 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 32 - Zoom da figura 31

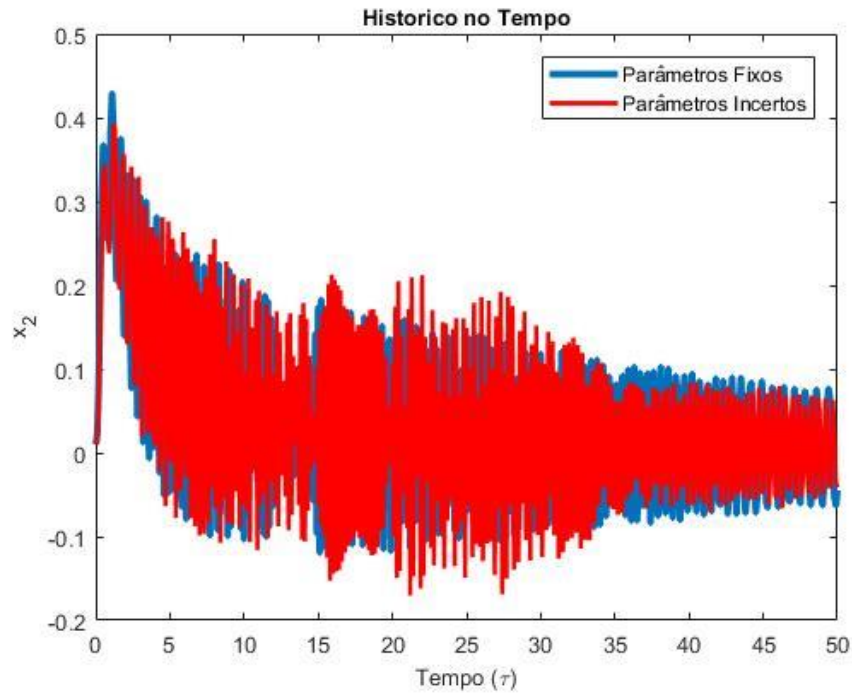


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Através da figura 32 que exibe o zoom de deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos, observa-se que as trajetórias apresentam oscilações no traçado, fato que se justifica pelos 20% aplicados aos parâmetros incertos.

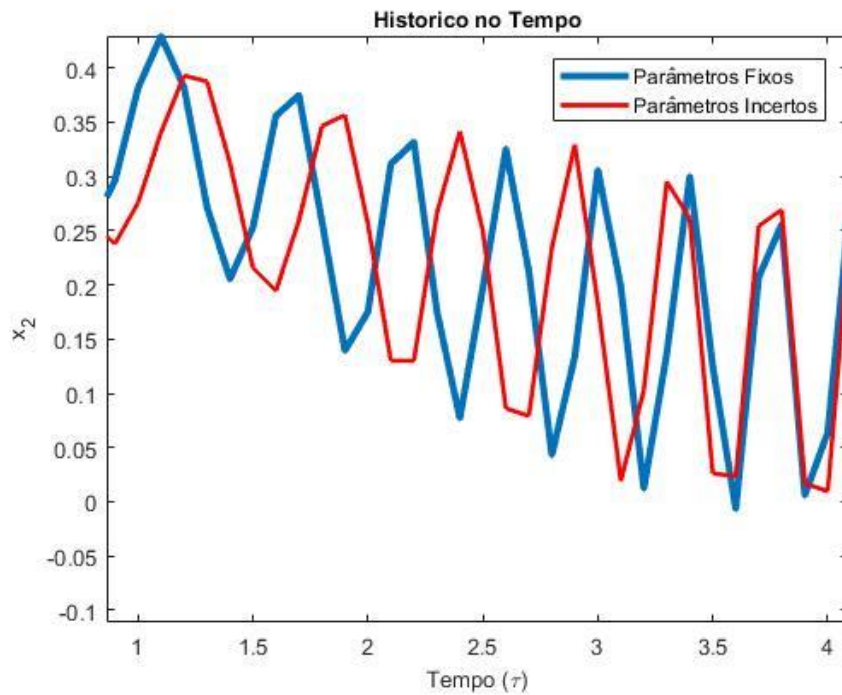
A figura 33 e seu respectivo zoom figura 34 ilustra-se o histórico no tempo da velocidade do estado  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 33 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 34 - Zoom da figura 33



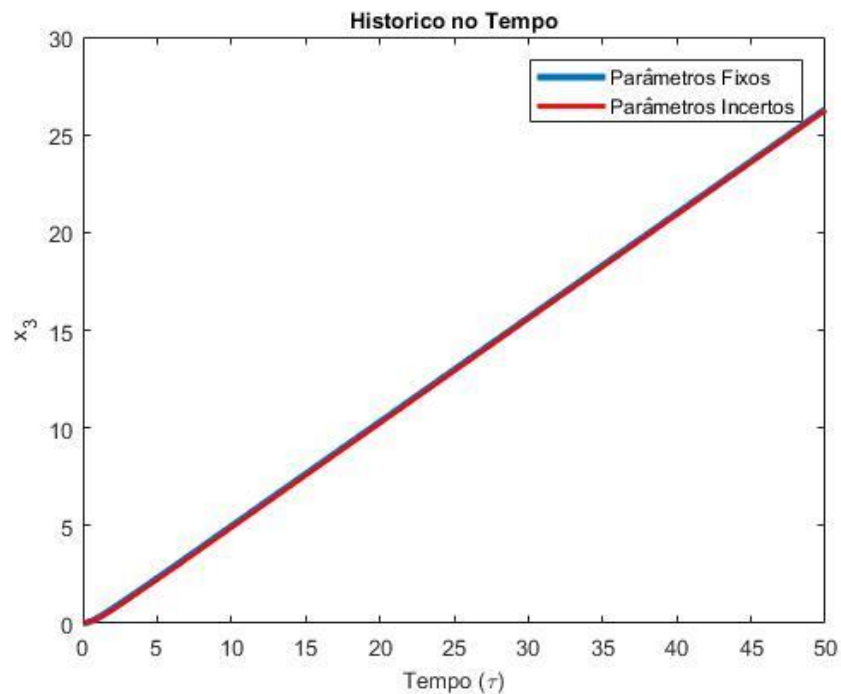
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Pela figura 34 que exibe o zoom da velocidade do estado  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos, nota-se

que as trajetórias exibem oscilações no traçado, fato que se justifica pelos 20% aplicados aos parâmetros incertos.

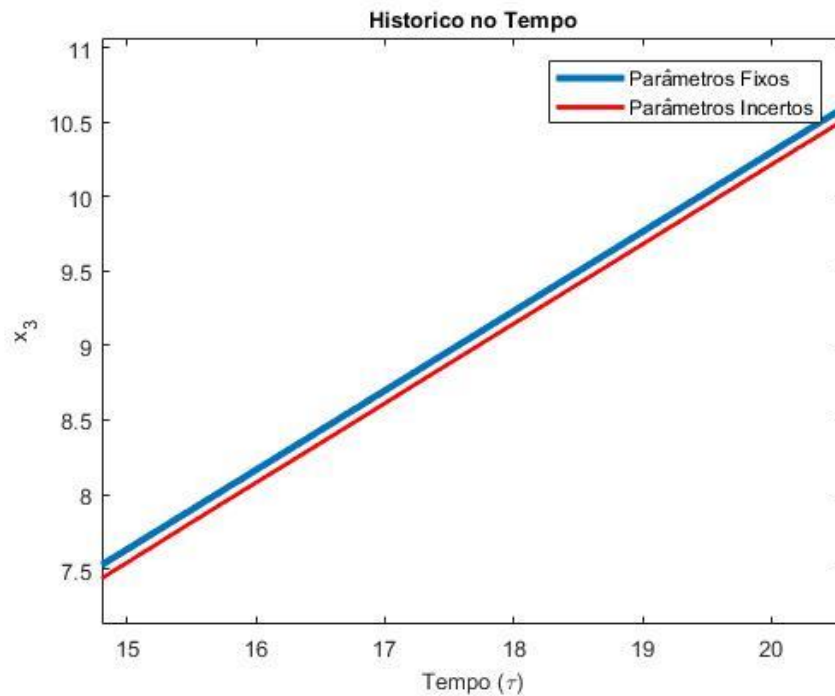
A figura 35 e seu respectivo zoom figura 36 apresentam-se o histórico no tempo de deslocamento do estado  $x_3$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 35 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_3$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 36 - Zoom da figura 35

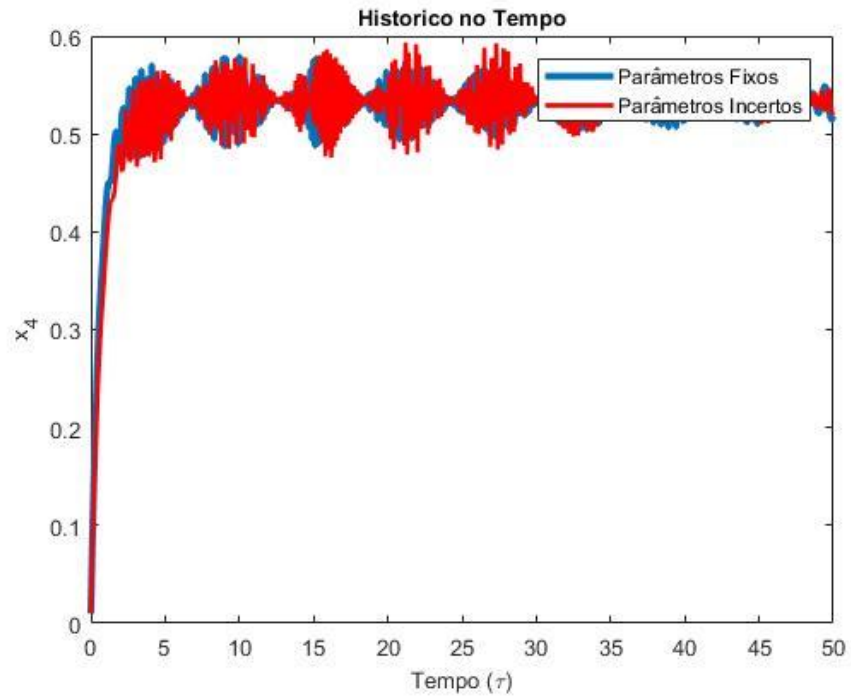


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 36 apresenta o zoom de deslocamento do estado  $x_3$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos, e evidencia-se a diferença dos 20% de incerteza aplicados aos parâmetros incertos.

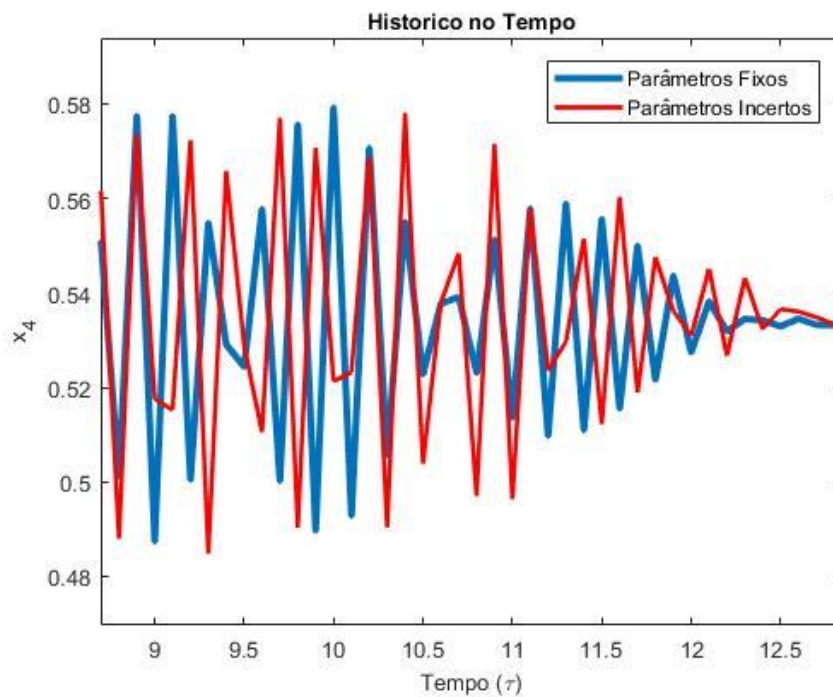
A figura 37 e seu respectivo zoom figura 38 exibe-se o histórico no tempo da velocidade do estado  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 37 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_4$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 38 - Zoom da figura 37

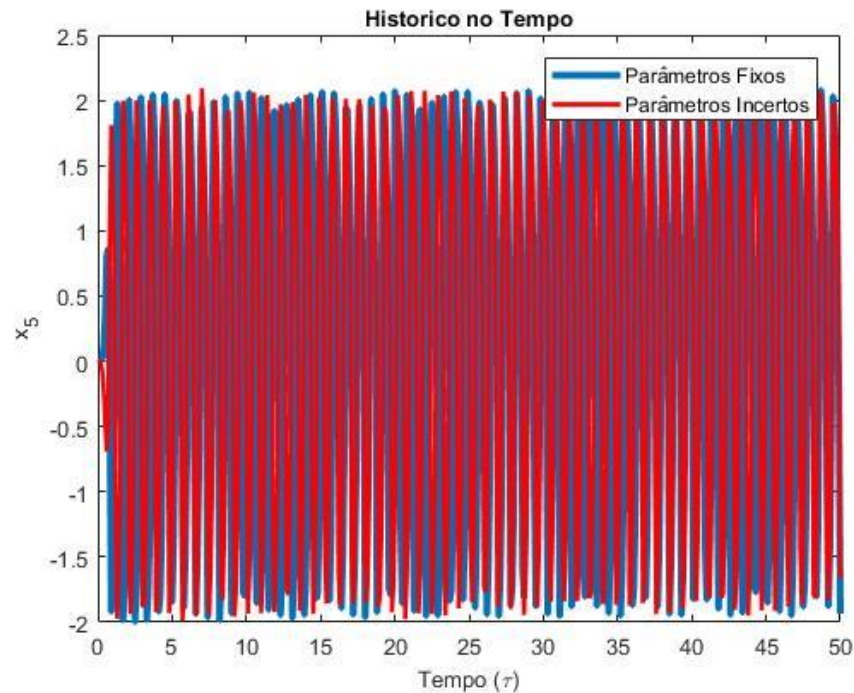


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 38 mostra o zoom da velocidade do estado  $x_4$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos. Observa-se que as trajetórias sofrem oscilações, evidenciando-se o efeito dos 20% de incertezas aplicados nos parâmetros incertos.

