



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA
MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

Concepções de Álgebra e seu ensino: um estudo realizado na Colômbia

ARLEY ZAMIR CHAPARRO CARDOZO

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

Rio Claro, SP

2025

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE
Câmpus de Rio Claro

ARLEY ZAMIR CHAPARRO CARDOZO

Concepções de Álgebra e seu ensino: um estudo realizado na Colômbia

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo

Rio Claro, SP

2025

C462c Chaparro Cardozo, Arley Zamir

Concepções de Álgebra e seu ensino: um estudo realizado na Colômbia./
Arley Zamir Chaparro Cardozo.-- Rio Claro, 2025
455 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro

Orientadora: Maria Aparecida Viggiani Bicudo

1. Educação Matemática. 2. Filosofia da Educação
Matemática. 3. Concepções de Álgebra. 4. Ensino de
Álgebra. 5. Colômbia. I. Título.

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Esta investigação tem potencial para gerar contribuições significativas para a formação de professores de Matemática e para o ensino de Álgebra, tanto no cenário educacional colombiano quanto em outros contextos. Ao analisar as concepções dos professores entrevistados, o estudo revela descon continuidades nas práticas didático-pedagógicas que comprometem a construção de compreensões significativas pelos estudantes na aprendizagem da Álgebra. A identificação dessas descon continuidades permite que as instituições formadoras desenvolvam estratégias para superar abordagens mecanicistas, incentivando práticas pedagógicas que priorizem a compreensão conceitual e a articulação epistemológica, promovendo uma transição mais fluida entre Educação Básica, Educação Média e Educação Superior. A análise fenomenológico-hermenêutica possibilita compreender os sentidos atribuídos à Álgebra e explicitar como essas perspectivas, por sua vez, podem orientar estratégias de ensino. Ao identificar essas concepções e suas implicações, a pesquisa abre caminhos para repensar currículos, promover abordagens menos mecanicistas e favorecer práticas que desenvolvam o raciocínio algébrico desde os primeiros anos escolares. Além disso, contribui para a reflexão sobre políticas educacionais voltadas à integração entre os diferentes níveis de ensino, fortalecendo a formação docente e a aprendizagem dos estudantes.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

This investigation has the potential to generate significant contributions to the training of Mathematics teachers and the teaching of Algebra, both within the Colombian educational context and in other settings. By analyzing the conceptions of the interviewed teachers, the study reveals discontinuities in didactic-pedagogical practices that hinder the development of meaningful understanding by students in learning Algebra. Identifying these discontinuities enables teacher education institutions to develop strategies to overcome mechanistic approaches, fostering pedagogical practices that prioritize conceptual understanding and epistemological articulation, thereby promoting a smoother transition between Basic Education, Secondary Education, and Higher Education. The phenomenological-hermeneutic analysis makes it possible to understand the meanings attributed to Algebra and to explain how these perspectives, in turn, can guide teaching strategies. By identifying these conceptions and their implications, the research opens paths to rethink curricula, promote less mechanistic approaches, and foster practices that develop algebraic reasoning from the early school years. Furthermore, it contributes to the reflection on educational policies aimed at integrating different levels of education, strengthening teacher training and student learning.

IMPACTO POTENCIAL DE ESTA INVESTIGACIÓN

Esta investigación tiene potencial para generar contribuciones significativas a la formación de profesores de Matemáticas y a la enseñanza del Álgebra, tanto en el contexto educativo colombiano como en otros entornos. Al analizar las concepciones de los docentes entrevistados, el estudio revela discontinuidades en las prácticas didáctico-pedagógicas que comprometen la construcción de comprensiones significativas por parte de los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra. La identificación de estas discontinuidades permite que las instituciones formadoras desarrollen estrategias para superar enfoques mecanicistas, fomentando prácticas pedagógicas que prioricen la comprensión conceptual y la articulación epistemológica, promoviendo una transición más fluida entre Educación Básica, Educación Media y Educación Superior. El análisis fenomenológico-hermenéutico posibilita comprender los sentidos atribuidos al Álgebra y explicitar cómo estas perspectivas, a su vez, pueden orientar estrategias de enseñanza. Al identificar estas concepciones y sus implicaciones, la investigación abre caminos para repensar los currículos, promover enfoques menos mecanicistas y favorecer prácticas que desarrollen el razonamiento algebraico desde los primeros años escolares. Además, contribuye a la reflexión sobre políticas educativas orientadas a la integración entre los diferentes niveles de enseñanza, fortaleciendo la formación docente y el aprendizaje de los estudiantes.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE
Campus de Rio Claro

ARLEY ZAMIR CHAPARRO CARDOZO

Concepções de Álgebra e seu ensino: um estudo realizado na Colômbia

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Educação Matemática

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo (Orientadora)
Universidade Estadual Paulista /IGCE– Rio Claro/SP

Profa. Dra. Rosa Monteiro Paulo
Universidade Estadual Paulista /FEG– Guaratinguetá/SP

Profa. Dra. Fabiane Mondini
Universidade Estadual Paulista /FEG– Guaratinguetá/SP

Profa. Dra. Tânia Baier
Universidade Regional de Blumenau /CCEN – Blumenau/SC

Profa. Dra. Luciane Ferreira Mocrosky
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Curitiba/PR

Conceito: aprovado

Rio Claro (SP), 28 de novembro de 2025

AGRADECIMENTOS

A realização desta tese representa não apenas a conclusão de uma etapa acadêmica, mas também a concretização de um percurso marcado por desafios, aprendizados e encontros significativos.

Agradeço, primeiramente, a Deus, fonte de vida, sabedoria e força, por ter me sustentado ao longo de toda esta caminhada. Em meio às incertezas e dificuldades, foi na fé que encontrei serenidade, coragem e discernimento para seguir adiante. Que este percurso seja expressão de gratidão e compromisso com aquilo que recebi.

Aos meus pais, Maria Agripina e Edilberto Antonio, minha eterna gratidão. Com amor, coragem e dedicação, vocês foram o alicerce que sustentou cada passo desta jornada. A confiança que depositaram em mim, os valores que me ensinaram e o apoio incondicional em todos os momentos foram fundamentais para que eu chegasse até aqui. Este trabalho é também fruto do exemplo de dignidade, esforço e generosidade que sempre encontrei em vocês.

Aos meus irmãos, Elver e Sandra, agradeço pelo carinho, pela presença constante e pelo apoio silencioso que sempre me fortaleceu. Aos meus sobrinhos, Diego e David, agradeço pela alegria espontânea e pela leveza que trazem à vida.

A Martha Liliana, minha namorada, companheira e confidente, minha gratidão mais terna e amorosa. Sua presença constante, seu apoio silencioso e suas palavras sempre acolhedoras encheram meu coração de amor e paz ao longo desta jornada. Nos momentos de dúvida, cansaço ou inquietação, foi ao seu lado que encontrei serenidade, força e sentido. Este trabalho também carrega o reflexo da sua generosidade, da sua escuta e do seu cuidado, que me acompanharam com delicadeza e firmeza até aqui.

Agradeço à Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” pela oportunidade concedida de realizar minha formação acadêmica e desenvolver esta pesquisa. Esta instituição foi espaço fértil para o crescimento intelectual, o diálogo crítico e o amadurecimento profissional.

À minha orientadora, Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo, expresse minha mais profunda gratidão. Sua escuta atenta, sua sabedoria generosa e seu compromisso com a pesquisa foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Com sensibilidade e rigor, soube me conduzir por caminhos de reflexão e descoberta, oferecendo apoio constante e inspiração intelectual.

Agradeço especialmente aos membros que integram a comissão examinadora desta tese — Dra. Rosa Monteiro Paulo, Dra. Fabiane Mondini, Dra. Tânia Baier e Dra. Luciane Ferreira

Mocrosky — pela generosidade em aceitar o convite e pela valiosa contribuição ao longo deste processo. Desde a etapa da qualificação, cada uma colaborou ativamente com encaminhamentos metodológicos e teóricos que foram fundamentais para o aprofundamento do texto.

Agradeço aos professores da Licenciatura em Matemática da UPTC e aos professores das escolas de Educação Básica e Média que gentilmente colaboraram com esta pesquisa, dedicando seu tempo e compartilhando suas experiências durante as entrevistas. Suas contribuições foram cruciais para o aprofundamento das reflexões realizadas neste trabalho.

Expresso minha mais profunda gratidão a Dona Maria Furtado por ter me acolhido em sua família com tanto carinho e generosidade. Seu apoio e hospitalidade foram fundamentais nesta etapa da minha vida, sendo para mim um verdadeiro anjo nos momentos mais críticos da caminhada. Sua escuta atenta, conselhos acertados e ânimo constante deram-me a força necessária para concluir esta jornada. Agradeço também aos filhos, netos e sobrinhos de Dona Maria pela acolhida, que fizeram com que eu me sentisse parte de uma segunda família.

Estendo meus sinceros agradecimentos aos amigos e amigas de Dona Maria, cujo carinho e companhia enriqueceram essa experiência, em especial a Marcia, Elsa, Dona Edith, Jair, Dona Suely, Rodolfo e Renata.

Também agradeço aos meus companheiros e colegas da pós-graduação, que estiveram ao meu lado e me ajudaram em momentos difíceis. Em especial, quero mencionar André, Zenildo, Eliane, Renata, Rosicasia, Débora, Joseane, Diana, Carolina, Joel, Jinos, Verusca, Aleska e Lucas, pela amizade, colaboração e palavras de incentivo que tornaram essa jornada muito mais leve.

Aos integrantes do Grupo de Pesquisa Fenomenologia em Educação Matemática (FEM), minha sincera gratidão pelos encontros acadêmicos e sociais que marcaram esta jornada. Cada diálogo, troca de ideias e convivência contribuiu significativamente para o amadurecimento desta pesquisa e fortaleceram meu percurso como pesquisador. Em especial, agradeço ao colega Juliano Bortolete, pela generosidade, apoio constante e presença amiga ao longo desta caminhada.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, expresso minha sincera gratidão pela dedicação ao ensino e pelas valiosas contribuições à minha formação acadêmica e ao meu desenvolvimento como pesquisador. Estendo meus agradecimentos aos docentes que estiveram na coordenação do Programa, pelo compromisso e colaboração demonstrados. Agradeço, de modo especial, ao professor Marcelo, pelo conselho, apoio e amizade que foram fundamentais na culminação do curso. Registro também minha

gratidão a Inajara, que, desde a secretaria do Programa, tem sido um alicerce indispensável para professores e alunos, sempre demonstrando diligência, disposição e colaboração exemplar.

A todas as pessoas que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta trajetória — colegas, professores, amigos e instituições — deixo aqui meu sincero agradecimento. Cada contribuição, por menor que pareça, teve um papel importante na construção deste trabalho e na minha formação como pesquisador e ser humano.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – código de financiamento 001.

RESUMO

Nesta investigação, buscamos compreender as concepções expressas por professores de Matemática que ensinam Álgebra em cursos de licenciatura em Matemática, bem como por docentes de Educação Média que lecionam Álgebra em escolas que recebem estagiários oriundos desses cursos de formação. O propósito é identificar possíveis caminhos que permitam explicitar as articulações entre o que é aprendido na formação inicial e o que é ensinado na Educação Básica e Média, no contexto colombiano. A pesquisa orienta-se pela seguinte interrogação: *como a Álgebra é concebida e ensinada nos cursos de formação de professores e por docentes do Educação Média na Colômbia?* O estudo foi conduzido segundo uma abordagem qualitativa, fundamentada no pensar fenomenológico. Participaram professores que ensinam Álgebra em ambos os níveis de ensino mencionados, os quais foram entrevistados por meio de encontros presenciais e entrevistas abertas. Os depoimentos foram gravados e transcritos *in verbatim*, constituindo o corpus de análise. A análise foi realizada segundo uma perspectiva fenomenológico-hermenêutica, com o objetivo de evidenciar os sentidos e significados emergentes nas falas dos participantes e desenvolver a correspondente interpretação hermenêutica. As concepções sobre Álgebra e seu ensino manifestas nos discursos revelaram múltiplas compreensões, tais como: a Álgebra entendida como extensão da Aritmética; a Álgebra concebida como linguagem simbólica; e a Álgebra compreendida como estudo de estruturas abstratas. Essas concepções evidenciam três evoluções epistemológicas no movimento formativo que impactam as práticas de ensino e a aprendizagem da Álgebra, a saber: i) a transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico; ii) a passagem da Álgebra escolar, predominantemente centrada no estudo de equações e operações efetuadas sobre quantidades, discretas ou contínuas para uma Álgebra que possibilita a definição de operações arbitrárias realizadas sobre objetos gerais, não necessariamente numéricos, ou seja, que tematiza as estruturas algébricas; iii) a desconexão entre os conhecimentos algébricos constituídos ao longo da formação inicial de professores de Matemática e uma compreensão conceitual mais ampla da Álgebra, capaz de mobilizar práticas pedagógicas que superem abordagens mecanicistas nas práticas de ensino. Os estudos realizados revelaram haver descontinuidade nas práticas didático-pedagógicas entre os níveis de ensino que se mostrou articulado ao pensar algébrico presente nessas concepções e modos de proceder, o que repercute diretamente nas atividades docentes. Esse descompasso evidenciou haver desconexões que dificultam compreensões significativas, gerando frustrações tanto para os professores, que se esforçam em ensinar, quanto para os estudantes, que se percebem com dificuldade de aprender. Esta investigação aponta, por fim, possibilidades de enfrentamento desses descompassos, contribuindo para a reflexão sobre a formação e a prática docente no ensino de Álgebra.

Palavras-chave: Educação Matemática; Filosofia da Educação Matemática; Concepções de Álgebra; Ensino de Álgebra; Colômbia.

ABSTRACT

In this study, we seek to understand the conceptions expressed by Mathematics teachers who teach Algebra in undergraduate Mathematics teacher education programs, as well as by teachers in Secondary Education who teach Algebra in schools that host student teachers from these programs. The aim is to identify possible pathways that make explicit the connections between what is learned in higher education and what is taught in Basic and Secondary Education in the Colombian context. This research is guided by the following question: *How is Algebra conceived and taught in teacher education programs and by secondary school teachers in Colombia?* The investigation follows a qualitative approach grounded in phenomenological thinking. Participants included teachers who teach Algebra at both educational levels, who were interviewed through in-person, open-ended conversations. The recorded statements were transcribed in *verbatim*, constituting the corpus of analysis. Data analysis was conducted within a phenomenological–hermeneutic framework, aiming to highlight the meanings and significations emerging from participants’ narratives and to develop the corresponding hermeneutic interpretation. The conceptions of Algebra and its teaching expressed in the participants’ discourses revealed multiple understandings, such as: Algebra conceived as an extension of Arithmetic; Algebra understood as a symbolic language; and Algebra viewed as the study of abstract structures. These conceptions highlight three epistemological evolutions within the formative process that impact the teaching practices and the learning of Algebra, namely: (i) the transition from arithmetic thinking to algebraic thinking; (ii) the shift from school Algebra, predominantly focused on the study of equations and operations performed on quantities, whether discrete or continuous, to an Algebra that enables the definition of arbitrary operations carried out on general, not necessarily numerical, objects, that is, which addresses algebraic structures; (iii) the disconnection between the algebraic knowledge built up during the initial training of mathematics teachers and a broader conceptual understanding of Algebra, capable of mobilizing pedagogical practices that overcome mechanistic approaches in teaching practices. The study revealed a discontinuity in didactic and pedagogical practices between educational levels, which proved to be linked to the forms of algebraic thinking underlying these conceptions and modes of reasoning. This misalignment directly influences teaching activities and exposes disconnections that hinder the development of meaningful understanding, generating frustration among teachers, who strive to teach, and among students, who perceive themselves as having difficulty to learn. Finally, this investigation points to possibilities for addressing such misalignments, contributing to deeper reflection on teacher education and pedagogical practice in the teaching of Algebra.

Keywords: Mathematics Education; Philosophy of Mathematics Education; Algebra Conceptions; Teaching Algebra; Colombia.

RESUMEN

En esta investigación, buscamos comprender las concepciones expresadas por profesores de Matemáticas que enseñan Álgebra en programas de licenciatura en Matemáticas, así como por docentes de Educación Media que imparten Álgebra en escuelas que reciben practicantes provenientes de dichos programas de formación. El propósito es identificar posibles caminos que permitan explicitar articulaciones entre lo que se aprende en la formación inicial y lo que se enseña en la Educación Básica y Media, en el contexto colombiano. La investigación se orienta por la siguiente pregunta: *¿Cómo se concibe y se enseña el Álgebra en los programas de formación docente y por los profesores de Educación Media en Colombia?* El estudio fue conducido bajo un enfoque cualitativo, fundamentado en el pensamiento fenomenológico. Participaron profesores que enseñan Álgebra en ambos niveles educativos mencionados, quienes fueron entrevistados mediante encuentros presenciales y entrevistas abiertas. Los testimonios fueron grabados y transcritos *literalmente*, constituyendo el corpus de análisis. El análisis se realizó desde una perspectiva fenomenológico-hermenéutica, con el objetivo de evidenciar los sentidos y significados emergentes en las declaraciones de los participantes y desarrollar la correspondiente interpretación hermenéutica. Las concepciones sobre el Álgebra y su enseñanza manifestadas en los discursos revelaron múltiples comprensiones, tales como: el Álgebra entendida como una extensión de la Aritmética; el Álgebra concebida como lenguaje simbólico; y el Álgebra comprendida como estudio de estructuras abstractas. Estas concepciones evidencian tres evoluciones epistemológicas en el proceso formativo que impactan las prácticas de enseñanza y el aprendizaje del Álgebra, a saber: (i) la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico; (ii) el paso del Álgebra escolar, centrada principalmente en el estudio de ecuaciones y operaciones con cantidades, discretas o continuas, a un Álgebra que permite definir operaciones arbitrarias sobre objetos generales, no necesariamente numéricos, es decir, que tematiza las estructuras algebraicas; (iii) la desconexión entre el conocimiento algebraico adquirido durante la formación inicial del profesorado de Matemáticas y una comprensión conceptual más amplia del Álgebra, capaz de movilizar prácticas pedagógicas que superen los enfoques mecanicistas en la enseñanza. Los estudios realizados revelaron una discontinuidad en las prácticas didáctico-pedagógicas entre los niveles educativos, la cual se mostró articulada al pensamiento algebraico presente en estas concepciones y modos de proceder, lo que repercute directamente en las actividades docentes. Este desajuste evidenció desconexiones que dificultan comprensiones significativas, generando frustraciones tanto en los docentes, que se esfuerzan por enseñar, como en los estudiantes, que se perciben con dificultades para aprender. Finalmente, esta investigación señala posibilidades para enfrentar dichos desajustes, contribuyendo a la reflexión sobre la formación y la práctica docente en la enseñanza del Álgebra.

Palabras clave: Educación Matemática; Filosofía de la Educación Matemática; Concepciones de Álgebra; Enseñanza del Álgebra; Colombia.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Estrutura dos DBA da Matemática	68
Figura 2 - Exemplo de estrutura curricular no <i>Enfoque de Sistemas</i>	73
Figura 3 - Representação do <i>Enfoque de Sistemas</i>	75
Figura 4 - “Modelo representativo” dos <i>Lineamientos Curriculares en Matemáticas</i>	77
Figura 5 - Linha de tempo do panorama histórico do Sistema Educacional e o ensino da Matemática na Colômbia	78
Figura 6 - Códigos descritivos para nomear os professores da <i>Licenciatura</i>	137
Figura 7 - Códigos descritivos para nomear os professores das escolas	139
Figura 8 - Elementos que compõem cada unidade analítica no movimento de Análise Ideográfica	187
Figura 9 - Esquema geral do movimento de análise ideográfica - nomotética (exemplo dos professores de escola)	190
Figura 10 - Esquema geral do movimento de análise fenomenológico-hermenêutico	192
Figura 11 - A icônica capa do livro <i>Álgebra de Baldor</i>	196
Figura 12 - Esquema de prática de ensino na escola segundo o dito na US2.P1E	197
Figura 13 - Esquema de prática de ensino na graduação segundo o professor P1E	198
Figura 14 - Gesto da “carinha feliz” para o ensino das operações de adição e subtração entre números fracionários	206
Figura 15 - Modo de ser implementado o livro <i>Álgebra de Baldor</i> para lecionar na escola, segundo o relatado na USg2.P5E	245
Figura 16 - Níveis de ensino nos sistemas educacionais do Brasil e da Colômbia	261
Figura 17 - Articulações de sentido das USg explicitadas nos enxertos hermenêuticos nas falas dos professores de escola	276
Figura 18 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI1.PE	282
Figura 19 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI2.PE	289
Figura 20 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI3.PE	297

Figura 21 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI4.PE	303
Figura 22 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI5.PE	309
Figura 23 - Proposta curricular Eduardo Vasco Uribe.....	342
Figura 24 - Floco de neve de Koch.....	360
Figura 25 - Articulações de sentido das USg explicitadas nos enxertos hermenêuticos nas falas dos professores da <i>Licenciatura</i>	383
Figura 26 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI1.PL	389
Figura 27 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI2.PL	393
Figura 28 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI3.PL	398
Figura 29 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI4.PL	407

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Listagem de revistas indexadas no Pubindex, segundo os critérios de consulta aplicados.....	86
Tabela 2 - Blocos temáticos na revisão de literatura concernente às pesquisas realizadas na Colômbia	88
Tabela 3 - Informação geral do curso de <i>Licenciatura en Matemáticas</i> da UPTC	136
Tabela 4 - Disciplinas da <i>Licenciatura en Matemáticas</i> da UPTC que apresentam a Álgebra em seu conteúdo	136
Tabela 5 - Ideias principais de cada USg e as articulações realizadas nos enxertos hermenêuticos - PE	272
Tabela 6 - Matriz de co-ocorrência das Unidades de Significado nas convergências dos Núcleos de Significado no movimento de análise ideográfico - PE.....	277
Tabela 7 - Núcleos de Ideias obtidas como resultado das segundas reduções fenomenológicas - PE.....	280
Tabela 8 - Ideias principais de cada USg e as articulações realizadas nos enxertos hermenêuticos - PL	379
Tabela 9 - Matriz de co-ocorrência das Unidades de Significado nas convergências dos Núcleos de Significado no movimento de análise ideográfico - PL.....	384
Tabela 10 - Núcleos de Ideias obtidas como resultado das segundas reduções fenomenológicas - PL	387

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	15
Apresentando a organização do texto da tese.....	19
1. EXPERIÊNCIA VIVIDA.....	23
1.1 Refletindo sobre as perplexidades.....	23
1.2 A interrogação e possibilidades de compreensões que abre.....	28
1.3 O sentido de concepção no contexto da pesquisa.....	33
2. ÁLGEBRA EM PERSPECTIVA.....	39
2.1 Considerações iniciais e aspectos históricos.....	39
2.2 Panorama geral das investigações que envolvem o ensino e a aprendizagem da Álgebra.....	43
2.3 Pesquisas que têm foco na formação de professores de Matemática e o ensino da Álgebra.....	46
3. OLHANDO PARA O CONTEXTO DA PESQUISA	58
3.1 O sistema educacional na Colômbia	58
3.1.1 Primeiro momento: Reformas educacionais no século XIX	58
3.1.2 Segundo momento: Reformas educacionais no século XX	60
3.1.3 Terceiro momento: Reformas educacionais no século XXI.....	64
3.1.4 Aproximação ao Enfoque de Sistemas no “novo programa” de Matemática	70
3.1.5 Aspectos gerais dos Lineamientos Curriculares de Matemáticas	75
3.2 Destaques sobre Álgebra no currículo	79
3.3 Pesquisas na Colômbia sobre o fenômeno em estudo.....	86
3.3.1 Álgebra nos anos iniciais.....	88
3.3.2 Comunicações e a cultura.....	91
3.3.3 Estudos no âmbito da Educação Superior.....	94
3.3.4 Intervenções pedagógicas	98
3.3.5 Modelagem e a Geometria.....	108
3.3.6 Pensamento variacional	114
3.3.7 Resolução de problemas	117
3.4 O que se mostra nos estudos revisados	121
4. O CAMINHO PARA A COMPREENSÃO	126
4.1 O modo de proceder na pesquisa	126
4.2 A pesquisa na abordagem fenomenológica	130
4.3 Especificando os sujeitos significativos e o modo de realizar as entrevistas	134
4.4 A interpretação no movimento de análise dos depoimentos	141
4.4.1 Expondo compreensões sobre interpretação	148
4.4.2 A tarefa da hermenêutica:	150
4.4.3 O Modo de modo de inserir a análise hermenêutica na investigação fenomenológica.	176
4.5 Assumindo e realizando a hermenêutica fenomenológica.....	180

4.5.1	<i>O movimento Fenomenológico Estrutural</i>	181
4.5.2	<i>Para além da análise nomotética</i>	190
5.	O MOVIMENTO DE ANÁLISE DE DADOS	194
5.1	<i>Apresentação do percurso analítico</i>	194
5.2	Análise ideográfica: trabalhando com o discurso dos professores de escola	195
5.2.1	<i>Professor P1E</i>	195
5.2.2	<i>Professor P2E</i>	210
5.2.3	<i>Professor P3E</i>	222
5.2.4	<i>Professor P4E</i>	234
5.2.5	<i>Professor P5E</i>	241
5.2.6	<i>Professor P6E</i>	253
5.3	Análise Nomotética	271
5.3.1	<i>Primeiras reduções dos depoimentos dos professores de escola</i>	271
5.3.2	<i>A caminho dos núcleos de ideias -NI- mais abrangentes</i>	280
5.3.3	<i>Interpretação das convergências nomotéticas</i>	281
5.4	Análise ideográfica: trabalhando com o discurso dos professores da Licenciatura em Matemática	313
5.4.1	<i>Professor P1L</i>	313
5.4.2	<i>Professor P2L</i>	324
5.4.3	<i>Professor P3L</i>	337
5.4.4	<i>Professor P4L</i>	354
5.4.5	<i>Professor P5L</i>	366
5.5	Análise Nomotética	379
5.5.1	<i>Primeiras reduções dos depoimentos dos professores da Licenciatura em Matemática</i>	379
5.5.2	<i>A caminho dos núcleos de ideias -NI- mais abrangentes</i>	387
5.5.3	<i>Interpretação das convergências nomotéticas</i>	388
6.	EXPLICITANDO A FUSÃO DE HORIZONTES	413
6.1	Uma metacompreensão da pesquisa realizada	413
6.2	Elo de retomada	423
6.3	Síntese compreensiva	431
	REFERÊNCIAS	436
	ANEXOS.....	449
	Anexo 1. Termo de consentimento livre e esclarecido	449

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática, em geral e, da Álgebra, em particular, tem sido um grande desafio nos sistemas escolares colombianos, tanto para professores quanto para pesquisadores. Isso, porque apesar do esforço investido em seu ensino, os alunos não obtêm conhecimentos algébricos satisfatórios, uma vez que, em geral, no final do seu tempo na escola, os alunos lembram do estudo da Álgebra como um “jogo de letras” que, em alguns casos, permite-lhes resolver equações e, em outros, é considerado simplesmente como uma ferramenta para resolver exercícios que contêm um alto conteúdo procedimental, com pouco ou nenhum sentido para além de isso.

Conforme argumenta Doerr (2004), diversos estudos têm se dedicado a investigar os desafios relacionados ao ensino e à aprendizagem da Álgebra, buscando compreender suas causas e propor estratégias para superá-los. A autora destaca que, ao longo dos últimos trinta anos, a pesquisa em Educação Matemática produziu um corpo significativo de investigações sobre as conceituações teóricas da Álgebra escolar e sobre a aprendizagem de Álgebra pelas crianças. Além disso, outros estudos têm explorado, mais recentemente, como a aprendizagem das crianças pode ser influenciada por tecnologias computacionais (Katz, 2007; Arcavi, Drijvers e Stacey, 2017).

Nesse cenário, várias pesquisas — como será aprofundado na segunda seção desta tese — destacam a importância de propor atividades que visem o raciocínio algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Essa abordagem é vista como uma alternativa promissora para favorecer a compreensão de ideias matemáticas complexas, considerando as vivências dos estudantes.

Muitos estudos falam da integração do ensino de Álgebra desde os anos iniciais da escolaridade, que entendem visar não apenas aprimorar a atividade Matemática nesses anos, mas também facilitar a transição para os níveis mais avançados de ensino (Blanton e Kaput, 2005).

Os principais focos dessas investigações têm sido, por um lado, compreender — por meio de observações em sala de aula — como as crianças constroem o pensamento algébrico na perspectiva conhecida como *Early Algebra*¹. Por outro lado, há um esforço crescente em

¹ Algumas dessas investigações foram apresentadas no TSG10, o *the Teaching and Learning of Early Algebra*, no âmbito do ICME-13 Conference, realizada em Hamburg, Alemanha, em 2016.

repensar a formação de professores dos anos iniciais da *Educación Básica*², oferecendo-lhes ferramentas teóricas e metodológicas que possibilitem uma nova compreensão da Álgebra e, conseqüentemente, contribuindo com sua prática em sala de aula (Oliveira, 2022).

As dificuldades no aprendizado da Álgebra são atribuídas a vários fatores, entre eles: a natureza abstrata dos objetos matemáticos, as dificuldades próprias dos alunos na aprendizagem e as práticas pedagógicas que, com frequência, reforçam abordagens procedimentais e mecanicistas (Castro, 2012). Um dos aspectos centrais dessa problemática envolve a qualidade do ensino, a maneira como a formação de professores é posta em ação nas práticas pedagógicas. Embora diversas pesquisas evidenciem que ensinar Álgebra por meio de procedimentos desprovidos de significado e propósito é ineficaz. Nossos estudos mostraram que essa ainda é a abordagem predominante na maioria das salas de aula. Nesse sentido, Doerr (2004) aponta que um dos principais entraves para transformar o ensino da Álgebra reside na ausência de uma base sólida de pesquisas voltadas ao conhecimento e à prática dos professores. A autora enfatiza que “conhecimentos e práticas dos professores e seu desenvolvimento para o ensino da Álgebra tem sido amplamente ignorada na literatura de pesquisa”³ (Doerr, 2004, tradução nossa), no campo da Educação Matemática. Portanto, entendemos que há necessidade de realizar investigações que foquem o modo como o professor concebe a Álgebra e seu ensino, ampliando a compreensão sobre os conhecimentos docentes e as dinâmicas que sustentam sua atuação em sala de aula.

Dando continuidade à discussão sobre os desafios enfrentados na formação docente para o ensino da Álgebra, é importante considerar como o conhecimento científico é experienciado pelos futuros professores durante sua trajetória formativa. A centralidade atribuída a esse conhecimento, muitas vezes tratado de forma técnica, pode limitar a construção de uma

² No decorrer do texto desta tese, ao nos referirmos ao contexto em que foi realizada a pesquisa — o contexto colombiano — adotamos a nomenclatura oficial utilizada para os níveis educacionais conforme estabelecido pelo *Ministerio de Educación Nacional* da Colômbia. De acordo com essa classificação, o sistema educativo colombiano está estruturado da seguinte forma:

- *Educación Inicial y Educación Pré-escolar*: destinada a crianças menores de 6 anos de idade;
- *Educación Básica*: subdividida em dois ciclos — *Primaria* (do 1º ao 5º ano) e *Secundaria* (do 6º ao 9º ano);
- *Educación Media*: correspondente ao 10º e 11º anos;
- *Educación Superior*: etapa que sucede a *Educación Media*.

Informamos ao leitor que essa organização foi considerada ao longo da análise e discussão dos dados, respeitando as especificidades do sistema educacional colombiano (<https://www.mineducacion.gov.co/portal/Preescolar-basica-y-media/>). Assim, neste trabalho, na busca por manter consistência terminológica para assegurar clareza ao leitor denominamos: *Educación Básica Primaria* como *Educación Básica Primaria*, *Educación Básica Secundaria* como *Educación Básica Secundaria*, *Educación Media* como *Educación Média* e *Educación Superior* como *Educación Superior*. Também, na Figura 16 do presente trabalho é apresentado um esquema que visa esclarecer a correspondência entre os níveis de ensino nos sistemas educacionais do Brasil e da Colômbia.

³ Teachers' knowledge and practices and their development for the teaching of algebra have been largely unexamined in the research literature.

identidade profissional que articule teoria, prática e reflexão. Nesse sentido, Paulo, Amaral e Santiago (2010, p. 81) apontam que o professor em formação precisa de:

[...] um conhecimento científico, que é vivenciado na sala de aula de sua formação e lhe exige um fazer metódico e rigoroso e um conhecimento que deve permitir-lhe “ensinar” matemática. Esse ensinar, para eles, não está clareado. [...] O presente vivido com o conhecimento científico da sala de aula não resgata o conhecido e não leva à projeção de possibilidades. Não lhe é dada a possibilidade de um pensar o seu “ser professor” que permita que o que nos vem ao encontro, no aprender matemática, seja presente, carregando o passado e abrindo possibilidades de projeções futuras, pois os alunos são “guiados” pelo conhecimento científico em que é pressuposto como válido apenas o conhecimento que é provado, ou derivado de pressupostos e conclusões.

Quando o conhecimento é apresentado como algo acabado e inquestionável, perde-se a oportunidade de atualizá-lo e de ressignificá-lo no contexto da prática docente. Por isso, torna-se importante considerar diferentes dimensões do conhecimento profissional docente, bem como os múltiplos significados que os conceitos matemáticos podem assumir na sala de aula (Fiorentini e Oliveira, 2013). Esse movimento de reflexão contínua exige uma postura que ultrapasse o fazer técnico, promovendo um pensamento mais amplo, capaz de colocar “[...] a prática educacional do nível do *saber fazer* em sintonia com questões como *por que e para que fazer desse modo*” (Bicudo e Garnica, 2021, p. 27, grifo dos autores).

Apesar de os currículos de formação de professores de Matemática abordarem, em sua maioria, aspectos formais da Álgebra, nem sempre há uma discussão aprofundada sobre os encaminhamentos pedagógicos desse conteúdo. Como resultado, ao concluir a graduação, muitos professores iniciantes recorrem à forma como aprenderam Álgebra na *Educação Básica* e *Média* — geralmente marcada por abordagens procedimentais e descontextualizadas — e acabam reproduzindo esse mesmo modelo em sua prática docente. Em outros casos, a condução das aulas se apoia quase exclusivamente nos livros didáticos, revelando uma dificuldade em articular os conhecimentos adquiridos na universidade com os saberes escolares e com as demandas reais da sala de aula (Pimenta, 2002; Paulo, Amaral e Santiago, 2010).

Esse descompasso evidencia o que Felix Klein (2006) denominou como *dupla descontinuidade* na formação do professor de matemática. A primeira ocorre entre a forma como os alunos compreendem os conteúdos no nível pré-universitário e a maneira como esses mesmos conteúdos são abordados na universidade. A segunda se dá entre o conhecimento matemático adquirido na formação superior e aquele que é efetivamente ensinado na escola na *Educação Básica* e na *Educação Média*. Essa desconexão dificulta ao futuro professor desenvolver uma compreensão articulada das ideias matemáticas e estabelecer vínculos significativos entre os diferentes níveis de ensino.

Essas dificuldades de articulação entre os diferentes níveis de ensino e os conhecimentos matemáticos presentes na formação docente tornam-se ainda mais significativas quando analisadas em contextos específicos. É nesse cenário que se insere a presente pesquisa, realizada na Colômbia, país de origem de seu autor, que traz como o solo de suas preocupações suas experiências vivenciadas como estudante tanto no percurso escolar pré-universitário quanto no curso de licenciatura em Matemática; depois, como professor de *Educación Básica* e *Educación Média* em algumas escolas; e, mais tarde, lecionando algumas disciplinas no curso de Licenciatura em Matemática. Sendo assim, entendemos que é importante trazer algumas considerações gerais sobre o currículo colombiano nestes níveis educacionais — que são apresentadas na terceira seção da presente tese —, levando em conta que, nesse país, a maioria dos graduados dos programas de licenciatura em Matemática realizam sua atividade docente nos níveis de *Educación Básica* e *Média*. Isso permitirá explicitar as dificuldades de articulação mencionadas como um problema a ser investigado.

Diante da necessidade de compreender as lacunas visualizadas no âmbito das dificuldades de articulação entre os diferentes níveis de ensino e os conhecimentos matemáticos presentes na formação docente, particularmente no contexto colombiano, esta investigação busca aprofundar o olhar sobre como esses descompassos são expressos nos relatos de professores de Matemática. Expõe-se, assim, a pergunta de pesquisa: *como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educación Média na Colômbia?* que se refere à forma como esses sujeitos — denominados, no âmbito desta investigação, como *sujeitos significativos*⁴ — compreendem a Álgebra e seu ensino. São professores que atuam tanto em um curso de formação docente, no ensino superior, quanto na *Educación Média*, em escolas que recebem estagiários de Licenciatura em Matemática. A escolha por esses dois grupos se justifica pela necessidade de compreender a *ruptura* entre os níveis de ensino — conforme indicada por Felix Klein — e pela relevância das experiências formativas dos professores que percorrem todo o ciclo educacional, desde os anos iniciais até sua atuação profissional como docentes de Matemática. Considera-se, nesta pesquisa, que as

⁴ Ao referirmo-nos aos professores como “sujeitos significativos” destacamos que é um modo de nomeá-los no âmbito de uma pesquisa fenomenológica. Assim, “sujeito é entendido enquanto entidade orgânica que se apresenta como singular, única e que é aquele que age ou que realiza ação. Entretanto, o sujeito não é um conceito vazio, abstrato, que gira em torno de si mesmo, de modo autocentrado e disparador de ações geradas por si mesmo, sem qualquer inter-relação com o que ou com quem está à sua volta. Aprofundando esse movimento, abre-se o entendimento de pessoa que apresenta um núcleo subjetivo, singular e cuja constituição vai se expandindo em complexidades. Um aspecto importante é entender o seu ser como um feixe de possibilidades que se realizam no movimento do acontecer, ou seja, da própria vida em que estão escolhidas” (Pinheiro, 2018, em nota de rodapé p.10). Em particular, destacamos que “sujeito significativo é considerado aquele que vivencia o fenômeno investigado no contexto tomado como importante para a pesquisa, de acordo com a pergunta orientadora” (Lammoglia Bruna, 2013, p. 176).

trajetórias formativas e profissionais desses docentes oferecem subsídios valiosos para compreender como a Álgebra é concebida e ensinada em diferentes níveis de ensino. Levando em conta as concepções expressas por esses professores, buscamos articular compreensões sobre a Álgebra e seu ensino, com vistas a esclarecer possíveis caminhos que permitam explicitar as conexões entre os conhecimentos apreendidos na graduação e aqueles mobilizados na prática docente escolar.

Esta pesquisa é realizada de modo qualitativo, seguindo uma abordagem fenomenológica. A pesquisa qualitativa com abordagem fenomenológica visa a manifestação de aspectos significativos da estrutura do fenômeno conforme ele se apresenta na percepção; “privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, entrevistas com sujeitos [...] e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de acontecimentos etc”. (Bicudo, 2019, p. 88). Com a intenção de abordar a questão de pesquisa, já mencionada, investigam-se, por meio de entrevistas, os modos pelos quais os *sujeitos significativos* compreendem a Álgebra e seu ensino.

As ideias que expressam os sentidos e significados presentes nas descrições — que compõem o corpus textual produzido com os depoimentos obtidos nas entrevistas — são reunidas de forma articulada, com o objetivo de evidenciar as convergências e divergências que emergem. Por meio do movimento das reduções fenomenológicas, busca-se alcançar uma compreensão ampliada dos sentidos e significados, permitindo a constituição de núcleos de ideias que se revelam ao pensamento presente no fazer com Álgebra, voltado para seu ensino. Os depoimentos foram analisados segundo os movimentos *ideográfico* e *nomotético*, tendo em vista a estrutura do fenômeno investigado: as concepções de Álgebra e seu ensino, explicitadas por professores de Matemática que ensinam Álgebra em um curso de licenciatura de Matemática, bem como de professores de Matemática na *Educação Média*. Esse percurso analítico e reflexivo possibilita um pensar interpretativo abrangente, que, por meio da análise hermenêutica, conduz à exposição de um pensamento teorizante sobre o tema investigado, sempre em articulação com os referenciais teóricos que dialogam com o fenômeno em estudo.

Apresentando a organização do texto da tese

Com o intuito de dar continuidade ao movimento investigativo proposto, a presente tese está organizada em seções que articulam os diferentes momentos do percurso teórico-metodológico e analítico desenvolvido ao longo da pesquisa.

A *primeira seção* desta tese traz o momento inicial do percurso investigativo, ao apresentar as motivações que impulsionam o autor a interrogar o ensino da Álgebra no contexto

da formação de professores de Matemática. Ao pensar sobre suas experiências vivenciadas ao longo de sua trajetória docente, revelam-se para o autor desta pesquisa inquietações e perplexidades que não apenas marcam sua formação profissional, mas também provocam um movimento reflexivo em caminho à interrogação que norteia a pesquisa. Essa interrogação não é concebida como uma pergunta fechada, mas como uma abertura contínua ao sentido, que convida à busca de compreensões múltiplas e renovadas. A seção enfatiza, portanto, a importância de pensar criticamente sobre o que interroga a pergunta, iluminando o questionamento do fenômeno sob diferentes perspectivas. Nesse movimento, são exploradas as noções de concepção, crença e conhecimento, compreendidas como entrelaçamentos dinâmicos, permeados tanto pelas vivências⁵ individuais quanto pelo diálogo social e cultural.

A *segunda seção* da tese é dedicada à revisão da literatura no intuito de ampliar nosso horizonte de compreensão sobre o fenômeno investigado no âmbito da Educação Matemática: a Álgebra e os modos como ela é concebida e ensinada. Essa revisão de literatura é conduzida sob uma perspectiva fenomenológica, o que significa que os textos analisados não são assumidos como verdades finais, mas como possibilidades de diálogo que estimulam o pensamento crítico e reflexivo. Inicialmente, a seção apresenta considerações históricas sobre a Álgebra, discutindo sua evolução e relevância no contexto educacional. Em seguida, são exploradas as principais contribuições internacionais que abordam o ensino e a aprendizagem da Álgebra, destacando estudos que impactaram significativamente o campo e que oferecem diferentes perspectivas teóricas e metodológicas. Na parte final da seção, o foco incide sobre as pesquisas voltadas à formação de professores de Matemática, com especial atenção às concepções docentes sobre a Álgebra. Assim, esta seção articula-se com a anterior ao aprofundar a interrogação da pesquisa e prepara o terreno para as discussões que serão desenvolvidas nas seções seguintes.

A *terceira seção* da tese situa a pesquisa no contexto educacional colombiano, apresentando as principais reformas e diretrizes curriculares que moldam a formação de professores de Matemática nesse país. Ao delinear esse cenário histórico e institucional, a seção fornece elementos importantes para compreender as práticas pedagógicas e as concepções

⁵ De acordo com Ales-Bello (2006, p.32, grifos do autor), “[o] termo *ato* está também em Husserl expresso pela palavra alemã de raiz latina, *akt*. Ele usa também uma outra palavra que só existe em alemão, *Erlebnis*, formada de três partes e cuja raiz interna *leb* se parece com a palavra *life*, que em inglês significa vida. O ver e o tocar são atos, mas são chamados de *Erlebnis*, que é um substantivo, e que na nossa língua pode ser traduzido por vivência. Vivência quer dizer aquilo que nós estamos vivendo. Assim, ver e tocar são atos que nós estamos realizando, chamados, na língua alemã, *Erlebnis* e, na língua espanhola ou em português, vivência. Na língua italiana, como na inglesa, esse termo não existe, então, não podendo traduzi-lo por uma só palavra, ‘atos por nós vividos’ que se transforma no substantivo ‘o vivido’ (no caso, do italiano) ou ‘a experiência vivencial’ (no caso do inglês). Em português e em espanhol, a palavra vivência atinge mais plenamente o seu sentido”.

docentes que serão investigadas ao longo do estudo. A análise das reformas educacionais permite reconhecer os avanços e retrocessos no sistema educativo colombiano, evidenciando os impactos dessas transformações sobre o ensino da Matemática, especialmente da Álgebra. Além disso, a seção contempla uma revisão de estudos realizados na Colômbia que abordam o fenômeno em foco, contribuindo para o aprofundamento da compreensão sobre as concepções dos professores e os desafios enfrentados em suas práticas de ensino.

A *quarta seção* da tese é dedicada à explicitação dos caminhos metodológicos que sustentam a investigação, tendo como eixo central a interrogação delineada na primeira seção: *Como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores de Educação Média na Colômbia?* Essa pergunta não é tratada como um ponto de chegada, é compreendida como um movimento contínuo de busca e reflexão, que se renova a cada aspecto do fenômeno investigado que se mostra ao sujeito que intencionalmente o interroga. Inspirada na abordagem fenomenológico-hermenêutica, esta seção explicita a postura investigativa que se alicerça na abertura ao sentido e na escuta atenta das múltiplas compreensões que emergem da experiência vivenciada. Nesse sentido, a seção detalha os procedimentos assumidos para a produção e análise dos dados, enfatizando a coerência entre a visão filosófico-teórica assumida e as escolhas metodológicas. Também, nessa seção se apresentam os modos de proceder na escuta dos depoimentos dos sujeitos da pesquisa, bem como os elementos que possibilitam a interpretação dos relatos, sempre em consonância com a atitude fenomenológica que permeia toda a investigação. Assim, esta seção da tese não apenas descreve o “como fazer”, mas reafirma o compromisso com uma compreensão do fenômeno, preparando o terreno para o movimento analítico que será articulado e exposto na seção seguinte.

A *quinta seção* da tese é dedicada ao movimento de análise dos dados produzidos por meio de entrevistas com os professores de Matemática — os *sujeitos significativos*, constituindo um momento central para a ampliação da compreensão sobre o fenômeno investigado. A análise é conduzida em consonância com a abordagem fenomenológico-hermenêutica, exigindo não apenas rigor metodológico, mas também uma abertura interpretativa — apoiada nos enxertos hermenêuticos — capaz de compreender os muitos sentidos percebidos e significados atribuídos à Álgebra pelos docentes. Nessa direção, a seção busca explicitar, de forma articulada, as múltiplas dimensões que emergem das falas dos *sujeitos significativos*, valorizando tanto a singularidade dos relatos quanto as possíveis convergências de sentido.

O procedimento analítico é estruturado em dois movimentos complementares. No primeiro, de caráter ideográfico, são analisadas as entrevistas com professores atuantes nas escolas na *Educação Média*, com atenção às particularidades das compreensões expressas por cada sujeito. No segundo, de natureza nomotética, realiza-se um movimento de redução fenomenológica às convergências, buscando identificar invariantes do fenômeno. Paralelamente, esse mesmo movimento de análise — ideográfica e nomotética — é realizado com os relatos de professores do curso de licenciatura em Matemática, ampliando a compreensão do fenômeno nos âmbitos formativos em que esses docentes atuam.

Finalmente, a *sexta seção* da tese apresenta uma metacompreensão do percurso investigativo. Em vez de oferecer conclusões definitivas, a seção revela compreensões emergentes sobre como a Álgebra é concebida e ensinada pelos professores entrevistados. Nesse contexto, busca-se explicitar sentidos que se desvelam no diálogo entre o pesquisador e os sujeitos significativos, entre o vivenciado e o interpretado — movimento que, inspirado na hermenêutica filosófica de Hans-Georg Gadamer, configura uma fusão de horizontes. Trata-se da articulação entre o horizonte do pesquisador, dos professores e dos autores estudados. Comprometidos com a formação de futuros docentes de Matemática, sujeitos significativos e autor compartilham suas concepções sobre a Álgebra e seu ensino. Essa fusão ocorre como uma abertura contínua ao sentido, que se constitui à medida que se retoma a interrogação e o envolvimento com o interrogado, num processo dinâmico e dialógico de compreensão.

1. EXPERIÊNCIA VIVIDA

*O mundo é não aquilo que eu penso,
mas aquilo que eu vivo.*
(Merleau-Ponty, 1999, p.14).

1.1 Refletindo sobre as perplexidades

Nesta seção, apresento⁶ alguns dos momentos relevantes das experiências vivenciadas no processo de minha formação como professor de Matemática, as inquietações e as perplexidades que vão ao encontro com a interrogação da pesquisa.

Durante meu tempo como aluno na *Educação Básica*, a forma como a Álgebra era trabalhada gerou grande perplexidade, pois, conforme compreendo, a Matemática era apresentada de uma forma completamente diferente de como havia sido abordada até então, passando do manuseio de operações com quantidades concretas para o manuseio de letras, às quais se tinha que atribuir significados particulares e operar com uma lógica diferente daquela da Aritmética e, em poucas ocasiões, foi tentado entrelaçar esses significados com outros tipos de representações, tais como as geométricas, por exemplo. Grande parte do começo do trabalho com Álgebra na *Educação Básica* foi abordada a partir, por meio de e com um livro escrito por Aurelio Baldor, que desde os anos 1960 e 1970 orientou os conteúdos curriculares desta disciplina em vários países da América Latina, e que ainda hoje é estudado e trabalhado pelos professores, se não em sua totalidade, pelo menos como uma referência básica. Neste livro, conhecido como *Álgebra de Baldor*, há abundantes exercícios de mecanização e problemas que carecem de aplicações concretas, centrado na adoção de uma linguagem que visa a manipulação de símbolos e o manuseio de regras (Gómez, 2021). Nos últimos anos da *Educação Básica e Média*, este tipo de “linguagem sucinta” possibilitou ir ao encontro de objetos matemáticos que exigiam a intuição de ideias mais elaboradas, possibilitando sua inter-relação com outras áreas do conhecimento na escola, constituindo uma ferramenta de pensamento versátil que favorecia a solução de problemas.

Ao ingressar na *Educação Superior*, alguns aspectos da Álgebra trabalhados na *Educação Básica e Média* provaram ser eficientes no tratamento de novos conceitos

⁶ Por tratar das motivações do autor do presente estudo, ou seja, de suas experiências que vivenciadas no percurso da formação como professor de Matemática, escrevo na primeira pessoa no singular e devidas concordâncias. Nas demais partes do texto é utilizada a primeira pessoa no plural, pois envolve o meu pensar junto ao da orientadora desta tese, bem como o dos autores estudados e sujeitos significativos entrevistados.

desenvolvidos no currículo do curso de *Licenciatura en Matemáticas*, embora às vezes eles fossem insuficientes. Com o progresso dos semestres, a forma de abordar a Álgebra mais uma vez me deixou perplexo, pois foi apresentada como um assunto argumentativo com o objetivo de provar e demonstrar, com base em definições e axiomas, que se foram expandindo por meio de regras lógicas. Entretanto, nessa nova abordagem que toma as estruturas algébricas como eixo central, nem sempre foram gerados espaços de discussão sobre como se articulava essa nova forma de lidar com a Álgebra com aquela até então conhecida. Essa perplexidade diante da Álgebra foi reforçada por um fragmento de texto que apareceu em um livro que serviu como referência básica para a introdução ao estudo das Estruturas Algébricas, no curso de graduação de *Licenciatura en Matemáticas*. Nele, a questão de qual é o ingrediente básico da Álgebra é colocada como um convite para o estudo da disciplina. A seguir, o argumento proposto é apresentado:

O primeiro contato de uma criança com Álgebra é quando ela é ensinada a adicionar e multiplicar números. Vejamos o que realmente acontece. Suponha que você visite uma civilização desconhecida em um mundo desconhecido e observe uma criatura daquele mundo, em uma sala de aula, ensinando outras criaturas a somar. Suponha ainda que você não saiba que o grupo está aprendendo a somar, você é simplesmente colocado naquela sala como observador e é solicitado a fazer um relatório sobre exatamente o que você viu. O professor faz ruídos que soam mais ou menos como *glup*, *poit*. Os alunos respondem *bimt*. O professor então diz *opt*, *gaft* e os alunos respondem *poit*. O que você está fazendo? Você não pode informar que estejam somando números, porque nem sequer sabe que os sons representam números. Naturalmente, você entende que existe comunicação. Tudo o que você pode dizer com certeza é que estas criaturas conhecem alguma regra, de modo que ao designar certos pares de coisas em sua língua, um após o outro, como *glup*, *poit*, eles podem concordar em uma resposta, *bimt*. Este processo é o mesmo que acontece em uma sala de aula da primeira série quando se ensina a somar; o professor diz quatro, sete e os alunos respondem onze. Assim, ao analisar a soma e multiplicação de números, vemos que a soma é basicamente uma regra que é aprendida e que nos permite associar cada dois números em uma determinada ordem com um número como resposta. A multiplicação também é uma regra, mas uma regra diferente. Finalmente, observe que ao brincar com os alunos, os professores devem ter algum cuidado com os pares de coisas que eles dizem. Se de repente um professor do primeiro ano diz dez, céu, os pobres alunos vão ficar confusos. A regra é definida apenas para pares de elementos do mesmo conjunto (Fraleigh, 1982, p.10, tradução nossa, grifos do autor)⁷.

⁷ El primer contacto de un niño con el Álgebra se da cuando se le enseña a sumar y multiplicar números. Analicemos lo que en realidad sucede. Supongamos que ustedes visitan una civilización desconocida en un mundo desconocido y observan a una criatura de ese mundo, en un salón de clases, enseñando a sumar a otras criaturas. Supongamos además que ustedes ignoran que el grupo aprende a sumar, ustedes simplemente están colocados en esa habitación como observadores y se pide hacer un informe sobre lo que han visto exactamente. El maestro emite unos ruidos que suenan aproximadamente como *glup*, *poit*. Los alumnos responden *bimt*. A continuación el maestro dice *ompt*, *gaft* y los alumnos responden *poit*. ¿Qué están haciendo? Ustedes no pueden informar que están sumando números, pues ni siquiera saben que los sonidos representan números. Naturalmente, ustedes comprenden que existe comunicación. Todo lo que pueden decir con seguridad es que estas criaturas conocen alguna regla, de manera que al designarse ciertos pares de cosas en su lenguaje, una después de otra, como *glup*, *poit*, ellos pueden ponerse de acuerdo en una respuesta, *bimt*. Este proceso es igual al que ocurre en un aula de primer año al enseñar a sumar; el maestro dice cuatro, siete y los alumnos responden once. De este modo, al analizar la suma y la multiplicación de números, vemos que la suma es básicamente una regla que se aprende y que nos permite asociar

Essa passagem me permitiu questionar quais poderiam ser aquelas ideias fundamentais presentes no estudo da Álgebra, o alcance que poderiam envolver seus aspectos na Matemática da *Educación Básica e Média* e os cuidados em seu tratamento, assim como também qual seria a perspectiva apropriada para seu ensino. Outro momento que me gerou perplexidade no tratamento da Álgebra no decorrer da graduação, ocorreu na aula de Didática da Matemática, na qual foi abordado o texto de John Mason intitulado *Rutas hacia el algebra-Raíces hacia el Álgebra* (Routes and Roots to Algebra), no qual a Álgebra é apresentada como uma linguagem com capacidade de comunicar ideias complexas e abstratas e que tem suas próprias regras de manipulação, sendo especialmente adequada para visualizar e expressar afirmações gerais, que o autor chama em reiterados passagens de “linguagem sucinta” (Mason, 1999). Essa visão da Álgebra como linguagem mostrou uma gama de possibilidades para associar variação e generalização de padrões com uma linguagem simbólica, mas também levantou questões sobre os limites dessa abordagem em relação a outros domínios da Matemática e, também, no concernente ao ensino.

No desenvolvimento da prática como professor atuante na *Educación Básica e Média*, as questões anteriores foram aprofundadas, pois apesar de ter uma visão mais ampla sobre a Álgebra, graças à formação obtida no curso de licenciatura, não era evidente a conexão entre a abordagem da Álgebra trabalhada na universidade e aquela que foi trabalhada na *Educación Básica e Média*. Do meu ponto de vista, parecia bastante evidente o que o professor de Matemática deveria realizar na sala de aula: ensinar Matemática e, em particular, no oitavo e nono anos, ensinar Álgebra. Da mesma forma, parecia não haver necessidade de questionar a Álgebra que estava nos currículos escolares, nem a concepção do professor sobre o que é a Álgebra que ele ensina. Por outro lado, nas escolas onde trabalhei como professor de Matemática, era muito comum que o desenvolvimento do currículo fosse orientado por livros didáticos e, no caso do ensino de Álgebra, às vezes era usado o conhecido livro de *Álgebra de Baldor*, o que me fazia questionar sobre quais seriam os propósitos de abordar o ensino da Álgebra na *Educación Básica* dessa forma e quais seriam as compreensões que se abririam aos alunos.

O Mestrado em Educação me permitiu refletir sobre os aspectos pedagógicos e didáticos da prática profissional, buscando encontrar formas de estabelecer relações entre a Matemática

a cada dos números en un orden dado, un número como respuesta. La multiplicación también es una regla, pero diferente. Por último, nótese que al jugar con los estudiantes, los maestros deben tener algo de cuidado acerca de los pares de cosas que dicen. Si de repente un maestro de primer año dice diez, cielo, los pobres alumnos se confundirán. La regla está definida sólo para pares de elementos del mismo conjunto (Fraleigh, 1982).

que é trabalhada na *Educación Básica e Média* e os contextos socioculturais que envolvem os processos de ensino e aprendizagem. Nesse cenário de formação, foram muito comuns os diálogos com outros professores sobre o que estava acontecendo em nossas salas de aula e a análise de situações de ensino que contribuíram para a abordagem de certos tópicos de Matemática tanto na *Educación Básica e Média* quanto na *Educación Superior*. Esses diálogos foram ampliados nas reuniões do grupo de pesquisa *Pirámide*, que faz parte da Licenciatura em Matemática e apoia a linha de pesquisa do Mestrado em Educação na *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia* (UPTC).

O grupo de pesquisa *Pirámide* é formado por estudantes da *Licenciatura en Matemáticas*, professores atuantes em *Educación Básica e Média*, estudantes de pós-graduação e professores universitários, o que favorece conhecer um amplo espectro de práticas de ensino. Dentro do grupo, foram socializados projetos de pesquisa e discutidos temas relacionados à formação de professores de Matemática. No entanto, aparentemente, parecia inquestionável que era esta a Matemática posta nos currículos escolares. Nos diálogos com alguns integrantes do grupo, estava presente a ideia de que alguns temas abordados na *Educación Superior* não conseguiam fazer uma conexão explícita com questões trabalhadas na *Educación Básica e Média*, principalmente em relação à Álgebra.

No curso do doutorado, essa inquietação se tornava cada vez mais visível nas sessões de orientação com a Profa. Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo e as oportunas observações dos demais orientandos do grupo de pesquisa Fenomenologia em Educação Matemática (FEM)⁸. Esse grupo de pesquisa possui uma ampla trajetória no desenvolvimento de pesquisa qualitativa na abordagem fenomenológica, o que possibilita um olhar mais abrangente sobre o fenômeno de ensino da Álgebra. Além disso, pesquisas relevantes no campo da Álgebra estão se desenvolvendo por membros do grupo FEM, como o objetivo de contribuir para um projeto

⁸ “O trabalho efetuado por esse grupo atinge um público diversificado e amplo, de diferentes modos e níveis. Pelas publicações das investigações efetuadas, por meio de artigos em periódicos científicos, de divulgação científica, de apresentações em eventos científicos nacionais e internacionais, atinge a comunidade de pesquisadores e de profissionais da área de Educação e, mais fortemente, da de Educação Matemática. Por intermédio de livros, chega a um público mais amplo que aquele especificamente interessado em investigações científicas nas áreas indicadas. Pelo trabalho de docência e de orientação realizado por todos os seus componentes está presente na formação de alunos das instituições de Educação Superior, Médio e Fundamental onde desenvolvem suas atividades profissionais. Em termos de investigação científica, seus resultados repercutem na Filosofia da Educação Matemática, evidenciando a linha de pensamento fenomenológica, no que concerne às visões: de conhecimento e de realidade; de conhecimento matemático e de realidade do objeto matemático; de constituição existencial do pré-reflexivo; das ideias de numeração e de geometria; da linguagem: desdobramento da compreensão existencial; da temporalidade no horizonte da constituição da aritmética e da geometria; do tempo vivido na forma/ação do professor de matemática. Atuam na área de conhecimento da Educação, no que diz respeito ao fenômeno da educação, e na pesquisa, no que diz respeito aos procedimentos de pesquisa qualitativa e respectivos embasamentos filosóficos” (Bicudo, 2010b, p.225).

maior no campo da Filosofia da Educação Matemática⁹. Esses estudos realizados no âmbito do grupo FEM, trazem avanços significativos que nos ajudam a compreender as concepções sobre a Álgebra no contexto da formação de professores na Colômbia, graças às pesquisas realizadas sobre a análise dos atos vivenciais¹⁰ de experiências matemáticas, por meio da linguagem em seus diferentes aspectos estruturantes e comunicacionais, revelando como sentidos e significados são constituintes na experiência (Bicudo, 2011b).

Neste movimento de refletir sobre as perplexidades apresentadas, fui focando a atenção no questionamento ingênuo pelo ato do sentido de ensinar, o que foi posto nas primeiras considerações no texto do pré-projeto do curso de doutorado, no qual buscava olhar para a existência de um hiato entre o que os estudantes de graduação de *Licenciatura em Matemáticas* aprendem, em particular sobre a Álgebra, e o que é ensinado na *Educación Básica e Média* na Colômbia. No marco da XI Atividade Inaugural de Verão do PPGEM – 2022, o pré-projeto foi discutido em colegiado no curso, e as análises da professora parecerista colocaram em evidência a questão de que aquela ideia relativa ao hiato estava sendo considerada como algo dado, no sentido de sendo assim, como sendo certo. Ou seja, estava sendo tomada de modo naturalizado quando no estudo proposto evidenciava-se como algo solicitando esclarecimento a respeito dos seus sentidos e significados.

Este questionamento foi importante, pois me permitiu refletir e me perguntar, há um hiato? mas que hiato é esse? De modo ainda ingênuo, percebia que havia um hiato. Dei-me conta que era preciso investigá-lo.

Assim, passei a focar esse *hiato*, buscando compreendê-lo no movimento de formação de professores de Matemática. O hiato indica um vazio, uma ausência de ligação. A investigação incide sobre essa ausência. No decorrer de estudos e discussões com a orientadora e com o grupo de pesquisa por ela coordenado, visualizamos a possibilidade de estudar textos

⁹ Projeto apresentado ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) para o período de 2020 a 2024. Título do projeto: Uma filosofia Fenomenológica da Educação Matemática. Coordenação da professora Dra. Maria Aparecida Viggiani Bicudo. <http://fem.sepq.org.br/projetos12.htm>

¹⁰ “A vivência não é entendida como algo dado, pois somos nós que penetramos no interior dela e que a experienciamos de maneira imediata. O significado explicitado diz respeito ao sentido de experiência vivida, dizendo, com isso, do contato imediato com a vida, não se tratando de um conteúdo de experiência, mas do ato de vivê-la. No momento em que a experiência ocorre ela não é ainda refletida. Porém, pode se tornar foco sobre a qual a reflexão se volta, abrindo, no fluxo do vivido, momentos de tomar ciência do vivenciado. Essa é a característica das *Erlebnisse*: vivências refletidas. Portanto, diferentemente da experiência empírica, que é tomada na sua objetividade pragmática e observada de um lugar externo ao seu processo, a vivência, ou o experienciado, é percebida e refletida no fluxo dos atos da consciência. [...] A experiência vivenciada não diz de uma realidade meramente subjetiva, pois é experiência do que está lá para nós em um campo onde mundo e experiência são dados em um movimento de conexão e articulação e não isoladamente. A vivência tem uma duração: a unidade de sentido se estende enlaçando tanto a recolha e a reunião do passado vivido, como a antecipação do futuro no contexto total de significado. Passado e futuro estão presentes à experiência, constituindo um horizonte que acolhe a interpretação” (Bicudo, 2011, p. 33-34).

legais que determinam o currículo do ensino de Álgebra na Colômbia, trabalhos de autores significativos sobre o tema e ouvir relato de compreensões sobre Álgebra e seu ensino exposto por professores de Matemática que ensinam Álgebra em um curso de licenciatura de Matemática, bem como de professores de Matemática que atuam na *Educação Média* em escolas donde os alunos do referido curso de licenciatura realizam estágios, obtendo, desse modo, dados para articular um pensar que preenchesse aquele vazio.

Depois de muito trabalho, que demandou tempo e retomadas contínuas de escritas iniciais de textos, na tentativa de ver de modo claro o que estava sendo interrogado, chegamos a formular a interrogação desta pesquisa, já escrita no decorrer desta apresentação introdutória, do seguinte modo: *como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?*

Essa questão envolve, segundo nossa compreensão, a possibilidade de refletir sobre o ato de ensinar e o vínculo com o aprender, particularmente no que diz respeito à Álgebra. No contexto de formação de professores de Matemática visa estabelecer possíveis caminhos que permitam explicitar ligações entre o que é aprendido na graduação e o que é ensinado na *Educação Básica e Média*, pois, de acordo com Bicudo (1987, p. 50) “a concepção de conhecimento está subjacente ao modo pelo qual o professor ensina, bem como ao modo pelo qual avalia o que o aluno elaborou a partir do ensinado”.

1.2 A interrogação e possibilidades de compreensões que abre

Como foi apresentado na subseção anterior, esta pesquisa se nutre inicialmente da reflexão sobre a experiência vivida pelo investigador. Por isso, consideramos pertinente assumir uma postura fenomenológica, pois de acordo com o planteado por Bicudo (2011c, p.43), “a experiência vivida é o ponto de partida e o ponto de chegada da pesquisa fenomenológica [retomando o dito por Van Manen, 1990]”, demandando que o investigador foque sua atenção na interrogação, para se manter no caminho de investigação por ela iluminado. Assumir dita postura solicita também que se a reconheça como visão de mundo e de conhecimento a ela condizente, sendo preciso explicitar o significado da perspectiva fenomenológica e os entrelaçamentos com nossa interrogação.

Diante da pergunta o que é a Fenomenologia? Merlau-Ponty (1999) afirma que, meio século depois dos primeiros trabalhos de Husserl¹¹, ainda essa pergunta se encontra longe de

¹¹ “A Fenomenologia é uma escola filosófica cujo pai e mestre é Edmund Husserl. Começou na Alemanha em fins do século XIX e na primeira metade do século XX” (Ales-Bello, 2006, p.17). No entanto, antes de se tornar

ser respondida de modo claro e apropriado. Consideramos essa afirmação relevante, pois, numa primeira leitura, a impossibilidade de uma resposta definitiva gera perplexidade. Porém, a pergunta coloca em manifesto a abertura de possibilidades de compreensões. Em uma tentativa por elucidar de que trata a Fenomenologia, voltamo-nos à sua etimologia que é composta por duas palavras *fenômeno+logos*

‘Fenômeno’ significa *aquilo que se mostra*; não somente aquilo que *aparece* ou *parece*. Na linguagem religiosa, utilizamos também o termo *epifania* para falar de algo que se manifesta, que se mostra. ‘Logia’ deriva da palavra *logos*, que para os gregos tinha muitos significados: palavra, pensamento. Vamos tomar *logos* como pensamento, como capacidade de refletir. Tomemos, então, fenomenologia como reflexão sobre um fenômeno ou sobre aquilo que se mostra (Ales-Bello, 2006, p. 17, grifos do autor).

Para Bicudo (2009, p. 236, grifos nossos), a fenomenologia “é uma escola filosófica, tem como cerne *a busca do sentido* que as coisas que estão a nossa volta, no horizonte do mundo-da-vida¹², fazem para nós”, analisando o sentido que se mostra e refletindo sobre o que diz sobre para nós que o interrogamos intencionalmente. Nesta pesquisa, buscamos *o sentido que a Álgebra* faz para professores de Matemática que a ensinam, tanto em um curso de licenciatura em Matemática como de professores que atuam na *Educação Média* que recebem estagiários de esse curso de licenciatura. Sentido esse que, articulado com o de sujeitos, e exposto de modo inteligível pode explicitar concepções. Para tanto, fomos além dos sentidos que a nós foram se fazendo na medida em que os depoimentos abriam horizontes compreensivos, e colocamo-nos no movimento de análise do dito pelo sentido que a nós foi se mostrando, refletindo sobre o que fomos entendendo *desse dito*, de modo a poder compreender aspectos invariantes que emergiram nas articulações do nosso pensar, ao buscarmos por convergências entre as muitas Unidades de Sentido (US) destacadas nos depoimentos

filósofo, Husserl teve uma formação sólida e rigorosa em Matemática, que moldou profundamente sua abordagem filosófica. Conforme González e Bicudo (2025), Husserl iniciou seus estudos universitários em 1876, em Leipzig, e depois seguiu para Berlim e Viena. Durante esse período, estudou com alguns dos maiores matemáticos do século XIX, como Karl Weierstrass e Leopold Kronecker. Em Viena, sob orientação de Leo Königsberger (ex-aluno de Weierstrass), Husserl defendeu sua tese de doutorado em 1883, intitulada *Beiträge zur Theorie der Variationsrechnung* (Contribuições para a Teoria do Cálculo das Variações). Apesar de sua dedicação à Matemática, Husserl também frequentou cursos de filosofia com pensadores como Wilhelm Wundt e Franz Brentano. Foi com Brentano, entre 1884 e 1886, que Husserl se aproximou da psicologia descritiva e da noção de intencionalidade, conceito central da fenomenologia. Husserl “[c]ompreendeu, então, que a Filosofia podia ser tratada como uma ciência rigorosa, decidindo-se pela Filosofia” (González e Bicudo, 2025, p. 8).

¹² “[...] traduzido da palavra alemã *Lebenswelt*, ou mundo da vida, como a maioria dos autores de língua latina traduzem o termo, é entendido como a espacialidade (modos de ser no espaço) e a temporalidade (modos de ser no tempo) em que vivemos com os outros seres humanos e os demais seres vivos e a natureza, bem como com todas as explicações científicas, religiosas e de outras áreas de atividades e conhecimento humano. Mundo não é um recipiente, uma coisa, mas um espaço que se estende à medida que as ações são efetuadas e cujo horizonte de compreensão se expande à medida que o sentido vai se fazendo para cada um de nós e a comunidade em que estamos inseridos” (Bicudo, 2010a, p.48).

analisados. Esse movimento nos permitiu expor os *invariantes* do fenômeno interrogado, explicitando as concepções sobre Álgebra e seu ensino.

A explicitação de compreensões sobre o que *interroga a interrogação* é importante, pois contribui com o esclarecimento da pergunta norteadora, não só como sendo uma pergunta de quem pergunta e como é compreendida, mas também sobre significados que traz no contexto em que seu sentido se faz para a comunidade de educadores matemáticos.

Os procedimentos fenomenológicos solicitam que a própria interrogação seja colocada em destaque e que busquemos compreender o que estamos interrogando. O que queremos saber que ainda não sabemos? Trata-se de esclarecer o significado da interrogação na dimensão da região de inquérito do investigado e para o próprio investigador ou seu grupo de pesquisa (Bicudo, 2010a, p. 42).

O refletir diante das perplexidades da experiência nos convida a questionar a formação de professores de Matemática e a ruptura que se dá no curso do desenrolar curricular quando, no percurso educativo da *Educação Média à Educação Superior*, é focado o trabalho com o ensino e a aprendizagem da Álgebra. Perguntamos como essa ruptura/hiato/desconexão é percebida e compreendida na região de inquérito da Educação Matemática. Inicialmente, ainda de modo ingênuo, indagamos “o que é isso? de que trata? como é entendida?” essa ruptura? Essa pergunta, que revela nossa perplexidade, conduz-nos a um pensar analítico e reflexivo, voltando para compreender o solo histórico em que o questionamento foi se movimentando, pois o “[...] que conhecemos sobre o investigado é o fundo onde nos locomovemos. Nesse solo, a interrogação floresce, instala-se como intencionalidade e se estabelece como interrogação geradora da investigação” (Bicudo, 2010a, p. 42). Compreendemos que a região de inquérito é o solo que estimula o horizonte de pesquisa, neste sentido, estamos considerando a Educação Matemática como essa região

[...] composta por uma variedade muito rica de temas, vertentes teóricas, estudos e fenômenos que, de alguma maneira, tangenciam ou se interceptam com a Matemática e com a educação, podendo transpor-se para outras áreas de conhecimento num movimento que busca a construção/constituição do conhecimento de alguma coisa e sua presença no mundo da Educação Matemática em geral, que pode vir a ser a historicidade da construção de um objeto matemático, a dificuldade de alunos, a organização curricular escolar da Matemática, entre outros. [...] Ou seja, qual é o pano de fundo que as sustenta em termos de significações (Kluth, 2020, p. 87).

Ao assumir a Educação Matemática como região de inquérito da pesquisa desde uma postura fenomenológica, consideramos a Matemática não só como sendo um fato expressado como enunciado em termos científicos, mas também como sentido que manifesta, ou seja, essa compreensão “[...] que pode se dar em níveis diferenciados da experiência vivida, nos próprios atos realizados, bem como nos seus desdobramentos e expressões” (Bicudo, 2009, p. 236).

Olhando para a região de inquérito, Felix Klein, na primeira década de 1900, no livro *Elementary Mathematics from a Higher Standpoint* — Matemática elementar de um ponto de vista avançado: Aritmética, Álgebra, Análise¹³ —, já anunciava suas preocupações sobre a maneira como o assunto do ensino pode se expor na formação de professores de Matemática, pois ele identificou como problemático o fato de que os acadêmicos se haviam preocupado unicamente com o conteúdo do conhecimento, sem se importarem com as necessidades das escolas e, mais ainda, sem mostrar interesse por estabelecer conexões com a Matemática escolar. Klein anunciava o problema da seguinte maneira:

O jovem estudante universitário é confrontado, ao iniciar seus estudos, com problemas que não guardam relação com as coisas que eram importantes na escola. E, em consequência, esquece rapidamente e totalmente todas elas. Quando, depois de terminar seus estudos, tornou-se professor, foi subitamente forçado a ensinar Matemática elementar tradicional da maneira antiga e pedante; e, como mal conseguia, sozinho, descobrir qualquer ligação entre esta tarefa e a sua Matemática universitária, logo se adaptou à forma tradicional de ensinar, e os seus estudos universitários permaneceram em uma memória mais ou menos agradável que não teve influência nele sobre seu ensino¹⁴ (Klein, 2016, p. 1, tradução nossa).

Consideramos que o denunciado por Klein (2016) vai ao encontro dos questionamentos que formulamos no decorrer das perplexidades da experiência do investigador, particularmente no concernente ao ensino da Álgebra, o que faz que nossos questionamentos se tornarem mais complexos, pois como foi sublinhado, há mais de um século o problema anunciado por Klein ainda continua sendo percebido no horizonte de pesquisa e nas salas-de-aula.

De acordo com Bicudo (1993b, p. 19), é importante que “ao pesquisar, o pesquisador persiga uma interrogação que faça sentido para ele e cujo significado é elaborado no contexto onde ela foi formulada”, por isso, ao considerar que o questionamento surge da reflexão da experiência do investigador no tratamento da Álgebra na formação de professores, entendemos ser preciso manifestar os sentidos e significados da interrogação, pois, “se devemos ser fiéis à

¹³ Na versão original, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. O termo “höheren” do título original em alemão foi convertido para “advanced”(avançado) na tradução inglesa da obra, o que é apontado por alguns autores, como (Kilpatrick, 2008; Schubring, 2014), como um erro de tradução. O termo “höheren” em alemão corresponderia a “higher” (superior) em inglês, que está mais de acordo com a ideia de Klein sobre a relação entre a Matemática Elementar e a Matemática Superior. O uso da expressão “Matemática elementar de um ponto de vista avançado” no título da obra sugeriria um patamar hierarquicamente inferior para a Matemática elementar, enquanto que a intenção de Klein teria sido propor um olhar para a Matemática Elementar e para a Matemática Superior de um mesmo ponto de vista — com os aspectos igualmente importantes da Matemática. <https://xdocs.com.br/doc/controle-da-variao-de-quantidades-qnjx1779wp86>

¹⁴ The young university student found himself, at the outset, confronted with problems which did not suggest, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally he forgot these things quickly and thoroughly. When, after finishing his course of study, he became a teacher, he suddenly found himself expected to teach the traditional elementary -mathematics in the old pedantic way; and, since he was scarcely able, unaided, to discern any connection between this task and his university mathematics, he soon fell in with the time honored way of teaching, and his university studies remained only a more or less pleasant memory which had no influence upon his teaching.

nossa experiência, a fenomenologia deve atender ao seu *caráter situado*¹⁵ e incorporado, em contato com, e atuando em, um mundo circundante” (Cerbone, 2012, p. 29, grifos nossos). Nesta investigação, o mundo circundante é tomado como sendo o da educação na Colômbia. Isso nos remete à busca de compreensão do questionamento no contexto educacional na Colômbia¹⁶, “[o] sentido e o significado do que é interrogado são elaborados na realidade vivida” (Paulo, Amaral e Santiago, 2010, p. 73).

Portanto, ao nos voltarmos para o desafio de explicitar a interrogação numa linguagem que expresse nossa perplexidade e dê conta do indagado, demanda questionarmos constantemente e em diferentes perspectivas *o que a interrogação interroga*, pois esse movimento de reflexão contribui para clarear a pergunta ao “[...]focar o *o quê*, contribuindo para que pensemos reflexivamente no *como* proceder para corresponder ao indagado” (Bicudo, 2011a, p. 23, grifos do autor). Destacamos que, ao assumir uma postura fenomenológica, distinguimos o interrogar do perguntar. Nesse sentido, Gadamer (2011b) manifesta que com a pergunta “o interrogado é colocado sob uma determinada perspectiva. O fato de que surja uma pergunta rompe de certo modo o ser do interrogado. O *logos* que desenvolve esse ser assim aberto já é sempre resposta, e só tem sentido no sentido da pergunta” (p. 534, grifos do autor). Em vista disso, compreendemos que a pergunta solicita esclarecimentos e explicitações, o que demanda um movimento de refletir sobre os aspectos que a compõem.

Portanto, a interrogação que move esta pesquisa é assim por nós expressa:
como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?

Entendemos que a pergunta, assim expressa, abrange as perplexidades que foram apresentadas na primeira parte desta seção. Ela eclode como fruto de uma dúvida em relação ao que é tido como dado, as incertezas diante do vivido no cotidiano das salas de aula de Matemática, no desconforto percebido sobre o sentido do tratamento da Álgebra e do seu ensino.

Na reflexão sobre as dimensões e possíveis aberturas da pergunta, buscamos pela clareza do fenômeno que é interrogado no intuito de iluminar possíveis caminhos da pesquisa. Nessa direção, destacamos que “a interrogação sobre o fenômeno não se esgota porque sempre haverá outro sujeito para o qual ele se mostrará de uma maneira diferente” (Fini, 1994, p. 26), ou seja,

¹⁵ Segundo Martins, Boemer e Ferraz (1991, p.49), é preciso situar o fenômeno e ter então fenômenos situados e não soltos; assim se estará interrogando o fenômeno e não procurando solução para um problema”.

¹⁶ Alertamos ao leitor que uma descrição geral do contexto educativo em questão será apresentada na terceira seção desta tese.

o fenômeno é visto e compreendido de perspectivas de quem o interroga. Isso também sugere que aspectos mostrados pelo fenômeno não são compreendidos de maneira imediata, portanto, exige uma busca constante pela compreensão do *o que é isso* que aí está.

No início de nossa pergunta de pesquisa, a indagação é direcionada ao “como”, que se refere às possíveis formas de doação da “coisa”. A palavra “como” se explicita pela interpretação, ou seja, “o que se abre na compreensão, o compreendido, é sempre de tal modo acessível que pode se explicitar em si mesmo ‘como isto ou aquilo’. O ‘como’ constitui a estrutura da explicitação do compreendido; ele constitui a interpretação” (Heidegger, 2005a, p. 205). Nesta pesquisa, a “coisa” é a Álgebra e o modo de ela ser compreendida por professores em exercício de sua profissão, que contribuem com a formação de futuros professores de Matemática. Sua doação se dá nos relatos dos sujeitos significativos a respeito dos modos pelos quais ela é ensinada e aprendida, bem como exposta por estudiosos desse assunto. Sendo uma investigação de caráter fenomenológico, esses modos de ela aparecer não são tomados como certos, ou seja, como sendo assim determinantemente, mas são dados para serem colocados em *epoché*,¹⁷ isto é, em destaque, para serem analisados e compreendidos à luz da reflexão.

Ao focarmos a pergunta sobre como a Álgebra é concebida e ensinada, tanto nos cursos de formação de professores de Matemática quanto na *Educação Média* na Colômbia, buscando pelo que ela indaga, compreendemos que ela contempla muitos aspectos, dentre os quais aquele que aponta para o que é isto — a Álgebra. Um deles procura conhecer como a Álgebra é concebida. Essa indagação solicita que esclareçamos a que nos referimos quando falamos em concepção.

1.3 O sentido de concepção no contexto da pesquisa

No Dicionário Houaiss¹⁸ da língua portuguesa, a palavra concepção provém do latim conceptio, ōnis (ação de conter, de abranger; concepção, ideia, noção) e, por metáfora, apresenta os seguintes significados: 1) ação ou efeito de gerar (ou ser gerado) um ser vivo; 2) obra da inteligência (produto, criação, teoria); 3) trabalho de criação (projeto, plano, ideia); 4) faculdade ou ato de apreender uma ideia ou questão, ou de compreender algo (compreensão,

¹⁷ Segundo Bicudo (2010a, p.48) a *epoché* “também chamada de redução ou ato de colocar em evidência. Refere-se a dar destaque ao que está sendo interrogado, de maneira que os atos da consciência constitutivos da geração do conhecimento sejam expostos”. O termo *epoché* segundo o dicionário de filosofia de Nicola de Abbagnano (2007), tem origem na antiga Grécia e era a particular atitude dos céticos, entre eles Pirro, que caracterizava a suspensão de juízos. “Na filosofia contemporânea, com Husserl e a filosofia fenomenológica em geral, a E. [*Epoché*] tem finalidade diferente: a *contemplação desinteressada*, ou seja, uma atitude desvinculada de qualquer interesse natural ou psicológico na existência das coisas do mundo ou do próprio mundo na sua totalidade” (Abbagnano, 2007, p.39).

¹⁸ Dicionário Eletrônico, versão 3.0 – junho de 2009.

percepção); 5) modo de ver ou sentir, ponto de vista (entendimento, noção). Com essa primeira busca, podemos obter alguns indícios sobre o contexto e o significado das concepções que analisamos no decorrer da pesquisa.

Reconhecemos que a literatura sobre concepções e crenças, particularmente nos estudos de Thompson (1992), Ponte (1992), Garnica (2008), Lins e Gimenez (2005), entre outros autores, oferece um panorama amplo e denso acerca das relações entre conhecimento, crença e ação docente. Esses autores, cada qual a partir de diferentes tradições teóricas — psicológica, epistemológica e pragmatista —, abordam as concepções como estruturas mentais e interpretativas que orientam a prática dos professores e refletem modos de compreender a Matemática, seu ensino e aprendizagem. As distinções e aproximações entre crença e conhecimento, assim como as implicações dessas categorias para o campo da Educação Matemática, são amplamente discutidas, revelando tanto a complexidade quanto a historicidade do tema.

Entretanto, sem desconsiderar a relevância e a contribuição dessas leituras, compreendemos que, na presente pesquisa, o interesse pelas concepções não se restringe a classificações conceituais ou a dicotomias entre crença e conhecimento. Ao contrário, buscamos entendê-las como modos de apreender e de dizer do fenômeno do ensino e da aprendizagem da Álgebra, tal como se dá na experiência vivenciada pelos professores. Assim, as concepções são tomadas não como categorias prévias que explicam o fenômeno, mas como expressões do modo de ser e compreender que emergem no próprio movimento da prática e da reflexão docente — ao se voltarem sobre suas realizações, retomando-as, analisando-as e refletindo sobre elas no convívio com os outros, com os colegas, com os autores e nas atividades de ensinar e aprender ao longo de sua existência.

Nesta investigação, o termo concepção é compreendido no âmbito da abordagem hermenêutica, conforme Gadamer (2011a), para quem compreender é já sempre interpretar. Não há um ponto de partida que contenha uma verdade definitiva, pois compreender é sempre estar em movimento — um contínuo interpretar e comunicar que já carrega uma compreensão prévia. Essa perspectiva evidencia que toda compreensão nasce de uma pré-compreensão e se realiza na linguagem, onde o sentido se constitui na historicidade do intérprete. Tal compreensão tem suas raízes na ontologia fundamental de Heidegger, especialmente em *Ser e Tempo* (2005a), obra na qual se delineia a tríade estrutural do ser-no-mundo: compreender, interpretar e comunicar. Para Heidegger, compreender é uma estrutura existencial do *Dasein* — o modo de ser do ser humano que, ao projetar-se no mundo, confere sentido à sua existência. A interpretação configura o desdobramento da compreensão, momento em que o sentido

compreendido se explicita; e comunicar, por sua vez, significa tornar esse sentido partilhável na linguagem.

Gadamer (2011a) retoma essa tríade e a amplia ao propor a noção de *fusão de horizontes*, segundo a qual compreender é sempre um ato interpretativo e dialógico: um encontro entre o horizonte do intérprete e o horizonte do que é interpretado. Tal fusão não implica homogeneização, mas uma tensão produtiva entre perspectivas, em que o compreendido se lança a horizontes que se iluminam na interlocução. É na linguagem que o compreender se manifesta; por isso, todo ato de interpretação se realiza linguisticamente. Em outras palavras, compreender é dar forma linguística ao que se apreende, ou seja, é interpretar. Como afirma Gadamer (2011a, p. 459): “Compreender é sempre interpretar. O que é compreendido deve se traduzir em palavras se realmente tiver de ser compreendido”.

Assim compreendendo, expor uma concepção não é um gesto meramente descritivo, mas um movimento de desvelamento do modo como o sujeito compreende e se dispõe à compreensão do fenômeno — um exercício constitutivo da experiência hermenêutica. Ao afirmar que determinado autor explicita o que pensa e como faz, entende-se que ele está expondo sua concepção, ou seja, revelando o sentido que atribui àquilo que vivencia e interroga. Em consonância com essa perspectiva, Bicudo (2000) reforça que a pesquisa fenomenológica exige que o pesquisador diga seu modo de se posicionar frente ao fenômeno, como parte do movimento de compreensão e de exposição da perspectiva de que fala.

Esse modo de compreender concepção também encontra respaldo em outros campos das ciências humanas e na própria literatura da Educação Matemática. Thompson (1992), ao examinar as crenças e concepções docentes, destaca que compreender as concepções dos professores é condição para compreender suas práticas, pois nelas se expressam modos de pensar e decidir sobre o ensino. Nessa mesma direção, Garnica (2008), apoiado no pragmatismo de Peirce, entende as concepções como suportes para a ação — modos de significar e de agir que se estabilizam como hábitos, mas permanecem abertos à transformação. Ponte (1992) e Lins e Gimenez (2005) também enfatizam que as concepções não são neutras nem estáticas: elas articulam crenças, valores e experiências que orientam o modo como o professor concebe a Matemática e o seu ensino. Charlot (2000) destaca que toda prática educativa está sustentada em concepções de homem, de sociedade e de conhecimento, sendo essas concepções forjadas nas experiências e nos contextos sociais dos sujeitos. Para Perrenoud (1999), os professores atuam com base em concepções formadas ao longo de sua trajetória, influenciando diretamente suas práticas pedagógicas. Vigotski (2001), ao tratar da gênese do pensamento e da linguagem, reconhece que as concepções não são apenas representações mentais, mas construções sociais

que se expressam em práticas e discursos. No mesmo sentido, Minayo (2001) afirma que explicitar as concepções teóricas e metodológicas em uma pesquisa é parte significativa da postura epistemológica nas ciências sociais, pois permite compreender os fundamentos que orientam as escolhas e interpretações do pesquisador.

Tais compreensões dialogam com a perspectiva fenomenológica assumida nesta pesquisa, na medida em que consideram as concepções como expressões de um modo de ser no mundo e de compreendê-lo, constituídas na experiência e manifestas nos modos de proceder e de estar uns com os outros na dimensão mundana.