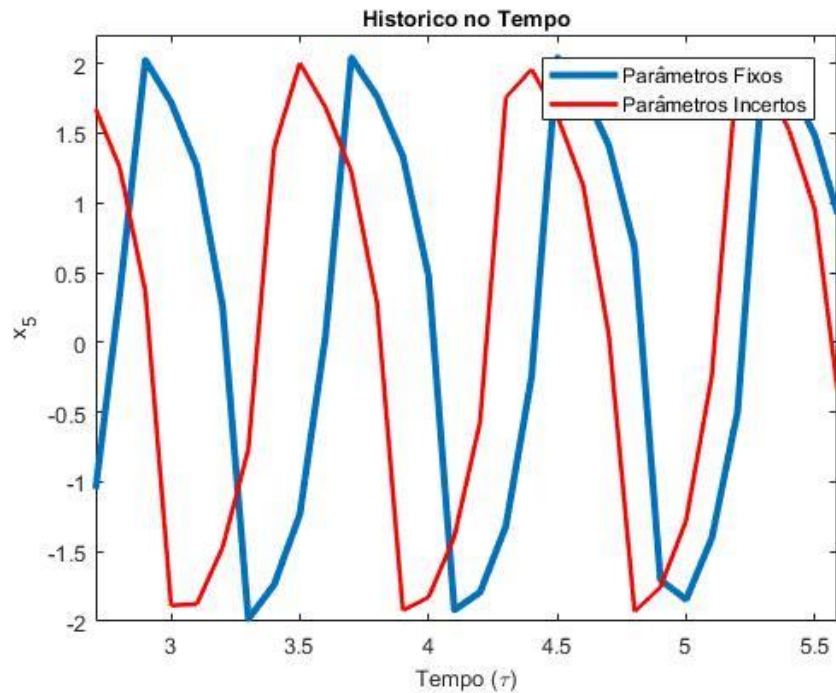
A figura 39 e seu respectivo zoom figura 40 exibe-se o histórico no tempo do deslocamento do estado  $x_5$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 39 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_5$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 40 - Zoom da figura 39

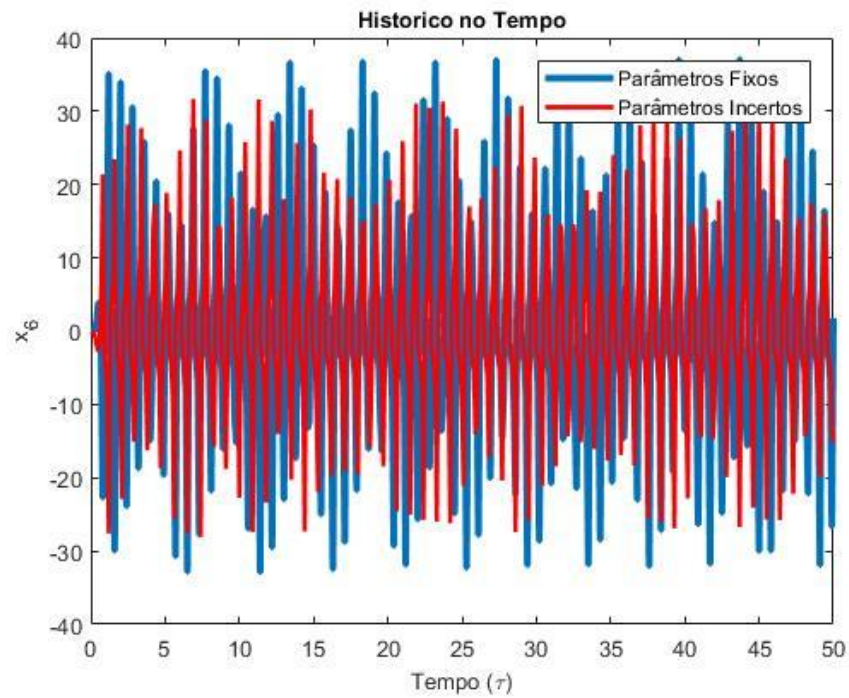


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 40 exibe o zoom de deslocamento do estado  $x_5$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos. Nota-se que as trajetórias com parâmetros fixos e com parâmetros incertos apresentam de oscilações com deslocamento periódico.

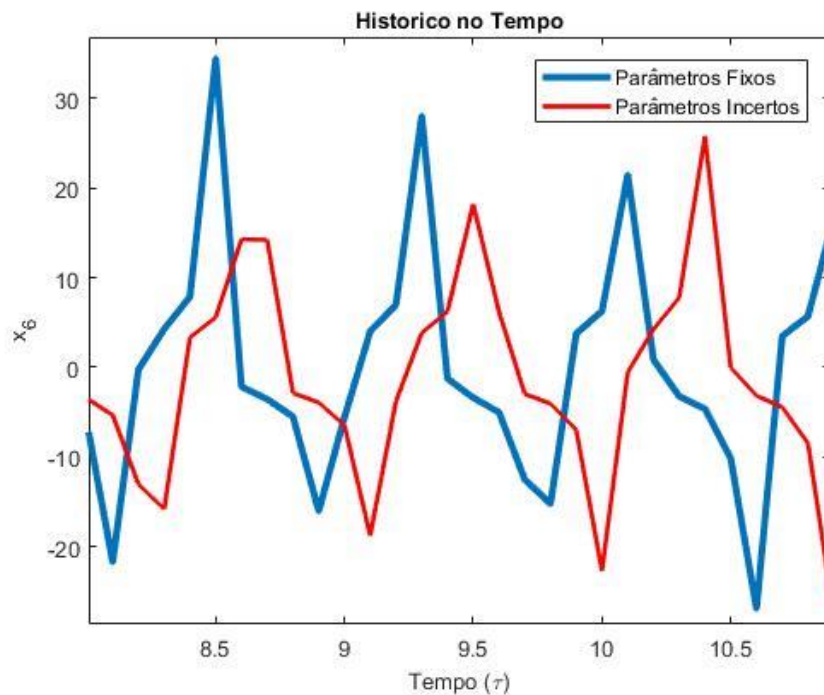
A figura 41 e seu respectivo zoom figura 42 exibe-se o histórico no tempo da velocidade do estado  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 41 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 42 - Zoom da figura 41

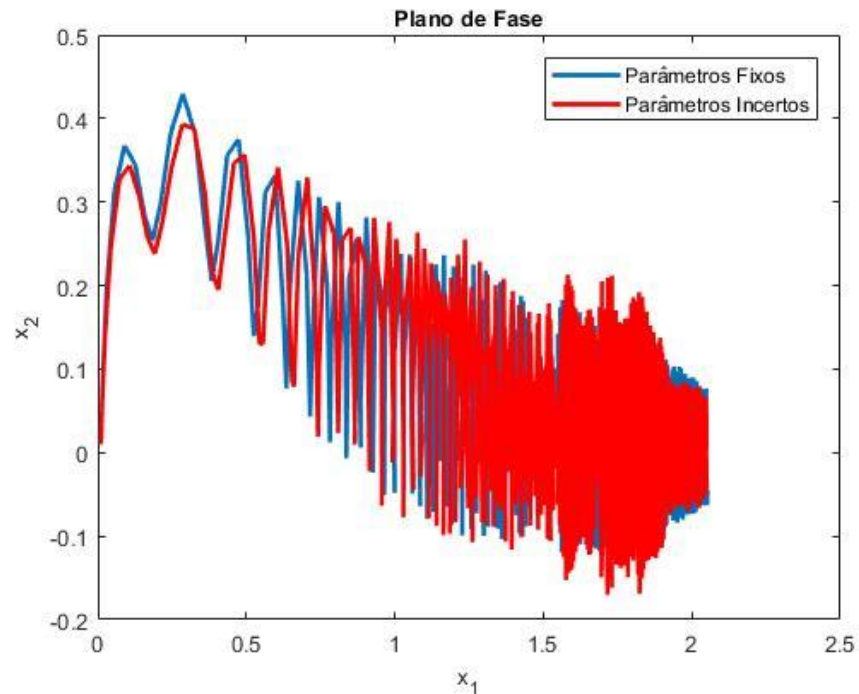


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 42 mostra o zoom da velocidade do estado  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos. Nota-se que a velocidade que das trajetórias apresentam oscilações, evidenciando os 20% de incertezas dos parâmetros incertos.

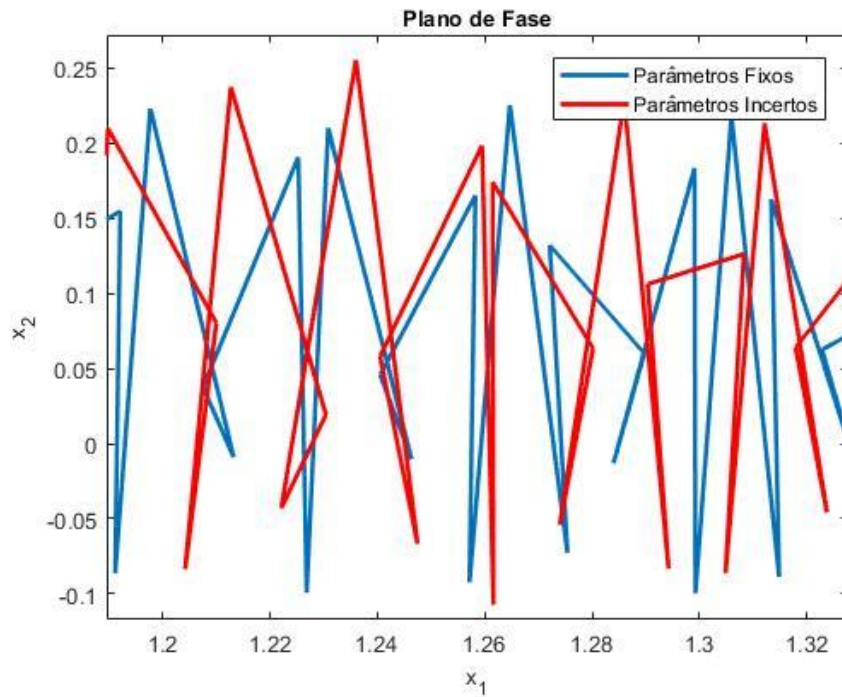
As figuras 43, 44 e 45 exibem-se os Planos de Fase dos pares de estados do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e com parâmetros incertos.

Figura 43 - Plano de Fase dos estados  $x_1$  e  $x_2$ .

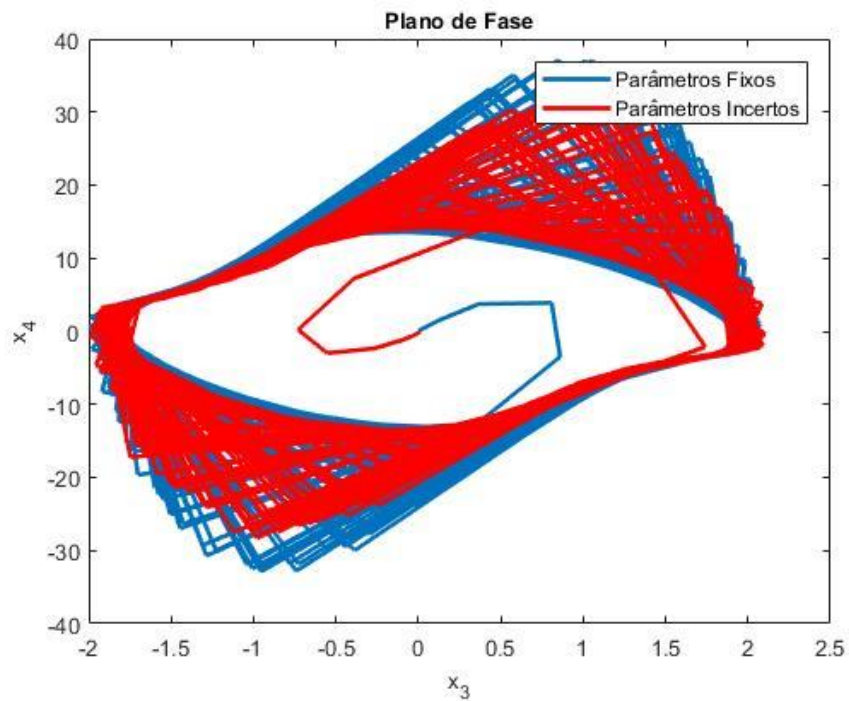


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 44 - Zoom da figura 43

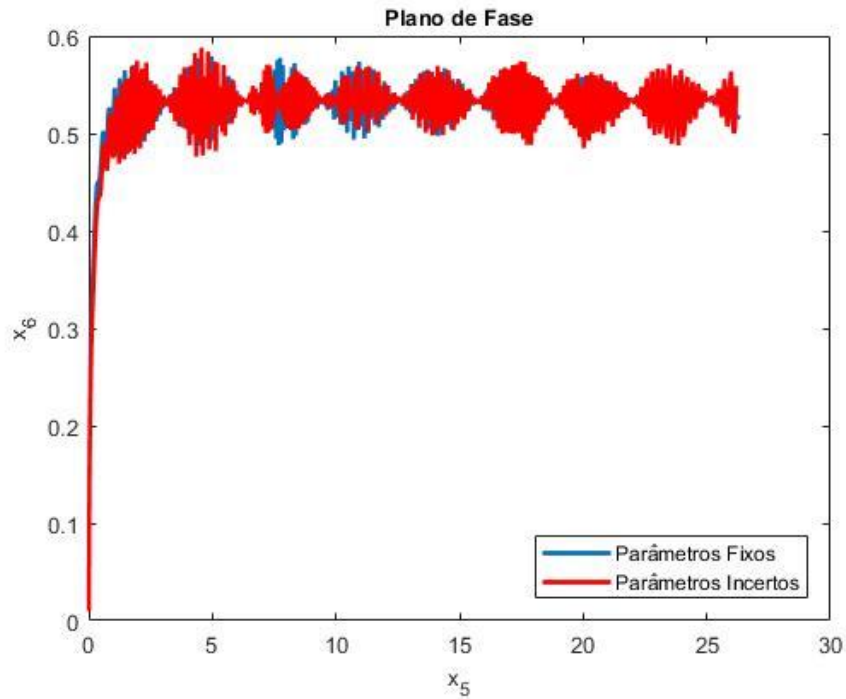


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 45 - Plano de Fase dos estados  $x_3$  e  $x_4$ .

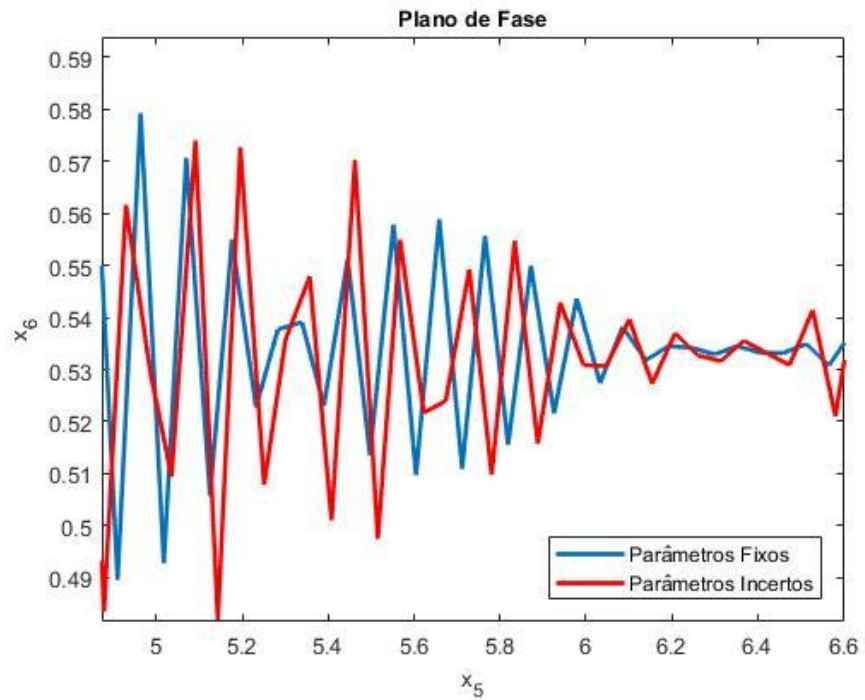
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 46 – Plano de Fase dos estados  $x_5$  e  $x_6$ .



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 47 – Zoom da figura 46



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Através da figura 47, que exibe o plano de fase dos estados  $x_5$  e  $x_6$ , observa-se que o sistema apresenta comportamento caótico, pois exibe oscilações, evidenciando os 20% de incertezas aplicadas nos parâmetros incertos.

Com o objetivo de minimizar as vibrações e reduzir o comportamento caótico no sistema apresentado nas simulações, no capítulo seguinte, propõe-se a aplicação do Controle Linear Ótimo para reduzir este comportamento, a um ponto fixo.

## 5 CONTROLE LINEAR ÓTIMO APLICADO AO MODELO IDEAL E NÃO IDEAL

Neste capítulo, aborda-se a técnica do Controle Linear Ótimo, metodologia que garante a aplicação do controle linear em sistemas não lineares.

A seguir, discute-se a formulação do Controle Linear Ótimo.

### 5.1 CONTROLE LINEAR ÓTIMO

Considerando um sistema não linear controlado dado pela equação (28):

$$\dot{x} = Ax + h(x) + U \quad (28)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é um vetor de estado,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de estado do sistema e com elementos constantes,  $h(x)$  um vetor cujos elementos são funções contínuas e  $U \in \mathbb{R}^m$  o vetor de controle definido pela soma de outros dois vetores  $\tilde{u}$  e  $u_t$ , isto é,

$$U = \tilde{u} + u_t \quad (29)$$

Quando  $U \equiv 0$  o sistema (28) apresenta comportamento caótico para determinados valores dos parâmetros. O objetivo é escolher uma lei de controle  $U$  que conduza o sistema caótico à órbita desejada: um ponto fixo de equilíbrio ou trajetória desejada. Seja  $\tilde{x}$  esta trajetória, então a parte  $\tilde{u}$  é o controle *feedforward* do vetor de controle que mantém o sistema controlado na trajetória desejada, que pode ser escrito como:

$$\tilde{u} = \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - h(\tilde{x}) \quad (30)$$

e o vetor de controle  $u_t$  é o controle *feedback* que estabiliza o sistema em torno da órbita desejada e pode ser expressado como:

$$u_t = Bu \quad (31)$$

onde  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz constante.

Definindo

$$y = x - \tilde{x} \quad (32)$$

como o desvio da trajetória do sistema (28) da trajetória desejada, e admitindo as equações de (29) à (31), chega-se à equação em desvios:

$$\dot{y} = Ay + h(x) - h(\tilde{x}) + Bu \quad (33)$$

A parte não-linear do sistema dado pela equação (32), pode ser escrita como

$$h(x) - h(\tilde{x}) = H(x, \tilde{x})(x - \tilde{x}) \quad (34)$$

onde  $H(x, \tilde{x})$  é uma matriz limitada, cujos elementos dependem de  $x$  e  $\tilde{x}$ . Admitindo (34), o sistema (32) tem a seguinte forma:

$$\dot{y} = Ay + H(x, \tilde{x})y + Bu \quad (35)$$

É relevante destacar que a matriz  $A$  na equação (33) não é única, e pode influenciar no desempenho do controlador.

A seguir apresenta-se o enunciado e a demonstração do Teorema do Controle Linear Ótimo formulado por Rafikov e Balthazar (RAFIKOV; BALTHAZAR, 2005).

**Teorema.** Se existem as matrizes  $Q$  e  $R$ , definidas positivas, sendo  $Q$  simétrica, tais que a matriz:

$$\tilde{Q} = Q - H^T(x - \tilde{x})P - PH(x - \tilde{x}) \quad (36)$$

seja definida positiva para  $G$  limitada, então o controle linear feedback

$$u = -R^{-1}B^T P y \quad (37)$$

é ótimo para transferir o sistema não-linear definido pela equação (35) de qualquer estado inicial ao estado final

$$y(\infty) = 0 \quad (38)$$

minimizando o funcional

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q}y + u^T Ru) dt, \quad (39)$$

onde  $P$  é uma matriz simétrica, positiva definida, é calculada da equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (40)$$

onde as matrizes  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $R \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são constantes, definidas positivas<sup>10</sup>.

**Demonstração.** Considere o controle ótimo linear feedback (37) com a matriz  $P$  determinada pela equação (40) que transfere o sistema não-linear (35) de qualquer estado inicial para o estado final (39), minimizando o funcional (40), onde a matriz  $\tilde{Q}$  precisa ser determinada. De acordo com as regras da Programação Dinâmica, se o mínimo do funcional (35) existe, e se  $V$  é uma função suave das condições iniciais, então ela satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman:

$$\min_u \left( \frac{dV}{dt} + y^T \tilde{Q}y + u^T Ru \right) = 0 \quad (41)$$

Considerando uma função de Lyapunov na forma

$$V = y^T P(t)y \quad (42)$$

onde  $P(t)$  é uma matriz simétrica definida positiva e satisfaz a equação algébrica matricial de Riccati (40), a derivada da função  $V$ , avaliada na trajetória ótima com controle (37) é

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{y}^T P(t)y + y^T \dot{P}(t)y + y^T P \dot{y} \\ \dot{V} &= [y^T A^T(t) + y^T H^T(y) - y^T P(t)B(R^{-1})^T B^T]P(t)y + y^T \dot{P}(t)y \\ &\quad + y^T P(t)[A(t)y + H(y)y - BR^{-1}B^T P(t)y] \end{aligned}$$

Substituindo  $\dot{V}$  na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman (43), obtemos:

$$y^T [\dot{P} + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + H^T(y)P + PH(y) + \tilde{Q}] y = 0$$

---

<sup>10</sup> Uma matriz  $M$  é definida positiva, se e somente,  $x^T M x > 0$ ; para qualquer  $x \neq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$

Então:

$$\tilde{Q} = Q(t) - H^T(y)P(t) - P(t)H(y).$$

Para as matrizes positivas definidas  $\tilde{Q}$  e  $R$ , a derivada da função (42), é dada por  $\dot{V} = -y^T \tilde{Q}y - u^T Ru$ , e é definida negativa. Então, a função (42), é uma função de Lyapunov e, de acordo com a teoria de estabilidade de Lyapunov, podemos concluir que o sistema controlado (35), é localmente assintoticamente estável. Integrando a derivada da função de Lyapunov (42) dada por  $\dot{V} = -y^T \tilde{Q}y - u^T Ru$ , avaliada na trajetória ótima do sistema, obtêm-se  $J_{min} = y_0^T P(0)y_0$ .

Entretanto, se  $\Gamma = \mathbb{R}^n$ , a estabilidade é assintótica global visto que a função de Lyapunov (39) é radialmente ilimitada, ou seja,  $V(y) \rightarrow \infty$  quando  $\|y\| \rightarrow \infty$ .

De acordo com a teoria do Controle Linear Ótimo de sistemas lineares com funcional quadrático a solução da equação algébrica matricial de Riccati (35) é uma matriz simétrica e definida positiva  $P > 0$  para todo  $R > 0$  e  $Q \geq 0$  dados. Portanto conclui-se a demonstração do teorema de Rafikov e Balthazar (RAFIKOV, BALTHAZAR, 2005).