Compreendemos que a formação do professor de Matemática envolve não apenas o domínio dos conteúdos, mas também a reflexão sobre as concepções que orientam sua prática pedagógica. De acordo com Cunha, Fernandes, Mota e Nogueira (2006), os professores, baseados em sua experiência como alunos, tendem a se inspirar nos modelos de seus antigos professores, os quais se tornam referências tanto para suas escolhas metodológicas e didáticas como para a elaboração de suas próprias concepções sobre a Matemática. Assim, compreender as concepções dos formadores de professores é importante para entender como eles contribuem para a construção e o desenvolvimento do conhecimento matemático e da ação educativa.

Na presente pesquisa, conforme exposto na introdução desta seção, colocamos em destaque o *hiato/ruptura/desconexão* entre a universidade e a escola dedicada à *Educação Básica e Média* (daqui em diante, nesta tese denominamos apenas como *escola*, ao espaço voltado para a educação básica e formação inicial). Trata-se de um problema que Felix Klein (2006) chamou de *dupla descontinuidade* na formação de professores de Matemática. Isso nos motiva a questionarmos *como a Álgebra é concebida e ensinada no âmbito da formação de professores, tendo em vista compreender o que esse hiato diz*.

Conforme compreendemos, uma das questões centrais na formação de professores de Matemática é a articulação entre os saberes teóricos e práticos, os quais se originam e se manifestam em diferentes âmbitos educacionais. A universidade e a escola são cenários singulares de aprendizagem que propõem desafios e oportunidades para os estudantes e os professores. Por um lado, a universidade forma os estudantes nos âmbitos teórico e prático e, por outro lado, a escola exige dos professores uma atualização e adaptação constantes às demandas dos alunos e da sociedade.

Nessa perspectiva, consideramos relevante analisar como as concepções dos professores de Matemática, particularmente no que diz respeito à Álgebra, configuram-se no âmbito da dupla descontinuidade que envolve tanto a passagem da escola para a universidade quanto da universidade para a escola. Os docentes que atuam em ambos os contextos trazem consigo

experiências realizadas em sua prática de ensinar e de aprender, ensinando-aprendendo, que se tornam objeto de reflexão, permitindo identificar tensões, rupturas e continuidades entre os diferentes níveis de ensino. Essa abordagem possibilita compreender como essas concepções se atualizam e se manifestam na prática docente, contribuindo para o debate sobre a formação e atuação dos professores de Matemática.

Para tanto, entendemos, com base em Bicudo e Garnica (2021), que uma atitude reflexiva sobre a prática educacional em Matemática implica questionar o que está dado e buscar um alinhamento entre o saber fazer e o *porquê* e *para* que fazer assim. Essa atitude favorece um pensamento amplo e crítico, que analise e reflita sobre concepções dos professores a respeito da Matemática e seu ensino, as quais trazem consigo as trajetórias pessoais, culturais e escolares, e que podem ser alvo de problematização e análise.

Importante destacar que não pretendemos obter respostas, de nossos sujeitos significativos, sobre concepções de ensino e de aprendizagem de Álgebra ao modo de definições como “minha concepção sobre Álgebra e o seu ensino é...”, porém nossa intenção é ouvir suas falas e buscar compreender o que dizem em seus diferentes modos de falar de Álgebra, entendida tanto como disciplina com especificidades próprias e que se insere na região de inquérito da Matemática também de modos específicos, como na dimensão do próprio movimento de ensinar e aprender, ensinando-aprendendo Álgebra ao longo de sua vida, estando com professores, alunos e autores estudados.

Reiterando que a pergunta de pesquisa — *como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?* busca compreender como é que esses profissionais — que no âmbito da presente pesquisa denominamos como *sujeitos significativos* — que trabalham, na Colômbia, com a Álgebra em cursos de formação de docentes e também próprios docentes atuantes em escolas na *Educação Média*, compreendem a Álgebra, pretendemos articular *compreensões sobre a Álgebra e seu ensino que venham a emergir dos depoimentos realizados, de suas análises e reflexões sobre as articulações entre as diferentes ideias passíveis de serem explicitadas, visando esclarecer possíveis caminhos que permitam explicitar ligações entre o que é aprendido na graduação e o que é ensinado na Educação Básica e Média na Colômbia.*

Por fim, apresentada nossa interrogação “[...] prosseguimos com nossa investigação, olhando para o contexto das experiências vivenciadas, pessoalmente e como estudioso do campo de inquérito, solo em que nos locomovemos com os autores lidos e outras possibilidades de encontro com o tema que nos enlaça” (Bicudo, 2011c, p. 42). Para isso, inicialmente, deparamo-nos à tarefa de olhar como esse tema sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra tem

sido tratado na literatura concernente à região de inquérito da Educação Matemática, e no contexto educacional na Colômbia, com intuito de identificar questões fundamentais relativas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra, em palavras de Gadamer (2011b), ficando atento ao que nos chega pela tradição¹⁹.

¹⁹ Em Gadamer (2011a), a *tradição* é vista como uma fonte viva de sentido, não como algo fixo ou ultrapassado. Ela orienta nossa compreensão do mundo por meio da linguagem, da história e da cultura compartilhada. O diálogo com a tradição é importante para a hermenêutica, pois possibilita a fusão de horizontes entre passado e presente no ato interpretativo. A exposição detalhada do conceito de *tradição*, conforme desenvolvido por Gadamer, encontra-se nas páginas 171-172 deste trabalho.

2. ÁLGEBRA EM PERSPECTIVA

What is algebra?

There is no Supreme Court to decide such questions

Freudenthal (1977, p. 193).

2.1 Considerações iniciais e aspectos históricos

Nesta seção, buscamos apresentar um panorama sucinto da literatura relacionada ao fenômeno em estudo (a Álgebra e os modos de ser concebida e ensinada) no âmbito da região de inquérito da Educação Matemática. É importante enfatizar que nossa abordagem é orientada por uma *atitude fenomenológica*²⁰. Portanto, a literatura tratada não é assumida como sendo assim, determinadamente, de forma cega ou dogmática, mas como estudos que lemos, buscamos compreender o dito sobre o que interrogamos, no intuito de expandir nosso horizonte de compreensão e ver o fenômeno interrogado de diferentes perspectivas. Contudo,

A Fenomenologia não diz que ele [o pesquisador] deve partir do ponto zero, em que fingiria nada saber sobre o investigado. Seria como negar a própria Fenomenologia e seu modo de ver o mundo-[da]-vida, que é o solo histórico onde nos locomovemos. O pesquisador se locomove, sim, num solo histórico constituído durante seu tempo vivido, tanto como pessoa quanto como pesquisador (Bicudo, 2010a, p. 41).

Conforme entendemos com Bicudo (2010a), a região de inquérito é o solo que estimula nosso horizonte de pesquisa, e a literatura consultada, por sua vez, possibilita-nos discernir um amplo espectro de perspectivas. Nesse sentido, buscamos obras que se mostram significativas para a realização da intenção desta pesquisa que, do nosso ponto de vista, contribuem para o pensar sobre o que indagamos, por quanto, a multiplicidade de perspectivas enriquece significativamente a compreensão do fenômeno (Bicudo e Garnica, 2021), cuja possibilidade de se mostrar é ampla, pois o fenômeno, “[...] não se deixa aprisionar em categorias previamente estabelecidas que o definam e expliquem, uma vez que se mostra em perfis alinhados, conforme as perspectivas de onde é visado” (Bicudo, 2011d, p. 53).

Ao direcionar nossa atenção para o fenômeno em foco, entendemos que certos aspectos, que inicialmente nos pareciam, vão mostrando traços que nos geram estranheza. Um desses assuntos que rapidamente se destaca é a inquietação sobre: afinal, o que é Álgebra? Cabe esclarecer que não pretendemos esgotar essa pergunta. Contudo, consideramos pertinente explorar essa questão para elucidar a intrincada teia de complexidades que ela envolve.

²⁰ Alertamos o leitor que este assunto será exposto mais amplamente na seção 4.2 da presente tese.

Uma rápida busca pelo dicionário Houiass define a palavra *Álgebra* como: 1) parte da Matemática elementar que generaliza a Aritmética, introduzindo variáveis que representam os números, simplificando e resolvendo, por meio de fórmulas, problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos; 2) tratado ou compêndio de Álgebra; 3) antigamente como arte de restaurar ossos deslocados ou fraturados. No que diz respeito à origem etimológica da palavra *álgebra*, esta deriva em árabe de *Al-jabr wa'l muqābalah*, título da obra mais importante do matemático Al-Khowarizmi²¹ (Boyer, 1987). Conforme é destacado por Boyer (1987), não se tem absoluta certeza do que significavam os termos árabes “al-jabr” e “muqābalah”, mesmo assim, convencionalmente “a palavra «al-jabr» provavelmente significava algo como «restauração» ou «conclusão», e parece referir-se à transposição de termos que são subtraídos do outro lado da equação, somando-os. A palavra «muqābalah» parece referir-se à «redução» ou «compensação», ou seja, ao cancelamento de termos iguais nos dois lados da equação”²² (Boyer, 1987, p. 298, tradução nossa).

Considerando um sucinto bosquejo do contexto histórico, conforme Bortolete (2024) coloca em evidência, o desenvolvimento da Álgebra não seguiu um caminho linear, tanto assim, que já desde o trabalho de Diofanto²³, com a *Aritmética*, a semente da Álgebra estava presente. Em sua *Aritmética*, Diofanto já havia distinguido diferentes “espécies” (*eidei*) de números, com uma conceituação diferente (maneiras pelas quais um número pode ter sido dado), usando os nomes *monas*, *arithmos*, *dynamis*, *cubos*, *dynamodynamis*, *dynamocubos*, etc., e, portanto, uma série mais longa do que a de al-Khwārizmī²⁴ (Fillooy, Puig e Rojano, 2008, p. 75-76, grifos do autor e tradução nossa). É por isso que Diofanto é, às vezes, chamado de “o pai da Álgebra”, mas este título se aplicaria melhor a Al-Khowarizmi, tendo em conta que, foi com a obra de Al-Khowarizmi, o *Al-jabr wa'l muqābalah*, que, mais tarde na Europa, desenvolveu-se o ramo da Matemática que leva o nome de Álgebra (Boyer, 1987). Ainda mais, Boyer (1987, p. 298, grifos do autor e tradução nossa) destaca como as influências árabes na Espanha, “muito depois da época em que viveu Al-Khowarizmi, são reveladas em *Dom Quixote*, onde a palavra *algebrista*

²¹ Abu Abedalá Maomé ibne Muça ibne Alcuarismi (*Abū 'Abd Allāh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī*) (780 — 850), mais conhecido como Alcuarismi foi um matemático, astrônomo, astrólogo, geógrafo e escritor persa.

²² La palabra «al-jabr» significaba probablemente algo así como «restauración» o «completación», y parece querer referirse a la transposición de términos que están restados al otro miembro de la ecuación, sumándolos. La palabra «muqābalah» parece referirse a la «reducción» o «compensación», es decir, a la cancelación de término iguales en los dos miembros de la ecuación

²³ Diofanto de Alexandria foi um matemático grego que viveu no século III ou IV.

²⁴ Diophantus had already distinguished different species (*eidei*) of numbers, with a different conceptualization (ways in which a number may have been given), using the names *monas*, *arithmos*, *dynamis*, *cubos*, *dynamodynamis*, *dynamocubos*, etc., and thus a longer series than al Khwārizmī's.

é usada para se referir a um curandeiro que conserta articulações ósseas desalinhadas, ou seja, um «restaurador»²⁵.

Por outro lado, Massa (2001) argumenta que, na obra de Euclides, *Os Elementos*, foi considerada a Geometria superior à Aritmética, tanto assim, que os teoremas aritméticos eram comprovados por considerações geométricas. Isso pode se evidenciar nas primeiras classificações de equações, realizadas na época do Renascimento, em que as soluções se apresentavam por meio de diagramas e construções geométricas que as verificassem. Assim, algumas obras que tiveram esta abordagem foram as *Ars Magna de Rebus algebraicis* de Girolamo Cardano²⁶ e *Algebra* de Rafael Bombelli²⁷. As razões dessa aproximação epistemológica dos algebristas do «cinquecento», poderiam derivar de considerar a Geometria como uma parte teoricamente superior da matemática. Porém, com a introdução da Álgebra se dissolveram as linhas divisórias na Matemática, inclusive na terminologia e metodologia entre Aritmética, Álgebra e Geometria. O que levou a questionamentos tais como: a Álgebra era uma ciência ou uma arte? A Álgebra era considerada parte da Matemática? A Aritmética era superior à Álgebra? Em que áreas a Geometria foi mais eficaz ou necessária? Em quais delas estava a Álgebra?

Contudo, Massa (2001) indica que um dos momentos cruciais na história da Álgebra foi a publicação, em 1591, da obra *In Artem Analyticem Isagoge*, de François Viète²⁸, quem “tentou explicar o caminho que utilizou para resolver as equações enquadrando-o na análise grega”²⁹ (Massa, 2001, p. 707, tradução nossa). Assim, a Álgebra de Viète se tornou uma guia para a resolução de equações em diferentes âmbitos da Matemática, e “cujo objetivo era não deixar nenhum problema matemático sem solução” (Bortolote, 2014, p. 210), mediante a arte analítica, dotada de suas três formas *zetética*, *porística* e *exegética* (Massa, 2001). Sem embargo, nem todos os matemáticos aceitaram a Álgebra como uma nova parte da Matemática, por exemplo, Thomas Hobbes³⁰ e Isaac Barrow³¹, que consideravam a Geometria e a Aritmética como

²⁵ Las influencias árabes en España largo tiempo después de la época en que vivió AlKhowarizmi, se delatan en el *Quijote*, donde la palabra *algebrista* se usa para denominar a un curandero que arregla las articulaciones óseas desajustadas, es decir, un «restaurador».

²⁶ Girolamo Cardano (1501 – 1576) foi um médico e matemático italiano. Cardano é famoso pela sua obra *Ars Magna* publicada no ano 1545 em Nuremberg. *Ars Magna* foi o primeiro tratado em latim dedicado exclusivamente à Álgebra.

²⁷ Rafael Bombelli (1526-1573) foi um matemático e engenheiro hidráulico italiano. Sua Álgebra (*L'algebra*), publicada no ano 1572 em Bolonia, foi um dos textos matemáticos de referência na Europa durante mais de um século.

²⁸ François Viète (1540-1603) foi um advogado e matemático francês.

²⁹ intentaba explicar el camino que utilizaba para resolver las ecuaciones enmarcándolo dentro del análisis griego.

³⁰ Thomas Hobbes (1588-1679) foi um filósofo, teórico político e matemático inglês.

³¹ Isaac Barrow (1630- 1677) foi um teólogo, professor e matemático britânico.

ciências, ao passo que a Álgebra cumpria um papel secundário. Enquanto Hobbes a considerava como um raciocínio simbólico, ou uma arte para registrar as invenções da Geometria com brevidade, Barrow a considerava como um instrumento da lógica. Mas, “[...] é a partir da obra de Descartes³² e durante aproximadamente um século, [que] foi realizado o processo de algebrização da matemática”³³ (Massa, 2001, p. 708, tradução e inserções nossas), período que marcou uma lenta, mas significativa transição, em que o pensamento matemático passou de uma abordagem predominantemente geométrica para uma orientação algébrica.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) apresentam alguns modos de olhar para o desenvolvimento histórico da Álgebra. Numa primeira leitura, eles consideram a mudança qualitativa da natureza do objeto de estudo desse campo de conhecimento. Nessa perspectiva, a história da Álgebra é dividida em *Álgebra Clássica* ou *Elementar* e *Álgebra Moderna* ou *Abstrata*. O debate a respeito à natureza da Álgebra surge por volta da primeira metade do século XIX, a partir dos trabalhos dos matemáticos George Peacock³⁴, Augustus De Morgan³⁵ e Evariste Galois³⁶. Nesse debate, destacavam-se duas concepções principais: uma tradicional, que via a Álgebra como uma extensão da Aritmética, isto é, como uma Aritmética generalizada; e outra moderna, que a considerava um sistema simbólico postulacional, cujos símbolos e regras são arbitrárias, mas que garantem a consistência interna.

Uma segunda leitura do desenvolvimento histórico da Álgebra, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), ressalta a influência das diferentes culturas na constituição desse campo de conhecimento. Nessa perspectiva, é possível falar, entre outras, de uma “álgebra egípcia”, de uma “álgebra babilônica”, de uma “álgebra grega pré-diofantina”, de uma “álgebra diofantina”, de uma “álgebra chinesa”, de uma “álgebra hindu”, de uma “álgebra árabe”, de uma “álgebra da cultura europeia renascentista” etc. Outra leitura, apresentada por esses autores, considera três momentos no desenvolvimento da Álgebra em função das fases evolutivas da linguagem algébrica: retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica. Também, pode ver-se como sendo dividido em dois períodos, antes e depois de Viète. Finalmente, os autores consideram uma quinta leitura, que leva em conta o objeto e objetivo da Álgebra, isto é, a

³² René Descartes (1590-1600) foi um filósofo, matemático e físico francês.

³³ [...] es que a partir de la obra de Descartes y durante un siglo, aproximadamente, se llevó a cabo el proceso de algebrización de las matemáticas

³⁴ George Peacock (1791-1858) foi um matemático inglês. Sua maior contribuição para a Análise Matemática é a tentativa de fundar a Álgebra com bases estritamente lógicas.

³⁵ Augustus De Morgan (1815-1864) foi um matemático e lógico britânico nascido na Índia. Realizou contribuições importantes na Álgebra e na história da Matemática; sua contribuição mais notável foi na lógica.

³⁶ Évariste Galois (1811-1832) foi um matemático e revolucionário francês. Ainda adolescente, conseguiu determinar a condição necessária e suficiente para que uma equação algébrica fosse resolvida por radicais. Forneceu uma solução para um problema aberto usando o novo conceito de grupo de permutação.

resolução de problemas, mas desde a perspectiva de Piaget e Garcia nos períodos: intra-operacional, interoperacional e transoperacional.

Em um artigo de 1977, o matemático Hans Freudenthal, responde à pergunta, o que é Álgebra? Do seguinte modo:

Não há Suprema Corte para decidir tais questões. No entanto, “Álgebra” tem um significado na linguagem cotidiana, assim como “cadeira” e “mesa”. Por exemplo, na escola, Álgebra é resolver equações lineares e quadráticas. É o tipo de Álgebra com a qual os babilônios começaram. Sua Álgebra não era Álgebra, por que seu simbolismo não era suave o suficiente? “Comprimento” e “largura” são muito piores do que “x” e “y” se você puder dar receitas claras para resolver equações quadráticas em tais termos? Não é Álgebra se a soma dos primeiros 10 quadrados é estabelecida em uma fórmula numérica que permite estender o resultado a qualquer n? Essa capacidade de descrever relações e procedimentos de resolução, e as técnicas envolvidas de uma maneira geral, é, em minha opinião da Álgebra, uma característica tão importante do pensamento algébrico que estou disposto a estender o nome “álgebra” a ela, desde que nenhum outro nome seja proposto, até onde eu sei, que nenhum outro nome foi apresentado. Mas o que há em um nome? (Freudenthal, 1977, p. 193-194).

Diante das leituras realizadas sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, seja pela influência das culturas, pela evolução da linguagem algébrica, pelas divisões temporais ou pelas abordagens cognitivas e, considerando ainda a reflexão provocadora de Freudenthal sobre os limites e possibilidades do próprio conceito de Álgebra, compreendemos que esse campo de conhecimento é marcado por uma riqueza semântica, epistemológica e pedagógica, cujo sentido escapa às tentativas de aprisionamento em definições rápidas ou definitivas. Esta se revela, antes, como um fenômeno vivido e experienciado em diferentes contextos históricos e culturais, cuja evolução tem sido impulsionada tanto pelos desafios internos da disciplina quanto pelas demandas oriundas de outros campos do saber. A Álgebra, portanto, não se reduz à imagem popularmente associada a um conjunto de técnicas operatórias ou símbolos abstratos. Ela se constitui como uma forma de pensamento que atravessa tempos, culturas e práticas educativas. Com esse pano de fundo, voltamo-nos agora para o âmbito específico da Educação Matemática, buscando compreender como essa complexidade se manifesta nas investigações sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

2.2 Panorama geral das investigações que envolvem o ensino e a aprendizagem da Álgebra

A Matemática continua sendo uma das áreas mais importantes de estudos, tornando-se um grande desafio nos sistemas escolares, tanto para professores quanto para pesquisadores. Dentro dos conteúdos, a Álgebra desfruta um lugar de destaque nos currículos escolares, e alguns autores consideram que esta marca uma ruptura na forma como a Matemática é abordada

na educação básica (Mason, Graham e Pimm, 1998), pois representa “para muitos alunos tanto a culminação de anos de estudo da Aritmética como o início de mais anos de estudo de outros ramos da matemática” (House, 1995, p. 1).

A Álgebra, por envolver uma determinada linguagem e quantidades desconhecidas, é considerada por alguns alunos como um dos conteúdos mais difíceis com os quais eles têm que lidar (Booth, 1995). Ao final da trajetória escolar, muitos alunos lembram o estudo da Álgebra como um jogo de letras utilizado para resolver equações. Para eles, a Álgebra acaba se tornando apenas uma ferramenta voltada à execução de exercícios marcados por forte conteúdo procedimental, frequentemente desprovido de significado. Com isso, a atividade algébrica termina sendo reduzida à prática de “calcular com letras” (Lins, 2001). Essa maneira do tratamento da Álgebra pode ser identificada no estudo Eisenberg e Dreyfus (1995), os quais apresentam o caso dos estudantes em Israel, que no processo de aprendizagem, incorporam o uso mecânico da fórmula quadrática³⁷, convertendo-a em um algoritmo vazio de significado, utilizado para resolver de maneira convencional qualquer tipo de equação quadrática, fazendo que as compreensões de outros aspectos da matemática, como por exemplo o tratamento dos polinômios, esteja limitado à simples substituição de números numa fórmula.

Ao traçar um panorama geral das investigações que envolvem o ensino e a aprendizagem da Álgebra, é possível identificar múltiplas dimensões que contribuem para a complexidade desse campo. Castro (2012) destaca três aspectos fundamentais que ajudam a compreender as dificuldades enfrentadas pelos estudantes: o primeiro diz respeito às propriedades e complexidades intrínsecas do objeto matemático; o segundo, às características cognitivas dos sujeitos e aos processos de pensamento envolvidos; e o terceiro, às práticas pedagógicas que, muitas vezes de forma involuntária, influenciam negativamente o processo de ensino.

Nesse contexto, uma das questões centrais que emerge é a qualidade do ensino da Álgebra, especialmente no que se refere à formação de professores de Matemática. Mondini (2009) observa que, embora os currículos de formação docente abordem aspectos formais da Álgebra, raramente se discute como esses conhecimentos podem ser mobilizados nas práticas pedagógicas. Como consequência dessa lacuna formativa, ao concluir a graduação, muitos professores iniciantes tendem a reproduzir os modelos de ensino que vivenciaram durante sua trajetória escolar, baseando-se em abordagens tradicionais ou nos conteúdos dos livros didáticos, sem realizar uma reflexão ou uma crítica que lhe permita estabelecer uma conexão

³⁷ Também conhecida, no Brasil, como fórmula de Bhaskara.

significativa entre os saberes acadêmicos adquiridos na graduação e os desafios cotidianos do ensino escolar (Pimenta, 2002; Paulo, Amaral e Santiago, 2010).

É importante ressaltar que isso não implica exigir do futuro professor uma exposição exaustiva dos fundamentos matemáticos ou da terminologia formal aos alunos da Educação Média. No entanto, espera-se que ele seja capaz de reconhecer os conceitos subjacentes à Álgebra, identificar como esses aparecem nas práticas pedagógicas e compreender o papel dos sistemas simbólicos na elaboração de atividades, na avaliação e na leitura crítica dos materiais didáticos.

Paralelamente, diversas pesquisas internacionais e nacionais têm apontado caminhos alternativos para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Estudos como os de Carolyn Kieran (2018) e Luis Radford (2014), no Canadá; Jhon Mason (1988) na Inglaterra; María Blanton e James Kaput (2005), David Carraher e Analúcia Schliemann (2008) nos Estados Unidos; Romulo Lins e Joaquim Gimenez (1997), Dario Fiorentini, Maria Angela Miorim e Antonio Miguel (1993), no Brasil; e Lilia P. Aké, Juan D. Godino, Margherita Gonzato, Miguel R. Wilhelmi (2013), na Espanha, entre outros, defendem a introdução precoce do raciocínio algébrico como estratégia para favorecer a construção de conhecimentos matemáticos mais profundos e articulados. Essa proposta se ancora nas experiências dos estudantes desde os primeiros anos de escolaridade, com o objetivo de ampliar a atividade Matemática e facilitar a transição entre os níveis de ensino (Blanton e Kaput, 2005).

Essas investigações se concentram, por um lado, em compreender como as crianças desenvolvem o pensamento algébrico a partir de observações em sala de aula, dentro da abordagem conhecida como *Early Algebra*, a qual se trata de uma abordagem pedagógica que propõe a introdução de ideias algébricas desde os primeiros anos da escolaridade, rompendo com a visão tradicional de que a Álgebra deve ser ensinada apenas nos últimos anos da *Educación Básica Secundaria* (8º e 9º ano de escolaridade na Colômbia). Essa perspectiva defende que o raciocínio algébrico pode — e deve — ser trabalhado desde cedo, por meio de atividades que envolvam padrões, generalizações, relações e representações simbólicas, mesmo que ainda não se utilizem letras ou equações formais. Segundo Blanton e Kaput (2005), o objetivo da *Early Algebra* é promover uma transição mais natural e significativa entre a Aritmética e a Álgebra, permitindo que os alunos construam uma base conceitual sólida para compreender estruturas matemáticas mais complexas no futuro. Por outro lado, dedicam-se à formação de professores da *Educación Básica*, buscando oferecer-lhes ferramentas conceituais e metodológicas que permitam uma nova compreensão da Álgebra, capaz de transformar suas práticas pedagógicas.

Apesar desses avanços, persiste uma concepção amplamente difundida de que a Matemática se resume à memorização de fórmulas e procedimentos, em detrimento da compreensão de seus significados e aplicações no contexto social. Essa visão reducionista contribui para as dificuldades enfrentadas tanto por professores quanto por alunos, nos diferentes níveis da *Educação Básica*, *Média* e a *Educação Superior*, e reforça a necessidade de repensar os processos formativos e as abordagens didáticas no ensino da Álgebra.

2.3 Pesquisas que têm foco na formação de professores de Matemática e o ensino da Álgebra

A formação de professores de Matemática e o ensino da Álgebra têm sido objeto de atenção crescente nas pesquisas em Educação Matemática, especialmente a partir das inquietações que envolvem o que Kaput (2008) denominou como o “problema da Álgebra”. Esse problema, segundo o autor, possui raízes históricas profundas e se manifesta, entre outros aspectos, nas dificuldades dos alunos em lidar com a sintaxe algébrica e na interpretação de seus símbolos. Durante as décadas de 1980 e 1990, esse foco investigativo se consolidou em estudos que buscavam compreender os erros recorrentes dos estudantes e os obstáculos conceituais enfrentados no processo de aprendizagem dessa disciplina. Nesse contexto, destacam-se obras como *As Ideias da Álgebra* (Coxford e Shulte, 1995), parte da série de “yearbooks” do Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM)³⁸; *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Bednarz, Kieran e Lee, 1996); *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI* (Lins e Giménez, 1997), entre outras, que oferecem contribuições relevantes para o entendimento das preocupações que permeiam o campo investigativo. Embora existam outros autores e abordagens no cenário internacional, essas publicações sinalizam tendências importantes na construção de referenciais teóricos, metodológicos e curriculares voltados à formação docente e à prática pedagógica no ensino da Álgebra.

A obra de Coxford e Shulte (1995) representa um marco nas discussões sobre o ensino da Álgebra, ao propor uma ruptura com abordagens tradicionais centradas na memorização e na manipulação mecânica de fórmulas. Em vez disso, os autores defendem um ensino que valorize a compreensão conceitual e o desenvolvimento do *pensamento algébrico*, entendido

³⁸ Esses documentos são relevantes por também serem mencionados como referência nos documentos curriculares oficiais da Colômbia, os quais apresentaremos nas seções 3.1 e 3.2 desta tese. Um exemplo disso é que, nos *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*, são citados os *Professional Standards for Teaching Mathematics* do NCTM.

como uma forma de raciocínio matemático que envolve identificar padrões, generalizar, analisar relações e representar situações de maneira simbólica.

A obra reúne contribuições de diversos pesquisadores reconhecidos no âmbito do ensino da Matemática, que convergem para a ideia de tornar a Matemática mais acessível, significativa e conectada à realidade dos estudantes. Um dos pontos centrais do livro é a defesa de que o raciocínio algébrico deve ser cultivado desde os primeiros anos escolares, e não apenas nas etapas formais em que a Álgebra é tradicionalmente ensinada. Outro aspecto relevante abordado pelos autores é a integração da Álgebra com outras áreas da matemática, como a Geometria e a Aritmética. Ademais, evidenciam o papel da tecnologia no ensino da Álgebra, apontando o potencial de ferramentas como calculadoras gráficas e *softwares* de computação para enriquecer a aprendizagem. Os seis capítulos que compõem a obra de Coxford e Shulte (1995) apresentam implicações importantes para a formação de professores de Matemática. Entre elas, destacam-se a necessidade de uma mudança de mentalidade pedagógica, a valorização da generalização e da representação simbólica, e o incentivo à atualização profissional e à reflexão crítica sobre a prática docente.

Bednarz, Kieran e Lee (1996) organizaram uma coletânea de pesquisas que se consolidou como um marco na Educação Matemática, especialmente no campo do ensino e da aprendizagem da Álgebra. O foco central da obra é oferecer uma visão multidisciplinar que ultrapassa a concepção tradicional da Álgebra como um mero conjunto de regras para manipulação de equações. Os autores reúnem diferentes perspectivas teóricas e metodológicas com o objetivo de iluminar as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na transição da Aritmética para o raciocínio algébrico, propondo uma reflexão sobre o que constitui o *pensamento algébrico* e como ele pode ser desenvolvido.

A obra aborda a complexidade do ensino da Álgebra por meio de múltiplas abordagens complementares. Uma das mais relevantes é a concepção da Álgebra como generalização de padrões aritméticos. Nessa perspectiva, os autores argumentam que a passagem para o pensamento algébrico não deve ocorrer como uma *ruptura abrupta*, mas como um processo gradual, no qual os alunos são incentivados a identificar regularidades nas operações numéricas e a representá-las simbolicamente. Essa perspectiva sugere que as bases do pensamento algébrico podem ser construídas desde os anos iniciais da *Educação Básica*, ressaltando a importância de que os professores desse nível de escolaridade sejam capazes de reconhecer e fomentar tais competências em seus alunos por meio de atividades que estimulem a generalização e a análise de padrões.

Além disso, na obra de Bednarz, Kieran e Lee (1996), é enfatizado o papel da Álgebra como ferramenta de modelagem e resolução de problemas. Os autores defendem que ela deve ser apresentada aos estudantes como uma linguagem poderosa para representar e compreender situações complexas. Ainda, discutem diferentes perspectivas sobre como a Álgebra pode ser introduzida nos currículos escolares, destacando a necessidade de práticas pedagógicas que promovam uma aprendizagem significativa e contextualizada, capaz de integrar o raciocínio algébrico às demais áreas da Matemática e à realidade dos estudantes.

Na obra de Lins e Giménez (1997), o ensino da Matemática, com ênfase em Aritmética e Álgebra, é cuidadosamente analisado e discutido. Os autores questionam as práticas pedagógicas tradicionais e propõem uma abordagem que busca superar a visão da Matemática como mera memorização de regras. Eles defendem uma abordagem que valorize o entendimento conceitual, a resolução de problemas e a capacidade dos alunos de atribuírem sentido à Matemática que aprendem, além de abordarem questões ainda atuais, como a articulação entre Aritmética e Álgebra, contestando a ideia que as considera como áreas totalmente separadas. Também, destacam o papel central da resolução de problemas no ensino e a aprendizagem da Matemática e a importância de contextualizar o conhecimento matemático, evidenciando o papel preponderante do professor para conectar os conteúdos escolares com a realidade e os conhecimentos prévios dos alunos.

O livro oferece contribuições significativas para a formação de professores de Matemática, funcionando como um convite à reflexão crítica sobre crenças e práticas docentes. Os autores incentivam o questionamento do modelo tradicional de ensino, frequentemente centrado na memorização e na aplicação mecânica de algoritmos, em favor de uma abordagem que estimule a compreensão e a criatividade dos estudantes. Além disso, Lins e Giménez (1997) sugerem que o professor deve ser capaz de identificar, no currículo, oportunidades para desenvolver o pensamento algébrico, mesmo em conteúdos que não tratam explicitamente da Álgebra. Promovem, ainda, a visão do professor não como um mero transmissor de conhecimento, mas como um mediador que facilita a construção do saber pelos alunos. Assim, para esses autores, a formação docente deve ir além do domínio técnico e incluir o desenvolvimento de habilidades como o questionamento, a escuta ativa e a criação de ambientes de aprendizagem que favoreçam a exploração, o diálogo e a construção coletiva do saber.

Ao examinar pesquisas publicadas na primeira década do século XXI, destaca-se o estudo³⁹ realizado pela *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI), em 2004, o qual sintetiza as principais tendências e perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra até aquele momento. Nesse contexto, o livro *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (O Futuro do Ensino e Aprendizagem da Álgebra), editado por Kaye Stacey, Helen Chick e Margaret Kendal, publicado como resultado do 12º Estudo da ICMI, tem como foco central analisar as mudanças necessárias para tornar a Álgebra mais significativa e acessível aos estudantes.

Os autores vão além do diagnóstico de problemas e apresentam uma visão prospectiva sobre como a Álgebra pode e deve ser ensinada, considerando o papel da tecnologia, abordagens curriculares emergentes e novas evidências aportadas em pesquisas realizadas no campo da Educação Matemática. No volume, são reunidos artigos de Grupos de Trabalho que examinam o tema central — o futuro do ensino e da aprendizagem de Álgebra — sob nove perspectivas: abordagens iniciais de Álgebra; *Early Algebra* (Álgebra dos anos iniciais); objetivos da Álgebra; ambientes tecnológicos; sistemas de Álgebra computacional; história da Álgebra; símbolos e linguagem; conhecimento e prática dos professores; e Álgebra terciária.

O livro de Stacey, Chick e Kendal (2004) traz contribuições diretas e valiosas para a formação de professores de Matemática. Os autores enfatizam a necessidade de desenvolver um sólido conhecimento pedagógico do conteúdo: não basta dominar a Álgebra, é preciso compreender como os alunos aprendem, identificar dificuldades recorrentes e selecionar estratégias que promovam o pensamento algébrico em vez da mera manipulação de símbolos. A obra apresenta ideias e exemplos para articular Aritmética e Álgebra, tornando a transição entre ambas mais harmônica, e recomenda incluir na formação atividades que incentivem a generalização, o uso de tabelas e gráficos e a resolução de problemas contextualizados. Além disso, o livro defende a integração da tecnologia no ensino da Álgebra e reafirma o papel do professor como facilitador da aprendizagem.

³⁹ Os Estudos ICMI, promovidos pela Comissão Internacional de Instrução Matemática desde meados da década de 1980, constituem uma das mais importantes iniciativas internacionais voltadas ao aprofundamento de temas centrais e contemporâneos da Educação Matemática. Cada estudo é articulado em torno de uma conferência internacional e culmina na publicação de um volume que reúne análises críticas, sínteses teóricas e propostas práticas, fomentando o intercâmbio entre pesquisadores de diferentes culturas e contextos. Com objetivos como antecipar tendências, integrar múltiplas perspectivas e fornecer recursos de alta qualidade para diversos agentes educacionais, os Estudos ICMI têm contribuído significativamente para o avanço da pesquisa, da formação docente e das políticas educacionais. *Entre os 25 estudos já concluídos e publicados, destaca-se o ICMI Study 12 como o único dedicado especificamente ao ensino e aprendizagem da Álgebra, evidenciando a relevância desse campo na construção do pensamento matemático e na formação de professores.* No seguinte link se apresenta o lista dos estudos realizados e publicados: <https://www.mathunion.org/icmi/icmi-studies/finalized-and-published-studies>

Ainda, no âmbito do livro de Stacey, Chick e Kendal (2004), ressaltamos o artigo de Helen M. Doerr, intitulado *Teachers' Knowledge and the Teaching of Algebra* (O conhecimento dos professores e o ensino da Álgebra), no qual Doerr analisa pesquisas sobre o conhecimento e a prática docente e traça sua evolução no ensino da Álgebra. Entre as conclusões apresentadas por Doerr (2004), ela manifesta que:

De modo geral, há *pouca pesquisa sobre o conhecimento e a prática dos professores e seu desenvolvimento no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem de Álgebra*. Muito do que se sabe sobre o conhecimento dos professores aponta para algumas deficiências no conhecimento matemático dos professores e para as complexidades de traduzir o conhecimento da disciplina em uma forma útil para o ensino. O desenvolvimento de uma base teórica para a compreensão das dimensões epistemológica, cognitiva e didático-pedagógica do conhecimento dos professores *está, em grande parte, em sua infância*. Embora tenhamos feito algum progresso na compreensão de alguns aspectos desse conhecimento, há muitas áreas do pensamento dos professores que, em geral, não foram investigadas. Em particular, embora estejamos cientes de que muitos professores parecem ter conceituações de Álgebra dominadas por procedimentos, temos apenas alguns relatos das maneiras de pensar sobre Álgebra que caracterizam as compreensões de professores mais experientes. Certamente, *ainda não temos um rico conjunto de representações da expertise no pensamento e nas práticas algébricas de professores em uma variedade de contextos sociais e culturais*⁴⁰ (p. 285, tradução e grifos nossos).

Doerr (2004) conclui também que é necessário investigar e compreender as experiências atuais dos professores, incluindo os diversos fatores práticos que restringem o aprendizado contínuo dos professores e, ao mesmo tempo, que é necessário promover essas experiências de modo a construir uma base de conhecimento profissional docente consolidada de forma orgânica a partir das próprias práticas pedagógicas. Esse conhecimento deve estar enraizado na experiência e na reflexão dos professores, mantendo-se em constante renovação para atender às demandas do ensino.

No texto de Stacey, Chick e Kendal (2004), é feita referência ao trabalho da professora colombiana Cecilia Agudelo Valderrama que, em sua pesquisa realizada no ano 2000 com docentes que lecionam Álgebra em escolas da Colômbia, destaca o papel dos fatores afetivos no ensino da Álgebra. Em particular, nos resultados da pesquisa, Agudelo-Valderrama salienta

⁴⁰ Overall, there has been little research about teachers' knowledge and practice and its development with respect to the teaching and learning of algebra. Much of what is known about teachers' knowledge points to some of the deficiencies in teachers' mathematical knowledge and to complexities of translating subject matter knowledge into a useful form for teaching. The development of a theoretical base for understanding the epistemological, cognitive, and didactic/pedagogical dimensions of teachers' knowledge is largely in its infancy. While we have made some progress in understanding some aspects of this knowledge, there are many areas of teachers' thinking that have not, in the main, been investigated. In particular, while we are aware that many teachers appear to have conceptualisations of algebra that are dominated by procedures, we have only a few accounts of the ways of thinking about algebra that characterise the understandings of more expert teachers. We certainly do not yet have a rich set of portrayals of expertise in the algebraic thinking and practices of teachers across a range of social and cultural settings.

que as concepções dos professores sobre si mesmos como educadores de Matemática influenciaram significativamente suas práticas pedagógicas, contribuindo para melhores desempenhos dos alunos.

Na publicação posterior de Agudelo-Valderrama (2008), intitulada *The power of Colombian mathematics teachers' conceptions of social/institutional factors of teaching* (O poder das concepções dos professores de Matemática colombianos sobre os fatores sociais/institucionais do ensino), são apresentados os principais resultados de sua investigação — realizada no ano 2000 — sobre as concepções docentes no ensino de Álgebra. O estudo enfatiza as práticas pedagógicas e os fatores sociais e institucionais que as influenciam. Embora o foco esteja nas concepções dos professores, o texto também revela observações relevantes sobre os comportamentos dos alunos e suas necessidades de aprendizagem, especialmente diante da resistência à mudança pedagógica — como o baixo desempenho, a desmotivação e o foco excessivo em resultados.

Segundo Agudelo-Valderrama (2008), os professores reconhecem as dificuldades enfrentadas pelos estudantes, mas frequentemente mantêm práticas tradicionais e atribuem os problemas ao comportamento dos alunos, sem refletir criticamente sobre suas próprias abordagens pedagógicas. Como ela aponta: “[...] muitos professores de Matemática têm atitudes negativas em relação à mudança de suas abordagens de ensino, apesar de estarem conscientes das dificuldades dos alunos e da falta de motivação para aprender Álgebra escolar”⁴¹ (Agudelo-Valderrama, 2008, p. 38, tradução nossa).

Ao final do estudo, a autora sugere três diretrizes fundamentais para a formação de professores como “agentes de mudança”:

- (i) as faculdades de educação na Colômbia precisam de se envolver ativamente na criação e manutenção de fortes parcerias colaborativas com as escolas, estabelecendo estratégias de trabalho em que desempenhem papéis altamente ativos como agentes de mudança, criando assim ambientes de aprendizagem e modelos que promovam, nos futuros professores, a desenvolvimento de um claro sentido de identidade e propósito profissional; (ii) as parcerias colaborativas com as escolas precisam de ser de longo prazo, se não mesmo permanentes, para que os professores em formação e novatos, formadores de professores, mentores escolares e pais se integrem nas comunidades de aprendizagem que trabalham em prol da renovação contínua da cultura escolar; (iii) a eficácia das estratégias de trabalho precisa de ser o foco de investigação futura⁴² (Agudelo-Valderrama, 2008, p. 51-52, tradução nossa).

⁴¹ [...] many mathematics teachers have negative attitudes to changing their teaching approaches despite their awareness of pupils' difficulties and lack of motivation for the learning of school algebra.

⁴² I would suggest that, in order to start addressing the task of educating teachers as ‘change agents’, (i) faculties of education in Colombia need to engage actively in creating and sustaining strong collaborative partnerships with schools, setting up working strategies in which they play highly active roles as change agents, creating thus learning environments and role models that promote, in prospective teachers, the development of a clear sense of professional identity and purpose; (ii) the collaborative partnerships with schools need to be long term, if not

Apesar da relevância dos achados, observa-se que os resultados da pesquisa de Agudelo-Valderrama se concentram majoritariamente nas concepções dos professores sobre os comportamentos dos alunos e nos fatores sociais que impactam o ensino, dedicando pouca atenção às concepções específicas sobre a Álgebra em si. Essa lacuna converge com os apontamentos de Doerr (2004), que também pontua a necessidade de aprofundar as investigações sobre as concepções dos professores acerca da Álgebra que ensinam — um campo ainda pouco explorado e fundamental para compreender e transformar as práticas pedagógicas no ensino da Álgebra.

Um trabalho de destaque, que teve ampla ressonância e impacto em países da América Latina, é o desenvolvido por John Mason, Alan Graham e Sue Johnston-Wilder. No contexto de pesquisas conduzidas pela *The Open University*, os autores já mencionados publicaram, em 2005, o livro *Developing Thinking in Algebra* (Desenvolvendo o Pensamento em Álgebra), no qual argumentam que o núcleo da Álgebra está na habilidade de identificar, expressar e manipular generalidades. Em vez de reduzir a Álgebra à “Aritmética com letras”, os autores propõem desenvolver o pensamento algébrico por meio de tarefas que levem o estudante a particularizar (testar casos), generalizar (extrair regras) e articular as descobertas em palavras, diagramas e símbolos. A ideia capital do livro é que um verdadeiro ensino de Matemática oferece oportunidades explícitas para os alunos expressarem generalidades; sem isso, a aula perde seu caráter matemático.

A estrutura do livro de Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) alterna blocos de tarefas exploratórias, que buscam o desenvolvimento do que eles denominam como “poderes matemáticos” (imaginar, especializar, conjecturar, organizar) e o trabalho com várias representações (diagramas, tabelas, gráficos, símbolos). Os autores apresentam ciclos pedagógicos práticos — manipular para “pegar o sentido”, articular e depois formalizar — e estratégias concretas. Essas rotinas orientam o professor a transformar atividade em reflexão e a promover a transição do trabalho intuitivo para expressão simbólica.

Para a formação de professores, o livro oferece um repertório de tarefas e um quadro reflexivo para planejar, mediar e revisar aulas. O texto traz muitos exemplos didáticos que ligam Aritmética, Álgebra e Geometria: sequências termo-a-termo e posição-a-termo, o uso de planilhas e calculadoras gráficas, o algoritmo de Euclides via remoção de quadrados, o método de Héron para raízes quadradas por iteração e tarefas de contagem como os números figurados.

permanent, so that student and novice teachers, teacher educators, schools mentors and parents, integrate into learning communities working towards continuous renewal of the school culture; (iii) the effectiveness of the working strategies needs to be the focus of further research.

Em cada caso, o objetivo é que os alunos construam e testem conjecturas, reformulem técnicas a partir de exemplos e reconheçam invariantes em meio a variações, em vez de apenas executar procedimentos prescritos.

Por sua vez, o livro *Algebra, Gateway to a Technological Future* (Álgebra, Porta de Entrada para um Futuro Tecnológico), editado por Victor J. Katz e publicado em 2007, é uma obra que explora a importância histórica e contemporânea da Álgebra para o desenvolvimento científico e tecnológico. O foco central do livro é demonstrar como a Álgebra não é apenas um tópico matemático abstrato, mas uma ferramenta fundamental para a inovação e para a compreensão do mundo moderno, especialmente no contexto tecnológico. Essa obra, resultado de uma série de palestras e seminários, defende que um entendimento sólido da Álgebra é crucial para que os estudantes de hoje possam se tornar os inovadores de amanhã. O livro utiliza a história da Matemática para contextualizar a evolução da Álgebra, mostrando sua relevância em diferentes épocas e sua aplicação em campos como a física, a engenharia e a ciência da computação.

Também Katz (2007) apresenta perspectivas que contribuem para a formação de professores de Matemática. Em particular, realça-se a história da Álgebra e seu papel na civilização, como um recurso de apoio para que os professores possam contextualizar o conteúdo e motivar os alunos. Sendo assim, o autor sugere que o ensino da Álgebra deve estar menos focado na manipulação mecânica e mais na conexão com as aplicações práticas e tecnológicas, e, portanto, a formação deve equipar os professores com exemplos e atividades que liguem os conceitos algébricos a situações do mundo real e a tecnologias que os alunos já usam. Também, ao destacar a Álgebra como uma linguagem de generalização, o livro incentiva os professores a focar no desenvolvimento do pensamento algébrico, e não apenas nas habilidades técnicas.

Contudo, dentro da obra organizada por Katz (2007), os autores James Fey, Helen Doerr, Robert Farinelli, Rueben Farley, Carole Lacampagne, Gary Martin, Ira Papick e Elizabeth Yanik, no artigo *Preparation and Professional Development of Algebra Teachers* (Preparação e Desenvolvimento Profissional de Professores de Álgebra) apontam que há evidências anedóticas significativas de que as abordagens atuais do ensino de Álgebra Abstrata para futuros professores frequentemente não atendem às expectativas mais ambiciosas. Os candidatos a professores de Matemática raramente relatam obter *insights* ou compreensões esclarecedoras sobre a Álgebra escolar a partir de seus estudos em Álgebra Abstrata. Além disso, durante as experiências de estágio, observa-se que a perspectiva estrutural da Álgebra abstrata é pouco aplicada aos desafios reais do ensino.

Segundo os autores Fey *et al.* (2007), parte-se da hipótese de que uma compreensão mais aprofundada dos conceitos algébricos deveria capacitar os professores a elaborar problemas mais interessantes, oferecer explicações mais eficazes, estabelecer conexões significativas dentro da Matemática e avaliar com maior precisão o progresso dos alunos. Diante disso, propõem que um ponto de partida relevante para a pesquisas sobre o desenvolvimento do conhecimento do professor em Álgebra e seu ensino seria uma análise criteriosa dos conceitos algébricos fundamentais que devem orientar a compreensão dos professores sobre a Matemática que ensinam.

Em 2008, Eugenio Filloy, Luis Puig e Teresa Rojano publicaram o livro *Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach* (*Álgebra educacional: uma abordagem teórica e empírica*), no qual combinam uma análise teórica e sistemática do pensamento algébrico com uma abordagem empírica fundamentada em estudos e pesquisas realizados em sala de aula. Os autores argumentam que a Álgebra não deve ser vista apenas como uma generalização da Aritmética, mas como um campo de conhecimento com estrutura e linguagem próprias, cuja compreensão exige uma mudança significativa no modo de raciocinar.

Nas discussões sobre o ensino da Álgebra, Filloy, Puig e Rojano (2008) distinguem dois enfoques fundamentais: a Álgebra como ferramenta — caracterizada pelo uso de símbolos para resolver problemas — e a Álgebra como objeto de estudo — voltada para a análise das estruturas e relações matemáticas. Conforme os autores argumentam, os alunos devem desenvolver a capacidade de compreender os símbolos algébricos não apenas como resultados, mas como objetos matemáticos passíveis de manipulação e transformação.

No contexto da publicação mencionada anteriormente, os autores retomam um artigo de Filloy, Puig e Rojano publicado em 1989, intitulado *Solving Equations: The Transition from Arithmetic to Algebra*, no qual introduzem o conceito de “ruptura” para descrever a descontinuidade entre o pensamento aritmético e o pensamento algébrico, a partir de uma pesquisa realizada em sala de aula. Segundo os autores, enquanto o pensamento aritmético se baseia em processos e resultados numéricos, o pensamento algébrico está centrado em relações, estruturas e variáveis. Segundo Filloy, Puig e Rojano (2008), ao compreender a natureza da “ruptura”, o professor pode planejar intervenções pedagógicas mais eficazes para ajudar a preencher essa lacuna e contribuir aos alunos a superar essa dificuldade.

Filloy, Puig e Rojano (2008) enfatizam a importância de o professor criar contextos significativos para a introdução da Álgebra. Por isso, promovem o uso de problemas de modelagem como uma estratégia que pode ser eficaz para ajudar os alunos a atribuírem sentido aos símbolos e compreenderem a utilidade da Álgebra. Os autores argumentam que é necessário

ir além da simples repetição de regras e fórmulas, adotando abordagens didáticas que estimulem a reflexão e o pensamento crítico. Ainda, recomendam o incentivo aos professores a verem o ensino da Álgebra como um campo dinâmico de pesquisa, no qual a análise das dificuldades dos alunos e a busca por novas estratégias de ensino são fundamentais para o desenvolvimento profissional. Além disso, os autores ressaltam que a formação docente deve ultrapassar o domínio do conteúdo matemático, incorporando também o conhecimento didático sobre os processos de aprendizagem da matemática.

Com base em estudos realizados desde a década de 1980 no campo da Educação Matemática, James J. Kaput, David W. Carraher e Maria L. Blanton destacam a importância e as possibilidades de introduzir o pensamento algébrico já nos anos iniciais da *Educação Básica*. No livro *Algebra in the Early Grades (Álgebra nas Séries Iniciais)*, publicado em 2008, os autores questionam a concepção tradicional de que a Álgebra só deve ser ensinada após o domínio completo da Aritmética. A obra se fundamenta em pesquisas que propõem uma abordagem menos convencional para o ensino da Álgebra, mostrando que crianças são capazes de raciocinar algebricamente desde cedo. Os autores apresentam o conceito de *Early Algebra*, que não se refere simplesmente a antecipar o ensino tradicional da Álgebra, mas a desenvolver, desde os primeiros anos escolares, formas de pensar baseadas em relações, estruturas e generalizações.

Kaput, Carraher e Blanton (2008) oferecem *insights* sobre como atividades algébricas podem criar contextos ricos e significativos para que as crianças pratiquem habilidades computacionais básicas. Além disso, defendem que a implementação da Álgebra nas séries iniciais exige atenção à formação dos professores e ao desenvolvimento de materiais curriculares que sustentem essa prática de forma eficaz.

Também, identificamos o livro *The Learning and Teaching of Algebra: Ideas, Insights, and Activities* (A Aprendizagem e o Ensino da Álgebra: Ideias, Percepções e Atividades), escrito por Abraham Arcavi, Paul Drijvers e Kaye Stacey, uma obra publicada em 2017, que oferece uma proposta pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Álgebra, fundamentada tanto teoricamente como em resultados de pesquisas realizadas em aulas. A obra faz parte da série *Interweaving Mathematics Pedagogy and Content for Teaching (IMPACT)*, que tem como objetivo integrar o conteúdo matemático com a pesquisa e a teoria da Educação Matemática.

O livro de Arcavi *et al.* (2017) parte do consenso de que a Álgebra é um assunto central nos currículos escolares, mas também reconhece que os alunos enfrentam sérias dificuldades cognitivas e afetivas, muitas vezes sem ver o propósito de estudá-la. Também, sugere que o ensino da Álgebra em contexto é crucial para enfatizar seu propósito e significado para os

alunos. Os autores defendem que a prática de habilidades não precisa ser monótona e repetitiva. A obra propõe tarefas que levam os alunos a “produzir” em vez de apenas “reproduzir” procedimentos.

Ao revisitar a literatura especializada sobre a formação de professores de Matemática e o ensino da Álgebra, como anunciado no início desta seção, não pretendemos assumir os referenciais apresentados de um modo ingênuo ou acrítico. Pelo contrário, reconhecemos que essas obras não esgotam o fenômeno investigado, mas oferecem pistas valiosas para compreender as tensões, os desafios e as possibilidades que atravessam as práticas docentes e o pensamento algébrico. A diversidade de abordagens teóricas e metodológicas revela que o ensino da Álgebra representa um campo em permanente construção, marcado por movimentos históricos, epistemológicos, pedagógicos e *tendências investigativas* que exigem um olhar atento, sensível e investigativo.

Enquadrado no âmbito de uma pesquisa fenomenológica, esse exercício de leitura e análise da literatura realizado constitui parte do movimento de compreensão, no qual o fenômeno do ensino da Álgebra se revela em toda a sua complexidade. Os estudos destacados não apenas apresentam contribuições significativas sobre a Álgebra e seu ensino, como também, ao serem retomados e mobilizados no trabalho das análises dos depoimentos dos professores nesta tese, ampliam nossos horizontes interpretativos e fortalecem a construção de sentidos sobre o objeto investigado.

Nesse contexto, os trabalhos de Lins e Giménez (1997), Filloy, Puig e Rojano (2008) merecem destaque pelos aspectos relacionados às “rupturas”, oferecendo elementos analíticos para compreender as transições abruptas no ensino da Álgebra, conforme discutido na primeira seção deste estudo. Também, destacamos os trabalhos de Doerr (2004) e Agudelo-Valderrama (2008), pois ambos oferecem elementos que apontam para a necessidade de continuar investigando⁴³ as concepções de Álgebra e seu ensino expressas por professores de Matemática. Esses estudos dialogam com a nossa pesquisa e aportam elementos que mostram a necessidade de realizá-la. Nesse contexto, esperamos, com nossa investigação, contribuir para a região de inquérito, incorporando elementos particulares do contexto educacional colombiano que enriquecem uma base substancial de pesquisas para a constituição de um repertório teórico que

⁴³ Apesar de buscas exaustivas na produção acadêmica de Helen Doerr e Cecilia Agudelo-Valderrama, não se identificam publicações recentes que deem continuidade às investigações sobre as concepções de professores a respeito da Álgebra e de seu ensino. Isso sugere uma interrupção ou redirecionamento nas linhas de pesquisa dessas autoras, ao menos no que diz respeito a esse tema específico.

permita mapear um conjunto diverso e significativo da expertise docente, reveladas nas formas de pensar e agir dos professores em relação a Álgebra e seu ensino.

3. OLHANDO PARA O CONTEXTO DA PESQUISA

Preguntó qué ciudad era aquella, y le contestaron con un nombre que nunca había oído, que no tenía significado alguno, pero que tuvo en el sueño una resonancia sobrenatural: Macondo.

García-Márquez (1967, p. 35)

3.1 O sistema educacional na Colômbia

Nesta seção, são apresentados alguns aspectos das principais reformas educacionais na Colômbia, no intuito de compreender os avanços e retrocessos que tem havido no sistema educacional, e dar conta de alguns aspectos no que se refere à formação de professores de Matemática.

Falar dos inícios formais do sistema educacional colombiano nos remete à educação dos cidadãos como uma preocupação do estado e podemos dizer que isso remonta aos primeiros anos do século XIX, com o nascimento da república colombiana. Neste sentido, o que se apresenta aqui é um resumo, muito ajustado, pois não tem o alcance de mostrar os entrelaçamentos das reformas educacionais com aspectos políticos, econômicos e culturais da sociedade colombiana em cada época. Este percurso é desenvolvido em três momentos: no primeiro, tem como início o movimento de independência da Colômbia, em 1819, e avança até 1902⁴⁴; o segundo inicia, em 1903, e percorre o século XX até 1990; e por fim, o terceiro tem como ponto de partida a Constituição colombiana de 1991 e avança até os dias atuais, inclusive.

3.1.1 Primeiro momento: Reformas educacionais no século XIX

Devido à grande concentração da população nas áreas rurais, a preocupação do Estado nas reformas neste período estava ligada ao interesse de oferecer à população uma alfabetização básica, contemplando as letras e os números, mediante a instrução pública e, por outra parte a formação de uma elite profissional que liderará a República (Sarmiento, 1995). Assim, Assim,

[...] em 1821 são criadas as primeiras *Escuelas Normales* do país, baseadas no método Lancasteriano⁴⁵ do ensino mútuo, em que os futuros professores recebiam tanto instrução básica naqueles conhecimentos elementares (leitura, escrita, aritmética e religião) como o método a partir do qual poderiam transmitir a instrução desses

⁴⁴ Zuluaga, Saldarriaga, Osorio, Echeverri y Zapata (2004) fazem uma análise más amplo da instrução pública na Colômbia no período de 1819 até 1902

⁴⁵ Esse método, baseado na obra de Joseph Lancaster, entendia também que se deveria repartir os alunos em classes segundo a ordem de seus conhecimentos e que o procedimento educacional de castigo físico deveria acabar, instituindo uma nova forma de pensar a disciplina escolar. Tomado de <https://www.educabrazil.com.br/metodo-lancasteriano/>

conhecimentos básicos aos alunos das escolas criadas em diferentes locais do território⁴⁶ (Guacaneme, Obando e Garzón, Villa-Ochoa, 2013, p. 30, tradução nossa).

A Matemática era ministrada nas escolas da época por professores que se formavam nas *Escuelas Normales* masculinas e se limitavam a ensinar a numeração e as quatro operações básicas, conteúdo que também era aprendido por eles em sua formação como professores. No percurso dessa época, seguindo a tradição do *Colégio Militar* (1847), as primeiras escolas de engenheiros foram criadas, no modelo das universidades europeias, contemplando a formação Matemática como um fator fundamental, fazendo como que esses engenheiros fossem os primeiros matemáticos do país. Mais adiante, essas escolas de engenharia “[...] deram lugar às primeiras faculdades de Matemática criadas na *Universidad Nacional*”⁴⁷ da Colômbia”⁴⁸ (Guacaneme, Obando e Garzón, Villa-Ochoa, 2013, p. 16, tradução nossa).

Um dos pontos de inflexão do sistema educativo colombiano foi a reforma educacional que aconteceu no ano de 1870, “[...] que proclama a liberdade de ensino que coincidiu com a abolição da escravidão e o processo de industrialização do país”⁴⁹ (Bazante, 2006, p. 9, tradução nossa), e consagra a educação como uma das funções do Estado, para o qual cria uma estrutura educacional centralizada na *Dirección General Nacional de Instrucción Pública*.

Na segunda metade do século XIX, a busca de um horizonte educacional foi apoiada com a orientação das *Misiones Pedagógicas Alemanas*. A primeira missão pedagógica aconteceu entre 1872 e 1878, na qual se destaca os seguintes aspectos mais importantes: a geração de resoluções e normas por meio das quais se tentou modernizar e secularizar a educação; a indicação da necessidade de formação profissional dos professores, o que implicava a ampliação das *Escuelas Normales*; e a introdução de métodos mais modernos de formação tanto na *Educación Básica* como da *Educación Média*. Além de,

Outra mudança fundamental fica evidente na segunda metade do século XIX, quando foram criadas as primeiras *Escuelas Normales* Femininas, o que reflete uma posição do

⁴⁶ [...] en 1821 se crean las primeras Escuelas Normales en el país, fundamentadas en el método lancasteriano o de enseñanza mutua, en la que los futuros maestros recibían tanto la instrucción básica en aquellos conocimientos elementales (lectura, escritura, aritmética y religión) como el método a partir del cual podrían impartir la instrucción de estos conocimientos básicos a los estudiantes de las escuelas creadas en diferentes lugares del territorio.

⁴⁷ A criação da *Universidad Nacional* da Colômbia, uma das universidades oficiais mais reconhecidas do país por sua trajetória acadêmica, foi oficializada no ano 1867 e continuou com suas atividades até 1899 data do início da chamada Guerra dos Mil Dias, um conflito civil da Colômbia produto de inconformidades políticas. A *Universidad Nacional* retorna a suas atividades no ano 1902, após finalizada a Guerra. <http://www.archivo.bogota.unal.edu.co/pages/historia.php>

⁴⁸ [...] estas escuelas de ingenieros, en la primera mitad del siglo XX, dieron paso las primeras facultades de matemáticas creadas en la *Universidad Nacional* de Colombia.

⁴⁹ [...] que proclama a liberdade de ensino que coincidiu com a abolição da escravatura e o processo de industrialização do país

Estado em relação ao reconhecimento da necessidade de formar mulheres⁵⁰ (Guacaneme, Obando e Garzón, Villa-Ochoa, 2013, p. 16, tradução nossa).

3.1.2 Segundo momento: Reformas educacionais no século XX

Na primeira metade do século XX, foram desenvolvidos vários processos de reforma curricular, assim, terminada a Guerra dos Mil Dias⁵¹, em 1902, é novamente aberta a *Universidad Nacional*, que outrora impulsionou o desenvolvimento da Matemática no país, em 1903, deixa de incluir o título de professor de Matemática, ficando a cargo das *Escuelas Normales* a formação de professores (Sánchez e Albis, 2012). Além disso, com a Lei 39 emitida pelo *Ministerio Instrucción Pública*⁵², em 1903, é reconhecida a necessidade de formação rural para a população campesina, e industrial e comercial para a população urbana.

Nesta mesma época, a segunda *Misión Alemana* foi desenvolvida (entre 1924 e 1935), centrada no caráter político das ideias que circulavam na escola, incluindo a formação acadêmica das mulheres na *Educación Média* e, também, a criação do *Ministério de Educación Nacional* (MEN) em 1928, que desde então regula as políticas educacionais. Ainda, esse Ministério fomentou a formação de professores nas *Escuelas Normales* rurais, fundamentalmente femininas.

As primeiras faculdades de educação surgem como resultado de transformação de algumas *Escuelas Normales*, é assim que “[...] o *Instituto Pedagógico Femenino* de Bogotá, dá origem à *Universidad Pedagógica Nacional* de Bogotá [UPN], e a *Escuelas Normales* de masculina de Tunja dá origem à *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colômbia* na cidade de Tunja [UPTC]”⁵³ (Figuroa, 2006, p. 207, tradução nossa), isto fez diferenciar ao papel das *Escuelas Normales* na formação de professores, pois “[...] as *Escuelas Normales* especializaram-se na formação de professores para *Educación Básica Primaria* e os professores para o *Educación Básica Secundaria* eram formados em universidades ou institutos pedagógicos

⁵⁰ Otro cambio fundamental se evidencia en la segunda mitad del Siglo XIX, momento en que se crean las primeras Escuelas Normales Femeninas, lo cual refleja una postura de Estado en relación con el reconocimiento de la necesidad de formar a la mujer.

⁵¹ Em 1899, começou uma guerra civil [na Colômbia], a chamada Guerra dos Mil Dias [no entanto, essa guerra seja chamada de essa maneira, a guerra tem durado 1130 dias aproximadamente, do 17 de outubro de 1899 até 21 de novembro de 1902]. Este confronto marcou o culminar de uma série de guerras civis que marcaram o século XIX. Embora o conflito armado entre liberais e os conservadores não afetaram todas as regiões da mesma forma, dividiram a população mais do que nunca. Foi talvez a guerra mais desastrosa, tanto em relação aos danos causados à economia nacional, bem como em relação às vítimas humanas registradas (Fischer, 1998, p. 73, tradução e inserções nossas)

⁵² https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-102524_archivo_pdf.pdf

⁵³ [...] el *Instituto Pedagógico Femenino* en Bogotá, da origen la *Universidad Pedagógica Nacional* en Bogotá, y la *Escuela Normal de Varones* de Tunja da origen la *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia* en Tunja

especializados”⁵⁴ (Guacaneme, Obando, Garzón e Villa-Ochoa, 2013, p. 31, tradução nossa). Para essas Faculdades de Educação, fixou-se o plano de estudos mediante decreto 1569 de 1934, em que

Para Tunja foram estabelecidas as seguintes especialidades: Matemática e Físico-Química e Línguas Modernas. Para Bogotá foram estabelecidas as especializações de Ciências Pedagógicas e Ciências Histórico-Geográficas. [...] Os estudos nas salas de aula da Faculdade duravam três anos, ao final dos quais, se o aluno passasse em todas as disciplinas, receberia o título de *Licenciado*⁵⁵ en *Ciencias de la Educación*⁵⁶ (Figuerola, 2006, p. 209, tradução nossa).

Com a chegada do professor Carlo Federici à Faculdades de Ciências da *Universidad Nacional*, em 1948, inicia-se uma nova virada no desenvolvimento do ensino da Matemática na Colômbia, pois foi gerado um impulso para o estudo de tópicos inovadores dessa ciência e, assim, três anos após, Federicci cria o Programa de Matemática com o apoio de professores e estudantes da Faculdade de Engenharia que manifestarem seu interesse nesses novos tópicos. Esse programa teve foco na formação disciplinar e que culmina – ao estudante – na obtenção do título de Matemático, denominação do título profissional vigente até os dias atuais (Sánchez e Albis, 2012).

O percurso da história do ensino da Matemática na Colômbia esteve, por cerca de um século (1867-1967), fortemente vinculada com a *Universidad Nacional* e, desde 1935, ligada às Universidades UPN e UPTC, com o antecedente imediato da *Escuela Normal Superior*.

Somente no final da década dos sessentas começou a se abrir o espectro de instituições que abririam programas de matemática, seja com ênfase na formação de profissionais em Matemática ou Licenciados cujo objetivo principal era o ensino da disciplina na *Educación Básica e Média*⁵⁷ (Sánchez e Albis, 2012, p. 139).

De outra parte, a terceira e última *Misión Alemana* aconteceu entre 1965 e 1975 e tinha por objetivo geral tornar a *Educación Básica e Média* mais técnica, capacitar o corpo docente e divulgar livros didáticos para professores em algumas escolas. O apoio dessa última missão fez com que a difusão da reforma curricular de 1967 virasse um sucesso, pois realizou acompanhamento com assessoria presencial escola por escola do país. O impacto foi tão importante que ainda hoje “[...] nas escolas primárias de todo o país, pode-se ver a semelhança

⁵⁴ [...] las Escuelas Normales se especializan en la formación de maestros para la Educación Primaria, y los maestros para la Educación Secundaria se forman en las universidades o institutos pedagógicos especializados.

⁵⁵ O título de *Licenciado* na Colômbia é concedido àqueles que concluem os estudos de formação de professores para atuar na *Educación Básica e Média*, uma tradição que vem da *Escuela Normal Superior* (1936-1951), na qual foram formados os primeiros professores para atuar na *Educación Média* da Colômbia.

⁵⁶ Para Tunja se establecieron las siguientes especialidades: Matemáticas y Físico-Química e Idiomas Modernos. Para Bogotá se establecieron las especializaciones de Ciencias Pedagógicas y Ciencias Histórico-Geográficas.

⁵⁷ [...] sólo a finales de la década de los sesenta empieza abrirse el espectro de instituciones que abrirán programas de matemáticas ya sea con énfasis en la formación de profesionales en matemáticas o licenciados cuyo objetivo central es la enseñanza de la disciplina en la *Educación Básica y Media*

entre o currículo de Matemática ensinado atualmente e o currículo prescrito há exatamente 50 anos, conforme refletido nas cartilhas da *Misión Alemana*⁵⁸ (Vasco, 2018, p. 224, tradução nossa).

Conforme Vasco (2018), na década de 1970, os sistemas de tecnologia educacional ganharam força no país, com base nas ideias das escolas condutistas⁵⁹ norte-americanas, e foi divulgada a ideia de que essa abordagem seria a solução para os males da educação pública, na Colômbia. Vieram ao encontro desse modo de pensar as tensões⁶⁰ políticas mundiais que, na época, estavam alimentando propostas de novas formas de abordagem dos currículos. No caso do ensino de Matemática, o eixo central das políticas educacionais incorporou nas reformas boa parte dos conteúdos da chamada Matemática Moderna (New Math)⁶¹, que no início foi implementada por professores sem a suficiente preparação para dar conta dela nas aulas de *Educación Básica e Média*. Nos últimos anos da *Educación Média* foram incluídas unidades sobre grupos, anéis, corpos e espaços vetoriais, temas que nenhum professor, naquela época, havia estudado em sua formação inicial. Posteriormente, os editores de livros didáticos, vendo as deficiências do professorado ao tentar implementar a proposta da Matemática Moderna, interpretam e adaptam esses programas em livros para professores, junto aos programas de formação e profissionalização de professores (Gómez, 2021). Segundo Vasco (2018), isso ocorreu sem uma reflexão crítica, na qual os programas de licenciatura terminaram assumindo, em cinco anos, uma versão diluída dessa reforma.

Desde 1976, e após de debates entre diferentes sectores educativos, foram iniciados os primeiros estudos sobre novas reformas curriculares na Colômbia, particularmente no caso dos conteúdos de Matemática de *Educación Básica*, como consequência do desconforto dos professores, pais e instituições de ensino, diante do baixo desempenho dos alunos em Matemática elementar em enfrentar os problemas da vida diária. Assim, foi compreendido que a abordagem da Matemática Moderna era insuficiente para atender às demandas de formação daquela época. Assim, foi proposto um retorno ao básico: operações com números inteiros, frações e decimais.

⁵⁸ [...] se puede notar en las escuelas de Básica Primaria de todo el país la semejanza del currículo de matemáticas actualmente enseñado con el currículo prescrito hace exactamente 50 años tal como se plasmó en las cartillas de la Misión Alemana.

⁵⁹ No sentido das teorias do behaviorismo operante na perspectiva da psicologia desenvolvida por Skinner, Thorndike e Watson.

⁶⁰ No período do final da década dos 50, marcado pela Guerra Fria, a corrida espacial dos Estados Unidos e União Soviética, após do lançamento ao espaço do Sputnik pela União Soviética (1957), intensificou os investimentos em propostas de ensino que pudessem auxiliar na formação de cientistas.

⁶¹ O germe dessa reforma ocorreu no Seminário Interamericano de Educação Secundária em Santiago do Chile em 1955 e na Primeira Conferência Interamericana de Ensino CIAEM, realizada em Bogotá, em dezembro de 1961

A nova reforma foi denominada *Programa de Renovación Curricular* e emergiu de instâncias governamentais⁶², sob a orientação de renomados acadêmicos no âmbito nacional⁶³. No final dos anos 1970 e início dos anos 1980, além de realizar a revisão dos novos programas de Matemática para os cinco anos da *Educación Básica Primaria*, com um marco teórico fundamentado na Teoria Geral dos Sistemas (Teoría General de Sistemas) e as teorias piagetianas, também foram realizados testes-piloto em umas poucas instituições públicas do país (Vasco, 2018).

A partir desse trabalho, foi gerado o *Marco general del programa de Matemáticas para la Educación Básica* (MEN, 1990). Nesse documento, é apresentada uma visão geral da Matemática, incluindo uma introdução; a justificativa do *Enfoque de Sistemas* matemáticos (simbólicos, conceituais e concretos); os objetivos gerais da área, tanto na *Educación Básica Primaria* (1º a 5º ano) quanto na *Educación Básica Secundaria* (6º a 9º ano); a estrutura dos temas da área de Matemática por sistemas (numéricos, geométricos, métricos, de dados, lógicos, de conjuntos, relações e operações, análise real) para cada grau escolar; e a metodologia proposta. Ainda, no referido documento, são mencionadas algumas “vantagens” do *Enfoque de Sistemas* para a realização dos objetivos na implementação dos programas curriculares:

porque organiza e unifica os vários conteúdos e os vários ramos da Matemática, através de conceitos e de uma linguagem comum; facilita a articulação da Matemática com as demais áreas do Currículo, e permite o desenvolvimento de conteúdos levando em consideração as características dos alunos do Ciclo Básico e a realidade em que vivem, sem cair na ênfase excessivo nos conjuntos, o que se faz num certo tipo (já não tão moderno) da chamada “Matemática Moderna”. [...] Existem, portanto, três vantagens na abordagem sistêmica: uma dentro de Matemática, outro no campo de integração ou conjunto de Matemática com outras ciências e outra com respeito à metodologia proposta de desenvolvimento dos conteúdos⁶⁴ (MEN, 1990, p. 12, tradução nossa e grifos nossos).

⁶² Em particular, a responsabilidade destes novos programas curriculares foi delegada à *Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos* (Direção Geral de Formação e Aperfeiçoamento de Professores, Currículo e Meios Educativos).

⁶³ O *Programa de Renovación Curricular* foi coordenado por Carlos Eduardo Vasco Uribe, sacerdote da Companhia de Jesus nascido em Medellín em 1937, “recém-chegado de estudar nos Estados Unidos e na Alemanha Federal. Após dezessete anos de formação superior, ele obteve um doutorado em Matemática pela *Saint Louis University* [com foco em sistemas algébricos não comutativos], um mestrado em física pela mesma universidade, uma licenciatura em teologia em Frankfurt e também uma licenciatura em Filosofia e Letras da *Universidad Javeriana*. Além de poliglota, dominando oito línguas e tendo estudado doze, ele ainda tinha a difícil licença como locutor da *Deutsche Welle* na Alemanha; estes foram alguns dos seus múltiplos saberes certificados, embora os não certificados também fossem muito grandes e estiveram presentes nas suas dissertações sobre economia, sociologia, psicologia e outras áreas do conhecimento. Fonte: <https://scm.org.co/semblanzas/carlos-vasco/>

⁶⁴ porque organiza y unifica los diversos contenidos y las diversas ramas de la Matemática, a través de unos conceptos y un lenguaje común; facilita la articulación de la Matemática con las demás áreas del Currículo, y permite desarrollar los contenidos atendiendo a las características de los alumnos del Ciclo Básico y de la realidad en que viven, sin caer en el énfasis desmedido en los conjuntos, que se hace en cierto tipo (ya no tan moderno) de la llamada “Matemática Moderna”. [...] Existen, portanto, três vantagens na abordagem sistêmica: uma dentro de Matemática, outro no campo de integração ou conjunto de Matemática com outras ciências e outra em relação à metodologia proposta de desenvolvimento dos conteúdos.

A partir de 1985, por determinação do MEN, iniciou-se a progressiva implantação do *Programa de Renovación Curricular*, desde os anos da *Educación Básica* até a conclusão do ciclo de *Educación Média*. Nessa mesma época, começou a amadurecer o *Movimiento Pedagógico*⁶⁵ dos professores colombianos, que reunia professores do setor público, sindicalistas⁶⁶ e alguns acadêmicos no âmbito nacional. Desde 1982, esse movimento iniciou um trabalho de reflexão sobre o sentido da educação pública e a posição do professor como agente da educação.

No entanto, esta nova reforma foi rejeitada, com uma grande oposição do chamado *Grupo Federici*⁶⁷ e o *Movimiento Pedagógico* de FECODE⁶⁸, os quais

[...] acusaram a reforma de ser aquela manobra estatal que consolidou para o país as ideias da taylorização da educação (professores e alunos como executores de programas desenhados por outros, com a consequente perda da autonomia docente e o estabelecimento de uma relação instrumental professor-aluno), além de ser invisível e clandestino⁶⁹ (Molano, 2011, p. 184, tradução nossa).

3.1.3 Terceiro momento: Reformas educacionais no século XXI

Outra virada relevante no país ocorreu, em 1991, com a reformulação da Constituição Política da Colômbia, onde a educação é consagrada como direito fundamental do cidadão e são propostas as orientações para sua organização, financiamento, cobertura e melhoria qualitativa, como uma alternativa para a democratização da sociedade colombiana. Assim, em 1994, no marco da *Ley General de Educación* (Lei 115)⁷⁰, foi acordado entre professores,

⁶⁵ O chamado *Movimiento Pedagógico* na Colômbia surgiu em 1982 e constitui-se como acontecimento mais importante concebido pelo magistério [educadores que exercem a profissão docente na rede pública] através da FECODE, que reúne mais de 200.000 professores de Instituições públicas com Sindicatos Seccionais em todos os Departamentos do território nacional [...] Segundo Marcos Raúl Mejía, o *Movimiento Pedagógico* surgiu da confluência de quatro processos históricos a saber: 1) A reforma curricular que se pretendia imposta pelo *Ministerio de Educación Nacional* [olhar em parágrafos anteriores sobre *Programa de Renovación Curricular*]; 2) O auge dos movimentos sociais que tentavam construir projetos alternativos; 3) A emergência histórica da alguns sujeitos da pedagogia que propugnavam contra os modelos em alta; e 4) Com a emergência de um ator social coletivo que dá sentido a esse fazer docente. (Tamayo-Valencia, 2006, p.102, tradução e inserções nossas).

⁶⁶ A Federação Colombiana de Educadores (FECODE) é o sindicato docente mais forte na Colômbia.

⁶⁷ Carlo Federici criou o curso de Matemática na *Universidad Nacional* da Colômbia, em 1951, e é reconhecido como o personagem inspirador de um grupo de intelectuais chamado “Grupo Federici”, o qual teria um papel importante no movimento pedagógico da década de 1980.

⁶⁸ FECODE- Federação Colombiana de Trabalhadores em Educação (*Federación Colombiana de Trabajadores de la Educación*), foi fundada em 24 de março de 1959 e reconhecido pelo *Ministerio de Protección Social*, conforme Resolução nº 01.204 de 6 de agosto de 1962, reúne professores que atendem o ensino público da Colômbia, organizados em 33 sindicatos regionais e um sindicato nacional, com os quais está integrada a estrutura federativa. Consultado de <https://fecode.edu.co/historia/>

⁶⁹ [...] quienes acusaban a la reforma de ser aquella maniobra estatal que consolidaba para el país las ideas de la taylorización de la educación (maestros y estudiantes como ejecutores de programas diseñados por otros, con la consecuente pérdida de la autonomía del maestro y el establecimiento de una relación instrumental maestro-alumno), además de ser invisible y clandestina.

⁷⁰ *Ley General de Educación*: ARTIGO 11. Níveis de educação formal. A educação formal a que se refere esta Lei será organizada em 3 (três) níveis: a) Pré-escolar, que compreenderá pelo menos um grau obrigatório; b) Educação

especialistas, congressistas e o *Ministério de Educación* da Colômbia, conceder autonomia curricular às escolas para que pudessem desenvolver seu próprio Projeto Educativo Institucional (PEI). Essa descentralização da autoridade curricular fez com que o Ministério só pudesse regular o currículo através de orientações gerais para cada área, mediante uma lista de *logros*⁷¹ e *indicadores de logros*, os quais foram acordados entre FECODE e algumas universidades, seguindo a Resolução 2343 de 1996 que regula o currículo escolar (Vasco, 2018).

Em 1998, o MEN entregou oficialmente à comunidade de educadores do país uma série de documentos denominados *Lineamientos*⁷² *Curriculares*, para dar conta ao artigo 78 da Lei 115 de 1994. Eles correspondem às orientações epistemológicas, pedagógicas e curriculares que procuram atualizar e fundamentar o estudo das disciplinas, mas respeitando a autonomia das instituições educativas de Educação Básica e Média consagrada em seu PEI. Os *Lineamientos Curriculares* para a área da Matemática partem dos avanços feitos no *Programa de Renovación Curricular*, destacando-se o diálogo sobre o *Enfoque de Sistemas*⁷³ e o papel que a sua compreensão desempenha na didática. Por outro lado, nos *Lineamientos Curriculares* é apresentado um panorama mais amplo e atual do campo da Educação Matemática, buscando: incorporar as ideias da teoria da Transposição Didática de Yves Chevallard; a perspectiva cultural da Educação Matemática e a necessidade de incorporação dos saberes da história; e alinhar-se com a proposta de Paul Ernest sobre a importância da Filosofia da Matemática (MEN, 1998).

Nos *Lineamientos Curriculares*, a Matemática escolar e a Educação Matemática são concebidas como campos disciplinares do professor de Matemática e, de maneira implícita, é incluída a necessidade de atender a uma conceptualização do conhecimento matemático na escola e da matemática escolar como parte da formação do professor, promovidas pelas

básica com a duração de nove (9) graus que serão desenvolvidas em dois ciclos: *Educación Básica Primaria* de cinco (5) anos e *Educación Básica Secundaria* de quatro (4) anos; e c) *Educación Média* com duração de dois (2) anos.

⁷¹ Levando o termo de espanhol para português, o sentido da palavra *logro* é mais próximo a: ação ou efeito de lograr/ aquilo que se conseguiu ganhar. Consultado em <https://www.dicio.com.br/logro/>. No contexto educacional, o *logro* expressa o objetivo de aprendizagem esperado de um conteúdo ao que devem chegar os estudantes, normalmente expressos mediante um verbo. Já os *indicadores de logro* são indicativos que descrevem traços ou conjuntos de traços, dados e informações perceptíveis, que, ao serem confrontados com o *logro* esperado, nos dão evidências significativas do avanço na busca de alcançar o *logro*. Consultado em <https://www.mineduacion.gov.co/1621/article-79404.html>.

⁷² Levando o termo de espanhol para português, o sentido da palavra *lineamiento* é mais próximo à palavra *lineamento*: esboço, debuxo: os *Lineamientos* de um projeto. <https://www.dicio.com.br/lineamento/>. Tentando colocar essa normativa da Colômbia no contexto do leitor do Brasil, pode-se entender os *Lineamientos Curriculares* como um documento análogo aos *Parâmetros Curriculares Nacionais*.

⁷³ Na seguinte seção apresenta-se um panorama geral do *Enfoque de Sistemas*

pesquisas em Educação Matemática (MEN, 1998). Entre alguns dos aspectos teóricos e metodológicos dos *Lineamientos*, vale destacar o convite à interdisciplinaridade, tanto no campo na perspectiva da formação de professores, quanto nas práticas em sala de aula, uma vez que esse documento oferece elementos sobre o saber profissional do professor e as modalidades de trabalho na sala de aula dos professores (Guacaneme, Obando, Garzón, Villa-Ochoa, 2013).

Sobre a formação de professores, o Decreto 272 de 1998 estabelece uma divisão para os programas de formação inicial de professores de Matemática, pois define a existência de Licenciaturas em *Educación Básica* com Ênfase em Matemática (LEBEM) e Licenciaturas em Matemática (LM), de modo que seus egressos possam desempenhar na *Educación Básica* (1º ao 9º ano) ou na *Educación Média* (10º e 11º ano), respectivamente. Mas, essa transformação não teve incidência na cultura laboral das instituições educativas ao contratar professores, visto que os licenciados em Matemática seguem sendo empregados para ensinar nos anos da *Educación Básica Secundária* (6º ao 9º ano) e *Educación Média* (10º e 11º ano), e já no caso de *Educación Básica Primária* (1º ao 5º ano) são contratados professores polivalentes, que ministram não apenas Matemática, mas o conjunto integral das disciplinas curriculares.

Após a participação do país em novos projetos de reestruturação curricular, tais como o projeto *Alfa Tuning Latinoamérica* 2004-2008 (“afinar” as estruturas educacionais da América Latina)⁷⁴, são iniciados estudos e reformas no marco do Enfoque por Competências, constituindo-se no novo eixo que orienta tanto a regulamentação como os processos de formação em todos os níveis educacionais (López *et al.*, 2022). Assim, na Colômbia, é ressaltada a noção de competência nos documentos denominados *Estándares Básicos de Competencias*⁷⁵, os quais se constituem em “[...] referentes que permitem avaliar os níveis de desenvolvimento das habilidades que estão alcançando os alunos durante a sua vida escolar”⁷⁶ (MEN, 2006, p. 12 tradução nossa).

Na área de matemática, os *Estándares Básicos de Competencias*, propõem a ideia de formar cidadãos matematicamente competentes, e convidam as instâncias responsáveis pelo sistema educativo a considerar a Matemática como uma atividade humana inserida e resultado dos processos culturais próprios de uma época e lugar. Nos *Estándares Básicos de Competencias em Matemática* (MEN, 2006), estabelece-se que eles constituem um guia para “[...] a formulação de programas e projetos, tanto para a formação inicial de professores, quanto

⁷⁴ Alfa Tuning Latinoamérica. <http://www.tuningal.org/>

⁷⁵ Tentando colocar essa normativa da Colômbia no contexto do leitor do Brasil, pode se entender os *Estándares Básicos de Competencias*, como um documento análogo à *Base Nacional Comum Curricular*

⁷⁶ “[...] son unos referentes que permiten evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los y las estudiantes en el transcurrir de su vida escolar

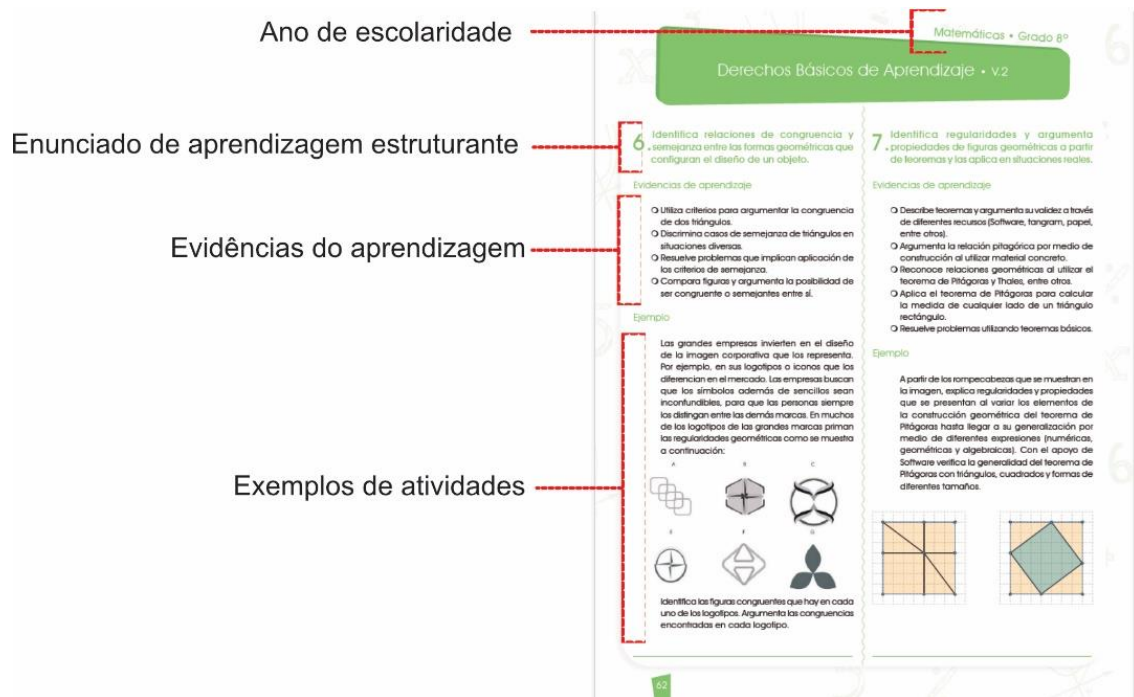
para a formação continuada de professores em exercício” (p. 11), definindo assim um referencial para o estudo dos aspectos curriculares no campo disciplinar do professor de matemática, em consonância com os *Lineamientos Curriculares*.

O Ministério da Educação Nacional, da Colômbia, publicou em 2015 uma série de orientações para as instituições educacionais do país. Essas orientações são chamadas de Direitos Básicos de Aprendizagem (DBA) e definem os *aprendizajes estructurantes*⁷⁷ que os estudantes devem adquirir em cada nível da educação escolar, desde a Educação Infantil até o final da Educação Média (11º ano). Os DBA foram elaborados com base nos *Lineamientos Curriculares* e nos *Estándares Básicos de Competencias*, que são os documentos oficiais que orientam o currículo nacional. Em 2016, o MEN apresentou uma segunda versão revisada dos DBA, após algumas consultas e socializações, mas sem alterações significativas.