## 5.2 PROJETO DE CONTROLE LINEAR ÓTIMO APLICADO AO MODELO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

Aplicando o projeto de Controle Linear Ótimo no Modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, a equação (43) a seguir, descreve o modelo Ideal Mathieu-Van der Pol controlado.

$$\dot{x}_1 = x_2 + U$$

$$\dot{x}_2 = -(a + b x_3)x_1 - (a + b x_3)x_1^3 - cx_2 + d x_3 \quad (43)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -ex_3 + f(1 - x_3^2)x_4 + gx_1$$

onde a função de controle  $U$  é definida pela equação (28).

Daí, temos as matrizes:

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  matriz constante,  $y = \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \\ x_4 - \tilde{x}_4 \end{pmatrix}$  matriz que representa a diferença entre a

trajetória e o caminho desejado, matriz  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  que indica o caminho desejado,

matriz  $Q = I_4$  matriz identidade de ordem 4 e

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -91,7777 & -0,01 & 90,9497 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9,0572 & 0 & -87,0046 & 17,9982 \end{pmatrix},$$

onde a controlabilidade da matriz  $R$  do modelo para o par  $[A, B]$  é obtida por

$$R = [B|AB|A^2B|A^3B] \neq 0.$$

Assim,  $R = (1)$ . Em seguida, a matriz  $P$  é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0,4349 & -0,0018 & -0,0448 & -0,0135 \\ -0,0018 & 0,0043 & 0,0110 & -0,0056 \\ -0,4482 & 0,0110 & 1,1717 & -0,1709 \\ -0,0135 & -0,0056 & -0,1709 & 0,0578 \end{pmatrix}$$

Resolvendo a equação algébrica de Riccati (40), obtêm-se o controle ótimo  $u$  que tem a seguinte forma:

$$u = -2,8743x_1 + 0,7939x_2 + 56,3594x_3 - 13,2351x_4.$$

### 5.3 PROJETO DE CONTROLE LINEAR ÓTIMO APLICADO AO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

O projeto de Controle Linear Ótimo para o modelo não ideal Mathieu-Van der Pol, visa reduzir o movimento oscilatório do modelo para um ponto estável.

Pela equação (27), temos:

$$\dot{y}_1 = y_2 + U$$

$$\dot{y}_2 = \frac{-(a + b y_5)y_1 - (a + b y_5)y_1^3 - cy_2 + dy_5 + \mu y_4^2 \cos y_3 + (\alpha - \beta y_4)\mu \operatorname{sen} y_3}{1 - \mu \xi (\operatorname{sen} y_3)^2}$$

$$\dot{y}_3 = y_4 \quad (44)$$

$$\dot{y}_4 = \frac{\varepsilon[-(a + b y_5)y_1 - (a + b y_5)y_1^3 - cy_2 + dy_5] \operatorname{sen} y_3 + \mu \varepsilon y_4^2 \cos y_3 \operatorname{sen} y_3 + \alpha - \beta y_4}{1 - \mu \xi (\operatorname{sen} y_3)^2}$$

$$\dot{y}_5 = y_6$$

$$\dot{y}_6 = -e y_5 + f(1 - y_5^2)y_6 + g y_1$$

onde a função de controle  $U$  é definida pela equação (28).

Obtém-se, as matrizes:

$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  matriz constante do tipo  $6 \times 1$ ,  $y = \begin{pmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \\ x_4 - \tilde{x}_4 \\ x_5 - \tilde{x}_5 \\ x_6 - \tilde{x}_6 \end{pmatrix}$  matriz que representa a

diferença entre a trajetória e o caminho desejado, matriz  $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  que indica o

caminho desejado, matriz  $Q = I_6$  matriz identidade de ordem 6 e,

$$e A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -91,77 & -0,01 & 91,10 & 0 & 0 & 0 \\ 9,50 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,09 & 0 & 0,09 & -1,49 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 9,50 & 0 & 0 & 0 & -87,00 & 17,99 \end{pmatrix},$$

onde a controlabilidade da matriz  $R$  do sistema para o par  $[A, B]$  é obtida por

$$R = [B|AB|A^2B|A^3B|A^4B|A^5B].$$

Assim,  $R = (1)$ . Em seguida, a matriz  $P$  é dada por:

$$P = 10^4 \begin{pmatrix} 0,216 & 0,031 & 0,406 & -0,030 & -0,647 & 0,040 \\ 0,031 & 0,004 & 0,058 & -0,004 & -0,093 & 0,005 \\ 0,406 & 0,058 & 0,767 & -0,058 & -1,218 & 0,071 \\ -0,030 & -0,004 & -0,058 & 0,004 & 0,092 & -0,005 \\ -0,647 & -0,093 & -1,218 & 0,092 & 1,944 & -0,123 \\ 0,040 & 0,005 & 0,076 & -0,005 & -0,123 & 0,008 \end{pmatrix}$$

e o controle ótimo

$$u = 10^2(1,6765x_1 + 0,2493x_2 + 3,2667x_3 - 0,2353x_4 - 4,6331x_5 + 0,2116x_6).$$

## 6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações numéricas para a obtenção das respostas de deslocamento e velocidade dos sistemas Mathieu, Não Ideal Excitado e Van der Pol foram realizadas aplicando-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem na equação (44), usando-se os parâmetros reais listados nas tabelas 1, 2, 4, 5 e 6 (CHAVARETTE, 2012). O intervalo de tempo adimensional considerada foi,  $0 \leq \tau \leq 50$ .

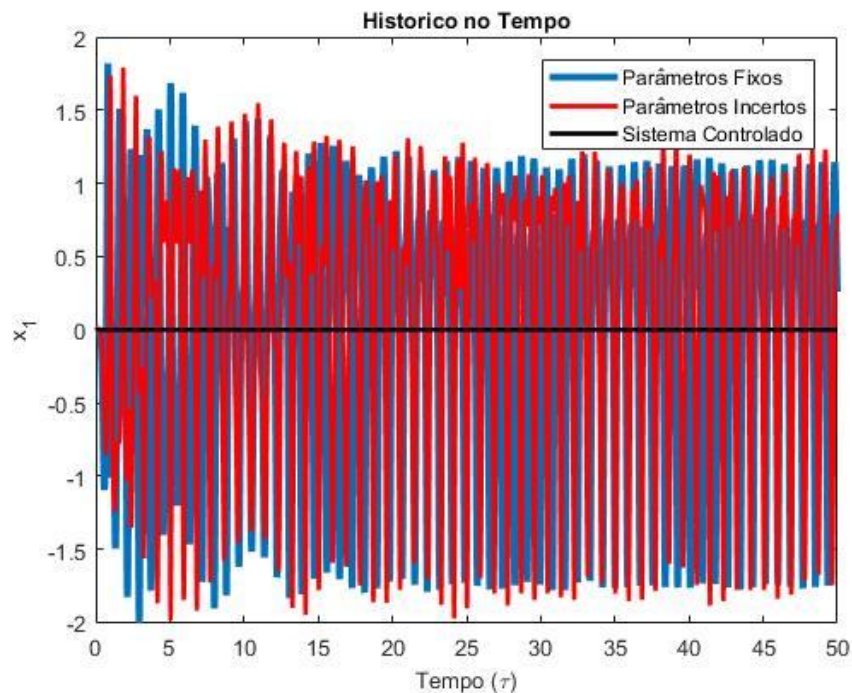
### 6.1 RESULTADOS DO MODELO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

As trajetórias do modelo Ideal, sem e com controle, são ilustradas nas figuras 48 a 57, e exibem o histórico no tempo em relação ao deslocamento e velocidade e plano de fase, respectivamente para os estados do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol, com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado.

As figuras 48 e 52 e seus respectivos zoons figuras 49 e 53 apresentam o histórico no tempo de deslocamento dos estados  $x_1$  e  $x_3$ , as figuras 50 e 54 e seus respectivos zoons figuras 51 e 55 exibem o histórico no tempo da velocidade dos estados  $x_2$  e  $x_4$  e as figuras 56 e 57 mostram os planos de fase dos pares de estados do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.

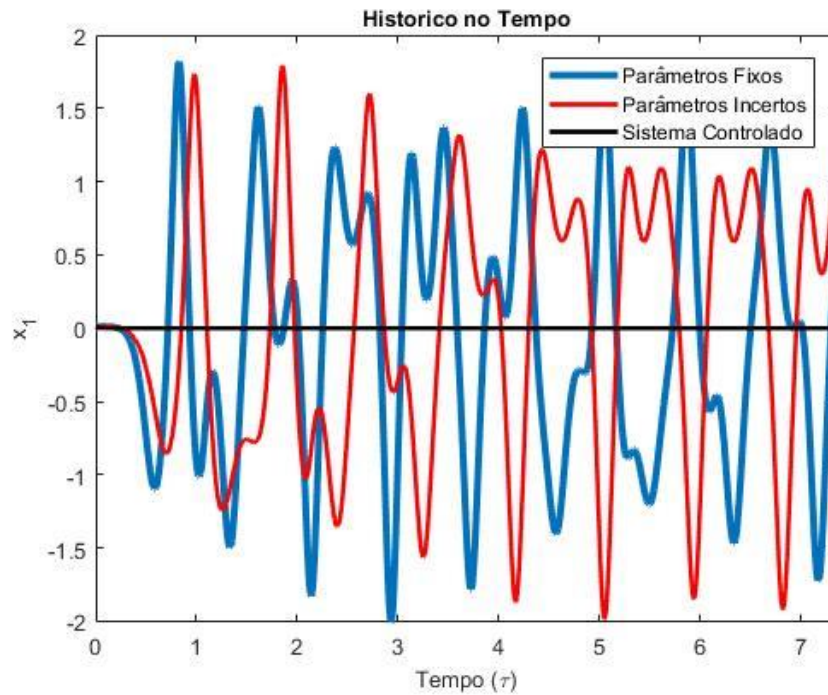
A figura 48 e seu respectivo zoom figura 49 apresenta o histórico no tempo: deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.

Figura 48 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, incertos e do sistema controlado.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

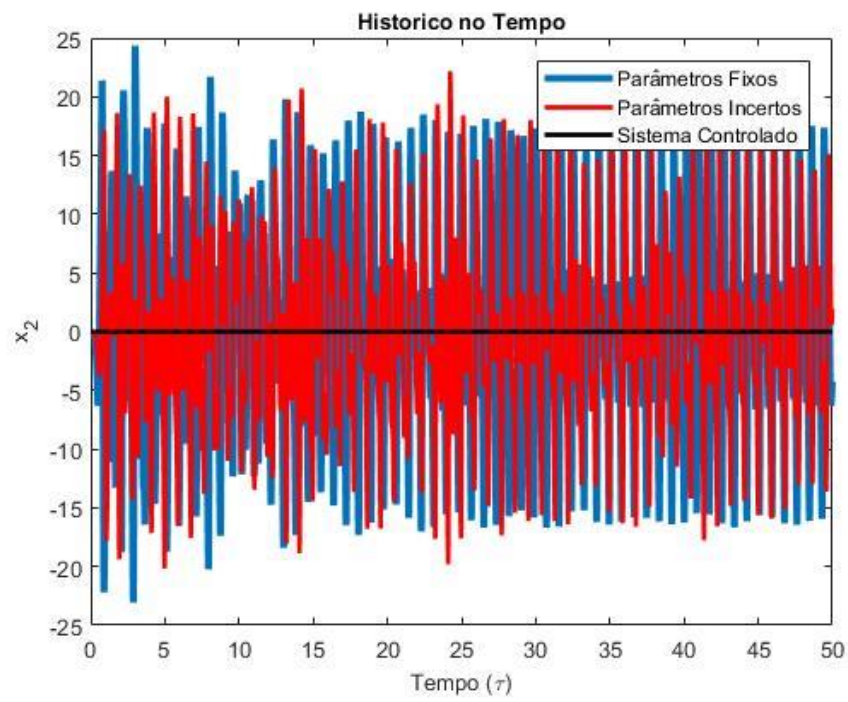
Figura 49 - Zoom da figura 48



Fonte: Elaboração do próprio autor.

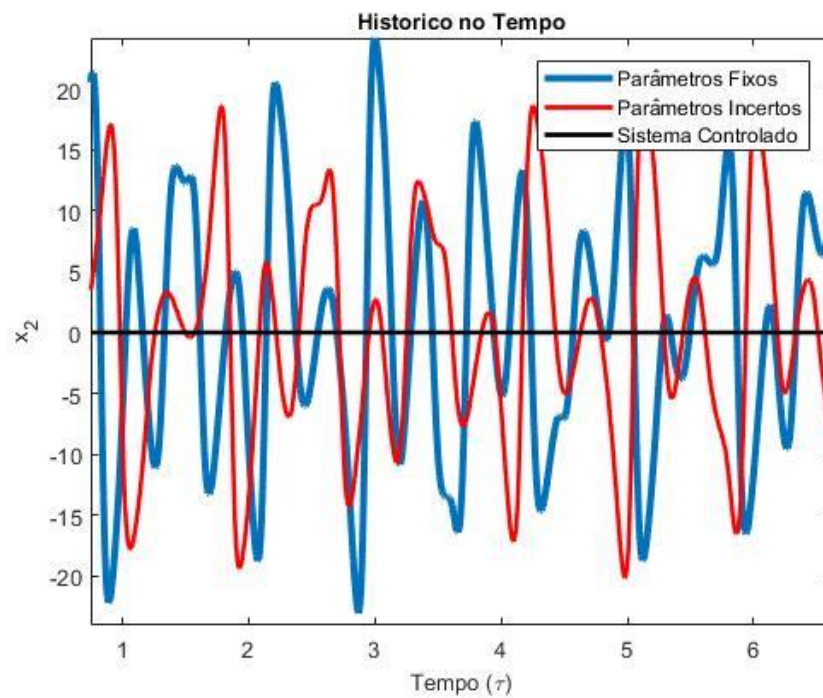
A figura 50 e seu respectivo zoom figura 51 apresenta o histórico no tempo: velocidade para o estado  $x_2$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.

Figura 50 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_2$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

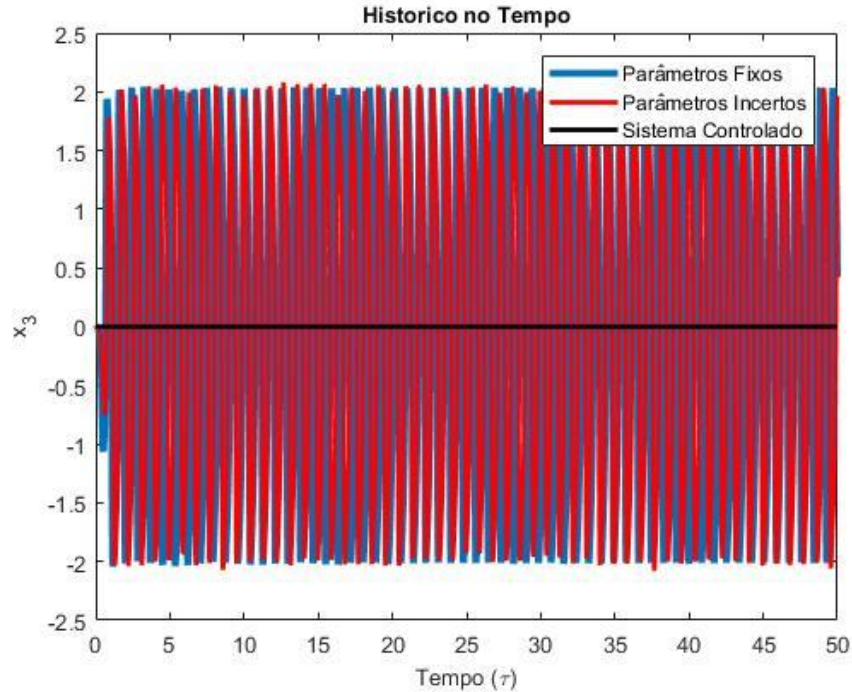
Figura 51 - Zoom da figura 50



Fonte: Elaboração do próprio autor.

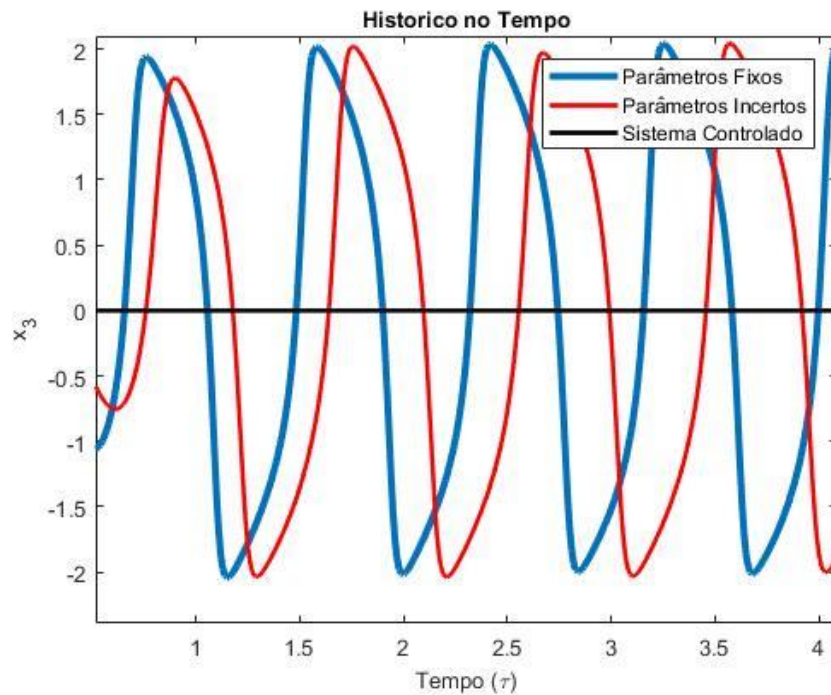
A figura 52 e seu respectivo zoom figura 53 apresenta o histórico no tempo: deslocamento do estado  $x_3$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.

Figura 52 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_3$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

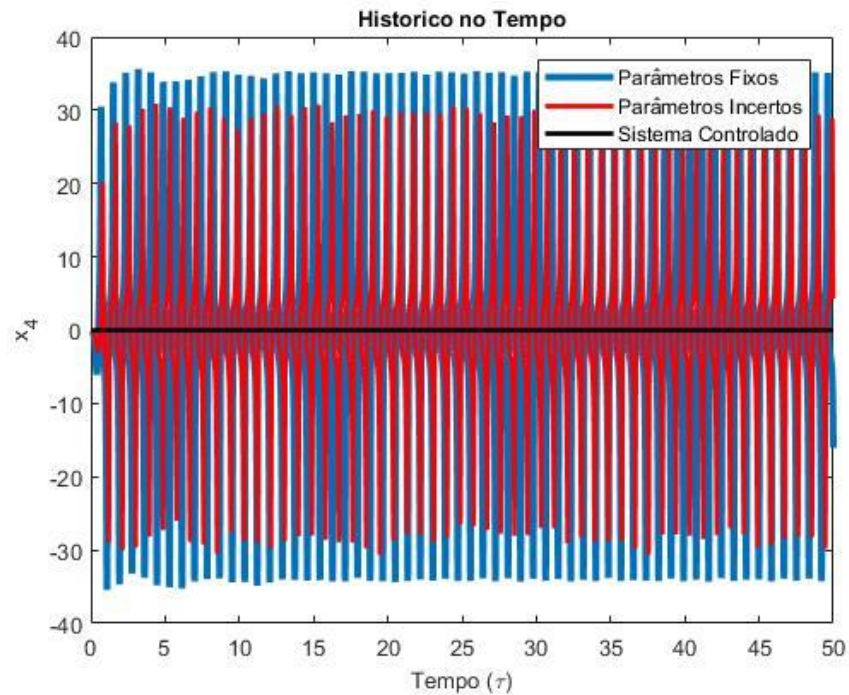
Figura 53 - Zoom da figura 52



Fonte: Elaboração do próprio autor.

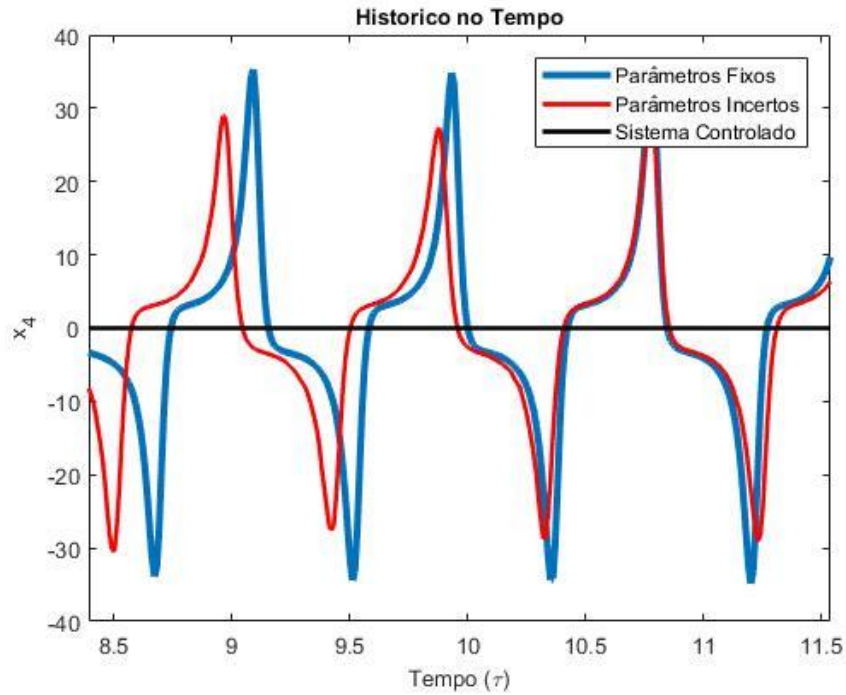
A figura 54 e seu respectivo zoom figura 55 apresenta o histórico no tempo: velocidade do estado  $x_4$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado.

Figura 54 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_4$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado



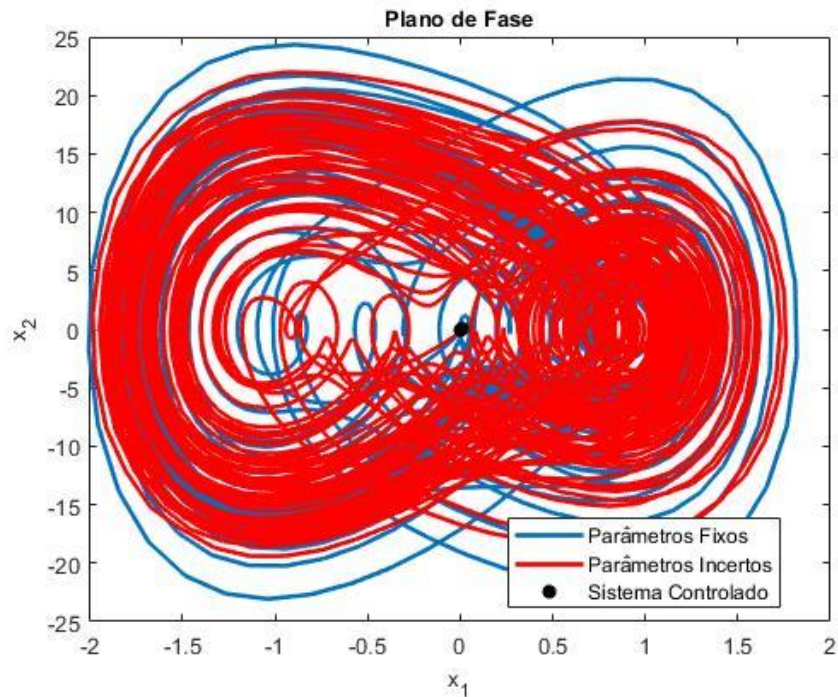
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 55 - Zoom da figura 54



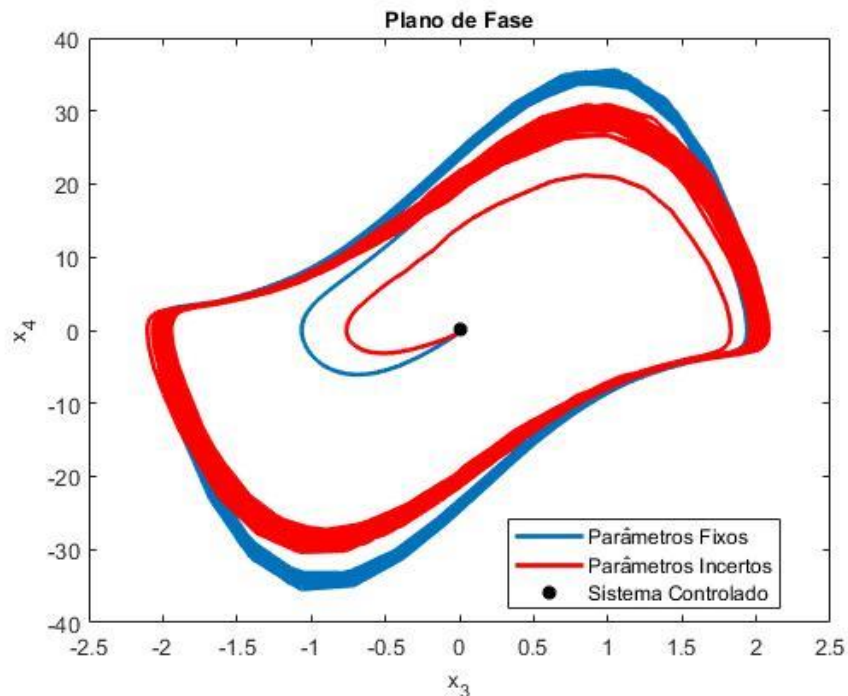
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 56 - Plano de Fase dos estados  $x_1$  e  $x_2$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 57 - Plano de Fase dos estados  $x_3$  e  $x_4$  do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e do sistema controlado



Através das figuras 56 e 57, tem-se que as trajetórias do sistema Ideal Mathieu-Van der Pol com controle converge para um ponto fixo.