Para orientar o planejamento e a avaliação das aulas, os DBA são compostos por três elementos principais. O primeiro é um enunciado, que expressa o objetivo de aprendizagem esperado para os estudantes. O segundo são as evidências de aprendizagem, as quais indicam como o professor pode verificar se os estudantes atingiram o objetivo. O terceiro é um exemplo de atividade que sugere uma forma de trabalhar o conteúdo com os estudantes de maneira prática e significativa (MEN, 2016).

⁷⁷ Nesses documentos, entende-se como aprendizagens estruturantes ao “conjunto coerente de conhecimentos e competências com potencial para organizar os processos necessários ao alcance de novas aprendizagens e que, portanto, permitem transformações profundas no desenvolvimento das pessoas” (MEN, 2016).

Figura 1 - Estrutura dos DBA da Matemática



Fonte: adaptado de MEN (2016, p. 62).

Os DBA constituem um material de consulta que visa facilitar a compreensão dos professores e dos pais sobre os objetivos de aprendizagem dos estudantes. Eles não seguem uma ordem fixa, mas podem ser reorganizados pelo professor de acordo com as especificidades da sala de aula. Além disso, os DBA podem ser trabalhados de forma integrada, conforme as habilidades e os interesses dos alunos e o critério do professor. As evidências de aprendizagem têm a intenção de servir como referências para o professor avaliar se os alunos estão desenvolvendo as competências esperadas e, também, incentivam o professor a contextualizar os exemplos (MEN, 2016).

Ao analisar os DBA, entendemos que mesmo explicitando em sua introdução que sua elaboração toma como base os *Lineamientos Curriculares* e os *Estándares Básicos de Competencias*, isso não fica evidente no conteúdo dos documentos, pois não aparece nenhuma alusão aos processos gerais, nem aos *sistemas da Matemática* (denominados conhecimentos básicos). Assim, compreendemos que esses documentos que aparecem como parte da última reforma curricular, em geral, não contêm substancialmente elementos que deem um sustento epistêmico nem pedagógico, tampouco apresentam visões de uma metodologia ou proposta educacional, poderiam ser compreendidos como um listado de conteúdos que tratam sobre o que os estudantes devem aprender em cada grado escolar desde o 1º até o 11º e que o professor tem que desenvolver no percurso de cada ano escolar. Por isso, compreendemos que estes

documentos não têm uma diferença significativa com as orientações educacionais da reforma da década de 1960 e, portanto, interpretamos que os DBA representam um retrocesso no sistema educacional.

Vasco (2018) faz uma análise crítica (que eu compartilho) sobre as reformas curriculares na Colômbia que ocorreram no último período apresentado aqui. Ele aponta que essas reformas foram ambíguas, pois dependiam da interpretação das direções das escolas e dos professores. Alguns optaram por manter os programas curriculares de 1967 para *Educación Básica Primaria* (1º ao 5º ano de escolaridade), ou os de 1974 para *Educación Básica Secundaria* (6º ao 9º ano de escolaridade) e *Educación Média* (10º ao 11º ano de escolaridade). Outros adotaram como currículo próprio o que estava implícito nos livros didáticos das editoras privadas. E, ainda, houve aqueles, principalmente particulares, que contrataram consultores para elaborar currículos adequados às suas próprias necessidades e às exigências do MEN.

Após esse percurso por alguns dos momentos relevantes das principais reformas e acontecimentos que envolvem a educação colombiana, Carlos Vasco manifesta uma situação de retrocesso preocupante, enraizada em um currículo prescrito, que não nasceu das necessidades coletivas de professores, sindicatos e faculdades de educação. Segundo Vasco (2018, p. 5-6, tradução e inserção nossas):

Os 18 anos de trabalho na *Renovación Curricular* de 1976 a 1994 foram totalmente perdidos, a ponto de não se encontrar uma única cópia dos programas [da proposta do *Marco General del Programa de Matemáticas*] nos arquivos do Ministério ou das Secretarias de Educação, e as etnografias das salas de aula, escolas e colégios mostraram que nem as Instituições de Educacionais tinham adotado os programas oficiais nem tinham elaborado seus próprios programas de acordo com o PEI. Chamo esse período de “caos curricular”, que vai de 1994 até os dias atuais⁷⁸.

De outro lado, Guacaneme *et al.* (2013) analisam a formação dos futuros professores de Matemática na Colômbia e identificaram quatro linhas principais que compõem os programas de formação: uma linha de formação em Matemática; uma linha de formação no conhecimento curricular e didático da disciplina; uma linha de formação no conhecimento pedagógico geral; e uma linha de formação que aborda aspectos da comunicação oral, leitura e escrita. Além disso, alguns programas incluem linhas complementares que envolvem a Física ou a Informática. No entanto, Jiménez (2019) destaca que ainda persiste uma dificuldade em integrar a prática do

⁷⁸ Los 18 años de trabajo en la *Renovación Curricular* de 1976 a 1994 se perdieron totalmente, hasta el punto de no encontrarse ni un ejemplar de los programas en los archivos del *Ministerio* [MEN] o de las *Secretarías de Educación*, y las etnografías de aulas, escuelas y colegios mostraron que ni las *Instituciones Educativas* habían adoptado los programas oficiales ni tampoco habían elaborado sus propios programas conforme al PEI. Llamo a este período “el caos curricular”, que dura desde 1994 hasta nuestros días

professor de Matemática com sua formação teórica, pois a formação Matemática é conduzida pelos matemáticos e a formação pedagógica pelos pedagogos.

3.1.4 Aproximação ao Enfoque de Sistemas no “novo programa” de Matemática

No âmbito do *Programa de Renovación Curricular*, o *Enfoque de Sistemas* surge como uma proposta que procura ultrapassar o debate dos anos 1970 e 1980 sobre as tendências da “Matemática Moderna” (New Math) e “Regresso ao Básico” (Back to Basic). O Programa oferece critérios teóricos que permitem a tomada de decisões e orientam os projetos educacionais das instituições escolares. Uma primeira versão dos novos programas de Matemática e Ciências Naturais foi iniciada pelo Dr. Carlo Federici Casa, professor dos Departamentos de Matemática e Estatística da *Universidad Nacional* da Colômbia, a qual posteriormente seria continuada pelo Dr. Carlos Vasco. Esses professores também coordenaram um grupo interdisciplinar de acadêmicos cujo objetivo era renovar os programas curriculares de todas as áreas (Vasco 1984).

Carlos Vasco atribui à abordagem conjuntista, presente na proposta do Movimento da Matemática Moderna, a possibilidade de aproximar o aluno de estruturas conceituais e de pensamento mais amplos. No entanto, também reconhece as limitações dessa abordagem diante das demandas nas atividades do cotidiano. Notando que as crianças poderiam realizando um aprendizado mecânico (memorístico) dos conjuntos, Vasco propõe a seguinte pergunta: será que as crianças não se encontram com conjuntos, mas com sistemas? Diante desse questionamento, ele propõe o seguinte raciocínio, no intuito de ilustrar a necessidade de trabalhar com um *Enfoque de Sistemas*:

Os números naturais 0, 1, 2, 3, ... não são tão confusos e “soltos” como a teoria dos conjuntos acredita: eles são ordenados com muita precisão e têm uma série de operações, como passar para o próximo, retornar ao anterior, o de somar, subtrair, multiplicar, dividir, elevar a potências, extrair raízes e obter logaritmos. Esses elementos que são os números naturais, essas operações, que não são mais quatro, mas nove, e essas relações de ordem aditiva, multiplicativa e potenciativa, entre outras, são o que compõem o sistema de números naturais da Aritmética elementar. As crianças em sala de aula não formam apenas um conjunto: existem múltiplas relações entre elas, e ocorrem entre elas muitas ações, transformações e processos. Eles formam um sistema bastante complexo, de fato. As flores, as folhas, as abelhas, os vermes e a terra não formam um conjunto de objetos, mas sim um pequeno sistema ecológico, as letras, morfemas, palavras, expressões, frases, parágrafos e capítulos de um livro não formam conjuntos, mas sistemas muito estruturados. Pessoas, grupos, partidos, empresas e estamentos sociais não formam meros grupos de pessoas, mas sim sistemas sociopolíticos complexos⁷⁹ (Vasco, 1984, pp 14-15, tradução nossa).

⁷⁹ Los números naturales 0, 1, 2, 3, ... no son tan desordenados y “suelos” como cree la teoría de conjuntos: están ordenados de manera muy precisa, y poseen una serie de operaciones como la de pasar al siguiente, la de devolverse al anterior, la de sumar, restar, multiplicar dividir, elevar a potencias, extraer raíces y sacar logaritmos. Esos

Vasco critica a abordagem dos conjuntos adotada pelo Movimento de Matemática Moderna que os reduziu a meras coleções de objetos sem propriedades operacionais ou relacionais. Segundo ele, essa abordagem despojou os conjuntos de sua riqueza e complexidade, deixando apenas o que ele denomina de “cadáveres de sistemas”. Sobre essa maneira de denominar os sistemas, o autor apresenta alguns exemplos, entre eles, a ideia ativa de ângulo. Ele comenta que a ideia de ângulo pode ser observada nas crianças de primeira e segunda séries, quando, no momento de fazer atividade de educação física, as crianças expressam a facilidade e gosto em dar quartos de voltas, meias-voltas e voltas completas. Segundo Vasco, isso permite chegar a uma apreciação “qualitativamente” de menor a maior amplitude ou abertura do ângulo de giro, e é só depois de estabilizar a construção desse conceito mediante o trabalho ativo no nível concreto, que se pode aceitar o ângulo desenhado no caderno ou na lousa como a marca de um giro que já aconteceu, de forma que, “[o] giro estava vivo. O ângulo desenhado fica morto. Um ângulo desenhado é o cadáver de um giro” (Vasco, 1984, p. 57, tradução nossa). Assim, o sistema ao deixar de ter um caráter “ativo”, torna-se um “cadáver do sistema”, ou seja, busca-se a exploração primordialmente dinâmica e só secundariamente um estudo de figuras desenhadas na lousa, ou no papel, que já perderam o seu carácter dinâmico.

A proposta do *Enfoque de Sistemas* buscou reunir os diferentes âmbitos da Matemática (números, geometria, medidas, dados estatísticos, a mesma lógica e conjuntos), mediante uma abordagem sistêmica que as entende como conjuntos estruturados, que contêm elementos, operações e relações. “Este enfoque unificador de todos os ramos da Matemática (ou seja, das Matemáticas) pode ser articulado ou estabelecido, de forma coerente, em torno de um conceito-chave mais amplo que o de conjunto, que é o conceito de *Sistema*” (MEN, 1990, p. 9, tradução nossa e grifos do autor).

Na introdução do *Marco General del Programa de Matemáticas para la Educación Básica*, é apresentado o conceito de *Sistema*. Nesses documentos, de proposta curricular, Vasco indica que para definir um sistema devem estabelecer previamente os significados das palavras que serão empregadas. Essas palavras são: conjunto, objeto, relação, operação. Assim, a partir

elementos que son los números naturales, esas operaciones, que ya no son cuatro sino nueve, y esas relaciones de orden aditivo, multiplicativo y potenciativo, entre otras, son las que conforman el sistema de los números naturales de la Aritmética elemental. Los niños del salón de clase no solo forman un conjunto: hay entre ellos múltiples relaciones, y suceden entre ellos muchas acciones, transformaciones y procesos. Forman más bien un sistema, y bien complejo por cierto. Las flores, las hojas, las abejas, las lombrices y la tierra no forman un conjunto de objetos, sino un pequeño sistema ecológico, las letras, morfemas, palabras, expresiones, frases, párrafos y capítulos de un libro no forman conjuntos sino sistemas muy estructurados. Las personas, grupos, partidos, empresas y estamentos sociales no forman meros conjuntos de personas sino complejos sistemas socio-políticos.

de essas palavras, é possível expressar o conceito chave do currículo de Matemática: o conceito de sistema. Portanto, um *sistema é um conjunto de objetos com suas relações e operações*.

Nesse sentido, para definir um determinado sistema da Matemática é preciso especificar um conjunto de objetos, um conjunto de operadores e um conjunto de relações. Nos documentos do MEN (1990), é apresentado um exemplo de sistema estudado na Aritmética, em que: o conjunto A de objetos seja formado pelos números inteiros $\mathbb{Z}$, o conjunto de operações Ω seja formado pela adição e a multiplicação, e o conjunto de relações R seja formado pelas relações de ordem ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$); de modo que:

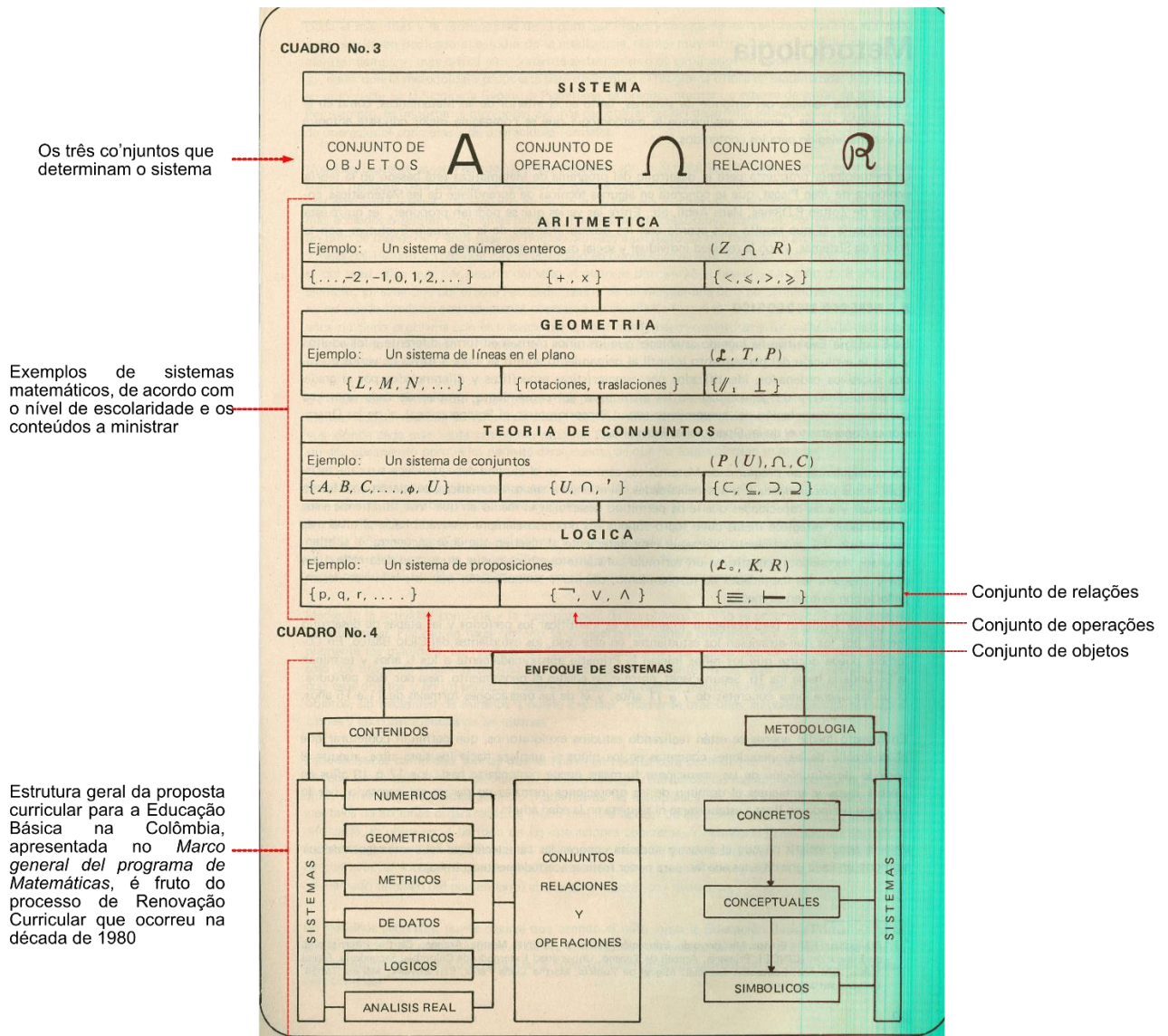
$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

$$\Omega = \{ +, \times \}$$

$$R = \{ \leq, <, >, \geq \}$$

De maneira similar, pode se descrever outros sistemas da Aritmética, da Geometria, da Teoria de Conjuntos, da Lógica Matemática, etc. Segundo o *Enfoque de Sistemas*, cada sistema é perfeitamente determinado por três conjuntos: A , Ω , R . De modo abreviado, todo sistema específico da Matemática pode ser simbolizado por meio de uma terna ordenada de conjuntos como: $\mathcal{S} = \{ A, \Omega, R \}$. O modo como essa proposta curricular apresenta o sistema da Aritmética, tomado como exemplo, é o seguinte:

Figura 2 - Exemplo de estrutura curricular no *Enfoque de Sistemas*



Fonte: adaptado de MEN (1990, p. 62).

Nesse enfoque, propõe-se ao professor de Matemática a realização de uma análise do sistema matemático que quer abordar na sala de aula por meio de um espectro apresentado em dois níveis. No primeiro, visa distinguir cuidadosamente entre o sistema simbólico, que é escrito, desenhado ou falado, e o sistema conceitual que é pensado, construído e elaborado mentalmente; deve também ser considerada inicialmente, a exploração de sistemas *pré-matemáticos* ou chamados de “sistemas concretos”⁸⁰ que, de acordo com Vasco (1984),

⁸⁰ O enfoque do programa propõe que abaixo dos sistemas simbólicos e conceitual, buscam-se outros sistemas já esquecidos pelos adultos, onde as crianças podem obter os conceitos esperados. Esses sistemas pré-matemáticos, a partir dos quais esses conceitos podem ser construídos, são chamados nesta abordagem de “sistemas concretos”(Vasco, 1984, p. 16).

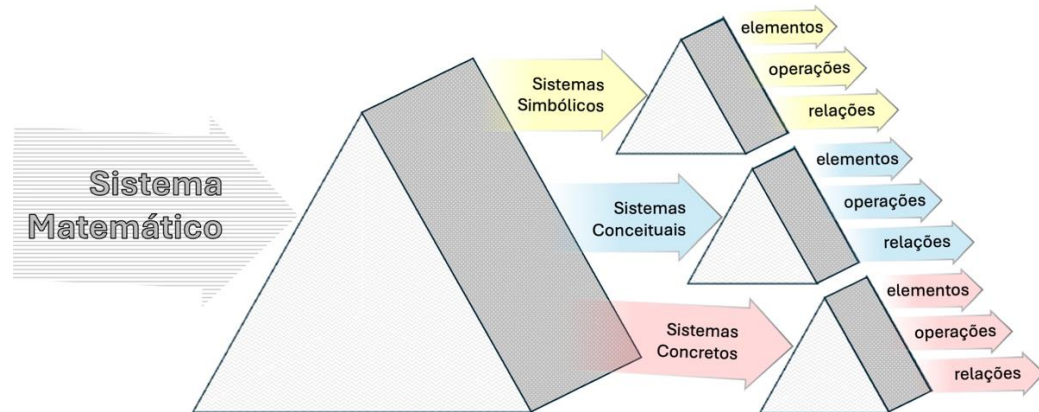
encontram-se em um nível anterior aos sistemas simbólico e conceitual, mas que permitem a construção de conceitos.

Nesse sentido, o primeiro nível de análise propõe um caminho ascendente que parte dos sistemas concretos aos sistemas conceituais e suas formas simbólicas, pois pode haver vários sistemas simbólicos para um mesmo conceito, portanto, no *Enfoque de Sistemas*, “A sugestão pedagógica do programa é explorar os sistemas concretos já utilizados pelas crianças, partindo deles para a construção dos respectivos sistemas conceituais” (Vasco, 2018, p. 6, tradução nossa).

No segundo nível de análise, espera-se que o professor ponha em evidência os objetos ou componentes, também chamados de “elementos” (os quais podem ser, por exemplo: números, linhas, figuras geométricas, entre outros), que correspondem ao aspecto mais visível de qualquer sistema matemático que esteja sendo trabalhado. Porém, segundo o *Enfoque de Sistemas*, o mais importante dos sistemas matemáticos reside nas operações ou transformações, visto que “correspondem às atividades ou ações das crianças, manuais ou mentais, e as relações, que correspondem às semelhanças ou diferenças, as ordenações e equivalências, as correspondências ou vínculos existentes ou que podem ser construídos entre os elementos” (Vasco, 2018, p. 7, tradução nossa). Também, as relações correspondem à teoria, à reflexão sobre resultados ou restrições às operações, e os elementos são os menos importantes, pois eles podem ser intercambiáveis com outros se os relacionamentos e as operações forem preservados (Vasco, 1984).

Para exemplificar, Vasco relaciona os níveis do *Enfoque de Sistemas* com um espectro formado pela luz ao atravessar dois prismas (conforme figura 1), nos quais a ordem de prioridade da ação docente em cada espectro muda de base (fundo) a topo (cúspide). O movimento que ocorre no primeiro prisma, busca expressar a ideia do primeiro nível de análise que o professor deve realizar sobre o sistema matemático, para que os estudantes alcancem o desenvolvimento transistêmico na aprendizagem. No segundo prisma, o movimento ilustrado tenta transmitir a ideia do segundo nível de análise que o professor deve fazer no sistema matemático, em que são destacados os objetos matemáticos e as ações sobre esses objetos.

Figura 3 - Representação do *Enfoque de Sistemas*



Fonte: adaptado de Vasco (1984, p. 51).

Assim, por exemplo,

Se temos um sistema simbólico, como o sistema de numeração decimal para o sistema de numeração conceitual da Aritmética elementar, o professor descobre que os dez dígitos de 0 a 9 são os elementos, talvez com vírgulas ou pontos, que as operações são puramente gráficas, como aumentar ou diminuir o zoom, subir ou descer os elementos, e que as relações de contigüidade e estar à direita ou à esquerda são definitivas na compreensão do sistema simbólico⁸¹ (Vasco, 1984, p. 19, tradução nossa).

Nessa proposta curricular, para *Educación Básica Primaria* (1º ao 5º ano), os conteúdos da área de Matemática foram organizados sob os seguintes títulos: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas métricos, sistemas de dados, sistemas lógicos, conjuntos, relações e operações. Os conteúdos para *Educación Básica Secundaria* (6º ao 9º ano) têm, além dos títulos anteriores, outro denominado *análise real*. Com esses sistemas, esperava-se que o professor realizasse uma gestão racional e prudente, importante para que o estudante pudesse adquirir familiaridade com a matemática não numérica e contribuir ao desenvolvimento da capacidade de análise e, a longo prazo, do pensamento formal (MEN, 1990).

3.1.5 Aspectos gerais dos *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*

Diante do exposto, nos *Lineamientos Curriculares* afirma-se que a aprendizagem da Matemática precisa possibilitar ao aluno a aplicação de seus conhecimentos fora do ambiente escolar, portanto, considera-se ser preciso relacionar os conteúdos de aprendizagem com a experiência cotidiana, fazendo que o professor procure estratégias que permitam apresentar e

⁸¹ Si tenemos un sistema simbólico, como por ejemplo el sistema de numeración decimal para el sistema numérico conceptual de la Aritmética elemental, el maestro encuentra que los diez dígitos de 0 a 9 son los elementos, tal vez con comas o puntos, que las operaciones son puramente gráficas como acercar o alejar, subir o bajar los elementos, y que las relaciones de contigüidad y de estar a la derecha o a la izquierda son definitivas en la comprensión del sistema simbólico.

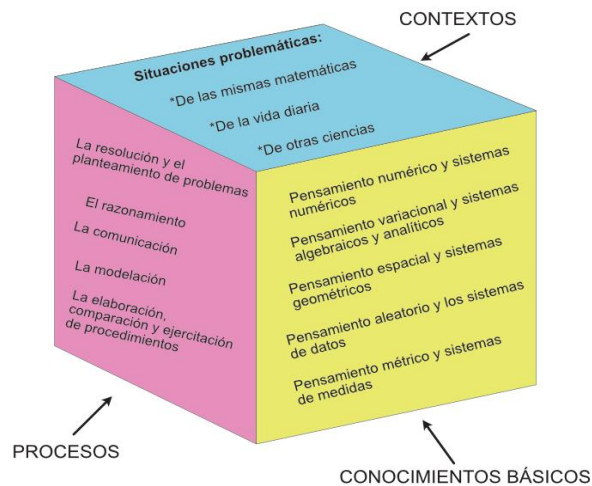
ensinar os conteúdos num contexto de situações-problema que favorecem a troca de pontos de vista. Assim, a proposta nesses documentos busca desenvolver uma visão global e abrangente do trabalho matemático, para o qual se propõem três grandes aspectos na organização harmoniosa do currículo, a saber: processos gerais, conhecimentos básicos e os contextos.

Os processos gerais são habilidades cognitivas que favorecem a aprendizagem em diversas áreas, tais como raciocínio, resolução e planejamento de problemas, comunicação, modelagem e elaboração, comparação e exercitação de procedimentos. Os conhecimentos básicos são o conjunto de conceitos e procedimentos específicos da Matemática que se organizam em sistemas relacionados ao pensamento numérico, espacial, métrico, aleatório e variacional. Esses sistemas são os mesmos que aparecem na proposta curricular do *Enfoque de Sistemas* do *Programa de Renovación Curricular* da década de 1980, ou seja, sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistema de medição e sistema de dados. Todavia, os sistemas de conjuntos e de operações e relações foram agrupados nos sistemas algébricos e analíticos e, por sua vez, os sistemas lógicos foram retirados dos conteúdos por serem considerados inerentes a todos os sistemas. Os contextos são os ambientes que cercam os alunos e que dão sentido à matemática que eles aprendem, por meio de situações reais ou simuladas. Nesse sentido, segundo os *Lineamientos Curriculares* (MEN, 1998), o ensino de habilidades de pensamento não deve ser visto como oposto ao ensino de conteúdos convencionais, mas como um complemento a eles. Um exemplo disso é a utilização de jogos como recurso didático para desenvolver o raciocínio lógico e o pensamento estratégico dos alunos, ao mesmo tempo em que se trabalha com conceitos numéricos ou geométricos.

Uma forma de considerar os *Lineamientos*, de forma simplificada, corresponde a um sistema tridimensional, na forma de um cubo⁸², que permite a visualização de suas dimensões (ver Figura 4). De acordo com os *Lineamientos*, considera-se que em qualquer momento do processo de ensino e aprendizagem, aspectos das três dimensões devem estar presentes para que a intervenção educativa seja completa e significativa.

⁸² No documento são apresentados vários modelos para representar os elementos centrais nas diretrizes curriculares e, como se informa no documento dos *Lineamientos*, cada um desses modelos apresenta limitações e possibilidades para estruturar o currículo. Em particular, nesse modelo “[c]ada face do cubo é projetada sobre a sua oposta de tal forma que, ao observar o cubo de qualquer um dos seus pontos, os três aspectos são observados para significar sua presença em qualquer momento do ato educativo”. (MEN, 1998, p.20, tradução nossa).

Figura 4 - “Modelo representativo” dos *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*

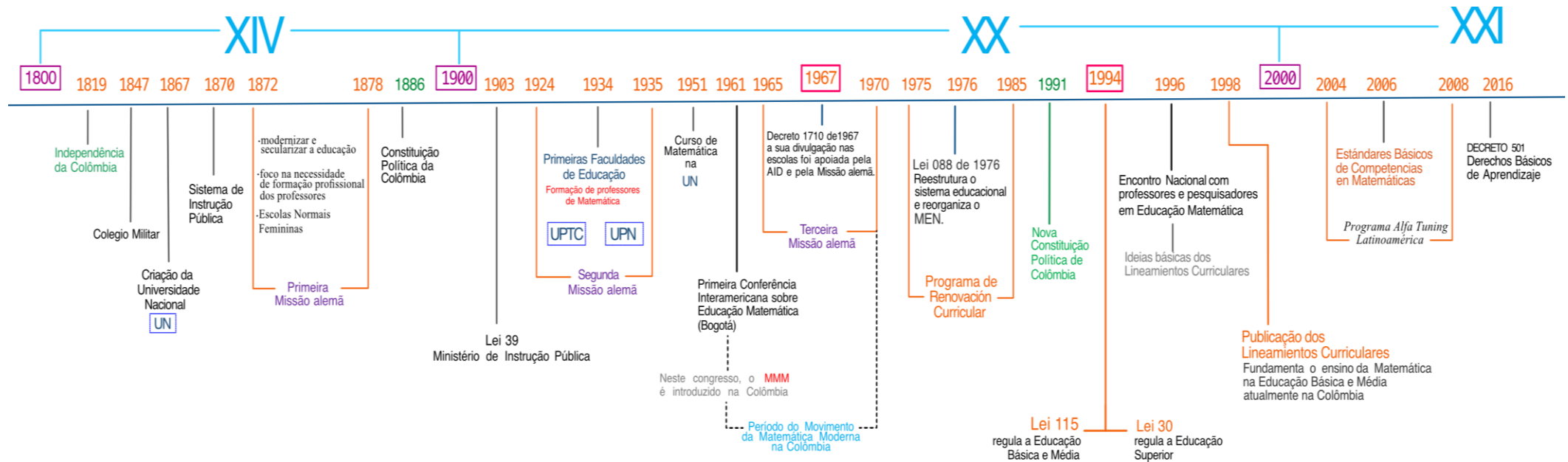


Fonte: adaptado de (MEN, 1998, p. 20).

Por outro lado, há que se considerar também que, embora *pensamentos* e *sistemas* se apresentem sob o mesmo aspecto, isso não significa que cada *pensamento* se desenvolva apenas por meio do respectivo *sistema*, ignorando a natureza transistêmica de cada pensamento, assim “embora o desenvolvimento de um determinado sistema está associado a cada tipo de pensamento como indispensável, este último não esgota todas as possibilidades. Outros sistemas podem contribuir para ampliar e construir significados em cada tipo de pensamento”⁸³ (MEN, 1998, p. 32, tradução nossa). Na figura 5 apresentamos um esquema do panorama histórico do Sistema Educacional na Colômbia.

⁸³ Aunque al desarrollo de cada tipo de pensamiento se le asocie como indispensable un determinado sistema, este último no agota todas las posibilidades. Otros sistemas pueden contribuir para ampliar y construir significados en cada tipo de pensamiento

Figura 5 - Linha de tempo do panorama histórico do Sistema Educacional e o ensino da Matemática na Colômbia



Fonte: elaboração própria.

3.2 Destaques sobre Álgebra no currículo

Conforme abordado na seção precedente, a estruturação dos currículos educacionais segue as normativas estabelecidas pelo Ministério da Educação Nacional (MEN). Logo, consideramos os aspectos relevantes relacionados ao ensino da Álgebra, tomando como base os principais documentos norteadores: *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* e *Estándares Básicos de Competencias*.

Nesses documentos, a Álgebra aparece estreitamente vinculada a um dos cinco *Conocimientos Básicos*, descritos no enfoque curricular que orienta atualmente o ensino de Matemática, a saber: o *pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos*. Assim, nos *Lineamientos* propõe que o desenvolvimento do pensamento variacional seja um objetivo fundamental na Educação Básica, buscando superar o ensino fragmentado da Matemática para abordar um campo conceitual mais amplo. Esse campo inclui conceitos e procedimentos interrelacionados que permitem analisar, organizar e modelar matematicamente diversas situações, desde a vida cotidiana até a própria Ciência e a Matemática, mediante enunciados verbais, representações tabulares, gráficos do tipo cartesiano ou sagital, representações pictóricas e icônicas, fórmulas, expressões analíticas, entre outros, tendo a *variação* como elemento central. O documento manifesta que é necessário descompactar e compreender os conceitos, procedimentos e métodos relacionados à variação para revelar suas interconexões, destacando a importância de iniciar o estudo da variação mediante a quantificação com quantidades e grandezas, o que enriquece a compreensão do conceito. Além disso, tal documento identifica alguns dos núcleos conceituais matemáticos em que a variação está envolvida:

- Contínuo numérico, real, dentro de processos infinitos, sua tendência, aproximações sucessivas, divisibilidade;
- função como modelos de dependência e modelos de função;
- as grandezas;
- *a Álgebra no seu sentido simbólico, liberta do seu significado geométrico, particularmente a noção e o significado da variável são decisivos neste domínio;*
- modelos matemáticos de tipos de variação: aditiva, multiplicativa, variação para medir a mudança absoluta e para medir a mudança relativa. A proporcionalidade assume um significado especial.

Assim, em relação à Álgebra, reconhece-se inicialmente esta disciplina *por sua capacidade de generalizar os padrões da Aritmética* e, que com o passar do tempo, evoluiu para se tornar *uma ferramenta* poderosa e versátil, fundamental para modelar e resolver problemas de medição, bem como para analisar fenômenos que envolvem mudanças e variações. Essa disciplina matemática permite uma compreensão mais profunda das propriedades numéricas e das relações entre quantidades. Além disso, a Álgebra, deve incluir

[...], outros aspectos, o uso abrangente da variável e seus diferentes significados, a interpretação e modelagem da igualdade e da equação, *as estruturas algébricas como meio de representação* e seus métodos como ferramentas na resolução de problemas, a função e suas diferentes formas de representação, o análise das relações funcionais e da variação em geral para explicar como uma mudança em uma quantidade produz uma mudança em outra, e a contextualização de vários modelos de dependência entre variáveis, todos esses desenvolvimentos típicos do pensamento variacional⁸⁴ (MEN, 1998, p. 17, tradução nossa e grifos nossos).

Nesse sentido, salienta-se a pertinência de incentivar os alunos a potencializarem habilidades como a observação e o uso da linguagem matemática para desenvolver o pensamento variacional, levando em conta que esse desenvolvimento é considerado um processo progressivo, que se enriquece com o tempo e a experiência. Sugere-se que o estudo da variação deve começar cedo na educação matemática do aluno e pode ser abordado por meio de situações problemáticas relacionadas a fenômenos de mudança, utilizando ferramentas como tabelas e calculadoras para melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos e estimular o pensamento variacional.

Também, a abordagem da Álgebra proporciona uma visão sobre a importância da exposição repetida a construções de fórmulas e padrões de variação na educação matemática dos estudantes. Argumentamos que essa prática auxilia os alunos a compreenderem a sintaxe das expressões algébricas, o que é crucial para o estudo posterior da Álgebra. As tabelas são ferramentas necessárias nesse processo, pois facilitam a compreensão das variáveis e sua infinita gama de valores possíveis. Sendo assim, o uso de variáveis em tabelas promove a capacidade de escrever expressões algébricas e fórmulas que descrevem variações ou alterações.

⁸⁴ otros aspectos el uso comprensivo de la variable y sus diferentes significados, la interpretación y modelación de la igualdad y de la ecuación, las estructuras algebraicas como medio de representación y sus métodos como herramientas en la resolución de problemas, la función y sus diferentes formas de representación, el análisis de relaciones funcionales y de la variación en general para explicar de qué forma un cambio en una cantidad produce un cambio en otra, y la contextualización de diversos modelos de dependencia entre variables, todos éstos desarrollos propios del pensamiento variacional.

O estudo de padrões, incluindo aqueles encontrados em cenários da vida real e em representações geométricas ou numéricas, é fundamental desde a Educação Básica para reconhecer e descrever regularidades. Esses padrões podem ser aditivos ou multiplicativos e podem ser explorados por meio de descrições verbais das relações entre quantidades. As tabelas são também utilizadas para introduzir os alunos à representação gráfica de problemas concretos, limitados ao primeiro quadrante, e à identificação de variáveis independentes e dependentes, o que conduz à aprendizagem formal do sistema cartesiano e da sua sintaxe.

Também, ressalta-se a pertinência da abordagem dos gráficos cartesianos no currículo educacional, diante de sua utilidade para o estudo dinâmico da variação e da relação entre variáveis. Cabe enfatizar, desde cedo, a introdução de conceitos como variação qualitativa e identificação de eixos coordenados. Particularmente, o gráfico visa abordar os aspectos de dependência entre variáveis, criando a noção de função como dependência.

A função é apresentada como um conceito central. Dessa forma, em contextos donde se estabelecem relações funcionais, “a função surge *como uma ferramenta* de conhecimento necessária para ‘ligar’ padrões de variação entre variáveis e para prever e controlar mudanças”⁸⁵ (MEN, 1998, p. 51, tradução nossa e grifos nossos). São mencionados modelos de funções simples (lineares, afins, quadráticas, exponenciais) e sua relação com a proporcionalidade, preparando os alunos para a compreensão da natureza dos conjuntos e das relações funcionais. Enfatiza-se a necessidade de expor os alunos a funções irregulares para evitar a concepção de que sua existência depende de uma expressão Algébrica. Também, destaca-se a calculadora gráfica como ferramenta didática fundamental para o estudo de padrões característicos de funções e seu comportamento (crescente, decrescente).

Na caracterização do *pensamiento variacional y sistemas algébricos y analíticos*, que é realizada nos *Estándares Básicos de Competencias*, a Álgebra é entendida como um poderoso sistema de representação e descrição de fenômenos de variação e mudança, e “não apenas um jogo formal de símbolos não interpretados, por mais úteis, engenhosos e interessantes que tais jogos possam ser” (MEN, 2006, p. 68). Sendo assim, conforme apresentado nesse documento, a Álgebra está vinculada ao pensamento variacional, destacando-se, neste último, as atividades de reconhecer, perceber, identificar e caracterizar o modo como se dá a variação e a mudança em diversos contextos, assim como o uso de distintos sistemas ou registros que podem ser verbais, icônicos, gráficos ou algébricos que permitam descrever, modelar e representar

⁸⁵ emerge la función como herramienta de conocimiento necesaria para “enlazar” patrones de variación entre variables y para predecir y controlar el cambio

fenômenos de variação. Diante disso, nesse documento, evidencia-se o caráter trans-sistêmico do pensamento variacional, de modo que este,

[...] desenvolve-se em estreita relação com outros tipos de pensamento matemático (numérico, espacial, medida ou métrico, e aleatório ou probabilístico) e com outros tipos de pensamento mais típicos de outras ciências, em particular através do processo de modelagem natural e social. processos e situações através de modelos matemáticos. Em particular, a relação com outros pensamentos aparece com muita frequência, porque a variação e a mudança, *embora sejam normalmente representadas através de sistemas algébricos e analíticos*, requerem conceitos e procedimentos relacionados com diferentes sistemas numéricos (em particular, o sistema dos números reais, fundamental na construção de funções variáveis reais), geométricas, medidas e dados e porque todos esses sistemas, por sua vez, podem ser apresentados de forma estática ou de forma dinâmica e variacional (MEN, 2006, p. 66, tradução nossa e grifos nosso).

Nesse documento, é sugerido que se inicie com o estudo de regularidades no intuito de que o estudante reconheça os critérios e as regras, que permitem identificar padrões que se repetem recorrentemente, por meio de um certo procedimento, algoritmo ou fórmula. Sendo assim, na *Educación Básica Primaria* (1º ao 5º ano), busca-se incluir nas aulas o pensamento variacional, mediante diferentes atividades que propiciem analisar as mudanças em sequências ou sucessões de figuras, números ou letras, que incentivem aos estudantes fazer conjecturas e expressá-las nos diferentes sistemas de representação. É nessas atividades em que se baseia o *proceso de generalización*, no qual se envolvem noções e conceitos próprios do pensamento variacional como: constante, variável, função, razão ou taxa de câmbio, dependência e independência entre variáveis. Assim, segundo o sugerido nos *Estándares*, considera-se que essa “é uma forma muito apropriada de se preparar para uma aprendizagem significativa e abrangente de sistemas algébricos e da sua gestão simbólica muito antes de atingir a sétima e a oitava séries”⁸⁶ (MEN, 2006, p. 67, tradução nossa).

O sistema algébrico é o *sistema de representación* mais diretamente ligado às variações na *Educación Básica Secundaria* (6º ao 9º ano). Porém, há outros tipos de representação que atuam como intermediárias na construção geral dos procedimentos, algoritmos ou fórmulas que definem o padrão de generalização. As múltiplas relações entre a produção de padrões de variação e o processo de modelação, envolvem, particularmente, o estudo das noções de variável e de função, de modo que os objetos algébricos, por exemplo as expressões algébricas, são reconstruídas como representação de funções e as equações e inequações se reinterpretam como igualdades ou desigualdade entre funções. Nos *Estándares*, que é considerada como a perspectiva mais apropriada para relacionar o pensamento variacional, tem-se o cálculo

⁸⁶ esta es una forma muy apropiada de preparar el aprendizaje significativo y comprensivo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar al séptimo y octavo grado.

algébrico na *Educación Básica Secundaria* (6º ao 9º ano) e a Geometria Analítica e o Cálculo Diferencial e Integral na *Educación Média* (10º e 11º ano).

Também, na perspectiva dos *Estándares* se estabelece uma relação entre os sistemas algébricos e a aritmética, isso delinea a abordagem por meio da qual os currículos olham para a dificuldade na passagem da Aritmética para a Álgebra, particularmente na sétima e a oitava séries. De modo que,

Um aspecto importante na aprendizagem de Álgebra corresponde ao uso significativo e ao estudo formal de objetos algébricos (variáveis, constantes, parâmetros, termos, fórmulas e outras expressões algébricas como equações e inequações, sistemas de equações ou de inequações, por exemplo), para os quais é necessário *expandir a notação da linguagem Aritmética* e usar as propriedades características dos sistemas numéricos (como as propriedades comutativas e associativas da adição e multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição, ou o caráter simétrico e transitivo da igualdade e o caráter antissimétrico e transitivo da desigualdade) (MEN, 2006, p. 68, tradução nossa e grifos nossos).

Portanto, conforme descrito neste documento, o cálculo algébrico emerge *como uma generalização do trabalho aritmético* com modelos numéricos, aplicados em situações em que há variação nos valores das medidas de grandezas funcionalmente relacionadas.

Levando em conta alguns dos principais aspectos registrados nesses documentos que orientam os currículos na Colômbia, particularmente no que se refere à Álgebra e seu ensino, manifestamos algumas considerações a respeito. Inicialmente, resgatamos alguns fatos em relação aos aspectos que sustentam estas peças fundamentais no percurso de desenvolvimento do currículo, tendo como fio condutor a Álgebra e o seu ensino.

Uma parte importante em que se fundamenta a estrutura curricular atual tem como cerne os trabalhos desenvolvidos⁸⁷ no final da década de 1970 e inícios da década de 1980, particularmente no *Marco general del programa de Matemáticas para la Educación Básica*⁸⁸, em que se expõe a perspectiva de ensino da Matemática nos currículos escolares colombianos. Nesses programas, o *Enfoque de Sistemas*⁸⁹ constitui uma peça fundamental em que se sustenta o ensino da Matemática e que se propõe a organização do conhecimento matemático por meio da noção de *sistema*.

⁸⁷ Na seção 3.1.2 da presente tese, que trata sobre as reformas educacionais no século XX, descreve-se mais amplamente a respeito.

⁸⁸ Marco Geral do Programa de Matemática para a *Educación Básica*.

⁸⁹ Na seção 3.1.4 da presente tese, que trata sobre a Aproximação ao *Enfoque de Sistemas* no “Novo Programa” de Matemática, se descreve mais amplamente a respeito.

Segundo o documento, um sistema é definido como um conjunto⁹⁰ de objetos, com suas operações e suas relações. Destaca-se a relevância de concentrar a atenção nos sistemas como na totalidade e nas relações entre seus componentes, para que possam ser descritos pela estrutura de suas operações e relações. Nesses documentos, são apresentados três tipos de sistemas como elementos integrantes de qualquer sistema Matemático: Sistemas Concretos, Sistemas Conceituais e Sistemas Simbólicos. Entretanto, não é dito o que são alguns destes “tipos” de sistemas e como seus componentes se articulam de modo a serem considerados como um sistema. Mas, é indicado que o sistema verdadeiramente importante é o Sistema Conceitual, entendido como o núcleo do Sistema Matemático, e que acima deste, no nível superficial, encontram-se os Sistemas Simbólicos (entre eles os Sistemas Algébricos) e, por baixo do núcleo, num nível mais elementar, os Sistemas Concretos (remetemos o leitor à figura 3, na qual se explicita a estrutura do Sistema Matemático conforme a visão de Carlos Vasco).

No *Programa curricular* para 8º ano, aparece na leitura introdutória à Unidade II, com o título *Ecuaciones de primer grado y segundo grado: el manejo de expresiones algebraicas como símbolos de funciones*, o autor, Carlos Vasco, inicia perguntando: a Álgebra ou as Álgebras? Ele manifesta que a palavra “álgebra” tem sido reduzida, equivocadamente, à manipulação de símbolos que se aprendem como um requisito em 8º e 9º ano. A crítica de Carlos Vasco aponta que, no ensino tradicional, a Álgebra tem sido reduzida a uma prática puramente mecânica, centrada na manipulação de símbolos e aplicação de regras sem significado para os alunos. Entretanto, conforme o referido autor, cada ramo da Matemática tem sua “álgebra”, ou seja, seu sistema de símbolos que permitem encontrar alguns resultados com a manipulação apropriada dos códigos. Existe, dessa maneira, uma álgebra da lógica, uma álgebra de conjuntos, uma álgebra linear para a Geometria, entre outras álgebras. Assim, segundo a perspectiva trazida por Carlos Vasco, “uma álgebra” é um sistema simbólico utilizado para representar os diferentes sistemas conceituais que se encontram mais desenvolvidos.

Desse modo, o ensino de Álgebra da escola⁹¹ — ou também chamada como Álgebra de 8º ano —, por dizer assim, é dado como um dos vários *sistemas simbólicos usado para lidar com transformações* nesses *sistemas concretos* que são os inteiros e as frações. Portanto, nesses *Programas* a Álgebra é compreendida como sendo plural (as Álgebras), e enquanto Sistema

⁹⁰ De modo que, um sistema matemático pode ser modelado como um conjunto da forma $\{A, \Omega, R\}$, em que A representa o conjunto de objetos, Ω representa o conjunto de operações e R representa o conjunto de relacionamentos.

⁹¹ Carlos Vasco se refere à Álgebra que se ensina na escola como “Álgebra de bachillerato”, referindo-se ao modo como anteriormente se denominava ao conjunto de *Educación Básica Secundaria* e na *Educación Média*.

Simbólico, situa-se no “nível superficial” dos Sistemas Conceituais com o único propósito de representá-los. A Álgebra representa a “exterioridade” dos Sistemas Matemáticos e é introduzida com o objetivo de simplificar: *para facilitar a manipulação sintática de conceitos, operações e relações*.

Os *Lineamientos*, por sua vez, retomam dos *Programas* a organização do saber Matemático mediante a noção de sistema, sem embargo, tem a função primordial de impulsionar o desenvolvimento do pensamento Matemático. Assim, a cada um dos cinco pensamentos matemáticos lhe é adjudicado um sistema sobre o qual se apoia, que contribui para o seu desenvolvimento.

Conforme o exposto, parece que ao enfatizar o desenvolvimento variacional, a Álgebra, termina sendo entendida como um mero sistema simbólico, restrita a desempenhar apenas um papel de mediação, ou seja, como um meio de representação da variação, em que *sua utilidade* se destaca diante da capacidade de generalizar os padrões aritméticos. Nessa perspectiva, a abordagem da Álgebra tem como meta o desenvolvimento de uma linguagem para modelar problemas, pois os sistemas de representação são aqueles símbolos que permitem a descrição dos fenômenos.

De outra parte, é atribuído um papel duplo à Álgebra. Inicialmente, é vinculada à Aritmética como um meio para generalizar os resultados que se obtém no domínio numérico; depois, é apresentada como uma ferramenta para modelar fenômenos de variação e mudança. Contudo, o modo pelo qual ela evolui de um meio de generalização para uma ferramenta de modelagem não é descrito no documento.

Nos *Estándares*, entretanto, a Álgebra continua sendo entendida como um apoio para o desenvolvimento do pensamento variacional, vinculando as atividades de reconhecer, perceber, identificar e caracterizar o modo como se dá a variação. É defendido que a Álgebra não é apenas um jogo de símbolos, destacando-se seu caráter de meio simbólico, que possibilita a generalização do trabalho aritmético.

Dentre as diversas formas de “álgebra” referidas nos documentos, a “álgebra dos sistemas numéricos” é detalhadamente descrita e definida. Por outro lado, a Álgebra linear é citada apenas como o sistema simbólico subjacente à Geometria, sem que haja um desenvolvimento posterior dessa ideia. A ausência de discussão sobre as “demais álgebras” ressalta a ênfase na aritmética dentro do conteúdo “algébrico” do currículo nos documentos curriculares.

3.3 Pesquisas na Colômbia sobre o fenômeno em estudo

Nesta seção, vamos apresentar uma revisão sucinta da literatura sobre as pesquisas que tratam dos temas relacionados ao nosso estudo. Essas pesquisas nos fornecem um panorama analítico dos principais conceitos, métodos e resultados explorados em algumas pesquisas na Colômbia publicadas em revistas⁹² desse país.

Para realizar as buscas, aprofundamo-nos nas publicações que circulam nas revistas colombianas. Para isso, acessamos o site do sistema do Índice Bibliográfico Nacional (Publindex)⁹³, que faz parte do Sistema Nacional de Indexação de Publicações Científicas e Tecnológicas Colombianas. Publindex é uma entidade nacional que avalia os resultados das atividades de ciência, tecnologia e inovação na Colômbia.

Para realizar as consultas na base de dados do Publindex, escolhemos palavras-chave relacionadas ao campo de estudo da nossa pesquisa. Os descritores que empregamos foram: “Algebra”, “pensamiento algebraico”, “enseñanza del Álgebra”, “pensamiento variacional” e “concepciones sobre el Algebra”. A utilização desses termos possibilitou a seleção de artigos relevantes, permitindo uma abordagem analítica consistente. Inicialmente realizamos buscas por pesquisas publicadas nos últimos cinco anos, mas como os resultados foram escassos optamos por não restringir as buscas a um intervalo temporal específico. Sendo assim, o sistema Publindex nos forneceu a seguinte lista de revistas que abordam os descritores pesquisados.

Tabela 1 - Listagem de revistas indexadas no Publindex, segundo os critérios de consulta aplicados

ISSN	Título	Área de conhecimento
2011-5474	Revista Latinoamericana de Etnomatemática	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)
0123-2592	Revista Dialéctica	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)
2145-888X	Revista Científica Virtual Hexágono Pedagógico	Otras Ciencias Sociales
1794-1180	Escenarios	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)
0121-3814, 2323-0126	Tecné, episteme y didaxis	Ciencias de la Educación
2145-549X, 2422-4200	Revista Logos Ciencia e Tecnología	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)

⁹² Consideramos pertinente realizar buscas em revistas, uma vez que, na Colômbia, não há um repositório organizado e unificado de teses e dissertações, como ocorre em outros países, como o Brasil.

⁹³ Publindex se configura como uma ferramenta que orienta a indexação das revistas nacionais segundo critérios de qualidade. Para isso, elabora critérios de medição que permitem classificar as revistas colombianas, de acordo com a informação obtida de indicadores de medição oferecidos por *Web of Science* (WoS), *Scopus* e *Índice H5*. <https://scienti.minciencias.gov.co/publindex/#/revistasPublindex/detalle?tipo=A&idRevista=1111&idArticulo=70770>

0120-4327, 2216-0116	Revista UNIMAR	Ciencias Sociales, Interdisciplinaria
2389-9417	Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación	Otras Ciencias Sociales
0124-2253	Revista Científica	Otras Humanidades
1794-8231	Eco Matematico	Otras Ingenierías y Tecnologías
1909-8367	Entre Ciencia e Ingenieria	Matemáticas Aplicadas
2357-3716	Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información.	Otras Ingenierías y Tecnologías
0123-8264, 0124-3896	Horizontes Pedagógicos	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)
1657-4915, 1794-5259	Praxis	Ciencias de la Educación
1909-9746	Visión Electrónica	Ingeniería Eléctrica y Electrónica
0124-2121, 2665-2420	Educación y Humanismo	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)
1900-8260	Revista Educación en Ingeniería	Ciencias de la Educación
2145-9444	Zona Próxima	Ciencias de la Educación
0124-5821	Revista Virtual <i>Universidad Católica del Norte</i>	Ciencias Sociales, Interdisciplinaria
0124-6127, 2462-9596	Discusiones Filosóficas	Otras Humanidades
1657-9089, 2665-511X	Infancias Imágenes	Ciencias de la Educación
2346-4712	Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias	Educación General (Incluye Capacitación, Pedagogía)
0120-6788	Matematicas: Enseñanza Universitaria	Matemática

Fonte: elaboração própria.

Em nossas buscas nas revistas, identificamos 44 artigos que tinham relação com os nossos descritores. Porém, ao analisar cada um deles, excluimos sete artigos por não se adequarem ao nosso tema de estudo e três por não estar disponível no site da revista. Dessa forma, selecionamos 34 artigos para serem analisados.

Para analisar os artigos, fizemos um Resumo Analítico Especializado (RAE) de cada um, destacando os aspectos mais relevantes. O RAE é um tipo de resumo que sintetiza as informações de documentos e estudos sobre educação, facilitando a compreensão e a avaliação do material, usando uma linguagem clara, simples e precisa, respeitando o conteúdo original do texto (Torres, 1996).

Após o processo de leitura e elaboração dos RAE, analisamos as pesquisas publicadas nas que abordam variados temas em relação à Educação e Educação Matemática, os quais estão relacionados aos descritores que definimos anteriormente. Após ler e escrever os RAE, analisamos as pesquisas nessas revistas que tratam sobre Educação e Matemática e relacionamo-las com os descritores que definimos no momento de realizar as buscas. Para isso,

organizamos os estudos em blocos temáticos, visando evidenciar possíveis tendências ao redor de nosso fenômeno em foco.

Tabela 2 - Blocos temáticos na revisão de literatura concernente às pesquisas realizadas na Colômbia

Bloco temático	Número de artigos	Descrição
Early Algebra (Álgebra nos anos iniciais)	4	Visa desenvolver o pensamento algébrico desde as primeiras séries escolares, explorando padrões, generalizações e relações entre quantidades.
Comunicação e Cultura	2	Enfoca o papel da linguagem e dos contextos socioculturais na aprendizagem e no ensino da matemática
Estudos no âmbito da <i>Educação Superior</i>	4	Analisa as características e os desafios da formação de professores de Matemática e dos estudantes universitários
Intervenções pedagógicas	10	Discute as estratégias e os recursos didáticos para promover a qualidade da Educação Matemática.
Modelagem e Geometria	6	Explora as conexões entre a Matemática e o mundo físico, utilizando situações reais ou simuladas para construir e resolver problemas geométricos.
Pensamento variacional	3	Investiga as concepções e as práticas dos professores e dos alunos em relação à variação, à mudança e à incerteza na Matemática, bem como as implicações filosóficas desses temas.
Resolução de problemas	5	Aborda os processos cognitivos, afetivos e sociais envolvidos na solução de problemas matemáticos, bem como as competências e as habilidades necessárias para enfrentar os desafios propostos.

Fonte: elaboração própria.

3.3.1 Álgebra nos anos iniciais

No bloco referente à temática de *Álgebra nos anos iniciais* (*Early Algebra*), apresentamos uma revisão de alguns estudos que abordam diferentes aspectos da Álgebra com foco no Educação Básica, tais como: formas de pensamento algébrico (Vergel, 2013; Castro, 2014); argumentação (Cervantes-Barraza, Valbuena e Paternina, 2019) e o papel do professor (Zapata, Santa e Jaramillo, 2018).

Castro (2014) discute o que se entende por *Early Álgebra* (Álgebra nos anos iniciais) e analisa diferentes formas de introduzir a Álgebra na Educação Básica. O autor explora algumas atividades básicas de raciocínio algébrico que podem ser aplicadas em sala de aula, destacando as propriedades algébricas envolvidas. Ele conclui que os níveis sugeridos por Godino, Ake,

Gonzato e Wilhelmi (2012): ausência de raciocínio algébrico, nível incipiente de algebrização, nível intermediário de algebrização, nível consolidado de algebrização; são úteis para classificar as tarefas matemáticas escolares de acordo com o grau de algebrização. Além disso, Castro (2014) defende que esses níveis podem orientar a introdução do raciocínio algébrico elementar desde os primeiros anos de escolaridade. Essa orientação apoia a proposta de Kaput (2000) de algebrizar o currículo matemático escolar.

O artigo de Vergel (2013) relata um estudo de caso, extraído de sua tese de doutorado, sobre as formas de pensamento algébrico em alunos de 9-10 anos. O autor utiliza um referencial teórico baseado no enfoque microgenético de Lev Vigotsky e na perspectiva multimodal da cognição humana proposta por Radford, Edwards e Arzarello (2009), que leva em conta a dimensão multissemiótica. A partir desse referencial, Vergel (2013) examina o caso de um aluno de 10 anos, documentado por meio de vídeos, folhas de trabalho com tarefas de sequências de generalização de padrões, entrevistas focais e notas de campo. O autor afirma que sua análise preliminar indica que há algumas relações entre a sintaxe das “expressões algébricas” do aluno e os meios semióticos de objetivação que ele mobiliza. Além disso, o autor destaca o papel do ritmo que emerge como um meio semiótico de objetivação, na sintaxe algébrica do aluno.

Vergel (2013) argumenta que o desenho das tarefas visa proporcionar aos alunos um desenvolvimento que pode ser entendido como um processo social de aproximação dos significados subjetivos ou pessoais aos significados histórico-culturais incorporados na semiótica algébrica. O autor reconhece, porém, que o processo de coordenação complexa dos sistemas semióticos ainda é pouco conhecido e explorado na psicologia da educação matemática.

Cervantes *et al.* (2019) conduziram uma pesquisa qualitativa com base em um desenho metodológico de estudo de casos, envolvendo duas instituições na cidade de Barranquilla-Atlântico-Colômbia, nas quais participaram estudantes de quarta série da *Educación Básica* e seus dois respectivos professores de Matemática. O objetivo principal dessa pesquisa foi caracterizar os argumentos emergentes nos alunos na resolução de tarefas no contexto da *Early Algebra*. Para isso, os pesquisadores utilizaram o modelo de Toulmin como ferramenta metodológica para reconstruir os argumentos dos alunos. E para identificar os níveis de raciocínio algébrico presentes nos argumentos dos alunos, adotaram os níveis de algebrização propostos por Godino, Aké, Gonzato e Wilhelmi (2012). Os dados foram coletados a partir da aplicação de dois testes diagnósticos, um para avaliar a capacidade argumentativa dos alunos e

outro para verificar a capacidade do professor em desenvolver habilidades argumentativas nos alunos em sala de aula.

Os resultados da pesquisa mostraram que os alunos apresentam dificuldade no processo de argumentar e se caracterizam por oferecer razões sem fundamentação matemática. Portanto, recomenda-se aos professores que implementem atividades que incluam características do pensamento algébrico nas tarefas matemáticas e que estimulem a argumentação em sala de aula. Quanto aos resultados dos testes dos professores, não se observa que eles realizam atividades que favoreçam a argumentação na sala de aula de matemática, mesmo quando estão cientes e têm conhecimento da importância de abordar essa habilidade de pensamento nos processos de ensino e aprendizagem da matemática. Um dos professores expressou dificuldade em argumentar conjecturas, pois não apresentou generalização de conjecturas que levassem às demonstrações exigidas na tarefa. Consequentemente, os respectivos alunos dos professores demonstraram a mesma dificuldade.

Zapata *et al.* (2018) realizaram uma pesquisa documental sobre o papel do professor de Matemática na Colômbia em relação à *Early Algebra* nos currículos do *Educación Básica*. Eles formularam a seguinte pergunta de investigação: o que a literatura relata em relação à Álgebra inicial e ao papel do professor na sua inclusão no currículo? Para respondê-la, eles consultaram as bases de dados *Scopus*, *Google Scholar*, *Scielo*, *Dialnet*, *Springer* e ERIC e selecionaram 48 artigos relevantes dentre 68 pré-selecionados.

A partir da análise do material documental, Zapata *et al.* (2018) constataram que há uma escassez de experiências ou relatos de pesquisas no contexto colombiano que abordem a reflexão sobre a *Early Algebra*, o que implica a necessidade de criar espaços de reflexão em grupos de professores ou comunidades. Eles também observaram que não há orientações claras sobre como a Álgebra inicial pode ser integrada aos documentos curriculares colombianos, como os *Lineamientos Curriculares* e os *Estándares Básicos de Competencias* do MEN. Além disso, eles identificaram que o ensino da Matemática não é realizado com uma abordagem adequada que favoreça o raciocínio algébrico dos alunos. Nesse sentido, os pesquisadores reconheceram que a inclusão da Álgebra inicial no currículo é uma tarefa e um desafio, que depende tanto das instituições quanto do professor, e que está relacionada ao seu conhecimento e desenvolvimento profissional. Por fim, eles sugeriram que é urgente gerar espaços de reflexão para o professor sobre o ensino da Álgebra.

Os estudos sobre Álgebra nos anos iniciais apresentados neste bloco temático revelam uma concepção que valoriza o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos escolares, rompendo com a visão tradicional que restringe a Álgebra ao ensino nos níveis

mais avançados da escolaridade. A perspectiva de *Early Algebra* propõe que crianças são capazes de reconhecer padrões, formular conjecturas, generalizar relações e argumentar matematicamente, desde que inseridas em ambientes de aprendizagem que favoreçam essas práticas. As pesquisas destacam que o raciocínio algébrico pode emergir por meio de tarefas contextualizadas, da exploração de propriedades e da construção de significados, sendo fundamental o papel do professor como mediador desse processo. Além disso, apontam que os níveis de algebrização ajudam a identificar o grau de complexidade das atividades e a orientar a progressão do ensino.

3.3.2 Comunicações e a cultura

A *comunicação e a cultura* são dois conceitos que se relacionam de forma dinâmica e complexa na sociedade. Assim, neste bloco temático, apresentamos três pesquisas que abordam a comunicação e a cultura no âmbito da Educação Matemática, a partir de diferentes perspectivas e estratégias didáticas, são elas: a fotografia como recurso para fortalecer as habilidades de comunicação matemática (Tirado, Gualdrón e Ávila, 2019) e o ensino de pensamento variacional e sistemas algébricos em instituições indígenas da reserva Escopetera e Pirza, localizadas em Riosucio – Caldas (Guarumo, 2018).

O artigo de Tirado *et al.* (2019) reporta uma investigação que teve como propósito examinar a utilização da fotografia como ferramenta didática para promover a competência de comunicação matemática em discentes do nono ano de um estabelecimento colombiano, mediante a implementação de uma unidade didática fundamentada no pensamento variacional. A investigação se respaldou na teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2007) que sugere um modelo de interação entre o educando e o conhecimento por intermédio de um ambiente de aprendizagem, elaborado pelo docente, que contempla os conhecimentos prévios e incentiva a aprendizagem autônoma, levando em consideração aspectos como temas, regras de interação, materiais, ambiente, um meio e um procedimento. Desse modo, os autores conceberam a fotografia como um instrumento didático que viabilizou o delineamento de situações de ação, formulação e validação, para abordar a visualização e a representação gráfica do conceito de função, que é um tópico primordial do currículo de Matemática do nono ano (MEN, 1998).

A pesquisa foi realizada fundamentada em uma abordagem qualitativa, com um enfoque metodológico de investigativo-ação, baseada nas abordagens de Carr e Kemmis (1990) e Eisner (1992). A amostra foi formada por 36 alunos do 9º ano (14-17 anos) matriculados no ano letivo de 2017. O estudo seguiu quatro etapas: 1ª) diagnóstico; 2ª) planejamento e execução; 3ª) replanejamento da estratégia; e 4ª) apresentação dos resultados. O ponto de partida foi um

diagnóstico do nível da competência de Comunicação Matemática dos alunos por meio de uma prova tipo ICFES (são provas padronizadas aplicadas pelo Estado colombiano aos estudantes de 3º, 5º, 9º e 11º ano de escolaridade). Também, foi empregado o *diário pedagógico* como instrumento de registro das situações que ocorriam em sala de aula durante o processo e do avanço dos alunos no desenvolvimento das atividades. Em seguida, realizaram-se ações voltadas à melhoria dessa competência por meio de uma unidade didática composta por guias de aula.

De acordo com Tirado *et al.* (2019), os resultados sugerem que a fotografia pode ser um recurso didático para promover a comunicação matemática, pois possibilita relacionar o cotidiano com os conceitos matemáticos, bem como identificar e expressar regularidades e propriedades por meio da linguagem matemática. Os alunos que participaram da estratégia de ensino baseada na fotografia desenvolveram habilidades de comunicação matemática, que envolvem atividades como: descrever o que observaram nas imagens, reconhecer padrões, estabelecer relações entre grandezas, utilizar linguagem matemática para modelar situações, criar tabelas, diagramas e gráficos com números e expressões algébricas, fazer representações mentais e construir modelos com mapas conceituais e resolver situações de aplicação em outros conceitos.

Entre outros resultados da pesquisa, Tirado *et al.* (2019) encontraram evidências de que essa prática favorece a motivação dos alunos, tornando as aulas mais interessantes para eles. No entanto, a fotografia não é suficiente para garantir a aprendizagem. É preciso integrá-la a uma didática que estimule uma compreensão e construção autêntica de conceitos matemáticos. Além disso, os resultados indicam que a fotografia é um recurso que possibilita elaborar atividades nas quais o aluno relaciona a Matemática com o cotidiano, desenvolve conhecimento sobre diferentes objetos matemáticos e melhora habilidades e competências para resolver situações práticas e reais.

Guarumo (2018), por sua vez, relata uma experiência pedagógica na área de Matemática que visou desenvolver o raciocínio dos alunos da Instituição Educacional Florencia da Reserva Indígena Escopetera e Pirza em relação à variação e aos sistemas algébricos. Para isso, o autor utilizou problemas em contextos não matemáticos que desafiaram os estudantes a aplicar seus conhecimentos prévios e a construir novas estratégias de solução. O autor apresenta os resultados da experiência, salientando os avanços e as dificuldades dos alunos, bem como as implicações para o ensino e a aprendizagem da matemática.

Essa pesquisa adotou uma perspectiva qualitativa e descritiva, partindo de situações-problema em contextos não matemáticos. O objetivo foi explorar o pensamento variacional do

povo Embera de Caldas, para quem, o *território* é considerado tanto um direito fundamental como um pedagogo — no sentido do território como fonte de sabedoria —, pois nele se expressam e se aprendem valores e saberes culturais e sociais. O trabalho se desenvolveu em três momentos: 1º) experiência; 2º) exploração; e 3º) fundamentação e aplicação. Em cada um deles, foram propostas atividades de *inter-aprendizagem* — no sentido de compreender a que a aprendizagem ocorre junto com os outros — que envolviam processos como: identificar e reconhecer a variação em diferentes contextos, modelar e usar representações semióticas, elaborar, comparar e exercer procedimentos analíticos e relacionar o pensamento variacional com outros tipos de pensamentos. As atividades dos alunos foram analisadas em torno das quatro categorias seguintes: 1) identificação e reconhecimento da variação em diferentes contextos; 2) modelagem e utilização de representações semióticas; 3) a elaboração, comparação e exercício de procedimentos analíticos; e 4) relação do pensamento variacional com outros tipos de pensamentos.

O pesquisador observou que a estratégia de propor e resolver problemas em contextos não matemáticos foi muito eficaz para o ensino de Álgebra e estimulou o progresso, o interesse, o gosto e a participação dos estudantes indígenas. Ele argumenta que essa estratégia motivou os alunos a explorar os processos de pensamento relacionados à variação e aos sistemas algébricos, usando conceitos básicos como expressões, operações, produtos notáveis e fatoração, e como podem ser trabalhados de forma problematizada e articulada com a educação indígena. O autor ressalta que os estudantes ao se reconhecerem como parte do território e aprenderem com seus diferentes espaços valorizam o conhecimento dos outros. Assim, o ensino de Álgebra ganha um novo sentido, ao demonstrar sua aplicabilidade em situações contextuais e facilitar a aprendizagem dos alunos.

A relação entre Álgebra, comunicação e cultura, como apresentada por Tirado *et al.* (2019) e Guarumo (2018), amplia a concepção de Álgebra para além do formalismo, incorporando elementos do cotidiano, da identidade e da expressão cultural. Neste bloco, a Álgebra é concebida como linguagem que se constrói e se comunica em contextos culturais diversos, revelando sua dimensão social e expressiva. A utilização da fotografia como recurso didático evidencia como os estudantes podem relacionar conceitos algébricos com situações do cotidiano, desenvolvendo habilidades de comunicação matemática por meio de representações visuais e narrativas. Já as experiências em comunidades indígenas mostram que o ensino da Álgebra pode ser vivenciado como prática situada, articulada aos saberes locais e às formas de pensar o território.

3.3.3 Estudos no âmbito da Educação Superior

O tema abordado aqui abrange uma variedade de questões relacionadas à formação acadêmica e profissional dos estudantes universitários. Os artigos que compõem este bloco apresentam resultados de pesquisas sobre diferentes aspectos da educação matemática na *Educação Superior*, tais como: o processo de ensino-aprendizagem da solução de sistemas de equações lineares (Medina-Sandoval, 2019), as representações semióticas em torno do conceito de função em estudantes de engenharia (Prada, Hernández e Jaimes, 2017), o curso de Pré-cálculo apoiado na utilização do *software GeoGebra* para o desenvolvimento do pensamento variacional (Fiallo e Parada, 2014) e as dificuldades detectadas ao passar da Álgebra para o Cálculo na educação matemática (Sanabria, 2013). Esses artigos contribuem para a reflexão e a discussão sobre os desafios e as possibilidades da educação matemática no âmbito da *Educação Superior*.

O estudo de Medina-Sandoval (2019) investiga as soluções de equações lineares e suas implicações educacionais. O objetivo é identificar e analisar os erros e as dificuldades no processo de ensino-aprendizagem desse conteúdo. Para isso, foi realizada uma revisão documental, na qual os artigos selecionados foram agrupados em três categorias: caracterização do conteúdo, erros e dificuldades no processo de ensino-aprendizagem do conteúdo e educação matemática em geral e na área de Álgebra. Ressalta o autor que essa última categoria foi abordada para contextualizar o processo educativo dos alunos. A revisão documental foi feita a partir de uma busca sistemática em diversas bases de dados, como *Scopus*, *Gale*, *Google Scholar*, *Scielo* e *Science Direct*. Foram consultados 55 artigos, sendo que 5 foram excluídos por não se enquadrarem nas dimensões de análise.

Os resultados dessa pesquisa mostraram que muitos alunos enfrentam dificuldades para compreender e aplicar o conteúdo de sistemas de equações lineares. Segundo Medina-Sandoval (2019), isso se deve, em grande parte, à forma como esse conteúdo é ensinado nas escolas. Em vez de promover uma adequada compreensão dos conceitos e propriedades algébricas, os professores costumam se basear em procedimentos mecânicos e repetitivos que não favorecem o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

Além disso, o pesquisador também concluiu que um dos principais obstáculos que os alunos encontram nesse conteúdo é a tradução de problemas da linguagem natural para a linguagem simbólica da matemática, ou seja, a formulação de equações a partir de enunciados verbais. Isso requer o desenvolvimento de habilidades de leitura, interpretação e modelagem matemática que nem sempre são trabalhadas de forma efetiva pelos professores. Como afirma

Medina-Sandoval (2019, p. 23), “a maioria dos erros e dificuldades que os alunos apresentam se devem à falta de fundamentos matemáticos e de conceituação”.

Por isso, propõem que se fortaleça a formação algébrica dos alunos desde as séries iniciais, bem como que se promova o uso de novas metodologias e recursos pedagógicos para o ensino da solução de sistemas de equações lineares. Medina-Sandoval (2019) sugere, por exemplo, o uso de *softwares* educativos que permitem aos alunos explorar diferentes formas de resolver os sistemas, visualizar as soluções graficamente e verificar os resultados obtidos.

O artigo de Prada *et al.* (2017) apresenta parte de uma pesquisa sobre as representações semióticas no ensino do conceito de função no Cálculo Diferencial para estudantes de engenharia. Os autores buscam responder duas questões: 1) Qual a preferência dos professores ao articular diferentes registros de representação semiótica no ensino de funções? e 2) Como os alunos usam esses registros na aprendizagem do conceito de função? O objetivo da pesquisa é analisar as preferências dos alunos pelos tipos de registro (algébrico, gráfico, tabular, etc.) nas disciplinas de cálculo diferencial. O referencial teórico da pesquisa são os trabalhos de Duval (1993) e Hitt (2000), os quais defendem a importância da articulação coerente dos diversos registros de representação semiótica para o ensino de matemática.

A metodologia do estudo de Prada *et al.* (2017) tem um desenho quase-experimental e um nível descritivo-explicativo. O desenho quase-experimental visa controlar o máximo de variáveis que podem interferir nos resultados (como idade, gênero, estado civil, conhecimentos prévios, horários de aulas, salas de trabalho, etc.) e isolar o efeito da variável “metodologia de ensino” sobre a variável “desempenho acadêmico”. O nível descritivo-explicativo busca identificar todos os possíveis impactos das metodologias nos alunos. A amostra foi composta por estudantes do primeiro semestre da Faculdade de Engenharia da *Universidad Francisco de Paula Santander* (UFPS), em Cúcuta (Colômbia), que cursaram a disciplina Cálculo Diferencial no primeiro semestre de 2015 nos cursos de Engenharia de Sistemas (grupo A), Engenharia Eletromecânica (grupo B) e Engenharia Eletrônica (grupo C). Como instrumentos de produção de dados foram aplicados pré-teste e pós-teste.

A análise dos testes, conforme Prada *et al.* (2017), aponta que o modelo tradicional que privilegia a utilização excessiva do registro de representação algébrica e, conseqüentemente, visa a utilização do registro gráfico através da representação no plano cartesiano, passando pela representação tabular de valores desfavorece a transferência entre os diferentes registros de representação semiótica, o que dificulta a compreensão do conceito. Isso, por sua vez, limita a capacidade dos alunos de resolver problemas rotineiros e não rotineiros. Também, os pesquisadores destacam que os alunos chegam à universidade com conceitos matemáticos

imprecisos ou equivocados, que prejudicam o seu aprendizado. Além disso, os pesquisadores indicam que os alunos têm mais dificuldade para fazer a transferência do registro gráfico para o algébrico, haja vista que desconhecem alguns princípios fundamentais para essa operação, como os de deslocamento horizontal, vertical, reflexão e simetria. De um modo geral, os pesquisadores evidenciam no grupo de alunos que fizeram parte da investigação que as suas respostas são normalmente dadas no registro em que o exercício foi proposto, ou o registro algébrico é comumente utilizado para justificá-lo, possivelmente porque é o registro que mais utilizaram no seu processo de formação acadêmica durante a *Educación Básica e Média*.

No artigo de Fiallo e Parada (2014), são relatados os resultados iniciais de um curso de Pré-cálculo, proposto como uma solução preventiva para o problema da evasão e da reprovação nos cursos de Cálculo Diferencial na *Universidad Industrial de Santander*. O objetivo principal desse curso é fornecer ferramentas para desenvolver o “pensamento variacional” dos estudantes de primeiro nível universitário, a fim de prepará-los para o nível matemático exigido pelo curso de Cálculo Diferencial. O curso foi aplicado a 300 alunos do primeiro semestre de 2013 dos cursos de Engenharia e Ciências da *Universidad Industrial de Santander* (na Colômbia), que tiveram os menores resultados em um teste de caracterização. O projeto envolve a participação de professores de escolas e universidades e investigadores em Educação Matemática.

Este projeto foi dividido em três etapas: planejamento, execução e avaliação. Na primeira, as atividades foram planejadas para estimular a resolução de problemas com raciocínio, comunicação, representação, conexões e tecnologia, focando nas ideias de variação e acumulação do Cálculo. Na segunda, o curso foi realizado em quatorze encontros de quatro horas cada, em laboratórios de informática, com os alunos trabalhando individualmente ou em duplas e o professor orientando, auxiliando e sistematizando o conhecimento. Um dos recursos tecnológicos utilizados foi o *GeoGebra*, um *software* livre que permite criar e manipular objetos geométricos e algébricos, facilitando a visualização, exploração, análise e validação de ideias matemáticas. Na terceira, a avaliação foi integrada ao processo de ensino e aprendizagem, utilizando diversos indicadores da aprendizagem dos alunos.

Fiallo e Parada (2014) defendem que os professores devem partir das preocupações e perguntas dos alunos sobre os conceitos básicos de Cálculo Diferencial. Eles propõem que os estudantes sejam estimulados a: entender a noção de mudança e variação; reconhecer as variáveis e diferenciá-las das incógnitas; compreender as diferentes representações e suas relações; comunicar e argumentar matematicamente; e utilizar as tecnologias como instrumentos de exploração, conjectura e verificação das ideias matemáticas. Segundo os autores, o aspecto inovador desse projeto é a formação de uma equipe de trabalho composta por

professores de *Educación Média e Superior*, pesquisadores em educação matemática e gestores que buscam solucionar um problema comum e que acreditam que o trabalho colaborativo é mais produtivo e que pode gerar melhores resultados. Assim, eles consideram que o projeto pode criar uma comunidade de prática que visa contribuir para o avanço da educação matemática e, ao mesmo tempo, ajudar a reduzir os índices de evasão e reprovação nos primeiros semestres universitários.

Sanabria (2013) reflete sobre o problema da transição da Álgebra para o Cálculo, que afeta muitos estudantes de *Educación Média e Superior*. A autora aponta que o cenário habitual do trabalho inicial de Cálculo é marcado por dificuldades como: repetição, abandono escolar, incompreensão de conceitos, raciocínio inadequado e pouca competência algébrica na resolução de novos problemas. Além disso, ela critica os cursos que são desenvolvidos mecanicamente, com ênfase em trabalhos algorítmicos e algébricos, sem levar em conta o raciocínio e os conceitos do Cálculo.

Sanabria (2013) destaca o diagnóstico realizado por Artigue (1998), em que afirma que as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo costumam focar apenas nos aspectos internos dessa disciplina, sem considerar o processo que a precede. Além disso, ela sugere que se investigue a Transição Álgebra-Cálculo, pois não há uma passagem natural ou contínua entre esses dois campos do conhecimento, mas um desenvolvimento caótico, marcado por uma “ruptura”. Por isso, autora defende que é preciso identificar, compreender e descrever rupturas ou continuidades, obstáculos, conflitos ou facilitadores na transição do pensamento algébrico para o pensamento analítico e, portanto, compreender como se estabelecem e se isso contribuirá de fato para os problemas que professores e alunos vivenciam diariamente com o Cálculo. Ainda acrescenta, que essa investigação poderia contribuir para uma melhor compreensão dos conceitos da análise.

Sanabria (2013) ressalta que, embora a ruptura numérico-algébrica tenha sido identificada e tenha gerado muitas pesquisas que contribuem para o entendimento do pensamento numérico e algébrico, o mesmo não ocorreu com a “ruptura Álgebra-Cálculo”: *não há uma variedade de pesquisas sistemáticas*, nem posições paradigmáticas sobre o que diferencia esses dois pensamentos, nem como construir a ponte, preparar o caminho para passar de um para o outro; também não se tem consciência da importância de estudar essa transição como uma maneira, como uma forma de compreender os problemas de compreensão do Cálculo. Portanto, a pesquisa na passagem, transição ou *ruptura da Álgebra escolar* para o Cálculo diferencial, e as dificuldades, conflitos ou obstáculos epistemológicos, semióticos,

didáticos ou culturais que ocorrem nessa transição, constitui um ponto crucial nas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do Cálculo na *Educação Média* e na *Educação Superior*.

Por último, podemos mencionar que, para Sanabria (2013), a linguagem, o raciocínio, a lógica, a alternância dos quantificadores e o tratamento dos signos utilizados no Cálculo diferem significativamente do que se faz na Álgebra. Essa diferença estabelece uma “ruptura” que dificulta a transição entre esses dois campos da matemática. Nesse sentido, a autora propõe uma pesquisa na Transição Álgebra-Cálculo como forma de impactar positivamente a aprendizagem do Cálculo. No entanto, para ensinar os conceitos de Cálculo de forma efetiva, é preciso considerar que eles se baseiam em noções mais básicas que devem ser compreendidas e articuladas previamente pelos estudantes. Essa compreensão e articulação são necessárias, mas não suficientes para o domínio do Cálculo.

Os estudos no âmbito da *Educação Superior*, tratados neste bloco temático, revelam tensões entre o domínio técnico da Álgebra e sua compreensão conceitual. A resolução de sistemas de equações lineares, por exemplo, é frequentemente abordada de forma mecânica, o que limita a compreensão da Álgebra como linguagem de modelagem e expressão. As investigações sobre representações semióticas mostram que a preferência por registros algébricos pode restringir a articulação entre diferentes formas de pensar matematicamente, dificultando a construção de significados. O uso de tecnologias digitais, como *softwares* interativos, aponta para novas possibilidades de experienciar o pensamento variacional, favorecendo a exploração e a visualização de ideias algébricas em ambientes mais dinâmicos. Destaca-se, nesse contexto, o trabalho de Sanabria (2013), que propõe a análise da ruptura entre Álgebra e Cálculo como um fenômeno epistemológico e didático central. Essa ruptura evidencia que muitos estudantes não conseguem transitar entre os dois campos de forma fluida, revelando obstáculos na internalização dos conceitos e na construção de pontes entre diferentes formas de raciocínio matemático.

3.3.4 Intervenções pedagógicas

As *intervenções pedagógicas* são ações planejadas e executadas por educadores com o objetivo de promover a aprendizagem dos alunos em determinados conteúdos ou habilidades. Neste bloco, apresentamos alguns exemplos de intervenções pedagógicas realizadas no contexto do ensino de Matemática, especialmente no que se refere ao pensamento variacional e ao pensamento algébrico. Os artigos selecionados relatam experiências de ensino em salas de aula que abordam questões como as atividades pedagógicas (Maury, Palmezano e Cárcamo, 2012; Pinilla, 2013; Gómez, 2013; Contreras-Jaimes, Martinez-Aguilar e Prada-Núñez, 2020);

as diferenças de gênero (Duran-Lamus, Hernández-Suárez e Prada-Núñez, 2020); as atividades de reforço (Suárez, Rojas e Parada, 2013; Padilla e Mayoral, 2020) e as ferramentas tecnológicas (Cortés, 2011; Rincón, 2013; Martínez-López e Gualdrón-Pinto, 2018) no ensino de matemática.

O artigo de Maury *et al.* (2012) apresenta uma pesquisa que propõe uma metodologia adaptada ao contexto da *Institución Educativa Distrital Comunitaria IEDC-Octavio Paz*, para que os professores do *Educación Básica Primaria* possam promover o desenvolvimento do pensamento variacional nos seus alunos. A metodologia consiste em um sistema de tarefas que estimula a autonomia dos alunos no seu processo de aprendizagem, baseado no marco teórico de V. V. Davíдов, que considera a tarefa docente como um meio para aprender a resolver tarefas concretas específicas, relacionadas a problemas de um determinado contexto. Assim, as tarefas docentes são entendidas, por esse autor, como um meio para a construção do sistema cognitivo-instrumental necessário para a resolução de problemas, próprios de um determinado contexto.

Esse estudo adota o paradigma empírico-analítico e explora o conhecimento dos professores sobre os *Lineamientos Curriculares* e as estratégias que utilizam para abordar os diferentes tipos de pensamento mencionados nesses documentos, mas colocando foco no pensamento variacional. A pesquisa contou com a participação de 31 professores de Matemática e 48 alunos de quinto ano de dois cursos de uma instituição no Distrito de Barranquilla-Colômbia. Os grupos controle e experimental foram escolhidos de forma aleatória e receberam um tratamento distinto, seguindo um desenho quase experimental. A intervenção consistiu em atividades para o desenvolvimento do pensamento variacional, que se tornaram mais complexas ao longo do processo, e foram mediadas pelas fases de orientação, execução e controle.

Maury *et al.* (2012) afirmam que a fase de controle é fundamental para a resolução das tarefas escolares, pois ela permite avaliar o desenvolvimento da habilidade e competência proposta, bem como a aplicação crítica do conhecimento adquirido em relação ao conhecimento prévio. Além disso, essa fase ajuda a evitar erros de cálculo que podem ocorrer por descuido na execução. O sistema de tarefas para o desenvolvimento do pensamento variacional nos alunos do 5º ano contribui para o aumento do nível de desempenho nos testes aplicados, conforme evidenciado pelos diferentes resultados do tratamento. Esses resultados mostram o progresso dos alunos na resolução de problemas que envolvem variação e mudança, relacionados a inferências de padrões de variação, interpretação de variações por meio de gráficos, identificação de variáveis, cálculo de grandezas desconhecidas e modelagem.

Em uma escola distrital de Bogotá, Pinilla (2013) realizou uma intervenção com alunos que se destacavam pelo seu excelente desempenho acadêmico. O propósito da intervenção foi analisar como esses alunos compreendiam os *sentidos das letras* em situações numéricas. Esse estudo se justifica pela escassez de pesquisas voltadas para os alunos que demonstram habilidades acadêmicas superiores, em contraste com a abundância de estudos sobre os alunos que enfrentam dificuldades de aprendizagem. Os aspectos teóricos que sustentam a intervenção envolveram o problema *da letra* no contexto da Álgebra escolar, especialmente a transição da Aritmética para a Álgebra. Nessa transição, a letra assume vários significados, que devem ser explicitados na sala de aula, pois fazem parte dos conceitos mínimos que as crianças devem mobilizar na resolução de situações algébricas. Esses significados, por sua vez, permitem determinar, segundo Küchemann (1981), o nível de compreensão do aluno sobre Álgebra.

O instrumento aplicado por Pinilla (2013) foi uma atividade proposta pelo professor do seminário Transição Aritmética-Álgebra do Mestrado em Educação da *Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. A atividade é composta por 6 questões a serem desenvolvidas sem limite de tempo. A intervenção foi realizada com 8 alunos com bom desempenho acadêmico do 8º ao 11º ano (dois por nível), em uma escola pública da cidade de Bogotá, Colômbia.

No artigo de Pinilla (2013), os resultados das análises foram apresentados como reflexões sobre o que era esperado e o que aconteceu na aplicação de uma proposta didática. A autora defende que para construir um objeto matemático que rompa com o que já está estabelecido, é preciso localizá-lo dentro de uma totalidade matemática que faça sentido. Além disso, é preciso ter uma atitude tematizadora, que envolva questões epistemológicas e metamatemáticas, como práticas, não como referências enciclopédicas.

Um dos pontos que a autora questiona é o preconceito dos professores em relação às dificuldades dos alunos na interpretação de letras em contextos algébricos. Ela se pergunta quando os alunos foram ensinados sobre isso e qual a experiência que eles têm com esses símbolos. Pinilla (2013) manifesta que os alunos aprendem a fazer operações e a lidar com diferentes representações e conjuntos numéricos, mas não compreendem o significado das letras na Álgebra. Por isso, ela critica a naturalização das letras como variáveis, constantes ou incógnitas, sem levar em conta as concepções dos alunos.

O trabalho de intervenção de Gomez (2013) tem como objeto de estudo as características que ocorrem no desenvolvimento do pensamento variacional associado aos processos de mudança e variação, num grupo de alunos do nono ano. O autor se questiona sobre quais são os elementos presentes nesse tipo de pensamento quando os alunos abordam tarefas que envolvem variação e mudança em diferentes contextos. O marco de referência se baseia nos

Lineamientos Curriculares e nos *Estándares Básicos de Competencias* que definem o pensamento variacional como uma forma dinâmica de pensar, que busca produzir mentalmente sistemas que relacionem suas variáveis internas de forma que elas covariem de acordo com os padrões de covariação de quantidades de mesma ou diferente magnitude nos subprocessos da realidade. Além disso, o autor adota a perspectiva de Carlos Vasco, que complementa essa definição.

A intervenção foi realizada com alunos do 9º ano de uma escola particular de Bogotá, Colômbia. Para analisar os dados da intervenção em sala de aula, foram utilizadas notas de campo, folhas de trabalho dos estudantes e entrevistas semiestruturadas. A coleta desse material forneceu elementos para realizar a sistematização da experiência e a reflexão sobre a prática educativa. O trabalho foi desenvolvido nas seguintes fases: Revisão da literatura; Desenho da tarefa; Implementação das tarefas; Coleta de Dados; Seleção de dados; e Análise e interpretação dos dados.

Gomez (2013) argumenta que, diante dos achados das pesquisas sobre o pensamento variacional, é necessário; aprofundar o seu estudo e buscar caracterizar como ele se desenvolve na escola; e elaborar e implementar uma sequência de atividades que envolvam elementos de mudança e variação. O autor também sugere que o ensino do pensamento variacional na escola deve partir de atividades que explorem a ideia de mudança, variação e modelagem de processos, visando a construção de significados e não a simples formalização de conceitos, pois os processos de modelagem estão intimamente ligados à quantificação da mudança e à análise da variação.

O artigo de Contreras *et al.* (2020) trata do desenvolvimento do pensamento variacional em estudantes da *Educación Básica* por meio de um projeto de intervenção pedagógica. O objetivo do projeto era avaliar o efeito de algumas estratégias didáticas para estimular esse pensamento nos alunos do quinto ano. A metodologia utilizada foi quantitativa e descritiva, baseada em testes e questionários aplicados aos participantes.

A intervenção foi aplicada a um grupo de alunos matriculados no ano de 2020 na *Institución de Ensino Guillermo Cote Bautista* do município de Toledo, Departamento Norte de Santander-Colômbia. O trabalho foi realizado em três etapas. Na primeira, fez-se uma análise preliminar dos antecedentes sobre o pensamento variacional e sua relação com o currículo de Matemática da instituição e com as diretrizes do *Ministerio de Educación Nacional* da Colômbia. Na segunda, aplicou-se uma prova com 21 questões aos alunos para identificar suas dificuldades na área de Matemática, especialmente nos aspectos do pensamento variacional. Na terceira, planejaram-se quatro intervenções pedagógicas que foram aplicadas semanalmente aos

alunos, envolvendo atividades como o estudo de padrões, sistemas de representação, abstração e generalização. Essas atividades foram elaboradas considerando o contexto dos alunos e utilizando materiais concretos, também se desenharam as atividades de intervenção pedagógicas modo que se integram a um projeto transversal da Instituição.

Em suas conclusões, Contreras *et al.* (2020) manifestam que os alunos demonstraram um avanço nas habilidades matemáticas, especialmente no pensamento variacional, graças à conexão entre o ensino e a aprendizagem e o contexto em que vivem. Isso facilita a compreensão da relevância e do uso da Matemática em situações reais. Além disso, o uso de materiais concretos, simples e interessantes, estimula o interesse e a participação dos alunos. Os autores sugerem que os recursos e espaços disponíveis na instituição sejam melhor aproveitados, para que os resultados nas avaliações locais também reflitam o desenvolvimento de competências de pensamento variacional, que serão úteis nos níveis posteriores da *Educação Básica e Média*.

O artigo de Duran-Lamus *et al.* (2020) relata os achados de uma pesquisa que visou identificar as dificuldades e as habilidades dos estudantes do décimo ano de uma escola particular na solução de problemas que envolvem Álgebra. Os autores analisaram as respostas dos alunos a uma prova de Matemática e observaram os erros e os acertos mais frequentes. A partir disso, propuseram algumas estratégias pedagógicas para melhorar o desempenho dos alunos nessa área.

A pesquisa teve uma abordagem quantitativa, de caráter descritivo e transversal. A população foi formada por todos os alunos matriculados em 2019 de uma instituição de ensino de San José de Cúcuta, Colômbia. A amostra foi composta por 40 alunos, selecionados por conveniência, com idade média de 15 anos, que responderam a um questionário com 15 itens sobre situações cotidianas ou de interesse geral que envolviam vários registros semióticos. Os resultados mostraram que os alunos apresentaram um índice de erro de 54% na articulação entre situações verbais e gráficos bidimensionais que relacionavam variáveis como Tempo, Velocidade, Temperatura ou Duração. Dentre os pontos fortes, os autores relatam que pelo menos 75% dos alunos conseguiram fazer essa articulação corretamente em alguns casos.

Os resultados do estudo se mostraram evidentes dificuldades em situações associadas à aplicação da decomposição fatorial na solução de equações e no estabelecimento de relações de ordem entre quantidades expressas em diversas unidades de medida. Além disso, os autores mostraram que não houve diferenças significativas entre os gêneros na pontuação total obtida por cada aluno em situações que envolviam a decomposição fatorial, a solução de equações e a comparação de quantidades com diferentes unidades de medida. No entanto, verificaram que a

maioria dos informantes (70%) apresentou um nível baixo de desempenho, enquanto apenas 27% alcançaram o nível médio. As mulheres se concentraram no nível baixo e os homens no nível médio, mas nenhum dos gêneros atingiu o nível formal necessário para uma boa compreensão dos conceitos. Esses dados revelam que os alunos ainda têm dificuldades em processos que deveriam estar consolidados, pois fazem parte do currículo há pelo menos dez anos.

O artigo de Suarez *et al.* (2013) investiga como o desenvolvimento de competências de comunicação em alunos do 11º ano pode influenciar o seu pensamento algébrico. Os autores constataram que muitos estudantes universitários tinham dificuldades em compreender as afirmações algébricas e não apenas em aplicar os algoritmos corretamente. Para superar esse problema, eles elaboraram e implementaram um plano de intervenção baseado em estudos de caso que permitiram identificar e superar algumas das dificuldades dos alunos na comunicação matemática. Os autores defendem que a competência na prática matemática depende da competência no contexto cultural e social em que ela se realiza, pois envolve a partilha de significados e valores reconhecidos nesse contexto. Assim, o aprendizado da Matemática e a qualidade da comunicação estão intimamente relacionados e as interações positivas ou negativas que ocorrem nesses processos comunicativos podem favorecer ou dificultar o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Metodologicamente, o projeto teve foco nas habilidades de comunicação dos alunos de 11º ano em relação à Álgebra e à variação, usando uma abordagem qualitativa. Os dados coletados nas oficinas de intervenção foram analisados de acordo com as categorias de comunicação definidas previamente. A intervenção consistiu em oito sessões de trabalho, baseadas em uma prova diagnóstica aplicada em 2012 a 162 alunos, que continha 19 questões (10 sobre Álgebra e 9 sobre variação). A prova serviu para identificar as dificuldades e os avanços dos alunos nessas áreas. A pesquisa foi realizada com alunos voluntários de uma escola pública de Floridablanca (Santander-Colômbia), que cursavam o 11º ano.

Nos resultados, Suarez *et al.* (2013) manifestaram que as respostas dos alunos à prova diagnóstica inicial e às oficinas iniciais revelam dificuldades dos alunos em abordar situações-problema (embora o tema já tenha sido desenvolvido curricularmente) devido ao seu baixo conhecimento da linguagem algébrica. No desenvolvimento das atividades do plano de intervenção, observaram que os alunos assumem uma postura ativa, demonstrando interesse em superar as suas dificuldades. A resolução das atividades propostas (que respondem às diferentes competências mencionadas) requer processos comunicativos de diferentes tipos.

Padilla e Mayoral (2020) realizaram um estudo para caracterizar o impacto da tutoria acadêmica no desempenho acadêmico de alunos do oitavo ano, na aprendizagem de Álgebra, em uma escola distrital de Barranquilla (Colômbia). O estudo foi orientado pelas seguintes perguntas de pesquisa: qual o impacto da tutoria acadêmica no desempenho acadêmico de alunos do oitavo ano na aprendizagem de Álgebra? Quais são as dificuldades que os alunos do oitavo ano enfrentam na aprendizagem de Álgebra? Quais são os fatores que determinam se os alunos do oitavo ano necessitam de tutores acadêmicos? Como é a formação que os alunos do oitavo ano recebem em tutoria extracurricular na aprendizagem de Álgebra?

Para dar conta dos questionamentos anteriores, os autores adotaram uma metodologia qualitativa, descritiva e interpretativa, que visa identificar e analisar as propriedades e características relevantes do fenômeno em questão. Os instrumentos de coleta de dados foram entrevistas realizadas aos seguintes participantes: professor de Álgebra, pais, alunos e tutor acadêmico; além de observações não participantes do professor de Álgebra e teste diagnóstico aplicado aos alunos. Os dados foram organizados e categorizados de acordo com os interesses específicos dos pesquisadores, considerando os pontos fortes, as necessidades e as perspectivas dos diferentes atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem de Álgebra.

De acordo com Padilla e Mayoral (2020), o estudo mostrou que a tutoria acadêmica é uma ação e uma ferramenta que busca apoiar os estudantes que enfrentam desafios educacionais em seu processo de aprendizagem. No entanto, essa tutoria deve ser feita por professores qualificados, pois pessoas sem formação adequada podem ajudar a estimular a atitude motivacional e afetiva do aluno, mas não a aprimorar suas competências matemáticas. A pesquisa também revelou que os alunos do oitavo ano não conseguiram superar totalmente suas dificuldades acadêmicas em Álgebra, mesmo com a oferta de tutoria acadêmica extracurricular, o que indica que esse acompanhamento não deve ser pontual, mas contínuo, e envolver não só os professores, mas também os pais. Os resultados obtidos na investigação sugerem que as escolas precisam de espaços de reforço nos quais os alunos com dificuldades de aprendizagem em qualquer área possam avançar e esclarecer as dúvidas e questões que surgem nas aulas. Além disso, ficou evidente, na análise das informações coletadas, que os alunos não têm apenas necessidades acadêmicas, mas também necessidades afetivas e emocionais, que interferem no desenvolvimento de seus conhecimentos na disciplina em questão.

Cortes (2011) relata a experiência de implementar atividades com estudantes universitários usando ferramentas *Web 2.0* que foram pesquisadas na internet. O objetivo consistiu em aplicar essas ferramentas em processos de formação, não como elemento central da didática, mas como recurso complementar ou auxiliar no processo de deformação, no que se

refere ao pensamento variacional. Para isso, ele buscou, na rede materiais que apoiassem o desenvolvimento dos diferentes, temas relacionados ao pensamento numérico e algébrico no curso de Matemática Fundamental. Ele criou um *Wiki*, no qual armazenou os materiais encontrados na internet e alguns *PHPWebQuest*, usando os materiais selecionados para desenvolver os temas correspondentes. Ele também criou um *Blog* pelo qual os alunos acessavam o material do curso. O objetivo geral era estabelecer o uso de TICs que favorecessem o desenvolvimento do pensamento lógico matemático nos alunos do primeiro semestre de Matemática Fundamental da *Fundación Universitaria Panamericana*.

A abordagem da intervenção foi de caráter exploratório e utiliza recursos digitais para facilitar a aprendizagem de matemática. A pesquisa teve como população 120 estudantes de Finanças e Relações Internacionais que cursavam Matemática Fundamental na *Fundación Universitaria Panamericana*, em dois turnos. O estudo foi dividido em duas fases: na primeira, foram definidos os referenciais teóricos e selecionados materiais online sobre o tema (exercícios, problemas, vídeos explicativos) e ferramentas *Web 2.0* para organizar as informações, como *Wiki* e *WebQuest*; na segunda, foi realizada a experiência de uso dos materiais e uma avaliação da satisfação dos estudantes com o material.

De acordo com os resultados apresentados por Cortes (2011), os alunos receberam muito bem o material proposto, como vídeos e links, com um percentual de aceitação de 80%. Essas ferramentas *Web 2.0* aumentaram o interesse pelo assunto, pois facilitaram a expressão dos alunos. Além disso, os resultados estatísticos mostraram que os alunos não só compreenderam melhor os diferentes temas, tendo a oportunidade de assistir aos vídeos quantas vezes fossem necessárias e realizar as explicações e as tarefas, mas também se sentiram mais motivados para aprender.

Rincón (2014) realizou um estudo para identificar e melhorar os processos cognitivos dos estudantes do nono ano que envolvem o raciocínio algébrico, usando uma sequência didática baseada em recursos TIC que foram encontrados e escolhidos na internet com critérios analíticos. A autora considerou várias questões que orientam o planejamento, a execução e a avaliação de qualquer atividade de ensino-aprendizagem, tais como: o quê? como? quando? com quê? para quem? por que ensinar? Essas questões foram abordadas nas seções sobre raciocínio algébrico para o nono ano, que fundamentaram a sequência didática proposta. A revisão conceitual foi feita seguindo quatro abordagens: 1) ensino de Álgebra: níveis cognitivos, dificuldades ou erros na aprendizagem de Álgebra, feedback; 2) recursos didáticos de Álgebra, 3) recursos tecnológicos de apoio aos processos de aprendizagem: ambientes de

aprendizagem apoiados em tecnologia e objetos virtuais de aprendizagem e finalmente, 4) educação matemática em situações de conflito social e político.

O estudo apresenta uma proposta de investigação-ação, baseada em quatro etapas (algumas simultâneas): diagnóstico do contexto, planejamento, execução e avaliação. A população envolvida no estudo foi um grupo de estudantes do nono ano, com idades entre 12 e 18 anos. Para examinar em profundidade o processo e o progresso de uma amostra de alunos, foi selecionado um grupo de 4 homens e 2 mulheres. Eles foram escolhidos buscando ter dois alunos de cada nível de desempenho em matemática, alto, médio e baixo, após a aplicação de um teste inicial. A intervenção ocorreu em 12 sessões. O objetivo do uso do recurso principal de TIC é auxiliar os alunos a representar visualmente conceitos matemáticos, de modo a realizarem manipulações ou modelagens de algumas situações e objetos. Além disso, buscou-se que os alunos fizessem conjecturas, realizassem testes e finalmente construíssem generalizações. A intervenção foi desenvolvida com o tema “equações simples”.

O estudo de Rincón (2014) mostrou as mudanças positivas que os alunos tiveram no desenvolvimento de habilidades de raciocínio algébrico. Essas mudanças foram analisadas em quatro categorias: recursos TIC, processos de concepção e implementação, impacto na aprendizagem e no ensino e contexto social. O uso de recursos tecnológicos trouxe vários benefícios para a aprendizagem, pois com as simulações, os alunos exploraram conjecturas e chegaram a conclusões sobre equivalência e problemas com equações lineares; na representação de equações, os lineares foram os que mais aperfeiçoaram o desempenho dos estudantes. As ferramentas tecnológicas deram um elemento concreto para os alunos dialogarem com seus colegas e professor. Também, os recursos tecnológicos deram um feedback diferenciado, tanto pelo próprio recurso quanto pelo blog de cada aluno.

Martinez-Lopez e Gualdron-Pinto (2018), situados na área de matemática, investigaram o desenvolvimento do pensamento variacional em alunos do nono ano (com idades de 14 a 17 anos) usando sequências didáticas mediadas com as TIC. O objetivo foi fortalecer a competência de comunicação dos alunos no contexto da variação e mudança. O estudo seguiu três etapas: um diagnóstico inicial para avaliar o nível de pré-conhecimento dos alunos em pensamento aritmético e variacional; uma intervenção com as sequências didáticas adaptadas ao plano institucional da área; um diagnóstico final para medir o nível alcançado pelo grupo de alunos participantes.

O estudo se baseia teoricamente em três conceitos: pensamento variacional (este pensamento é orientado pelos *Lineamientos Curriculares* do MEN, em que enfatizam a importância de explorar as relações entre as variáveis em diferentes contextos.); o uso das TIC

(tomando como referente o trabalho de Villa-Ochoa e Ruiz (2010), que propõem uma abordagem de um *pensamento coletivo de humanos-com-mídia*, para os quais a cognição é uma atividade social, e a construção do conhecimento envolve ferramentas, dispositivos, artefatos e meios; as sequências didáticas, que são outro aspecto considerado neste estudo, que foram planejadas de acordo com os critérios de Diaz-Barriga (2013), que define sequências como uma organização das atividades de aprendizagem que serão realizadas com os alunos e para os alunos, com o propósito de criar situações que lhes possibilitem desenvolver uma aprendizagem significativa.

O estudo se enquadra numa abordagem qualitativa com metodologia de investigação-ação baseada no modelo desenvolvido por Kemmis (1998). Foi realizado um estudo de caso com alunos de *Educação Média* que participaram de uma intervenção pedagógica baseada em uma sequência didática. A pesquisa foi realizada durante os dois primeiros períodos do ano letivo de 2018, na *Escola Integrada Juan Atalaya*, na cidade de Cúcuta (Colômbia). A população em estudo foi de 142 alunos do nono ano. A amostra em que foi aplicado o instrumento de avaliação foi de 33 alunos do 9º ao 11º ano. Com base nos resultados do diagnóstico, determinou-se desenvolver sequências didáticas mediadas com TIC que fortalecessem: habilidades de comunicação, habilidades de raciocínio abstrato e habilidades de interpretação e resolução de problemas em alunos do nono ano.

A partir da análise dos dados coletados, Martinez-Lopez e Gualdron-Pinto (2018) evidenciaram que os alunos exploraram diferentes aspectos da variação, tais como a covariação, a invariância e a dependência funcional, e que as TIC contribuíram para facilitar esse processo. A sequência didática proporcionou situações de aprendizagem significativa, em que os alunos articularam os conceitos matemáticos com os seus conhecimentos prévios e com o contexto da atividade. Além disso, os resultados indicam que a intervenção provocou mudanças significativas no grupo de alunos em relação ao pensamento variacional. A proposta implementada valorizou o uso do livro didático do aluno como um recurso positivo, integrando as TIC disponíveis no desenvolvimento das sequências de ensino, o que resultou em melhores ambientes de aprendizagem. A mediação com as TIC foi muito produtiva como elemento de feedback, em que as avaliações aplicadas foram discutidas com os alunos, buscando identificar as dificuldades que impediam o sucesso na resposta a cada questão.

As intervenções pedagógicas descritas neste bloco revelam uma concepção de Álgebra como prática formativa, construída na interação entre sujeitos, tarefas e contextos. Ao promover o pensamento variacional e algébrico por meio de atividades planejadas, estratégias diferenciadas e recursos tecnológicos, essas experiências mostram que a Álgebra pode ser

abordada como linguagem de construção de sentido. A atenção às diferenças de gênero, às necessidades de reforço e à mediação digital amplia as possibilidades de aprendizagem, evidenciando que o ensino da Álgebra envolve dimensões cognitivas, afetivas e sociais que se manifestam nas vivências concretas dos estudantes. A concepção de Álgebra como prática situada emerge dessas experiências, em oposição à visão tradicional e abstrata. Esses relatos são valiosos para compreender como os professores e alunos significam a Álgebra em suas interações, como ela é incorporada nas suas rotinas.

3.3.5 Modelagem e a Geometria

A Modelagem e a Geometria se relacionam de forma dinâmica e criativa. A modelagem permite representar situações reais ou imaginárias por meio de linguagens matemáticas, como a Geometria, a Álgebra, o Cálculo, entre outras. A Geometria, por sua vez, oferece recursos visuais e espaciais para explorar e compreender as propriedades e relações dos objetos modelados. Nesse contexto, os artigos que compõem este tema abordam diferentes aspectos da modelagem e da geometria no ensino e na aprendizagem da Matemática, desde a *Educação Básica* até a *Educação Superior*, utilizando diversas ferramentas tecnológicas e metodológicas. Os temas abrangem desde o pensamento variacional e covariacional (Ordóñez-Ortega, Gualdrón-Pinto, Amaya-Franky, 2019), as funções trigonométricas (Tavera-Acevedo e Villa-Ochoa, 2013; Molina-Toro, Villa-Ochoa, Suárez-Tellez, 2018), a fatoração, até o uso de *softwares* livres e manipuladores virtuais (Pastran e Pinzon, 2015; Nuñez e Sanchez, 2016; Leon, 2017). Os autores apresentam resultados de pesquisas e experiências didáticas que contribuem para o avanço do conhecimento e da prática pedagógica nesse campo.

No artigo de Molina-Toro *et al.* (2018), os autores apresentam os resultados de um estudo qualitativo que explorou como um grupo de estudantes interpretou algumas funções trigonométricas a partir da modelagem de fenômenos de variação. Para isso, eles se basearam no construto teórico Seres-Humanos-com-Mídia, de Borba e Villarreal (2005), que propõe uma visão da modelagem como experimentação-com-gráficos-e-tecnologia. Nessa perspectiva, a tecnologia tem um papel ativo na produção de conhecimento matemático. Esse construto oferece uma visão epistemológica, pois sugere outros significados para a forma como os alunos aprendem matemática em relação à modelagem e às tecnologias.

Esse estudo apresenta uma pesquisa qualitativa que investigou como quatro estudantes de *Educação Média* desenvolveram o pensamento variacional ao modelar situações de variação com o uso de simulações computacionais. Os dados foram obtidos a partir de entrevistas, áudios e vídeos que registraram o trabalho dos alunos com três simulações diferentes. A análise dos

dados revelou que os ambientes de modelagem baseados na experimentação-com-gráficos-e-tecnologia favoreceram a quantificação do movimento pelos alunos, o que contribuiu para a construção de conhecimento matemático. O estudo também aponta algumas implicações para o ensino de modelagem na Educação Matemática em sala de aula.

Molina-Toro *et al.* (2018) apresentam resultados empíricos que mostram que os alunos podem desenvolver significados matemáticos ao participarem de um ambiente de modelagem, como a exploração de gráficos e tecnologia. Os alunos envolvidos na pesquisa construíram conhecimentos matemáticos relacionados a situações de movimento. No entanto, esse conhecimento não foi apenas uma construção individual dos alunos, mas uma emergência das interações que ocorreram em um coletivo de alunos-com-modelagem como exploração-com-gráficos-e-tecnologia. A partir dos resultados dessa pesquisa, pode-se sugerir que o trabalho com gráficos de funções trigonométricas não se limita apenas à localização e conexão de pontos, ao resultado da interação de um aluno com a calculadora, ou ao resultado da localização de algumas retas no plano cartesiano que surgem da formação de um círculo e de alguns segmentos a ele associados. Além disso, o estudo também considerou os cenários dinâmicos que nos permitem compreender a natureza da sua formação e a variação que ocorre quando os elementos que a sustentam nem sempre são constantes.

Tavera-Acevedo e Villa-Ochoa (2013) apresentam uma pesquisa que problematiza as práticas docentes no sistema educacional colombiano, em relação ao uso dos livros didáticos de matemática. Eles questionam quais aspectos do pensamento variacional são evidenciados nos livros didáticos do décimo ano, no estudo das relações trigonométricas. Para isso, eles analisam as relações entre as recomendações da literatura sobre o tema, os aspectos curriculares expressos pelo *Ministerio de Educación Nacional* (MEN) nos *Lineamientos Curriculares* e os *Estándares Básicos de Competencias*, e o material apresentado pelos livros didáticos da décima série (10º ano). Segundo os autores, as pesquisas sobre a análise de livros didáticos nas últimas décadas têm mostrado como esses recursos pedagógicos influenciam as práticas educativas. Eles consideram os livros didáticos como objeto de estudo, material de referência, registro das atividades dos alunos, compilação de exercícios e problemas que servem para avaliar o aprendizado dos estudantes.

A pesquisa foi desenvolvida mediante análise de conteúdo de um conjunto de livros de universitários que frequentemente são adotados nas disciplinas introdutórias dos cursos de graduação, e outros livros que são utilizados para apoiar a formação de estudantes de nível de *Educación Básica Secundaria e Média*. A análise e a interpretação dos dados se basearam em categorias e subcategorias definidas a partir dos objetivos, procedimentos e resultados

esperados das tarefas. Os dados coletados foram organizados em tabelas e comparados entre si, buscando identificar semelhanças e diferenças nas abordagens dos livros didáticos analisados.

Nos resultados do estudo, Tavera-Acevedo e Villa-Ochoa (2013) compreendem que, em geral, esse tema é desenvolvido por meio de expressões algébricas que permitem calcular medidas fixas e desconhecidas de um triângulo. Essa abordagem limita a compreensão das relações “dinâmicas” e funcionais entre os ângulos e os lados de um triângulo, que são necessários para a trigonometria. Eles também apontam que a maioria dos exercícios e problemas propostos nos livros didáticos se concentra em determinar o valor numérico de uma distância ou de um ângulo em um triângulo dado, sem explorar os contextos das situações ou as variações possíveis entre as quantidades envolvidas. Em outras palavras, as medidas a serem encontradas são tratadas como incógnitas fixas e não como variáveis que podem estabelecer relações funcionais entre si.

Ordóñez-Ortega *et al.* (2019) relatam uma experiência de ensino e aprendizagem de Álgebra baseada em uma unidade didática lúdica. Nessa unidade, os alunos foram estimulados a assumir o protagonismo de seu próprio processo de aprendizagem e a desenvolver o pensamento variacional, com foco nos polinômios e suas operações. A estratégia proposta se mostrou uma alternativa eficaz ao ensino tradicional de vários tópicos de Álgebra, uma vez que facilitou a construção de conceitos abstratos de Matemática pelos alunos. O objetivo do estudo foi avaliar as melhorias no pensamento variacional dos alunos que participaram como grupo focal.

Como referencial teórico, os autores se basearam nos *Lineamientos Curriculares* de MEN, que definem o pensamento variacional como um processo que requer o conhecimento e a articulação de pensamentos numéricos, geométricos e métricos pelos alunos, bem como estratégias de ensino adequadas pelo professor. A proposta de intervenção envolveu o uso de registros semióticos verbais, algébricos e geométricos, a construção de modelos geométricos de expressões algébricas e a identificação de invariantes. Os autores destacam que o objetivo central do pensamento variacional é a modelagem matemática.

A pesquisa teve uma abordagem qualitativa, baseada em um método de investigação-ação, realizada em quatro fases: 1ª) fase de plantação; 2ª) fase de ação; 3ª) fase de observação; e 4ª) fase de reflexão. O público-alvo foram 39 alunos do oitavo ano da *Educación Básica* de uma escola pública chamada *La Garita*, situada em Norte de Santander (Colômbia). A intervenção didática consistiu em dezesseis sessões, de duas horas cada, realizadas no primeiro semestre de 2018. Antes da intervenção, foi aplicado um teste diagnóstico para avaliar o nível inicial dos alunos nessas habilidades matemáticas. A intervenção se baseou em uma unidade

didática construtivista que utilizou material concreto e recursos virtuais para explorar conceitos variacionais e geométricos.

Nos resultados da pesquisa, Ordóñez-Ortega *et al.* (2019) constataram que as estratégias implementadas incentivaram os alunos a progredir nos objetivos desse estudo, apesar da insegurança inicial devido à falta de experiência no uso de material específico. Um dos desafios encontrados foi que a maioria dos alunos não dominava as fórmulas geométricas básicas para calcular áreas e volumes de superfícies planas e, quando as conheciam ou lembravam, não as aplicavam em contextos algébricos, dificultando a resolução de situações matemáticas. Outro problema encontrado foi o fato de que a maioria dos alunos atribuía um valor numérico arbitrário às variáveis para realizar cálculos aritméticos, demonstrando desconhecimento da utilidade e do significado da variável em situações problemáticas. A unidade didática incorporada ao processo de ensino-aprendizagem possibilitou aos alunos abordar objetos matemáticos abstratos de forma significativa, pois o material concreto e o aplicativo *Algebra Tiles* funcionaram como mediadores entre a construção do conhecimento e os alunos, favorecendo o desenvolvimento de conceitos matemáticos abstratos por meio da manipulação de objetos com sentido real.

O projeto de pesquisa descrito no artigo de Leon (2017) visa projetar um laboratório de ciências que explore o pensamento covariacional em atividades experimentais que favoreçam o trabalho colaborativo e a interação com estudantes de contextos vulneráveis. O foco da investigação é o conhecimento matemático, especialmente o pensamento covariacional que, de acordo com Carlson e Jacobs (2003), consiste nas atividades cognitivas que coordenam duas grandezas que variam em função de como cada uma delas se altera em relação à outra. O referencial teórico que sustenta o projeto é a teoria *socioepistemológica*, uma teoria emergente na educação matemática e adequada às realidades da nossa comunidade educativa. Nessa perspectiva, o autor afirma que o conhecimento dos alunos e de suas famílias tem um valor equivalente ao conhecimento escolar, mesmo que eles não possam justificar porque isso funciona ou otimizar suas soluções.

Leon (2017) relata uma experiência de criar um laboratório de Matemática na escola *Los Pinos*, situada no bairro *Los Laches*, em Bogotá (Colômbia). O objetivo da investigação era usar ferramentas tecnológicas que ajudassem os estudantes a desenvolver competências de aprendizagem mediada por computador, como o uso do *software GeoGebra*. Esse programa permite que os alunos explorem graficamente a relação entre algumas variáveis definidas a partir de problemas do contexto dos participantes do laboratório. O projeto envolveu doze crianças entre 10 e 12 anos, do sexto e sétimo ano da escola, que se voluntariaram após serem

entrevistadas. Cada aluno recebeu um caderno e materiais de escrita para registrar as atividades e os resultados dos laboratórios.

Segundo Leon (2017), os resultados se encaminharam para caracterizar comportamentos físicos que se relacionam com o conceito de função, uma ideia fundamental no Cálculo. No entanto, na escola, a função é ensinada de forma analítica, o que dificulta a compreensão da sua aplicação prática. Por isso, o laboratório oferece um cenário para contextualizar a funcionalidade e valorizar os aspectos físicos em vez da representação algébrica. Além disso, o uso do *software GeoGebra* permite aos alunos usar ferramentas tecnológicas no seu processo de aprendizagem, o que aumenta as suas competências e oportunidades no mercado de trabalho. O *GeoGebra* também ajuda os alunos a visualizar os resultados das suas medições e a construir argumentos para as suas discussões e consensos nos grupos de trabalho. Assim, a tecnologia tem um papel vital neste projeto, pois possibilita aos alunos testarem as suas hipóteses e as suas previsões com base na fase experimental. A partir disso, são definidas três categorias que consideram o uso do *software*.

O estudo de Nuñez e Sanchez (2016) propõe uma estratégia didática baseada em elementos teóricos da Educação Matemática, do pensamento variacional, do “cérebro triádico” e das competências (particularmente as referenciadas nos *Lineamientos Curriculares* do MEN), para reforçar o conceito de função nos alunos da disciplina de pensamento matemático, visando prepará-los para cursos posteriores de Cálculo. O objetivo é aplicar uma estratégia didática centrada na Modelagem Matemática para consolidar o conceito de função nos alunos do curso noturno de pensamento matemático da *Universidad Jorge Tadeo Lozano*. Os autores afirmam que frequentemente os estudantes têm uma compreensão equivocada ou restrita do conceito de função, o que dificulta o seu desempenho nos cursos regulares de Pré-cálculo, que abordam esse tema em profundidade. Assim, esse trabalho busca analisar as dificuldades que os alunos do curso regular de Pré-cálculo enfrentam em relação às tarefas de interpretação e representação do conceito de função e sugerir uma alternativa para o seu ensino, utilizando a Modelagem Matemática como recurso pedagógico.

A metodologia adotada nessa pesquisa combina um método de abordagem qualitativo e quantitativo. Para o tipo de pesquisa, foi aplicado um teste diagnóstico com o objetivo de investigar os diferentes conceitos de função, seus usos e aplicações. Além disso, foi realizada uma revisão de notas, avaliações de oficinas e testes para oferecer uma visão integrada que fornecesse subsídios para o planejamento da proposta. A pesquisa contou com a participação voluntária de 18 alunos, aos quais foi aplicado o teste do “quociente triádico”.

Para esses autores, Nuñez e Sanchez (2016), os alunos que resolvem problemas matemáticos precisam dominar fórmulas, definições e algoritmos que foram ensinados e memorizados em sala de aula. No entanto, eles nem sempre refletem sobre o significado e as consequências de suas respostas. Isso implica que os estudantes desenvolvem mais as competências ligadas ao raciocínio lógico e operacional, em detrimento das competências relacionadas à criatividade. Por isso, os autores sugerem um esquema que articula dois espaços diferentes, mas conectados: o mundo real e o mundo matemático. Nesse esquema, existem três etapas que correspondem às habilidades requeridas para resolver um problema e aos três tipos de cérebro envolvidos. As etapas são: 1ª) situação problema, na qual se procura interpretar e entender o problema que surge em um contexto real (cérebro lógico); 2ª) modelo matemático, na qual se faz a tradução da situação para o mundo matemático por meio de fórmulas, equações e outros elementos matemáticos. Nessa etapa, também se realizam os cálculos e operações necessárias para obter um resultado matemático (cérebro operacional). A solução possível, na qual se volta do mundo matemático para o mundo real e se verifica a solução obtida, propõe soluções alternativas se for preciso (cérebro criativo).

Pastran e Pinzon (2015) realizaram uma pesquisa sobre os problemas enfrentados pelos alunos nas aulas de matemática, como dificuldades de aprendizagem, desmotivação e desinteresse. Eles sugerem que o ensino e a aprendizagem de Matemática sejam enriquecidos com o uso das tecnologias de informação e comunicação que possam ajudar os estudantes a desenvolverem suas habilidades na fatoração de expressões algébricas. Para isso, eles propõem o uso de *software* livre como uma ferramenta pedagógica, baseada em uma experiência realizada com alunos do nono ano (9º) da instituição educacional departamental *San Josemaría Escrivá de Balaguer*, no município de Chía. Eles observaram que os alunos demonstravam uma atitude de desinteresse, falta de motivação e apatia em relação à matemática, mas que esses aspectos negativos foram superados com o uso das TIC.

O objetivo da pesquisa foi determinar qual dos aplicativos de *software* livre é o mais adequado para auxiliar aos alunos a superarem as dificuldades de aprendizagem da fatoração de expressões algébricas e identificar os fundamentos pedagógicos das dificuldades de aprendizagem em matemática. Para isso, analisam a percepção dos alunos sobre a Matemática e o uso das TIC como ferramenta de ensino-aprendizagem. Quanto à metodologia, os autores utilizam uma abordagem mista, combinando métodos quantitativos e qualitativos. O universo da pesquisa é composto por 156 alunos do nono ano de uma instituição educacional. A amostragem foi feita com 20% do público em questão, ou seja, 31 alunos. Os dados foram coletados por meio de questionários, entrevistas e observação direta.

Os resultados dessa pesquisa de Pastran e Pinzon (2015) mostram que a maioria dos alunos tem uma visão negativa da matemática, considerando-a uma disciplina aborrecida, complexa e difícil de entender. Por outro lado, os alunos demonstram interesse e disposição em utilizar as TIC para aprender a fatorar expressões algébricas, acreditando que isso poderia melhorar o seu desempenho e motivação nas aulas de matemática. Os autores apontam que o currículo de Matemática vigente é baseado em uma abordagem tradicional, centrada na transmissão de conteúdos e na avaliação por memorização e repetição, o que não favorece uma aprendizagem significativa.

Os estudos reunidos neste bloco apontam para uma concepção de Álgebra como linguagem visual e representacional, capaz de expressar relações entre grandezas em contextos dinâmicos. Ao se articular com a Geometria, a Álgebra favorece a visualização de padrões, variações e propriedades por meio de representações gráficas, ampliando a compreensão de conceitos como funções e dependências. A abordagem do pensamento variacional e covariacional reforça essa perspectiva, ao evidenciar a Álgebra como ferramenta para interpretar e modelar transformações entre grandezas. O uso de tecnologias digitais, como *softwares* livres e manipuladores virtuais, potencializa essa vivência ao criar ambientes interativos que permitem aos estudantes explorar, construir e validar ideias matemáticas de forma mais significativa e contextualizada.

3.3.6 *Pensamento variacional*

A articulação entre o pensamento variacional e a filosofia pode contribuir para uma abordagem crítica, dialógica e reflexiva da Matemática, que considere os aspectos históricos, culturais e epistemológicos envolvidos na sua produção e ensino. Os artigos que compõem este bloco apresentam diferentes perspectivas teóricas e metodológicas sobre o tema, abordando aspectos como o pensamento algébrico, a generalização, a idealização e a objetificação. Abordagem dialógica crítica e a perspectiva semiótica cultural apresenta a Álgebra como uma linguagem que comunica ideias matemáticas, buscando contribuir para o ensino e a aprendizagem, articulando aspectos filosóficos, científicos e sociais (Mora, Vergel e Martinez, 2016), enraizada em contextos culturais (Gomez, 2013). A teoria da objetificação oferece uma lente para analisar como o pensamento algébrico é internalizado e como os objetos matemáticos são construídos socialmente (Gomez e Mojica, 2013).

Mora, Vergel e Martinez (2016) buscaram analisar a correlação entre a abordagem dialógica crítica e a utilização de conjeturas e proposições filosóficas como estratégia para o desenvolvimento do pensamento variacional em estudantes de uma disciplina de Estatística no

âmbito universitário. Os autores identificaram que, no âmbito acadêmico universitário, no departamento de Norte de Santander, na Colômbia, os estudantes que cursam as disciplinas de Estatística têm dificuldades na aprendizagem. Ainda, em seus olhares, a aprendizagem dialógica, concentra-se na utilização de habilidades sociais e comunicativas para construir significados por meio da interação humana. Essa abordagem requer um planejamento cuidadoso e é considerada uma prática ética tanto para indivíduos quanto para instituições; planejamento que é relevante para implementar métodos de ensino eficazes e avaliar criticamente os resultados educacionais na sala de aula.

Nessa pesquisa, foi assumida uma abordagem quantitativa, de tipo experimental, descritivo, com um desenho transversal, apoiado no enfoque qualitativo que tem como base a análise nos níveis epistemológicos, para analisar essa relação. Após realizar amostragem por conglomerados, o estudo foi realizado com uma amostra de 367 estudantes e 75 professores de duas universidades no departamento de Norte de Santander. Foi realizado um questionário com escala tipo *Likert*, no intuito de caracterizar as estratégias pedagógicas utilizadas pelos professores.

Os resultados mostraram que a implementação da abordagem crítica impactou positivamente o pensamento variacional dos alunos. As estratégias de ensino influenciaram o desenvolvimento dos alunos, melhorando sua compreensão e aplicação dos conceitos estatísticos. Foram estabelecidas relações significativas entre as atividades docentes e o desenvolvimento do pensamento variacional, destacando a importância de abordagens pedagógicas interdisciplinares no ensino de Estatística. Em síntese, as ações e estratégias dos professores influenciaram positivamente a aquisição do pensamento variacional pelos alunos, demonstrando a relevância da filosofia da ciência e da interdisciplinaridade no ensino de Estatística.

Gomez (2013) realiza uma análise sobre a atividade Matemática de um grupo alunos de uma escola pública na cidade de Bogotá — Colômbia, tendo como referencial a abordagem semiótico-cultural proposta por Luis Radford sobre o pensamento algébrico. Nessa perspectiva, o autor pretendeu, entre outros objetivos, estudar os recursos semióticos que os alunos mobilizam para expressar o seu pensamento matemático. O pesquisador destaca a relevância de reconhecer a visualização e a percepção na sala de aula de matemática. Para tal, analisa como os alunos expressam seu pensamento matemático, generalizando padrões em sequências figurativas, utilizando meios semióticos de objetivação e usam palavras da linguagem comum para designar variáveis. A mobilização do pensamento algébrico contextual é observada nos alunos diante da indeterminação na tarefa. É destacada a ligação entre estruturas espaciais e

numéricas no processo de generalização e mencionados os meios semióticos utilizados pelos alunos para resolver a tarefa.

O pesquisador argumenta que é fundamental reconhecer como os alunos empregaram meios semióticos de objetivação de forma eficaz para alcançar uma solução adequada para a tarefa proposta. Isso demonstra que a ausência de manipulação de símbolos algébricos não representa uma barreira para o progresso da atividade em questão. Ao contrário, sugere que outras estratégias cognitivas podem compensar e facilitar a compreensão e resolução de problemas matemáticos, ampliando assim o escopo de métodos pedagógicos aplicáveis em contextos educacionais.

Gomez e Mojica (2013) desenvolvem uma oficina prática para professores-pesquisadores que, visando fornecer ferramentas que permitam ampliar a visão dos sinais, explicam o pensamento algébrico na resolução de tarefas de generalização de padrões. Essa intenção é capitalizada ao propor aos participantes um exercício de análise da atividade matemática de um grupo de alunos quando resolvem uma tarefa de generalização de padrões de uma sequência figurativa. Para tanto, alguns elementos da teoria cultural da objetivação são utilizados como categorias de análise.

Teoricamente, o estudo é baseado na concepção de Álgebra e do pensamento algébrico, a partir da abordagem semiótico-cultural proposta por Radford (2006b, 2008, 2010a). Nessa abordagem, são exploradas abordagens teóricas sobre uma visão não mentalista do pensamento, amplia-se a ideia de signo, não apenas como meio de representação de objetos algébricos, mas também como elemento constitutivo do pensamento e da atividade, introduzindo assim o conceito de Meio Semiótico de Objetificação e teorização da ideia de Processos de Objetificação.

Gomez e Mojica (2013) analisam a atividade matemática de alunos na resolução de tarefas de generalização de padrões, utilizando a Teoria Cultural da Objetivação (TCO). Estão divididos em 7 momentos, nos quais são resolvidas tarefas, analisados vídeos de alunos resolvendo problemas e refletido o pensamento algébrico a partir de uma perspectiva semiótico-cultural. Os autores buscaram aumentar a consciência sobre os recursos semióticos no pensamento algébrico e destacar a diversidade de ferramentas semióticas na Álgebra.

Os estudos reunidos neste bloco temático apresentam concepções de Álgebra como linguagem que expressa ideias matemáticas profundamente enraizadas em contextos históricos, culturais e sociais, com destaque para a abordagem da Teoria da Objetivação. Ao articular perspectivas dialógicas e semióticas, a Álgebra é compreendida não apenas como sistema simbólico, mas como prática discursiva que envolve processos de generalização, idealização e

construção de significados. Essa abordagem possibilita compreender como os sujeitos internalizam o pensamento algébrico e como os objetos matemáticos são constituídos socialmente, revelando a dimensão cultural e relacional do saber matemático.

3.3.7 Resolução de problemas

A resolução de problemas é uma habilidade importante para o desenvolvimento do pensamento matemático, a aprendizagem e aplicação de conceitos e procedimentos. O pensamento variacional envolve a capacidade de compreender e modelar situações de variação e mudança, permitindo que os estudantes interpretem e resolvam problemas matemáticos de maneira flexível, criativa e crítica. Além disso, as sentenças numéricas aditivas e igualdades são cruciais, pois, ao relacionar quantidades, os alunos podem abordar problemas envolvendo equações de primeiro grau de forma mais eficaz (Caicedo e Diaz, 2011). Entretanto, muitos estudantes cometem erros na resolução de problemas com equações de primeiro grau, as quais exigem compreensão das propriedades algébricas e habilidades na manipulação de variáveis (Tettay, Pulgar e Rojas, 2019). Ao resolver problemas com equações de primeiro grau, é importante considerar como as TIC podem auxiliar na modelagem, resolução e interpretação dos resultados (Monroy e Vargas, 2016). No entanto, os erros na conversão de representações em problemas com equações lineares e as dificuldades na resolução de problemas algébricos fornecem elementos de análise sobre as práticas de ensino e o desenvolvimento de estratégias efetivas de aprendizagem em Matemática (Pantoja-Portillo, 2021; Sanchez, 2019).

No trabalho de Caicedo e Diaz (2011), é apresentada uma revisão do conceito de Pensamento Variacional (PV), variação e mudança, e uma referência conceitual para sua compreensão. Posteriormente, seguindo Vasco (2006), chama-se a atenção para a possível confusão sobre o que é e o que não é PV, uma vez que, como bem assinala, não se trata de conhecer uma definição de função ou aprender fórmulas de áreas funcionais, mas de aprender fórmulas de áreas funcionais, volumes ou cinemática, nem desenhar gráficos, nem fazer tabelas de valores, apenas. Pelo contrário, esses fatos tornam-se importantes se a covariação for analisada, uma vez que o objeto do PV é a covariação entre quantidades de magnitude, principalmente variações ao longo do tempo.

Por fim, mediante exemplos, mostra-se uma estratégia para trabalhar a variação e a mudança, no âmbito de estruturas numéricas aditivas, para que desde os primeiros anos da *Educación Básica Primaria*⁹⁴, através do planejamento e resolução de problemas e a partir da

⁹⁴ Na Colômbia, o termo *Educación Básica Primaria* refere-se aos cinco primeiros anos da educação no sistema escolar. Esse nível corresponde, no Brasil, ao *Ensino Fundamental I* (Figura 16).

definição do PV apresentado, convidam aos estudantes a que pensem ações que contribuam para o uso e desenvolvimento de energia fotovoltaica. Da mesma forma, mostra-se como essas ações podem ser realizadas por meio de atividades diárias de ensino e aprendizagem, desde que desenvolvidas de forma dinâmica, em que, antes da obtenção de resultados, prevaleça o desenvolvimento do pensamento matemático.

A pesquisa de Tettay, Pulgar e Rojas (2019) examina erros na resolução de problemas com equações do primeiro grau resolvidas por alunos de Educação Média, identificando causas e destacando a importância do manejo da linguagem algébrica. Os pesquisadores identificam a problemática presente nas resoluções feitas por estudantes de nono ano, em que a aprendizagem das equações de primeiro grau torna-se uma prática mecanicista. Eles destacam o uso inapropriado de “fórmulas” e “regras convencionais” e consideram que a maioria desses erros originam-se como falsas generalizações sobre os operadores, fundamentalmente, falta de linearidade nesses operadores.

Nessa pesquisa, a metodologia de investigação utilizada foi um estudo de caso, de abordagem qualitativa, realizado com uma amostra de três estudantes do nono ano da *Escuela Normal Superior* do Distrito de Barranquilla-Colômbia. Foi realizada uma observação direta, teste diagnóstico, diário de campo, uma matriz de classificação das informações e, posteriormente, análise de conteúdo. O teste diagnóstico consistiu numa prova composta por dois itens: no primeiro, os alunos deveriam resolver três equações de primeiro grau, e no segundo item, duas situações-problema, nas quais se esperava que os alunos fossem capazes de propor uma equação e, em seguida, resolvê-la para fornecer uma resposta ao problema em questão.

Segundo esses autores, o estudo revelou que os erros mais comuns de alunos na resolução de equações de primeiro grau estão ligados à dificuldade de transição da linguagem natural para a algébrica e à compreensão insuficiente de conceitos aritméticos e algébricos. Tais erros são frequentemente resultado de obstáculos cognitivos e falta de clareza nos materiais didáticos, especialmente na explicação de procedimentos para equações de primeiro grau. A pesquisa aponta a necessidade de uma base matemática sólida e materiais didáticos claros para evitar erros processuais e promover uma aprendizagem eficaz.

Monroy e Vargas (2016) ressaltam a resolução de problemas como um aspecto fundamental na aprendizagem da Matemática, mas que ainda gera dificuldades nos estudantes. Por isso, a partir da análise do estado da arte referente à resolução de problemas, eles propõem considerar elementos relevantes de serem abordados utilizando tecnologias de informação (TIC), particularmente, os problemas que envolvem o uso de equações lineares. Os principais

referentes em que se baseia a pesquisa, toma aportes de George Polya e dos níveis de competências enunciados pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). Com base nessa teoria, os pesquisadores criam um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) com o objetivo de implementar uma estratégia conhecida como Reprodução, Conexão e Reflexão (RCR), que é baseada nas ideias do Construtivismo e espera que ao aprender um conteúdo, os alunos atribuam um significado e criem representações mentais sobre ele. Esse conteúdo deve estar relacionado com situações reais e seu contexto, de modo que os conhecimentos prévios sejam relacionados.

A pesquisa desenvolvida tem um enfoque quantitativo, com um desenho experimental que envolve um grupo controle com pós-teste. A implementação foi realizada com estudantes da *Universidad Abierta y a Distancia* (UNAD), a qual oferece programas de graduação e pós-graduação na modalidade virtual. A disciplina escolhida para a realização da pesquisa foi Álgebra, Trigonometria e Geometria analítica, que é ofertada para vários cursos durante o primeiro semestre acadêmico. A amostra foi composta por 84 participantes de distintos cursos. Os dados foram produzidos mediante a implementação de uma prova de competências com foco na resolução de problemas que envolviam o uso de equações de primeiro grau e um teste de autoavaliação.

Os pesquisadores obtiveram indícios de que os alunos não conseguem formular o problema em termos de equações algébricas, em vez disso procuram dados constantes e tentam relacioná-los numa equação em que assumem que existe uma variável (x), embora não identifiquem o que ela representa e tentam resolvê-lo com base nesta estrutura. Também, acharam que, nas diferentes atividades que envolvem trabalho colaborativo, os alunos mostraram interesse por formular hipóteses para a resolução de um problema e de testar as respostas com base em exemplos. Em suma, concluem que os recursos multimídia, fóruns e avaliações são implementados para melhorar o desempenho dos alunos. É destacada a importância da predisposição para resolver problemas algébricos e detalhada a estrutura e os elementos da estratégia RCR.

A pesquisa desenvolvida por Pantoja-Portillo (2021) centra-se em explorar a forma como os alunos, ao trabalhar com problemas, aprendem a converter representações dadas nos enunciados em linguagem natural e representações expressas em escrita algébrica. Assim, esse estudo põe em realce a pertinência das competências matemáticas e das representações semióticas. Esse autor argumenta que a resolução de equações lineares são um dos primeiros tópicos que os alunos estudam em Álgebra, e que pode ser complexa, especialmente quando se trata de problemas de enunciados.

A pesquisa de Pantoja-Portillo (2021) é de natureza qualitativa e foi realizada com doze alunos do oitavo ano do *Colégio Nuestra Señora de las Lajas*, na cidade de Pasto-Colômbia. A metodologia se sustenta na *Grounded Theory*; isto é, o método através do qual a informação é indutivamente contrastada com a teoria subjacente à investigação, de modo a dar lugar à emergência de uma nova teoria. As técnicas utilizadas para a recolha de informação no trabalho de campo foram: diagnóstico, observação direta e entrevista semi-estruturada. Os instrumentos de análise utilizados foram o teste diagnóstico, o questionário e o diário de campo. O desenho dos instrumentos foi elaborado a partir de três categorias de análise: redesignação funcional e explicitação da relação de equivalência e erros.

O autor identifica que, a partir da análise dos dados e considerando as transformações semióticas promovidas pelas tarefas previstas na proposta de ensino, foram obtidos cinco tipos de conversão cinco tipos de conversão: com âncora imposta, quando os alunos utilizam um contexto específico para definir a incógnita; com ancoragem não imposta, sem um contexto específico, os alunos designam a incógnita; composta, combinação de âncoras; sucessiva, mudança gradual de âncora; com inversão de âncora, inversão do contexto original. Foram também observadas três formas de explicitar a relação de equivalência: simples, mista, composto. Além disso, foram identificados seis tipos de erros: erro na designação de quantidades, conhecidas e desconhecidas, erros na re-designação, erros na mudança de âncora, erros na reversão de âncora, erros na conversão inversa, erro na colocação da relação de equivalência. O autor da pesquisa concluiu que existe uma estreita relação entre as características das competências matemáticas e a teoria das Representações Semióticas, as quais apontam, segundo ele, para a abertura de um espaço de reflexão sobre os fundamentos apresentados nos documentos curriculares da Colômbia e a teoria já mencionada.

Sanchez (2019) examina os erros e as dificuldades dos alunos na resolução de problemas algébricos. Ele destaca que ao nível internacional há autores renomados que vêm pesquisando sobre a aprendizagem da Álgebra, mais, particularmente, sobre a abordagem dos erros e as dificuldades dos estudantes, oferecendo indicadores de competência e apresentando estratégias didáticas para melhorar o desenvolvimento da competência matemática. Metodologicamente, a referida pesquisa adota o paradigma quantitativo com desenho descritivo. A pesquisa foi realizada com um grupo de 65 estudantes de 11º ano de *Educación Média* da *Institución Educativa Misael Pastrana Borrero* da cidade de Cúcuta-Colômbia. Para o desenho do instrumento, o pesquisador se baseou no modelo das provas estandardizadas na área de Matemática, que se realizam a todos os estudantes de último ano de *Educación Média* na Colômbia, denominadas *Pruebas Saber* (implementadas pelo *Instituto Colombiano de Fomento*

a la Educación Superior — ICFES). Também, foram realizadas entrevistas, no intuito de recavar informações sobre as dificuldades dos estudantes.

Conforme Sanchez (2019), os resultados da pesquisa indicam que os erros dos estudantes em Matemática podem ser devidos à aplicação insuficiente de estratégias corretas por parte dos professores, bem como à falta de execução de situações didáticas atualizadas. Os erros mais frequentes estão relacionados a cálculos simples e procedimentos incompletos, portanto é preciso reforçar o uso da Aritmética e da Álgebra na resolução de problemas. As dificuldades mais comuns estão ligadas aos processos de ensino, desse modo, o pesquisador sugere que os professores sejam criativos e engajados. Também, reconhece que os erros dos alunos refletem suas experiências de aprendizado anteriores, por isso, destaca a importância de ver os erros como oportunidades de aprendizagem e a mediação dos professores para promover um ambiente em que os erros façam parte do processo de aprendizagem, bem como o uso da tecnologia educacional para melhorar o ensino de problemas algébricos.

Os estudos aportados neste bloco temático revelam uma concepção de Álgebra como prática cognitiva que demanda compreensão conceitual, flexibilidade na representação e domínio de procedimentos. Ao lidar com equações de primeiro grau, os estudantes são convidados a relacionar quantidades, interpretar variações e mobilizar propriedades algébricas, experienciando a Álgebra como linguagem para expressar relações. As dificuldades recorrentes na conversão de representações e na manipulação de variáveis indicam que, muitas vezes, essa prática se dá de forma mecânica e desprovida de sentido. A integração de tecnologias digitais amplia essa experiência, permitindo abordagens mais interativas e exploratórias.

3.4 O que se mostra nos estudos revisados

A análise das pesquisas revisadas sobre o ensino da Álgebra na Colômbia revela um cenário investigativo marcado por uma diversidade de abordagens teóricas e metodológicas. Observa-se uma predominância de estudos voltados para os níveis da *Educación Básica e Média*, com ênfase no desenvolvimento do *pensamento algébrico e variacional*. Essas investigações evidenciam uma preocupação crescente com a compreensão dos processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da Álgebra, bem como com a superação de práticas tradicionais de ensino.

Destacam-se, nesse panorama, os estudos fundamentados na perspectiva da *Early Algebra*, conforme proposto por Blanton e Kaput (2005), que defendem a introdução precoce do pensamento algébrico desde os primeiros anos da escolarização. Essa abordagem rompe com a concepção tradicional que restringe o ensino da Álgebra à Educação Média, propondo uma

inserção gradual dos conceitos algébricos desde os anos iniciais, de modo a favorecer uma compreensão mais profunda e duradoura.

Além disso, emergem linhas de pesquisa que exploram abordagens alternativas ao ensino convencional da Álgebra, como a Modelagem Matemática, a articulação com a Geometria e a Resolução de Problemas. Tais enfoques buscam promover uma aprendizagem mais significativa, ao integrar diferentes representações e contextos, e ao estimular o raciocínio matemático dos estudantes. As dificuldades recorrentes na conversão entre representações e na manipulação de variáveis, frequentemente realizadas de forma mecânica e descontextualizada, são apontadas como desafios persistentes. Nesse sentido, a integração entre Álgebra e Geometria se mostra promissora, ao possibilitar a visualização de padrões, variações e propriedades por meio de representações gráficas, contribuindo para a compreensão de conceitos como variável, função e dependência.

Outro aspecto relevante identificado nas pesquisas é o crescente interesse pela utilização de tecnologias digitais como ferramentas mediadoras no ensino da Álgebra. Essas tecnologias têm sido exploradas como recursos que potencializam abordagens pedagógicas mais interativas e dinâmicas, favorecendo o engajamento dos estudantes e a construção ativa do conhecimento. Algumas investigações, como a de Guarumo (2018), propõem uma concepção de Álgebra como linguagem, enfatizando seu papel na expressão de ideias matemáticas profundamente enraizadas em contextos históricos, culturais e sociais. Essa perspectiva amplia a compreensão da Álgebra para além de seu caráter formal e simbólico, destacando sua dimensão comunicativa e expressiva, construída e compartilhada em diferentes contextos culturais.

No que diz respeito à natureza das pesquisas analisadas, observa-se uma predominância de estudos voltados para intervenções pedagógicas — conforme ilustrado na Tabela 1 —, em contraste com investigações de tipo diagnóstico, teórico ou prospectivo. Essas intervenções pedagógicas evidenciam uma concepção de Álgebra como uma prática formativa, construída na interação entre sujeitos, tarefas e contextos.

As ações investigativas se concentram, majoritariamente, em práticas de sala de aula, sequências didáticas e projetos de ensino desenvolvidos em contextos específicos. Frequentemente, essas experiências estão associadas ao uso de materiais didáticos ou à implementação de estratégias pedagógicas particulares. Destaca-se, ainda, a atenção dedicada a aspectos como as diferenças de gênero, as necessidades de reforço escolar e a mediação por tecnologias digitais, elementos que ampliam as possibilidades de aprendizagem e revelam que o ensino da Álgebra envolve dimensões cognitivas, afetivas e sociais.

A partir dessas experiências, emerge uma concepção de Álgebra como prática situada, em contraposição à visão tradicional e descontextualizada que historicamente tem marcado o ensino dessa área. Contudo, identifica-se uma ausência significativa: são escassas as pesquisas que se dedicam a investigar as concepções dos professores sobre a Álgebra e seu ensino, especialmente no que se refere às práticas cotidianas e às motivações que orientam suas escolhas pedagógicas.

Essa ausência limita uma compreensão mais profunda dos desafios enfrentados na formação docente e na implementação de mudanças significativas no ensino da Álgebra na Colômbia. Embora as intervenções pedagógicas ofereçam perspectivas promissoras, elas frequentemente desconsideram os aspectos relacionados aos contextos escolares, bem como os fatores sociais e subjetivos que moldam as práticas cotidianas dos professores. Além disso, deixam de considerar caminhos que possam revelar como a Álgebra ensinada é concebida pelos próprios docentes. Diante desse cenário, torna-se pertinente ampliar o olhar investigativo, colocando as concepções docentes como foco de estudo.

Conforme destaca Doerr (2004), cuja perspectiva foi apresentada na seção 2.3 desta tese, a constituição de uma base substancial de pesquisas voltadas a conhecer às concepções dos professores sobre a Álgebra pode contribuir significativamente para o desenvolvimento de referenciais teóricos que permitam compreender as dimensões epistemológica, cognitiva e didático-pedagógica do conhecimento profissional dos professores. Tal abordagem reforça a importância de considerar os conhecimentos do professor não apenas como reflexo de práticas, mas como construções que revelam sentidos e significados atribuídos ao conteúdo matemático e à sua forma de ensino.

Essa mesma limitação apontada por Doerr (2004) é apontada por Cecilia Agudelo Valderrama, que afirma ser “necessário estudar as concepções dos professores sobre suas próprias práticas de ensino (ou seja, suas concepções sobre seus papéis como professores, suas compreensões sobre o que fazem em seu ensino, suas explicações sobre por que ensinam da maneira que ensinam) para obter alguma compreensão da estabilidade das práticas de ensino de Matemática no contexto colombiano — ou em qualquer outro contexto”⁹⁵ (Agudelo-Valderrama, 2008, p. 38, tradução nossa). Em apresentação realizada no 12º ICMI, em 2021, intitulada *The challenges of mathematics teacher change in the Colombian context: The power*

⁹⁵ It is therefore necessary to study teachers’ conceptions of their own teaching practices (i.e., their conceptions of their roles as teachers, their understandings of what they do in their teaching, their explanations of why they teach in the way they teach) in order to gain some understanding of the stability of mathematics teaching practices in the Colombian context—or in any other context.

of institutional practices, Agudelo-Valderrama (2021) aprofunda essa discussão ao analisar como fatores institucionais e sociais influenciam diretamente as concepções dos professores de Matemática da *Educación Média* na Colômbia. Embora seu estudo revele tensões significativas entre as práticas docentes e os contextos educativos, evidencia também que compreender essas concepções é fundamental para promover mudanças substanciais e contextualizadas no ensino da Álgebra.

Apesar da diversidade de abordagens identificadas nas pesquisas sobre o ensino da Álgebra na *Educación Básica e Média*, observa-se uma ausência significativa no contexto da *Educación Superior*. Os poucos estudos disponíveis sobre esse nível educacional revelam tensões importantes entre o domínio técnico-operacional da Álgebra e sua compreensão conceitual. A resolução de sistemas de equações lineares, por exemplo, é frequentemente tratada de maneira mecânica, o que compromete a compreensão da Álgebra como linguagem que possibilita a modelagem de fenômenos e a expressão matemática. Ainda que o uso de tecnologias digitais venha apontando para novas possibilidades de experienciar o pensamento variacional, favorecendo a exploração e a visualização de ideias algébricas em ambientes mais dinâmicos, essas iniciativas ainda são pontuais e pouco sistematizadas.

Destaca-se, nesse cenário, o trabalho de Sanabria (2013), que propõe a análise da “ruptura” entre Álgebra e Cálculo como um fenômeno epistemológico e didático. Tal “ruptura” evidencia a dificuldade de muitos estudantes em transitar de forma fluida entre esses dois campos de conhecimento, revelando obstáculos na aprendizagem de articulações entre diferentes formas de raciocínio matemático e na aprendizagem de conceitos. A escassez de investigações que abordem essas questões de forma aprofundada compromete uma compreensão dos desafios enfrentados na *Educación Superior* e aponta para a necessidade de ampliar o foco das pesquisas, incorporando às práticas docentes, os processos de aprendizagem e as articulações conceituais que permeiam esse nível de ensino.

Adicionalmente, é importante destacar que são quase inexistentes os estudos que envolvem professores de Matemática em exercício — independentemente do nível de ensino em que atuam — bem como estudantes de cursos de licenciatura em Matemática. Essa ausência limita de forma significativa a compreensão das práticas formativas, das concepções docentes e dos processos de construção do conhecimento que permeiam o ensino da Álgebra. Além disso, restringe a análise das implicações pedagógicas na formação inicial e continuada de professores, dificultando a identificação de estratégias que possam contribuir para uma abordagem mais significativa e contextualizada dessa área do conhecimento.

Dessa forma, os estudos revisados, embora ricos em propostas didáticas e reflexões teóricas, precisam ser ampliados por pesquisas que escutem os professores em sua complexidade. Investigar suas concepções sobre a Álgebra e seu ensino é um passo fundamental para compreender a persistência de determinadas práticas, os desafios da formação docente e as possibilidades de transformação no ensino da Matemática. Nesse sentido, um olhar da Fenomenologia pode iluminar essas investigações, ao deslocar o foco da análise para as experiências vivenciadas pelos sujeitos em seus contextos concretos. Conforme Van Manen (2003), a hermenêutica fenomenológica busca compreender o significado das experiências vividas, valorizando o modo como os professores se relacionam com o conteúdo, com os alunos e com as práticas escolares que os atravessam. Tal abordagem permite evidenciar não apenas o que os professores fazem, mas o que sentem, pensam e significam em relação ao seu ensino, revelando dimensões muitas vezes invisibilizadas pelas abordagens tradicionais. Assim, compreender as concepções docentes sob uma perspectiva fenomenológica configura abrir espaço para uma escuta sensível e profunda, capaz de revelar os sentidos e significados que sustentam e estabilizam determinadas práticas pedagógicas.

4. O CAMINHO PARA A COMPREENSÃO

*Caminante, son tus huellas el camino y nada más;
Caminante, no hay camino, se hace camino al andar.*

Antonio Machado

4.1 O modo de proceder na pesquisa

Esta seção tem como objetivo abrir caminho para pensar a respeito do *como* proceder, a fim de corresponder ao indagado neste estudo, o que nos remete à procura das possibilidades de doação da coisa, ela mesma, como fora anunciado no capítulo primeiro desta tese. Em nossa pesquisa, a *coisa-mesma* é a Álgebra e o modo de ela ser compreendida por professores em exercício de sua profissão comprometidos com a formação de futuros professores de Matemática. Esse movimento de *pesquisar* é compreendido em palavras de Joel Martins como “[...] ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando todas as suas dimensões e, andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentidos, mais dimensões, e outra vez” (Fini, 1994, p. 24). É por isso que compreendemos que a interrogação segue latente, porque a compreensão do fenômeno não se esgota das muitas perspectivas de que é olhado. Isso significa, para nós, trilhar um caminho em busca do que queremos compreender, visando os procedimentos que deem conta do que é interrogado na interrogação.

Esse movimento reflexivo de abertura para o campo de investigação

[...] articula, de modo inteligível, o enredo — as perguntas formuladas — e evidencia o pensado, o materializado pela linguagem, ficando à disposição para ser retomado e vivificado pelas indagações formuladas mediante a dialética hermenêutica do pensar que se estabelece entre texto e leitor. Novas perguntas, outras compreensões e interpretações vão sendo produzidas e expostas. A incompletude do compreendido, a constante insatisfação do humano com as respostas já dadas, o horizonte aberto a outras perguntas e outros discursos: essa é a caminhada da compreensão. Nesse modo de proceder, não há uma resposta decisiva, completa, verdadeira que corresponda a uma adequação entre conceito e objeto. Há compreensões expostas pela linguagem e comunicadas a interssujeitos⁹⁶ (Bicudo e Costa, 2019, p. 15).

Para dar conta de nossa interrogação, consideramos apropriado optar por desenvolver uma pesquisa qualitativa. Segundo Bicudo (2019), este proceder solicita explicitar o caráter qualitativo da pesquisa, isto é, dar conta das questões metafísicas pertinentes a esse tema, na procura por compreender o interrogado. Em nossa pesquisa, a pergunta indaga *como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?*

⁹⁶ Interssujeitos quer dizer “entre sujeitos”.

Consideramos apropriado optar por uma busca de cunho qualitativo, pois ao questionarmos sobre as abordagens requeridas para chegar às qualidades e aos aspectos sensíveis e aqueles expressos pela linguagem concernentes ao fenômeno em estudo, centramos nossa atenção nas concepções que professores de Matemática expressam sobre a Álgebra e seu ensino. As concepções que venham a ser expressas pelos *sujeitos significativos* não se deixam aprisionar em conceitos, os quais poderiam ser quantificados, porém expressam ideias. Essas são passíveis de serem compreendidas em suas nuances, à medida que são envoltas em sentidos e modos de serem articulados pelo sujeito, bem como pelos seus modos de expressão. Entendemos que isso contempla a ideia do subjetivo⁹⁷ e envolve a compreensão de um universo de sentidos e significados, abrangendo motivos, atitudes, crenças, sensações, opiniões, atos e valores sobre as experiências vivenciadas e que consideramos não ser possível quantificar. Isso demanda um movimento apropriado para sua interpretação. Neste sentido Goldenberg (2004, p. 50) argumenta que,

A quantidade é, então, substituída pela intensidade, pela imersão profunda —através da observação participante por um período longo de tempo, das entrevistas em profundidade, da análise de diferentes fontes que possam ser cruzadas — que atinge níveis de compreensão que não podem ser alcançados através de uma pesquisa quantitativa. O pesquisador qualitativo buscará casos exemplares que possam ser reveladores da cultura em que estão inseridos.

Com essa compreensão, trabalhamos com as qualidades do objeto estudado, que nos chegam mediante a descrição do percebido e compreendido pelos sujeitos que dizem de sua vivência do fenômeno estudado. Para tanto, nós o tomamos como se mostra na realidade em que se mostra, tendo em vista que assumimos “[...] a visão de realidade como sendo complexa, como uma totalidade orgânica de forças que se movimentam em uma fluidez dinâmica, em

⁹⁷ Consideramos pertinente ir explicitando algumas considerações ao redor de nossas compreensões sobre a ideia do subjetivo. Assim, de acordo com Van Manem (2003), “[n]as ciências humanas, objetividade e subjetividade não são categorias mutuamente exclusivas. Ambos encontram seu significado e importância na relação orientada, ou seja, pessoal, que o pesquisador estabelece com o «objeto» de seu estudo. Assim, «objetividade» significa que o pesquisador se «orienta» para o objeto, para aquilo que está na sua frente. Objetividade significa que o pesquisador permanece «fiel ao objeto». O pesquisador torna-se, em certo sentido, um guardião defensor da verdadeira natureza do objeto. Quer mostrá-lo, descrevê-lo, interpretá-lo e, ao mesmo tempo, ser-lhe fiel, consciente de que a pessoa pode facilmente ser enganada, confundida ou fascinada por elementos alheios. «Subjetividade» significa que é preciso ser o mais perceptivo, intuitivo e perspicaz possível para poder mostrar ou descobrir o objeto em toda a sua riqueza e na sua maior profundidade. Subjetividade significa que permanecemos «firmes» na nossa orientação para o objeto de estudo «de forma única e pessoal», evitando o risco de agir de forma arbitrária ou auto-indulgente ou de nos deixarmos cativar por preconceitos mal refletidos. Aqueles que entram no domínio da investigação em ciências humanas podem precisar compreender que os significados precisos de “conhecimento”, “ciência”, “teoria” e “investigação” se baseiam em pressupostos diferentes” (Van Manem, 2003, p.38, tradução nossa). É preciso, ainda, esclarecer que a subjetividade, que quer dizer modo de ser sujeito, não se constitui e forma de maneira isolada do contexto histórico-sócio-cultural em que ele, sujeito, em sua carnalidade, portanto em sua materialidade bio-psíquica-espiritual no seu próprio movimento de vida, funcionando harmonicamente em sua totalidade é, sendo com os outros nessa realidade mundana, entendida por nós como mundo-da-vida (conforme Bicudo, M.A.V, em sessão de orientação do dia 14-3-2024).

constante tornar-se e que se expõe no movimento do seu sendo” (Bicudo, 2021, p. 549). Um aspecto relevante na pesquisa de cunho qualitativo é a posição do investigador e seu envolvimento, pois ele não é considerado neutro diante do que busca pesquisar e compreender, já que não assumimos uma separação entre sujeito [pesquisador] e objeto [investigado/observado], pois a “interrogação é correlata ao interrogado e a quem interroga [...]”. Sendo assim, a complexidade interrogação-interrogado-quem interroga há que ser ouvida, buscando compreender do que se trata a investigação em movimento” (Bicudo, 2011a, p. 22).

Ao refletir sobre o que diz a vivência⁹⁸ do fenômeno investigado para o sujeito, que pode ser compreendida no âmbito do que entendemos por *experiência*, no texto de Gadamer⁹⁹, em que se encontram germens do movimento do conhecer, entendemos com esse autor que “não se fazem experiências sem a atividade do perguntar. O conhecimento de que algo é assim, e não como acreditávamos primeiramente pressupõe evidentemente a passagem pela pergunta se é assim ou de outro modo” (Gadamer, 2011a, p. 534). Por isso, assumimos que esta pesquisa tem como ponto de partida as experiências vivenciadas pelo pesquisador, ou seja, refere-se ao *quem* que, ao interrogar, expõe as preocupações e perplexidades, tanto na aprendizagem, quanto no ensino da Álgebra, na trajetória pelos diferentes níveis educacionais de sua formação e no exercício da docência. São perplexidades que fazem o pensar do pesquisador se movimentar pela busca de compreensões a respeito do interrogado.

⁹⁸ A vivência “[...] não é entendida como algo dado, pois somos nós que penetramos no interior dela e que a experienciamos de maneira imediata. O significado explicitado diz do sentido da experiência vivida, dizendo, com isso, do contato imediato com a vida, não se tratando de um conteúdo de experiências, mas do ato de vivê-las. No momento em que a experiência ocorre, ela ainda não é refletida. Porém pode se tornar foco sobre a qual a reflexão se volta, abrindo, no fluxo do vivido, momentos de tomar ciência do vivenciado” (Bicudo, 2011a, p. 33). Ainda, esta mesma autora considera que, pelos atos de reflexão e pela “[...] intropatia, dá-se conta das vivências do outro, e pode compreender que os vivencia deste ou daquele modo, porém não são jamais suas vivências [...]. No âmago da *objetividade intersubjetiva* está o sentir as vivências psíquicas do outro, a intropatia, e as expressões dessas vivências, pelos sons emitidos como sinais. Na dimensão intersubjetiva, os corpos-viventes estão uns com os outros e pela transcendência de suas capacidades subjetivas evidentes, conduzida pela intropatia e pela linguagem, abrindo-se, assim, o horizonte de um mundo do espírito comum” (Bicudo, 2022, p.131-132, grifos do autor).

⁹⁹ O filósofo alemão Hans-Georg Gadamer nasceu em Marburg, Alemanha, em onze de fevereiro de 1900, e faleceu em Heidelberg, Alemanha, em treze de março de 2002, aos 102 anos de idade. Dentre as contribuições de suas obras está o estudo da Hermenêutica. Foi estimulado por seu pai, um químico, a entrar para a carreira militar. Mas seu interesse se voltou para as Ciências do Espírito, assim se dedicou às belas-artes, focando seus estudos no campo da Estética, discutindo a questão da arte, no sentido de compreender e solucionar o problema da unidade entre a tradição artística clássica e a arte moderna, tendo como questão de fundo — em que sentido pode-se conduzir o que a arte foi e o que ela é hoje a um conceito comum que englobe as duas coisas? Questão essa que procura responder, valendo-se da Fenomenologia e da Hermenêutica. Para desenvolver seus estudos nesse campo, muda-se para Marburgo, cidade alemã, conhecida mundialmente na época como um centro formador de filosofia. Nesse período, Gadamer conhece o também filósofo alemão Martin Heidegger, que o influencia em seus estudos, conforme o próprio Gadamer afirma em diversos trechos de suas obras. Gadamer ao longo de sua vida morou também nas cidades de Leipzig, Frankfurt e Heidelberg. Nesta última, permaneceu de 1949 até 2002, ano de sua morte, ministrando cursos todos os anos. Sua obra mais conhecida é ‘Verdade e método’, na qual discute o ato compreensivo e a natureza compreensiva do ser humano (Gadamer, 2009, p.24-25, *apud* Mondini, 2013, p.24-25).

A perplexidade inicial do investigador, após ser analisada e refletida, configura-se em forma de interrogação e é ela que direciona o movimento da pesquisa, orientando-nos para um olhar atento sobre a Álgebra e o modo dela ser compreendida por professores de Matemática em exercício de sua profissão, estando comprometidos com a formação de futuros professores de Matemática. Desse modo, entendemos que o interrogado vai ao encontro do problema anunciado por Felix Klein ao falar sobre a existência de um hiato entre a Matemática que se aprende nos cursos de formação de professores e a Matemática que é ensinada na *Educação Básica*. Interpretamos esse problema como uma interrogação ainda latente no horizonte de pesquisa e nas salas de aula.

Outro aspecto central nesta abordagem de pesquisa, tem a ver com os nexos simbólicos criados no contexto sociocultural e na história de vida das pessoas envolvidas na pesquisa, pois esse aspecto é central para especificar os sujeitos significativos, entendidos como sujeitos que no contexto da formação de professores de Matemática e como docentes atuantes na *Educação Básica* vivenciam, enquanto formadores ou formandos, o ensino e aprendizagem da Álgebra.

Por isso concordamos com Turato, Bastos, Vieira e Weber (2019) que

[...] não há um “n” pré-definido, mas a “amostra” de participantes é *construída por conveniência*, limitada a quem pode e sabe informar sobre o fenômeno que elegemos para o estudo; assim como será considerada satisfatória no momento em que as informações dadas nas entrevistas atingem a saturação — o ponto em que coletamos material suficiente para dar consistência às categorias em debate e plausibilidade na compreensão. Na realidade, o conceito de “amostra” não é adequado na investigação qualitativa; do que se trata é de “unidades” (pessoas, casos) de investigação (p. 140, grifos nossos).

Para além desses aspectos concernentes à pesquisa qualitativa, compreendemos que a compreensão do fenômeno¹⁰⁰ em estudo é *situada*, ou seja, contextualizada em termos de espacialidade e temporalidade em que ela se foi atualizando, já que de acordo com as características desta abordagem de pesquisa se busca mostrar aspectos de uma realidade contextualizada, portanto, os dados produzidos e trabalhados não podem ser generalizados e transferidos para outros contextos, mas é permitido “compreender características do fenômeno investigado e que, ao assim procederem, oferecem oportunidade para possibilidades de compreensões possíveis quando a interrogação do fenômeno é dirigida a contextos diferentes

¹⁰⁰ Em textos – livros, artigos, teses, dissertações – publicados nas décadas de 1980 e 1990 e, mesmo depois disso, de autoria do Prof. Joel Martins e de seus orientandos, encontra-se a especificação “fenômeno situado”. Porém, o fenômeno não é um objeto, passível de ser situado espaço e temporalmente. Ele se mostra no fluxo *noesis-noema*, para o sujeito que o olha, de modo intencional. Pode-se dizer de compreensões situadas, no sentido de contextualizadas histórico-culturalmente no mundo-da-vida em que o sujeito, estando com os outros, articula e comunica compreensões sobre o fenômeno.

daquele em que a investigação foi efetuada” (Bicudo, 2012, p. 19). É por isso que nosso estudo, que é desenvolvido no contexto da Colômbia, olha para uma das muitas perspectivas de sua realidade complexa, ao tratar sobre os modos como a Álgebra é compreendida e ensinada por professores em exercício de sua profissão comprometidos com a formação de futuros professores de Matemática.

Consideramos pertinente explicitar que a pesquisa qualitativa desenvolvida segue uma abordagem fenomenológica, ao considerar uma atitude particular do pesquisador em relação à realidade. Nessa atitude, o “fenômeno e sujeito são correlatos e estão unidos no próprio ato de aparecer” (Bicudo, 2011b, p. 30), portanto a atitude já não é mais natural. Segundo Moura (1989, p. 164-165), na atitude natural, “afirmar que os objetos são em si, independentes da percepção, independente de seus fenômenos, é decodificar o objeto como um conteúdo positivo, pensável como estando além de sua manifestação, como um conteúdo pensável independentemente de uma perspectiva, de um ponto de vista”. Ou seja, na “atitude natural”, como explicitada no âmbito da fenomenologia, trabalham-se os dados como sendo realidades objetivas, passíveis de serem observadas, manipuladas e explicadas, enquanto que, na “atitude fenomenológica” buscam-se compreender e interpretar o percebido que nos é dado de modo direto na percepção. Alerta-se o leitor sobre o movimento de conhecer, o qual abrange a percepção e a vivência do sujeito, porém não se esgota na sua dimensão, avança pela expressão e comunicação do que foi compreendido.

4.2 A pesquisa na abordagem fenomenológica

Consideramos que ao pesquisar estabelecemos formas de pensar e investigar questões concernentes à possibilidade do conhecimento. Por isso, entendemos que ao falar da Fenomenologia nós nos voltamos para um modo de entender e produzir conhecimento. Husserl (2020, p. 79, grifos do autor) afirma que a Fenomenologia “designa uma ciência, uma conexão de disciplinas científicas; mas a fenomenologia designa, acima de tudo, um método e uma atitude do pensar: a *atitude do pensar* especificamente *filosófica*, o método especificamente *filosófico*”. Nesse sentido, compreendemos que Husserl expõe uma visão a respeito da mudança específica ao assumir a atitude fenomenológica, ao olhar para o mundo, distinguindo-a da atitude natural.

De acordo com Bicudo e Garnica (2021), o pensar filosófico caracteriza-se por ser analítico, crítico, reflexivo e abrangente. Também, para os autores, a reflexão é um aspecto constituinte da filosofia e enfatizam que

Reflexão é a ação de pensar *sobre* algum acontecimento, texto, proposta, realização, enfim, algo que está no nível mundano, isto é, no nível do humano, e que está causando perplexidade, estranheza e solicitando por esclarecimento para que se torne compreensível, ou seja, para que *faça sentido* Bicudo e Garnica (2021, p. 23, grifos nossos).

Por sua vez, a atitude natural do espírito é indiferente com a crítica ao conhecimento, pois neste fica uma sensação de segurança graças a seu progresso bem-sucedido nas diversas ciências e “não tem motivo algum para se incomodar com a possibilidade do conhecimento e com o sentido da objetividade conhecida” (Husserl, 2020, p. 88). Porém, ao refletir sobre a correlação do conhecimento e da objetividade emergem dificuldades, insuficiências e teorias que resultam em contradição ou em contrassenso. E, assim, entendemos como problemático o avanço do conhecimento natural¹⁰¹, pois este se expande de maneira que “uma ciência pode se construir, sem mais, sob uma outra, e uma pode servir como modelo metodológico para a outra, ainda que apenas determinada e delimitada, em certa medida, através da natureza do campo de investigação” (Husserl, 2020, p. 80).

Diante desse panorama, no terreno do pensar, de acordo com a atitude natural, Husserl nos propõe uma nova ciência, a crítica do conhecimento, que busca pôr fim a essas contradições e nos ajudar a esclarecer acerca do aspecto central do conhecimento, pois, como já aventado anteriormente, na “atitude natural são tomadas como objeto tanto a coisa que se torna objeto para o sujeito, quanto a consciência que opera as relações desse conhecimento. *Isso significa que o eu e suas experiências subjetivas são assumidas como coisas em si*, como parte do mundo objetivo” (Bicudo, 2005, p. 23, grifos nossos). Compreendemos que a fenomenologia se erige como oposição radical ao positivismo¹⁰², que se opera no âmbito da atitude natural; pois para a

¹⁰¹ O autor, Husserl, está se referindo ao conhecimento do mundo natural realizado em uma “atitude natural”.

¹⁰² Segundo Abbagnano (2007), “(in. *Positivism*- fr. *Positivisme*, ai. *Positivismus*; it. *Positivismo*) este termo foi empregado pela primeira vez por Saint-Simon, para designar o método exato das ciências e sua extensão para a filosofia (*De la religion Saint-Simonienne*, 1830, p. 3). Foi adotado por Augusto Comte para a sua filosofia e, graças a ele, passou a designar [sic] uma grande corrente filosófica que, na segunda metade do séc. XIX, teve numerosíssimas e variadas manifestações em todos os países do mundo ocidental. A característica do P. [positivismo] é a romantização da ciência, sua devoção como único guia da vida individual e social do homem, único conhecimento, única moral, única religião possível. Como Romantismo em ciência, o P. [positivismo] acompanha e estimula o nascimento e a afirmação da organização técnico-industrial da sociedade moderna e expressa a exaltação otimista que acompanhou a origem do industrialismo. As teses fundamentais do P. [positivismo] são as seguintes:

1. A ciência é o único conhecimento possível, e o método da ciência é o único válido: portanto, o recurso a causas ou princípios não acessíveis ao método da ciência não dá origem a conhecimentos; a metafísica, que recorre a tal método, não tem nenhum valor.
2. O método da ciência é puramente descritivo, no sentido de descrever os fatos e mostrar as relações constantes entre os fatos expressos pelas leis, que permitem a previsão dos próprios fatos (Comte); ou no sentido de mostrar a gênese evolutiva dos fatos mais complexos a partir dos mais simples (Spencer).
3. O método da ciência, por ser o único válido, deve ser estendido a todos os campos de indagação e da atividade humana; toda a vida humana, individual ou social, deve ser guiada por ele.

fenomenologia só existe um fenômeno se existe um sujeito para o qual ele (o fenômeno) se mostra.

Por isso, diz-se que sujeito e fenômeno são correlatos. Isso indica que não há sujeito “em si” e nem objeto “em si”. Mas *fenômeno*, objeto da percepção, é sempre com sentido no horizonte de compreensão do sujeito. Ou seja, na perspectiva fenomenológica, não há separação entre o sujeito e o objeto, pois o percebido é para o sujeito da percepção. O objeto, então, é sempre objeto intencional. Ele é sempre para a consciência, entendida como intencionalidade ou como o movimento de *voltar-se* para o que se mostra, abarcando o que nesse voltar-se para se dá a conhecer (Ferreira, 2019, p. 29, grifos do autor).

Na atitude fenomenológica, entende-se que a coisa não é tida como sendo em si e, sobre isso, Bicudo (2005, p. 23) sublinha que na pesquisa que procede segundo uma abordagem fenomenológica dois princípios devem ser considerados no que se refere à atitude fenomenológica, pois nesta, a coisa

- 1) Não está além da sua manifestação e, portanto, ela é relativa à percepção e dependente da consciência;
- 2) a consciência não é parte ou região de um campo mais amplo, mas é ela mesma um todo que é absoluto, não dependente, e que não tem nada fora de si.

Assim, entendemos que sujeito e objeto são correlatos e dependentes da consciência¹⁰³, que por sua vez está sempre em movimento em busca de sentido e de dar-se conta do que está ocorrendo, articulando ideias. Esse é o motivo de, na pesquisa qualitativa de cunho fenomenológico, destacar-se a *descrição*¹⁰⁴ da manifestação da coisa dada na percepção daquele que percebe, uma vez que o ato de descrever, ao abster-se de fazer suposições, previsões e levantar hipóteses, confere o máximo rigor à fenomenologia, por buscar ser fiel ao fenômeno percebido e compreendido no movimento articulador da consciência. Portanto, na investigação fenomenológica, o fenômeno é assumido nos diferentes modos pelos quais ele se manifesta, em sua totalidade, e é assumida uma postura pelo pesquisador, o qual busca *ir-à-coisa*¹⁰⁵-mesma

¹⁰³ “[...] A consciência não é um lugar físico, nem um lugar específico, nem é de caráter espiritual ou psíquico (Ales-Bello, 2006, p. 45). A autora explicita que o “[...] dar-se conta é a consciência de algo, por exemplo, a consciência de tocar alguma coisa” (Ales-Bello, 2006, p. 31, grifo da autora). “[...] Consciência não quer dizer que a cada momento nós temos que dizer agora estamos vendo, agora estamos tocando. Consciência significa que, enquanto nós olhamos, nos damos conta de que estamos vendo, ou que, enquanto tocamos, nos damos conta de tocar” (Ales-Bello, 2006, p. 32-33, grifo da autora). “A consciência não é entendida como um órgão específico, nem como recipiente em que estão crenças e juízos a respeito do certo e do errado; do bem e do mal. Também não uma forma que imprime à experiência formas de organização. Ela, na fenomenologia, é entendida como o que nos permite sempre nos darmos conta, de modo íntimo, dos atos que realizamos” (Bicudo, 2020a, p. 35).

¹⁰⁴ A descrição [...] é um protocolo que se limita a descrever o visto, o sentido, a experiência como vivida pelo sujeito. Ela não admite julgamentos e avaliações. Apenas descreve. Para tanto, expõe-se por meio da linguagem” (Bicudo, 2000, p.77).

¹⁰⁵ Edmund Husserl (2002, p.12, grifos do autor) “considera inaceitável o postulado de que aquilo que aparece na experiência atual não é a verdadeira coisa. Deu novo significado à fenomenologia, encerrando o fenômeno no

do fenômeno que intenciona desvelar, porém neste modo de investigar visa ser “[...] a tentativa de uma descrição direta de nossa experiência tal como ela é, e sem nenhuma deferência à sua gênese psicológica e às explicações causais que o cientista, o historiador ou o sociólogo dela possam fornecer” (Merleau-Ponty, 1999, p. 5-6).

Compreendendo percepção como o ato em que se dá no encontro entre o sujeito que vê e o fenômeno que se mostra, o sentido do percebido é passível de ser expresso pelo sujeito. Sendo assim, ao “trabalhar com as manifestações da coisa na percepção de quem percebe, a Fenomenologia coloca em evidência a *linguagem*, entendida como expressão daquilo que faz sentido” (Bicudo, 2019, p. 91, grifos do autor) e ao trabalhar com sentidos e significados, compreendemos que esta abordagem de pesquisa solicita uma análise hermenêutica para dizer do expresso no texto, ou seja, na descrição trazida pela linguagem em que o sujeito expressa sua compreensão de modo inteligível. Essa análise visa o rigor da interpretação, evitando que o pesquisador expresse suas opiniões e conceitos prévios que sustentariam sua análise.