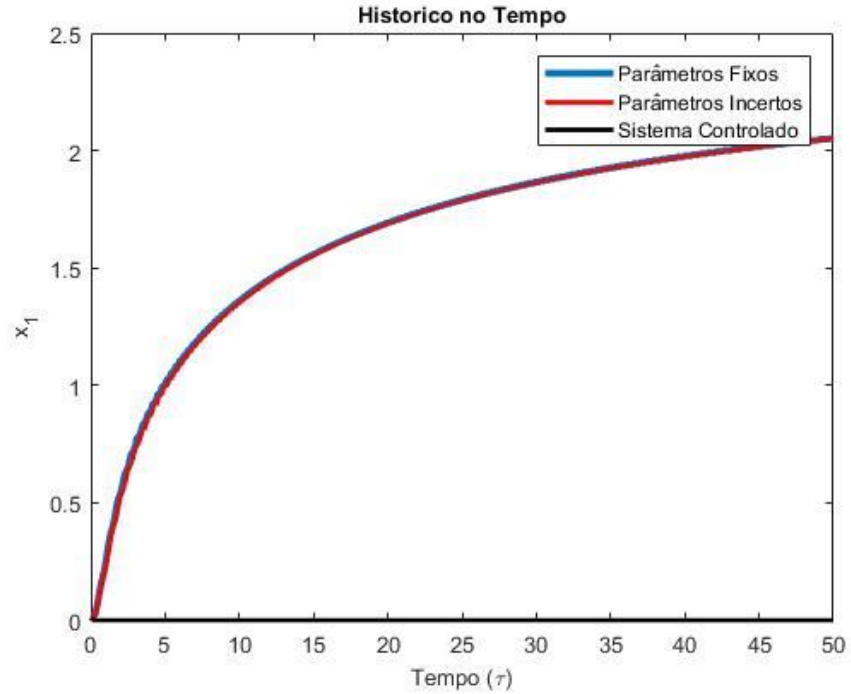
Conclui-se por meio das figuras 48 a 57, que o método de Controle Linear Ótimo proposto é eficiente para eliminar o comportamento caótico do modelo Ideal Mathieu-Van der Pol, visto que a trajetória do sistema controlado se estabilizou em um ponto fixo.

## 6.2 RESULTADOS DO MODELO NÃO IDEAL MATHIEU-VAN DER POL

As simulações numéricas de um sistema não ideal permitem a verificação de características importantes do modelo dinâmico provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação.

A figura 58 apresenta o histórico no tempo para o deslocamento  $x_1$ , com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado.

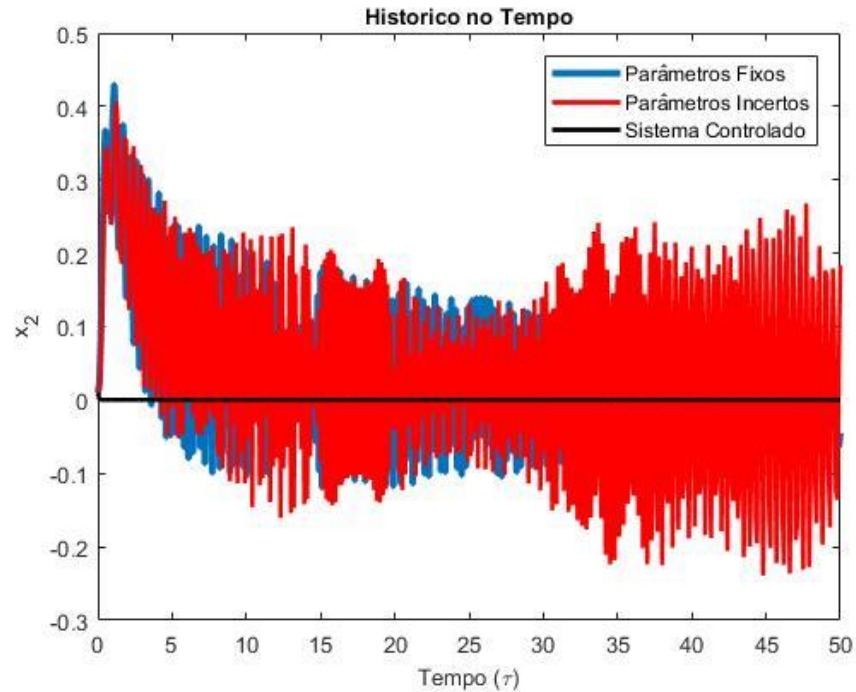
Figura 58 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_1$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos, parâmetros incertos e sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 59 apresenta o histórico no tempo para a velocidade do estado  $x_2$ , do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado.

Figura 59 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e do sistema controlado

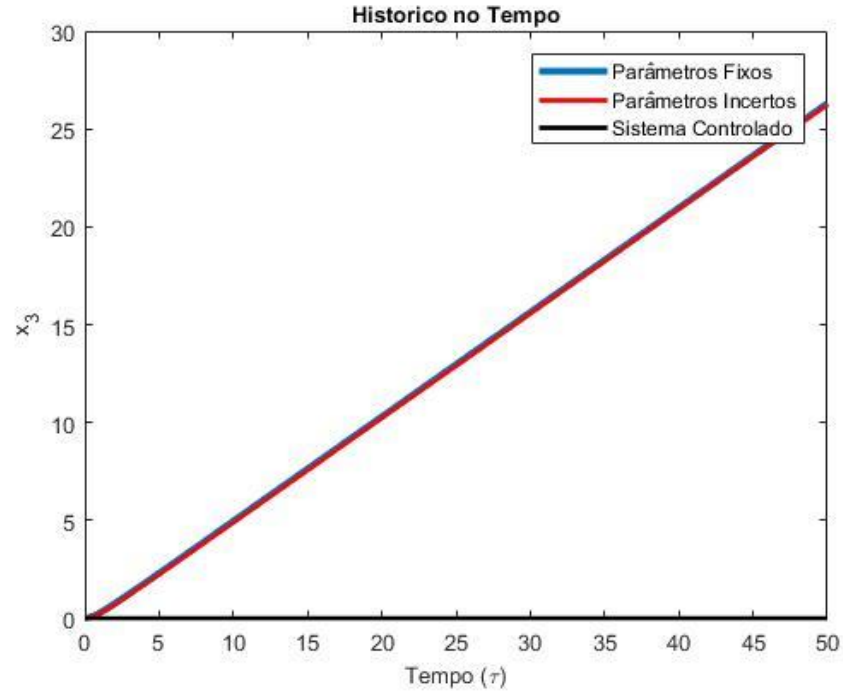


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Das figuras 58 e 59, observa-se que, a trajetória com o controle não sofre oscilações, ou seja, se estabilizou em uma trajetória horizontal.

A figura 60 apresenta o histórico no tempo para o deslocamento  $x_3$ , do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado.

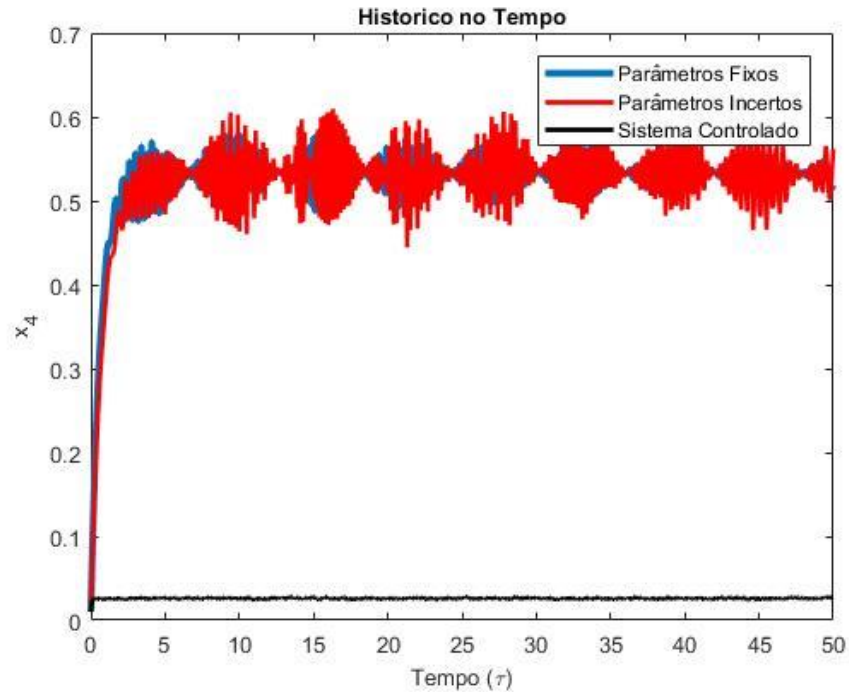
Figura 60 - Histórico no tempo: deslocamento do estado  $x_3$  do modelo não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 61 apresenta o histórico no tempo da velocidade do estado  $x_4$ , do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado.

Figura 61 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_4$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado

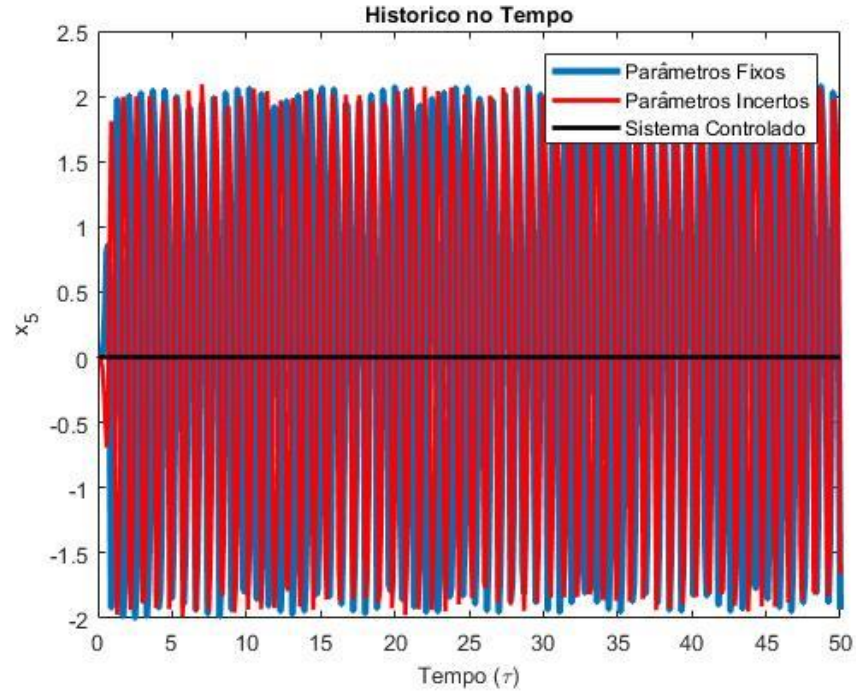


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Através das figuras 60 e 61, observa-se que, a trajetória com o controle não sofre oscilações, ou seja, se estabilizou em uma trajetória horizontal.

A figura 62 apresenta o histórico no tempo do deslocamento do estado  $x_5$ , do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado.