Rigor, no dicionário Houaiss da língua portuguesa, diz sobre ausência de maleabilidade, rigidez, dureza, inflexibilidade; exatidão extremada, grande severidade, intransigência; retidão, precisão. No entanto, compreendemos com Bicudo (2005) que, proceder de modo rigoroso em uma investigação de cunho qualitativo e, notadamente naquela de cunho qualitativo fenomenológico, é manter-se com cuidado no processo de busca pelo interrogado. A autora elucida o termo da seguinte maneira:

Rigor exprime o cuidado que se tem ao proceder na busca pelo interrogado ou pela solução do problema proposto. Esse não é um cuidado subjetivo, carregado de aspectos emocionais. Mas é um cuidado que busca a atenção constante do pesquisador para proceder de modo lúcido, analisando os passos que dá em sua trajetória, conseguindo clareza dos seus “por quês” e “como”, o que significa, dos fundamentos de seu modo de investigar e da visão de que modalidade de conhecimento sobre o indagado está construindo, ao proceder do modo pelo qual está caminhando sua investigação. *Rigor* pode carregar consigo critérios diferentes, mas sempre há critérios passíveis de serem expostos e justificados no contexto da tradição do pensar científico/filosófico, artístico. Esses critérios, por sua vez, não estão circunscritos à esfera epistemológica e metodológica apenas, mas carregam visões de mundo e de realidade, portanto, concepções de conhecimento e de verdade (Bicudo, 2005, p. 11, grifo da autora).

campo imanente da consciência. Husserl não nega a relação do fenômeno com o mundo exterior, mas prescinde dessa relação. Propõe a “*volta às coisas mesmas*”, interessando-se pelo puro fenômeno tal como se torna presente e se mostra à consciência. Sob este aspecto, deu um sentido mais subjetivo à palavra fenômeno, elaborando uma fenomenologia que faça ela mesma às vezes de ontologia. Segundo ele, o sentido do ser e do fenômeno são inseparáveis. A fenomenologia husserliana pretende estudar, pois, não puramente o ser, nem puramente a representação ou aparência do ser, mas o ser tal como se apresenta no próprio fenômeno. E fenômeno é tudo aquilo de que podemos ter consciência, de qualquer modo que seja. Fenomenologia, no sentido husserliano, será pois o estudo dos fenômenos puros, ou seja, uma fenomenologia pura”.

Após o exposto, uma pergunta tem-se mostrado pertinente: por que trabalhar com Fenomenologia em uma pesquisa em Educação Matemática? Em procura de responder essa pergunta, entendemos com Bicudo (2009) que, como educadores matemáticos, assumir uma postura fenomenológica implica “mostrar os passos que conduzem às explicitações do que está sendo compreendido e interpretado, ao atualizar movimentos de análise crítica e reflexiva” (p. 238). Portanto, é preciso dar-mos conta do que estamos fazendo, no tratamento da Matemática, em seus procedimentos, sua linguagem proposicional e técnica, assim como em suas aplicações. E, também, “ao efetuar o movimento da transcendência¹⁰⁶ disso que é compreendido e interpretado e já olhado no contexto do mundo-[da]-vida, implica avançar em direção à meta-compreensão” (Bicudo, 2009, p. 238), aprofundando-nos cada vez mais na região de inquérito da ciência, revelando significados do seu solo histórico.

Configurada a perspectiva de pesquisa, debruçamo-nos à busca dos modos mediante os quais podemos obter dados¹⁰⁷ significativos, que dizem sobre o que nossa interrogação solicita. Esse movimento traz consigo decisões sobre a procura dos sujeitos significativos, ou seja, de quem vivencia o fenômeno interrogado.

4.3 Especificando os sujeitos significativos e o modo de realizar as entrevistas

Reiteramos que esta pesquisa tem como foco compreender o modo pelo qual professores de Matemática dos cursos de *Licenciatura en Matemáticas* e professores de *Educación Média*, atuantes na Colômbia, compreendem a Álgebra que ensinam. Ao atentamos ao contexto colombiano, desse modo, dos mais de 32 programas de licenciatura em Matemática do país, centramo-nos na *Licenciatura en Matemáticas* da *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia* (UPTC), por ser um dos dois¹⁰⁸ programas de licenciatura em Matemática mais antigos nesse país, bem como pela sua relevante trajetória na formação de professores nessa área do conhecimento humano.

Optamos por essa licenciatura, tendo em vista que, após ter solicitado colaboração mediante correio eletrônico e o envio de uma carta aos dois programas, em que foi expressa nossa intenção para a realização da pesquisa, obtivemos apenas resposta do Diretor do

¹⁰⁶ Husserl (2020, (p. 59) apresenta os conceitos de *imanência* e *transcendência* da seguinte maneira: “O conhecimento intuitivo da *cogitativo*[pensamento] é imanente, o conhecimento das ciências objetivas, das ciências da natureza e das ciências do espírito, mas também, considerando de modo mais preciso, da ciência Matemática é transcendente. [...] O imanente está, dirá aqui o iniciante, em mim; o transcendente, fora de mim”.

¹⁰⁷ A fenomenologia entende o *dado* como o que chega ao sujeito que, de modo atento, olha para algo, querendo saber do se trata. Esse algo poderia ser visto como a “coisa”, que nos escapa ao conhecimento, mas que se doa aos nossos sentidos, em seus modos de doação (Bicudo, 2020a, p. 34, grifos nossos).

¹⁰⁸ Convidamos ao leitor à consultar a seção 3.1.2, na presente tese, na qual se explicita a história dos programas de licenciatura em Matemática na Colômbia.

Programa de Licenciatura da UPTC, que manifestou o seu interesse e vontade de colaborar. Ainda, ele expressou que a investigação poderia contribuir com a qualidade de ensino no curso mediante reflexões, tanto dele próprio quanto do quadro de docentes e discentes.

Para realizar esta pesquisa, um caminho que se mostrou apropriado para compreender a maneira pela qual a Álgebra é ensinada e concebida se abriu em direção a ouvir os próprios sujeitos que vivenciam essa experiência. Sendo assim, decidimos ouvir, por meio de entrevistas, professores que ensinam Álgebra. Trata-se de professores do curso de Licenciatura em Matemática da UPTC, na cidade de Tunja¹⁰⁹, que ensinam Álgebra, bem como professores de Matemática que atuam no nível de Educação Média, de escolas localizadas nessa mesma cidade, cujo currículo contempla temas de Álgebra. O vínculo entre a universidade em questão e essas escolas é estabelecido pela atividade de estágios, exigência curricular, as quais os alunos do curso de formação de professor de Matemática devem realizar.

Desde 1953, a UPTC é reconhecida como uma universidade de caráter nacional e público, submetida às regulamentações do *Ministerio de Educación Nacional* (MEN), no que se refere às políticas e ao planejamento do sistema educacional. Com a avaliação positiva de vários de seus programas de *Educación Superior* por parte do *Consejo Nacional de Acreditación*¹¹⁰ (CNA), no ano 2015, a UPTC obteve a *Acreditación Multicampus*¹¹¹, a qual foi renovada no ano 2021 por mais seis anos (Resolução 023655 do 10 dic. 2021)¹¹². A sede principal da UPTC fica localizada na cidade de Tunja e tem influência na formação profissional na região do altiplano Cundiboyacense por conta das sedes nas cidades de Duitama, Sogamoso e Chiquinquirá. Ainda, a UPTC atende nível nacional, por meio de seus *Centros Regionales de Educación a Distancia*¹¹³ (CREAD).

¹⁰⁹ A cidade de Tunja é a capital do departamento de Boyacá, situado sobre a cordilheira oriental dos Andes a 125 km ao norte de Bogotá. É a capital de maior altitude da Colômbia, estamos a 2775 metros acima do nível do mar e conta com uma superfície de 118 km². No ano de 2021, segundo cifras do *Departamento Administrativo Nacional de Estadística* (DANE), a cidade de Tunja contava com um total de 180.568 habitantes.

¹¹⁰ Em português, Conselho Nacional de Acreditação. A acreditação é um testemunho dado pelo Estado sobre a qualidade de um programa ou instituição com base em um processo de avaliação prévio do qual participam a instituição, as comunidades acadêmicas e o *Consejo Nacional de Acreditación* — CNA — órgão do estatal que faz parte do MEN, o qual avalia às instituições de *Educación Superior* com base em um conjunto de políticas, estratégias, processos e organizações cujo objetivo fundamental é garantir à sociedade que as instituições de *Educación Superior* que fazem parte do sistema educacional colombiano atendam aos padrões de qualidade e cumpram suas finalidades e objetivos (Artigo 53 da *Ley 30* de 1992).

¹¹¹ O processo de Acreditação Multicampus é entendido como uma forma voluntária de garantir a qualidade dos processos que a UPTC desenvolve diariamente em todas as suas Unidades Acadêmico-Administrativas. Este processo é realizado nas diferentes Faculdades Seccionais, incluindo a Faculdade de Estudos a Distância (FESAD).

¹¹² http://www.uptc.edu.co/comunicaciones/doc/2021/R_023655_10122021_MEN.pdf.

¹¹³ Localizados nas cidades de Leticia no departamento de Amazonas, Barrancominas no departamento de Guainía, Acacías departamento do Meta, Bogotá, Quetame, Fusagasuga, Cogua e La Palma no departamento de Cundinamarca, Monterrey e Yopal no departamento de Casanare, Garagoa, Samacá, Chiquinquirá, Sogamoso, Duitama, Soatá e Chiscas no departamento de Boyacá, Barbosa e Barrancabermeja no departamento de Santander.

Essa universidade é a quarta universidade da Colômbia em número de alunos, tendo aproximadamente 30.000 alunos em cursos de graduação e 2.950 em pós-graduação¹¹⁴. Na sede central, está a Faculdade de Ciências da Educação, uma das primeiras faculdades dessa área na Colômbia que data de 1934. Oferece 12 programas de graduação e conta com 4.233 alunos, no total. Na Faculdade de Educação, está a *Licenciatura en Matemáticas*¹¹⁵. Como pioneira na formação de professores na Colômbia, através de suas diferentes etapas e nomes, conta com uma história de noventa anos na formação de profissionais no ensino de Matemática (Jiménez, 2019). Em 2022, o curso de *Licenciatura en Matemáticas* contava com 470¹¹⁶ alunos matriculados.

O curso de *Licenciatura en Matemáticas* apresenta as seguintes características gerais (Resolução 06 de 2017)¹¹⁷:

Tabela 3 - Informação geral do curso de *Licenciatura en Matemáticas* da UPTC

Duração do curso	10 semestres
Jornada	Estendida (D/N)
Sede	Tunja
Faculdade	Ciências da Educação
Número de créditos ¹¹⁸	170
Número de disciplinas	46
Período de admissão	Semestral

Fonte: elaboração própria.

O currículo do curso de licenciatura em Matemática conta com as seguintes disciplinas que tratam o conteúdo de Álgebra.

Tabela 4 - Disciplinas da *Licenciatura en Matemáticas* da UPTC que apresentam a Álgebra em seu conteúdo

Disciplinas	Créditos	Semestre
Fundamentos de Matemática	4	Primeiro semestre
Álgebra Linear	3	Terceiro semestre
Estruturas Algébricas	3	Quinto semestre

Fonte: Elaboração própria

¹¹⁴ Informações atualizadas: 8 de julho de 2022.

¹¹⁵ A partir de agora, quando nos referirmos à *Licenciatura*, ou o *Programa*, referimo-nos ao da UPTC.

¹¹⁶ Informação obtida do *Sistema de Registro Académico* (SIRA) da UPTC, em fevereiro de 2023.

¹¹⁷ [Resolución 06 de 2007](#) emitida por Consejo Académico de la UPTC

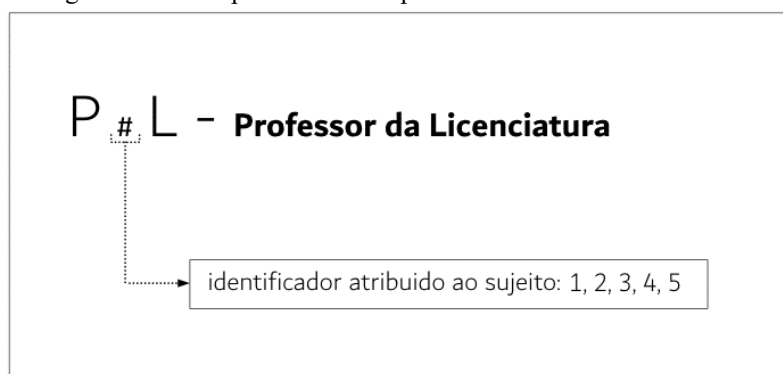
¹¹⁸ Um Crédito Académico é a unidade que mede o tempo estimado de atividade acadêmica do aluno com base nas competências profissionais e acadêmicas que se espera que o programa desenvolva. O Crédito Académico equivale a 48 horas totais de trabalho do aluno, incluindo as horas letivas com supervisão do professor e as demais horas que devem ser utilizadas em atividades de estudo independente, práticas, preparação para exames ou outras que sejam necessárias para atingir os objetivos de aprendizagem propostos, não incluindo os destinados à apresentação de exames finais. Fonte: [Ministério de Educación de Colombia](#).

Para tanto, buscamos os professores dessas disciplinas do currículo de *Licenciatura* (referidas na Tabela 4), e os convidamos a realizar a entrevista. Para entrar em contato com os professores, inicialmente enviamos uma carta dirigida ao coordenador do curso, solicitando autorização para realizar a geração de dados desta pesquisa, bem como os nomes e horários dos professores. Com essa informação, fomos ao encontro deles nas salas de aula, no intuito de nos apresentar, realizar uma breve introdução à pesquisa e convidá-los a participar de uma entrevista. Esse primeiro encontro teve como propósito tomar ciência do interesse dos professores para serem considerados como sujeitos significativos nesta pesquisa.

Com os professores que manifestaram interesse foi realizado um segundo encontro, no qual explicitamos a pesquisa e o que queremos saber. Deixamos claro que não seriam mencionados os seus nomes, pois trabalharemos com sua fala, proferida de *modo ingênuo*, ou seja, tão livre quanto possível, a respeito do tema focado na entrevista. Explicitamos aos participantes também que nossa intenção não seria fazer uma avaliação sobre o proceder do professor, mas tomar conhecimento de compreensões sobre a Álgebra e seu ensino. Após serem esclarecidas dúvidas, solicitamos um termo de compromisso assinado¹¹⁹ (Anexo 1), no qual, o professor manifesta concordância em ser considerado um sujeito significativo desta investigação e que suas falas sejam registradas e analisadas. Por fim, nesse mesmo encontro, foi agendada a data para a realização da entrevista.

Ao concluir este procedimento, obtivemos a participação de cinco professores do curso de *Licenciatura em Matemáticas* para a realização da entrevista. Os nomes desses sujeitos significativos forem alterados para códigos descritivos como segue:

Figura 6 - Códigos descritivos para nomear os professores da *Licenciatura*



Fonte: elaboração própria.

¹¹⁹ Ao realizar o consentimento informado, explicitamos – aos potenciais sujeitos significativos – o propósito geral da pesquisa e as características principais, assim como dos alcances de sua participação no projeto e os possíveis riscos e benefícios que no decorrer da pesquisa. Este consentimento informado visou a participação voluntária dos sujeitos, bem como deixa-os informados sobre seu direito de se retirar do estudo em qualquer momento.

O outro grupo de participantes de pesquisa são os professores que atuam em *Educación Média* de escolas com as quais o referido curso de *Licenciatura* tem parcerias. Cabe pontuar que a UPTC mantém parcerias com as 14 escolas públicas de *Educación Média* da cidade de Tunja, no âmbito do Convênio¹²⁰ inter-administrativo N°026, assinado entre a referida universidade e a prefeitura de Tunja, na data 06 de maio de 2015, com vigência indefinida. Este convênio,

estabelece as bases de colaboración, cooperación, coordinación e interacción interinstitucional de carácter académico, científico, tecnológico, didático e informativo por medio de la realización de programas y proyectos por medio de las pasantías, trabajos de grado, capacitación, asesorías, prácticas, consultorías servicios educativos, incentivos para apoyar la formación y todos aquellos que de común acuerdo se establezcan. La *Alcaldía Mayor de Tunja* [prefeitura da cidade de Tunja] busca que el estudiante [de graduación] complemente con la práctica exigida académicamente, su formación integral e idónea para obtener el título profesional, de igual manera, que se integre al proceso de formación académica. Con ese incentivo, la prefectura auxilia a los estudiantes universitarios en la aplicación y en el perfeccionamiento de sus conocimientos, en la recepción de instrucción metódica y en la posibilidad de relacionar la teoría con la realidad, para que, al final de sus estadios, puedan ser evaluados académicamente¹²¹ (Convênio N°026., 2015, p. 2, grifos, inserções e tradução nossa).

Das 14 escolas públicas na cidade, a *Licenciatura en Matemáticas* desenvolveu estágios docentes, no primeiro semestre de 2023, em cinco escolas. Decidimos incluir essas escolas neste estudo, tendo em vista a parceria estabelecida para que ali possam ser realizados os estágios. Conforme o acordado entre as instituições, é especificado que a *Alcaldía Mayor de Tunja* [prefeitura da cidade de Tunja] receberá um real e efetivo apoio para o desenvolvimento de diferentes programas sociais dirigidos para a comunidade e os estudantes, por sua vez, poderão realizar seu estágio de formação institucional.

Para obter acesso às escolas, inicialmente foram encaminhadas cartas de pedido de colaboração para o desenvolvimento da pesquisa. No início, três escolas responderam positivamente à nossa solicitação, passado um tempo, mais uma escola aceitou. Entramos em contato com aquelas escolas que aceitaram colaborar com nossa pesquisa, a fim de estabelecer um diálogo que nos permitisse conhecer os protocolos que cada escola tem para conceder autorização, tanto para entrar nas instalações da instituição, quanto para conversar com os

¹²⁰ http://www.uptc.edu.co/export/sites/default/facultades/prac_pedag/doc/conv_alcaldia_tunja_uptc.pdf

¹²¹ [...] se establezcan las bases de colaboración, cooperación, coordinación e interacción interinstitucional de carácter académico, científico, tecnológico, didático e informativo a través de la realización de programas y proyectos por medio de las pasantías, trabajos de grado, capacitación, asesorías, prácticas, consultorías servicios educativos, incentivos para apoyar la formación y todos aquellos que de común acuerdo se establezcan. La Alcaldía Mayor de Tunja busca que el estudiante complemente con la práctica exigida académicamente, su formación integral e idónea para obtener el título profesional, de igual manera, que se integre al proceso de formación académica, facilitándole a la universidad que los estudiantes apliquen sus conocimientos, los perfeccionen, reciban instrucción metódica y confronte la teoría con la realidad y al final de sus prácticas puedan ser evaluados y calificados académicamente.

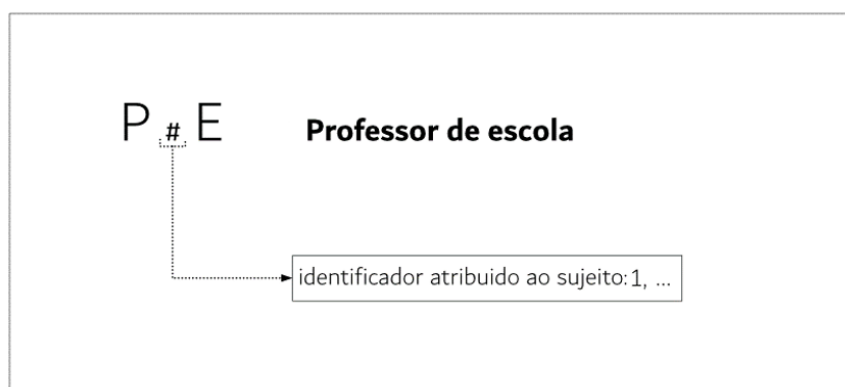
professores. Tendo a autorização, foi pedido o horário em que os professores poderiam nos receber, para não interromper suas atividades escolares.

Posteriormente, marcamos reuniões em cada escola para nos reunir com os professores e para ter uma conversa informal com os potenciais sujeitos significativos, a respeito de nossa pesquisa. A intenção foi também abrir um espaço de confiança, sempre tornando claro que será mantida a confidencialidade de sua identificação, sem atribuir juízos de valores com relação às suas falas. Com os professores que manifestaram interesse, foi agendado um encontro para esclarecer dúvidas a respeito da pesquisa e solicitamos um termo de compromisso assinado.

No ano letivo de 2023, a escola E1 tem 1460 estudantes e 64 docentes no total. Nessa escola, contamos inicialmente com a participação de três professores, mas não foi possível fazer a entrevista a dois deles, pois um professor teve que solicitar uma licença por motivo de saúde, e outra professora desistiu da entrevista. No final, contamos com a participação de um professor. A escola E2 tem 2300 estudantes e 110 docentes no total, nessa escola, contamos com a participação de uma professora. A escola E3 tem 3050 estudantes e 157 docentes no total, nessa escola, contamos com a participação de um professor e uma professora. Por fim, a escola E4 tem 1750 estudantes e 96 docentes no total, aqui, contamos com a participação de dois professores.

Assim, foram seis professores das escolas que constituíram os sujeitos significativos para nossa pesquisa. Todos os professores são concursados e com experiência como docentes de Matemática nos diferentes níveis da *Educação Básica* e Média. O código de identificação para o grupo de professores das escolas ficou da seguinte maneira:

Figura 7 - Códigos descritivos para nomear os professores das escolas



Fonte: elaboração própria.

Realizamos as entrevistas com esses sujeitos, agora denominados “significativos”. De acordo com Kvale (2011), o interesse das entrevistas nas pesquisas denominadas qualitativas é

o mundo-da-vida ¹²², olhado na particularidade do cotidiano vivenciado por esse sujeito. Segundo esse autor, a entrevista “é um método de sensibilidade e poder únicos para captar as experiências e os significados vividos do mundo cotidiano dos sujeitos. As entrevistas permitem que os sujeitos expressem aos outros sua situação desde sua própria perspectiva e em suas próprias palavras” (Kvale, 2011, p. 42, tradução nossa).

Assim, entendemos que uma entrevista é *entre-vistas*, quer dizer, um estar junto, olhando-se nos olhos e dialogando sobre o assunto objeto da entrevista. Trata-se sempre do encontro entre dois mundos, duas visões e duas imagens de mundo em que se dá o diálogo entre o entrevistador e entrevistado que vivenciam juntos o momento da entrevista. Na perspectiva de Gadamer (2011a), o diálogo com os outros, mesmo com suas objeções ou aprovações, suas compreensões ou seus mal-entendidos, entre outros modos de ser e agir eles (os outros) “[...] representa uma espécie de expansão de nossa individualidade e um experimento da possível comunidade a que nos convida à razão” (Gadamer, 2011a, p. 246). Esse autor também nos sugere a possibilidade de “[...] imaginar toda uma filosofia do diálogo, partindo dessas experiências: o ponto de vista intransferível do indivíduo, onde se espelha a totalidade do mundo, e a totalidade do mundo que se apresenta nos pontos de vista individuais de todos os outros como um e o mesmo” (Gadamer, 2011a, p. 246).

Na pesquisa de orientação fenomenológica,

A entrevista não segue um questionário pré-elaborado, pois, neste caso, o pesquisador estaria direcionando o dito pelo entrevistado e partindo de a prioris. Há sim uma interrogação: a do pesquisador. Esta é transformada em pergunta disparadora da entrevista que, para ser realizada e gravada, há que haver concordância por escrito e assinada pelo entrevistado. Deve acontecer ao modo de um diálogo em que o pesquisador fique atento ao dito, ouvindo o exposto. Nesse ouvir, algumas pequenas intervenções podem ocorrer e cujo sentido se faz na realidade que está sendo vivenciada por ambos (pesquisador e entrevistado) (Bicudo, 2020a, p. 53).

Nesse viés, ao focar em uma pergunta disparadora que abarque, na dimensão temática, os aspectos que tratam sobre a Álgebra e o modo que ela é compreendida pelos sujeitos significativos, dinamicamente ocorre o diálogo em que esperamos ouvir a concepção desses sujeitos a respeito da Álgebra. A pergunta disparadora foi: *Se você tivesse que explicar para alguém (outro professor ou aluno ou um cidadão comum) sua compreensão sobre a Álgebra e seu ensino, o que diria?*

¹²² O termo *Lebenswelt* de Edmund Husserl é uma ideia nuclear no pensar fenomenológico “que faz referência ao conjunto de experiências e vivências sobre o que as coisas adquirem significado, fazendo possível a comunicação” Kvale (2011, em nota de rodapé p.40, tradução nossa); segundo Bicudo (2020a), *Lebenswelt* “é entendido como a realidade constituída e produzida no movimento histórico cultural, que traz consigo o presente, o passado e o futuro em sua temporalidade. Não é um recipiente em que são colocadas as coisas e os seres mundanos, como conhecimento, teorias, etc. É o solo histórico e cultural em que habitamos” (em nota de rodapé p.36).

Consideramos que essa pergunta disparadora se refere às nossas principais inquietações. Entretanto, no decorrer da conversa¹²³, procuramos aprofundar compreensões sobre as experiências vivenciadas pelos participantes ao estarem em contato com a Álgebra e modos pelos quais ela foi aprendida e ensinada no transcorrer do processo de formação.

4.4 A interpretação no movimento de análise dos depoimentos

Antes de iniciar a gravação das entrevistas, previamente acordadas, alguns aspectos técnicos foram considerados com o objetivo de manter, na medida do possível, uma boa qualidade de gravação e, também, algumas estratégias para evitar uma eventual perda do material produzido. Para isso, buscamos um ambiente calmo em uma sala sem ruído excessivo, no entanto, a entrevista com a professora P4E só foi possível na sala onde ela ministra suas aulas. Além disso, para garantir que no momento de realizar as entrevistas elas não se perdessem devido a algum imprevisto técnico, utilizamos dois dispositivos de gravação. Após as gravações das entrevistas, iniciamos o tratamento dos dados, indexando as diferentes gravações em formato digital, com intuito de localizá-las nos dispositivos de armazenamento para seu posterior uso. Em seguida, foi realizada uma revisão do material, incluídos os “backups” para assegurar o estado e a qualidade das gravações.

Ao caminharmos em direção ao processo da transcrição, ou seja, de transpor a fala gravada para o escrito, foi tomado cuidado para manter o fio condutor de nossos procedimentos, no processo de mediação para uma linguagem escrita. Nesse sentido, referendamos Bicudo (1993a, p. 89): o “que é fixado pela escrita é o que se teria dito, mas que já não se diz. A escrita assume o lugar do dizer, impondo, necessariamente, um distanciamento entre dizer – escrever”.

Por sua vez, Gadamer (2011b, p. 398) nos alerta sobre este processo de mediação que:

[...] toda volta ao texto – seja um texto real, fixado por escrito, ou uma mera reprodução do que se expressa na conversação – remete à “notícia originária”, ao notificado ou anunciado originariamente que há de valer como algo idêntico dotado de sentido. A tarefa prescrita a tudo que se vai fixar por escrito é justamente que esta “notícia” deve poder ser compreendida. E o texto escrito deve fixar a informação originária de tal modo que seu sentido seja compreensível univocamente [...]. Nesse sentido, ler e compreender significa restituir à informação sua autenticidade original. A tarefa da interpretação se apresenta quando o conteúdo do que é fixado por escrito é controverso e é preciso alcançar a reta compreensão da “informação”.

No processo de análise das gravações transcritas, na abordagem de pesquisa que aqui estamos realizando, elas foram ouvidas várias vezes, buscando compreender o que foi dito para,

¹²³ Para desenvolver uma conversação é necessário, em primeiro lugar, que os interlocutores ao conversar não passem ao largo um do outro. É por isso que possui, necessariamente, a estrutura de pergunta e resposta. [...] Levar uma conversação quer dizer pôr-se abaixo da direção do tema, acerca do qual se orientam os interlocutores. Requer não abafar o outro com argumentos, mas, pelo contrário, sopesar realmente o peso objetivo da opinião contrária. Por isso, é uma arte do ir experimentando (Gadamer, 2011a, p.540-541).

posteriormente, transcrevê-las, ficando-se atentos de não fazer, nesse momento, interpretações com base em conceitos prévios, porque buscamos estar o mais próximo possível de sua expressão primeira a respeito do perguntado (Bicudo, 2020a, p. 53). Desse modo, nesta pesquisa, foi decidido transcrever as entrevistas na íntegra, conservando o idioma original (espanhol), mantendo-se os depoimentos dos sujeitos significativos. Em seguida, voltamo-nos para pensar sobre o processo de análise e o modo de proceder. Compreendemos que este processo está correlativamente ligado à visão de mundo e de realidade por nós assumida na pesquisa. Assim, debruçamo-nos em explicitar tanto os procedimentos quanto o *logos* (λόγος)¹²⁴ que estes envolvem, entendendo o *logos* como inteligibilidade que torna possível o dizer e o fazer sobre algo. Essa atitude nos permite olhar atentamente para o fenômeno aqui questionado, com o *objetivo de compreender as concepções que professores de Matemática expressam sobre a Álgebra e seu ensino*.

Assim, tendo como horizonte a busca pela compreensão, entendemos que esta não é uma coisa objetivamente dada, a qual demanda um pensar atento sobre o que se quer compreender. Para lograr essa meta, o pensar filosófico se mostra apropriado, pois, em nosso entendimento, ele é uma forma crítica e reflexiva de pensar, que já não aceita, de modo ingênuo, o objetivamente posto e as verdades pré-estabelecidas, abrindo-se à dúvida. Para tanto,

não parte de uma verdade ou de fundamentos dados, aprioristicamente, sobre o mundo. Porém, *olha para o que vê e busca compreender*, em um movimento de dúvida, de análises, de crítica, de esclarecimentos, de “re-flexões”. *Esse modo de proceder vai ao encontro daquele assumido pela fenomenologia* (Tambarussi, 2021, p. 24, grifos nossos).

Compartilhamos com Kluth (2005), a preocupação pela busca de entendimento sobre as características fundantes dos procedimentos, na procura de ficar cientes de que as formas de assumi-los não se limitam à mera instrumentação técnica. Assim, a pesquisa “que assume esse compromisso de entendimento deve interrogar seu procedimento em seus princípios e em seu primado a fim de construir uma compreensão abrangente das possibilidades abertas pela

¹²⁴ O termo *logos* tem raiz no grego e tem sido associado a uma multitude de significados, entre eles, “de fato, como assinala Husserl, ‘logos’ significa: 1) Palavra e proposição, bem como aquilo que a proposição contém e o sentido da afirmação (o que a expressão indica) ou ato espiritual mesmo da afirmação. 2) A idéia, em todos os sentidos antes enunciados, de uma norma racional. Por isso, o Logos significa então a razão mesma como faculdade e como um pensamento que caminha para uma verdade ou que tem pretensão de verdade. Nesse aspecto do Logos, estaria também incluída, e de modo especial, a faculdade de formar conceitos justos (*Formale und transzendente Logik*, 1929, p.16) [...] Heidegger assinala, por sua vez, que a significação de ‘logos’ enquanto enunciado, fundamento de toda proposição ou juízo, mas anterior a eles, é o deixar ver algo, é o tornar patente aquilo de que se fala. O modo de deixar de ver o que se manifesta é a voz, φωνή e só por causa deste sentido primário, sobre o qual se assenta a possibilidade da verdade ou falsidade como descoberta ou encobrimento de um ente, é possível entender por qual motivo “logos” pode significar igualmente “razão”. Assim, temos, no Logos, o significado do enunciado como ato de deixar ver algo patente, como o que é assinalado no enunciado e como a razão de ser daquilo que o enunciado enuncia” (Mora, 2001, p.1796).

pesquisa” (Kluth, 2005, p. 28). Por isso, entendemos que o compromisso anunciado por Kluth nos convida a manter presente a crítica da fenomenologia à atitude natural, pois nesta atitude o método é que garante as realizações da ciência e a validação de seus resultados, que no do ideal de ciência, denominado positivismo, por Auguste Comte¹²⁵, essa ciência significava metodologia sistemática, limitada aos fatos, e aplicável a todos os domínios de conhecimento, entre eles as denominadas *ciências do espírito* (Geisteswissenschaften¹²⁶).

A fenomenologia, segundo Manem (2003), reivindica seu caráter científico num sentido amplo, posto que estuda de um modo sistemático, explícito, autocrítico e intersubjetivo seu objeto de estudo: nossa experiência vivenciada. Sobre a preocupação tratada anteriormente, Martins, Boemer e Ferraz (1991, p. 39, ênfase em maiúscula dos autores) manifestam que no proceder na pesquisa fenomenológica “a primeira questão que se coloca é em relação à palavra MÉTODO; ela tem sido cautelosamente evitada por alguns fenomenologistas para que não seja associada ao sentido cartesiano de método, característico de método das ciências naturais”. Segundo esses autores, prefere-se falar de “trajetória”, pois, quando o pesquisador interroga terá uma trajetória, ou seja, estará caminhando em direção ao fenômeno que se mostra por si através do sujeito que experiência a situação. Neste sentido, temos de assinalar (destacar) o mal-entendido sobre a fenomenologia como sendo não mais do que um método, uma ferramenta. Ela é mais do que isso. Segundo Struchiner (2007), ao resgatar a origem da palavra “método”, o significado vai além de uma mera ferramenta.

Metá significa “através de”, “por meio de” e *hódos* significa “caminho”, “direção”, portanto o termo “método” designa um certo caminho que permite chegar a um fim”. [...] Que fim é este? A onde a fenomenologia pretende nos levar? Trata-se, na verdade, de um “retorno”, um caminho de volta, em que o “fim” nada mais é do que o começo: “de volta às coisas mesmas”, para citar a tão famosa expressão husserliana. A fenomenologia é, portanto, o caminho de volta às coisas mesmas, ao mundo da experiência vivida ou *Lebenswelt* (mundo-da-vida) (Struchiner, 2007, sp., grifos e do autor).

¹²⁵ Isidore Marie Auguste François Xavier Comte fue un filósofo francés, y escritor que formuló la doctrina del positivismo. “O positivismo de Comte desenvolveu-se no neopositivismo a partir da corrente intelectual denominada ‘Círculo de Viena’ que introduziu a Lógica Matemática como instrumento de linguagem humana. Assim, para o neopositivismo um discurso veicula um conhecimento quando é logicamente consistente e, para esse grupo a questão da validade é o critério da ciência. É preciso que a pesquisa busque a verificação dos fatos e não se preocupe com conceitos como: Liberdade, Justiça, Educação, pois eles são desprovidos de significados científicos. O Círculo de Viena passou gradualmente a ver que a mensuração nem sempre era possível e introduziu reformulações no critério de verificação, passando a usar o critério de falseabilidade” (Martins, Boemer e Ferraz, p.34).

¹²⁶ Segundo Gadamer (2011a), “A expressão ‘ciências do espírito’ se popularizou principalmente através do tradutor da *lógica* de John St. Mill. Na sua obra, Mill procura, suplementarmente, esboçar as possibilidades que o emprego da lógica da indução possui sobre as *moral scienses*. O tradutor diz, para isso, ‘ciências do espírito’ (*Geisteswissenschaften*)” (p.31). O termo que provém do alemão e foi disseminado pelo historiador, filósofo e sociólogo alemão Wilhelm Dilthey (1798-1857), o termo *Geisteswissenschaften*, segundo Palmer (1999, p. 105), “quer dizer todas as humanidades e as ciências sociais, todas as disciplinas que interpretam as expressões da vida interior do homem, quer essas expressões sejam gestos, actos históricos, leis codificadas, obras de arte ou de literatura”.

Assim, compreendemos que quando se fala do *método fenomenológico*, esse tem um sentido diferente do adotado pelas ciências naturais, portanto, diz respeito a um método especificamente filosófico (Husserl, 2020). Aliás, ao tratar de fenomenologia, enquanto método alternativo de pesquisa, torna-se necessário enfatizar a palavra “alternativo”, no seu sentido verdadeiro, ou seja, “não se pode pretender que este seja o único método, ou melhor, ainda, o pior” (Martins, Boemer, Ferraz, 1991, p. 39). Trata-se da escolha de um caminho que tem sentido para nós – pesquisador, orientadora e grupo de pesquisa (FEM).

Retomando o aspecto dos procedimentos da pesquisa, podemos assim resumi-los: buscamos por compreensões. Mas que compreensões são essas que se expressam nas falas dos sujeitos significativos no âmbito da presente pesquisa? Nosso interesse está voltado para a busca de sentidos e significados que, ao serem expressos, trazem *relatos de vivências subjetivas sobre Álgebra e seu ensino*. Essas falas, no movimento da pesquisa tornaram-se o corpus textual¹²⁷, que no intuito do decorrer da análise, é lido, compreendido e interpretado.

Como abordar esse movimento de análise em coerência com a postura metodológica assumida na presente pesquisa? Segundo Van Manem (2003), a fenomenologia apela para a nossa experiência comum imediata no intuito de efetuar uma análise estrutural do que é mais habitual, mais familiar, mais evidente para nós. O objetivo é elaborar uma *descrição* (textual) *estimulante e evocativa* das ações, condutas, intenções e experiências humanas tal como as conhecemos no mundo-da-vida. Nesse sentido, Martins, Boemer e Ferraz (1991, p. 36-37, grifos nossos) assinalam que “a fenomenologia tem a preocupação de descrever o fenômeno e não de explicá-lo, não se preocupando com o buscar relações causais. A concentração está voltada ao sentido de *mostrar e não em demonstrar*, e a *descrição prevê ou supõe um rigor*, pois, através da rigorosa descrição”, pode-se compreender o fenômeno.

Com a leitura dos autores citados, compreendemos que a fenomenologia, enquanto procedimento, mostra-se como intento sistemático para descrever e delinear as estruturas (ou seja, os invariantes) de sentido da experiência vivenciada pelo sujeito, isto é, do mundo tal como é experienciado imediatamente por nós de um modo pré-reflexivo, e não tal como o conceptualizamos ou categorizamos. Esses invariantes são manifestações da estrutura do

¹²⁷ Compreendemos por *texto* todas as produções humanas, ou seja, “[...] um amplo espectro de possibilidades de compreensão, desde o texto escrito até a realidade cotidiana em que os sujeitos da pesquisa vivem e, inclusive, o contexto sócio-histórico-cultural. O escrito no texto pode ser oriundo de: relatos de experiências vivenciadas, diretamente, pelo sujeito entendido como significativo para a indagação que aponta os caminhos a serem percorridos na intenção de compreender a respeito do indagado; de relato de ocorrências histórico-sociais; de entrevistas; de obras históricas culturais materializadas nos modos pelos quais estavam à disposição no momento de sua criação, como obras arquitetônicas, pinturas, músicas” (Bicudo, 2021, 551).

fenômeno, e dão indicativos que se evidenciam por perfis, delineando a essência desse fenômeno percebido, o *eidos*¹²⁸.

Husserl (2006) apresenta a fenomenologia eidética como doutrina descritiva eidética dos vividos puros, ou “uma disciplina *puramente descritiva* que investiga todo o campo da consciência transcendental *na intuição pura*” (p. 136). Entendemos, com Bicudo (2022), que esse *intuir*, a que alude Husserl, é um ato que traz ao *corpo-vivente*¹²⁹ a visão da essência, na dimensão da fenomenologia eidética, que não é somente um trabalho intelectual, é um trabalho do próprio corpo-vivente, o qual vai realizando articulações sobre tudo o que lhe chega em diferentes modalidades pelos sentidos, que estão ativos na própria apreensão desse fenômeno no momento em que a ação de intuir ocorre. Neste sentido, Husserl (2006) se refere à intuição como *princípio dos princípios* em que:

[...] *toda intuição doadora originária é uma fonte de legitimação do conhecimento, tudo que nos é oferecido originariamente na intuição* (por assim dizer, em sua efetividade de carne e osso) *deve ser simplesmente tomado tal como ele se dá*, mas também *nos limites dentro dos quais ela se dá* (p. 69, grifos do autor).

Colocamos em destaque as considerações trazidas por Bicudo (2022), ao referir que o ato de sentir as sensações e dar-se conta (pela ação da consciência) de que as está sentindo, explicita a concepção de vivência (*Erlebnis*¹³⁰). Diante disso, compreendemos que o corpo-vivente não é separado da consciência, mas, pela intencionalidade, que é característica da

¹²⁸ Segundo Van Manen (2003), “o termo «essência» deriva do grego *ousia* que significa «a natureza essencial interna de uma coisa», «o verdadeiro ser de algo». O latim *essentia*, de *esse*, significa «ser». A essência consiste em aquilo que faz uma coisa ser o que ela é, e sem o qual não seria aquilo que é; aquilo que faz uma coisa ser o que é, em vez de ser ou se tornar outra coisa. No pensamento de Platão, a essência é a apreensão da natureza mesma de algo, dos quais um determinado momento representa apenas um exemplo ou imitação imperfeita. *Eidos* é o termo alternativo de Platão para Ideia ou Forma, que Husserl utilizou para designar as essências universais. Com Aristóteles a noção de essência é esse algo que uma coisa tem em seu estado final completo; a natureza essencial o princípio interno de uma coisa. Nos escritos de Husserl, «essência» se refere frequentemente ao que são as coisas, na oposição a sua existência. Alguns fenomenólogos distinguem entre *Grundwesen*, que designa a essência básica ou fundamental, e *empirisches Wesen* ou essência empírica. Nesta distinção husserliana, a essência básica ou ideal é acessível à intuição fenomenológica. Por exemplo, existe a essência empírica dos «professores» reais com todas suas peculiaridades e inadequações inevitáveis, e está a essências fundamental ou ideal do Professor como a essência para a qual se orienta todo professor real” (p.193, tradução nossa).

¹²⁹ “Na visão husserliana, o corpo-vivente se mostra como um todo, como uma unidade de físico, psíquico, espírito. Revela a dimensão da vida psíquica por meio de gestos e de posturas que não são caóticas, casuísticas, porém organizadas por um poder espiritual que caminha junto ao movimento do sentir a sensualidade que se expande pela totalidade do corpo-vivente” (Bicudo, 2022, p.127).

¹³⁰ Segundo o dicionário de filosofia de Abbagnano (2007), o termo *Erlebnis* pode remeter à palavra vivência. “Experiência viva ou vivida, a V [vivência] designa toda atitude ou expressão da consciência [...] Husserl considerou a V [vivência] como um fato de consciência, logo, como um entre os demais conteúdos do cogito. ‘Consideramos as V [vivência] de consciência em toda a plenitude concreta com que se apresentam em sua conexão concreta — O fluxo da consciência — e na qual se unificam graças à sua própria existência. Portanto, é evidente que toda V [vivência] do fluxo que o olhar reflexivo consegue apreender tem uma essência própria, a ser captada intuitivamente, em conteúdo que pode ser considerado em sua característica intrínseca” (p.1006, inserções nossas).

consciência, ela o transcende, vai além do corpo-vivente. Tendo em vista o mencionado, a autora explicita que

No âmbito da fenomenologia husserliana, a consciência é sempre encarnada e é consciência de algo, portanto, não é um órgão naturalisticamente tomado como contendo formas apriorísticas de intuições, como no caso da concepção kantiana das intuições puras de espaço e de tempo, nem é um recipiente que contém ideias, normas, valores, etc. É sempre *consciência de algo*, portanto não vazia (Bicudo, 2022, p. 127).

A consciência, como foi exposto, nunca é vazia, sempre está em movimento, articulando sentidos daquilo que capta na percepção, no movimento noeses-noema¹³¹, procedendo a articulações mais elevadas, no próprio λόγος (*logos*), fazendo com que aquilo que está sendo articulado *faça sentido*. Por isso, compreendemos que, na perspectiva aqui assumida, ficam excluídas todas as teorizações dedutivas¹³², ou seja, predadas. Essa consideração nos evoca o questionamento sobre como podemos proceder, se não podemos limitar nossas interpretações a uns focos teóricos pré-estabelecidos?

A fenomenologia, como caminho da modificação radical sobre este a priori teórico ou juízo explicitado predicativamente, que nos chega de maneira pronta, como tematizações prévias que nos dizem “isto é!” ou “é assim que ocorre!” etc., propõe-nos a dúvida como recurso metodológico. Esta dúvida não é uma negação universal como fora compreendida por Descartes, pois, como nos tem mostrado Husserl (2006, p. 80), a “tese [natural] é posta ‘fora de ação’, é colocada entre parêntesis, ela se transforma na modificação ‘tese entre parênteses’, e o juízo puro e simples, no ‘juízo entre parênteses’”. Esse modo de proceder é denominado por Husserl como *epoché* (ἐποχή)¹³³ e refere-se à “suspensão” ou colocação “entre parênteses” de

¹³¹ “A estrutura da intencionalidade, como exposta nos escritos de Husserl, pode ser analisada mediante dois componentes: o objeto como intencionado, ou seja, como o algo para o qual a consciência se dirige, o *noema*, e o ato consciente que intenciona o objeto, o ato da *noesis*. O *noema* pinça o lado do objeto da relação intencional e o *noesis* destaca o lado do sujeito, intencionando os modos pelos quais ele é dado à consciência” (Bicudo, 2022, p.128).

¹³² As *Inferências mediadas* não lhe são terminantemente proibidas; mas como todos os seus conhecimentos devem ser descritivos, puramente ajustados à esfera imanente, as inferências e todo tipo de procedimento não-intuitivo só têm a importância metódica de nos levar até as coisas que uma posterior visão direta da essência tem de trazer à condição de dado. Analogias que ocorram podem, antes da intuição efetiva, sugerir conjecturas acerca de nexos eidéticos, e inferências que levem a investigação adiante podem ser feitas a partir delas: mas, ao fim e ao cabo, as conjecturas têm de ser ratificadas pela visão efetiva dos nexos eidéticos. Enquanto isso não acontece, não temos resultado fenomenológico algum (Husserl, 2006, p.162).

¹³³ O termo vem do grego ἐποχή. De acordo com o dicionário de Nicola de Abbagnano (2007), esse termo significa “Suspensão do juízo, que caracteriza a atitude dos cétricos antigos, particularmente de Pirro; consiste em não aceitar nem refutar, em não afirmar nem negar. O contrário dessa atitude é o dogmatismo, em que se dá assentimento a alguma coisa obscura, que constitui objeto de pesquisa científica. Segundo o ceticismo, essa atitude era a única possível para se atingir a imperturbabilidade. [...] Na filosofia contemporânea, com Husserl e a filosofia fenomenológica em geral, a ἐποχή tem finalidade diferente: a contemplação desinteressada, ou seja, uma atitude desvinculada de qualquer interesse natural ou psicológico na existência das coisas do mundo ou do próprio mundo na sua totalidade” (Informar autor e ano, porque o leitor não sabe se você se refere a Abbagnano ou a Husserl, pois para esse último, não é informado ano p. 339). É preciso destacar, conforme Bicudo (2020b), que Husserl tem como pergunta central o conhecimento do mundo, buscando, em toda sua obra, explicitar como o conhecimento se constitui e se produz; ele não busca dar uma resposta sobre o “real”, sobre o que é.

nossas crenças e preconceitos sobre a realidade, a fim de examiná-las objetivamente e conseguir *descrever* os fenômenos como eles aparecem à nossa consciência, e compreender seus significados.

A respeito da *ἐποχή* fenomenológica, Van Manem (2003) nos alerta que o “problema” da investigação fenomenológica não é que saibamos demasiado pouco sobre o fenômeno que se quer estudar, mas que sabemos demasiado. Esse “problema” refere-se a nossos conhecimentos prévios baseados no “senso comum”, nossas suposições, presunções e o conjunto de conhecimentos científicos existentes, os quais nos predis põem a interpretar a natureza do fenômeno antes inclusive de nos colocarmos a investigar a respeito do mesmo. Ou seja, tanto o conhecimento científico quanto o conhecimento do cotidiano já disseram muito sobre aspectos de determinado fenômeno. De acordo com Husserl (2006), em termos metodológicos, essa operação da *ἐποχή* fenomenológica procede em uma série de passos de “exclusão de circuito”, de “parentetização” e, assim o referido método, assumirá o caráter de uma redução progressiva. “Falaremos, por isso, e até preponderantemente, de *reduções fenomenológicas* (ou, antes, unificando-as, *da* redução fenomenológica, tendo em vista a unidade de seu conjunto) e, portanto, também de reduções fenomenológicas sob o ponto de vista epistemológico” (Husserl, 2006, p. 85).

De acordo com Van Manem (2003), a investigação fenomenológica tem como ponto de partida a “situação” que, para os propósitos da análise, envolve a descrição e a interpretação (do corpus textual), a fim de que funcionem como ponto nevrálgico exemplar dos significados expressados por essa situação. Segundo esse autor, as descrições fenomenológicas pretendem elucidar a experiência vivenciada, ou seja, descrever os fenômenos tal como se apresentam a nossa consciência, sem fazer suposições ou inferências sobre sua natureza. A questão é, naturalmente, que o significado da experiência vivenciada, em geral, encontra-se oculto ou dissimulado, mas, a descrição (nosso corpus textual) permite-nos examinar os fenômenos de modo rigoroso, buscando seus sentidos e significados. Em suma, compreendemos que as reduções fenomenológicas, em particular, incluem a *ἐποχή* que é uma suspensão de julgamento sobre a existência do mundo externo. A “redução fenomenológica” consiste em direcionar a atenção aos fenômenos, tal como se apresentam na consciência, sem preconceitos ou interpretações. Por meio dessas reduções, Husserl procurou obter uma compreensão mais profunda e uma descrição mais precisa da estrutura da experiência consciente, distinguindo entre o que é “dado” na experiência e o que é adicionado pela interpretação subjetiva/intersubjetiva. Assim, entendemos que a fenomenologia, enquanto método, permite-nos ir da aparência dos fenômenos, mediante o modo pelo qual ele se dá ao sujeito que percebe,

à plenitude da experiência vivenciada, mediante a expressão do que é compreendido pelos sujeitos, assegurada pelas análises hermenêuticas da linguagem. Dessas análises, caminha-se em direção às reduções.

No contexto da presente pesquisa, tomamos como corpus textual as entrevistas realizadas com os sujeitos denominados significativos, e, ao considerar que *para que o que está escrito, diga*, ou seja, revele sentidos e significados no âmbito da multiplicidade do dito, buscamos auxílio da *interpretação* para que se compreenda o escrito.

4.4.1 Expondo compreensões sobre interpretação

O tratado anterior nos remete a pensar, no âmbito do movimento de análise dos depoimentos da presente pesquisa, sobre como compreender a *interpretação* e, mais do que isso, como analisá-la, assumindo-se a postura fenomenológica.

Ao realizar uma primeira busca da palavra *interpretação*, o dicionário Houaiss da língua portuguesa, remete-nos para o ato ou efeito de interpretar, definindo esta última palavra, enquanto verbo, como: determinar o significado preciso de (texto, lei etc.), adivinhar o significado de (algo) por indução (por exemplo, sonhos, um olhar etc.), dar certo sentido a (alguma coisa), entender, julgar, traduzir ou verter de uma língua para outra, representar (personagem, obra ou autor), tocar ou cantar. Já o dicionário de Filosofia de Nicola de Abbagnano (2007, p. 579) indica que a palavra interpretação (do latim *Interpretatio*) significa, em geral, “possibilidade de referência de um signo ao que ela designa, ou também a operação através da qual um sujeito (intérprete) estabelece a referência de um signo ao seu objeto (designado) [...]”. Essas primeiras buscas nos permitem delinear alguns dos sentidos da palavra *interpretação*, que serão considerados no percurso de explicitar nosso procedimento de análise no âmbito da metodologia desta pesquisa.

Ao buscar a palavra *interpretação* no dicionário de filosofia de Ferrater Mora (2001, p. 1325), somos remetidos à palavra *Hermenêutica* que deriva do vocábulo grego ἐρμηνεία e “significa principalmente ‘expressão’ (de um pensamento); daí, ‘explicação’ e sobretudo ‘interpretação’ do pensamento”. Ao dirigir nosso olhar para a palavra hermenêutica, encontramos diversos significados que são ilustrados e definidos historicamente e vão desde a arte de interpretar livros sagrados, como os textos antigos, até os sinais e os símbolos da cultura. A palavra hermenêutica tem sido associada desde os gregos com *interpretação*, pois esta palavra deriva *hermeios* que se referia ao sacerdote do oráculo de Delfos (Palmer, 1999). Hermenêutica ou interpretação deriva, etimologicamente, de Hermes, o deus mensageiro alado, o qual na mitologia grega atribuía à invenção da linguagem e da escrita, instrumentos pelos

quais os seres humanos poderiam transmitir e interpretar as mensagens dos deuses. Resulta interessante a associação de Hermes com uma função de *transmutação*, ou seja, “de transformar tudo aquilo que ultrapassa a compreensão humana em algo que essa inteligência possa compreender” (Bicudo e Garnica, 2021, p. 61).

De acordo com Palmer (1999), ao explorar as raízes da palavra hermenêutica, essas residem no verbo *hermeneuein* — interpretar [ἐρμενεύειν] — e o substantivo *hermeneia* — interpretação [ἐρμηνεία] —, que junto com as três orientações significativas básicas, que elas veiculam, no seu modo antigo de expressar (dizer, explicar e traduzir), contribuem para esclarecer a natureza da interpretação em teologia e em literatura e na moderna compressão da hermenêutica.

A primeira orientação fundamental de *hermeneuein* [ἐρμενεύειν], compreendida como *dizer*, relaciona-se com a função anunciadora de Hermes, lembrando que desde tempos antigos, grandes obras foram feitas para serem ditas em voz alta e para serem ouvidas. Assim, enquanto na *interpretação* se destaca o poder da palavra falada, pois a linguagem escrita não tem a “expressividade” primordial da fala, a segunda orientação fundamental de ἐρμενεύειν é *explicar* que, na dimensão expressiva, perpassa o *dizer*, pois se fundamenta em uma *pré-compreensão* que contribui para racionalizar e clarificar esse algo a ser explicado. Assim, antes de qualquer explicação significativa se tem que adentrar no horizonte¹³⁴ do tema e da situação. Na terceira orientação fundamental de ἐρμενεύειν, considera-se *interpretar* como *traduzir*; nesta orientação, torna-se visível e relevante o contraste de perspectivas e horizontes. Desse modo, quando um texto está em língua estrangeira, procura-se tornar compreensível o que é estrangeiro, estranho ou ininteligível. O tradutor atua como um mediador entre dois mundos diferentes, utilizando como meio a própria língua. Levando em conta esta última orientação descrita por Palmer (1999), como estando ancorada no processo de análise de nosso corpus textual da presente pesquisa, destacamos:

A tradução torna-nos conscientes de que a própria língua contém uma visão englobante do mundo, à qual o tradutor tem que ser sensível, mesmo quando traduz expressões individuais. A tradução apenas nos torna mais totalmente conscientes do modo como as

¹³⁴ Segundo Gadamer (2011a) *horizonte* é “o âmbito de visão que abarca e encerra tudo o que é visível a partir de um determinado ponto. Aplicando-se à consciência pensante falamos então da estreiteza do horizonte, da possibilidade de ampliar o horizonte, da abertura de novos horizontes etc. A linguagem filosófica empregou essa palavra, sobretudo desde Nietzsche e Husserl, para caracterizar a vinculação do pensamento à sua determinidade finita e para caracterizar, com isso, a lei do progresso de ampliação do âmbito visual. Aquele que não tem um horizonte é um homem que não vê suficientemente longe e que, por conseguinte, supervaloriza o que lhe está mais próximo. Pelo contrário, ter horizontes significa não estar limitado ao que há de mais próximo, mas poder ver para além disso. Aquele que tem horizontes sabe valorizar corretamente o significado de todas as coisas que caem dentro deles, segundo os padrões de próximo e distante, de grande e pequeno. A elaboração da situação hermenêutica significa então a obtenção do horizonte de questionamento correto para as questões que se colocam frente à tradição” (p.452).

palavras na realidade moldam a nossa visão do mundo, mesmo as nossas percepções. Não há dúvida de que a língua é um repositório de uma experiência cultural; existimos nesse *medium* e através dele; vemos através dos seus olhos (p. 37, grifos do autor).

Ainda, esse mesmo autor se refere sobre a terceira orientação,

A tradução consciencializa-nos [concientiza-nos], pois, do choque entre o nosso universo de compreensão e aquele em que a obra actua. Enquanto que a barreira da língua torna mais visíveis estes dois universos compreensivos, eles estão presentes em qualquer interpretação de uma obra escrita na nossa própria língua, e em qualquer diálogo autêntico, especialmente entre interlocutores separados por diferenças geográficas (p. 40, inserções nossas).

No âmbito do movimento de análise de nosso corpus textual, consideramos relevante ter presentes as orientações significativas da palavra *ἐρμενεύειν*, voltando-nos constantemente a seus significados. Tendo em conta que, ao fazer a transcrição dos depoimentos, a escrita assume o lugar do *dizer*, impõe-se um distanciamento entre a expressividade do que é falado e do que é escrito, porém buscamos nesses textos manter os sentidos originários que evocam o dito (falado) nas entrevistas. Pelo contexto em que se desenvolveu esta pesquisa, consideramos importante ter presente a orientação da hermenêutica que trata sobre o *traduzir*, pois ao trabalhar com duas línguas (espanhol e português), as palavras que se articulam nos textos das transcrições carregam tanto visões de mundo como horizontes de sentido distintos; isso demanda um cuidado do pesquisador, tanto como mediador da mensagem originária, como mediador da interpretação do corpus textual. Sobre esta orientação última de *ἐρμενεύειν*, o *traduzir*, Gadamer (2011b, p. 395) indica que:

Quando se fala de “texto” nesses casos significa que não se trata somente de compreendê-lo, mas de vertê-lo a outra língua. Desse modo, converte-se em “texto”, pois o que é dito nele não somente é compreendido, mas passa a ser o “objeto” que está aí frente a uma infinidade de possibilidades de traduzir o dito na “língua-meta”. Isso implica por sua vez uma relação hermenêutica.

4.4.2 A tarefa da hermenêutica:

Esta subseção tem como alvo apresentar os principais elementos da Hermenêutica, enquanto teoria da interpretação, pois demo-nos conta da necessidade de explicitar nosso entendimento sobre as características fundantes que sustentam os procedimentos de análise da presente pesquisa.

De acordo com Palmer (1999), hoje a hermenêutica se refere à ciência da interpretação, que, na trajetória dos modos de ser compreendida, tem sido considerada como: uma teoria da exegese bíblica, uma metodologia filológica geral, uma ciência de toda a compreensão linguística, uma base metodológica das denominadas *Geisteswissenschaften*, uma fenomenologia da existência e da compreensão existencial e como um sistema de interpretação. Consideramos pertinente expor os principais elementos do fio condutor na trajetória em que a

hermenêutica tem sido compreendida pelos principais autores que trabalham com esse tema, pois nos auxilia a explicitar seus fundamentos e o modo de ser compreendida por nós.

Para isso, propomos explicitar dois movimentos hermenêuticos propostos por Ricoeur (1990), que se mostram importantes para o desenvolvimento dessa abordagem filosófica. O primeiro movimento é o que parte das hermenêuticas regionais à hermenêutica geral, que consiste em reconhecer a diversidade de métodos e objetos de interpretação. O segundo movimento é o da epistemologia à ontologia, que busca questionar as condições de possibilidade do conhecimento e o sentido do ser.

A. Das hermenêuticas regionais à hermenêutica geral. Inicialmente, podemos localizar as ideias da hermenêutica no âmbito da filologia dos textos clássicos, sobretudo os da antiguidade greco-latina. Segundo Dilthey (1999), a interpretação artística¹³⁵ (*kunstmäßige* — hermenéia—) dos poetas, no período do iluminismo grego, desenvolveu-se a partir da necessidade do ensino. Não obstante, bases mais firmes foram surgindo, quando a retórica também se vale da interpretação, o que se deu tanto entre os sofistas quanto entre as escolas dos retóricos. O autor também destaca que, neste período, escolas da retórica, como no caso da aristotélica, ensinavam a decompor o todo de um produto literário em suas partes.

Um segundo passo importante no desenvolvimento da hermenêutica, segundo Dilthey (1999), foi dado pela arte da interpretação e pela constituição das suas regras na filologia alexandrina, em que se destacaram grandes filólogos como Aristarco, Hiparco e Zenódoto. Também, neste período, foi relevante a filologia de Pérgamo, que por meio de Krates de Mallos trouxe da escola estoica o princípio da *interpretação alegórica*. Este procedimento “estava fundamentado inicialmente no fato de que ela [a interpretação alegórica] nivela a contradição entre documentos religiosos e uma visão de mundo refinada” (Dilthey, 1999, p. 19, inserções nossas). É por isso que a *interpretação alegórica* foi igualmente necessária para os intérpretes dos vedas, de Homero, da Bíblia e do Corão.

Também, podemos localizar as primeiras ideias da hermenêutica no âmbito da exegese dos textos sagrados, o Antigo e o Novo Testamentos. Dilthey (1999) identifica o retorno de uma *consciência metódica a respeito da interpretação* na disputa entre a escola teológica

¹³⁵ No texto de Dilthey (1999, p.15), o tradutor para português, apresenta seguinte nota de aclaração: “Dilthey fala sempre de *Auslegungskunst* (literalmente ‘arte da interpretação’) e qualifica como *kunstmäßig* o processo de interpretação. A tradução tenta resgatar o elemento artístico que está presente na tarefa de interpretar, mas não consegue mais mostrar suficientemente o aspecto técnico exigido no processo. O alemão evoca este outro aspecto mais fortemente do que o uso do termo ‘arte’ em português deixa parecer tanto que em toda a tradução se poderia utilizar técnica de interpretação e processo técnico de interpretação. Em todo caso, toda arte também pressupõe técnica, e para a compreensão do termo neste texto é necessário reaproximar a palavra ‘arte’ do termo ‘artesão’, por exemplo”.

*alexandrina*¹³⁶ e a *antioquena*¹³⁷. Sua base comum era a ideia de que uma *inter-relação interna de profecia e cumprimento* unia o Antigo e o Novo Testamento. A igreja cristã necessitava da interpretação alegórica para introduzir a teologia do *Logos* no Antigo Testamento. No entanto, a escola antioquena explicava seus textos só a partir de princípios gramático-históricos, e rejeitava um duplo sentido dos textos, aceitando somente uma conexão mais elevada entre os acontecimentos. A partir desta disputa, Orígenes¹³⁸ e Agostinho fundamentaram as primeiras teorias hermenêuticas levadas a efeito, de que temos conhecimento.

Entendemos, para efeitos de clareza, ser importante analisar a tendência geral da hermenêutica bíblica ao confiar num “sistema” de interpretação a partir do qual as passagens individuais possam ser interpretadas, uma vez que entendemos que nela se explicita o fio condutor do “círculo hermenêutico”. Segundo Gadamer (2011a), Lutero e aqueles que o seguiram buscam por um “princípio hermenêutico” que servisse de guia, uma vez que

transferiram essa imagem conhecida da retórica clássica ao procedimento da compreensão, e desenvolveram como princípio fundamental e geral de uma interpretação de texto o fato de que todos os aspectos individuais de um texto devem ser compreendidos a partir do *contextus*, do conjunto, e a partir do sentido unitário para o qual o todo está orientado (p. 275).

Desde o Renascimento, a interpretação e a constituição de suas regras entraram em um novo estágio, indo além das particularidades dos textos, e acima de tudo, além das receitas, isto é, de modos específicos de realizar a exegese de textos, para a arte¹³⁹ de compreender. “A

¹³⁶ Segundo Lima-Santos (2023, p.121), a [...]Escola de Alexandria, foi a grande expoente de um dos métodos interpretativos mais influentes da história do cristianismo, o método alegórico, fomentado na cidade de Alexandria no Egito, cuja fundação atribui-se a Alexandre, o Grande, e que foi fortemente impactada e influenciada pela cultura grega” informar as aspas que abrem a citação. Ainda, este autor destaca que, “É chamado de método porque é uma técnica desenvolvida especialmente pelos alexandrinos para interpretar o texto a partir da filosofia grega e das ideias criativas da mente humana. Tem por objetivo filosofar ou espiritualizar em cima do texto. Esse foi o método aplicado amplamente por setores da igreja ao longo de toda a sua história. Como se pôde constatar, começou com Alexandria. Foram vários os mestres, teólogos e intérpretes conhecidos como “alexandrinos”, discípulos da escola de Alexandria, mas para o presente capítulo somente três serão analisados rapidamente. Filo, Clemente e Orígenes são os que mais se destacaram no uso do método alegórico” (p.115).

¹³⁷ Como é descrito por Virkler (1998, p.46), na Escola de Antioquia da Síria, “um grupo de eruditos em Antioquia da Síria tentou evitar o “letrismo” dos judeus e o alegorismo dos alexandrinos. Eles, e especialmente um de seu grupo, Teodoro de Mopsuéstia (c. 350— 428), defendiam com o maior zelo o princípio da interpretação histórico-gramatical, isto é, que um texto deve ser interpretado segundo as regras da gramática e os fatos da história. Evitavam a exegese dogmática, asseverando que uma interpretação deve ser justificada por um estudo de seu contexto gramático e histórico, e não por um apelo à autoridade. Criticavam os alegoristas por lançarem dúvida na historicidade de muita coisa do Antigo Testamento. A perspectiva que os antioquenses tinham da história diferia daquela que tinham os alexandrinos. Segundo os alegoristas, flutuando acima do significado dos acontecimentos do Antigo Testamento encontrava-se outro, mais espiritual. Os antioquenses, pelo contrário, criam que o significado espiritual de um acontecimento histórico estava implícito no próprio acontecimento”.

¹³⁸ Orígenes de Alexandria (185 - 254) é um dos maiores teólogos e escritores do começo do cristianismo. Com ele, iniciou o posterior diálogo entre a filosofia e a fé cristã e uma tentativa de fusão das duas.

¹³⁹ Segundo Dilthey (1900), “A elaboração de regras clássico-filológicas se designava a si própria *ars critica*. Tais obras entre as quais despontavam a de Scioppius, a de Clericus e a incompleta de Valesius -, apresentavam na sua primeira parte um conjunto de ensinamentos sobre a arte (*Kunstlehre*) da hermenêutica. Inúmeros estudos e

hermenêutica nasceu desse esforço para se elevar a exegese e a filologia ao nível de uma *Kunstlehre*, vale dizer, de uma ‘tecnologia’ que não se limita mais a uma simples coleção de operações desarticuladas” (Ricoeur, 1990, p. 20). Nesse período, destacam-se os grandes filólogos Friederich Ast e Friedrich August Wolf, que seriam os precursores do trabalho de Friederich Schleiermacher. Segundo Palmer (1999), para Ast a tarefa da hermenêutica tem como propósito clarificar a obra, através do desenrolar interno do seu significado e a busca de relações entre cada uma das partes entre si e, mais amplamente, com o espírito da época. Para Wolf, a hermenêutica procurava captar o pensamento do autor da obra, seja esta escrita ou mesmo oral, tanto quanto o autor desejaria que a sua visão fosse captada. Tanto para Ast como para Wolf, explicar (*erklären*) se distingue da compreender (*verstehen*), e a explicação tem que basear-se na compreensão.

É com o trabalho de Schleiermacher que a hermenêutica adquire um maior destaque e um caráter filosófico. Segundo Palmer (1999), o objetivo de Schleiermacher foi construir uma hermenêutica geral (*allgemeine Hermeneutik*) como *arte da compreensão*, o que implicava uma crítica radical do ponto de vista da filologia e, com isto, perpassar a existente pluralidade de hermenêuticas especializadas, “fazendo uma hermenêutica sistematicamente coerente, uma ciência que descreve as condições da compreensão, em qualquer diálogo. [...] e cujos princípios possam servir de base a todos os tipos de interpretação de texto” (p. 50), portanto, levanta a possibilidade de uma interpretação com validade universal. Ricoeur (1990) associa ao programa hermenêutico de Schleiermacher uma dupla marca, *romântica* e *crítica*. É crítica no alvo de afrontar a não-compreensão, e por sua aspiração de elaborar regras universalmente válidas da compreensão, em nome do famoso adágio: “há hermenêutica, onde houver não-compreensão”; e é romântica por seu apelo a uma relação viva com o processo de criação, no intuito de “compreender um autor, melhor do que ele próprio teria se compreendido”¹⁴⁰. Neste sentido, Gadamer (2011a) destaca que, na hermenêutica de Schleiermacher, o ato da compreensão é a realização re-constitutiva de uma produção e, portanto, Gadamer compreende que Schleiermacher introduz em sua hermenêutica a *estética do gênio*¹⁴¹, ou seja, “o modo de criar

prefácios tratavam de *interpretatione*. A constituição final da hermenêutica se deve, no entanto, à interpretação bíblica” (p.22).

¹⁴⁰ Segundo Gadamer (2011a, p.299) essa é “uma fórmula que, desde então, tem sido repetida incessantemente, e em cujas interpretações cambiantes caracteriza-se toda a história da hermenêutica moderna. De fato, nesse postulado encerra-se o verdadeiro problema da hermenêutica”, pois de acordo com Dilthey (1999, p.31) “o alvo final do procedimento hermenêutico é compreender o autor melhor do que ele mesmo se compreendeu”.

¹⁴¹ Para Kant e para o idealismo, a obra de arte era definida como a obra do gênio. “Por toda parte onde a gente tem de ‘chegar a alguma coisa’ que não se pode descobrir somente através do aprendizado e do trabalho metódico;

do artista genial é o caso modelo, a que se reporta a teoria da produção inconsciente e da consciência necessária na reprodução” (p. 299). Na nova forma em que Schleiermacher assumiu a hermenêutica “o compreender e a interpretação estão desta forma sempre vivos e ativos na própria vida; sua perfeição eles alcançam na interpretação artística (*kunstmäßige*) de obras plenas de expressividade vital e na interpretação da sua conexão no espírito do seu autor” (Dilthey, 1999, p. 27).

No trabalho de Schleiermacher, é realçado o movimento *dialético* denominado *círculo hermenêutico*¹⁴², que opera em todo ato de compreensão. Nesse movimento dialético, é estabelecida uma articulação entre o todo e as partes, em que o compreender é uma operação fundamentalmente referencial, que se agrupa em unidades sistemáticas, ou círculos compostos de partes; assim, por exemplo, “das palavras particulares e das suas conexões deve ser compreendido o todo da obra, e, no entanto, a compreensão completa do particular já pressupõe a do todo” (Dilthey, 1999, p. 30). Segundo Palmer (1990), o conceito de *círculo hermenêutico*, conforme o colocado por Schleiermacher, contém uma contradição lógica, toda vez que não podemos partir de um todo sem que ele esteja diferenciado das partes e, por outro lado, não é possível compreender nada, se só conhecemos as partes enquanto captamos o todo. No entanto, o autor afirma que este aspecto não invalida completamente o conceito de *círculo hermenêutico*, argumentando que a lógica não valida totalmente as tarefas da compreensão. Palmer (1990) também afirma que, para Schleiermacher, a compreensão de um todo e suas partes pode ocorrer simultaneamente, como se houvesse uma espécie de “salto” no *círculo hermenêutico* e, com isso, ele deu lugar para considerar que a compreensão é em parte uma questão comparativa e em parte uma questão intuitiva e divinatória¹⁴³. Além disso, Palmer (1999, p. 94, grifos nossos) enfatiza que “para actuar eficazmente o círculo hermenêutico implica um elemento de *intuição*”.

por toda parte, portanto, onde há *inventio*, onde se há de agradecer a inspiração e não ao cálculo metódico o que passa a importar é o *ingenium*, isto é, o gênio. Mesmo assim, a intenção de Kant é correta: somente a obra de arte, segundo o seu sentido, encontra-se determinada a ser criada pelo gênio e por ninguém mais. Somente no caso do artista é que o seu ‘invento’, a obra, de acordo com o seu próprio ser, continua vinculada ao espírito, o espírito que cria, como aquele que julga e usufrui” (Gadamer, 2011a, p.108).

¹⁴² Do compreendido em Dilthey (1900, p.24), podemos rastrear essa noção de “círculo hermenêutico” no trabalho de Matias Flacius, “Ele submete o valor hermenêutico deste auxílio [auxílio que se encontra no contexto] a um ponto de vista geral da metodologia. ‘Pois de qualquer modo as partes individuais de um todo sempre recebem sua compreensão a partir da sua relação com este todo e com suas outras partes’”.

¹⁴³ Segundo Ricoeur (1990, p.22), “somente nos últimos textos de Schleiermacher a segunda interpretação ganha um primado sobre a primeira e o caráter *adivinhatório* da interpretação enfatiza seu caráter psicológico. Todavia, mesmo neles, a interpretação psicológica – este termo substitui o de interpretação técnica – jamais se limita a uma afinidade com o autor, mas implica motivos críticos na atividade de comparação: uma individualidade só pode ser apreendida por comparação e por contraste. Assim, também a segunda hermenêutica comporta elementos técnicos e discursivos. Não se apreende jamais diretamente uma individualidade, mas somente sua diferença com relação a outra e a si mesma”.

Para o filósofo e historiador Wilhelm Dilthey, o problema da formulação de uma teoria das ciências humanas se destaca no horizonte de sua filosofia. Portanto, encontrar uma abordagem adequada que se coloque como base para uma metodologia própria das *Geisteswissenschaften* constitui-se, para ele, num problema epistemológico (Espósito, 1991). Assim, Dilthey busca abandonar a perspectiva reducionista e mecanicista das ciências naturais, e põe-se a pensar na hermenêutica como fundamento das *Geisteswissenschaften* e das ciências sociais, disciplinas que interpretam as expressões da vida interior do homem.

Segundo Ricoeur (1990), o trabalho de Dilthey se situa na encruzilhada crítica da hermenêutica, na qual é percebida a amplitude do problema, mas que segue estando colocado em termos do característico debate epistemológico de toda a época neokantiana. Nesse sentido, Palmer (1999, p. 107) destaca que, enquanto “Kant escrevera a «Crítica da Razão Pura» colocando os fundamentos epistemológicos das ciências, Dilthey atribuiu-se conscienciosamente a tarefa de escrever uma «crítica da razão histórica» que colocasse as bases epistemológicas dos «estudos humanísticos»”. Assim, para Dilthey só pertence aos estudos humanísticos aquela ciência em que o seu objeto se torna acessível para nós por meio de um processo baseado na relação sistemática entre vida, expressão e compreensão. Ele aponta como sendo o cerne de uma crítica às ciências humanas, o fato de elas não considerarem a referência à experiência humana.

Dilthey usa o termo alemão *Erlebnis* ao referir-se à «experiência vivida», a qual é dada de modo pré-reflexivo na significação, mas que, ao tornar-se objeto de reflexão deixa de ser experiência imediata e, portanto, torna-se objeto de um outro encontro. Assim, a experiência existe antes da separação sujeito-objeto, ou seja, “a *Erlebnis* representa aquele contato direto com a vida a que podemos chamar «a experiência imediatamente vivida»” (Palmer, 1999, p. 114). Por isso, para Dilthey, o ponto de partida e o ponto de chegada das *Geisteswissenschaften* é a experiência concreta, histórica e viva a qual se torna relevante para a hermenêutica, enquanto a “experiência é intrinsecamente temporal (quer dizer, histórica, no sentido mais fundo da palavra) e, portanto, a compreensão da experiência tem também que ser dada em categorias de pensamento proporcionalmente temporais (históricas)” (Palmer, 1999, p. 117).¹⁴⁴ O primado

¹⁴⁴ Para compreender de modo mais específico o porquê de a *Erlebnis* ser histórica, é importante visitar a obra de Husserl, principalmente o volume II do *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica* e a V meditação nas *Meditações Cartesianas* (Husserl, 2013) quando ele diz do “demorar” do acontecimento da ação. Ou seja, a ação flui em uma temporalidade, estendendo-se temporalmente, deixando de ser pontual e, pela ação da retenção na lembrança da ação em acontecimento, então é possível retomá-la em uma nova ação, na atualização do ato de lembrar. Nesse movimento, estão presentes o lembrar da ocorrência agora retomada, compreendida e interpretada (Explicação dada pela Professora Maria Bicudo, em sessão de orientação de 14-3-2024)

epistêmico no mundo da história colocado por Dilthey assegura que “a primeira condição de possibilidade da ciência da história consiste em que eu mesmo sou um ser histórico, em que aquele que investiga a história é o mesmo que a faz”. Compreendemos que, na hermenêutica de Dilthey, o sentido de historicidade sugere que “o homem é um ser dependente da história, necessariamente histórico” (Espósito, 1991, p. 93). Desse modo, compreendemos com Gadamer que na consciência histórica,

[...] o que sustenta a construção do mundo histórico não são fatos extraídos da experiência e em seguida incluídos numa referência valorativa, mas o fato de que a sua base é, antes, a historicidade interna, própria da mesma experiência. Este é um processo vital e histórico, e não tem seu caso-modelo na constatação de fatos, mas *na peculiar fusão de recordação e expectativa num todo que chamamos experiência e que se adquire na medida em que se faz experiência* (Gadamer, 2011a, p. 339-340, grifos nossos).

Na busca por estabelecer uma visível separação¹⁴⁵ entre as ciências naturais e as denominadas *Geisteswissenschaften*, Dilthey associa os estudos humanísticos à palavra *verstehen*, pois a eles compete compreender as manifestações da vida. Além disso, busca captar as entidades individuais, atribuindo para as ciências naturais a palavra *erklären*, pois a estas compete explicar a natureza e essas ciências encaram o individual como meio para chegar às generalizações. Segundo Espósito (1991), do mesmo modo que Ast e Schleiermacher, Dilthey considera que no interior do *círculo hermenêutico* ocorrem as operações da compreensão. De maneira que “o todo receberia a sua definição das partes, e estas só poderiam ser compreendidas em relação ao todo. Por sua vez, o termo ‘sentido’, fundamental para Dilthey, significaria aquilo que a consciência capta na interação essencial recíproca do todo e das partes (o significado)” (Espósito, 1991, p. 94).

Dessa maneira, a base metodológica das *Geisteswissenschaften* para compreender interpretações objetivamente válidas teria que se assentar no aprofundamento da concepção de *consciência histórica*, a fim de aprender a elevar-se para além dos *preconceitos* do próprio presente, e a necessidade de compreensão de expressões a partir da própria vida. Para Dilthey, “compreender a vida significa percebê-la como ‘experiência humana’, não por categorias

¹⁴⁵ Segundo Mardones (1982, p.23, tradução nossa, grifos e ênfases em maiúscula do autor), “Droysen foi o primeiro a usar a distinção entre explicação e compreensão (no alemão *erklären* e *verstehen*) com a intenção de fundamentar o método da história, compreender, em oposição ao da física matemática, explicar [...]. Desde então o termo “*verstehen*”, compreender, passa a representar uma concepção metodológica característico das ciências humanas. O conteúdo positivo do termo compreender varia e tem diferentes ênfases dependendo dos autores, assim, por exemplo, para Simmel (e o primeiro Dilthey) a compreensão tem uma ressonância psicológica, é uma forma de empatia (*Einfühlung*) ou identificação afetivo-mental que reatualiza a atmosfera espiritual, sentimentos, motivos, valores, pensamentos, de seus objetos de estudo. Mas Dilthey também enfatizou nas ciências humanas o pertencimento do pesquisador e da realidade investigada ao mesmo universo histórico: *o mundo cultural e histórico do homem*. Existe, portanto, uma unidade sujeito-objeto que permite a compreensão a partir do interior dos fenômenos HUMANOS, SOCIAIS, HISTÓRICOS”.

exteriores, mas através de categorias intrínsecas, derivadas desta experiência vivida” (Espósito, 1991, p. 94). Nessa direção, “a própria vida, essa temporalidade em constante fluir, está voltada à configuração de unidades de significado duradouras. [...] Tem estrutura hermenêutica. É dessa forma que a vida constitui a verdadeira base das ciências do espírito” (Gadamer, 2011a, p. 345-346).

B. Da epistemologia à ontologia. Dilthey deu um impulso significativo à hermenêutica, colocando-a preponderantemente no contexto dos estudos humanísticos, e situando-a no horizonte da historicidade, contribuindo com inserções ao pensamento do filósofo Martin Heidegger. Mas, foi no trabalho de Husserl, que tinha aberto o campo de uma apreensão pré-conceitual dos fenômenos, que Heidegger encontrou ferramentas intelectuais e um caminho metodológico em suas investigações. Assim, conforme Palmer (1999, p. 130, inserções nossas), na historicidade e temporalidade, no âmbito da fenomenologia, foi que Heidegger “viu pistas indicativas da natureza do ser; o ser, tal como se revela na experiência vivida, [que] escapa às categorias conceptualizantes, especializantes e intemporais de um pensamento centrado em ideias”. Para esse autor, na obra *Ser e Tempo*¹⁴⁶, Heidegger transforma a fenomenologia em uma filosofia hermenêutica que, por vezes, é designada como hermenêutica fenomenológica. Essa designação é mais do que uma subdivisão do campo de estudo proposto por Husserl, pois com Heidegger a fenomenologia adquire um caráter radicalmente diferente, de modo que a “fenomenologia não precisa de ser construída como sendo necessariamente uma revelação da consciência; pode também ser um meio de revelar o ser, em toda a sua facticidade e historicidade” (Palmer, 1999, p. 132). Ou seja, em *Ser e Tempo*, Heidegger realiza uma análise existencial do modo de vida mundano do ser do ser humano – *Dasein* – e busca mediante essa análise dizer do ser, portanto, não em um sentido metafísico, passível de ser apreendido pela apreensão da essência na experiência original, conforme dela nos fala Husserl, porém buscando pelo sentido do ser. É nessa modificação de alvo visado nas investigações de ambos os filósofos que se pode compreender a afirmação de Palmer citada.

Em *Ser e Tempo*, Heidegger vai explorando e ampliando os conceitos de compreensão e interpretação, encaminhando uma *analítica existencial* para a questão central de sua investigação, o *sentido do ser*. Ele também introduz o conceito de *Dasein*¹⁴⁷, que se refere à

¹⁴⁶ O tratado *Ser e Tempo* (em alemão: *Sein und Zeit*) foi publicado pela primeira vez publicada, em 1927, no *Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische*, vol. VIII, editado por E. Husserl e, ao mesmo tempo, em separata nos *Anais de Filosofia e Pesquisa Fenomenológica*.

¹⁴⁷ Nas notas explicativas do livro *Ser e Tempo*, o editor explicita que a palavra *Dasein* como sendo equivalente à *pré-sença*, ainda que, a palavra *Dasein* “em *Ser e Tempo*, traduz-se, em geral, para as línguas neolatinas pela expressão ‘*ser-aí*’, *être-là*, *esserci* etc. [...] É na *pré-sença* que o homem constrói o seu modo de ser, a sua existência, a sua história etc” (Heidegger, 2005, p.309, grifos nossos).

existência humana em sua totalidade, e afirma que o *Dasein* é o ponto de partida para qualquer compreensão dos seres humanos e do mundo. A esse respeito, Palmer (1999, p. 131) manifesta que em *Ser e Tempo* o projeto de Heidegger “era o de uma «hermenêutica do *Dasein*»”. Assim, para Heidegger (2005a, p. 68-69), “a hermenêutica da pré-sença [*Dasein*] torna-se também uma ‘hermenêutica’ no sentido de elaboração das condições de possibilidade de toda investigação ontológica”, pois ilumina horizontes para a compreensão do sentido (mundano) do ser. Ele argumenta que o compreender é o ser existenciário¹⁴⁸ do próprio poder-ser do *Dasein*, e que “o mundo e a compreensão são partes inseparáveis da constituição ontológica da existência do *Dasein*” (Palmer, 1999, p. 137). Nesse sentido, a hermenêutica se torna uma forma para compreender o mundo e interpretar a existência humana. Assim, para Heidegger, a compreensão, não tem o mesmo sentido que lhe atribuiu Dilthey, como sendo um ideal de conhecimento e nem é mais o simples ideal de método da filosofia. Ao contrário, para Heidegger, “o compreender é a forma originária de realização do ser-aí [*Dasein*] humano enquanto ser-no-mundo” (Gadamer, 2003, p. 40, inserções nossas). De tal modo que, para Heidegger (2005a),

trata-se de uma hermenêutica que elabora ontologicamente a historicidade da pré-sença [*Dasein*] como condição ótica de possibilidade da história fatural. Por isso é que, radicada na hermenêutica da pré-sença [*Dasein*], a metodologia das ciências históricas do espírito só pode receber a denominação de hermenêutica em sentido derivado (Heidegger, 2005a, p. 69, inserções nossas).

Entendemos, seguindo o pensamento de Heidegger, que o conceito de compreensão é mais que um aspecto das *Geisteswissenschaften*. É por essa razão que a metodologia das ciências históricas do espírito é designada como hermenêutica em um sentido secundário ou derivado. A compreensão assume um caráter ontológico¹⁴⁹, pois ela está sempre vinculada à interpretação e à comunicação, explicitando modos de o *Dasein* compreender, interpretar e

¹⁴⁸ Heidegger estabelece uma distinção fundamental em relação às estruturas existenciais do *Dasein*, de modo que “todas as explicações resultantes da analítica da pré-sença [*Dasein*] provem de sua estrutura existencial [*Existenzstruktur*]. Denominamos os caracteres ontológicos da pré-sença [*Dasein*] de *existenciais* [na versão do livro do *Ser e Tempo*, referenciada na presente tese, é traduzida a palavra *Existenzialien* como *existenciais*, mas em outras versões da mesma obra é traduzida como *existenciários*] porque eles se determinam a partir da existencialidade [*Existenzialität*]. Estes devem ser nitidamente diferenciados das determinações ontológicas dos entes que não tem o modo de ser da pré-sença [*Dasein*], os quais chamamos de *categorias* [*Kategorien*] [...]. Existenciais [existenciário] e categorias são as duas possibilidades fundamentais de caracteres ontológicos” (Heidegger, 2005a, p.80-81, grifos do autor e inserções nossas). Edith Stein (2019) apresenta algumas ideias substantivas da obra de Heidegger, de acordo com essa autora “o *Dasein* não é algo que tenha, não é um ‘que’, mas um ‘quem’. Não ‘tem’ possibilidades em qualidade de ‘propriedades’ [*Kategorien*], mas ‘é’ [*Existenzialien*] suas possibilidades” (p.585, inserções nossas).

¹⁴⁹ Consideramos, aqui, pertinente colocar a ressalva que Heidegger (2005^a, p.56) faz sobre o termo *ontologia*. “O uso do termo ontologia não visa a designar urna determinada disciplina filosófica dentre outras. Não se pretende, de forma alguma, cumprir a tarefa de uma dada disciplina, previamente dada. Ao contrário, é a partir da necessidade real de determinadas questões e do modo de tratar imposto pelas “coisas em si mesmas” que, em todo caso, uma disciplina pode ser elaborada”.

comunicar o compreendido e interpretado. Porém, ainda, para Heidegger há, uma pré-compreensão que se projeta para uma compreensão, e assim, uma pré-interpretação, que se projeta para uma interpretação. Além disso, “a compreensão também já não é mais uma operação que se deslocaria em sentido inverso e posterior ao da vida constituidora, ela é o modo de ser originário da vida humana mesma” (Gadamer, 2003, p. 40). Isso porque, no fluxo da vida, o *Dasein* sempre está no movimento de pré-compreender e avançar por mais compreensões e assim por diante. O que lhe chega primeiro é o onticamente dado, solicitando compreensão.

Assim, entendemos, que na obra de Heidegger, o ponto central é que a compreensão se tornou ontológica, ou seja, a compreensão das coisas está ligada à maneira como elas se manifestam no mundo e como os seres humanos as interpretam, intersubjetivamente¹⁵⁰. Desse modo, a hermenêutica assume o poder ontológico, tanto do compreender, quanto do interpretar, “[...] que torna possível a revelação do ser das coisas e em última instância das potencialidades do próprio ser do *Dasein*” (Palmer, 1999, p. 135). De acordo com Heidegger (2005, p. 198, inserções nossas), “na compreensão subsiste, existencialmente [*existenciariamente*], o modo de ser da pre-sença [*Dasein*] enquanto poder-ser”. Em nosso entendimento acerca do dito por Heidegger, o *Dasein* não é como algo simplesmente dado, um “ente”, com um atributo adicional de “poder alguma coisa”, como compreender, por exemplo. Em sua essência, o *Dasein* é a possibilidade de ser. Entendemos que isso significa que o *Dasein* não se define por características fixas, ou atributos determinados, mas por um constante vir a ser, por um horizonte de possibilidades sempre aberto. Assim, o *Dasein* é essencialmente um “ser-possível”, ou seja, sua essência reside na sua possibilidade de projetar-se para o futuro.