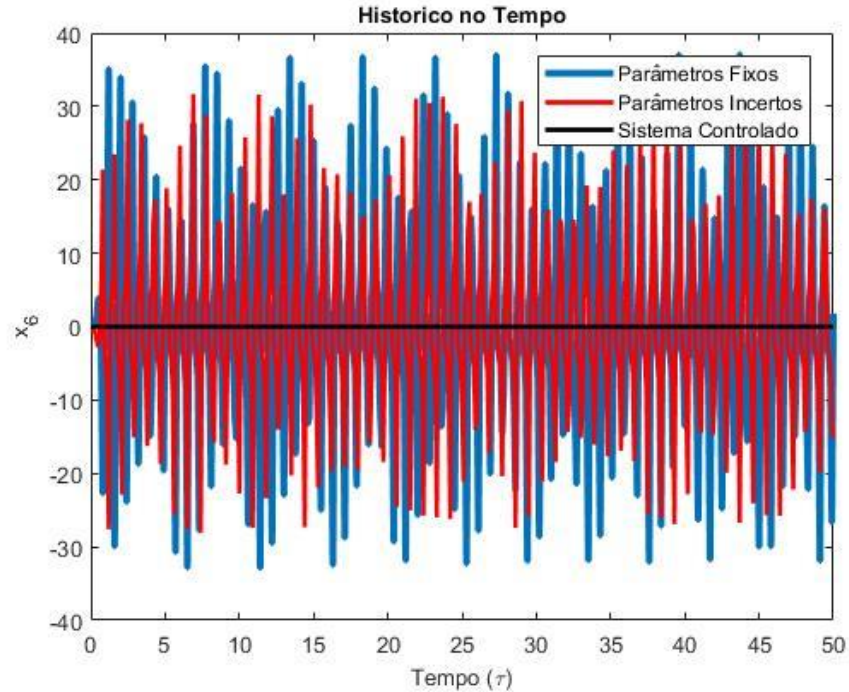
Figura 62 - Histórico no Tempo: Deslocamento do estado  $x_5$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A figura 63 apresenta o histórico no tempo para a velocidade  $x_6$ , do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado.

Figura 63 - Histórico no Tempo: Velocidade do estado  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado

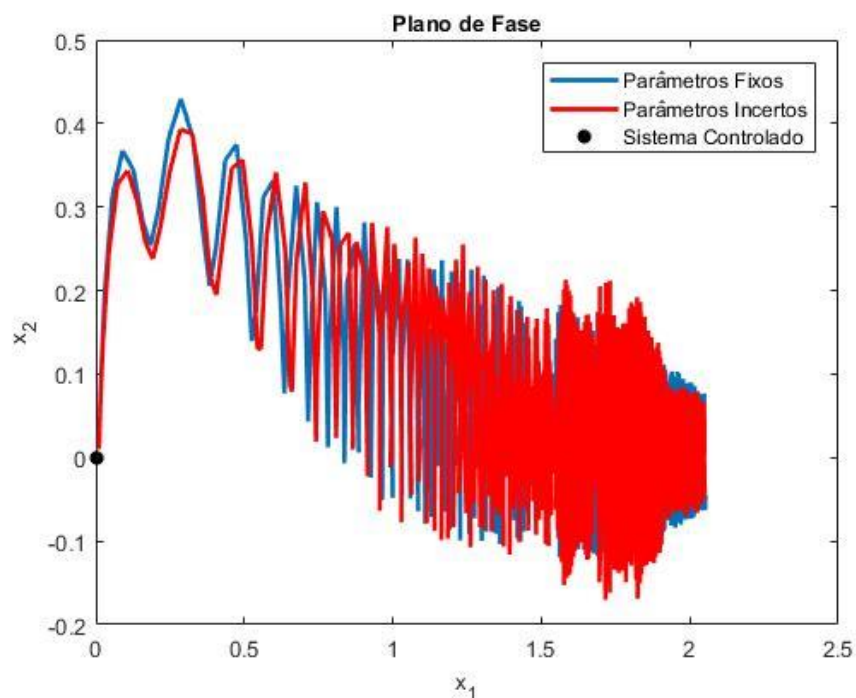


Fonte: Elaboração do próprio autor.

Nota-se pelas figuras 62 e 63, que a trajetória com o controle não sofre oscilações, ou seja, se estabilizou em uma trajetória horizontal.

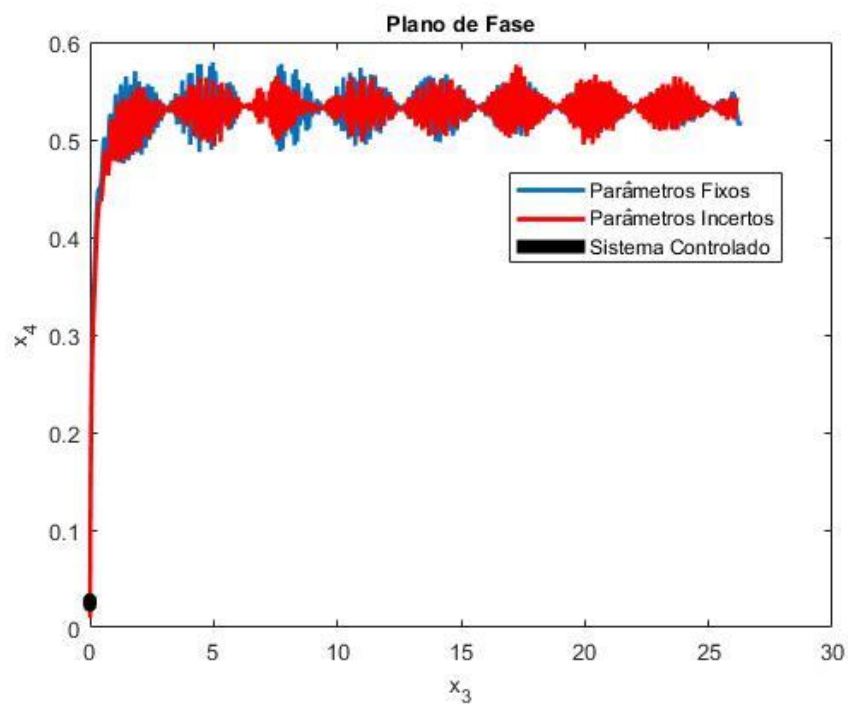
Nas figuras 64, 65 e 66 exibem-se os plano de fase dos pares de estados do sistema, a saber,  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_3, x_4)$  e  $(x_5, x_6)$ .

Figura 64 - Plano de Fase dos estados  $x_1$  e  $x_2$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado



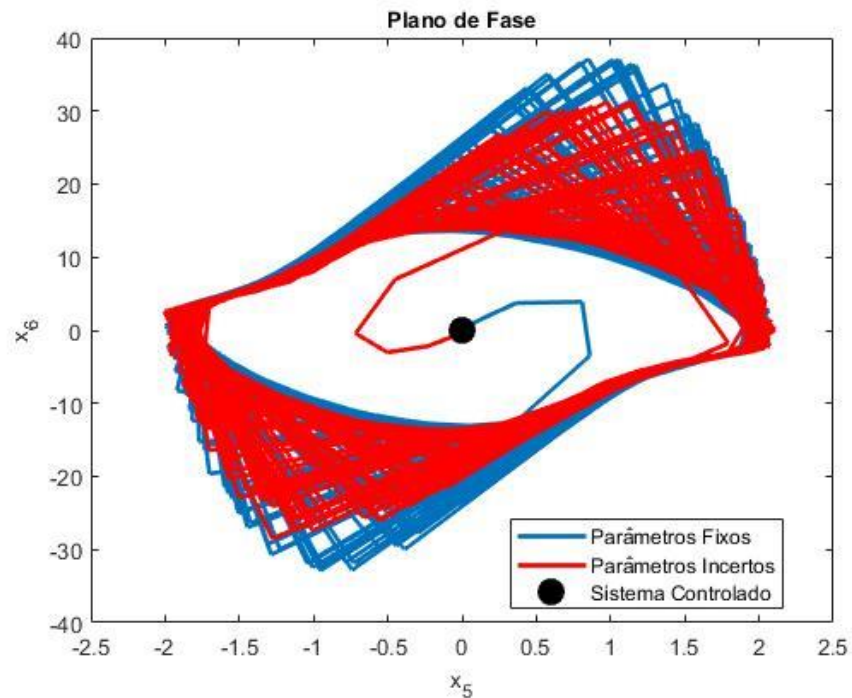
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 65 - Plano de Fase dos estados  $x_3$  e  $x_4$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 66 - Plano de Fase dos estados  $x_5$  e  $x_6$  do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol com parâmetros fixos e parâmetros incertos e sistema controlado



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Constata-se pelas figuras 64, 65 e 66, que as trajetórias do sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol, com controle converge para um ponto fixo.

Conclui-se por meio das figuras 58 a 66, que o método de Controle Linear Ótimo proposto é eficiente para eliminar o comportamento caótico do modelo Não Ideal Mathieu-Van der Pol para um ponto fixo (origem do sistema), visto que a trajetória do sistema controlado se estabilizou.

## 7 CONCLUSÃO

Nesta tese, a dinâmica de um novo modelo chamado sistema Não Ideal Mathieu-Van der Pol com comportamento caótico é analisada através dos expoentes de Lyapunov. Foram encontrados três expoentes positivos, dentre os seis expoentes do modelo, o que demonstram a existência de um comportamento caótico e caracterizam um comportamento hiper-caótico.

O comportamento caótico detectado no sistema indica que o sistema é instável, cujo comportamento não é desejado. Assim, para estabilizar esse comportamento caótico, um método de controle baseado no Controle Linear Ótimo foi implementado como estratégia, para reduzir o movimento caótico a um ponto fixo desejado aplicado a qualquer condição inicial imposta e adotando-se parâmetros incertos ao sistema.

O modelo não linear utilizado para modelar o sistema proposto, de modo não ideal é constituído de um motor de corrente contínua conectado com uma mola e um amortecedor ao plano fixo e acoplado com uma massa desbalanceada.

Para todas as simulações realizadas foram obtidos os históricos no tempo e os planos de fase dos modelos com e sem parâmetros incertos. A partir do plano de fase, ilustramos a natureza das soluções caóticas dos modelos Ideal Mathieu-Van der Pol e Não Ideal Mathieu-Van der Pol. Entretanto, analisando apenas o plano de fase, nem sempre consegue-se diferenciar solução quase-periódica de uma caótica. Neste caso, calculamos os expoentes de Lyapunov para a certeza da solução caótica dos modelos, e para determinar os expoentes de Lyapunov, utilizamos o método de Wolf *et al.* (1985).

A robustez do controlador foi realizada, através da análise sobre a incerteza nos valores dos parâmetros. Os parâmetros escolhidos foram aplicados, considerando-se individualmente uma variação de 20% (vinte por cento) em relação ao valor nominal (BALTHAZAR *et al.*, 2013).

Os resultados mostraram a eficiência da estratégia do Controle Linear Ótimo, para controlar o modelo proposto. Visto que reduziu o movimento oscilatório dos modelos não lineares para um ponto fixo, conforme podem ser vistas nas figuras exibidas do capítulo 6.

Os possíveis resultados desta tese podem ser utilizados em pesquisas futuras em projetos de produtos tecnológicos avançados, como a fabricação de veículos elétricos e autônomos no setor automotivo.

Todos os objetivos propostos desta tese foram alcançados com publicações em periódico e eventos científicos.

## REFERÊNCIAS

- BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; WEBER, H.I.; BRASIL, R. M. L. R. F.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, P. J. L. An overview on non-ideal vibrations. **Meccanica**, Dordrecht, v. 38, n. 1, p. 613-621, 2013.
- BAKER, G. L.; GOLLUB, J. P. **Chaotic dynamics**: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- BELATO, D.; WEBER, H. I.; BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T. Chaotic vibrations of a nonideal electro-mechanical system. **International Journal of Solids and Structures**, Kidlington, v. 38, n. 10-13, p. 1699-1706, 2001.
- CHAVARETTE, F. R. Control design applied to a non-ideal structural system with behavior chaotic. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, Sófia, v. 86, n. 3, p. 487-500, 2013a.
- CHAVARETTE, F. R. On an optimal linear control of a chaotic non-ideal duffing system. **Applied Mechanics and Materials**, Switzerland, v. 138-139, n.1, p. 50-55, 2012.
- CHAVARETTE, F. R. Optimal linear control to parametric uncertainties in a micro electro mechanical system. **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, Sófia, v. 83, n. 4, p. 539-548, 2013b.
- CHAVARETTE, F. R.; BALTHAZAR, J. M.; FELIX, J. L. P. Remarks on an optimal linear control design applied to a nonideal and an ideal structure coupled to an essentially nonlinear oscillator. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, Nova York, v. 5, n. 2, p. 19, 2010.
- CHAVARETTE, F. R.; PERUZZI, N. J.; BALTHAZAR, J. M.; BARBANTI, L.; DAMASCENO, B. C. On an optimal linear control applied to a non-ideal load transportation system, modeled whit periodic coefficients. **Applied Mechanics and Materials**, Switzerland, v. 52-54, n. 1, p. 13-18, 2011.
- CHAVARETTE, F. R.; PERUZZI, N. J.; LOPES, M. L. M.; COSSI, A. M. A Note of optimal linear control technical applied in the chaos stabilization in the mathieu-van der pol autonomous oscillator. **IAENG International Journal of Applied Mathematics**, Sófia, v. 25, n. 6, p. 861-869, 2012.
- CHERIF, F. Theoretical computation of lyapunov exponents for almost periodic hamiltonian systems. **IAENG International Journal of Applied Mathematics**, Sófia, v. 41, n. 1, p. 11-16, 2011.