Nesse sentido, para Heidegger (2005a), mediante a analítica do *Dasein* é possível visualizar o horizonte para a compreensão do ser, que é a base para a interpretação do mundo e das experiências humanas. Para Gadamer (2011a, p. 350), o problema que Heidegger desenvolveu em toda sua radicalidade foi: “o fato de que somente fazemos história na medida em que nós mesmos somos ‘históricos’; significa que a historicidade da pré-sença humana

¹⁵⁰ Embora Heidegger não use explicitamente o termo “intersubjetividade”, ele aborda questões relacionadas à existência compartilhada e à relação com os outros. A noção de “*Mitsein*” (ser-com) está presente em sua análise, referindo-se à coexistência e interação entre os seres humanos. Heidegger explicita este modo de ser do *Dasein* na §26 de *Ser e Tempo*, ao abordar a *co-pre-sença dos outros e o ser-com cotidiano*, argumenta que, “Essa abertura temática e não teórica ou psicológica do outro se evidencia facilmente para a problemática teórica da compreensão da ‘vida psíquica do alheio’ como o fenômeno que é primeiro visualizado. O que, fenomenalmente, apresenta ‘de início’ um modo de convivência compreensiva [*verstehenden Miteinanderseins darstellt*] torna-se, ao mesmo tempo, aquilo que, assim considerado, possibilita e constitui, ‘em princípio’ e originariamente, o ser para com os outros” (Heidegger, 2005a, p.176). Ainda mais, Escudero (2009, p.129, grifos do autor e tradução nossa) indica que na obra de Heidegger “[a] expressão *Miteinandersein* significa viver junto com outros num mundo intersubjetivamente compartilhado”.

[*Dasein*] em toda a sua mobilidade do relembrar e do esquecer é a condição de possibilidade de atualização do passado em geral”.¹⁵¹

Ao assumir a fenomenologia como hermenêutica, seguindo Heidegger, encaminhamo-nos para compreender o dito sobre o compreendido e interpretado a respeito do que *é*. Com esse autor, ficamos na dimensão do explicitado pela linguagem. Essa é uma visão dele sobre a fenomenologia, a qual ele trouxe para a analítica da existência. É importante notar que *ele não busca pelos atos da consciência*, como a obra husserliana e os trabalhos de Maurice Merleau-Ponty (1999) tomam como objeto de estudos.¹⁵² Destacamos a afirmação de Heidegger (2005, p. 68, grifos e inserções nossas):

Da própria investigação resulta que o sentido metódico da descrição fenomenológica é *interpretação*. O λόγος da fenomenologia da pré-sença [*Dasein*] possui o caráter de ἐρμενεύειν. Por meio deste ἐρμενεύειν proclamam-se o sentido do ser e as estruturas ontológicas fundamentais da pré-sença [*Dasein*] para a sua compreensão ontológica constitutiva. Fenomenologia da pré-sença [*Dasein*] é *hermenêutica* no sentido originário da palavra (ἐρμενεύειν) em que se designa o ofício de interpretar.

O entendimento sobre isso, resumimos com Palmer (1999) que descreve a hermenêutica do *Dasein* como a teoria da compreensão. Para ele esta é uma função anunciadora básica pela qual o *Dasein*, ou seja, o ser humano, torna conhecida para si a natureza do ser. É, portanto, uma teoria da revelação ontológica, enquanto compreensão e interpretação do modo de ser do *Dasein*. Em sua análise, Heidegger “[...] junta a hermenêutica à ontologia existencial e à fenomenologia e aponta para um fundamento da hermenêutica que não se baseia na subjectividade mas na facticidade do mundo e na historicidade da compreensão” (Palmer, 1999, p. 141). Ou seja, não incide sobre os atos de compreensão realizados pelo sujeito, na dimensão de sua subjetividade, porém, no seu estar existencialmente lançado à facticidade do mundo e no movimento histórico da compreensão.

Para Gadamer (2011a), tanto a fenomenologia hermenêutica quanto a análise da historicidade do *Dasein* na obra de Heidegger buscavam uma renovação geral da questão do ser, não se preocupando com uma teoria das *Geisteswissenschaften* ou com uma superação das aporias do historicismo. É, nesse sentido, que o trabalho de Heidegger foi mais longe do

¹⁵¹ Notemos que essa ideia está contida na concepção de *Erlebnis* de Husserl, conforme explicitado acima.

¹⁵² É importante essa observação, tendo em vista dar-mo-nos conta da dimensão da pesquisa orientada pela fenomenologia entendida como hermenêutica e podermos abrimo-nos ao entendimento das diferenças que se colocam entre ambas linhas da fenomenologia que vão se delineando. Esse entendimento da fenomenologia hermenêutica nos orienta para a compreensão do comunicado via linguagem. À pergunta: “o que se compreendeu?” a resposta obtida é exposta em termos da interpretação do dito posto no nível da linguagem mundana, ou seja, da falada entre as pessoas. Estabelece-se o círculo compreensão-interpretação-comunicação-interpretação. Não se vai aos atos da *noesis-noema*. Paul Ricoeur, como será explicitado mais adiante neste capítulo, realiza um enxerto hermenêutico na fenomenologia. Nesta investigação, iremos nessa direção apontada por Ricoeur.

historicismo proposto por Dilthey, ao defender que toda compressão é temporal, intencional e histórica, pois em sua obra “[...] assistimos a uma valorização ontológica do problema posto pela estrutura da compreensão histórica, fundada sobre a existência humana que é, essencialmente, orientada para o futuro” (Gadamer, 2003, p. 40), uma vez que ela é lançada para o seu poder-ser, sendo em sua finitude, em direção à morte (Heidegger, 2005b). Com essa visão, sua filosofia foca a existência. Em *Ser e Tempo*, Heidegger (2005a) afirma que a compreensão se assenta em estruturas existenciárias, dentre as quais uma é por ele denominada de *projecto*. Palmer (1999, p. 135) explicita essa ideia ao expor que, para Heidegger, a compreensão é “o poder de captar as possibilidades que cada um tem de ser, no contexto do mundo vital em que cada um de nós existe”. Assim, indo ao encontro de Heidegger (2005, p. 201), temos “o caráter projetivo da compreensão constitui o ser-no-mundo no tocante à abertura do seu pre, enquanto pre de um poder-ser”. Desse modo, entendemos com esse autor que a compreensão tem uma “estrutura prévia”¹⁵³ em que opera em toda a interpretação. Gadamer (2011a) nos auxilia no esclarecimento dessa questão ao expor que a problemática da hermenêutica e as críticas históricas são abordadas por Heidegger com o objetivo ontológico de desenvolver a *pré-estrutura* da compreensão. No âmbito dessa estrutura, ele estabelece uma relação com a interpretação, de modo que, a compreensão é a base de toda a interpretação. Conforme esse autor,

O projetar da compreensão possui a possibilidade própria de se elaborar em formas. Chamamos de *interpretação* essa elaboração. Nela, a compreensão se apropria do que compreende. Na interpretação, a compreensão se torna ela mesma e não outra coisa. A interpretação se funda existencialmente na compreensão e não vice-versa. Interpretar não é tomar conhecimento de que se compreendeu, mas elaborar as possibilidades projetadas na compreensão (Heidegger, 2005, p. 204).

Ele também expõe que há uma estrutura da explicitação do compreendido, que constitui a interpretação, denominando-a de estrutura de “algo como algo” (*Etwas als Etwas*). A palavra “como” explicita-se pela interpretação, ou seja, “o que se abre na compreensão, o compreendido, é sempre de tal modo acessível que pode explicitar-se em si mesmo ‘como isto ou aquilo’”. O ‘como’ constitui a estrutura da explicitação do compreendido; ele constitui a interpretação” (Heidegger, 2005, p. 205). Assim, conforme entendemos, o fundamento da compreensão vai se expondo, na aproximação interpretativa, da estrutura de algo como algo, antecedendo a toda afirmação temática, pois “toda visão pré-predicativa do que está à mão já é em si mesma uma compreensão e interpretação” (Heidegger, 2005, p. 205). A interpretação se

¹⁵³ Essa estrutura prévia é a do pré que lança o *Dasein* à compreensão, à interpretação e à comunicação. A pré-compreensão se dá no modo próprio de o *Dasein* estar-sempre-no-mundo-com já compreendendo o que está na sua circunvizinhança.

funda em um tipo de visão prévia, “que ‘recorta’ o que foi assumido na posição prévia, segundo uma possibilidade determinada de interpretação. O compreendido, estabelecido numa posição prévia e encarado numa ‘visão previdente’ (*vorsichtig*) torna-se conceito através da interpretação” (Heidegger, 2005, p. 207). Essa interpretação pode se dar por conceitos que delineiam o ente para poder ser interpretado a partir dele próprio, ou por outra parte, forçar conceitos a se encaixarem entre os que resistem em seu modo de ser. No entanto, “[...] a interpretação sempre já se decidiu, definitiva ou provisionalmente, por uma determinada conceitualização, pois está fundada numa concepção prévia” (Heidegger, 2005, p. 207, grifos do autor). Palmer (1999) se questiona sobre o que devemos entender por interpretação objetiva, ou “interpretação sem pressupostos”. Sobre isso, ele entende que em *Ser e Tempo* essa questão fica clara, explicitando sua afirmação “[...] a interpretação nunca é captação sem pressupostos de algo previamente dado” (Palmer, 1999, p. 140).

No olhar de Palmer (1999), esta *pré-estruturação* da compreensão resulta relevante para superar o modelo interpretativo do sujeito-objeto, pois essa estrutura prévia não é meramente uma propriedade da consciência colocada frente a um mundo já dado. Em *Ser e Tempo*, Heidegger se pergunta pelo nexos existencial entre a estrutura da compreensão prévia e a *estrutura-como* da interpretação enquanto fenômeno do *pro-jeto*. Para abordar esse assunto, ele entende que o *sentido* deve ser concebido como o aparelhamento formal daquilo que pode se articular pela interpretação na abertura da compreensão, “[...] na medida em que compreensão e interpretação constituem existencialmente o *ser do pre*” (Heidegger, 2005, p. 208, grifos nossos). Assim, o que sustenta a compreensibilidade de alguma coisa é o *sentido*. Portanto, Heidegger (2005) enfatiza que “[...] *sentido é a perspectiva em função da qual se estrutura o projeto pela posição prévia, visão prévia e concepção prévia. É a partir dela que algo se torna compreensível como algo*” (Heidegger, 2005, p. 208, grifos do autor).

No caminho para elucidar as estruturas ontológicas da compreensão, Heidegger se depara com o tema já tratado na filologia por Ast e Schleiermacher, e mais recentemente por Dilthey. Este último autor considera que as operações da compreensão ocorrem no interior do círculo hermenêutico, ainda que, para Heidegger (2005, p. 209), “[...] toda interpretação que se coloca no movimento de compreender já deve ter compreendido o que se quer interpretar”. Mas Heidegger ciente das críticas ao círculo hermenêutico, que incidiam em ver nesse círculo um vício, pelo proceder de acordo com uma contradição lógica¹⁵⁴, propõe não evitar esse círculo,

¹⁵⁴ As críticas ao círculo-hermenêutico, como exposto por Heidegger, advêm de uma má compreensão do dito por esse autor. Essas críticas se sustentam na compreensão do *petitio principii* que designa uma forma de raciocínio

pois segundo ele, isto significaria um mal-entendido de princípio em relação do que é compreensão, e afirma que o importante não é simplesmente sair do círculo, mas sim entrar nele de forma apropriada. Sobre a estrutura da compreensão e o círculo hermenêutico, Heidegger (2005, p. 210, grifos do autor) afirma:

Esse círculo da compreensão não é um cerco em que se movimenta qualquer tipo de conhecimento. Ele exprime a *estrutura-prévia* existencial, própria da pre-sença. O círculo não deve ser rebaixado a um vitiosum, mesmo que apenas tolerado. Nele se esconde a possibilidade positiva do conhecimento mais originário que, de certo, só pode ser apreendida de modo autêntico se a interpretação tiver compreendido que sua primeira, única e última tarefa é de não se deixar guiar, na posição prévia, visão prévia e concepção prévia, por conceitos ingênuos e ‘chutes’. Ela deve, na elaboração da posição prévia, da visão prévia e concepção prévia, assegurar o tema científico a partir das coisas elas mesmas. Porque a compreensão, de acordo com seu sentido existencial, é o poder-ser da própria pre-sença, as pressuposições ontológicas do conhecimento histórico ultrapassam, em princípio, a idéia de rigor das ciências mais exatas. A matemática não é mais rigorosa do que a história. É apenas mais restrita, no tocante ao âmbito dos fundamentos existenciais que lhe são relevantes.

No âmbito do pensamento de Heidegger, Gadamer (2011a) explicita que o movimento de compreensão do que está posto em um texto consiste na elaboração desse projeto prévio, mas que, conforme se avança na penetração do sentido este projeto tem que ser constantemente revisado, portanto demanda, um constante reprojetar, para antecipar um novo projeto de sentido. É neste movimento de sentido do compreender e do interpretar “[...] que projetos rivais possam se colocar lado a lado na elaboração, até que se estabeleça *univocamente a unidade do sentido*; que a interpretação comece com conceitos prévios que serão substituídos por outros mais adequados” (Gadamer, 2011a, p. 402, grifos nossos). Sobre esse movimento de reprojetar, Gadamer nos dá indicativos sobre como proceder no caminho da compreensão, de modo que,

A compreensão somente alcança sua verdadeira possibilidade, quando as opiniões prévias, com as quais ela inicia, não são arbitrárias. Por isso faz sentido que o intérprete não se dirija aos textos diretamente, a partir da opinião prévia que lhe subjaz, *mas que examine tais opiniões quanto a sua legitimação*, isto é, quanto a sua origem e validade (Gadamer, 2011a, p. 403, grifos nossos).

A hermenêutica fenomenológica de Heidegger avança explorando as implicações do círculo hermenêutico em relação à estrutura ontológica de toda compreensão e interpretação existencial do homem. Nessa direção, traz o tema da linguagem, pois quando a compreensão e a significação se explicitam, constituem conjuntamente a base da linguagem e da interpretação,

em que a tese a ser provada está de algum modo contida na hipótese e, também, por extensão de sentido, de ele incluir um fator inexplicável nas teses para forçar uma conclusão. Ou seja, o *petitio principii* é uma falácia em que a conclusão é essencialmente a mesma que a premissa inicial. O círculo hermenêutico busca avançar pelos horizontes abertos que solicitam e possibilitam mais compreensões e mais interpretações.

por meio das quais se expressam (Palmer, 1999). Sobre a função hermenêutica da palavra, Palmer (1999, p. 143) afirma:

[...] o verdadeiro fundamento da linguagem é o fenômeno da fala, onde algo se revela; esta é a função (hermenêutica) da linguagem. Considerando a fala como ponto de partida, remontamos ao evento em que a palavra funciona como palavra, remontamos ao contexto vivo da linguagem.

Essa exposição de Palmer se refere à Heidegger (2005, p. 219, grifos do autor), quando pondera que “[...] a totalidade significativa da compreensibilidade *vem à palavra*. Das significações brotam palavras. As palavras, porém, não são coisas dotadas de significados”. Entendemos com esse autor que a compreensão não é a da linguagem em si, mas sim do dito por meio da linguagem. Porém, em Heidegger fica claro que “[...] é pelas palavras e pela linguagem que as coisas ganham ser e existem”, ainda mais, destaca que “a linguagem é a casa do ser” (Palmer, 1999, p. 139).

O debate das *Geisteswissenschaften*, desde a ontologia heideggeriana é reanimado pelo filósofo Georg Gadamer (1990-2002) em sua mais conhecida obra *Verdade e Método*. O título de sua obra já é controvertido¹⁵⁵, segundo Palmer (1999). Porém, Ricoeur (1990, p. 38) compreende que o título da obra expressa o confronto do “conceito heideggeriano de verdade com o conceito diltheyano de método”. Nessa obra, Gadamer faz um amplo estudo histórico sobre as origens e os desafios da hermenêutica filosófica. Ele expõe como a hermenêutica se desenvolveu a partir da crítica a *Aufklärung*¹⁵⁶ (Iluminismo), ao Positivismo Científico e ao Neo-kantismo. Ele também apresenta suas próprias concepções sobre a interpretação, baseadas

¹⁵⁵ Sobre isto, Mondini, Mocrosky e Bicudo (2017, p. 323) indicam que, “Ao opor a ‘Verdade’ ao ‘Método’ e ao afirmar que a verdade se constitui para o sujeito dialeticamente e não é alcançada metodicamente, Gadamer faz uma crítica ao modo de fazer ciência estruturada nas interpretações metódicas que impedem a revelação de novas verdades”.

¹⁵⁶ Segundo o dicionário de filosofia de Ferrater Mora (2001), o racionalismo iluminista (*Aufklärung*), é definido com “As expressões ‘Iluminismo’, ‘Século das Luzes’, ‘filosofia das luzes’ foram empregados como correspondentes dos termos *Aufklärung*, *Enlightenment*, *Lumieres*, *Siècle des Lumieres* etc. Todos eles designam um período histórico circunscrito em geral ao século XVIII que abrangeu sobretudo a Alemanha, a França e a Inglaterra. [...] Desse ponto de vista, o Iluminismo se caracterizou por seu otimismo quanto ao poder da razão e à possibilidade de reorganizar a fundo a sociedade com base em princípios racionais. Proveniente diretamente do racionalismo do século XVII e do auge alcançado pela ciência da Natureza, a época do Iluminismo vê no conhecimento da Natureza e em seu domínio efetivo a tarefa fundamental do homem; por isso são até certo ponto adequadas ao Iluminismo certas características opostas às usadas para descrever o romantismo” (p.1440-1441). Também, encontramos no dicionário de Abbagnano (2007) a palavra *Aufklärung* como uma “Linha filosófica caracterizada pelo empenho em estender a razão como crítica e guia a todos os campos da experiência humana [...]. [A *Aufklärung*] compreende três aspectos diferentes e conexos: 1) extensão da crítica a toda e qualquer crença e conhecimento, sem exceção; 2) realização de um conhecimento que, por estar aberto à crítica, inclua e organize os instrumentos para sua própria correção; 3) uso efetivo, em todos os campos, do conhecimento assim atingido, com o fim de melhorar a vida privada e social dos homens. A atitude crítica própria do I. [*Aufklärung*] está bem expressa em sua resoluta hostilidade à tradição. Na tradição, o I. [*Aufklärung*] vê uma força hostil que mantém vivas crenças e preconceitos que é sua obrigação destruir. Aquilo que impropriamente tem-se denominado anti-historicismo iluminista na realidade é anti-tradicionalismo: a recusa em aceitar a autoridade de tradição e de reconhecer nela qualquer valor independente da razão [...]. Tradição e erro para eles coincidiam” (p.534-535).

na fenomenologia de Heidegger e na tradição humanista. Da obra de Heidegger, Gadamer recebe “[...] a convicção de que aquilo que se chama de preconceito [conceito prévio] exprime a estrutura de antecipação da existência humana” (Ricoeur, 1990, p. 105).

Segundo Ricoeur (1990), a experiência hermenêutica, na perspectiva de Gadamer, divide-se em três esferas que se relacionam entre si: a esfera estética, a esfera histórica e a esfera da linguagem. Em *Verdade e Método* (no primeiro volume), encontramos essas esferas no percurso das três partes que compõem a obra, de modo que,

Na esfera estética, a experiência de ser apreendido pelo objeto precede e torna possível o exercício crítico do juízo, cuja teoria fora feita por Kant no capítulo intitulado "Juízo de gosto". Na esfera histórica, a consciência de ser carregado por tradições que me precedem é o que torna possível todo exercício de uma metodologia histórica no nível das ciências humanas e sociais. Enfim, na esfera da linguagem, que de certa forma atravessa as duas precedentes, a co-pertença às coisas ditas pelas grandes vozes dos criadores de discurso, precede e torna possível todo tratamento científico da linguagem, como um instrumento disponível, e toda pretensão de se dominar, por técnicas objetivas, as estruturas do texto de nossa cultura (Ricoeur, 1990, p. 38).

Em nossa compreensão, desde essa perspectiva, o trabalho de Gadamer indica um retorno do caminho da ontologia para os problemas epistemológicos, em contraste com o caminho seguido por Heidegger. Para tanto, ele se vale da estética, no intuito de evidenciar como a experiência estética é crucial para apreender a verdade, buscando libertar a questão da verdade da experiência artística. Assim, ele busca situar a experiência das *Geisteswissenschaften* fora do âmbito de controle da metodologia científica, de modo que “[...] ao lado da experiência da filosofia, a experiência da arte é a mais peremptória advertência à consciência científica, no sentido de reconhecer seus limites” (Gadamer, 2011a, p. 33). Esses modos de experiência expressam uma verdade que transcende os limites da ciência metódica, e não podem ser comprovados ou refutados por métodos científicos, mas revelam aspectos da realidade dos quais a ciência, como posta e entendida no âmbito da civilização do mundo ocidental, não pode dar conta.

Situados nessa compreensão, a primeira tarefa que Gadamer se propõe é fazer uma crítica da consciência estética, para defender “[...] a experiência da verdade, que nos é proporcionada pela obra de arte, contra a teoria estética, que se deixa limitar pelo conceito de verdade da ciência” (Gadamer, 2011a, p. 34). Para ele, essa crítica é possível graças à fenomenologia, que questionou os pressupostos da Psicologia e da Teoria do Conhecimento no século XIX. Na teoria estética, alguns conceitos teriam sido adotados como pressupostos correlativos a um ser verdadeiro, do qual se diferencia o ser estético, no entanto, “[...] o retorno fenomenológico à experiência estética ensina que esta não pensa, de forma alguma, com base

nessa relação, mas, antes, naquilo que ela experimenta, vê a genuína verdade” (Gadamer, 2011a, p. 150).

Gadamer examina a evolução da consciência estética na modernidade. Nesse movimento de pensar, ele busca relacionar os conceitos de *jogo* e interpretação, que extrai da teoria estética. Dessa maneira, ele propõe, *sem deixar de lado o rigor científico*, uma nova forma de compreender a arte e a experiência humana. Segundo Palmer (1999), para Gadamer *jogo* não é simplesmente uma atividade com a que o ser humano se diverte, nem como *liberdade* da subjetividade humana que se envolve na brincadeira. “[...] «jogo» (ou «brincadeira») antes se refere ao modo de ser da própria obra de arte. O objectivo da discussão de Gadamer sobre o conceito de jogo ou brincadeira, na sua relação com a arte, é libertá-lo da tendência tradicional que há em o associar com a atividade do sujeito” (Palmer, 1999, p. 176).

Segundo Gadamer, a obra de arte não é apenas um objeto que se oferece à nossa apreciação, mas um fenômeno que instaura uma relação dialógica e transformadora com quem a vivencia. Mais do que isso, a experiência estética não é somente um tipo de vivência entre outros, mas expressa a forma de ser da própria vivência. Ele estabelece, na primeira esfera de sua abordagem, que sua

tese é, portanto, a de que o ser da arte não pode ser determinado como objeto de uma consciência estética, porque, ao contrário, o comportamento estético é mais do que sabe de si mesmo. É uma parte do *processo do ser da representação* e pertence essencialmente ao jogo como jogo” (Gadamer, 2011a, p. 195).

Segundo Palmer (1999), ao analisar as relações entre a obra de arte e o jogo, e ao levar em conta a organização do jogo como o princípio norteador de uma estrutura que possui sua independência própria, mas que, no entanto, mantém-se aberta ao espectador, podemos compreender melhor os aspectos lúdicos e estéticos da criação artística. Essa abordagem permite apreciar a obra de arte como um espaço de interação, experimentação e expressão, que não se limita a uma interpretação única ou fechada, mas que convida o espectador a participar ativamente do processo criativo. Desse modo, o juízo estético não é considerado uma simples avaliação subjetiva, mas *o fundamento do ser*, que se abre à transcendência.

Na segunda esfera da experiência hermenêutica, Gadamer parte do contraste entre o Romanticismo e a *Aufklärung*, e o percurso histórico da fundamentação hermenêutica das *Geisteswissenschaften*. Essa reflexão lhe fornece elementos intelectuais para delinear os traços principais de uma teoria da experiência hermenêutica. Nessa teoria, Gadamer considera explicitamente, como ponto de partida e fundamento da sua análise da historicidade da compressão, o trabalho realizado por Heidegger a respeito da estrutura prévia da compreensão e a historicidade intrínseca à existência humana.

Segundo Gadamer (2003, p. 57), não se pode aplicar o modelo de um conhecimento objetivista para descrever o conhecimento histórico, “já que ele mesmo é um processo que possui todas as características de um acontecimento histórico. A compreensão deve ser entendida como um ato da existência, e é, portanto, um ‘pro-jeto lançado’”. A esse respeito, Palmer explicita que para Gadamer, somente há compreensão da história quando se tem como referente o presente, de modo que o “passado não é como um amontoado de factos que se possam tornar objecto de consciência; é antes um fluxo em que nos movemos e participamos, em todo ato de compreensão” (Palmer, 1999, p. 180)¹⁵⁷. Essa afirmação vai ao encontro da afirmação de Gadamer (2003, p. 71): “compreender é operar uma mediação entre o presente e o passado, é desenvolver em si mesmo toda a série contínua de perspectivas na qual o passado se apresenta e se dirige a nós”.

Gadamer recupera o significado ontológico positivo do círculo hermenêutico apresentado na obra de Heidegger, e mostra que em *Ser e Tempo* não se trata apenas de expressar as condições impostas pela prática da compreensão, mas de descrever o modo como a interpretação sempre se realiza ao visar uma compreensão orientada pela “coisa mesma”. Sobre o círculo hermenêutico, Gadamer (2003) manifesta que,

[...] esse “círculo” não é, em absoluto, de natureza puramente formal — seja de um ponto de vista subjetivo, seja de um ponto de vista objetivo. Ao contrário, seu espaço de jogo se dá entre o texto e aquele que o compreende. A intenção do intérprete é se fazer mediador entre o texto e a totalidade nele subentendida. Portanto, o objetivo da hermenêutica é sempre restituir e restabelecer o acordo, preencher as lacunas (p.58).

De acordo com Gadamer (2011a), a noção de círculo hermenêutico na obra de Heidegger resgata uma antiga perspectiva que entende esse círculo como um movimento contínuo que se articula do todo para as partes e destas para o todo. Porém, ele destaca que a tarefa da hermenêutica “consiste em ampliar *a unidade do sentido* compreendido em círculos concêntricos” (Gadamer, 2011a, p.436, grifos nossos). Ainda mais, esse autor manifesta preponderantemente que, toda interpretação autêntica “tem que proteger-se contra a arbitrariedade da ocorrência de ‘felizes idéias’ e contra a limitação dos hábitos imperceptíveis do pensar, e orientar sua vista ‘às coisas elas mesmas’” (Gadamer, 2011a, p.401-402). Avançando nessa exposição, ele toma como base a concepção de círculo hermenêutico proposta por Heidegger, na qual em vez de conceber o círculo hermenêutico como um obstáculo à interpretação, propõe uma visão dinâmica e dialética desse processo. Segundo ele, Heidegger “descreve esse círculo de uma forma tal que a compreensão do texto se encontre determinada,

¹⁵⁷ É interessante notar que essa noção de história se encontra já explicitada em Edmund Husserl, no apêndice “A origem da Geometria” trazido na publicação do “A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental”, no anexo III da § 9ª (Husserl, 2012, p. 292-327).

continuamente, pelo movimento de concepção prévia da pré-compreensão” (Gadamer 2011a, 439). Essa pré-compreensão, por sua vez, é constantemente revisada e modificada pela leitura do texto, que abre novas possibilidades de sentido.

Dessa forma, em nosso ponto de vista, a compreensão que se atém ao sentido do texto é o esforço constante da compreensão hermenêutica. Sobre isso, Gadamer (2011a) indica que “*a tarefa hermenêutica se converte por si mesma num questionamento pautado na coisa*, e já se encontra sempre determinada por esta” (p.405, grifos do autor). Entendemos essa afirmação como um critério que precisa ser considerado no movimento interpretativo de uma obra (texto). Mas, como articular a estrutura previa da compreensão anunciada por Heidegger com a tarefa hermenêutica descrita por Gadamer?

Em *Verdade e Método*, Gadamer se encaminha a reabilitar os conceitos de autoridade, tradição e pré-conceito, que foram desacreditados no *Aufklärung*, contudo, segundo ele, atuam como condição de possibilidade da compreensão. Sobre isto, Gadamer (2011a) argumenta que

Muito antes de que nós compreendamos a nós mesmos na reflexão, já estamos nos compreendendo de uma maneira auto-evidente na família, na sociedade e no Estado em que vivemos. A lente da subjetividade é um espelho deformante. A auto-reflexão do indivíduo não é mais que uma centelha na corrente cerrada da vida histórica. *Por isso os preconceitos de um indivíduo são, muito mais que seus juízos, a realidade histórica de seu ser* (p.416, grifos do autor).

De acordo com Palmer (1999), Gadamer defende que os nossos preconceitos não devem ser vistos como obstáculos à interpretação, mas como condições de possibilidade para compreender a história. Para Gadamer (2011a), “‘Preconceito’ não significa pois, de modo algum, falso juízo, pois está em seu conceito que ele possa ser valorizado positivamente ou negativamente” (p. 407)¹⁵⁸. Por isso, ele critica a visão da *Aufklärung* que desacreditou os preconceitos como fontes de erro, pois, para Gadamer “os preconceitos não são algo que devemos aceitar ou recusar; são base da capacidade que temos para compreender a história” (Palmer,1999, p.185-186). Ele entende que os preconceitos que se formam dependem da aceitação da pessoa que os traz, de modo que sua validade depende da predisposição em relação ao indivíduo que os expressa. No entanto, é dessa forma que se transformam em preconceitos objetivos, pois geram a mesma predisposição em relação a uma coisa que poderia ser originada por outras vias, por exemplo, por bons argumentos que a razão torna legítimos.

¹⁵⁸ Para que se compreenda o que diz pré-conceito, a análise da palavra e de sua composição vem em auxílio: pré, significa prévio. Então pré-conceito é tão somente um conceito prévio que solicita um pensar a respeito de suas bases, ou seja, das bases em que as experiências trazidas nas afirmações (nos conceitos prévios) estão sustentadas. Não é falso, nem verdadeiro. É tão somente um conceito prévio à análise.

Em relação ao anteriormente referido, Gadamer nos indica que ao dirigirmo-nos para a compreensão precisamos assumir uma *atitude hermenêutica*, que é receptiva e aberta ao diálogo com as diferentes origens e características dos fenômenos que se apresentam, mas que,

[...] tal receptividade não se adquire por meio de uma “neutralidade” objetivista: não é nem possível nem necessário nem desejável que nos coloquemos entre parênteses. *A atitude hermenêutica supõe uma tomada de consciência com relação as nossas opiniões e preconceitos* que, ao qualificá-los como tais, retira-lhes o caráter extremado. É ao realizarmos tal atitude que damos ao texto a possibilidade de aparecer em sua diferença e de manifestar a sua verdade própria em contraste com as ideias preconcebidas que lhe impúnhamos antecipadamente (Gadamer, 2003, p. 63-64).

Por outro lado, para Gadamer (2011a), a autoridade não se baseia na submissão cega a um comando imposto, mas na interpretação de uma obra ou na tradição em sua verdadeira significação, logo, tem a ver com conhecimento. Para ele, a autoridade é um elemento essencial do processo hermenêutico, a qual visa a compreender o sentido original e atual de uma obra. Nesse sentido, a autoridade não é uma forma de dominação ou de tomarmos como verdade o afirmado, mas de reconhecimento da validade de uma expressão histórica.

É assim que o reconhecimento da autoridade está sempre ligado à idéia de que o que a autoridade diz não é uma arbitrariedade irracional, mas algo que pode ser inspecionado principalmente. É nisso que consiste a essência da autoridade que exige o educador, o superior, o especialista (Gadamer, 2011a, p. 420).

Desse modo, entendemos que, para esse autor, a autoridade não é algo que se impõe de fora, mas que se reconhece como legítimo e vinculante. Ele destaca uma forma particular de autoridade que orienta a compreensão humana: a tradição. A tradição¹⁵⁹ não é um obstáculo ao pensamento crítico, mas uma condição de possibilidade para a compreensão.

O que é consagrado pela tradição e pela herança histórica possui uma autoridade que se tornou anônima, e nosso ser histórico e finito está determinado pelo fato de que também a autoridade do que foi transmitido, e não somente o que possui fundamentos evidentes, tem poder sobre essa base [...] A realidade dos costumes, p. ex., é e continua sendo, em âmbitos bem vastos, algo válido a partir da herança histórica e da tradição. Os costumes são adotados livremente, mas não criados por livre inspiração nem sua validade nela se fundamenta. É isso, precisamente, que denominamos tradição: o fundamento de sua validade (Gadamer, 2011a, p. 421).

Gadamer defende que a tradição não se fundamenta somente na razão, mas também na conservação, que é um elemento constante nas transformações históricas e afeta profundamente as nossas instituições e comportamentos. Essa ação da tradição pode ser positiva ou negativa, dependendo do contexto e da perspectiva. Por isso, é preciso reconhecer o papel da tradição, mas sem perder a capacidade de avaliá-la criticamente. “No entanto, a conservação é um ato da razão, ainda que caracterizado pelo fato de não atrair a atenção sobre si” (Gadamer, 2011a, p.

¹⁵⁹ Note-se que tradição também é uma ideia trazida por Edmund Husserl na obra mencionada na nota de rodapé 157 na página 166 da presente tese.

422-423). Esse autor considera ainda que, no âmbito das *Geisteswissenschaften*, “o interesse investigador que se volta para a tradição é motivado, de uma maneira especial, pelo respectivo presente e seus interesses. *Somente na motivação do questionamento é que deveras se constitui, como tal, o tema e o objeto da investigação* (Gadamer, 2011a, p.427, grifos nossos).

O termo *consciência histórica* foi introduzido por Dilthey na filosofia, e é um dos conceitos nucleares para a hermenêutica de Gadamer. Esse conceito se refere à capacidade de compreender o passado olhado da perspectiva do presente, e de interpretar o presente olhando o do passado. Para Gadamer (2003, p.31, grifos do autor), a *consciência histórica* “[...] sabe agora se colocar numa relação reflexiva com ela mesma e com a tradição: ela compreende a si mesma pela e através de sua própria história. *A consciência histórica é um modo do conhecimento de si*”. Desse modo, ele destaca peremptoriamente que a consciência histórica nos leva a uma mobilidade no compreender. De modo que,

O compreender deve ser pensado menos como uma ação da subjetividade do que como um retroceder que penetra em um acontecer da tradição, no qual é o que tem de fazer-se ouvir na teoria hermenêutica, demasiado dominada pela idéia de um procedimento, de um método (Gadamer, 2011a, p.435-436, grifos do autor).

Ao estudar a estrutura da compreensão, Gadamer se fundamenta na descoberta de Heidegger sobre a estrutura de antecipação da compreensão humana. Ele expõe que a compreensão possui as características de algo como um “pertencimento” à tradição, pois é o que temos *em comum* com a tradição com a qual nos relacionamos, que delineia os nossos horizontes de expectativas e orienta a nossa compreensão. Assim, Gadamer investiga o sentido do fenômeno de “pertença” (*Zugehörigkeit*), isto é, o papel da tradição na atitude histórico-hermenêutica, que se manifesta através da comunidade de preconceitos fundamentais e sustentadores. Gadamer (2003, p.67) considera que,

A hermenêutica deve partir do fato de que compreender é estar em relação, a um só tempo, com a coisa mesma que se manifesta através da tradição e com uma tradição de onde a “coisa” possa me falar. Por outro lado, aquele que efetua uma compreensão hermenêutica deve se dar conta de que a nossa relação com as “coisas” não é uma relação que “ocorra naturalmente”, sem criar problemas. Precisamente sobre a tensão que existe entre a “familiaridade” e o caráter “estranho” da mensagem que nos é transmitida pela tradição é que fundamos a tarefa hermenêutica. Mas a tensão de que falamos não é, como em Schleiermacher, uma tensão psicológica. É, isso sim, o sentido e a estrutura da historicidade hermenêutica. Não se trata de um estado psíquico, mas da “coisa mesma” transmitida pela tradição que é objeto da interrogação hermenêutica. No que se refere ao caráter a um só tempo “familiar” e “estranho” das mensagens históricas, a hermenêutica reivindica uma “posição mediadora”. O intérprete encontra-se suspenso entre o seu pertencimento a uma tradição e a sua distância com relação aos objetos que constituem o tema de suas pesquisas.

Assim, compreendemos que essa tensão entre passado e presente no âmbito da circularidade hermenêutica é, também, uma condição de possibilidade da compreensão, que se dá como jogo em que ocorre o intercâmbio entre o movimento da tradição e o movimento do

intérprete. Nesse viés, a antecipação de sentido que orienta nossa compreensão não deve ser considerada como um dado da subjetividade, já que ela está delineada pelo vínculo com a tradição (Gadamer, 2011a).

Gadamer extrai uma consequência hermenêutica do sentido do círculo, que ele denomina como *concepção prévia da perfeição*. Esta é um modo de antecipação que atua como uma projeção do sentido global daquilo que se busca compreender, ou seja, significa que “[...] somente é compreensível o que apresenta uma unidade perfeita de sentido” (Gadamer, 2011a, p.363). Este modo de antecipação que domina nossa compreensão está, porém, correlativamente orientada por algum conteúdo. Sobre isso Gadamer argumenta que “não se pressupõe somente uma *unidade imanente de sentido* que possa guiar o leitor, mas que a compreensão deste esteja guiada constantemente por *expectativas de sentido transcendente*, que surgem de sua relação com a verdade daquilo a que o texto intenciona” (Gadamer, 2011a, p.440, grifos nossos). Um exemplo da consequência mencionada pode ser notado no estudo de um texto em uma língua estrangeira, pois esse trabalho é guiado por um sentido global que antecipamos previamente, no horizonte das relações que se estabelecem em um contexto prévio. No entanto,

[...] esse sentido global e previamente dado permanece, bem entendido, à espera de uma confirmação ou retificação, para que só então possa formar *a unidade de uma perspectiva coerente*. Pensemos tal estrutura de um modo dinâmico: constatamos de imediato que a compreensão amplia e renova, em círculos concêntricos, *a unidade efetiva do significado global e final que é o critério da compreensão* (Gadamer, 2003, p.58, grifos nossos).

Segundo Gadamer (2003), a consciência hermenêutica implica uma consciência histórica que reconhece a diferença temporal entre o autor e o intérprete de uma obra (texto). Essa diferença implica uma tensão entre o pertencimento e o distanciamento histórico do intérprete, que deve adotar uma atitude reflexiva e dialógica para compreender o sentido original da obra e sua relevância para o presente. Essa atitude é o que o autor chama de *distância temporal*, e é uma tarefa crítica da hermenêutica.

É graças ao fenômeno da “distância temporal” e ao esclarecimento de seu conceito que se pode cumprir a tarefa propriamente crítica da hermenêutica, isto é, distinguir os preconceitos que cegam daqueles preconceitos que esclarecem, os preconceitos falsos dos preconceitos verdadeiros. Deve-se livrar a compreensão dos preconceitos que a dirigem, permitindo assim que as “perspectivas outras” da tradição se manifestem, o que vem assegurar a possibilidade de qualquer coisa ser compreendida como outra (Gadamer, 2011a, p.440, grifos nossos).

Não se deve entender essa distância como o historicismo entendeu ou como Schleiermacher, que atribuiu um sentido psicológico a ela. Essa distância é vista por Gadamer como o fundamento de uma possibilidade positiva e produtiva de compreensão. Essa distância

é preservada pelo fato de que existe uma tradição que vincula o texto e o intérprete. Assim, o texto aparece ao mesmo tempo estranho (porque é distante) e a familiar (pelos recursos que a tradição nos dá). Porém essa distância temporal não é um obstáculo, mas uma vantagem graças à *história efetual*, ou seja, o conjunto de efeitos que o passado tem sobre o presente, que nos chegam pela tradição, e que moldam a nossa interpretação. Dessa forma, ao tentarmos compreender um fenômeno histórico através da distância histórica que delineia “nossa situação hermenêutica como um todo, encontramos-nos sempre sob os efeitos dessa história efetual” (Gadamer, 2011a, p.449). Ela define previamente o que é problemático e digno ser investigado em um determinado campo e não se limita a descrever os fatos, mas busca compreender as condições de possibilidade que os tornaram inteligíveis e significativos. Ora, para Gadamer, a *consciência histórica efetual* é, sobretudo, o lugar da *situação* hermenêutica. O conceito de *situação*, proposto por Gadamer, está intimamente relacionado ao conceito de *horizonte*, que delimita e possibilita nossa interpretação, bem como o alcance de nossa visão, situados em um determinado ponto de vista. O horizonte, porém, não é algo fixo ou estático, mas algo que se modifica e se expande à medida que caminhamos e interagimos com ele. Como afirma Gadamer (2011a, p. 425), o horizonte “[...] é, antes, algo no qual trilhamos nosso caminho e que conosco faz o caminho”.

Em nossa acepção, isso significa que, ao interpretar um texto, o intérprete deva começar por uma reflexão sobre suas próprias ideias e preconceitos, que derivam da situação hermenêutica em que ele está inserido e, portanto, deve-se questionar essas ideias, e examiná-las atentamente, procurando entender de onde elas vêm e qual é a sua legitimidade. Nesse sentido, Gadamer (2003, p. 68) manifesta que um preconceito só tem influência sobre nós, como preconceito, no sentido estrito da palavra, quando não temos consciência suficiente dele, mas, “[...]a descoberta de um preconceito não é possível enquanto ele permanecer simplesmente operante; é preciso de algum modo provocá-lo”. O processo de interpretação, para o autor em questão, envolve uma relação dialógica entre o intérprete e o texto ou o objeto interpretado, na qual ambos se influenciam mutuamente. Nessa relação, o intérprete não pode ignorar a *pertença* e a *distância temporal*, mas também não pode reduzir o texto à sua própria perspectiva. Por isso, ele propõe a noção de *fusão de horizontes*, que procura ampliar o campo de visão do intérprete na medida em que entra em contato com o horizonte do texto, que pertence a uma outra época e a uma outra tradição. Assim, para Gadamer (2011a, p. 457, grifos do autor),

[...] o horizonte do presente está num processo de constante formação, na medida em que estamos obrigados a pôr à prova constantemente todos os nossos preconceitos. Parte dessa prova é o encontro com o passado e a compreensão da tradição da qual nós mesmos procedemos. O horizonte do presente não se forma pois à margem do passado. Nem mesmo existe um horizonte do presente por si mesmo, assim como não existem

horizontes históricos a serem ganhos. Antes, *compreender é sempre o processo de fusão desses horizontes presumivelmente dados por si mesmos*. Nós conhecemos a força dessa fusão sobretudo de tempos mais antigos e de sua relação para consigo mesmos e com suas origens. A fusão se dá constantemente na vigência da tradição, pois nela o velho e o novo crescem sempre juntos para uma validade vital, sem que um e outro cheguem a se destacar explicitamente por si mesmos.

O avanço na compreensão do problema hermenêutico e sua característica de circularidade derivou em uma estreita relação entre compreensão e interpretação, deixando de lado uma de suas características fundantes, o problema da *aplicação*. Este problema hermenêutico da *aplicação* foi um dos elementos centrais nas hermenêuticas teológicas e jurídicas, mas que, ao ir além de suas particularidades, desestimou-se por seu caráter técnico. Gadamer dá um passo além da hermenêutica romântica considerando como processo unitário não somente a compreensão e a interpretação, mas também a aplicação.

Em que consiste essa aplicação a qual Gadamer se refere? Ele explicita que essas considerações o levaram a admitir que, “na compreensão, sempre ocorre algo como uma aplicação do texto a ser compreendido, à situação atual do intérprete” (Gadamer, 2011a, p.460). Segundo Palmer (1999, p. 194), este problema hermenêutico da aplicação é significativo para a aplicação na compreensão histórica, pois “não se trata de dar literalmente ao passado as aparências; trata-se sim de trazer o que é essencial no passado para o nosso presente pessoal, para a nossa autocompreensão ou mais exatamente para a experiência que temos do Ser”. E é justamente o conceito de experiência, que Gadamer critica ao ser adotado sob o paradigma das ciências empíricas, e ao ser pouco elucidado e desconsiderado em sua dimensão histórica. Gadamer (2011a, p. 512, grifos do autor) enfatiza que “isso é exatamente o que se tem de reter para a análise da consciência da história efetual: que ela tem a estrutura da *experiência*”, e destaca o elemento de negatividade que caracteriza a experiência. Esse elemento de negatividade que envolve a experiência fica manifesto no momento em que entendemos que uma coisa não é como tínhamos pensado, ou seja, significa que mudamos nossa visão sobre um objeto ou acontecimento quando o vemos de forma diferente, de modo que esse confronto interpela nossas expectativas prévias.

Gadamer atribui a esse elemento negativo da experiência um sentido marcadamente produtivo, porque nos abre à possibilidade de um diálogo com o outro e nos conduz a conhecer algo novo. Ele chama essa forma de experiência de *dialética*, pois envolve um movimento de questionamento e de confronto com a negatividade que emerge de toda indagação autêntica, e uma busca de compreensão. Na visão de Palmer (1999, p.200), “de um modo geral a estrutura dialética da experiência e particularmente da experiência hermenêutica, reflete-se na estrutura pergunta-resposta de todo verdadeiro diálogo”. Deste modo, Gadamer (2003, p. 69) indica que

ao “[...] pôr entre parênteses os nossos juízos em geral, e naturalmente os nossos preconceitos em primeiro lugar, termina por nos impor uma exigência de reflexão radical sobre a ideia de *interrogação* como tal”. Nesse sentido, Gadamer (2011a, p. 534) expõe que a experiência envolve sempre a estrutura do questionamento, pois “não há experiência sem a atividade de perguntar. Saber que algo é de uma certa forma, e não como pensávamos inicialmente, implica necessariamente passar pela questão”. Ele afirma que a consciência hermenêutica se distingue por possuir uma *lógica de abertura* baseada na capacidade de perguntar. Essa lógica permite que o intérprete não se limite a reproduzir o sentido do texto, mas busque compreendê-lo com base em seu próprio horizonte de compreensão. Sobre isso, Palmer (1999, p. 203) afirma que “quando um texto transmitido se torna objeto de interpretação, ele propõe uma questão ao intérprete, que busca respondê-la através da interpretação”.

Sendo assim, a interpretação depende de uma relação *fundante* entre a pergunta que nos foi dirigida e a resposta que damos. Compreender o texto significa compreender essa relação dialética. Gadamer chama isso de *horizonte do perguntar*, no qual se define a orientação do sentido do texto. Nessa direção, para compreender um texto temos que considerar questionar aquilo que não é dito; assim, “ultrapassando o que foi dito, indaga-se, necessariamente, por algo *mais além* disso que foi dito. Um texto só é compreendido no seu sentido quando se alcançou o horizonte do perguntar, que como tal contém necessariamente também outras respostas possíveis” (Gadamer, 2011a, p.544).

Na terceira esfera da experiência hermenêutica, como fora descrita por Ricoeur, Gadamer aborda o fenômeno da linguagem. A linguagem não é somente um instrumento de comunicação, mas também um modo de interpretar e compreender o mundo e a nós mesmos. É por meio da linguagem que o mundo-da-vida se revela. “Esta experiência do mundo como algo que já reside na linguagem, transcende todas as relatividades e relações em que os seres se poderiam mostrar; todo o objeto de conhecimento é englobado no horizonte da linguagem” (Palmer, 1999, p.209). Gadamer denomina de *Sprachlichkeit* (lingüisticidade) a esse fenômeno que envolve a experiência humana do mundo por meio da linguagem.

De acordo com Palmer (1999), a experiência hermenêutica envolve o diálogo entre a tradição e o horizonte do intérprete, e a linguagem proporciona o terreno comum onde e sobre o qual esses elementos se encontram. Assim, “a lingüisticidade da compreensão é *a concreção da consciência da história efetual*. A relação fundamental entre lingüisticidade e compreensão se mostra, para começar, no fato de que a essência da tradição consiste em existir no médium da linguagem” (Gadamer, 2011a, p.567). Por isso, a linguagem não é apenas um instrumento de comunicação, mas também um meio de compreensão e interpretação do mundo. Assim, a

“lingüisticidade é algo que se difunde no modo de estar-no-mundo do homem histórico” (Palmer, 1999, p.210). A linguagem é um componente fundamental para a compreensão da experiência humana, que é histórica e dinâmica, e depende da linguagem para ser compreendida, pois ela envolve a participação ativa dos interlocutores em um diálogo que busca o entendimento da coisa em questão. Portanto, “a forma lingüística e o conteúdo da tradição não podem ser separados na experiência hermenêutica” (Gadamer, 2011a, p.640).

A linguagem não se limita a um sistema de signos, bem além disso, ela é um acontecimento dialógico que possibilita o encontro entre diferentes pontos de vista e horizontes de sentido. Gadamer argumenta que a linguagem é um meio que permite a compreensão mútua, que se dá através do processo da conversação. Para que exista um acordo na conversação, é necessário que os interlocutores estejam abertos ao diálogo, ou seja, que se abram para acolher o diferente e o contrário. Gadamer toma como exemplo da situação hermenêutica a mediação que ocorre na tradução, atribuindo-lhe um grande desafio hermenêutico, pois nesse caso o tradutor precisa superar o abismo das línguas. Compreender é traduzir um significado ou ser capaz de traduzi-lo, esta tradução implica necessariamente uma atualização linguística do significado. Nesse processo de mediação, esse autor (Gadamer, 2011a, p.566, grifos do autor) destaca que “*a linguagem é o meio universal em que se concretiza a própria compreensão. A forma de concretização da compreensão é a interpretação*”.

Com base no autor em questão, a linguagem tem uma natureza primordialmente especulativa. Isso significa que, ao tentar tornar as coisas compreensíveis, a linguagem não é dogmática, mas sim um acontecimento de revelação. Para Gadamer (2011a, p. 675), uma ideia é especulativa,

[...] quando a relação que nela é enunciada não se deixa pensar como a atribuição inequívoca de uma determinação a um sujeito, de uma propriedade à coisa dada, mas que tem de ser pensada como uma relação especular, na qual o próprio espelhar não é nada mais do que a pura aparência do refletido, tal como o um é o um do outro e o outro é o outro do um.

Nas considerações finais de *Verdade e Método*, Gadamer reflete sobre o caráter universal da hermenêutica, entendendo que a linguagem possui uma dimensão ontológica, revelada no modo de ser especulativo da linguagem. Para ele, o fenômeno hermenêutico, ao se manifestar como uma forma de linguagem, tem um valor universal e absoluto. A hermenêutica, portanto, é uma forma de compreender a verdade, que não se limita ao método científico, mas abrange toda a experiência humana. Esse caráter ontológico leva o autor da referida obra a manifestar preponderantemente uma de suas principais máximas: “*O ser que pode ser compreendido é linguagem*” (Gadamer, 2011a, p.687). Com essa afirmação, o estudioso busca

perpassar a ideia da hermenêutica como sendo uma base das *Geisteswissenschaften*, que se torna um *aspecto universal de filosofia*.

Nestes estudos sobre hermenêutica, que estamos procedendo, entendemos que Gadamer busca demonstrar, tendo como referência a experiência da arte e da tradição histórica, o fenômeno da hermenêutica em toda a sua magnitude. Nesse autor encontramos uma síntese dos dois movimentos, em primeiro lugar, o caminho *das hermenêuticas regionais para a hermenêutica geral*, e, em segundo lugar, o caminho *da epistemologia das Geisteswissenschaften para a ontologia*. A metáfora das *quatro grandes avenidas*¹⁶⁰, proposta por Espósito (1991), ilustra o trabalho de Schleiermacher, Dilthey, Heidegger e Gadamer, que se dedicaram à hermenêutica. Embora cada um desses autores tenha desenvolvido uma abordagem própria e distinta, eles compartilham um horizonte comum: a ontologia, ou seja, a investigação do ser e do sentido das coisas. Além disso, eles buscaram uma universalidade do *logos*, entendido como a manifestação da verdade na linguagem e na compreensão das diversas consciências.

4.4.3 O Modo de modo de inserir a análise hermenêutica na investigação fenomenológica.

Nesta subseção apresentamos as articulações implícitas entre Fenomenologia e Hermenêutica. Esse tema, trazido por Ricoeur (1988), é crucial para retornarmos ao procedimento da pesquisa que estamos realizando, uma vez que, como já anunciado, ela é de cunho fenomenológico com inserção da hermenêutica. Entendemos que devamos, agora, articular as contribuições da fenomenologia e da hermenêutica para a nossa análise, com vistas a revelar o *logos* que orienta nossos procedimentos. Isso significa que devemos esclarecer os princípios e os guias que norteiam a nossa compreensão do fenômeno estudado, bem como os critérios de validade e de rigor que assumimos.

O autor mencionado no parágrafo anterior investiga as vias abertas pela filosofia contemporânea, especialmente aquelas que ele chama de *enxerto do problema hermenêutico na fenomenologia*. Como vimos na subseção anterior, a hermenêutica tem suas raízes nas antigas hermenêuticas regionais, de forma que a questão hermenêutica já existia antes de Husserl. Mas foi o trabalho de Husserl sobre a fenomenologia que permitiu uma nova abordagem do problema hermenêutico. É por isso que, no intuito de compreender melhor a presença da fenomenologia na análise hermenêutica, consideramos pertinente explicitar como esse elo

¹⁶⁰ “[...] passamos a utilizar-nos da metáfora das “grandes avenidas”, onde colocamos figurativamente pensadores e filósofos que se debruçaram sobre esta questão. Elegemos então a “avenida” representada pela hermenêutica alemã representada por Schleiermacher, Dilthey, Heidegger e Gadamer” (Espósito, 1991, p.86).

oferece um esclarecimento relevante para a interpretação dos fenômenos. Seguindo a metáfora de Ricoeur (1988, p.7), a fenomenologia seria “[...] a jovem planta sobre a qual se poderá enxertar o enxerto hermenêutico”, ou seja, ela permite uma abertura para o sentido que emerge da experiência vivenciada.

Ricoeur (1989) destaca que a fenomenologia, como foi desenvolvida por Husserl, continua sendo o pressuposto indispensável da hermenêutica, pois permite compreender a essência das coisas mediante a compreensão da experiência vivenciada. Essa abordagem fenomenológica é crucial porque possibilita uma compreensão da coisa, indo além da superfície para explorar o significado inerente às experiências humanas. No entanto, por outro lado, a fenomenologia não pode realizar seu projeto de *constituição*¹⁶¹, apenas como uma descrição objetiva, sem se tornar uma *interpretação* da vida do sujeito.

Assim, como argumenta Ricoeur, existe uma relação de pertença entre a fenomenologia e a hermenêutica que atua nos dois sentidos, da fenomenologia para a hermenêutica e vice-versa. “Por um lado, a hermenêutica edifica-se na fenomenologia e preserva, assim, aquilo de que, no entanto, ela se afasta: *a fenomenologia permanece o inultrapassável* [intransponível] *pressuposto da hermenêutica*. Por outro lado, a própria fenomenologia não se pode constituir sem um *pressuposto hermenêutico*” (Ricoeur, 1989, p.50, inserções nossas). Ao ser reconsiderada como uma fenomenologia hermenêutica, esta passa a se basear na compreensão e interpretação das coisas que se mostram, buscando tornar visível a estrutura do ser-no-mundo. Heidegger (2005, p.68) já manifestou: “O λόγος da fenomenologia da pré-sença possui o caráter de ἐρμηνεύειν”.

Van Manem (2003) discute a relação entre *descrição* e *interpretação* na pesquisa fenomenológica, e diferencia dois tipos de descrição: a descrição na qualidade da experiência vivida, que é própria da fenomenologia, e a descrição do significado *das expressões* da experiência vivida, que é uma descrição intermediada ou realizada por uma mediação simbólica do mundo vivido. Esses dois tipos de descrição não são idênticos, pois o primeiro é uma descrição direta do mundo vivido, enquanto o segundo é uma descrição indireta ou mediada desse mesmo mundo. No entanto, Van Manem (2003) afirma que existe uma diferença entre

¹⁶¹ Segundo Robert Sokolowski (2012, p.103, grifos do autor), “na terminologia fenomenológica, o estabelecimento de objetos categoriais é chamado de sua *constituição*. O termo ‘constituição’ não deve ser tomado para significar algo como uma criação ou uma imposição de formas subjetivas sobre a realidade. Na fenomenologia, ‘constituir’ um objeto categorial significa trazê-lo a luz, enunciá-lo, trazê-lo para o primeiro plano, realizar a sua verdade. Não podemos manifestar uma coisa de algum modo que nos seja agradável; não podemos fazer um objeto significar algo que desejamos. Podemos trazer uma coisa à luz somente se a coisa oferece a si mesma em certa luz. A coisa tem de mostrar-se com certos aspectos que podemos destacar se estamos aptos a declarar que ela tem certas características”.

fenomenologia e hermenêutica no âmbito das ciências humanas. Por um lado, ele afirma que a fenomenologia se dedica a descrever a experiência vivenciada de forma pura, sem recorrer a conceitos ou teorias prévias¹⁶². A hermenêutica, por outro lado, ocupa-se em interpretar a experiência por meio de algum *texto* ou símbolo que a represente. Para o autor, a hermenêutica busca compreender o sentido mediado pela linguagem.

Nós compreendemos que a fenomenologia busca manter-se na dimensão do trazido na vivência da experiência (*Erlebnis*) em atualização na ação, a qual ocorre no aqui e no agora no fluxo da experiência. Entretanto, é importante destacar que o compreendido pelo sujeito, ao retomar-se no fluir da ocorrência da ação, é necessariamente expresso pela linguagem, ao descrevê-la. Desse modo, não concordamos com Van Manem (2003), quando se pauta no que alguns especialistas em Ciências Humanas, que assumem a distinção entre fenomenologia e hermenêutica, entendem. Na exposição desse autor citado, esses especialistas expõem que a pesquisa fenomenológica é pura descrição, e que alcança seu objetivo inteiramente através de uma compreensão direta, ou intuição, da estrutura essencial dos fenômenos tal como aparecem na consciência e que, por sua vez, a interpretação hermenêutica já está fora dos limites da pesquisa fenomenológica, e, portanto, a noção de interpretação implica o reconhecimento de uma percepção intuitiva incompleta. Essa explicação não se mantém, pois, a compreensão da vivência é sim expressa e passível de descrição, porém a descrição é expressa pela linguagem. Ao explicitar a esfera da intersubjetividade, Husserl traz como fundante o ato da empatia, que se dá na percepção. É nesse ato que o corpo – *Körper* –, passível também de ser entendido em sua dimensão egológica, transcende os “limites” que o separam do outro (qualquer que seja, pessoa, realidade mundana) e que se abre à dimensão do “*com o outro*”, constituindo a realidade intersubjetiva. Entretanto essa esfera, que é uma dimensão da realidade do mundo-da-vida, só é passível de ser sustentada e manter-se viva e vivente, pela expressão do visto e compreendido por esse corpo-vivente – *Leib* –, expressão essa que sempre se dá pela linguagem (Husserl, 2012, p. 292-327). O expresso solicita compreensão e interpretação.

De acordo com Bicudo (2011c), alguns dos modos pelos quais a descrição se expressa são mais enfatizados do que outros. Essa variação depende do propósito e do contexto da descrição, bem como da perspectiva do pesquisador. Assim, a pesquisa que visa a estrutura do fenômeno é denominada *Fenomenologia Estrutural*. Nessa modalidade de pesquisa, a descrição

¹⁶² Segundo Van Manem (2003, p.47, tradução e inserções nossas), não se pode confundir a “análise fenomenológico-hermenêutica de textos com uma mera variação de técnicas bem conhecidas de análise de textual [como a análise de conteúdo, análise de discurso, entre outras], ou como algo idêntico às práticas de codificação analítica, taxinomia e organização de dados comuns à etnografia ou aos métodos baseados na teoria [como na *Grounded Theory*]”.

leva ao que a expressão evidencia, indicando o fenômeno constituído no encontro *noesis-noema*. “Dito de outro modo, a Fenomenologia busca transcender o individualmente relatado na descrição e avançar em direção a estrutura do relatado, ou seja, do nuclear das vivências sentidas e descritas” (Bicudo 2011c, p.46). Essa modalidade é assumida por pesquisadores como Amadeo Georgi, Barbro Giorgi e James Morley, que consideram que o método fenomenológico filosófico de Husserl requer três etapas chaves, a saber:

Primeiro, voltamo-nos para o objeto cuja essência deve ser determinada e descrevemo-lo; segundo, é preciso assumir a atitude da redução fenomenológica transcendental; finalmente, deve-se descrever a essência ou característica invariante do objeto com a ajuda do método de *variação livre da fantasia*¹⁶³ (Georgi, Giorgi e Morley, 2017, p. 178, tradução nossa e grifos do autor).

De outra parte, aponta Bicudo (2011c) que a modalidade de pesquisa que conduz a busca pela compreensão e interpretação do culturalmente presente (tradição) ao mundo, expresso na linguagem, recebe a denominação de *Fenomenologia Hermenêutica*. Dessa maneira, compreendemos que a hermenêutica está centrada na interpretação de textos, discursos, experiências, expressos na obra humana, e se preocupa por *compreender o significado em seu contexto*. Gadamer (2011a, p. 489) se refere a esta interpretação, “[...] não tanto com o sentido intencionado, mas com o sentido oculto, e que tem de ser revelado. E nesse sentido cada texto representa não somente um sentido compreensível, mas também um sentido necessitado de diversas perspectivas de interpretação”. Aliás, nesta modalidade de pesquisa,

Interrogar o “dito” no texto e iluminá-lo através do ver fenomenológico-hermenêutico significa aproximar-se da experiência primária homem/mundo. Essa experiência original ao ser expressa nos diferentes códigos lingüísticos (falado, escrito, gestual, plástico), ao longo do tempo, torna-se carregada ou reduzida nas suas significações, conforme tenha sido seu uso numa determinada sociedade. Assim a linguagem, ao expressá-la, torna-se polissêmica e ambígua (Espósito, 1994, p.86).

Diante do exposto, entendemos que *a tarefa da hermenêutica* consiste em interpretar o texto além do que ele expressa explicitamente, buscando *des-cobrir* (tornar claro, tirar da obscuridade) o que ele não disse e que talvez não pudesse dizer, sem se limitar dogmaticamente aos conceitos, mas se abrindo para os sentidos e significados que ele pode suscitar. Desse modo, segundo o expresso por Gadamer (2011a, p.544), “um texto só é compreendido no seu sentido quando se alcançou o horizonte do perguntar, que como tal contém necessariamente também outras respostas possíveis”. Na modalidade *Fenomenologia Hermenêutica*, a interpretação não se limita a uma interpretação estrutural do texto, baseada apenas na análise linguística, mas busca pelo sentido do texto no contexto em que ele surge, nas experiências vividas por quem o

¹⁶³ First, one turns toward the object whose essence must be determined and one *describes* it; second, one must assume the attitude of the *transcendental phenomenological reduction*; finally, one must describe the essence or invariant characteristic of the object with the help of the method of *free fantasy variation*.

lê e o interpreta, *tanto à luz da sua realidade vivida como do encontro histórico dessa realidade e da tradição*. É nesse encontro “[...] que aquele que compreende se compreende, projeta-se a si mesmo rumo a possibilidades de si mesmo” (Gadamer, 2011a, p.349).

Uma das afirmações mais frequentes, na literatura que versa sobre a fenomenologia, é que não existe um método, ou seja, um *passo a passo* padronizado para indicar os procedimentos de pesquisa nessa abordagem. Gadamer, por exemplo, já nos alertava sobre essa questão no título de sua obra: *Verdade e Método*¹⁶⁴. No entanto, como Van Manem (2003) argumenta, também existe a tradição, ou seja, um conjunto de conhecimentos e ideias, uma história de vida de pensadores e autores, tomados como exemplo, que constituem ao mesmo tempo uma fonte e uma base metodológica para apresentar as práticas de pesquisa em ciências humanas. Em qualquer uma dessas modalidades, compreendemos que se manifesta o significado da fenomenologia, descrito por Husserl como o ir-à-coisa-mesma, atentos ao seu mostrar-se, e posteriormente descrito por Heidegger (2005, p.65) ao dizer: “[...] deixar que aquilo que se mostra se revele por si mesmo, do modo como se manifesta a partir de si mesmo”. A investigação que recebe o nome de “fenomenologia” diz do ouvir o *fenômeno*, que se manifesta em seus modos de aparecer a quem por ele indaga, e que busca articular o apreendido nesse manifestar-se evidenciando, nessa articulação, a ação do *logos*, expondo o compreendido em uma linguagem inteligível.

4.5 Assumindo e realizando a hermenêutica fenomenológica

Ao examinar o caminho para elucidar os fundamentos teórico-filosófico-fenomenológicos que sustentam os procedimentos analíticos da nossa pesquisa, tendo como horizonte a busca pela *compreensão*, investimos esforços para realizar uma busca que nos conduza a compreensões para além dos aspectos técnicos de procedimentos, buscando iluminar os caminhos pelos quais interpretamos sentidos e significados. Assim, ao detalhar as bases de nossa análise, buscamos estabelecer um diálogo entre o texto e o contexto, entre o dito e o não-dito, entre o explícito e o implícito, na constante busca por compreensões que revelem as múltiplas camadas de sentido nas falas dos sujeitos significativos.

Do amplo campo da teorização fenomenológica, consideramos como conjunto de guias e recomendações, que se articulam como *logos* de nossos procedimentos de análise, no âmbito da presente pesquisa, o modo de proceder que vem sendo assumido pelos pesquisadores e acadêmicos do grupo de pesquisa FEM. Tem-se orientado que toda análise de descrição

¹⁶⁴ Alertamos ao leitor, que, o assunto em relação à controvérsia do *método* também foi abordado no início da seção 4.4, da presente tese.

fenomenológica, por envolver a linguagem (qualquer modalidade pela qual ela seja expressa), demanda um enxerto hermenêutico, para que, “[...] no movimento de compreensão do dito, já se proceda à abertura aos sentidos e significados expressos e transportados pelo modo de dizer pelo qual a descrição se doa à interpretação” (Bicudo, 2011c, p.44).

Desse modo, após várias sessões de trabalho de orientação, consideramos pertinente que o trabalho de análise das descrições se articule em duas vias. Em uma via, buscamos por meio da Fenomenologia Estrutural, com ajuda das reduções fenomenológicas, a estrutura do fenômeno. Na outra via, buscamos compreender o que significa essa estrutura, apoiando-nos no movimento Hermenêutico, na busca da *fusão de horizontes*. Desse modo, propusemo-nos, mediante essas duas vias, não nos afastarmos da condição original de toda hermenêutica, que como foi preponderantemente posto por Gadamer, *ela deve ser uma referência comum e compreensível às “coisas mesmas”*.

4.5.1 O movimento Fenomenológico Estrutural

As operações de análise das descrições (o conjunto de textos emergentes da vivência expressa nas entrevistas) têm como intuito compreender o sentido do que foi dito, levando em conta tanto o contexto individual de cada depoimento quanto os significados que transcendem essa singularidade. Dessa forma, cada descrição se torna um texto que precisa ser interpretado. Nessa perspectiva, todo o conteúdo da descrição é relevante, pois a fenomenologia trabalha com as operações que permitem abordar a totalidade à luz daquilo que se interroga. Operações essas que não correspondem às de um algoritmo, porém, trata-se de um modo de proceder correlativo à atitude aqui assumida, a fenomenológica.

Sobre esse movimento, Bicudo (2011d) propõe alguns indicadores para orientar as operações de análises das descrições, estes que consistem em: ler o escrito como um todo, destacar os *sentidos*, denominando-os *unidades de sentido*, transformá-los, por meio da hermenêutica em *unidades de significado* e elaborar uma síntese de *unidades de significado*. Esses indicadores não são passos fixos, mas orientações que emergem do olhar cuidadoso, guiados pela nossa pergunta de pesquisa. Eles nos fornecem mecanismos analíticos para verificar e examinar as antecipações implícitas, mantendo o rigor do olhar e do procedimento, sem nos basearmos em suposições apressadas ou *achismos*. Seguindo esses indicadores, podemos compreender o que Heidegger (2005, p. 210, grifos nossos) propõe quando diz que devemos, “[...] na elaboração da posição prévia, da visão prévia e concepção prévia, *assegurar o tema científico a partir das coisas elas mesmas*”. Assim, entendemos que esses autores querem indicar que, se pretendemos compreender, não podemos nos entregar de antemão ao

arbítrio de nossas próprias opiniões prévias, mas devemos estar dispostos a deixar que estas nos digam algo, porém, examinando-as criteriosamente.

Tendo presente nossa interrogação, buscamos ir além da descrição, conforme a postura fenomenológica assumida. Para isso, inicialmente olhamos para os textos de forma atenta e rigorosa, isto implica ler com atenção e profundidade os depoimentos dos sujeitos significativos, buscando compreender o significado existencial das suas vivências, “abrindo-se, empaticamente, à possibilidade de imaginar o ponto de visada do qual o depoente fala, intuindo, por *insight*¹⁶⁵, o sentido do todo” (Bicudo, 2011, p. 57).

Segundo a recomendação de Martins, Boemer e Ferraz (1991), deve-se realizar uma primeira leitura, de princípio ao fim, de todo o material que compõe o corpus textual, sem buscar nesse primeiro momento, “[...] qualquer interpretação ou identificar qualquer atributo ou elemento, a fim de chegar a um sentido geral do que está descrito” (p.43). Dessa forma, Bicudo (1993, p.89) esclarece que essa primeira leitura tem a função de “[...]reviver, no que está escrito, a intenção do dizer”. A esse respeito, Gadamer (2011b) pontua a importância desta primeira leitura, pois, a compreensão do que um outro diz não se limita ao que o outro tinha em mente, mas envolve algo partilhado, comum. Ainda mais, para Gadamer, “[...] a leitura é a estrutura fundamental comum a toda consumação de sentido. [... Assim] o texto que está sendo lido experimenta um crescimento ontológico, e é só através deste que a obra recebe sua atualidade plena” (Gadamer, 2011b, p.29, inserções nossas).

Conforme o argumentado, em nossa análise, no movimento inicial da leitura do corpus textual, procuramos colocar em evidência as sentenças ou fragmentos do texto que expressam sentidos à luz da interrogação que orienta nossa pesquisa. Sendo assim, compreendemos que as sentenças destacadas possibilitam a abertura de significados na perspectiva do interrogado e da região de inquérito da Educação Matemática. No âmbito do grupo de pesquisa FEM, essas sentenças têm sido denominadas como *Unidades de Sentido*, (que denominaremos para efeitos da codificação no processo de análise como US). De acordo com Gadamer (2011a), *sentido* refere-se, entre outras coisas, a um sentido de orientação. Seguindo esse viés, “com a pergunta, o interrogado é colocado sob uma determinada perspectiva. O surgir de uma pergunta rompe de certo modo o ser do interrogado. Nesse sentido, o *logos* que desenvolve [a compreensão do

¹⁶⁵ Segundo Machado (1994, p.40), este termo “refere-se àquilo que se doa a consciência e é, no seu sentido mais elevado, um ato da razão; trata-se de um ‘ver’ dentro de uma situação”. Segundo observação da professora Maria Bicudo, em sessão de orientação, o termo mais apropriado, no âmbito da fenomenologia husserliana, não seria *insight*, mas *intuição* (*Anschauung*), por tratar-se de um conceito fundamental em Husserl (cf. *Ideen I*, §§19–24), com sentido mais amplo e estrutural do que o conceito psicológico de *insight*, o qual tem uma história na Psicologia e costuma significar uma “compreensão súbita” de uma relação ou solução — um fenômeno mental, empírico, no âmbito da consciência psicológica.

interrogado] este ser assim aberto já é sempre resposta, e só tem sentido no sentido da pergunta” (p.534, grifos do autor inserções nossas). Desse modo, compreendemos que aquilo que se destaca nas US são sentidos e a compreensibilidade, que estão articulados à perspectiva do investigador intencionalmente guiado pela pergunta, lembrando que, para a presente pesquisa, interrogamo-nos sobre: *como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?*

Após colocar em evidência as US, buscamos compreender o que nelas é dito mediante a expressão dos sujeitos em uma linguagem natural e espontânea. Para isso, apoiamo-nos na hermenêutica, por meio do procedimento de análise das palavras e seus significados. Um primeiro momento da abordagem hermenêutica ocorre no interior do movimento de *análise ideográfica*, em que procuramos compreender o que é dito nas falas dos sujeitos significativos. É assim que, ao considerar “a fala como ponto de partida, remontamos ao evento em que a palavra funciona como palavra, remontamos ao contexto vivo da linguagem (Palmer, 1999, p.143), mas que ao expressá-la, pode tornar-se polissêmica e ambígua. Considerando a conexão que Gadamer faz entre a estrutura do jogo e a experiência hermenêutica, refletimos sobre as decisões necessárias a serem tomadas no decorrer da pesquisa e, em particular, as concernentes ao movimento de interpretação nas análises do material textual investigado. À luz dessas reflexões, entendemos que, na busca pela compreensão no movimento hermenêutico, a linguagem deve ser vista como um fenômeno dinâmico que revela e ilumina os significados.

Recorremos a um *enxerto hermenêutico*, procurando esclarecer os significados de palavras ou sentenças ditas na descrição (o corpus textual que compõem os depoimentos), como uma forma de ampliar as compreensões, buscando explicitações acerca de significados de termos, siglas, expressões idiossincráticas e seus usos regionais. Consideramos relevante este momento da análise hermenêutica por quanto “as palavras não dizem tudo e não são objetivamente dadas, ou seja, não há uma relação biunívoca entre palavra e o seu correlato (experiência vivida)” (Bicudo, 1994, p.19). É neste mesmo sentido que compreendemos, com base em Heidegger (2005), que “[...] a totalidade significativa da compreensibilidade vem à palavra. Das significações brotam palavras. As palavras, porém, não são coisas dotadas de significados” (p. 219). É nesse sentido, que o *enxerto hermenêutico* no proceder do movimento na *análise ideográfica* se torna crucial, pois entendemos que este auxilia-nos como *condição de possibilidade para a compreensão dos sentidos e significados* expressos nas US e que no decorrer das articulações do compreendido visa a constituição das USg.

Bicudo (2011) destaca a importância do *enxerto hermenêutico* como um movimento indispensável em vista da estrutura do fenômeno estudado. O *enxerto hermenêutico* age como

um elo articulador “no movimento de tratar as falas ingênuas dos sujeitos intermediadas pelas proposições postas em linguagem tão apropriada quanto possível, no horizonte do campo de conhecimento trabalhado e expresso pelo pesquisador” (Bicudo, 2011, p.65). Segundo Kluth (2011, p.80), no modo de proceder do *enxerto hermenêutico*, o pesquisador precisa ir ampliando “seu conhecimento das palavras que veiculam sua compreensão”. Isso pode ser obtido por meio de dicionários para esclarecer significados, contextualização adequada e consulta de textos especializados quando necessário. Por isso, recorreremos à análise e à reflexão sobre o conteúdo dos relatos (depoimentos) e às *variações eidéticas*¹⁶⁶ no contexto da região de inquérito. É um proceder que o pesquisador realiza cuidadosamente, “[...] é como um arqueólogo que encontra um fragmento de cerâmica, que então adquire significado à medida que é interpretado à luz das suas conexões com o seu mundo histórico, social, cultural, estético e político”¹⁶⁷ (McCaffrey, Raffin-Bouchal e Moules, 2012, p.217, tradução nossa).

Assim, procedemos a realizar articulações que, partindo do dito pelo sujeito, tomado para análise como US, ele é reelaborado em frases com vistas à articulação de *Unidades de Significado* (que denominaremos para efeitos da codificação como USg). Essas frases buscam expressar o que é dito pelo sujeito de forma mais clara, porém sem mudar o sentido do dito, para indicarem momentos distinguíveis, no intuito de ir desvelando os invariantes do fenômeno.

Após constituir as USg, examinamos cuidadosamente os aspectos centrais ou nucleares de cada uma das unidades, especialmente das USg que são mais reveladoras do fenômeno em estudo. Desse modo, procuramos pôr em evidência as USg mediante uma ou várias sentenças

¹⁶⁶ As variações *eidéticas* também são denominadas *variações imaginativas*. As variações imaginativas são um método de que se vale a fenomenologia para explorar a estrutura da consciência. Este método envolve variar os elementos da experiência para compreender como a estrutura da consciência muda. Em outras palavras, as variações imaginativas são uma forma de explorar como a consciência se relaciona com o mundo ao seu redor. Para Husserl (2006), a imaginação desempenha um papel preponderantemente metódico, que ocupa uma posição privilegiada em relação, por exemplo às percepções, no âmbito das ciências eidéticas. Aliás, Segundo Husserl (2006, p.38, grifos do autor), “[...] para apreender intuitivamente uma essência ela mesma e de *modo originário*, podemos partir das intuições empíricas correspondentes, *mas igualmente também de intuições não empíricas, que não apreendem um existente ou, melhor ainda, de intuições ‘meramente imaginárias’*”. Para Bicudo (2011d, p.58, grifos da autora), a variação imaginativa “é um recurso para procedermos as variações possíveis de situações em que o fenômeno se mostra, tendo como alvo o *insight* da generalidade ou da ideia essencial ou do *eidos* do investigado”. Essas variações *eidéticas*, como indica Depraz (2007), podem ser sintetizadas em três funções metódicas no âmbito da obra de Husserl, a saber: 1) variação é imaginária; “[...]tem aqui a função metódica de nos arrancar definitivamente da empiria, fazendo aparecer a estrutura de idealidade (de possibilidade) que nos habita enquanto sujeitos conscientes” (p.78). 2) Neutralização; neste modo, “[...]o ato imaginativo se apresenta de fato como um caso delimitado de epoché, uma sorte de propedêutica parcial ao cumprimento radical, definitivo e universal da epoché transcendental” (p.78). 3) A transposição em imaginação em outrem; aqui a “[...]função metódica da imaginação consiste em permitir distorcer-me ao extremo em minha unidade egóica para ir, em ficção (*sich hineinphantasieren*) ao lugar ocupado por outrem sem, entretanto, me tornar outrem, sem destruir minha unidade [...] Enquanto as duas primeiras funções metódicas da imaginação permanecem egológicas, a terceira nos faz entrever sua dimensão intersubjetiva” (p.79)

¹⁶⁷ It is like an archeologist finding a pottery shard, which then takes on meaning as it is interpreted in light of its connections to its historical, social, cultural, aesthetic, and political worlds.

que expressem de modo mais claro, de acordo com a linguagem da região de inquérito do fenômeno investigado, as ideias contidas nas US. Já se está realizando o movimento de *epoché*, na medida em que focamos a interrogação e destacamos as US nos depoimentos.

Cada um desses procedimentos explicita as convergências que são realizadas por meio de reduções sucessivas, nas quais vamos compreendendo e atribuindo significados, em direção às ideias nucleares. De acordo com Bicudo (2010a), a *epoché* fenomenológica, entendida como ato de colocar em evidência que destaca as ideias compreendidas do fenômeno sob investigação, abrange possibilidades de desdobramentos em direção às compreensões mais abrangentes mediante o movimento de redução fenomenológica e “refere-se a dar destaque ao que está sendo interrogado, de modo que os atos da consciência constitutivos da geração do conhecimento sejam expostos” (p. 32). Também, cabe frisar que, o termo *redução* não deve ser compreendido, no âmbito da fenomenologia, como uma mera simplificação, como uma negação ou limitação, porém como um movimento do pensar articulador das ideias trazidas nas descrições, que vai reunindo ideias em todos mais abrangentes, nomeados por denominações que o pesquisador considere apropriadas ao sentido que deseja explicitar.

Compreendemos que o propósito desse movimento de análise é ir mostrando o que se compreende do fenômeno, por meio do esclarecimento das ideias que vão se articulando, explicitando seus sentidos e significados, movimento realizado mediante as reduções das ideias trazidas pelos sentidos. Esse modo de proceder tem sido denominado, no âmbito dos estudos do FEM que envolvem a fenomenologia, como *análise ideográfica*. Segundo Bicudo (2011d, p.58),

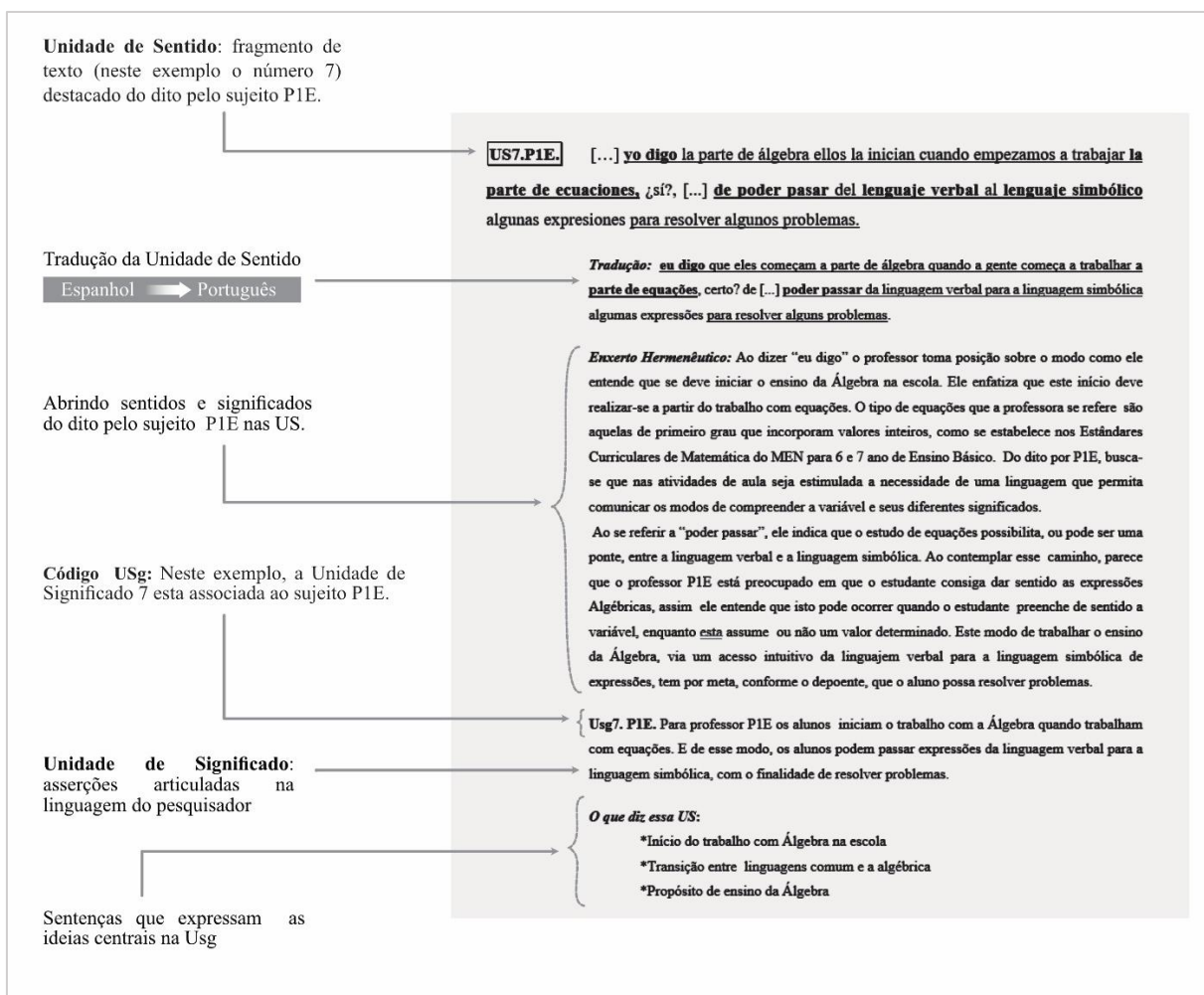
A análise ideográfica se refere ao emprego de ideogramas, ou seja, de expressões de ideias por meio de símbolos. Esse estudo penetra e enreda-se nos meandros das descrições ingênuas do sujeito, tomadas em sua individualidade. [...] Ela revela a estrutura do discurso do sujeito, evidenciando os aspectos noemáticos da descrição.

Para esclarecer o movimento *Análítico Ideográfico*, em cada unidade analítica são explicitadas as *Unidades de Sentido*, o enxerto hermenêutico e as *Unidades de Significado*. Para isso, utilizamos os depoimentos dos sujeitos significativos. No âmbito de nossa pesquisa, esses sujeitos — como já mencionado na seção 4.3 — foram: professores de escola que lecionam aula de Matemática no nível de Educação Média, indicados como PE, e professores do curso de Licenciatura em Matemática, indicados como PL. Para diferenciar os diferentes sujeitos, valemo-nos das seguintes nomenclaturas: professores de escolas como P1E, P2E, etc. (professor 1 da escola, professor 2 e assim por diante) e professores do curso de licenciatura como P1L, P2L, etc.

Nós lemos cada depoimento quantas vezes foi preciso para compreendermos o que o entrevistado estava dizendo a respeito da pergunta formulada. Seguimos, então, destacando as US, unidades de sentido por nós compreendidas como expressando o dito pelo depoente a respeito de nossa interrogação, realizando a análise ideográfica como indicado na figura 8. Inicialmente, são explicitadas as *Unidades de Sentido* (US), enumeradas como US1.P1E e assim sucessivamente, no caso dos professores de escolas. O primeiro número se refere à US seguida da denominação do sujeito. Assim, US1.P1E é a primeira US do sujeito P1E. Sublinhamos os aspectos mais relevantes do dito em cada US, enfatizando as palavras ou sentenças que requeiram um tratamento hermenêutico, nomeado como enxerto hermenêutico, tendo em vista a explicitação de sentidos ambíguos ou a exigir esclarecimentos. Mediante essa análise, ficamos atentos para expressar o dito pelo sujeito em uma linguagem mais clara, denominada como USg. Os códigos atribuídos às *Unidades de Significado* (USg) de cada uma das descrições associadas aos sujeitos, nós a nomeamos do seguinte modo: USg1.P1E se refere à USg1 do sujeito P1E, prosseguindo de modo consecutivo para cada sujeito. Para o sujeito 2, é reiniciada a enumeração e assim por diante.

A explicitação do movimento de *Análise Ideográfica* é apresentada na seção seguinte (seção 5). Alertamos o leitor de que o sistema de codificação atribuído aos sujeitos é descrito na seção 4.3 deste trabalho. No gráfico a seguir, apresentamos, como exemplo, os elementos que compõem as unidades de análise no movimento de *Análise Ideográfica*.

Figura 8 - Elementos que compõem cada unidade analítica no movimento de Análise Ideográfica



Fonte: elaboração própria.

Para analisar o fenômeno estudado, buscamos transcender os destaques individuais de cada análise *ideográfica*, em direção aos invariantes que revelem a estrutura das experiências vividas e o modo de ser do fenômeno, mediante a *análise nomotética*. Nesse movimento, vamos realizando reduções, ou seja, um movimento do pensar, em que são articuladas compreensões abertas pela análise ideográfica, cuja interpretação solicita o movimento da variação imaginativa, sustentadas em evidências, ou seja em um ver claro do que está sendo manifesto, e em um esforço para expressar, de modo apropriado, o compreendido em linguagem. Esse movimento se orienta para convergências maiores que, por sua vez, possibilitam uma compreensão global do fenômeno tendo em vista nossa interrogação.

O termo *nomotético*, segundo Mora (2001), tem raízes na obra de Kant, para quem a *nomotética* é entendida em seu sentido quase inteiramente etimológico, isto é, como um

conjunto de proposições que expressam leis. Mora também atribui a Windelband¹⁶⁸ a distinção entre ciências nomotéticas e ideográficas, em que a base das ciências naturais é o pensar *nomotético*. No entanto, como argumenta Bicudo (2011d, p.58-59), fenomenologicamente esse termo assume um significado distinto ao das ciências naturais, assim, o termo *nomotético* “[...] indica a transcendência do individual articulada por meio de compreensões abertas pela análise ideográfica, quando devemos atentar às convergências e divergências articuladas nesse momento e avançar em direção ao seguinte, quando perseguimos grandes convergências”. Cabe sublinhar aquilo que Machado (1994, p.42) tem indicado sobre a análise nomotética, pois “[...] este movimento não é apenas uma verificação cruzada da correspondência de afirmações reais [...]”, mas uma análise rigorosa dos modos de aparecer do fenômeno, refletindo sobre o que está sendo dito para além do que se mostra de imediato.

Os movimentos da análise ideográfica e nomotética, conforme entendemos, não são opostos ou hierárquicos, são fruto de um pensar criterioso e exaustivo, em que suas especificidades se relacionam com a estrutura do fenômeno, pois sempre retomamos a questão estrutural *o que é isto que se mostra como se mostra*. Eles expressam um modo de proceder, da *atitude fenomenológica*, que busca “o retorno às coisas mesmas” e que se realiza no encontro com a essência, o *eidos*, aquilo que se revela para o sujeito “que se volta para...”. Nesse sentido, compreendemos, com base em Bicudo (2011d, p.58) que, isso que se mostra revela-se pelas de “[...] sínteses mais abrangentes do dito e interpretado, buscando as estruturas das experiências vividas que revelam o modo de ser do fenômeno”.