CVETIĆANIN, L. Dynamics of the non-ideal mechanical systems: a review. **Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics**, Kragujevac, v. 4, n. 2, p. 75-86, 2010.

CVETIĆANIN, L.; ZUDOVIC, M.; BALTHAZAR, J. M. **Dynamic of mechanical systems with non-ideal excitation**. 3. ed. Germany: Springer, Mathematical Engineering, 2018. p. 9-18. DOI 10.1007/978-3-319-54169-3.

DANTAS, M. J. H.; BALTHAZAR, J. M. On local analysis of oscillations of a non-ideal and non-linear mechanical model. **Meccanica**, Dordrecht, v. 39, n. 1, p. 313-330, 2004.

DIDIER, J.; FAVERJON, B.; SINOU, J. J. Analyzing the dynamic response of a rotor system under uncertain parameters by polynomial chaos expansion. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 18, n. 5, p. 587-607, 2012.

EL-BADAWY, A. A. Behavioral investigation of a nonlinear nonideal vibrating system. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 13, n. 2, p. 203-217, 2007.  
FELICIO, L.C. **Modelagem da dinâmica de sistemas e estudo da resposta**. 2. ed. São Carlos: RiMA, 2010.

FERREIRA, D. C.; CHAVARETTE, F. R.; PERUZZI, N. J. Linear matrix inequalities control driven for non-ideal power source energy harvesting. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, Warsaw, v. 53, n. 3, p. 605-616, 2015.

FERREIRA, D.C. **Projeto de controladores para a maximização de sistemas de captação de energia considerando excitação não ideal**. 2015. 162 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho - UNESP, Ilha Solteira, 2015.

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Edgar Blücher, 1995.

FRAHM, H. **A device for damping vibrations of bodies**, US Patent 989958, 1911.

GE, Z. M.; YANG, C. H. Hyperchaos of four state autonomous system with three positive Lyapunov exponents. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 373, n. 3, p. 349–353, 2009.

GE, Z. M, YI, C. X. Chaos in a nonlinear damped Mathieu system, in a nano resonator system and in its fractional order system. **Chaos, Solitons & Fractals**, Republic China, v. 32, n. 1, p. 42-61, 2007.

GHANEM, R. G.; SPANOS, P. D. **Stochastic finite elements: a spectral approach**. Nova York: Courier Dover Publications, 1991.

KANTZ, H.; SCHREIBER, T. **Nonlinear time series analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

KONONENKO, V. O. **Vibrating systems with a limited power supply**. London: Iliffe, 1969. p. 236.

KOROISHI, E. H.; CAVALINI JUNIO, R.; ALDEMIR, A.; DE LIMA, A. M. G.; STEFFEN JUNIOR, V. Stochastic modeling of flexible rotors. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences of Engineering**, Heidelberg, v. 34, n. esp., p. 597-603, 2012.

KORSCH, H. J.; JODL, H. J.; HARTMANN, T. **Chaos**: a program collection for the PC. 3. ed. Berlin: Springer Verlag, 2008.

LARA-MOLINA, F. A.; ROSARIO, J. M.; DUMUR, D.; WENGER, P. Generalized Predictive Control of Parallel Robots. In: KOZLOWSKI, K. R. (ed.). **Robot motion and control**. London: Springer-Verlag, 2011, cap.13, p.159-169. (Lecture Notes in Control and Information Sciences - LNCIS, 422).

LIMA, R. Q. **Estudo de modelos dinâmicos lineares e não lineares**. Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 2008.

MÖLLER, B.; BEER, M. **Fuzzy randomness, uncertainty in civil engineering and computational mechanics**. London: Springer-Verlag, 2004.

MOLTER, A.; RAFIKOV, M. Controle ótimo em agroecossistemas usando SDRE, tendências em matemática aplicada e computacional. **TEMA - Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, v. 12, n. 3, p. 221-232, 2011.

MONTEIRO, L. H. A. **Sistemas dinâmicos**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

MOON, F. C. **Chaotic and fractal dynamics**: an introduction for applied scientists and engineers. New York: John Wiley & Sons, 1992.

MULLIN, T. **The nature of chaos**. New York: Oxford University Press, 1993. 344 p.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. **Non-linear oscillations**. New York: John Wiley and Sons, 1979.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010. 788 p.

ORBOLATO, L. M. T.; OKABAYASHI, M. M.; BRASIL, R. M. L. R.F. **Controle de vibrações não lineares excitadas por fontes não ideais de energia**. São Paulo: USP, 2007.

OTT, E.; GREBOGI, C.; YORQUE, J. A. Controlling chaos. **Physical Review Letters**, College Park, v. 66, n. 1, p. 1196, 1990.

PICCIRILLO, V.; BALTHAZAR, J. M.; PONTES JUNIOR, B. R.; FELIX, J. L. P. On a nonlinear and chaotic non-ideal vibrating system with shape memory alloy (SMA). **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, Warsaw, v. 46, n. 3, p. 597-620, 2008.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. On control and synchronization in chaotic and hyperchaotic system via linear control feedback. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, Amsterdam, v. 13, n. 7, p. 1246-1255, 2008.

RAFIKOV, M.; BALTHAZAR, J. M. Optimal Linear and Nonlinear Control design for Chaotic Systems, DETC2005-84998. In: INTERNATIONAL DESIGN ENGINEERING TECHNICAL CONFERENCES AND COMPUTERS AND INFORMATION IN ENGINEERING CONFERENCE LONG BEACH, 5., 2005, California. **Proceedings** [...] Califórnia: ASME 2005. p. 867-873.

VIANA, R. L. Oscilações de relaxação e suas aplicações II. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 33, n. 3, p. 1-8, 2011.

SAVI, M. A. **Dinâmica não linear e caos**. 2. ed. Rio de Janeiro: E-Papers, 2017.

SHIH-YU, L.; SHENG-CHIEH, H.; CHENG-HSIUNG, Y.; ZHENG-MING, G. Generating tri-chaos attractors with three positive Lyapunov exponents in new four order system via linear coupling, **Nonlinear Dyn**, Dordrecht, v. 69, n. 4, p. 805-816, 2012.

SOUZA, S. L. T.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; BALTHAZAR, J. M. Control and chaos for vibro-impact and non-ideal oscillators. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, Warsaw, v. 46, n. 3, p. 641-664, 2008.

TSONIS, A. A. **Chaos: from theory to applications**. New York: Plenum, 1992. 274 p.

TSUCHIDA, M.; GUILHERME, K. L.; BALTHAZAR, J. M. On chaotic vibrations of a non ideal system with two degrees of freedom: 1:2 resonance and Sommerfeld effect. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 282, n. 3-5, p. 1201-1207, 2005.

TUSSET, A. M.; BALTHAZAR, J. M.; CHAVARETTE, F. R.; FELIX, J. L. P. On energy transfer phenomena, in a nonlinear ideal and nonideal essential vibrating systems, coupled to a (MR) magneto-rheological damper. **Nonlinear Dyn**, Dordrecht, v. 69, n. 4, p.1-22, 2012.

TUSSET, A. M.; PICCIRILLO, V.; BUENO, A. M.; BALTHAZAR, J. M.; SADO, D.; FELIX, J. L. P.; BRASIL, R. M. L. R DA F. Chaos control and sensitivity analysis of a double pendulum arm excited by an RLC circuit based nonlinear shaker. **Journal of Vibration and Control**, London, v. 22, n. 27, n. 5, p. 3621-3637, 2015.

VIQUIÉ, R.; KERSCHEN, G. Nonlinear vibration absorber coupled to a nonlinear primary system: a tuning methodology. **Journal of Sound and Vibration**, London, v. 326, n. 3-5, p. 780-793, 2009.

WIGGINS, S. **Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos**. 2. ed. New York: Springer-Verlag, 2003. 123 p.

WOLF, A.; SWIFT, J.B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining Lyapunov exponents from a time series. **Physica 16D**, Amsterdam, v. 16, n. 3, p. 285-317, 1985.

## APÊNDICE A – PUBLICAÇÕES

### Congressos

VICENTE, J. P. G.; CHAVARETTE, F. R. Dinâmica Caótica no Modelo de Mathieu-Van der Pol Acoplado. In: CONGRESSO NACIONAL DE ENGENHARIA MECÂNICA- CONEM, 10., 2018, Salvador. **Congresso** [...] Salvador: [s. n.], 2018.

VICENTE, J. P. G.; CHAVARETTE, F. R. Controle de caos no modelo de Mathieu-Van der pol com parâmetros incertos. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA COMPUTACIONAL- CNMAC, 39., 2019, Uberlândia. **Congresso** [...] Uberlândia: [s.n.], 2019


### Periódico Internacional aceito para publicação

ROÉFERO, L. G. P.; CHAVARETTE, F. R.; MORO, T. C.; OUTA, R.; VICENTE, J. P. G. Análise da estabilidade e detecção do comportamento caótico em um sistema não- de cápsula. **Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecânica (RIBIM)**, Espanha, 2019. (artigo aceito – será publicado em abril 2020).


# Artigo Publicado

Novo Qualis Capes – 2019

Extrato B1



Revista Internacional de Métodos  
Numéricos para Cálculo y Diseño  
en Ingeniería



**Chaos control via Mathieu-Van der Pol system and Linear Optimal Control design with a non-ideal excitation and parametric uncertainties**

Joselma Pinheiro Gonçalves Vicente<sup>1</sup>, Fábio Roberto Chavarette<sup>2</sup>, Luiz Gustavo Pereira Roefero<sup>3</sup>

1 Univ. Estadual Paulista. Faculty of Engineering of Ilha Solteira, Department of Mechanical Engineering, Avenida Brasil, 56, 15385-000, Ilha Solteira, SP.  
2 Univ. Estadual Paulista. Faculty of Engineering of Ilha Solteira, Department of Mathematics, Sisplexos Laboratory.  
3 Univ. Estadual Paulista. Faculty of Engineering of Ilha Solteira, Department of Mechanical, Sisplexos Laboratory.

---

**Abstract**

In this work, a non-ideal system based on the Mathieu-Van der Pol System is modeled considering its parameters as uncertain, which makes it closer to reality. Numerical simulations are presented demonstrating that the system has a chaotic behavior with three positive Lyapunov exponents. Given such unstable and unpredictable behavior, the linear optimal control design is proposed to reduce the chaotic movement of this system to a fixed point. The simulation results show that the identification by Linear Optimal Control is very effective.

**OPEN ACCESS**

**Published:** 02/09/2019  
**Accepted:** 20/08/2019  
**Submitted:** 18/04/2019  
**DOI:**  
10.23967/rj.rimni.2019.08.001

**Keywords:**  
Non-Ideal System  
Uncertain Parameters  
Optimal Linear Control

## 1. Introduction

Humanity is going through a very fast technological revolution, which makes well established companies and start-ups strive daily to invest in the search for introducing new, customizable, autonomous and more efficient products in the work market. For such purposes, mechanical engineering contributes with projects of advanced technological products, such as the manufacturing of electric and autonomous vehicles in the automotive sector. Therefore, with a simple software update, costs related to maintenance for changing oil, filters and other parts of cars powered by internal combustion engines, will be replaced.

The challenge of creating a new product requires developing projects that are straightforward concerning the objectives to be achieved and all stages to be completed, from their beginning, development, until their end. During the execution phase of a mechanical project, the probability of mistakes happening is high, leading to undesirable effects, that is, negative effects, or even chaotic ones. Considering this, managing the risks effectively may decrease the occurrence of a chaotic event that hinders the development of a project. Formally speaking, a chaotic event, or simply chaos, represents the irregularity of a dynamical system. Its essential characteristics are: sensitivity to initial conditions, which means that its evolution in time may be altered by small perturbations, and unpredictability, which implies that it is impossible to predict the posterior evolution of the system, even knowing its state during a long-time interval.

A priori, it is possible to state that a chaotic response can be understood based on a series of contraction-expansion-bending transformations, and among the tools applied to characterize chaos, the Lyapunov exponents stand out, which are one of the invariants of the system, and may be used even for evaluating other invariants [1].

Due to the possibility of a chaotic event happening during the development of projects, the alternative is to seek to mitigate this disorder state, that is, to manage the chaos that is inherent to the system, checking the weaknesses that unexpectedly arise, so as not to harm the production stage. Nowadays, Chaos Engineering contributes to carrying out