Consideramos pertinente frisar que, conforme Bicudo (2011a, p.20) nos alerta, não nos detemos em obter “[...] verdades lógicas sobre o investigado, mas indicações de seus modos de ser e de se mostrar. Obtêm-se generalidades expressas pelas convergências articuladas”. Nesse mesmo sentido, Machado (1994) manifesta que aquelas generalidades obtidas na análise nomotética indicam a iluminação de *uma* perspectiva do fenômeno, pois consideramos que o fenômeno possui um caráter de inesgotável abrangência, que é percebido de várias perspectivas. Portanto, compreendemos que, no movimento fenomenológico *não buscamos respostas últimas*, mas evidenciar aspectos ou perspectivas do fenômeno, de modo que, como indica

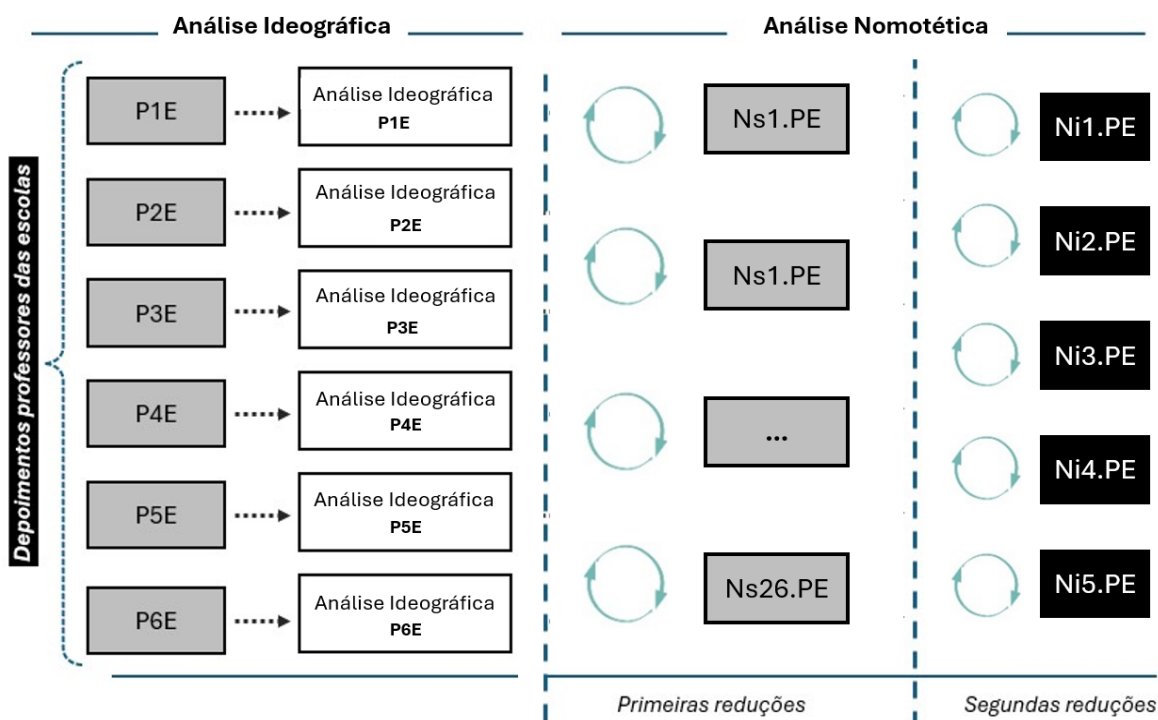
¹⁶⁸ Wilhelm Windelband, (1848- 1915). “Nascido em Potsdam, estudou em Jena, Berlim e Göttingen, ‘habilitando-se’ para o ensino em Leipzig. Foi ‘professor extraordinário’ de filosofia em Zurique (1876-1877) e professor titular da mesma disciplina em Friburgo (1877-1882), Estrasburgo (1882- 1903) e Heidelberg (1903-1915), onde Heinrich Rickert foi seu sucessor. Windelband foi, com Rickert, um dos grandes líderes da escola neokantiana de Baden. Embora os representantes da escola neokantiana de Marburgo já tivessem ampliado o quadro da crítica com respeito às ciências naturais, fizeram-no muito menos em relação às ciências culturais e à história. Windelband, continuado nisso por Rickert, insistiu na necessidade de proporcionar os fundamentos para a compreensão da estrutura da história e da cultura. Deste modo, Windelband seguiu o caminho traçado, entre outros, por Hegel e Lotze” (Mora, 2001, p.3076).

Machado (1994, p.43) “outras pesquisas contribuirão para desocultar outros aspectos do fenômeno, na direção da sua completitude”.

Ao expressarmos o que entendemos e interpretamos sobre as Unidades de Significado (Usg), realizamos as primeiras reduções fenomenológicas e identificamos os *Núcleos de Significado* de cada grupo de entrevistas, a saber: professores de escola (PE) e professores da licenciatura (PL). Os *Núcleos de Significado* (Ns) expressam ideias abrangentes que, no desdobramento de um exame exaustivo, emergem da articulação das *Unidades de Significado* (USg) na análise ideográfica. Estes *Núcleos de Significado* são nomeados com as siglas Ns# e numerados de maneira consecutiva para cada depoente, assim, por exemplo, para o professor de escola P1E, os núcleos de significado serão nomeados Ns1.P1E, Ns2.P1E, Ns3.P1E e assim por diante. Esses núcleos serão importantes para os próximos movimentos de reduções, em busca dos invariantes ou o que constitui o núcleo comum de sentidos e significados.

O próximo movimento de análise que realizamos se orienta em direção aos primeiros núcleos de ideias de cada grupo de entrevistados, isto é, logo do movimento de articulação dos *Núcleos de Significado* (Ns), procedemos com a segunda redução fenomenológica e, assim, constituímos o que estamos chamando de *Núcleo de Ideias* (NI#) de cada grupo de entrevistados. Esse movimento caminha em direção às invariantes do fenômeno investigado. Na seguinte figura, ilustra-se, de modo geral, um exemplo do movimento de análise dos professores da escola (P#E). Da mesma forma, procedemos com as entrevistas realizadas com os professores (P#L).

Figura 9 - Esquema geral do movimento de análise ideográfica - nomotética (exemplo dos professores de escola)



Fonte: elaboração própria.

4.5.2 Para além da análise nomotética

Entendemos que os invariantes do fenômeno carecem de interpretação, na busca de evidenciar o que dizem no âmbito da região de inquérito em que nós pesquisadores estamos nos movimentando. Para tanto, terá que haver abertura, liberdade e entrega de si: a compreensão é um jogo, como nos diz Gadamer. Pois para ele, o “[...] atrativo do jogo, a fascinação que exerce, reside justamente no fato de que o jogo se assenhora do jogado [...] É o jogo que mantém o jogador a caminho, que o enreda no jogo, e que o mantém em jogo” (Gadamer, 2011a, p.181).

Para ilustrar a complexidade que envolve o segundo momento da abordagem hermenêutica, valemo-nos de um antigo aforismo, que tem sido referenciado em trabalhos etnográficos, o qual diz: o peixe não percebe a água em que está nadando. Quer dizer que o peixe ao estar imerso na água, rodeado o tempo todo por ela, faz com que se torne invisível e quase impossível percebê-la. Desse aforismo compreendemos que assim como o peixe, nós como pesquisadores, também estamos imersos em nossa própria cultura, história, tradições e preconceitos, muitas vezes, sem perceber a influência que exercem sobre nós. É somente pelo *distanciamento*, ou ao emergir para *uma nova perspectiva*, que podemos começar a ver o meio em que estivemos submersos e entender como ele moldou nossas compreensões. Assim, conforme entendemos, a complexa *tarefa da hermenêutica* é um esforço intencional que se dá na constituição de uma tensão entre familiaridade e estranhamento.

Nesse sentido, a hermenêutica gadameriana nos adverte que a descoberta, ou a explicitação de um preconceito, não é possível enquanto ele permanece simplesmente operante; de modo que é necessário provocá-la. Contudo, essa provocação aos nossos preconceitos é exatamente o resultado de uma redescoberta de uma tradição que, porventura, está na raiz deles. Isto exige de nós “um esforço de compreensão é aquilo que se manifesta de antemão e por si mesmo em sua alteridade. Isso nos reconduz à constatação que já fizemos, a saber, que toda compreensão começa com o fato de que algo nos *interpela*” (Gadamer, 2003, p.68-69, grifos do autor). É nesse sentido que entendemos como preconceitos, aquelas compreensões iniciais que nos permitiram explicitar nossas inquietações (colocadas em destaque no primeiro capítulo da presente tese) sobre a Álgebra e o modo de ela ser compreendida por professores em exercício de sua profissão que contribuem com a formação de futuros professores de Matemática. Mas, também, no decorrer da pesquisa, é possível que novos preconceitos surjam ou se tornem evidentes por meio do movimento de análise fenomenológico estrutural. Pela *ἐποχή*, esses preconceitos são temporariamente suspensos, mas na análise hermenêutica, eles não são apenas reconhecidos, mas também cuidadosamente examinados, pois eles fazem parte da condição de possibilidade para a compreensão. Assim, como as idas e vindas na pesquisa assemelham-se a essa imagem do jogo, que convida a entrar no tema investigado, os preconceitos não são abandonados nem impostos como evidentes, mas colocadas em jogo (McCaffrey, Raffin-Bouchal e Moules, 2012)

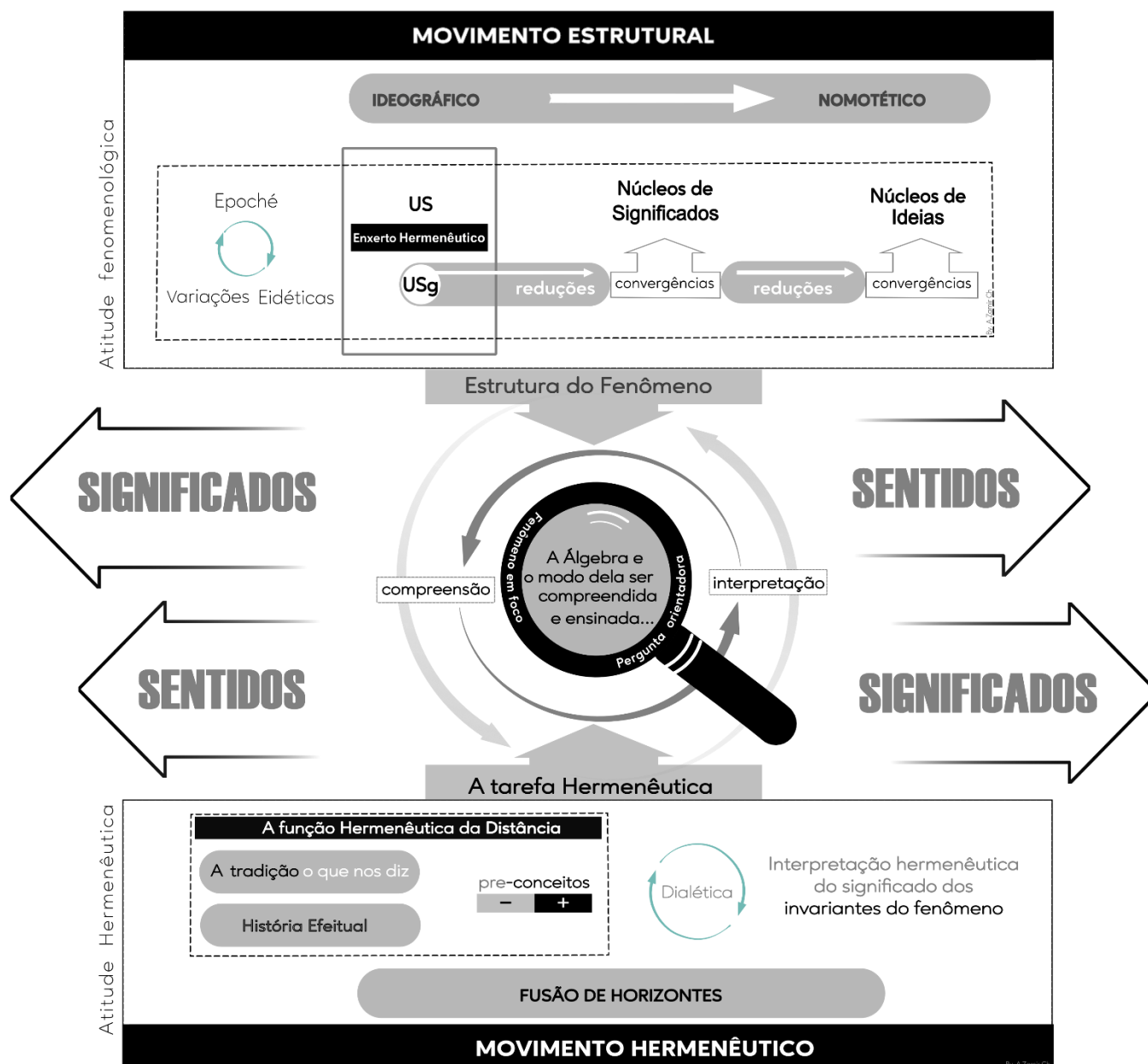
Nesse segundo momento da abordagem hermenêutica, orienta-se para a interpretação dos sentidos e significados dos *invariantes do fenômeno*, por meio de um movimento dialético que incorpora a *função hermenêutica da distância*. Essa distância a qual nos referimos não é só temporal¹⁶⁹, pois, conforme compreendemos, ela representa uma distância em termos de perspectiva e conhecimento, entre o sujeito que fala e o sujeito que escuta. Nesse diálogo, ocorre um encontro de horizontes de sentido, um intercâmbio de pontos de vista, ou na perspectiva

¹⁶⁹ Alertamos ao leitor, que no primeiro volume da obra *Verdade e Método*, Gadamer faz referência ao conceito de *Distância temporal*, mas, no segundo volume, ele responde às críticas e mal-entendidos, no texto “Entre fenomenologia e dialética – Tentativa de uma autocrítica (1985)”. Assim, ele busca elucidar o conceito da seguinte maneira: “Sobretudo a introdução do significado hermenêutico da *distância temporal*, pois, por mais convincente que tenha sido, acabou sendo um péssimo precursor do *significado fundamental da alteridade do outro* e com isso da função fundamental que concerne à linguagem, isto é, ao diálogo. Teria sido mais adequado a coisa em questão falar, de uma forma mais geral, da *função hermenêutica da distância*. Não precisa tratar-se sempre de uma distância histórica e também não é sempre a distância temporal, em absoluto e como tal, que está em condições de superar conotações falsas e aplicações destrutivas. *A distância mostra-se também na simultaneidade*, como um momento hermenêutico, por exemplo, no encontro entre pessoas, que na conversa buscam primeiramente uma base comum, e de modo pleno no encontro entre pessoas que falam línguas estrangeiras ou que vivem em outras culturas. Cada um desses encontros deixa vir a consciência algo como uma opinião preconcebida, que parece tão evidente e natural a esta pessoa que ela não se dá conta da equiparação ingênua que faz com o próprio, e o mal-entendido que se estabelece com isso” (Gadamer, 2011b, p.16, grifos nossos).

gadameriana uma *fusão de horizontes* e, nessa fusão, o horizonte de quem compreende é ampliado pela abertura provocada pelo horizonte alheio. Dessa relação com o próprio e com o alheio, “o conceito de preconceito recebe seu último toque dialético: é na medida em que me transporto para o outro, que me descubro a mim mesmo, com meu horizonte presente, com meus preconceitos” (Ricoeur, 1990, p.116). Assim, compreendemos que a fusão desses horizontes acontece entre o pesquisador e as narrativas presentes nos depoimentos dos sujeitos significativos, permitindo uma compreensão mais profunda do fenômeno em estudo.

No seguinte esquema buscamos apresentar, de modo geral, o movimento de análise fenomenológico-hermenêutico, conforme foi explicitado nesta seção.

Figura 10 - Esquema geral do movimento de análise fenomenológico-hermenêutico



Fonte: elaboração própria.

Nesse esquema, o movimento estrutural, situado na parte superior, enfatiza a descrição das estruturas essenciais da experiência vivida, apoiado pela *epoché* e as variações eidéticas, que possibilitam a emergência de Núcleos de Sentido e Núcleos de Ideias. Já o movimento hermenêutico, na parte inferior, destaca o processo interpretativo, caminho à fusão de horizontes e a compreensão contextualizada dos significados. No centro do diagrama, uma lupa representa o fenômeno em foco, em que a articulação entre esses dois movimentos, evidenciando que a análise fenomenológica não se limita à descrição, mas exige também compressão e interpretação, integrando rigor analítico com sensibilidade interpretativa. Feita essa explicação, entendemos ser o momento para avançar à próxima seção, na qual nos dedicamos à análise.

5. O MOVIMENTO DE ANÁLISE DE DADOS

Γνῶθι σεαυτόν - eis que estas palavras délficas ganharam uma nova significação. Ciência positiva é ciência perdida no mundo. Deve-se primeiro perder o mundo pela ἐποχή, para ganha-lo de novo numa autorreflexão universal. *Noli foras ire*, disse Agostinho, *in te redi, in interiore homine habitat veritas*.

Husserl (2013, p.195)

5.1 Apresentação do percurso analítico

Esta seção é dedicada ao movimento de análise dos dados, momento cerne para a compreensão mais ampla do fenômeno investigado. Reconhecemos que a análise dos dados é um processo que demanda não apenas rigor metodológico, mas também uma abertura interpretativa que permita captar a riqueza dos sentidos e significados atribuídos à Álgebra e ao seu ensino. Desse modo, procuramos explicitar, de maneira articulada, as múltiplas dimensões que emergem nas falas dos professores, valorizando tanto a singularidade dos relatos quanto às possíveis convergências de sentido.

O movimento de análise é conduzido em consonância com as abordagens fenomenológico-hermenêuticas apresentadas na seção anterior, na qual foram explicitadas as características dos procedimentos em termos teóricos e metodológicos. Nesse contexto, iniciamos na seção 5.2 com as análises ideográficas das entrevistas realizadas com professores de Matemática atuantes nas escolas, atentando cuidadosamente aos detalhes e às particularidades das compreensões expressas por cada docente. Na sequência, delineamos o percurso das reduções às convergências, avançando para o movimento de análise nomotética, apresentado na seção 5.3, buscando invariantes do fenômeno investigado.

Posteriormente, na seção 5.4 e 5.5, de forma análoga, realizamos as análises ideográfica e nomotética dos relatos dos professores vinculados ao curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de ampliar nossa compreensão acerca do fenômeno investigado nos âmbitos formativos em que esses docentes atuam.

Dessa forma, esta seção visa evidenciar o olhar atento e aprofundado sobre os modos de compreender e ensinar Álgebra, reconhecendo a complexidade e a riqueza dos discursos dos professores participantes, em um movimento que conduz à fusão de horizontes de sentido.

5.2 Análise ideográfica: trabalhando com o discurso dos professores de escola

5.2.1 Professor PIE

US1.P1E Mmm [...] bueno, del **colegio que recuerdo**, [...] Sí era como muy de pronto de aprenderse como ciertas fórmulas, ciertos algoritmos, ¿sí? Y de pronto hacerlos como muy repetitivos [...] de pronto una que otra aplicación, así como muy sencillita, ¿sí? A ciertos contextos, digámoslo así. Mmm [...] sí, es como lo que más recuerdo a nivel del colegio. ¿Sí?

Tradução: Mmm hunn[...] bem, da **escola, pelo que me lembro**, [...] Sim, foi como aprender de repente certas fórmulas, certos algoritmos, certo? E de repente tornando-os muito repetitivos [...] de repente uma ou outra aplicação, além de muito simples, né? Em certos contextos, digamos assim. Mmm [...] sim, é o que mais me lembro da escola. Certo?

Enxerto Hermenêutico: O professor PIE reflete sobre suas vivências, e presentifica (*Vergegenwärtig*) suas experiências sobre o modo de tratar a Álgebra na escola quando ele estudou, revelando aspectos sobre como esta disciplina é ensinada nos cursos prévios realizados pelo professor. Para tanto, o professor PIE, ao aludir a suas *vivências como aluno na escola*, durante o período de estudos de 6º ano até 11º ano, ele considera que na escola a *Álgebra estava limitada* à aprender fórmulas e alguns algoritmos e que, nesse âmbito escolar, tornavam-se repetitivos. Também, assinala sobre os escassos cenários de aplicação e ao falar que são “muito simples”, ele ressalta que as atividades de ensino que envolviam esses cenários não consideram situações que representaram um desafio, e ficavam circunscritos a contextos de aplicação muito específicos.

De acordo com a fala, o professor PIE expressa argumentos que possibilitam delinear as concepções da Álgebra, no desdobramento de sua experiência vivida com esta disciplina, quando aluno na escola. Assim, para ele, nesse período de sua escolarização, a Álgebra limitava-se a um trabalho mecânico, ou seja, ficava restrita a um modo de proceder, em que regras são aplicáveis, desconsiderando uma reflexão aprofundada desta.

USg1.P1E: O professor lembra sobre suas vivências como aluno na escola e concebe que o modo da Álgebra ser ensinada naquele momento, limitava-se à memorização e à repetição de fórmulas e algoritmos, com escassa aplicação e em contextos muito restringidos.

O que diz essa US:

* Experiências com o apreender Álgebra.

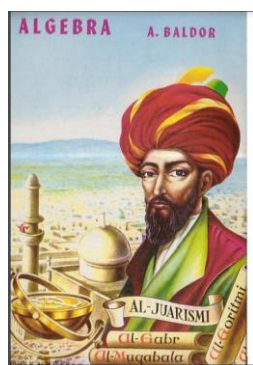
US2.P1E Yo creo que el [libro] más recordado generalmente es el Álgebra de Baldor, para la parte como tal de lo que era el grado 8º. La parte de operaciones, expresiones

algebraicas, factorización, ¿sí?, cocientes notables. Ese era como [...] ese fue como **el más que le quedó** a uno ahí. [...] el profe en clase pues explicaba [...] entonces venía la parte de la miscelánea de ejercicios, que él nos proponía [...] creo que esa era como la mecánica. Entonces, en ese entonces yo creo que para uno como estudiante la satisfacción era después de hacer el ejercicio, ¡venga, miramos la respuesta! ¿Sí? Y que, si coincidía, listo.

Tradução: Acho que o [livro] mais lembrado geralmente é a **Álgebra de Baldor**, para a parte propriamente **dita do 8º ano**. A parte das operações, expressões algébricas, fatoração, sim? quocientes notáveis. Era como isso [...] era o mais que me ficou na memória da gente. [...] o professor na aula pois explicava [...] aí então vinha a parte da **miscelânea de exercícios**, que ele propôs para a gente [...] acho que era assim como a mecânica. Então, naquela época eu acho que para a gente, como aluno, a satisfação era depois de fazer o exercício, vamos lá, vamos ver a resposta! Sim? E se coincidiu, pronto.

Enxerto Hermenêutico: O professor P1E descreve que após a explicação do professor sobre determinado conteúdo, eles faziam uma lista de exercícios do livro guia (a *Álgebra de Baldor*), denominados como “miscelânea”. A palavra miscelânea se refere a uma mistura, ou compilação de peças literárias ou científicas. Ao se referir a esta palavra, o professor P1E alude a uma seção do livro *Álgebra de Baldor*, nomeada como “miscelânea”, que contém um conjunto variado e extenso de exercícios de prática e mecanização.

Figura 11 - A icônica capa do livro *Álgebra de Baldor*



Fonte: Wikipedia¹⁷⁰

Segundo o descrito por P1E, a *Álgebra de Baldor* não era um texto particularmente orientado para o professor, mas este podia decidir o modo de incluí-lo no planejamento de suas aulas, sendo assim, tanto alunos como professores podiam fazer uso deste.

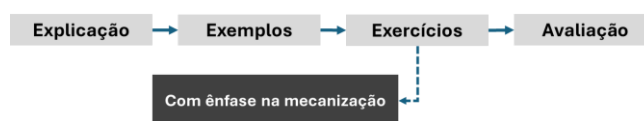
Ao se referir que “essa era a mecânica”, ele se refere ao modo de trabalho com o livro de texto, em que a sequência com este material se tornava uma prática, ou seja, uma atividade recorrente.

¹⁷⁰ https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%81lgebra_de_Baldor#/media/Archivo:Baldor.jpg

Também, o depoente indica que esta prática, centrada na realização de exercícios do livro, tornava-se um aspecto que lhe gerava motivação, na satisfação de ter compreendido e chegar na resposta correta.

Também, indica que a implementação desta metodologia de ensino tem sido uma prática recorrente, que mantém uma sequência, em que o conteúdo é apresentado ao aluno na sua forma final, conforme trabalhada na abordagem do livro de texto, “se coincidiu, pronto”. Ainda, o professor P1E explicita a sequência em que eram desenvolvidas as atividades de aula ao trabalhar com Álgebra na escola:

Figura 12 - Esquema de prática de ensino na escola segundo o dito na US2.P1E



Fonte: elaboração própria.

USg2.P1E: O professor manifesta que, em sua experiência como aluno na escola, o livro conhecido como a *Álgebra de Baldor* foi o texto que marcou sua aprendizagem da Álgebra no 8º ano. Também descreve como era trabalhado esse texto guia nas aulas e narra como depois da explicação do professor, os alunos faziam uma seção de exercícios de mecanização, do referido livro, conhecida como a “miscelânea”. Ele ressalta ainda que a prática de fazer os exercícios desse livro lhe gerava satisfação apenas se o resultado conferisse.

O que diz essa US:

*Relata da utilização do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;

*Interesse dos alunos.

US3.P1E A nivel de la universidad, pues yo creo que en realidad **no varió** mucho. ¿Sí?

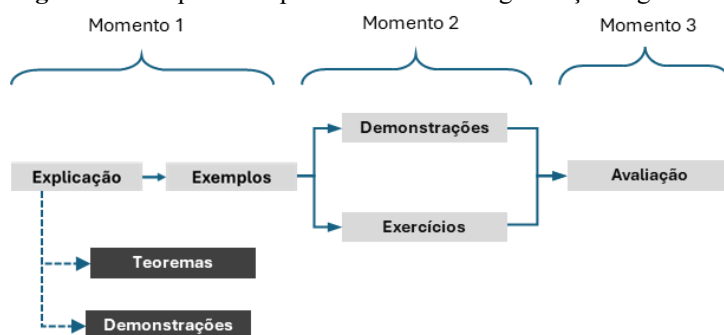
Las clases seguían siendo como como muy similares, eh [...] La parte de la explicación del profe ya venía como la parte de pronto más de profundización, que **los teoremas,** la parte **demonstrativa** de pronto, y luego la parte de **los ejercicios** que propone el profesor para que uno resuelva o **las demostraciones.** ¿Sí? Y luego la parte evaluativa, ¿sí? las clases que uno recibe a nivel universitario, tanto en el pregrado como en el posgrado, creo que **tenían como la misma línea.** ¿Sí?, eso era.

Tradução: No nível universitário, acho que realmente **não mudou** muito. Sim? As aulas ainda eram **muito parecidas,** né? [...] A parte da explicação do professor já vinha sendo como de repente a parte mais aprofundada, sobre **os teoremas,** a parte **demonstrativa** de repente, e depois a parte dos **exercícios** que o professor propõe para a gente resolver ou as **demonstrações.** Certo?

E depois a parte avaliativa, certo? as aulas que se recebe na universidade, tanto na graduação quanto na pós-graduação, acho que foram **na mesma linha**. Sim? foi isso mesmo.

Excerto Hermenêutico: Ao falar sobre sua experiência como aluno de graduação, na disciplina de Álgebra, o professor P1E manifesta que as aulas seguiam uma sequência de ensino que não mudou muito com respeito ao modo de trabalho na escola (sobre isso ver US2.P1E). Sendo assim, ele destaca três momentos dessa sequência: na primeira, correspondente à explicação do professor realizada de modo expositiva ou “magistral”, que era mais aprofundada, pois envolvia a apresentação dos teoremas e das demonstrações; na segunda, correspondente ao trabalho do estudante em que eram realizados exercícios ou demonstrações; finalmente, a avaliação.

Figura 13 - Esquema de prática de ensino na graduação segundo o professor P1E



Fonte: elaboração própria.

Ainda, P1E expõe que esta sequência configurava as práticas de ensino das disciplinas tanto na graduação na licenciatura em Matemática quanto na pós-graduação em Matemática.

USg3.P1E: O professor concebe que, em sua experiência como aluno, tanto na graduação como na pós-graduação, as práticas de ensino seguiam sendo muito similares às da escola. Ele ressalta que, em comparação com as aulas da escola, no nível universitário a explicação do professor era mais aprofundada, o que incluía a apresentação de teoremas e demonstrações.

O que diz essa US:

- *Semelhanças e diferenças nas práticas de ensino na Escola e na Universidade;
- * O foco no rigor formal das explicações vivenciadas no nível universitário.

US4.P1E

Pues el Álgebra es como una herramienta que nos sirve en Matemáticas de pronto para [...] generalizar como ciertas estructuras. ¿Sí? [...] Como para construir o elaborar ciertos algoritmos, que nos permite de pronto resolver ciertas situaciones, en algunos casos ¿no? Porque sabemos que de pronto, ya después de cierto nivel, empieza a ser como demasiado abstracta. ¿Sí? [...]

Tradução: Bem, a Álgebra é como uma ferramenta que nos ajuda em Matemática a generalizar [...] de repente certas estruturas. Certo? [...] Como para construir ou formar certos algoritmos, que de repente nos permitem resolver certas situações, em alguns casos, né? Porque sabemos que de repente, depois de um certo nível, começa a ser muito abstrata. Certo? [...]

Enxerto Hermenêutico: Ao expressar que a Álgebra “é como uma ferramenta”, o professor P1E busca explicitar o modo como ele compreende a Álgebra. A esse respeito, Heidegger (2005) discorre acerca da estrutura da compreensão *Etwas als Etwas* (algo como algo), em que a interpretação *de algo como algo* se funda, essencialmente, numa *concepção prévia* que consiste numa apreensão desse conjunto de posições e visões prévias. Assim, ao conceber a Álgebra como uma ferramenta, ele atribui o caráter de utilitário, destacando a perspectiva operacional, em que a Álgebra serve a outros campos da Matemática, quer dizer, para ele, a Álgebra é como um meio que possibilita alcançar um outro fim. Conforme o depoente, esse outro fim é generalizar determinadas estruturas e construir determinados algoritmos, permitindo resolver determinadas situações. Mas a que se pode se referir ao falar de generalizar estruturas e construir algoritmos? Ao buscar compreender o que significa a palavra *generalizar*, podemos encontrar termos associados tais como: tornar(-se) geral, estender(-se), universalizar(-se), tornar mais amplo, dar maior extensão a (algo). No entanto, ao examinar um pouco mais este termo, encontramos em Mora (2001) algumas considerações relevantes que matizam o significado deste termo. Num primeiro sentido, diz-se que um conceito é geral quando se aplica a todos os indivíduos de uma determinada classe; no segundo sentido, diz-se que um juízo é geral quando se alude a um número finito ou indefinido de indivíduos. Esta elucidação feita por Mora, permite-nos distinguir que, quando o depoente diz sobre “*generalizar determinadas estruturas*”, pois ele não alude a uma forma de contagem, mas procura abstrair o que é singular para buscar o comum em determinadas estruturas, a fim de formar um aspecto geral que as abranja.

Mas que estruturas? Mora (2001) nos indica que ao falar de modo excessivamente amplo de *estrutura* é difícil encontrar algo do qual não possamos dizer que tem uma estrutura. Nesse sentido, por exemplo, Russell (2006, p.62) busca explicar este termo ao relacioná-lo com um mapa cartográfico, de modo que a “estrutura do mapa corresponde à do país que ele mapeia”. Este autor associa um aspecto de “semelhança” entre as relações espaciais do mapa e do país cartografado, de modo que, a palavra estrutura pode estar associada com *forma* e com *sistema* enquanto conjunto ou totalidade de relações. Sendo assim, uma estrutura “não é então uma realidade ‘composta’ por membros; é um modo de ser dos sistemas, de tal modo que os sistemas funcionam em virtude da estrutura que têm” (Mora, 2001, p.918, grifos nossos). No entanto, Abbagnano (2007, p.337) acrescenta esta compreensão ao indicar que, a *estrutura* “[...] é caracterizada pelo fato de propor como fim sua própria possibilidade de ser”. No âmbito da Matemática, o conceito de *estrutura* tem desempenhado um papel fundamental desde a teoria dos grupos de Évariste Galois até Bourbaki. Deve-se a este último, Bourbaki, o ter sistematizado sobre a base da noção de estrutura, um conjunto de disciplinas matemáticas, e particularmente

com base nas chamadas *estruturas-mães*, entre elas as estruturas algébricas (Mora, 2001). Assim, nesse âmbito, uma “estrutura é descrita por todas as operações que possam ser descritas utilizando o operador ou operadores selecionados. Também se fala de estrutura como um conjunto de operações efetuadas sobre um grupo ou elementos de um grupo, de tal modo que qualquer operação efetuada deve dar como resultado um membro do grupo” (Mora, 2001, p.917). Por sua vez, o depoente ao se referir à Álgebra como ferramenta para a construção de algoritmos, ele busca dizer que a Álgebra possibilita a elaboração de processos de cálculo ou a produção de inferências de uma maneira, por assim dizer, “automática”.

O professor ao dizer que “Álgebra ajuda a resolver certas situações, em alguns casos”, permite-nos inferir que ele se refere ao modo em que a Álgebra é aplicada. Nesse sentido, podemos considerar que essas situações, as que ele alude, podem ser aplicações no âmbito da Matemática mesma ou em contextos distintos, tais como no âmbito de outras ciências ou em situações do dia a dia.

Finalmente, o professor diz que depois de certo nível, a Álgebra começa a ser muito abstrata. Em princípio, podemos associar a palavra *nível*, ao nível de escolarização, de modo que à medida que se avança na escolaridade, o estudo da Álgebra se torna mais complexo. Sendo assim, poderíamos falar de um tipo de “Álgebra da escola” que tem um caráter, que poderíamos chamar de concreto, e um tipo de “Álgebra da universidade”, que poderíamos caracterizar como abstrata. Outro modo de considerar a palavra *nível* pode ser o modo de aprofundamento na disciplina como tal, independentemente do nível de escolaridade, pois a Álgebra, como campo de estudo, torna-se mais abstrata à medida que avança. Isso ocorre porque os conceitos iniciais, que são mais concretos e diretamente relacionados a números e operações, dão lugar a teorias e estruturas mais complexas, como grupos, anéis e campos (Bortolete, 2024). Essa progressão para a abstração permite uma compreensão mais profunda e ampla das propriedades matemáticas e suas aplicações.

USg4.P1E: O professor concebe a Álgebra como um meio, uma ferramenta que, no âmbito da Matemática, possibilita a generalização de estruturas e a construção de algoritmos, permitindo resolver diversas situações. Mas, também para ele, a Álgebra torna-se mais abstrata ao avançar em seu estudo.

O que diz essa US:

- *Concepção de Álgebra como ferramenta;
- *Modos de compreender a Abstração no estudo da Álgebra;
- * Propósito de ensino da Álgebra.

US5.P1E

Bueno, si fuera a nivel del colegio, por ejemplo, cuando yo he tenido que enseñar la parte del Álgebra de grado 8º, a veces de pronto como que [...] uno trata de buscar como

alguna estrategia de pronto **diferente**, a la época que uno [...] digamos **vivenció**; pero de pronto a veces **no hay muchas herramientas** de pronto al alcance,

Tradução: Bom, se fosse no nível da escola, por exemplo, quando eu tinha que dar aula de Álgebra para o 8º ano, às vezes, a gente de repente **tenta buscar** alguma **estratégia diferente**, à época que a gente [...] digamos **vivenciou**; mas às vezes de repente **não há muitas ferramentas** disponíveis.

Excerto Hermenêutico: O professor fala sobre sua experiência de ensino dando aula de Álgebra na escola no 8º ano e manifesta interesse por buscar estratégias de ensino que se diferenciem ou distanciem do modo como lhe foi ensinada esta disciplina quando aluno na escola. Quando ele resgata o ponto sobre ensinar “a parte da Álgebra de 8 ano”, ele está indicando que é particularmente neste ano escolar quando os conteúdos de Álgebra são trabalhados explicitamente conforme os currículos escolares.

Ele assume como referente em suas decisões no tocante ao conteúdo e seu ensino, o modo como vivenciou a aprendizagem da Álgebra na escola, buscando estratégias de ensino diferentes do modo como lhe foi ensinado. Entretanto, ele indica que existe uma dificuldade para aceder a materiais ou ferramentas de ensino. Ao falar de ferramentas de ensino, ele aponta, sobretudo, nos recursos técnicos como aulas de computação, tablets, calculadoras, entre outras, e também, sobre a disponibilidade de outros materiais didáticos manipulável.

USg5.P1E: O professor discorre sobre sua experiência lecionando na escola o conteúdo de Álgebra com alunos de 8º ano. Ele manifesta interesse por buscar estratégias de ensino diferentes ao modo como em sua época vivenciou o ensino desta disciplina. No entanto, manifesta não ter muitas ferramentas ao seu alcance.

O que diz essa US:

- * Preocupação por buscar estratégias de ensino diferentes em relação ao modo como vivenciou a Álgebra enquanto aluno na escola;
- * limitação de ferramentas distintas para o ensino de Álgebra.

US6.P1E

Entonces uno cae o **sigue cayendo** en el **error** de pronto de dar la **parte teórica inicialmente**, como **por facilidad** diría yo, ¿sí? [...] para los estudiantes. Y luego **sí**, de pronto tratar de **buscar problemitas de **aplicación** sencillitos**, ¿sí?, que ellos puedan comprender, y puedan verle como **la utilidad** como tal, de esa parte algebraica que se trabajó

Tradução: Então a gente cai ou continua-se a **cair no erro** de dar de repente a **parte teórica inicialmente**, para facilitar eu diria, certo? [...] para os alunos. E depois sim, de repente tentam

procurar problemas simples de aplicação, certo? que eles possam compreender, e possam ver como a utilidade como tal, daquela parte algébrica que foi trabalhada.

Enxerto Hermenêutico: O professor julga que iniciar as temáticas do ensino da Álgebra pelos aspectos teóricos é um erro. Ele manifesta preocupação sobre o modo de proceder no desenvolvimento de suas aulas, pois considera que segue caindo no erro de seguir uma sequência de ensino “tradicional”, como ele mesmo explicita na US2.P1E. Ainda, argumenta que a razão de incluir onticamente os aspectos teóricos do conteúdo da Álgebra nas aulas se caracteriza como facilitar o trabalho dos estudantes. Nessa sequência, após o trabalho de exposição teórico, ele destaca a necessidade de buscar problemas de aplicação, com um nível acessível de complexidade, de modo que os alunos consigam ver a utilidade do conteúdo algébrico trabalhado. Com esta última fala do professor poderia intuir-se que, nessa busca para que o estudante encontre utilidade no conteúdo, também se vislumbre a preocupação do professor para que seus estudantes consigam dar sentido a esse conteúdo. Ainda que, também, ao falar da utilidade traz à tona sua concepção, da qual tinha falado na US4.P1E, sobre a Álgebra como ferramenta, ou seja, que para ele o domínio do conteúdo da Álgebra serve para um outro fim.

USg6.P1E: O professor diz que ele continua caindo no erro de iniciar a abordagem do conteúdo da Álgebra pelos aspectos teóricos. Ele argumenta que esse modo de proceder é para facilitar o trabalho do estudante. Manifesta também que, nessa sequência de ensino, após o trabalho teórico, devem ser trabalhados problemas de aplicação que não sejam complexos para os alunos, de modo que eles possam compreender e ver a utilidade dos conceitos algébricos envolvidos.

O que diz essa US:

- *Reconhecimento de que a forma com que inicia a abordagem do ensino é um erro;
- *Descrição sobre a sequência de ensino de Álgebra;
- *Ser útil e compreensível aos alunos.

US7.P1E [...] yo digo que la parte de Álgebra, ellos la inician cuando empezamos a trabajar la parte de ecuaciones, ¿sí?, [...] de poder pasar del lenguaje verbal al lenguaje simbólico algunas expresiones para resolver algunos problemas.

Tradução: eu digo que eles começam a parte de Álgebra, quando a gente começa a trabalhar a parte de equações, certo? de [...] poder passar da linguagem verbal para a linguagem simbólica algumas expressões para resolver alguns problemas.

Enxerto Hermenêutico: Ao dizer “eu digo” o professor toma posição sobre o modo como ele entende que o ensino de Álgebra tem início: inicia-se o ensino de Álgebra com as equações. Ele enfatiza que este início deve realizar-se a partir do trabalho com equações. O tipo de equações que o professor se refere são aquelas de primeiro grau que incorporam valores inteiros, como se estabelece nos *Estándares Curriculares de Matemática* do MEN (2006) para 6 e 7 anos da

Educação Básica. Do dito por P1E, entende-se que nas atividades de aula seja estimulada a necessidade de uma linguagem que permita comunicar os modos de compreender a variável, no sentido do argumentado por Fiorentini *et al.* (1993), de uma linguagem *retórica* para uma linguagem *sincopada*, e logo, para uma linguagem *simbólica*.

Ao se referir a “poder passar”, ele indica que o estudo de equações possibilita, ou pode ser uma ponte, entre a linguagem verbal e a linguagem simbólica. Ao contemplar esse caminho, parece que o professor P1E está preocupado em que o estudante consiga dar sentido às expressões Algébricas, assim ele entende que isso pode ocorrer quando o estudante preenche de sentido a variável, enquanto esta assume ou não um valor determinado. Esse modo de trabalhar o ensino da Álgebra, via um acesso intuitivo da linguagem verbal para a linguagem simbólica de expressões, tem por meta, conforme o depoente, que o aluno possa resolver problemas.

USg7.P1E: Para o professor P1E, os alunos iniciam o trabalho com a Álgebra quando trabalham com equações. E, desse modo, os alunos podem passar expressões da linguagem verbal para a linguagem simbólica, com a finalidade de resolver problemas.

O que diz essa US:

- *Início do trabalho com Álgebra na escola;
- *Transição entre a linguagem comum e a algébrica;
- *A finalidade de trabalhar com equações é resolver problemas.

US8.P1E [...] pues es que, digamos, [el Álgebra] al ser como una generalización de ciertos aspectos de la parte Aritmética. ¿Sí? Eh [...] el problema a nivel del Álgebra yo veo que radica en que la parte Aritmética como tal.

Tradução: é isso, digamos assim, [a Álgebra] ao ser como uma generalização de certos aspectos da parte Aritmética. Certo? eh [...] o problema no nível da Álgebra que eu vejo radica na parte de Aritmética como tal.

Enxerto Hermenêutico: Outro aspecto relacionado com a concepção da Álgebra do professor P1E, e que complementa o descrito na US.02.P1E, é identificado nesta passagem. No fragmento de texto, o professor alude que um dos modos de ser da Álgebra é a generalização de determinados aspectos da Aritmética. Isso, o que pode significar? Alguns autores, como Mason, Graham, Pimm e Gowar (1999), têm considerado que a generalidade é um dos aspectos fundamentais da Matemática, e que a Álgebra é a linguagem com que se expressa essa generalidade. Nesse sentido, do dito pelo depoente (P1E), indica que ele concebe a Álgebra como uma forma de generalização de aspectos da Aritmética. Nesta perspectiva, são consideradas as letras como se fossem números, e as regras da Aritmética simplesmente continuam sendo aplicadas no modo usual. Assim, quando P1E afirma que o problema da Álgebra radica na Aritmética, ele aponta para a causa das dificuldades na aprendizagem da Álgebra, de modo que,

sob a concepção da Álgebra como uma generalização da Aritmética, o professor entende que, então se os alunos compreendem bem as “regras” da Aritmética poderão compreender a Álgebra — é como se a Aritmética fosse uma espécie de base para o conhecimento algébrico.

USg8.P1E: O professor concebe a Álgebra como a generalização de aspectos da Aritmética. Para ele, o núcleo das dificuldades na aprendizagem da Álgebra radica na falta de domínio na Aritmética.

O que diz essa US:

*A Álgebra como generalização da Aritmética

*O problema na aprendizagem da Álgebra radica na falta de domínio da Aritmética.

US9.P1E [...] entonces yo digo que la clave sería poder que el estudiante pudiera manejar como esos conceptos previos a nivel de números racionales, para que cuando llegáramos a trabajar expresiones algebraicas, donde de pronto algunos coeficientes son fracciones, pues se les facilitará a ellos. Y ya con eso pues tendríamos como que, resueltos como muchos aspectos de forma general del Álgebra, ¿sí?, que a los estudiantes se les dificulta. ¿Sí?

Tradução: mas aí eu falo que a chave seria conseguir que o aluno possa dominar esses **conceitos prévios** no nível dos **números racionais**, para que quando a gente começar a trabalhar com expressões algébricas, onde de repente alguns coeficientes são frações, pois será mais fácil para eles. Já com isso teríamos, por assim dizer, resolvido como muitos **aspectos gerais da Álgebra**, certo? que os alunos acham difícil. Certo?

Enxerto Hermenêutico: O professor diz que o fundamental, a “chave”, para a aprendizagem da Álgebra, é fazer com que o estudante consiga desenvolver um domínio nos conceitos prévios, particularmente no que se refere ao trabalho com os números racionais. No currículo de *Educação Básica* o tratamento dos números racionais é abordado nos 6º e 7º ano, conforme os *Estândares Curriculares* do MEN, em que se busca que o estudante reconheça e generalize propriedades das relações entre números racionais e das operações entre estes.

Assim, o professor indica que fortalecer esses conteúdos, particularmente no que diz respeito à Aritmética de números racionais, contribui para o desenvolvimento de conteúdos da Álgebra, tais como o trabalho com expressões algébricas que contêm coeficientes fracionários. Esse tipo de conteúdo representa uma dificuldade para os alunos, pois parece que não é claro para eles a correlação entre o trabalho com quantidades concretas nos números racionais e o trabalho com expressões algébricas.

USg9.P1E: Para o professor, a chave para a aprendizagem da Álgebra é que os alunos consigam ter domínio nos conceitos prévios que envolvem números racionais, desse modo, teriam maior facilidade em trabalhar com expressões algébricas.

O que diz essa US:

*A chave é o domínio dos conceitos prévios que envolvem números racionais.

US10.P1E

[...] Porque que todo es como una **secuencia**. ¿No? Porque pues como nosotros sabemos, una cosa es como **secuencia** de un tema, es **secuencia** del anterior, ¿sí?, si en el anterior **no está claro**, pues el siguiente van a tener más y más vacíos, entonces es como **ir despacio**, despacio y de pronto tratando de **verificar** que el estudiante está aprendiendo.

Tradução: porque tudo é como uma **sequência**, né? Porque como a gente sabe, uma coisa é como **uma sequência** de um tópico, é uma **sequência** do anterior, sim, se no anterior **não está claro**, então o próximo terá cada vez mais lacunas, então é como **indo devagar**, devagar e de repente tentando **verificar** se o aluno está aprendendo.

Enxerto Hermenêutico: O professor P1E destaca que há uma característica, por assim dizer, de conhecimento comum por parte dos professores que, na escolarização, os conteúdos são ensinados seguindo uma sequência, em que cada conceito é construído sobre o anterior, e de modo incremental em termos de sua complexidade. Para ele, essas lacunas na aprendizagem vão se acumulando quando conteúdos anteriores não ficam claros, ou seja, não são compreendidos pelos alunos, o que pode criar um efeito dominó que afeta a compreensão de tópicos futuros. Por isso, ele sugere ir devagar no desenvolvimento dos conteúdos, para procurar verificar que os alunos entendam os tópicos antes de prosseguir com outras temáticas, e pode ajudar a identificar e abordar áreas de dificuldade dos alunos.

USg10.P1E: Segundo o professor o de Matemática, tem uma sequência de conteúdos e esta sequência influencia a aprendizagem, se não aprende o conteúdo anterior. Assim, se não aprende o anterior, terá dificuldade no seguinte, gerando cada vez mais lacunas. Por isso, ele sugere ir devagar no desenvolvimento dos conteúdos de ensino, tentando verificar se o aluno está aprendendo.

O que diz essa US:

*Sequência de conteúdos.

US11.P1E

[...] A veces puede que la **terminología** sea diferente y puede que **eso también esté confundiendo** a los estudiantes. Entonces, uno de los casos es ese de la **carita feliz**, para la **suma de fracciones**. Entonces uno les trata de como de **dar a entender** que es, pues, por ejemplo, para cuando lleguen a la parte de suma de expresiones algebraicas, o de **fracciones**

algebraicas, pues lo mejor es hallemos el mínimo común múltiplo, amplifiquemos y ahí sí hacemos la operación, yo diría que **ahí ya es una generalización** de saber sumar fracciones

Tradução: Às vezes, a **terminologia** pode ser diferente e isso também pode que estar confundindo os alunos. Então, um dos casos é esse da carinha feliz, para a adição de frações. Aí você tenta fazer com que eles entendam que é, de repente, por exemplo, para quando eles chegam na parte de adição de expressões algébricas, ou de frações algébricas, de repente, o melhor é encontrar o mínimo múltiplo comum, vamos amplificar e depois sim fazemos a operação. Eu diria que já aí é uma generalização de saber adicionar frações, certo?

Excerto Hermenêutico: Nesta passagem, o professor PIE exemplifica o modo como sua concepção da Álgebra orienta suas decisões na hora de abordar determinados tópicos de Álgebra na sala de aula. Ele fala sobre um modo de nomear o procedimento da adição (ou também a subtração) de frações com denominadores diferentes, que alguns professores denominam como o “o caso da carinha feliz”. Nesse modo de proceder, dados dois números racionais, expressos de forma fracionária, para realizar a adição (ou subtração) se realizam inicialmente dois produtos cruzados, e depois o denominador do primeiro multiplicado pelo numerador do segundo, finalmente e se realizam as correspondentes operações e simplificações. Esse procedimento tem sido associado com o gesto que tem forma de “carinha”, como se apresenta, a seguir:

Figura 14 - Gesto da “carinha feliz” para o ensino das operações de adição e subtração entre números fracionários.

$$(a, b, c, d) \in \mathbb{Z}; b, d \neq 0$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}$$

processo



gesto

$$\frac{a * c \pm b * c}{a * d}$$

Fonte: elaboração própria.

Ele argumenta que ao ser diferente a terminologia usada na Álgebra e na Aritmética, isso pode ser um fator que esteja gerando confusão nos estudantes. Assim, ele se vale do exemplo do procedimento da “carinha feliz”, para mostrar que como este recurso “mnemotécnico”, por um lado, facilita aos estudantes o domínio do procedimento da adição (ou subtração), mas, por outro lado, pode erigir como uma barreira que impede compreender o modo de realizar as operações de adição e subtração em situações que envolvem mais de dois termos.

O professor diz que enfatiza a seus estudantes a importância de compreender de um modo mais geral a realização das operações de adição e subtração de números fracionários. Procedimento que consiste em determinar o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos termos a serem operados, e após multiplicar os numeradores, deixar as frações equivalentes para logo realizar

as adições (ou subtrações), pois conforme argumenta o professor P1E, dessa maneira, os estudantes se preparam para iniciar os conteúdos de Álgebra, particularmente no que se refere à adição de frações algébricas, de modo que, para ele, este esse modo de proceder já é uma generalização de saber somar frações.

Nesse exemplo, manifestado pelo professor, pode-se destacar que, conforme ele entende, o modo de trabalhar com a Aritmética deve ir além da simples mecanização mnemotécnica, caminhando rumo à generalização no modo de adicionar frações.

USg11.P1E: Segundo o professor, incluir terminologia diferente pode confundir os alunos. Ele ilustra seu argumento com o exemplo do método da “carinha feliz”, o qual é utilizado que é ensinado ao trabalhar com números racionais. Porém, ele manifesta que o melhor para abordar esse conteúdo é mediante o procedimento de encontrar o mínimo múltiplo comum e frações equivalentes, para realizar a operação. Para ele, esse processo é uma generalização do conceito básico de adição de frações

O que diz essa US:

- * Terminologia diferente gera confusão nos alunos;
- * O modo de ensinar operações entre números racionais se torna um obstáculo na aprendizagem de Álgebra.

US12.P1E [...] Entonces uno dice de pronto o cree que entre más ejercicios hagan, ¡mejor! ¿Sí?, pero resulta que no, porque hoy en día a los estudiantes no les gusta como ser muy repetitivos, en esos ejercicios, [...] hoy en día toca tratar de darle lo más sencillito a los chicos porque ellos no están interesados, ¿sí?, de pronto en resolver una operación más [...]. Y pues dejarles más de cierta cantidad [de ejercicios], pues, ya hoy en día también es como algo mal visto, digámoslo así, que no está bien. Sin embargo, yo pienso que a veces pues sí se necesita de pronto mecanizar un poco más. Entonces eh [...], ahí viene como el dilema.

Tradução: Então a gente diz ou acredita que quanto mais exercícios fizer, melhor! Mas acontece que não, porque hoje em dia os alunos não gostam de ser muito repetitivos, naqueles exercícios [...] hoje temos que tentar dar aos meninos as coisas mais simples porque eles não têm interesse, certo? de repente de resolver mais uma operação. E aí dar mais do que uma certa quantidade [de exercícios], bom, hoje em dia também não é algo bem-visto, vamos dizer assim, que não está bem. Porém, acho que às vezes é necessário mecanizar um pouco mais de repente. Então eh [...], aí vem o dilema, né?

Enxerto Hermenêutico: O professor afirma que se acredita que fazer muitos exercícios resulta em boa aprendizagem. Essa concepção vem do modo como ele aprendeu na escola quando tinha que desenvolver as seções de exercícios do livro *Álgebra de Baldor*, como ele descreve,

US3.P1E, era algo que lhe gerava motivação. Mas, entende que os alunos, hoje em dia, não se sentem motivados por essa mesma dinâmica de trabalho, eles não gostam de ser “repetitivos”. Isso faz com que as decisões do professor sobre o tratamento do conteúdo em sala de aula, estejam direcionadas pelos interesses dos alunos. Nesse sentido, o professor questiona a viabilidade de atribuir aos estudantes exercícios, pois ele manifesta que não é bem-visto, não está bem, quando se atribui muitos de determinada quantidade. Essa compreensão da dinâmica de classe, em que se desenvolvem competências como resultado de uma prática recorrente de exercícios, vem sendo comum, tanto no âmbito escolar como extraescolar. No entanto, o professor pensa que é necessário, em determinados casos, essa prática para mecanizar um pouco mais os conteúdos e desenvolver certas habilidades. Essas escolhas suscitam um dilema para o professor, por um lado, o que ele acredita ser conveniente para os alunos e, por outro lado, o julgamento por esse modo de conduzir as atividades de ensino.

USg12.P1E: Segundo o professor, existe a crença que quanto mais exercícios os alunos fizerem, melhor aprender. Porém, os alunos, hoje em dia, não gostam da repetição excessiva. Por isso, os professores atualmente buscam fazer com que as tarefas atribuídas sejam mais simples, pois os alunos demonstram pouco interesse em resolver operações complexas. Também, atualmente, não é “bem-visto” atribuir uma quantidade significativa de exercícios aos alunos. Apesar disso, ele acredita que, às vezes, é necessário mecanizar para dominar determinadas competências. Isso constitui para o professor um dilema.

O que diz essa US:

- *Crença na eficácia dos exercícios na aprendizagem;
- *Adaptação dos professores aos interesses dos alunos atualmente;
- *Dilema do professor: sobre o modo de abordar o conteúdo de ensino.

US13.P1E [...] lo que te digo, o sea, el dilema es que tampoco me puedo demorar tanto en una sola cosa, porque luego viene, el que “no alcance a ver la temática” [...], y eso también genera a nivel del trabajo como ciertos conflictos.

Tradução: o que estou te contando, ou seja, o dilema é que não posso demorar tanto só em uma coisa, porque aí vem, aquilo de que “não consegue concluir o tema” [...], e isso também gera certos conflitos no nível de trabalho.

Enxerto Hermenêutico: O professor fala sobre a dificuldade que enfrenta quando dedica um pouco mais de tempo ao tentar aprofundar algum tópico, o trabalho com uma atividade de ensino mais elaborada ou abordar lacunas de conteúdos anteriores. Ele, recomenda, como indica na US11P1E, ir mais devagar, no entanto, diante desta dificuldade que envolve o aproveitamento do tempo escolar, expõe que essa situação é um dilema para os professores. Quer dizer, por um lado, o professor não pode demorar muito em um único tópico, pois isso pode afetar o avanço

no desenrolar curricular. Por outro lado, se o professor não dedicar tempo suficiente a um tópico, alguns poderão achar que ele não foi abordado de forma adequada. O professor, ao dizer: “aí vem, aquilo de que não consegue terminar o tema”, demonstra a preocupação dos professores com o tempo escolar para desenvolver os conteúdos de ensino estabelecidos no currículo escolar. Essa preocupação pode resultar em conflitos no ambiente escolar, devido à pressão para cumprir os conteúdos ministrados, que envolve as avaliações das instâncias acadêmicas escolares e a avaliação dos colegas entre si.

USg13.P1E: O professor considera como um dilema o fato de não poder realizar as atividades no tempo da aprendizagem dos alunos, devendo seguir o tempo escolar. Ele aponta a pressão para cumprir os conteúdos curriculares e os conflitos que pode gerar.

O que diz essa US:

*Dilema do professor: o modo de gerenciar o tempo da aprendizagem do aluno e o escolar.

US14.P1E. [...] Pero entonces **lo que digo ya uno como docente pues tiene que mirar, ¿sí?**, la **estrategia para motivar a los estudiantes en el aprendizaje del Álgebra**. Mmm eh [...], de pronto buscar alguna otra **actividad** que les pueda gustar, eh [...] **algún material** que pueda ser manipulable. [...] **Pero sí, ellos se motivan**, porque como que [...], digamos, se **cambia un poquito la rutina de la clase**, ¿sí?, ya **no es solamente** que de pronto están viendo como la **explicación del profesor en el tablero**, sino que ellos **están haciendo algún análisis de acuerdo a las instrucciones que uno les da**.

Tradução: Mas aí **o que eu falo**, como professor, a gente tem que olhar, certo? para a **estratégia de motivar** os alunos na **aprendizagem da Álgebra**. Mmm eh [...], de repente procura alguma outra atividade que eles **possam gostar**, eh [...] **algum material manipulável**. [...] Mas sim, eles ficam motivados, porque [...], digamos, **a rotina da aula muda um pouco**, certo?, não é **mais apenas que de repente eles estão vendo a explicação do professor no quadro**, mas **estão fazendo alguma análise** de acordo com as instruções que lhes são dadas

Enxerto Hermenêutico: No depoimento, ao indicar “eu digo” denota a postura do professor frente ao ensino, sua maneira de pensar. Assim, para ele é um dever, uma responsabilidade, que o professor se comprometa na procura de estratégias de ensino que consigam motivar aos estudantes na aprendizagem da Álgebra, tendo em conta seus interesses discentes. Para ele, essas estratégias podem incluir o uso de algum tipo de material manipulável, pois entende que na realização desse tipo de atividades de aula, os alunos efetivamente se motivam, porquanto esse tipo de atividades rompe com a rotina como habitualmente são lecionadas as aulas, em que o rol ativo do professor na sala no fica restringido à explicação na lousa e o estudante a um rol passivo

de espetador. Para o professor, as atividades que incluem material manipulável possibilitam, ao estudante, um rol ativo na aula, em que eles podem estar a realizar algum tipo de análise conforme as instruções dadas pelo professor.

USg14.P1E: No depoimento, o professor manifesta sua preocupação pela busca de estratégias de ensino, em que sejam considerados os interesses dos alunos e sejam incorporados materiais de ensino manipuláveis, que possibilitem aos discentes fazer análises, segundo as orientações do professor.

O que diz essa US:

- * Preocupação por buscar estratégias de ensino adequadas aos interesses dos alunos;
- * Material de ensino.

5.2.2 Professor P2E

US1.P2E Bien, el Álgebra común y corriente, inclusive pienso yo que, en el colegio, cuando yo era estudiante, una de las materias que más me encantaba era el Álgebra, esa que generalmente era el Álgebra de Baldor,

Tradução: Bom, a Álgebra comum e corrente, eu até acho que, na escola, quando eu era estudante, uma das disciplinas que mais me encantava era Álgebra, que geralmente era a Álgebra do Baldor.

Enxerto Hermenêutico: Ao falar sobre sua vivência na aprendizagem da Álgebra na escola, o professor P2E descreve esta disciplina como “a Álgebra comum e corrente”. Essa expressão, “comum e corrente”, é usada para descrever ou indicar algo comum, normal ou sem características especiais, é uma forma de dizer que algo não se destaca por ser excepcional ou único, mas sim típico e comum. Nesse sentido, ele se refere à Álgebra como tendo um modo habitual e comum de ser concebida e ensinada. Conforme relata, na escola, a Álgebra lhe gerava encanto e era uma das disciplinas que ele mais gostava. Essa Álgebra à qual ele se refere é particularmente aquela que aparece em um livro escolar denominado *Álgebra de Baldor*. As características deste texto são descritas na US3.P1E, pois o professor P1E também fala sobre esse texto.

USg1.P2E: O Professor lembra que na escola uma das disciplinas de que mais gostava era Álgebra, aquela comum e corrente, que era “a Álgebra de Baldor”.

O que diz essa US:

- * Lembranças do livro *Álgebra de Baldor*;
- * Gosto pela Álgebra;
- * Álgebra “comum e corrente”.

US2.P2E

En esa época, en el colegio, el profesor desarrollaba algunos dos ejemplos, y nosotros nos dedicábamos a resolverlos casi que solos, aunque él profesor, yo me acuerdo, él pasaba [al estudiante] al tablero y exigía el orden, exigía, eran profesores muy exigentes.

Tradução: Naquela época, na escola, o professor fazia uns dois exemplos, e a gente se dedicou a resolvê-los quase sozinhos, embora o professor, eu me lembro, ele fazia [o aluno] ir para a lousa e exigia ordem, ele exigia, eles eram professores muito exigentes.

Enxerto Hermenêutico: O depoente lembra do modo como eram desenvolvidas as aulas de Álgebra, quando ele era aluno na escola. Ele lembra que na sequência de ensino o professor fazia alguns exemplos, e logo os alunos dedicavam o restante tempo da aula para resolver por eles mesmos os exercícios, individualmente. Mas também lembra que, o professor fazia com que os estudantes fossem à lousa para fazer alguns exercícios. Também, destaca que os professores, nessa época, exigiam ordem nas aulas, que eram professores muito exigentes.

USg2.P2E: O professor descreve como se lembra das aulas de Álgebra quando era aluno na escola. Ele diz que o professor apresentava alguns exemplos, e eles se dedicavam a resolvê-los por eles mesmos. Lembra que o professor chamava os alunos para a lousa e exigia ordem, uma vez que eram professores muito exigentes.

O que diz essa US:

- * Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno;
- * Sequência de ensino;
- * Característica dos professores.

US3.P2E

[...] Entonces, digamos, que esa era la manera, era de tiza y tablero prácticamente. Entonces, eh [...], pero uno le cogía el amor a eso, porque, digamos, los problemas de aplicación, como que llamaba la atención y uno se sentía satisfecho de poder desarrollar ¡sin la ayuda del profe! un ejercicio. Entonces era como muy motivante

Tradução: Então, digamos assim, era praticamente giz e quadro. Então, eh [...], mas a gente pegou gosto por isso, porque, digamos, os problemas de aplicação pareciam chamar a atenção e a gente se sentia satisfeito em poder se desenvolver sem a ajuda do professor! um exercício. Então foi muito motivador.

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento, o depoente salienta que, na época quando aluno na escola, de modo geral, a maneira como eram lecionadas as aulas limitava-se à atividade de exercícios, e ao dizer que era só “giz e quadro” manifesta que não eram usados outros recursos ou atividades complementares na aula. Ainda, faz resgatar que o rol principal do professor na

atividade da aula era particularmente centrado na prática de exposição do conteúdo. No entanto, o professor P2E manifesta que, embora pese o tipo de metodologia de ensino empregada naquele momento, desenvolveu um gosto pela Álgebra devido também aos problemas de aplicação, pois lhe chamavam a atenção e lhe gerava um sentimento de satisfação poder resolvê-los sozinho, sem a ajuda do professor. Para ele, esse sentimento de autonomia e de sentir-se capaz lhe resultava motivante.

USg3.P2E: A maneira como o professor lembra de suas aulas de Álgebra na escola, em sua maioria, limitava-se a fazer exercícios. Contudo, ele pegou gosto pela Álgebra, já que os problemas de aplicação lhe chamavam a atenção e resolvê-los lhe gerava satisfação.

O que diz essa US:

- * Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno;
- * Interesse dos alunos;
- * Gosto pela Álgebra.

US4.P2E En esa época era casi que **desarrollar todos los ejercicios** del Álgebra [de Baldor] y **esa fue mi ilusión** que yo iba a llegar a la universidad **a seguir trabajando esa Álgebra** y ¡sorpresa! **Volví a ver de esa clase de Álgebra** únicamente cuando estaba en **la práctica**, o sea durante toda la universidad, **alguna aplicación por ahí**, pero [...], digamos que todos los temas que se veían allá **eran ¡totalmente diferentes!** a lo que nosotros estamos aquí en los colegios, viendo y enseñando en este momento.

Tradução: Naquela época era quase que só **desenvolver todos os exercícios** da Álgebra [de Baldor] e **essa era a minha ilusão** de ir para a universidade para continuar trabalhando nessa Álgebra e surpresa! Só vi aquele **tipo de Álgebra** de novo apenas quando estava no **estágio**, ou seja, durante toda a universidade, **alguma aplicação por acaso**, mas [...], digamos que todos os temas que foram vistos lá eram **totalmente diferentes!** ao que estamos aqui nas escolas, vendo e ensinando neste momento

Enxerto Hermenêutico: Ao falar sobre sua experiência na aprendizagem da Álgebra na escola, ele manifesta que em maior medida estava dedicado ao desenvolvimento de todos os exercícios do texto *Álgebra de Baldor*. Manifesta que, ao terminar os estudos na escola, a ilusão dele era continuar na graduação, na Licenciatura em Matemática, a trabalhar com “essa Álgebra”, referindo-se desse modo, à maneira como a Álgebra é abordada no texto escolar *Álgebra de Baldor*. Entretanto, ele ficou surpreso, pois esse “tipo de Álgebra” não era trabalhado na universidade do modo como ele acreditava. Esse fragmento é relevante, pois nele, o docente em questão se dá conta de modo explícito de, por dizer assim, haver um “hiato” entre a Álgebra que é ensinada na escola e o modo como é trabalhada na universidade.

De acordo com esse depoimento, no decorrer do curso de licenciatura, somente teve contato com esse “tipo de Álgebra” (o trazido por Baldor) em apenas uma que outra aplicação. A respeito desse “tipo de Álgebra”, refere-se em maior medida à fatoração de expressões algébricas. Nesse sentido, quando ele se refere às escassas aplicações, ele quer dar a entender que, na graduação, alguns conteúdos requeriam da aplicação de fatoração. Sem embargo, como ele afirma, em geral, a Matemática, e em particular a Álgebra, na universidade, era diferente daquela aprendida na escola. Contudo, manifesta que viu de novo esse “tipo de Álgebra” ao finalizar a graduação, quando teve que fazer o estágio, que é uma atividade que todo aluno de licenciatura tem que desenvolver como parte de sua formação como futuro professor, é de caráter obrigatório, conforme o regulamento do MEN, e permite aos alunos de graduação vivenciar em situação prática os conteúdos teóricos estudados em sala de aula. As atividades de estágio são possíveis graças a convênios entre programas de licenciatura e escolas, que acolhem os estudantes universitários, ajudando-os a obter competências e conhecimentos com a supervisão de um profissional já formado.

O professor P2E expressa com veemência que os conteúdos abordados durante sua formação universitária divergem substancialmente daqueles que ele leciona atualmente na escola. Este trecho é particularmente revelador, pois evidencia uma perspectiva distinta sobre o “hiato” entre o conhecimento adquirido na *Educação Superior* e o que efetivamente o professor de Matemática, no exercício de sua profissão, ensina na escola com base no aprendizado universitário. Tal contraste destaca o desafio enfrentado pelos professores em adaptar e aplicar seus conhecimentos acadêmicos e a teoria ensinada nas universidades à realidade prática do ensino nas escolas.

USg4.P2E: O modo como o professor P2E aprendeu Álgebra na escola estava pautado quase exclusivamente pelo desenvolvimento de exercícios do texto *Álgebra de Baldor*. Ao terminar a escola, ele tinha a ilusão de continuar trabalhando a Álgebra com essa mesma abordagem da escola na universidade. Porém, ele ficou surpreso, porque somente voltou a trabalhar com esse “tipo de Álgebra” já ao finalizar o curso de licenciatura. A esse respeito, o professor enfatiza que os temas de Álgebra que viu na graduação são totalmente diferentes ao que ele agora trabalha e ensina na escola.

O que diz essa US:

- *Influência do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;
- * Confronto de expectativas entre o modo de conceber a Álgebra na escola e na universidade;
- * O tipo da Álgebra da escola;
- * “Distanciamento” entre a Álgebra que viu na graduação, a que havia aprendido na escola e a que ensina atualmente.

US5.P2E

Uno cuando llega a la práctica y le toca ponerse a enseñar, eso uno buscaba métodos como para que no fuera solo cojan el Álgebra [de Baldor] y ¡hágale!, sino más bien como mirar a ver cómo le entendían a uno [...] era más motivar a la gente para que hicieran eso, que prácticamente como enseñar, porque uno bien motivado uno aprende, ¡lo que sea!

Tradução: Quando a gente chega no estágio e tem que começar a ensinar, a gente procurava métodos para que não fosse apenas pegar a Álgebra [de Baldor] e vamos lá! mas sim ver como eles te entendiam, [...] era mais motivar as pessoas a fazerem isso do que praticamente ensinar, porque bem-motivado aprende, qualquer coisa!

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento, o professor narra sobre sua preocupação quando, ao finalizar a graduação, foi fazer seu estágio numa escola. A expressão “tem que começar a ensinar” indica que ele foi inesperadamente colocado a lecionar Matemática, uma responsabilidade que evidencia a fonte de sua inquietação. Essa situação mostra o desafio enfrentado pelos professores no início do exercício de sua profissão, marcado pela transição abrupta da teoria acadêmica para a prática em sala de aula. No seu primeiro contato com o ensino da Álgebra, ele diz que procurava métodos diferentes para lecionar, de forma que não se limitasse apenas a seguir o texto *Álgebra de Baldor*. Para ele, o mais importante era encontrar maneiras de que os alunos o compreendessem, focando mais em motivar os alunos para que fizessem atividades de aula do que em ensinar, pois, para ele, um aluno bem-motivado aprende qualquer coisa.

USg5.P2E: O professor lembra de sua preocupação pela busca de métodos alternativos para o ensino da Álgebra diferentes ao do livro de texto, quando ao finalizar a graduação tinha que fazer o estágio na escola. Para ele, a motivação é um fator importante para a aprendizagem, e o professor precisa despertar essa motivação.

O que diz essa US:

- * Preocupação por buscar estratégias de ensino focadas na motivação;
- * Interesse dos alunos;
- *Papel do Professor.

US6.P2E

Bueno, el Álgebra es importantísima porque a través del tiempo uno se ha dado cuenta que hay muchas situaciones en la vida real donde el Álgebra se necesita

Tradução: Bom, a Álgebra é muito importante porque com o tempo a gente percebeu que há muitas situações na vida real onde a Álgebra é necessária.

Enxerto Hermenêutico: Ao falar que, com o passar do tempo, ele se tem dado conta da importância da Álgebra, mostra que para chegar a essa perspectiva, de atribuir-lhe o caráter de

relevância à Álgebra, indica que não é algo que se produz de maneira imediata, ela se revela, gradualmente, na reflexão das situações da experiência, que lhe possibilitam reconhecer a aplicabilidade deste conhecimento, que poderia ser no cotidiano ou em outros campos de conhecimento.

USg6.P2E: O professor narra que, com o passar do tempo, ele tem percebido a importância da Álgebra e que tem reconhecido múltiplas situações da vida real em que a Álgebra é necessária.

O que diz essa US:

*A importância da Álgebra se revela gradualmente;

*Importância focada na aplicabilidade.

US7.P2E Y el Álgebra es en cuanto a la factorización es eso, como organizar para facilitar. Entonces hay muchísimas, muchísima aplicación y en eso es que uno se debe dedicar, como en lo mínimo, para que la gente ya como que capte lo más grande.

Tradução: E a Álgebra é enquanto à fatoração isso, ou seja, como organizar para facilitar. Então são muitas, muitas aplicações e é sobre isso que a gente se deve dedicar, como ao mínimo, para que as pessoas já entendam o maior.

Enxerto Hermenêutico: O professor menciona a fatoração como sendo um aspecto fundamental da Álgebra. Quando se refere particularmente à fatoração, compreende-a como um modo de organizar para facilitar. Nesse sentido, a fatoração, em sua ótica, consiste em organizar os termos de uma expressão algébrica para revelar uma estrutura mais simples e manejável. Ademais, pontua as múltiplas aplicações deste procedimento algébrico, ou seja, buscar exemplos em diversos contextos em que essa ideia de “organizar para facilitar” coloque em evidência a necessidade da fatoração. Nesse sentido, atenta que o professor deve focar no “mínimo”, mas, o sentido que ele busca expressar não é em termos quantitativos, ou em reduzir os conteúdos, o que ele sugere é que o professor deve buscar que o estudante compreenda as estruturas subjacentes nas expressões algébricas, as quais podem estar simbolizadas em diferentes graus de complexidade, ou, como ele fala, que o estudante “entenda o maior”.

USg7.P2E: Para o professor P2E, a fatoração é um aspecto relevante da Álgebra, que consiste em organizar para facilitar, e que possibilita múltiplas aplicações. Em seu ponto de vista, os professores que ensinam Álgebra devem procurar que os estudantes compreendam os aspectos mais básicos que subjazem às expressões algébricas, para logo ir compreendendo estruturas maiores.

O que diz essa US:

*Importância da fatoração nas aplicações;

* Concepção de ensino da Álgebra.

US8.P2E

Si mire, yo creo que en la aplicación de problemas y de cosas de estas, lo que más se utiliza, digamos, aunque tiene una mala fama, es la factorización, que uno nunca aplica la factorización. Pero si uno se detiene a las cosas pequeñas, sí necesariamente, tendría que utilizar mucho

Tradução: Sim, olha, eu acho que na aplicação de problemas e coisas assim, o que mais se usa, digamos, embora tenha má reputação, é a fatoração, que a gente nunca aplica a fatoração. Mas se a gente parar nas pequenas coisas, necessariamente terá sim que usar muito.

Enxerto Hermenêutico: Nesta passagem, o professor começa dando ênfase naquilo em que acredita: a fatoração é a parte da Álgebra mais usada para resolver problemas, porquanto seus métodos ajudam a simplificar expressões, como ele indica na US7.P2E. No entanto, paradoxalmente, afirma que, pela razão contrária do que acredita, a fatoração tem má reputação, haja vista que vem sendo comum manifestar que fatoração nunca é aplicada e se reduz à mecanização de regras sintáticas. Esse aspecto paradoxal, expresso pelo professor, suscita o questionamento, essa má fama donde vem? Pode ser que as experiências na aprendizagem da Álgebra revelem traços de esse aspecto “negativo”, em termos de metodologias de ensino, de práticas de ensino, do modo como é constituído o conhecimento nas salas de aula, na relação entre professores e alunos, entre outros motivos.

No entanto, quando o professor diz que “se a gente parar nas pequenas coisas”, ele está chamando a atenção sobre um aspecto que reclama reflexão, que deve ser examinado de modo atento e cuidadoso. Buscando trazer à tona o dito na US7.P2E, a ideia do que ele denomina como “organizar para facilitar” é entendida como tomando intuitivamente contextos mais acessíveis para o estudante, que lhe permitam evidenciar a utilidade.

USg8.P2E: O professor acredita que a fatoração é a parte da Álgebra mais usada na resolução de problemas. Ao contrário do que ele acredita, é costume dizer que nunca se aplica, daí a má reputação da fatoração. Mas, segundo ele, se fosse analisado mais cuidadosamente, teria necessariamente de usar-se.

O que diz essa US:

- * Importância da fatoração;
- * A Álgebra é “útil” a compreensão de outras ideias matemáticas.

US9.P2E

Yo pienso que lo importante en este momento es ir con que está sucediendo. [...] Cuando ahorita estamos hablando de la inteligencia artificial, estamos hablando de otro pocotón de cosas y entonces le toca a uno [...], como actualizar eso, y ser como menos mecánico.

Tradução: Acho que o **importante** neste momento é acompanhar o que **está acontecendo**. [...] Quando estamos falando de inteligência artificial agora, estamos falando de outras coisas e então **cabe a nós** [...], como **atualizar** isso, e ser menos **mecânico**.

Tradução: Acho que o **importante** neste momento é acompanhar o que **está acontecendo**. [...] Quando estamos falando de inteligência artificial agora, estamos falando de outras coisas e então **cabe a nós** [...], como **atualizar** isso, e ser menos **mecânico**.

Enxerto Hermenêutico: O professor coloca em destaque sua perspectiva, sobre o que ele considera que deve ser um aspecto a ter em conta no ensino. Conforme sua fala, o ensino deve olhar para o que está acontecendo, os eventos e fatos que estão ocorrendo no presente, de modo que sejam considerados no planejamento e no desenvolvimento das aulas. Sendo assim, menciona a necessidade de atualizar, referindo-se, em particular, aos modos de ensino e de abordar os conteúdos escolares, buscando integrar temas atuais como: dinâmicas sociais, culturais, econômicas, científico-tecnológicas, entre outros. Também sugere que os professores assumam uma postura frente ao ensino menos “mecânico”, ou seja, adotar métodos de ensino mais dinâmicos e envolventes, em vez de seguir rotinas repetitivas e monótonas, como as descreve na US3.P2E.

USg9.P2E: Na perspectiva do professor, devem-se considerar eventos e fatos atuais no planejamento e desenvolvimento das aulas, buscando atualizar-las, para que as aulas sejam menos monótonas.

O que diz essa US:

* Concepção de ensino da Álgebra.

US10.P2E Sin embargo, pues hay cosas que se complican ahorita en este momento en la educación, sobre todo en la de los jóvenes, es que ellos como que no ven valor de nada, ¿verdad?, como que no hay interés. [...] como que, si estudio, y ¿para qué estudio?

Tradução: Porém, tem coisas que estão complicadas neste momento na educação, principalmente na dos jovens, é que eles não veem valor em nada, né?, tipo como não tem interesse, [...], tipo sim, eu estudo, e com que propósito eu estudo?

Enxerto Hermenêutico: Após o falado, o depoente faz uma pausa e reflete, expressando sua preocupação sobre a educação dos jovens na atualidade. Ele diz que têm coisas complicadas neste momento na educação. Com essa fala, o professor busca apontar situações desafiantes que tem que enfrentar na atividade de ensino no cotidiano da sala de aula, mas também no âmbito educacional em geral. Que dificuldades são essas que ele reconhece na atualidade educacional? Algumas têm a ver com os aspectos comportamentais dos alunos, outras, como as mesmas

dinâmicas escolares, como as mencionadas nas US12.P1E e US13.P1E, e principalmente ele faz referência à escassa receptividade e motivação dos estudantes.

Segundo ele afirma, os jovens não encontram valor em nada. Com isso, o professor busca manifestar, por um lado, sua percepção sobre a falta de expectativas que demonstram os estudantes frente ao que o conhecimento escolar lhes possa brindar. De outra parte, a percepção da educação como sendo carente de valor e a desilusão com o sistema educacional, devido em parte, à falta de conexão entre educação e oportunidades de emprego, assim como a relevância dos currículos nas demandas da atual realidade, e as perspectivas do futuro, que contribuam para o desenvolvimento pessoal e profissional dos estudantes. Conforme o professor P2E relata, os estudantes se questionam sobre qual é o propósito do que eles estudam, o para quê.

USg10.P2E: O professor manifesta sua preocupação pelos desafios frente à atual realidade na educação, em particular a dos jovens. Ele percebe em seus alunos uma ausência de expectativas e interesse, o que os faz questionar qual é o propósito do estudo.

O que diz essa US:

*Desafios do professor;

* Interesse dos alunos;

*Propósito do estudo percebido no comportamento dos estudantes.

US11.P2E [...] para mí el Álgebra es, yo creo que junto con la trigonometría son las dos cosas más hermosas que tiene la vida, porque es lo que más se aplica. Que no la sepamos aplicar será una cosa, porque es que el Álgebra es, uno por donde uno la mire, ahí está metida, ¿sí? Ahí está la Aritmética, ¡está todo!

Tradução: para mim Álgebra é, acredito que junto com a trigonometria são as duas coisas mais bonitas da vida, porque é o que mais se aplica. Que a gente não saiba aplicar vai ser uma coisa, porque Álgebra está, não importa para onde você olhe, ela está aí, né? Tem a Aritmética, tem tudo!

Enxerto Hermenêutico: Destaca-se, nesta passagem, o modo como o professor olha para a Álgebra, e também para a Trigonometria, pois para ele, essas duas disciplinas mostram uma qualidade de beleza. Esse caráter estético que lhes atribui se deve, conforme ele diz, às múltiplas possibilidades de aplicação, que geram nele um sentimento de gosto, de prazer, de fascinação. É uma beleza que não é apenas no que se percebe aos olhos, pois, conforme Gadamer (2011a, p. 158), nossa “percepção não é nunca um simples reflexo daquilo que foi proporcionado aos sentidos”; é uma beleza no pensamento, na estruturação das ideias, nos modos de desenvolver os raciocínios, ao serem aplicados. No entanto, com isso, não queremos dizer que as questões de gosto “podem ser decididas através de argumentação e demonstração, [...] [pois] o gosto tem de ser uma capacidade de si mesmo” (Gadamer, 2011a, p.93). Nesse sentido, do disposto por

Gadamer, compreendemos que a apreciação de beleza, expressa na fala do depoente, diz do caráter subjetivo e intencional a respeito da qualidade de beleza na Álgebra. No entanto, o professor faz uma ressalva ao dizer que o fato de não ver essas qualidades na Álgebra, se deve ao fato de que não sabemos aplicá-la, pois, em seu ponto de vista, é necessário um olhar atento para encontrar onde a Álgebra pode estar imersa. É esse ato intencional que possibilita, para ele, perceber qualidades estéticas na Álgebra.

Além do mais, ele manifesta que a Álgebra tem a Aritmética. A afirmação do professor revela um aspecto significativo sobre o modo que, segundo ele, relacionam-se essas duas disciplinas. Sendo assim, conforme sua exposição, a Álgebra abrange a Aritmética, como se esta última estivesse contida na primeira. Mas de que modo? Uma perspectiva que visa compreender essa relação, da qual fala o depoente, como o estado de relevância em que se encontram essas duas disciplinas no âmbito da Matemática como marco de referência. A esse respeito, Massa (2001) analisa o status da Álgebra no seu desenvolvimento histórico, argumentando que, na obra de Euclides, *Os Elementos*, a Geometria é considerada superior à Aritmética e os teoremas aritméticos são comprovados por considerações geométricas, porém, com a introdução da Álgebra se dissolveram as linhas divisórias na Matemática, enquanto à terminologia e metodologia, entre Aritmética, Álgebra e Geometria. Isso levou a questionamentos como: a Álgebra era uma ciência ou uma arte? A Álgebra era considerada parte da Matemática? A Aritmética era superior à Álgebra? Em que áreas a Geometria foi mais eficaz ou necessária? Em quais delas estava a Álgebra?

Recorrendo ao percurso histórico da Álgebra, Bortolote (2024) coloca em evidência como esse percurso não foi linear, que já desde o trabalho de Diofanto¹⁷¹, com a *Aritmética*, a semente da Álgebra se faz presente. Contudo, Massa (2001) indica que um dos momentos cruciais na história da Álgebra foi a publicação, em 1591, da obra *In Artem Analyticem Isagoge*, de François Viète¹⁷², quem “tentou explicar o caminho que utilizou para resolver as equações enquadrando-o na análise grega”¹⁷³ (Massa, 2001, p.707, tradução nossa). Assim, a Álgebra de Viète se tornou uma guia para a resolução de equações em Aritmética, em Geometria, em Trigonometria, entre outras. Não obstante, em consonância com Massa, nem todos os matemáticos aceitaram a Álgebra como uma nova parte da matemática, por exemplo, Thomas Hobbes¹⁷⁴ e Isaac Barrow¹⁷⁵, que consideravam a Geometria e a Aritmética como ciências, e a Álgebra cumpria um papel secundário. Enquanto Hobbes a considerava como um raciocínio simbólico, ou uma arte para registrar as invenções da Geometria com brevidade, Barrow a considerava como um instrumento da lógica. Conforme Massa (2001, p.708, tradução nossa), “é a partir da obra de Descartes¹⁷⁶ e durante aproximadamente um século, [que] foi realizado o processo de algebrização da

¹⁷¹ Diofanto de Alexandria foi um matemático grego que viveu no século III ou IV.

¹⁷² François Viète (1540-1603) foi um advogado e matemático francês.

¹⁷³ intentaba explicar el camino que utilizaba para resolver las ecuaciones enmarcándolo dentro del análisis griego.

¹⁷⁴ Thomas Hobbes (1588-1679) foi um filósofo, teórico político e matemático inglês.

¹⁷⁵ Isaac Barrow (1630- 1677) foi um teólogo, professor e matemático britânico.

¹⁷⁶ René Descartes (1590-1600) foi um filósofo, matemático e físico francês.

matemática”¹⁷⁷, período que marcou uma lenta, mas significativa transição, em que o pensamento matemático passou de uma abordagem predominantemente geométrica para uma orientação algébrica. Durante esse período, diversos matemáticos incorporaram métodos algébricos em seus trabalhos, procurando não apenas aplicá-los, esforçando-se para alinhar essas novas técnicas com os princípios da Matemática clássica.

Outra perspectiva que envolve a relação da Álgebra e a Aritmética, conforme o falado pelo do professor P2E, mostra a ideia da Álgebra como sendo uma generalização de aspectos da Aritmética. Em dita perspectiva, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.79), a concepção de Álgebra está mais próxima da “tendência tradicional [que a considerava] como uma Aritmética universal ou generalizada”. Nesse sentido, da ideia expressa pelo professor, pode-se estabelecer uma semelhança com a concepção de Álgebra expressa pelo professor P1E, na USg8.P1E, em que a Álgebra é considerada como um tipo de Aritmética generalizada.

USg11.P2E: O professor destaca uma qualidade de “beleza” na Álgebra e na Trigonometria, atribuída à fascinação de estruturar ideias e ao modo desta estruturação ser aplicada. Ele concebe a Álgebra como um campo da Matemática que abrange a Aritmética.

O que diz essa US:

- * Qualidade de beleza da Álgebra;
- * Caráter de utilidade da Álgebra;
- * Relação entre a Álgebra e a Aritmética;
- * Concepção de Álgebra.

US12.P2E Yo no la llamaría Álgebra, sino como **matemática**, más bien, ¡como lo que es!, y que se puede, [...] se puede **aplicar** en todo y uno buscarle por donde la puede uno manejar.

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento do depoimento, P2E destaca a relevância da Álgebra na Matemática, uma vez que, em seu olhar, a Álgebra é a Matemática. Nesse sentido, conforme a fala do professor, não se deve estabelecer uma clara distinção entre a Matemática e a Álgebra. Essa consideração é relevante, porquanto robustece a ideia expressa na US11.P2E, trazendo à tona o status da Álgebra na Matemática. Aqui, mostra-se importante destacar o ponto de inflexão na perspectiva epistemológica do trabalho de Viète e suas implicações para as subseqüentes abordagens na Matemática, pois “o simbolismo literal de Viète permitiu ao matemático tratar os dados de um problema como parâmetros e, portanto, tratar o próprio problema como um tipo geral”¹⁷⁸ (Mahoney, 1973, p.35, tradução nossa). A utilização dessa nova notação de notação permitiu desvincular a Álgebra de um método de apresentação fundamentado em exemplos

¹⁷⁷ [...] es que a partir de la obra de Descartes y durante un siglo, aproximadamente, se llevó a cabo el proceso de algebrización de las matemáticas

¹⁷⁸ Viète's literal symbolism enabled the mathematician to treat the data of a problem as parameters and hence to treat the problem itself as a general type

particulares e algoritmos verbais. Essa “libertação da Álgebra” (Mahoney, 1973, p.35, tradução nossa) possibilitou centrar a atenção nos procedimentos de solução e não na solução em si, nas operações que envolvem parâmetros, o que tornou possível a construção de uma teoria geral das equações (Boyer, 1987). Ao enfatizar nos procedimentos de solução, Viète fomentou a investigação da estrutura (*constitutio*) das equações resolvidas (Mahoney, 1973). Assim, a solução totalmente simbólica das equações gerais mostrou que “a solução poderia ser aplicada a outros problemas, que não os numéricos; para problemas envolvendo, por exemplo, segmentos de retas ou ângulos geométricos”¹⁷⁹ (Mahoney, 1973, p.35, tradução nossa). Ainda mais, “a arte analítica de Viète sugeria a sua aplicabilidade a problemas que envolvessem qualquer tipo de objetos para os quais se pudesse definir a soma, a diferença, o produto, o quociente, a potência e a raiz”¹⁸⁰ (Mahoney, 1973, p.36). De tal modo, segundo o exposto por Mahoney (1973, p.36, tradução e grifos nossos), “a Álgebra foi transformada de um tipo sofisticado de resolução de problemas aritméticos na própria *arte do raciocínio matemático*, [...] [assim], a arte analítica ascendeu a uma posição que incluía toda a matemática combinatória, fosse ela Aritmética, geometria ou trigonometria”¹⁸¹.

As reflexões anteriores acerca da arte analítica de Viète evidenciam a natureza abrangente da Álgebra, que permite expandir a compreensão das palavras do professor. Cabe mencionar, ainda, que o professor P2E enfatiza as possibilidades da Álgebra em termos de aplicações práticas, atribuindo ao educador a tarefa de identificar contextos nos quais os alunos possam se engajar com essa arte analítica.

USg12.P2E: De acordo com o professor, a Álgebra está no cerne da Matemática e desempenha um papel fundamental devido à sua ampla aplicabilidade em diversas situações.

O que diz essa US:

*Concepção de Álgebra;

*Caráter de utilidade da Álgebra.

US13.P2E [...] hay que seguir adelante para que esto **siga siendo**, digamos que [...] **el quid** de la matemática, así como la trigonometría. Así como cuando uno **está en Primaria**, saber sumar, restar, si uno no sabe eso como que no [...] y mire **de donde** **arranca uno desde Primaria** y a **donde** **llega**.

¹⁷⁹ that the solution could be applied to other than numerical problems; to problems involving, for example, geometrical line segments or angles

¹⁸⁰ Viète's analytic art suggested its applicability to problems involving any sorts of objects for which one could define the sum, difference, product, quotient, power, and root.

¹⁸¹ algebra was transformed from a sophisticated sort of arithmetical problem-solving into the art of mathematical reasoning itself, [...], the analytic art rose to a position subsuming all combinatory mathematics, whether arithmetic, geometry, or trigonometry.

Tradução: [...] se tem que avancar para que isto continue sendo, digamos assim [...] o quid da matemática, assim como da trigonometria. Assim como quando se está na Educação Básica Primária, saber somar, subtrair, se não sabe, claro que não [...] e veja por onde a gente começa desde a Educação Básica Primária e aonde se chega.

Enxerto Hermenêutico: Quando o professor diz que é necessário avançar para que isso continue sendo, ele se refere aos modos e às estratégias de ensino da Matemática na escola. Além disso, conforme o professor expressa, a Álgebra, assim como a trigonometria, são o *quid da matemática*. Segundo o dicionário Houaiss, o termo *quid* é um substantivo que vem do latim, que expressa o cerne, o ponto difícil. Dessa forma, para o professor, a Álgebra e a Trigonometria são o *quid* da questão, ou seja, o ponto crucial, questão-chave da Matemática na *Educação Média*; assim como a adição e a subtração são desde a *Educação Básica Primária*. Esse modo de conceber a relevância da Álgebra reforça o que o professor diz na Usg12.P2E sobre a importância da Álgebra, mas neste fragmento US13, referindo-se ao âmbito da *Educação Média*. No final da fala, o professor busca indicar que, sem esses conhecimentos, que ele considera como fundamentais (o *quid*), os estudantes não podem avançar nos níveis educacionais. Isso mostra que, para o professor, esses tópicos se constituem em uma sequência indispensável de ensino, em que uns servem como fundamento para compreender outros.

Usg13.P2E: Conforme o dito pelo professor, a busca por uma constante melhoria no ensino da Álgebra é crucial, pois, para ele, assim como a adição e a subtração são o núcleo da Matemática desde *Educação Básica Primária*, a Álgebra e a Trigonometria são o ponto central, o *quid*, da Matemática na *Educação Média*.

O que diz essa US:

* concepção de Álgebra como cerne da Matemática.

5.2.3 Professor P3E

US1.P3E Algunos critican de pronto que Baldor [...], pero yo digo que [...] a veces el ejercitar con Algebra es bueno. Y yo me sentía muy feliz de ver que los hacía [los ejercicios], y se convertía en un desafío, a veces porque traían errores y uno decía ¡oiga, aquí hay un error! Entonces como que me fue dando esa competencia. O sea, hubo como una facilidad en coger las matemáticas como algo del diario de uno [...] entonces yo casi no recuerdo cómo fue el salto de lo que llamamos la Aritmética al Álgebra

Tradução: Alguns de repente criticam que o Baldor [...], mas eu digo que [...] às vezes fazer exercício com Álgebra é bom. Eu me sentia muito feliz em ver que conseguia fazê-los [os

exercícios], e isso virou um desafio, às vezes porque eles tinham erros e a gente dizia, ei, aqui está um erro! Então isso como que me deu essa competência. Ou seja, houve uma facilidade em tirar a Matemática como algo do diário [...] então quase não me lembro como foi o salto do que chamamos de Aritmética para Álgebra.

Enxerto Hermenêutico: Ao falar sobre sua experiência na aprendizagem de Álgebra na escola, o professor P3E menciona que trabalhou os conteúdos dessa disciplina com o livro didático *Álgebra de Baldor*. Para ele, esse livro tem sido alvo de muitas críticas por sua metodologia centrada na prática de exercícios, na mecanização e por ter escassos problemas de aplicação, os quais, por estarem em um texto cuja primeira edição data de 1941, são problemas descontextualizados. No entanto, o professor acredita que a prática em Álgebra mediante essa metodologia tem aspectos positivos. Em seu viés, a metodologia seguida nesse livro era motivadora, pois se tornava um desafio, especialmente quando encontrava exercícios com erros e conseguia identificá-los e mostrar onde estava o erro. Para ele, esse modo de trabalhar a Álgebra na escola foi importante, pois lhe proporcionou determinadas competências relacionadas ao domínio de procedimentos algébricos.

No caso do depoente, o envolvimento precoce e contínuo com a Matemática em um ambiente familiar propício parece ter atenuado essa transição, tornando-a uma evolução natural de sua compreensão numérica, em vez de um salto conceitual abrupto. Isso pode ser atribuído ao fato de que a imersão em um ambiente matematicamente estimulante desde cedo parece ter facilitado a compreensão intuitiva de conceitos mais avançados, como os encontrados na Álgebra. Além disso, essa experiência pessoal manifestada pelo depoente ressalta a importância do contexto familiar como um fator que contribui potencialmente, influenciando a maneira como o indivíduo percebe e interage com a matemática.

USg1.P3E: O professor relata que, durante a aprendizagem da Álgebra na escola, o livro conhecido como *Álgebra de Baldor* foi o texto mais relevante. Apesar das críticas à metodologia utilizada nesse texto, ele acredita que a prática da exercitação da Álgebra pode ser benéfica para o aprendiz. Também considera que, quando estudante na escola, o método adotado por este texto era motivador para ele, apesar de algumas vezes ser desafiador. Ele atribui a essa prática o mérito de lhe ter proporcionado competência na Álgebra. Além disso, o ambiente familiar o incentivou a abordar a Matemática como algo do dia a dia, fazendo com que não percebesse como um salto abrupto o passo da Aritmética para a Álgebra.

O que diz essa US:

- * Lembranças ao trabalhar com o livro *Álgebra de Baldor*;
- * Crença na eficácia dos exercícios na aprendizagem;
- * Interesse dos alunos;
- * Salto da Aritmética para a Álgebra.

US2.P3E

Entonces digamos que casi lo que yo estudié me obligó a meterme mucho en ese contexto del Álgebra rápidamente. Entonces uno tiene mucho contacto con la realidad, cómo yo puedo describir matemáticamente [...] unos fenómenos, unas variables, cómo yo puedo identificarlas dentro de un contexto.

Tradução: Então digamos que quase tudo que **estudei** me obrigou a entrar nesse contexto de Álgebra muito rapidamente. Então a gente tem muito contato com a realidade, como eu posso descrever matematicamente [...] alguns **fenômenos**, algumas **variáveis**, como eu posso identificá-las dentro de um contexto.

Enxerto Hermenêutico: O professor fala que sua formação na graduação, que não é de licenciatura em Matemática, mas em engenharia, o forçou a envolver-se rapidamente com o estudo da Álgebra. Esse aspecto resulta relevante, pois na Colômbia profissionais de áreas diferentes à Educação exercem a profissão docente, o que tem sido alvo de diversos debates. O depoente se refere ao fato de que a realidade por ele vivenciada no curso de engenharia o levou a precisar trabalhar com variáveis de fenômenos diversos presentes nessa realidade.

Por outro lado, o depoente afirma que devido a esses estudos na graduação, ele teve um contato significativo com a realidade. Tal afirmação levanta uma questão importante: a que se refere quando diz ter contato com a *realidade*? Uma sucinta busca no dicionário Houaiss, conceitua a palavra *realidade*: 1) qualidade ou característica do que é real; 2) O que é existente, fato real e verdade; 3) Conjunto das coisas que são reais. Sendo assim, percebe-se um nexos com a palavra *real*, que no *Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa* (Nascentes, 1955), deriva do latim *reale*, de *res*, coisa, diz do que tem existência verdadeira. Assim, conforme Mora (2001, p. 2468), podemos considerar vários pontos de vista das expressões “é real” e “realidade”: 1) Dizer que x que é real ou dizer que x é uma realidade não é, a rigor, dizer nada de x , x pode ser azul, redondo (ou aproximadamente redondo), duro, etcétera, mas não tem sentido dizer que é real (ou não real); x , no entanto, é quantificável, de modo que se pode dizer que há ou não um x tal que tem tal ou qual propriedade. 2) Dizer que x que é real se entende somente em relação com expressões como ‘autêntico’, ‘genuíno’, ‘verdadeiro’, ‘natural’, etc. (como quando se diz que uma maçã é natural; isto quer dizer que é real, mas no sentido de que não é feita de cera ou não é uma imagem holográfica). 3) Dizer que x que é real é dizer que não é meramente aparente, ou ilusório, ou que não é “apenas possível”. 4) Dizer que x que é real ou dizer que é uma realidade equivale a dizer que existe, ou é “atual”; a chamada “realidade” é neste caso o mesmo que a “existência”.

Esse ponto ganha mais relevância ao se conectar com a fala inicial do professor, na US2.P3E, pois ele menciona que, nos seus estudos universitários, a Matemática foi, predominantemente, voltada para as aplicações em áreas como industrialização, transporte, construção civil, mecânica, química, geologia, economia e física, entre outras, que, durante a entrevista foi descrevendo. Isso parece revelar aspectos de sua concepção de *realidade*, a qual se fundamenta em experiências vivenciadas, sobretudo durante o período de seus estudos de graduação. Do dito pelo professor, sobre suas experiências, mostra-se a concepção de que a *realidade*, assim como

no âmbito da Matemática Aplicada (Tambarussi, 2021), é tomada como objetivamente dada em sua empiricidade e se revela em situações particulares consideradas.

Ao afirmar “eu posso”, o professor busca expressar que as experiências realizadas lhe possibilitaram o desenvolvimento de “habilidades para realizar” a descrição matemática de fenômenos e a identificação de variáveis relevantes em contextos de aplicação. Os fenômenos mencionados pelo professor não se relacionam com os estudados pela fenomenologia; referem-se, isso sim, àqueles que estão dados em sua facticidade, ou seja, fenômenos quantificáveis e mensuráveis típicos das ciências naturais. Portanto, são fenômenos entendidos sob a perspectiva da atitude natural, na qual a certeza de sua existência é baseada em evidências empíricas.

USg2.P3E: Conforme relatado pelo professor, durante seus estudos universitários, a Matemática teve um enfoque predominante voltado para as aplicações práticas. Essa abordagem da Matemática exigiu que ele se engajasse rapidamente com o estudo da Álgebra. Isso lhe permitiu ter mais contato com a realidade, e as experiências adquiridas lhe possibilitaram o desenvolvimento de habilidades para realizar a descrição matemática de fenômenos e a identificação de variáveis relevantes.

O que diz essa US:

*Contato com a Álgebra no curso de engenharia;

*Trabalho com variáveis de fenômenos diversos da realidade empírica.

US3.P3E

Entonces uno [...] como que casi desde el comienzo de la universidad, uno ve que el Álgebra definitivamente **está metida en la vida**. [...] Entonces uno [...] como que le empieza a dar **significado** a las cosas **en la vida** y las **bellezas** que uno puede encontrar con eso.

Tradução: Então [...] quase desde o início da universidade, a gente vê que a Álgebra está definitivamente **inserida na vida**. [...] Então a gente [...] como que começa a dar **significado** às coisas **na vida** e às **belezas** que se podem **encontrar** com isso.

Enxerto Hermenêutico: No depoimento, o professor P3E destaca como a abordagem da Matemática na *Educação Superior* possibilitou uma nova percepção da Álgebra, revelando sua aplicabilidade e presença no cotidiano. Este ponto é significativo, pois convida à reflexão sobre o significado de conceitos matemáticos relativos a vivências que ocorrem na realidade mundana. Uma maneira de interpretar essa afirmação é por meio da ideia de “mundo da vida” (*Lebenswelt*). Conforme Bicudo (2016, p. 46), “o mundo-[da]-vida é o mundo já dado e que compreende toda a formação histórica e deve ser interrogado, voltando-se à subjetividade e à intersubjetividade para que se compreenda como nascem os produtos culturais que caracterizam tal mundo”. Enquanto produto cultural, as ideias que estruturam a Álgebra, que se consolidaram ao longo de diversos períodos históricos, são o resultado de uma série de esforços intelectuais significativos.

Nos termos de Bortolote (2024, p. 117), “no fazer algébrico do qual se dá conta analisando sua história, está presente uma espécie de intuição abstracionista que os primeiros algebristas tinham das potencialidades dessa área de investigação ao se preocuparem com a resolução dos problemas do cotidiano”. Assim, o *Lebenswelt* — provendo o material nos modos pré-categorias (Bicudo, 2016) — possibilitou que essas ideias não apenas se sedimentassem como um produto cultural valioso, indo além e representando uma expressão da capacidade humana de abstração e raciocínio lógico, que transcende gerações e fronteiras culturais, contribuindo para o avanço do conhecimento humano.

Conforme o depoente, esse modo de compreender a Álgebra lhe possibilitou começar a dar “significado às coisas na vida”. Isso sugere que, para ele, foi importante esse modo de compreensão, por assim dizer, “intuitiva”, da Álgebra, e entendendo-a como parte intrínseca das experiências diárias e da realidade vivenciada no cotidiano, não apenas como uma série de conteúdos restritos ao campo acadêmico e escolar. No âmbito da fenomenologia husserliana, o ato de intuir “Abre à consciência a visão do que é, na imediatez do visto e do percebido, donde ser um começo válido para o deslanchar do movimento de conhecer-se o mundo” (Bicudo, 2022, p.120), ou seja, é o modo pelo qual a consciência apreende diretamente os fenômenos. Retomando as observações do professor, esta reflexão é significativa ao considerarmos a intenção dele por explorar as possibilidades de compreender como aspectos da Álgebra podem ser abordados intuitivamente por meio das experiências cotidianas e da realidade vivenciada. Ainda mais, ele atribui qualidades de beleza ao modo do como a Álgebra pode ser percebida no cotidiano. Esse caráter estético da Álgebra também é explorado no enxerto hermenêutico da US11.P2E, em que se atribui esse caráter estético da Álgebra em razão das múltiplas aplicações que essa disciplina possibilita.

USg3.P3E: Para o professor, o modo como foi abordada a Álgebra em seus estudos universitários lhe permitiu reconhecer que essa disciplina está “inserida na vida”. Do seu ponto de vista, esse modo de compreender a Álgebra foi importante, e lhe possibilitou começar a dar “sentido às coisas na vida” e, também, a perceber qualidades de beleza na Álgebra.

O que diz essa US:

* Álgebra intuída inserida na realidade vivenciada;

* Beleza da Álgebra.

US4.P3E

Bueno, la comprensión del Álgebra yo diría, o sea, creo que tengo como esa idea de que es poder modelar una situación. ¿Sí? Para que dependiendo de lo que se me presente, yo a ir a mirar qué resultado me puede dar. ¿Sí? Eh [...], decirle mire esto, yo lo puedo trabajar a partir de algo que se llaman variables

Tradução: Bom, da compreensão da Álgebra eu diria, ou seja, acho que tenho essa ideia de que é poder modelar uma situação. Sim? Então dependendo do que me for apresentado, irei ver que resultado isso pode me dar. Sim? Eh [...], dizer, olha isso, eu posso trabalhá-lo a partir de uma coisa chamada variáveis.

Enxerto Hermenêutico: O professor manifesta que o que compreende como Álgebra é o que permite modelar uma situação, isto é, ele concebe a Álgebra como aquilo que possibilita a atividade de modelagem em função de determinados contextos de aplicação. Considerando a polissemia da palavra *modelo*, compreendemos que ela pode ser interpretada de diferentes maneiras, por exemplo, de acordo com o dicionário Houaiss, como representação, como desenho, como molde, como uma peça a ser reproduzida, como o representante típico de uma categoria, ou como um esquema teórico que representa um fenômeno ou conjunto de fenômenos complexos e permite compreendê-los e prever a evolução. É sobre este último significado que parece adequar-se ao sentido do dito pelo professor, em que se destaca a capacidade de avaliar a previsibilidade que possibilita o modelo. Assim, ao referirmos ao ato de modelar, ou seja, a modelagem, Anastacio (2010), no âmbito da Modelagem Matemática, manifesta que todas as definições estão referidas, de alguma forma, a um problema da realidade que pode ser solucionado por meio de um processo que busca um modelo matemático para representá-lo. Outro aspecto relevante, é o elo que pode ser estabelecido entre a atividade de modelagem e a Matemática Aplicada. Nos termos de Bassanezi (2002), esta “[...] pode ser considerada como a arte de aplicar matemática a situações problemáticas, usando como processo comum a modelagem matemática” (2002, p. 32). Esse elo mostra que, na fala do professor, o modo como ele concebe a Álgebra tem sido encaminhado por suas experiências na abordagem da Matemática, que como ele aponta na US2.P3E, foram particularmente voltadas para as aplicações. Sendo assim, as construções matemáticas, no âmbito da Matemática Aplicada, podem ser entendidas, segundo Bassanezi (1999, p.13), “como uma atividade em busca de sintetizar ideias concebidas a partir de situações empíricas que estão quase sempre, escondidas num emaranhado de variáveis”. As reflexões propostas por esse autor nos auxiliam a ampliar a compreensão das palavras do professor, mostrando aspectos da postura adotada ao refletir e atuar com a Álgebra. Essas observações fornecem pistas acerca da concepção do professor P3E sobre a Álgebra e seu ensino. Como dito pelo professor, um aspecto que ele considera relevante é o trabalho com variáveis, que são elementos fundamentais para a construção dos modelos. Essas variáveis permitem não apenas a elaboração do modelo, mas também a análise e interpretação dos dados envolvidos no fenômeno examinado.

USg.4P3E: O professor concebe a Álgebra como aquilo que possibilita modelar determinadas situações. Também destaca a capacidade de avaliar a previsibilidade que os modelos matemáticos possibilitam, mediante o uso de variáveis.

O que diz essa US:

*Concepção da Álgebra como aquilo que possibilita a atividade de modelagem;

*Caráter de utilidade da Álgebra;

*Trabalho com variáveis.

US5.P3E

Pero, si veo que [...] que de pronto ese contacto con la realidad del mundo y mirar que [...] las cosas **son medibles**, que **son modelables** a través del **Álgebra**, me dio como para cogerle **más amor** a eso de lo que es el **Álgebra**, llamémoslo así, [...] y a **la enseñanza del Álgebra** hoy en día, porque uno lo transmite con **una razón de ser** de las cosas.

Tradução: Mas, se eu vejo que [...] de repente aquele **contato** com a **realidade do mundo** e ver que [...] as coisas **são medíveis**, que podem ser **modeladas** através da **Álgebra**, isso me deu para ter **mais amor** por isso do que é **Álgebra**, vamos chamar assim, [...] e o **ensino de Álgebra** hoje, porque a gente o transmite com uma **razão de ser** das coisas.

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento, o professor amplia o dito na US2.P3E, sobre o contato com a *realidade*, que é considerada como o que aí está, como sendo objetivamente dado em sua empiricidade. Ora, como foi examinado no enxerto hermenêutico da US2.P3E, tem um leque de perspectivas ao considerar a palavra *realidade*, sem embargo, parece que neste excerto, ele a delimita à “realidade do mundo empírico”. Este aspecto resulta relevante, pois conforme Gadamer (2012, p.644) manifesta, “o homem não é independente do aspecto particular que o mundo lhe mostra”. No entanto, Husserl (2006, p.33) argumenta que já “na orientação teórica que chamamos ‘*natural*’, o horizonte total de investigações possíveis é, pois, designado com uma só palavra: o *mundo*. As ciências dessa orientação originária são, portanto, em sua totalidade, ciências do mundo”. Essas ciências, orientadas pela visão galileana, na busca do conhecimento verdadeiro da realidade, por meio da medição e a quantificação, estabeleceram-se como o paradigma das ciências nos últimos 400 anos (Anastacio, 2010). Em particular, na fala do professor E3, entendemos que é no mundo circundante que ele olha para esses fenômenos, com os quais trabalha, susceptíveis de serem quantificáveis e mensuráveis, e de atribuí-lhes significado por meio de modelos matemáticos que representam aspectos (parciais) da realidade, expressos a través da Álgebra. Sendo assim, compreendemos que o papel da Álgebra, conforme a fala do professor, fica explicitada pela função de uma linguagem que possibilita expressar propriedades dos modelos. O professor acredita que foi justamente esse caráter da Álgebra, que possibilita expressar modelos aplicados a fenômenos, o que gerou nele um sentimento de amor por essa disciplina. Para o professor, esse sentimento se estende ao ensino da Álgebra, pois isso lhe permite transmitir esse conhecimento com uma razão de ser. Pode-se compreender que, para o professor, a razão de ser, ou seja, o núcleo fundamental que dá sentido e justifica o ensino da Álgebra é a possibilidade de ela poder expressa, mediante uma linguagem própria, variáveis de fenômenos que se destacam à realidade mundana.

USg5.P3E: O professor considera que o contato com a realidade, a partir de sua experiência na universidade, possibilitou-lhe olhar para fenômenos susceptíveis de serem mensuráveis, quantificáveis, e modeláveis matematicamente com a Álgebra. Isso gerou nele um sentimento de amor pela Álgebra e seu ensino, permitindo-lhe transmitir esse conhecimento com uma razão de ser.

O que diz essa US:

- *Contato com a realidade;
- *Importância da Álgebra no tratamento de fenômenos mundanos;
- *Amor pela Álgebra e seu ensino;
- *Sentido da Álgebra.

US6.P3E [...] entonces, **les hago ver que es importante** no solo aprenderse una **fórmula**, sino también tratar de **llegar a ellas**, y **construirlas** a través de las cosas que les **impactan** a ellos, de las cosas que **ven del mundo**.

Tradução: Então, **eu faço com que eles vejam** que é importante não só aprender uma fórmula, mas também tentar alcançá-los, e construí-los através das coisas que os impactam, das coisas que eles veem no mundo.

Excerto Hermenêutico: Na busca por elucidar o dito pelo depoente neste excerto, notamos que, ao dizer “eu faço com que eles vejam”, inicialmente, aponta para significação da palavra *faço*, que é a forma conjugada do verbo fazer na 1.^a pessoa do singular do presente do indicativo. Isso nos sugere que o professor realiza ou produz algo a partir de uma certa ação; contudo, permanece a questão: o que exatamente ele realiza? Atividades para que seus estudantes vejam. Torna-se preciso examinar com mais detalhe o que o professor quer dizer com isso. Sendo assim, Husserl (2006) nos permite ir dilucidando esse assunto, pois ele distingue entre o ‘ver’ imediato, ver sensível, de modo que, “*o ver em geral, como consciência doadora originária, não importa qual seja a sua espécie*, é a fonte última de legitimidade de todas as afirmações racionais. [...] Se vemos um objeto em plena clareza, se efetuamos a explicação e a apreensão conceitual fundados puramente na visão e no âmbito do que se apreende vendo efetivamente, então vemos (numa nova maneira de “ver”) como é a índole do objeto, e o enunciado que o exprime fielmente ganha sua legitimidade. Ao perguntar o porquê desta, seria contrassenso não conferir valor algum ao ‘eu o vejo’ - como mais uma vez vemos com clareza” (p.62). Assim, o que o professor, quanto ao ensino da Álgebra, pretende que seus estudantes possam experienciar uma “nova forma de ver” as fórmulas, indo além da mera memorização delas. Porém, o professor, conforme seu depoimento, insta a seus estudantes para que procurem reconstruir os procedimentos que permitem chegar às fórmulas, o que implica não somente analisar o processo, mas também compreender na linha de raciocínio as ideias envolvidas e suas articulações. Ainda mais, ele diz buscar que os estudantes possam construir expressões matemáticas das coisas que os impactam,

do que eles vêm do mundo circundante. Mundo “*que nos circunda, que está para todos aí, e do qual, no entanto, nós mesmos fazemos parte*” (Husserl, 2006, p.77, grifos do autor).

USg.6P3E: Por meio de suas ações, o professor busca que seus estudantes consigam uma nova maneira de “ver” as fórmulas, não ficando na mera memorização delas. Dessa maneira, motiva-os a reconstruir a linha de raciocínio que permite chegar a elas, mas, também, que os estudantes possam elaborar fórmulas a partir das coisas que lhes chamam a atenção no mundo circundante.

O que diz essa US:

* modos de trabalhar com as fórmulas.

US7.P3E Entonces yo digo que a través de la práctica ellos pueden encontrar esa modelación, de que es una suma, de que es una multiplicación y todo eso [...]. O sea que el niño intuitivamente aprende muchas cosas que a veces nosotros no explotamos. ¿Sí? Y [...], creo que es la manera de enseñarles uno cómo llegar al Álgebra y al entendimiento del Álgebra, para qué nos sirve el Álgebra ¿Sí?, pero creo que a través de [...] cosas palpables, de cosas que uno puede demostrarle que ¡sí!, ¡que esto es lo que funciona! Eh [...] que el chico tenga contacto con su realidad, sacarlos, que miren, que toquen, que perciban, que se arriesguen a decir ¡oiga!, si hago esto, de pronto pasa esto.

Tradução: Então eu digo que através da prática eles conseguem encontrar essa modelagem, o que é uma soma, o que é uma multiplicação e tudo isso [...]. Ou seja, a criança aprende intuitivamente muitas coisas que às vezes não exploramos. Certo? Eh [...], eu acho que é a forma de ensiná-los a chegar na Álgebra e no entendimento da Álgebra, para que serve a Álgebra, certo? mas acho que através de [...] coisas palpáveis, de coisas que a gente pode demonstrar-lhe que sim!, que isso é o que funciona! Eh [...] que o menino tenha contato com a realidade dele, tirar eles da sala, deixe eles olharem, deixe eles tocarem, deixe eles perceberem, deixe eles correrem o risco de falar, ei!, se eu fizer isso, de repente acontece isso.

Enxerto Hermenêutico: O professor afirma que a interação dos estudantes com atividades práticas, ou seja, com atividades que não ficam restritas à teoria, e fazendo com que eles se envolvam com situações reais, possibilita que os estudantes se encaminhem à modelação. No percurso da entrevista, o professor descreve exemplos sobre como, com atividades práticas, consegue que crianças de terceiro ano percebam o que é uma soma, em uma atividade em que as crianças colocam esferas do mesmo tamanho e peso, em uma balança. Assim, cada vez que eles colocam uma esfera adicional, os valores indicados na balança aumentam, com isso, o professor busca que as crianças evidenciem intuitivamente operações como a soma e a multiplicação. Nesse sentido, ele considera que esse tipo de prática de modelagem visa que os estudantes consigam compreender o que é uma soma, o que é uma multiplicação, ou outra operação.

Com o exposto anteriormente, o professor aponta que as crianças intuitivamente aprendem muitas coisas. Isso remete à US3.P3E, em que foi considerado desde o âmbito da fenomenologia o conceito de intuição. Essa abertura da consciência à visão do que é, possibilitada pelo ato de intuir (Bicudo, 2022), revela-se como marco inicial que tem o potencial de mobilizar aprendizagens, no entanto, como o depoente frisa, frequentemente, os professores não levam em consideração o vasto espectro de oportunidades que a intuição possibilita em termos de ensino e aprendizagem.

Para o professor, o caminho para alcançar a compreensão da Álgebra e mostrar sua utilidade deve considerar a intuição dos estudantes. Para isso, resulta importante integrar essa intuição às práticas de ensino, em um ambiente no qual o estudante seja estimulado a se engajar em atividades que envolvam coisas palpáveis, ou seja, materiais concretos e tangíveis, que lhes permitam explorar sensorialmente, e comprovar através evidências sensoriais, enriquecendo assim a experiência de aprendizado. O professor reitera a importância de que as crianças tenham *contato com a realidade*. Na US2.P3E, é realizado um enxerto hermenêutico a respeito das palavras *real* e *realidade*. Contudo, nesse excerto, o professor destaca que, conforme sua perspectiva sobre o ensino, é preciso que as crianças foquem o que se dá na realidade em que está. Para que isso ocorra, deve-se buscar ambientes de aprendizagem além da sala de aula, que permitam aos alunos observar, tocar e perceber o mundo à sua volta. Desde a perspectiva da fenomenologia husserliana, “perceber uma coisa é vê-la, tocá-la, cheirá-la ... é senti-la de diferentes maneiras e de acordo com as possibilidades dos sentidos” (Bicudo, 2002, p322), aqui, porém, a percepção “focaliza no modo como se dá numa experiência corpórea, vivenciada pelo corpo-encarnado (*Leib*) [...]”. Desse modo, por ser um ato carnal, a percepção é temporal e espacial, dá-se sempre no mundo [da] vida que se mostra como uma materialidade quase carnal, num horizonte tido como solo das experiências vivenciadas” (Bicudo, 2010, p.30).

Conforme a perspectiva do professor sobre o ensino, além de possibilitar experiências perceptivas, convém dar a oportunidade às crianças de expressar o que pensam, as suposições sobre as quais se apoiam seus raciocínios ao trabalharem matematicamente com determinados fenômenos a seu alcance. Sendo assim, “uma vez efetuado o ato de perceber, o fenômeno se mostra e o que foi percebido é enlaçado pela intencionalidade mediante [diversos] atos de consciência” (Bicudo, 2010, p.30). Esses atos possibilitam que essas experiências possam ser integradas aos conhecimentos prévios do estudante, pois, conforme Depraz (2007, p.21), “[...] as vivências [*Erlebnisse*] de um sujeito formam a textura imanente de sua consciência, pela qual é capaz de se apropriar dos objetos do mundo”.

USg7.P3E: O professor afirma que, mediante atividades práticas, os estudantes se encaminham para a modelação de situações. Ele frisa que as crianças intuitivamente aprendem muitas coisas, mas que, no entanto, frequentemente, os professores não levam em consideração a intuição dos estudantes. Para o professor, é mediante a intuição, que o aluno pode compreender a Álgebra e evidenciar sua utilidade. Para isso, convém realizar atividades tanto na sala de aula, como fora dela, que propiciem ao estudante a exploração sensorial de fenômenos, a fim de que alcancem a plena evidência de seus raciocínios, e possam expressar o compreendido.

O que diz essa US:

- *Concepção de ensino da Álgebra;
- *Importância do ver intuitivo;
- *Atenção à realidade vivenciada;
- *Sentido da Álgebra.

US8.P3E [...] entonces uno les dice eso son ¡**variables!**, ¡variables!, ¡variables! y el mundo funciona así con **variables**. En última les digo, todo en el mundo es una función. [...] Entonces empiezan a comprender más bien el sentido de lo que es una función, lo que es el Álgebra, para qué me sirve el Álgebra.

Tradução: então a gente diz para eles que são variáveis! variáveis! variáveis! e o mundo funciona assim com **variáveis**. Finalmente, eu lhes digo, tudo no mundo é uma **função**. [...] Ai eles começam a compreender mais o **sentido** do que é função, **o que é Álgebra, para que serve a Álgebra**.

Excerto Hermenêutico: Para o professor, uma das ideias fundamentais na Álgebra é a ideia de variável. Ele manifesta ser muito enfático com seus alunos sobre a importância das variáveis, chegando até mesmo a dizer para eles que o mundo funciona com variáveis. Essa afirmação, conforme entendemos, solicita uma análise hermenêutica para que se compreenda essa variável. Ao explorar a ideia de variável, encontramos na obra de Whitehead e Russell, sob o título *Principia Mathematica*, alguns elementos que nos ajudam a elucidar essa ideia. Nessa obra, os autores assumem a ideia de variável de um modo mais geral de como é tratada na Matemática convencionalmente. Na “Matemática convencional, uma variável geralmente representa um número ou quantidade indeterminada. Na lógica matemática, qualquer símbolo cujo significado não seja determinado é chamado de *variável*”¹⁸² (Whitehead e Russell, 1981, p.57, tradução nossa e grifos do autor). As diversas atribuições de *significado* que se pode dar a uma variável são chamadas de “valores da variável”. Esses valores podem ser qualquer conjunto de entidades, proposições, funções, classes ou relações. Agora bem, ao dizer que o “mundo funciona com variáveis” pode significar que muitos aspectos da realidade podem ser representados e analisados através de variáveis, as quais permitem que se possam criar modelos, fazer previsões e entender melhor o comportamento de determinados fenômenos. No contexto das funções, as variáveis são componentes fundamentais que assumem diferentes valores.

Pode-se dizer que “uma função é uma relação entre variáveis tal que, dadas, por exemplo, duas variáveis, para cada valor atribuído a uma delas determina-se um ou mais valores para a outra” (Mora, 2001, p.11540). A variável independente é aquela escolhida livremente, e a variável dependente é aquela cujo valor depende da variável independente. Essa relação é crucial para

¹⁸² En la Matemática ordinaria, una variable representa generalmente a un número o cantidad indeterminados. En Lógica matemática, se llama variable a cualquier símbolo cuyo significado no esté determinado

entender como uma variável pode influenciar a outra, permitindo a exploração de diversos fenômenos naturais e científicos por meio de modelos matemáticos. Sendo assim, ao expressar que “tudo no mundo é uma função”, entendemos que o professor sugere que muitos aspectos da realidade podem ser compreendidos e descritos por variáveis e funções matemáticas, destacando a utilidade da Matemática para descrever e compreender o mundo que nos rodeia.

A fenomenologia, conforme elucidado por Bicudo (2002), busca compreender o “sentido” que o mundo faz para o indivíduo, portanto, compreendemos que essa abordagem se revela oportuna para clarificar o termo “sentido”, conforme é expresso pelo professor. Husserl afirma que, para o ser humano, é crucial compreender o “sentido” das coisas, ainda que nem todas sejam compreensíveis de modo imediato (Ales-Bello, 2006). A capacidade de compreender o sentido das coisas é inerente ao ser humano, pois tem a capacidade de intuir, em outras palavras, “colocar em perspectiva a essência [*eidós*], o sentido da coisa” (Ales-Bello, 2006, p.23), dado, e modo imediato, na intuição. Sendo assim, conforme o dito pelo professor, a compreensão dos fenômenos que se mostram no mundo, por meio da construção de modelos matemáticos, torna possível dizer delas, podendo ser pela linguagem matemática.

USg8.P3E: O professor diz que enfatiza a seus estudantes a importância das noções de variável e de função. Para ele, essas são ideias fundamentais para a compreensão do sentido da Álgebra e sua aplicabilidade.

O que diz essa US:

- * Importância das noções de variável e de função na compreensão da Álgebra;
- * Caráter de utilidade da Álgebra;
- * Sentido da Álgebra.

US9.P3E Y [...] creo que nos debemos preocupar en eso, o sea en, en **cualificarnos**, [...] en ciertas cosas que pueden ser **transmitidos a través del Álgebra**, para que el chico diga ¡oiga!, esto **sirve** para esto, o yo **lo puedo hacer** o **lo puedo modelar**

Tradução: E [...] acho que a gente deveria se preocupar com isso, ou seja, em se qualificar, [...] com certas coisas que podem ser transmitidas através da Álgebra, para a criança dizer, ei!, isso serve para isso, ou eu posso fazer isso ou posso modelá-lo

Enxerto Hermenêutico: Nesse fragmento da entrevista, o depoente manifesta a necessidade de se qualificar em “coisas que podem ser transmitidas” mediante a Álgebra. Ao analisar suas palavras, compreendemos que ele está enfatizando a relevância de se qualificar na utilização da Álgebra, tomando-a de modo apropriado, para modelar diversas situações ou fenômenos percebidos ou focados. Isso nos faz pensar, de onde vem essa necessidade? Tomando como ponto de referência, o dito no percurso do depoimento, podemos pensar que essa necessidade é produto das experiências de ensino, reflete ele, em que se percebe importância de serem propostas

atividades de ensino que sejam consonantes aos interesses dos estudantes, permitindo-lhes experienciar a versatilidade e a aplicabilidade da Álgebra no mundo em que vivem, fazendo com que se engajem na atividade de modelagem.

USg9.P3E: O professor manifesta sua preocupação em se qualificar na utilização da Álgebra para modelar diversas situações, que permitam demonstrar a seus estudantes a versatilidade e a aplicabilidade da Álgebra.

O que diz essa US:

* Preocupação por se qualificar em modos de aplicar a Álgebra, visando o ensino.

5.2.4 Professor P4E

US1.P4E Bueno, a nosotros el docente nos explicaba en el tablero, y allá en el colegio X, eh [...] era la modalidad de guías de trabajo, ellos nos suministraban guías de trabajo

Tradução: Bom, a professora explicava para a gente no quadro, e lá na escola X, eh [...] era a modalidade de guias de trabalho, eles nos forneceram guias de trabalho.

Enxerto Hermenêutico: A professora P4E narra sobre sua experiência ao aprender Álgebra na escola. Ela diz que o professor que orientava essa disciplina realizava a explicação dos temas no quadro e que nessa escola não usavam livros de texto guia. Os professores foram os responsáveis pela elaboração e pela administração do material didático, que consistia em guias de trabalho utilizadas pelos alunos, tanto para as atividades desenvolvidas em sala de aula quanto para as tarefas executadas a serem realizadas em casa. No contexto da Colômbia, em geral, tanto nas escolas públicas quanto particulares, os livros de texto escolar são adquiridos pelos pais dos estudantes. As diferentes empresas editoriais no início de ano oferecem seus livros às escolas que definem os textos a serem trabalhados. Um reduzido número de escolas dispõe de bibliotecas para os estudantes fazerem consultas.

US1.P4E: A professora relata o modo como eram lecionadas as aulas de Álgebra quando ela era aluna na escola. A professora diz que o método do professor que orientou a disciplina de Álgebra consistia em fazer a explicação dos temas no quadro e o trabalho mediante guias realizado tanto na aula de classes como para as tarefas extraclasse.

O que diz essa US:

* Experiências acerca do método de ensino da Álgebra.

US2.P4E

Bueno, ya en la universidad, ya cambi3, porque ya era m3s avanzado [ruido en la sala de clase]. Que recuerde s3lo en el primer semestre, que era el repaso de la matem3tica, era como una matem3tica b3sica. [...] El docente explicaba en el tablero y nos tocaba consultar los textos

Tradu33o: Bom, na faculdade mudou, porque era mais avan3ado [ru3do na sala de aula]. Eu lembro s3 do primeiro semestre, que era a revis3o de matem3tica, era tipo matem3tica b3sica. [...] O professor explicava no quadro e n3s precis3vamos consultar os textos.

Enxerto Hermen3utico: A professora manifesta que, em sua experi3ncia na universidade, o modo de abordar a 3lgebra mudou, pois se tornou mais avan3ado. Contudo, ela lembra que somente durante o primeiro semestre foi realizada uma revis3o da Matem3tica b3sica. Na Col3mbia, alguns programas de gradua33o, especialmente aqueles que incluem Matem3tica em seus curr3culos, como as licenciaturas em Matem3tica, frequentemente oferecem estabelecem uma disciplina chamada de Fundamentos de Matem3tica ou Pr3-c3lculo, durante o primeiro semestre acad3mico, com objetivo de rever os temas trabalhados na escola, sobretudo em temas como: opera33o com n3meros reais, fatora33o, solu33o de equa33es e inequa33es, generalidades de trigonometria, e o trabalho com fun33es. A esse respeito, a professora manifesta que a metodologia empregada pelo professor de essa disciplina, de Pr3-c3lculo, consistia em fazer a explica33o dos temas no quadro, mas que eles precisavam recorrer 3 consulta de livros por serem temas elementares trabalhados na escola.

Usg2.P4E: Conforme indicado pela professora, a abordagem da 3lgebra nos estudos universit3rios tornou-se mais avan3ada. Sem embargo, ela lembra que somente durante o primeiro semestre do curso de Licenciatura em Matem3tica foi realizada uma revis3o da Matem3tica b3sica, envolvendo alguns t3picos de 3lgebra elementar. A professora manifesta que a metodologia empregada pelo professor que fazia dita revis3o consistia na explica33o no quadro e atividades de consulta em textos.

O que diz essa US:

*Semelhan3as e diferen3as nas pr3ticas de ensino na Escola e na Universidade.

US3.P4E

Bueno, [...] el 3lgebra abarca [...] es un campo muy amplio. 3s3? Y nos faltar3a como enfocar m3s a la resoluci3n de problemas. Darle ese enfoque m3s probl3mico. Manejar m3s la situaci3n probl3mica y que lo formulen ellos [los estudiantes]. Mmm [...]. Y lo hacemos con una serie de eh [...] como aplicando el m3todo de Polya, que es a trav3s de pasos.

Tradu33o: Bem, [...] a 3lgebra abrange [...] 3 um campo muito amplo. Certo? E faltaria como focar mais na resoluci3o de problemas. Dar uma abordagem mais problem3tica. Trabalhar mais

com a situação problemática e deixa-os [os estudantes] formulá-la. Hum [...]. E fazemos isso com uma série de [...] como aplicando o método da Polya, que é por etapas.

Enxerto Hermenêutico: Ao indicar que a Álgebra é um campo muito amplo, entendemos que a professora busca indicar o desafio que implica estabelecer os limites dessa disciplina dentro da Matemática. Como foi manifestado no enxerto hermenêutico da US11.P2E, a evolução da Álgebra não seguiu um caminho linear, como aponta Bortolete (2024). A inserção da Álgebra como disciplina acadêmica contribuiu para a diluição das fronteiras tradicionais na Matemática, impulsionando o processo de algebrização. Este movimento foi significativamente influenciado pela obra de Descartes, o que, segundo Massa (2001), estimulou uma nova maneira de compreender e aplicar conceitos matemáticos no contexto da Álgebra. Nas considerações iniciais da pesquisa realizada por Bortolete (2024), ele aborda a questão: o que é Álgebra? Ele argumenta que, embora os limites entre a Álgebra e outras regiões da Matemática não sejam claramente definidas, existem interrelações significativas entre elas. Ademais, reconhece a presença de outras regiões da Matemática que, mesmo não sendo explicitamente chamadas de Álgebra, estão intrinsecamente ligadas a ela, dado que também operam com conceitos algébricos.

Embora elucidar a concepção de Álgebra explicitada pela professora possa parecer complexa, ela enfatiza a importância de centrar a disciplina na resolução de problemas. Ela sugere uma abordagem mais prática, incentivando o uso frequente de situações-problema que desafiem os alunos a aplicar conceitos algébricos. Além disso, propõe que os próprios estudantes formulem problemas, isso não apenas possibilita a compreensão dos conceitos algébricos, mas também pode auxiliar os alunos a desenvolver outras habilidades, tais como as analíticas e de pensamento crítico. Para isso, a professora relata que desenvolve as atividades em sala de aula apoiada na heurística proposta pelo matemático George Polya¹⁸³. Esse método visa a resolução de problemas matemáticos, por meio de um processo baseado numa sequência de passos ou etapas, que guiam ao estudante¹⁸⁴ na inspeção e avaliação criteriosa de seus próprios raciocínios ao enfrentar esse tipo de problemas.

No livro “A arte de resolver problemas”¹⁸⁵, Polya (1995) propõe as seguintes fases: “Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão interrelacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* o nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a” (p.3-4, grifos do autor).

Algumas compreensões ao respeito do modo da abordagem conforme expresso pela professora P4E, em que se relaciona a Álgebra com a resolução de problemas, são abordadas por Fiorentini,

¹⁸³ George Pólya (1887-1985) foi um matemático húngaro e professor de Matemática de 1914 a 1940 no ETH Zürich na Suíça, e de 1940 a 1953 na Stanford University.

¹⁸⁴ Quando Polya (1995) menciona “estudante”, refere-se a qualquer indivíduo engajado no estudo da Matemática, seja um aluno da Educação Média ou Superior. Similarmente, “professor” não se limita a educadores do ensino secundário ou universitário, mas inclui qualquer pessoa dedicada às metodologias de ensino matemático.

¹⁸⁵ O título original do livro é “How to solve it”.

Miorim e Miguel (1993). Esses autores propõem uma caracterização das concepções predominantes em Educação Algébrica que se manifestaram ao longo da história da Educação Matemática elementar. Uma primeira concepção, praticamente hegemônica em vários países durante o período que abarca tudo o século XIX até primeira metade do XX, e que ele denomina como *linguístico-pragmática*, vincula o papel da Álgebra como instrumento de resolução de problemas, sob a crença em que a aquisição de técnicas requeridas pelo “transformismo algébrico”¹⁸⁶ é necessária e suficiente para resolver “problemas”¹⁸⁷, em que dito “transformismo” atua como pré-requisito para uma “Álgebra aplicada” a esses “problemas”. Uma segunda concepção provém em decorrência do Movimento de Matemática Moderna, que o autor denomina como *fundamentalista-estrutural*, sustentada na crença que ao introduzir o estudante no uso das propriedades estruturais das operações, para que pudessem justificar logicamente cada passo no manifesto no “transformismo algébrico”, seria suficiente para que o estudante conseguisse identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos em que estivessem subjacentes. Uma consequência dessa segunda concepção, conforme indicam os citados autores, consistiria na necessidade de reorganização dos tópicos que envolvem o ensino da Álgebra, de modo que, o aluno precisaria previamente dominar conceitos ou “tópicos fundamentadores” provenientes da teoria de conjuntos. Finalmente, uma terceira concepção retoma o papel pedagógico da Álgebra, conferindo-lhe um caráter instrumental orientado à resolução de problemas (presente na primeira concepção) e, por sua vez, mantendo o caráter fundamentalista (presente na segunda concepção), no sentido de permitir justificar os passos presentes no “transformismo algébrico”. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.85) apontam que essas três concepções “tomam como ponto de partida a existência de uma Álgebra simbólica já constituída”, ainda mais, esses autores apontam que nessas concepções “o ensino-aprendizagem da Álgebra reduz-se ao ‘transformismo algébrico’” (p.85). Este último aspecto descrito por Fiorentini *et al.* (1993) se manifesta revelador, visto que permite elucidar um indício, tanto nas concepções descritas pelos autores, como na exposição manifestada pela professora P4E, em que, no ensino, a linguagem algébrica é tomada como sendo assim, como já dada. Na fenomenologia, conforme Sokolowski (2012, p.103), denomina-se de sua *constituição* ao estabelecimento de objetos categorias, ou seja, “[...] ‘constituir’ um objeto categorial significa trazê-lo à luz, enunciá-lo, trazê-lo para o primeiro plano, realizar a sua verdade. Podemos trazer uma coisa à luz somente se a coisa oferece a si mesma em certa luz”. Ainda mais, “[...] ‘Constituir’ um estado de coisas é exercer nossa compreensão e deixar uma coisa manifestar-se a si mesma para nós” (Sokolowski, 2012, p.104). Em suma, conforme o anteriormente argumentado, e levando em conta o depoimento da professora P4E, o indício percebido mostra

¹⁸⁶ O autor utiliza essa expressão para referir-se ao processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o uso de regras e propriedades válidas ao tratarem com a Álgebra.

¹⁸⁷ Ao destacar entre aspas essa palavra, os autores distinguem dos problemas, aqueles considerados como *artificiais*, no sentido de que não era a sua natureza e relevância que determinavam os conteúdos algébricos a serem aprendidos, mas a maneira de criar um problema cuja solução exigisse o uso de determinados tópicos considerados indispensáveis a serem ensinados.

a necessidade de olhar para o modo como a linguagem algébrica se constitui e, nesse movimento, os sentidos e significados que essa linguagem revela para quem a aprende.

Usg3.P4E: Ao referir-se à Álgebra, a professora manifesta que este é um campo muito amplo na Matemática. Sobre a concepção da Álgebra, a professora enfatiza a importância de centrar a disciplina na resolução de problemas. Ela sugere que ao focar nessa abordagem seja incentivando o uso de situações-problema e promover que os próprios estudantes formulem problemas. A professora relata que ao trabalhar com essa abordagem em suas aulas, ela aplica o método (heurística) para resolução de problemas de Polya.

O que diz essa US:

- *Semelhanças e diferenças nas práticas de ensino na escola e na universidade;
- *Concepção de Álgebra;
- *Álgebra aplicada na resolução de problemas.

US4.P4E Yo lo enfoco a la **resolución de problemas**, pero afortunada o desafortunadamente, nos toca no detenernos demasiado, sino por lo que ya nos dan el programa y ya tenemos que ir en tal tema de primer periodo, vamos en tal cosa, en segundo periodo vamos en tal cosa.

Tradução: Eu foco na resolução de problemas, mas felizmente ou infelizmente a gente tem que não parar muito, mas pelo que eles já nos dão o programa e já temos que abordar esse assunto no primeiro período, a gente vai nessa coisa, no segundo período a gente entra numa coisa dessas.

Enxerto Hermenêutico: Ao enfatizar a abordagem da resolução de problemas, a professora P4E busca dar a entender que o desenvolvimento das atividades nessa abordagem demanda um tempo mais extenso do que o usualmente disponível nas sessões de ensino convencionais. A esse respeito, a professora manifesta que não podem dedicar muito tempo ao trabalho de um tópico específico, haja vista que os professores recebem os programas curriculares estabelecidos pela escola, cujos tópicos tratados nas disciplinas são distribuídos levando em conta os períodos acadêmicos. Nesse fragmento da entrevista, percebemos uma ligação entre a fala da professora P4E a respeito dos desafios manifestados na US13.P1E, em que o depoente discorre sobre a dificuldade que enfrenta ao dedicar tempo adicional para o aprofundamento de tópicos específicos, a implementação de atividades de ensino mais distintas às convencionalmente realizadas na sala de aula ou abordar lacunas de conteúdos anteriores.

Usg4.P4E: Ao se referir à abordagem de resolução de problemas, a professora aponta para o desafio que implica desenvolver esse tipo de atividades nessa abordagem, pois o programa curricular define a sequência dos tópicos a serem trabalhados em cada período do ano escolar.

O que diz essa US:

- * Dilema do professor: o modo de gerenciar o tempo da aprendizagem do aluno e o tempo escolar;
- * Sequência de ensino.

US5.P4E

Bueno, yo diría que un aspecto fundamental son los conocimientos previos que debe tener el estudiante para desarrollar eh [...] determinado problema o determinada situación problemática. ¿Sí? Por ejemplo, el manejo de operaciones básicas, que la propiedad distributiva, el manejo de los fraccionarios con el Álgebra. ¿Cierto? la factorización, sí, esos serían.

Tradução: Bom, eu diria que um aspecto fundamental são os conhecimentos prévios que o aluno deve ter para desenvolver determinado problema ou determinada situação problemática. Sim? Por exemplo, lidar com operações básicas, propriedade distributiva, lidar com frações com Álgebra. Certo? fatoração, sim, esses seriam.

Excerto Hermenêutico: A professora considera fundamental que os estudantes desenvolvam determinados conhecimentos prévios, visando capacitá-los para a resolução de problemas. Ela enfatiza que o domínio das operações Aritméticas básicas — adição, subtração, multiplicação e divisão — e suas respectivas propriedades, constituem conhecimentos indispensáveis para abordar o trabalho de resolução de problemas. Além disso, sublinha a relevância do trabalho com números racionais, que conforme foi descrito na US9.P1E, contribui como um alicerce que permite ao estudante realizar operações entre expressões algébricas que envolvem frações. A professora também considera que um tópico fundamental que os estudantes precisam como pré-requisito para o trabalho de resolução de problemas é a fatoração. A esse respeito, na US7.P2E, e particularmente US8.P2E, é evidenciado um destaque à fatoração como uns dos tópicos principais na aprendizagem da Álgebra, visando sua aplicabilidade.

Levando em conta as considerações levantadas na US3.P4E, poderíamos pensar a fatoração como parte desse “transformismo Algébrico”, ao qual se refere Fiorentini *et al.* (1993). Nesse sentido, um modo de perceber o dito pela professora se aproxima à concepção denominada por Fiorentini *et al.* (1993) como *lingüístico-pragmática*, pois a Álgebra é assumida como sendo um instrumento que possibilita ao estudante resolver determinados problemas, em que o domínio nas técnicas de fatoração, aliás, o “transformismo algébrico”, é pré-requisito para sua aplicação.

Usg5.P4E: Alguns conhecimentos prévios dos estudantes são considerados pela professora como pré-requisitos fundamentais para a abordagem de ensino que incorpora situações problema, entre estes: as operações aritméticas básicas e suas respectivas propriedades, assim como o domínio de operações entre expressões algébricas que envolvem frações e a fatoração.

O que diz essa US:

- *Pré-requisitos para aplicar a Álgebra;

*Importância da fatoração.

[US6.P4E] A mí me gustó siempre lo que yo les estoy enseñando a mis estudiantes. Por ejemplo, primero para ecuaciones lineales, les explico el lenguaje algebraico y el lenguaje verbal, que me parece que es fundamental

Tradução: Sempre gostei do que ensino aos meus alunos. Por exemplo, primeiro para equações lineares, explicou a linguagem algébrica e a linguagem verbal, que considero fundamental.

Enxerto Hermenêutico: Ao questionar sobre sua concepção da Álgebra e seu ensino, a professora manifesta que sempre gostou dessa disciplina, em especial os tópicos que envolvem o trabalho com equações lineares. Ela descreve o modo como orienta o ensino desses tópicos, e enfatiza que é fundamental explicar para seus estudantes tanto a linguagem verbal como a linguagem algébrica. A esse respeito, na US7.P1E também se aborda o assunto dessas duas linguagens.

Na procura por compreender o dito pela professora P4E, neste fragmento, recorremos à Fiorentini *et al.* (1993), que propõem uma possível leitura sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra em função das fases evolutivas da linguagem algébrica. A primeira fase à que aludem esses autores é denominada como *retórica*, caracterizada pela falta de símbolos ou abreviações, a qual acudia à linguagem comum para expressar o pensamento algébrico, isto é, os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações. A seguinte fase chama-se *sincopada*, que pode ser entendida como “o passo intermediário entre a resolução retórica, com língua ordinária, dos problemas e a utilização de símbolos precisos e de aceitação universal” (Fraile, 1998, p. 12). Esse passo, conforme Fiorentini *et al.*, não foi abrupto, pelo contrário, foi um processo evolutivo que se desenrolou ao longo da história, iniciando com Diofanto¹⁸⁸ de Alexandria no século III; prosseguiu com contribuições significativas dos matemáticos hindus, notavelmente Brahmagupta¹⁸⁹ no século XII; posteriormente, os matemáticos árabes, entre os quais se destaca al-Khwarizmi, desempenharam um papel crucial na expansão do campo algébrico com seu tratado “*Hisāb al-ʿabr wa'l muqābala*”, conhecido simplesmente como *al-gabr*, que viria a ser a base do que hoje conhecemos como Álgebra; também, os algebristas italianos do século XVI, entre eles Cardano¹⁹⁰. A última fase, conhecida como *simbólica*, acontece quando as ideias algébricas passam a ser expressas, em geral, mediante símbolos, com escasso ou nulo apoio de palavras. Como foi descrito no enxerto hermenêutico da US11.P2E, é principalmente, com Viète e Descartes que se estimula a fase simbólica, e em geral o processo de algebrização na Matemática.

¹⁸⁸ Diofanto de Alexandria foi um matemático grego que viveu no século III ou IV, considerado “o pai da Álgebra”.

¹⁸⁹ Brahmagupta (598-668), foi um matemático e astrônomo indiano que ocupa lugar de destaque na história da civilização oriental.

¹⁹⁰ Gerolamo Cardano, ou Girolamo Cardano (1501-1576), foi um médico, biólogo, físico, químico, astrólogo, astrônomo, filósofo, escritor, jogador e matemático italiano da Renascença.

Usg6.P4E: A professora manifesta ter gostado do trabalho com equações lineares e descreve que, ao abordar o ensino desse tópico, considera fundamental explicar para os estudantes os modos de expressar mediante a linguagem comum e mediante a linguagem algébrica situações que envolvem a formulação de equações.

O que diz essa US:

*Transição entre a linguagem comum e a algébrica.

5.2.5 Professor P5E

US1.P5E Entonces a uno [el Álgebra] lo **sacaba de contexto**, pero entonces el Álgebra era una materia muy **ambigua** para nosotros, porque **empezaron a trabajar con letras y las letras no tenían, digamos, un valor asegurado**. Entonces uno no sabía qué era **una incógnita**, no sabía qué era **una variable**, cómo era el comportamiento de **las funciones** como tales.

Tradução: Então para a gente [a Álgebra] o **tirava de contexto**, mas, então aí a Álgebra foi uma matéria muito **ambígua** para nós, porque começaram a **trabalhar com letras** e as letras não tinham, digamos assim, um valor garantido. Portanto, não se sabia o que era uma incógnita, não se sabia o que era uma variável, como era o comportamento das funções como tais.

Enxerto Hermenêutico: No relato do professor P5E, ao falar sobre o modo de ser introduzido no estudo da Álgebra na escola, ele diz que essa disciplina o “tirava de contexto”. Com essa expressão, ele busca manifestar o modo abrupto em que passou de trabalhar com objetos matemáticos tais como os da Aritmética ou da Geometria, a operar com letras. Conforme manifesta o depoente, tanto para ele, como para seus companheiros de turma na escola, a Álgebra era uma disciplina “ambígua”, ou seja, era uma disciplina que despertava neles dúvidas e incertezas e que se apresentava como algo vago, obscuro. O professor manifesta que, naquela época, ele atribuía esse caráter de ambiguidade ao fato de que na Álgebra as letras não possuíam um valor garantido. De acordo com o exposto pelo professor P5E, compreendemos essa mudança de “contexto” como um deslocamento do âmbito da Aritmética que, no ambiente escolar, está amplamente centrado na aplicação de operações e de procedimentos específicos, frequentemente aplicados a situações concretas, com o objetivo de possibilitar ao aluno o desenvolvimento de habilidades para obter respostas numéricas precisas, ou seja, sempre com a finalidade de chegar a um valor garantido. Por outro lado, na Álgebra, também abordada na escola, busca-se cultivar a habilidade de desenvolver procedimentos e relações, expressando-os de maneira simplificada e geral. Esse novo enfoque, em parte, parece ter influenciado a percepção de “ambiguidade” da Álgebra, evidenciando, conforme entendemos, a dificuldade em esclarecer o enlace de sentido entre a variável simbólica, a letra, e o significado matemático que ela representa, enquanto objeto matemático. Essa mudança de contexto, ou deslocamento da Aritmética para a Álgebra, pode

também ser interpretada como o “salto da Aritmética para a Álgebra”, conforme foi abordado no enxerto hermenêutico da US1.P3E.

Em sua análise sobre a linguagem algébrica, Drouhard e Teppo (2004) apontam que uma das características capitais dos escritos simbólicos da Álgebra é a sua capacidade de ser compacta e poderosa. Essa natureza simbólica, embora eficiente, também confere à linguagem algébrica um potencial considerável de “ambiguidade”. Os autores destacam que “[e]sse aspecto da linguagem torna possível mover-se fluentemente através de *camadas de abstração* e comprimir pensamentos matemáticos complexos em sequências de *símbolos eficientes*. Ao mesmo tempo, no entanto, essas características tornam os escritos simbólicos muito opacos para o aluno. Existem profundas *ambigüidades* no uso de símbolos que são vantajosas para o especialista, mas difíceis para o novato”¹⁹¹ (Drouhard e Teppo, 2004, p.240, grifos e tradução nossos). Essa “ambiguidade”, segundo os citados autores, surge de diferentes fontes, sendo uma das mais significativas a utilização de um conjunto mínimo de símbolos que pode ser interpretado de maneiras diferentes. Esses símbolos podem ser entendidos “como representações de procedimentos ou podem ser tomadas estruturalmente para representar objetos”¹⁹² (Drouhard e Teppo, 2004, p.241, tradução nossa). Assim, a mesma característica que confere à Álgebra sua força expressiva, permitindo a transição entre *camadas de abstração* e a compressão de ideias complexas, também exige uma habilidade interpretativa mais refinada, o que pode ser um desafio significativo para o estudante iniciante. Para ilustrar o argumento dos autores, consideremos, por exemplo, tipos de sentenças algébricas que envolvem o uso do signo “=”. Assim, este símbolo pode ser usado para indicar equivalência de expressões ($a + b = a - (-b)$), igualdade de números ($4 + 3 = 7$), ou para definir uma função ($f(x) = 2x + 7$). A natureza da relação algébrica em cada caso é conceitualmente diferente devido à natureza dos objetos que estão ligados pelo sinal de igual.

A respeito do falado anteriormente, Freudenthal (1977, p. 192), esclarece que, os símbolos “não são objetos da Matemática [...], mas fazem parte da linguagem pela qual os objetos matemáticos são representados”. A nosso modo de ver, tratar os símbolos como sendo os objetos matemáticos em si mesmos, pode ser o cerne da concepção de “ambiguidade”, da que fala o depoente, quando iniciou o trabalho com a Álgebra na escola. De outra parte, uma das distinções, aparentemente mais evidentes, entre a Aritmética e a Álgebra é o uso de letras para representar valores na Álgebra, embora as letras também apareçam na Aritmética, elas são utilizadas de maneira bastante diferente, por exemplo, em Aritmética, a letra *m* pode ser utilizada para representar “metros”, não representa uma quantidade numérica específica, isto é, *o número* de metros, como pode acontecer na Álgebra. Booth (1995) argumenta que a confusão gerada pelo uso de letras, nesse “salto da Aritmética para a Álgebra”, pode levar os alunos a uma “falta de referencial

¹⁹¹ The symbolic writings of algebra are compact and powerful. This aspect of the language makes it possible to move fluently through layers of abstraction and compress complex mathematical thoughts into efficient symbol strings. At the same time, however, these characteristics make symbolic writings very opaque for the learner. There are deep ambiguities in symbol use that are advantageous to the expert, but difficult for the novice.

¹⁹² collections of symbols can be seen as either representations of procedures or can be taken structurally to stand for mathematical objects.

numérico” ao interpretar o significado das letras em Álgebra. Essa dificuldade, na perspectiva de Lins e Giménez (2001), parece estar enraizada na noção de que, na escola, a aprendizagem da Aritmética deve anteceder ao da Álgebra, pois a primeira é percebida como concreta, e, portanto, mais acessível, e a segunda é percebida como abstrata e, portanto, mais difícil. Isso tem levado tradicionalmente a considerar a Álgebra na escola como uma generalização da Aritmética.

Uma forma alternativa de compreender essa “mudança de contexto” da qual fala o professor P5E, é a partir da ideia de “choque cultural”, conceito introduzido por Lee (1996), que propõe a Álgebra como uma *minicultura* inserida em uma cultura mais abrangente, a da Matemática. De acordo com Lee, essa perspectiva é “útil para pensar sobre a interação da linguagem e do conhecimento no processo gradual de *aculturação* algébrica que ocorre na sala de aula, bem como a interação entre a Álgebra e outras culturas matemáticas, como a Aritmética”¹⁹³ (Lee, 1996, p.87, grifos e tradução nossos). O conceito de *minicultura*, nesse sentido, proporciona uma maneira de compreender como os alunos internalizam os conceitos algébricos, interagindo com uma tradição matemática mais ampla e assimilando diferentes formas de conhecimento matemático, em um ambiente educacional.

Além disso, o professor P5E expressa que, na época em que era aluno na escola, essa ambiguidade surgia porque ele não sabia o que era uma incógnita ou uma variável. Conforme argumenta Booth (1995), um dos aspectos mais importantes na Álgebra é a noção de variável, sem dúvida, mesmo quando as crianças conseguem interpretar as letras como expressões de números, “[...] há uma forte tendência em considerar que as letras representam valores específicos únicos, como em $x + 3 = 8$, e não números genéricos ou variáveis como em $x + y = y + x$ ou $A = b \times a$. Na Aritmética, os símbolos que representam quantidades sempre significam valores *únicos*” (Kuchemann, 1981, *apud* Booth, 1995, p. 31, grifos nossos). Sendo assim, por exemplo, o símbolo “5” sempre representa o mesmo valor. Portanto, como é indicado por Booth (1995), não é surpreendente que as crianças vejam os símbolos algébricos como representações diretas de quantidades específicas. Com relação ao que foi abordado pelo professor P5E, o modo como os símbolos são tratados na fase “pré-algébrica”, digamos assim, parece ter contribuído para as dificuldades por ele apontadas. No entanto, conforme mencionado no depoimento do professor P5E, o significado desses símbolos não fica claro, pois, às vezes, são apresentados como incógnitas e outras vezes como variáveis. Isso pode ter contribuído para dificultar a compreensão de seu uso e significado, especialmente quando são introduzidos no trabalho com funções.

Ainda mais, na perspectiva de que todas as variáveis são letras ou símbolos que representam números, entretanto, os valores atribuídos a uma variável nem sempre correspondem a números, mesmo no contexto da Álgebra trabalhada na escola, pois, por exemplo, na Geometria, as variáveis frequentemente representam pontos, como se observa no uso das letras A , B e C na sentença “se $AB = BC$, então o triângulo $\triangle ABC$ é isósceles”. Assim mesmo, na lógica, as

¹⁹³ It is also helpful in thinking about the interaction of language and knowledge in the gradual process of algebraic acculturation that takes place in the classroom, as well as the interaction between algebra and other mathematical cultures such as arithmetic.

variáveis p e q são comumente utilizadas para denotar proposições; na análise, a variável f costuma ser associada a funções; na Álgebra linear, a letra A frequentemente representa uma matriz, enquanto v é usualmente empregada para indicar um vetor. Em Álgebra abstrata, a variável $*$ pode ser utilizada para simbolizar uma operação (Usiskin, 1995). Como ilustra o último exemplo, a representação das variáveis não precisa ser necessariamente feita por letras, o que mostra a *flexibilidade* com que pode ser adotada a notação matemática, mas que cobra um sentido particular segundo o âmbito em que seja usada.

USg1.P5E: O depoente manifesta que na época como aluno na escola, afirmando que no começo a Álgebra o “tirava de contexto” do modo como vinha sendo tratada a Matemática até então. Tanto para ele como para seus companheiros de turma, a Álgebra era concebida como uma disciplina “muito ambígua”, porque nessa disciplina, começou a se trabalhar com letras, as quais, já nem sempre significam valores únicos ou garantidos. Ele diz que, naquela época, ele não sabia o que era uma incógnita, uma variável, ou como era o comportamento das funções.

O que diz essa US:

- * Percepção da Álgebra como uma disciplina “ambígua”;
- * Desconhecimento dos conceitos de incógnita, variável e função;
- * Salto da Aritmética para a Álgebra.

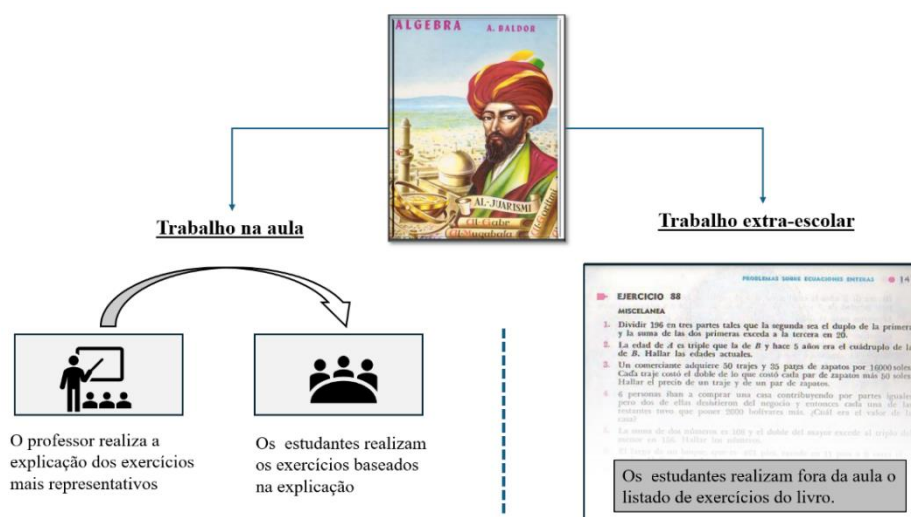
US2.P5E En mi época, el Álgebra se estudiaba con ¡la cartilla de toda la vida! que todavía se debe usar, el Álgebra de Baldor. Y entonces le decían [los profesores] a uno solucione los 50 primeros ejercicios, de hoy para mañana. La dinámica era, el profesor hacía uno o dos o tres ejercicios y después le colocaban a uno hacer toda la “miscelánea” y uno tenía que hacerlos de un día para otro.

Tradução: Na minha época, a Álgebra era estudada com a cartilha de toda a vida! que ainda continua sendo usada, a Álgebra de Baldor. E aí eles [os professores] mandavam a gente resolver os primeiros 50 exercícios, de hoje para amanhã. A dinâmica era, o professor fazia um ou dois ou três exercícios e depois mandava a gente fazer toda a “miscelânea” e você tinha que fazer de um dia para o outro.

Enxerto Hermenêutico: Ao refletir sobre a abordagem do ensino de Álgebra ao longo de sua trajetória escolar, o professor P5E observa que, na sua época, a disciplina era predominantemente orientada pelo livro didático *Álgebra de Baldor*. Vale destacar que o professor P5E é o docente com maior tempo de experiência na área de ensino entre os professores de *Educação Média* entrevistados, tendo cursado a *Educação Básica e Média* na década de 1970 e a graduação nos anos 1980. Esse contexto é relevante, uma vez que o professor enfatiza que a *Álgebra de Baldor* foi amplamente utilizada no ensino da disciplina e ainda continua a ser empregada nas salas de aula, como corroborado pelos depoimentos dos professores P1E, P2E e P6E.

O professor P5E ainda relata que, durante sua formação, o ensino de Álgebra se centrava na realização das atividades propostas no livro didático, sendo que as explicações dos docentes se baseavam nos exercícios mais típicos e, após a explicação, os alunos eram responsáveis por resolver os demais exercícios na seção do livro trabalhada. Segundo o relato do professor, nas atividades extraclasse era indicada uma quantidade considerável de exercícios, especialmente da seção do livro denominada “miscelânea”, que deveriam ser entregues de um dia para outro. Do dito pelo professor, conforme entendemos, a *Álgebra de Baldor*, além de funcionar como um livro didático, também desempenhava um papel relevante no fortalecimento da autoridade do professor, ao servir como o único recurso fundamental no processo de ensino da Álgebra.

Figura 15 - Modo de ser implementado o livro *Álgebra de Baldor* para lecionar na escola, segundo o relatado na USg2.P5E



Fonte: elaboração própria

USg2.P5E: O professor relata que, durante sua formação na escola, a Álgebra era estudada com o livro didático *Álgebra de Baldor*, texto que, segundo ele, ainda segue sendo usado. A dinâmica de trabalho como a Álgebra se baseava na explicação de alguns exercícios por parte do professor que lecionava, e logo os alunos eram responsáveis por resolver os demais exercícios na seção do livro trabalhada. O professor manifesta que, naquela época, como trabalho extraclasse, era indicada uma considerável quantidade de exercícios, a serem realizados em um curto período de tempo.

O que diz essa US:

- * Influência do livro *Álgebra de Baldor*;
- * Sequência de ensino.

US3.P5E

Y entonces **tocó aprender** los teoremas, los axiomas, las demostraciones y todo eso que conlleva ¿si? Pero pues en la universidad **no la tratan [el Álgebra]** como tal. Le dicen a uno: la solución es ésta por razones conocidas, usted verá si sigue o no sigue. Entonces le toca a uno es por su cuenta, porque ya lo elemental no lo tocan.

Tradução: E então teve que aprender os teoremas, os axiomas, as demonstrações e tudo o que isso implica, certo? Mas na universidade não tratam isso [a Álgebra] como tal. Eles dizem: esta é a solução por razões conhecidas, você verá se continua ou não. Então a gente tem que fazer por sua conta, porque já não tocam mais o elemental.

Enxerto Hermenêutico: O professor compartilha sua experiência acadêmica durante o curso de licenciatura em Matemática, relatando particularidades da formação nesse nível de ensino. Ele destaca que, ao longo da graduação, foi necessário aprender teoremas, axiomas e demonstrações nas diversas disciplinas matemáticas que compõem o curso. Contudo, o professor menciona que, nesse contexto, a Álgebra não é abordada. Segundo ele, na graduação, a disciplina de Álgebra não recebe a devida ênfase. Essa observação sugere que, para ele, a Álgebra se restringe aos tópicos abordados na *Educação Básica e Média*, como resolução de equações e fatoração, que, de acordo com sua perspectiva, limitam-se a uma abordagem mais superficial ou elementar da disciplina. Essa afirmação parece indicar uma desarticulação entre a Álgebra ensinada na *Educação Básica e Média* e aquela trabalhada no nível universitário. A Álgebra se torna um conteúdo que é visto como parte de uma base fundamental, muitas vezes diluída ou subentendida dentro de outros tópicos mais avançados. Ou seja, a Álgebra deixa de ser uma disciplina autônoma e é absorvida por outras áreas do conhecimento matemático, onde sua abordagem se torna mais abstrata e generalizada, por exemplo, na Álgebra Linear ou na Teoria de Grupos. Sendo assim, como é afirmado por Usiskin (1995, p.9), “a Álgebra ensinada na escola média tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores de matemática”. Essa perspectiva, conforme compreendemos, aponta para um hiato na transição entre os saberes constituídos na *Educação Básica e Média* e os conceitos tratados na *Educação Superior*.

USg3.P5E: Na experiência durante sua formação na graduação, o professor manifesta que foi necessário aprender teoremas, axiomas e demonstrações nas diversas disciplinas do curso de licenciatura em Matemática. Entretanto, nesse âmbito de ensino, a Álgebra, segundo ele a compreende, não é tratada, pois nesses cursos a Álgebra é considerada como uma base fundamental que é subentendida, assim os alunos desses cursos precisam se nivelar nesses tópicos por conta própria.

O que diz essa US:

- * Hiato na transição entre Álgebra ensinada na *Educação Básica e Média* e aquela trabalhada no nível universitário;
- * Ausência de atividades que contribuam com essa transição.

US4.P5E En ese campo [da Algebra], si, por ejemplo, se acuerda cuando le decían a uno [...] si un dulce vale 5 pesos, ¿cuánto valen siete dulces? **Que era la regla de tres simple.** Y entonces ahora pues se representa por medio de letras para plantear una ecuación y en base a

esa ecuación eh [...] se trabajan las variables y se vuelve al plano cartesiano, porque lo más importante es que la gente aprenda a trazar una gráfica, a interpretarla como tal.

Tradução: Nesse campo [da Álgebra], se, por exemplo, você lembra quando te falaram [...] se um doce vale 5 pesos, quanto valem sete doces? A qual era a regra de três simples. E então agora é representado por letras para propor uma equação e com base nessa equação eh [...] as variáveis são trabalhadas e a gente volta para o plano cartesiano, porque o mais importante é que a gente aprenda a desenhar um gráfico, a interpretá-la como tal.

Enxerto Hermenêutico: No que diz respeito à compreensão do professor acerca da Álgebra, ele delineia um percurso que se inicia com a análise de situações frequentemente tratadas no âmbito da Aritmética, as quais possuem um potencial significativo para facilitar a transição para o trabalho algébrico. Um exemplo ilustrativo dessa transição é o caso da regra de três, que desempenha um papel fundamental nesse processo. A regra de três simples constitui um procedimento matemático fundamental para a resolução de problemas que envolvem grandezas proporcionais. Ela pode ser aplicada de duas formas: direta, quando as grandezas são diretamente proporcionais, e inversa, quando a relação entre elas é inversamente proporcional. Em ambos os casos, a regra de três permite determinar o valor de uma quarta grandeza a partir de três valores conhecidos, mantendo a proporção entre as grandezas envolvidas. No contexto apresentado pelo exemplo fornecido pelo professor P5E, entendemos com Bortolote (2024) que, embora a aplicação prática de conceitos como proporcionalidade e função possa, em um primeiro momento, ser útil para a consolidação do conhecimento, é necessário um cuidado rigoroso na sua implementação. Bortolote (2024) alerta para o risco de se reproduzir o enunciado de forma automatizada, sem uma análise crítica, como o “como” e o “porquê” das relações, e uma compreensão aprofundada das propriedades das grandezas envolvidas, pode levar a equívocos significativos. Um exemplo clássico desse erro ocorre quando se confunde a proporcionalidade entre grandezas com uma simples relação de dependência. Enquanto a proporcionalidade implica uma relação específica de variação conjunta entre duas ou mais grandezas, regida por uma constante de proporcionalidade, uma relação de dependência pode envolver uma diversidade mais ampla de interações, não necessariamente lineares ou de proporção direta. Esse tipo de abordagem, ao ignorar os princípios subjacentes, compromete a construção de um conhecimento sólido e contextualizado, fundamental para a compreensão das relações matemáticas de forma mais profunda e aplicada.

Segundo o relato do professor P5E, ele descreve um percurso com o qual, frequentemente, busca-se garantir uma introdução gradual à linguagem algébrica, a qual, por sua vez, proporciona os elementos simbólicos necessários à formulação e manipulação de equações. Tal abordagem não apenas facilita a construção de conceitos algébricos fundamentais, mas também promove o desenvolvimento de uma compreensão mais aprofundada da noção de variável. Ao estabelecer essa conexão entre Aritmética e Álgebra, o professor busca articular, de maneira progressiva e contextualizada, as diferentes formas de representação matemática. Segundo compreendemos do dito no depoimento, o referido percurso visa promover uma transição da Aritmética para a

Álgebra mais fluida e consistente. Entretanto, conforme analisado no quadro interpretativo presente no enxerto hermenêutico da US1.P5E, tal abordagem pode levar à interpretação das variáveis algébricas como representações de valores numéricos fixos ou únicos. Essa leitura, ao reduzir a natureza simbólica das letras a um valor numérico pontual, pode passar a ser um obstáculo para a compreensão da flexibilidade e a abrangência da Álgebra, pois os valores atribuídos a uma variável nem sempre representam valores numéricos, como foi indicado por Usiskin (1995). Sendo assim, a dificuldade reside na possível limitação da compreensão algébrica quando se confunde a função simbólica das letras com uma interpretação restritiva de valores numéricos concretos.

De outra parte, entre as diversas formas de representação, a exploração do plano cartesiano ocupa um papel central, conforme indicado pelo professor P5E. Segundo seu depoimento, através dessa representação gráfica, torna-se possível vincular as ideias algébricas à sua representação gráfica, possibilitando uma compreensão mais profunda dos comportamento das variáveis, das relações de proporcionalidade, das transformações geométricas vinculadas às expressões algébrica e ao significado dessas nos contextos de aplicação. Assim mesmo, o professor enfatiza que, além de saber traçar um gráfico, é fundamental ser capaz de interpretar a informação que ele comunica.

USg4.P5E. Para manifestar sua compreensão da Álgebra, o professor parte de situações Aritméticas que envolvem quantidades desconhecidas, particularmente por meio da regra de três simples. Esse ponto de partida permite a introdução gradual da linguagem simbólica própria da Álgebra, facilitando a formulação e resolução de equações. Para ele, nesse processo, surge a necessidade de trabalhar com a noção de variável, o que, por sua vez, possibilita a exploração das representações no plano cartesiano. Essa abordagem estabelece uma conexão entre as expressões algébricas e suas representações gráficas, ampliando a capacidade de interpretar a informação que essas expressões transmitem.

USg4.P5E: Para manifestar sua compreensão da Álgebra, o professor parte de situações aritméticas que envolvem quantidades desconhecidas, particularmente por meio da regra de três simples. Esse ponto de partida permite a introdução gradual da linguagem simbólica própria da Álgebra, facilitando a formulação e resolução de equações. Para ele, nesse processo, surge a necessidade de trabalhar com a noção de variável, o que, por sua vez, possibilita a exploração das representações no plano cartesiano. Essa abordagem estabelece uma conexão entre as expressões algébricas e suas representações gráficas, ampliando a capacidade de interpretar a informação que essas expressões transmitem.

O que diz essa US:

*Relação entre a Álgebra e a Aritmética;

* Concepção de Álgebra.

US5.P5E

Pienso que **lo fundamental** es trabajar con **las variables**, ejemplo eh [...] demostrar porque $a \times a$ es a^2 , porque a^2 eh [...] es igual a la raíz de otra variable, [...] y la

representación de los números reales, ¡todos en la recta! porque uno dice, por ejemplo, trabajemos con el número uno, el dos, el tres y el cuatro ¡perfecto! Pero cuando uno dice $3/5$, $4/8$, $10/3$, entonces ahí viene el problema.

Tradução: Eu acho que o fundamental é trabalhar com as variáveis, por exemplo eh [...] demonstrar porque $a \times a$ é a^2 , porque a^2 eh [...] é igual à raiz de uma outra variável, [...] e a representação de números reais, todos na reta! porque a gente diz, por exemplo, vamos trabalhar com o número um, dois, três e quatro, perfeito! Mas quando se diz $3/5$, $4/8$, $10/3$, é aí que surge o problema.

Enxerto Hermenêutico: O professor P5E defende que um dos elementos centrais no ensino da Álgebra na *Educação Média* reside na compreensão profunda do significado das variáveis, das operações que envolvem essas variáveis e as propriedades. Esse ponto de vista também é destacado por outros professores, como evidenciado nas unidades US1.P5E e US8.P3E. Usiskin (1995) argumenta que o conceito de variável é multifacetado, sendo, portanto, inadequado reduzir a Álgebra a um mero estudo das variáveis. Segundo essa perspectiva, limitar o ensino da Álgebra apenas à manipulação de variáveis não responde de maneira satisfatória à questão fundamental: o que caracteriza a Álgebra no contexto da *Educação Média*? A redução da Álgebra à manipulação simbólica descontextualizada desconsidera o caráter estrutural e relacional da disciplina, o qual é fundamental para a compreensão de suas aplicações e para o avanço no aprendizado de conceitos mais avançados, como o de funções, sistemas de equações e polinômios. É nesse sentido que entendemos o interesse do professor P5E, quando se refere à necessidade de demonstrar para os alunos a validade dos raciocínios envolvidos ao trabalhar com uma linguagem algébrica.

Esse caráter multifacetado do conceito de variável, segundo entendemos, possibilita diferentes domínios de significação, compreensão e aplicação da linguagem algébrica empregada. Essa versatilidade é evidenciada, por exemplo, quando se considera a relação entre o produto de dois números e um terceiro número, o que pode ser abordado sob diferentes perspectivas, conforme delineado por Usiskin (1995). Essas diferentes abordagens podem ser entendidas da seguinte maneira: *como fórmula*, a equação $A = b \cdot h$, onde A , b , e h são variáveis que representam grandezas inter-relacionadas pode ser vista *como equação-sentença* aberta, na qual a variável x ainda não é determinada, por exemplo, na expressão do tipo $40 - 50x$, a variável x assume valores que satisfazem a equação, dependendo da interpretação do contexto; a variável também pode ser usada para representar *identidades*, como em $\sin x = \cos x \cdot \tan x$, onde a relação é verdadeira para todos os valores de x , independentemente de um valor específico para x , estabelecendo uma igualdade entre funções trigonométricas; a variável pode representar uma *propriedade* ou uma relação fundamental, como em $1 = n \cdot (1/n)$, que expressa uma identidade de multiplicação que envolve uma variável n e seu inverso, mostrando uma relação fundamental de números; finalmente, a variável pode ser entendida dentro do contexto de uma *função* matemática que expressa, por exemplo, uma proporcionalidade direta, como na equação $y =$

kx , onde k é uma constante de proporcionalidade, e a variável x determina y de maneira linear. Entretanto, entre as diversas possíveis interpretações, é apenas no último caso — exceto quando a equação descreve uma reta com inclinação k que passa pela origem — que se manifesta o caráter de “variabilidade”, o qual justifica o uso do termo “variável”. Essa variabilidade ocorre porque, nesse contexto, o valor da incógnita pode assumir diferentes valores, refletindo a mudança nas condições ou nas variáveis envolvidas na equação. Esses exemplos que ilustram como distintas perspectivas podem ser adotadas na análise da relação entre variáveis ressaltam a importância do dito pelo professor P5E — e pelo professor P3E, na US8.P3E — sobre o trabalho com as variáveis.

No entanto, Usiskin (1995, p.12) também alerta que as variáveis, por serem conceitos multifacetados e sujeitas a diversas definições, conotações e símbolos, devem ser compreendidas de modo mais amplo, pois “tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplificação que, por sua vez, distorce os objetos da Álgebra”. Ou seja, a tentativa de reduzir a complexidade de um conceito tão amplo pode comprometer tanto a precisão e como a riqueza das interpretações possíveis dentro desse contexto. Sendo assim, compreendemos que o entendimento abrangente da variável é crucial para a formação de uma visão ampla da Álgebra e de suas múltiplas funções no campo da Matemática.

Ao considerar os exemplos discutidos pelo professor P5E, ele procura esclarecer aos estudantes as propriedades numéricas expressas de maneira algébrica, o que exige uma compreensão mais profunda do conceito de “variabilidade”. No primeiro exemplo, o professor explica que, ao multiplicarmos um número por si mesmo, estamos efetivamente elevando esse número ao quadrado. Em termos algébricos, isso é expresso como $a \times a = a^2$. No segundo exemplo, ele estabelece que, se uma variável b for igual a a^2 , então a representa a raiz quadrada de b , ou seja, $a = \sqrt{b}$. Essa relação ocorre porque a operação de elevar um número ao quadrado resulta no valor b , e, de forma inversa, tirar a raiz quadrada de b devolve o valor original a .

Esse raciocínio lhe serve para justificar a ampliação do sistema numérico dos números racionais Q , com o qual os estudantes estão familiarizados, para o dos números reais R . Quando lidamos com equações que envolvem raízes quadradas, os números irracionais entram em cena, uma vez que não é possível encontrar soluções racionais exatas para certas equações. Por exemplo, a equação $q^2 = 2$ não possui solução racional¹⁹⁴, pois não há nenhum número racional q que, quando elevado ao quadrado, resulta exatamente em 2. Esse exemplo ilustra a necessidade de incorporar os números irracionais, ou seja, aqueles que não podem ser expressos como frações, no sistema numérico real R , com isto, o professor busca expandir assim a compreensão e manipulação das soluções algébricas.

Ainda mais, o professor P5E destaca a importância de uma compreensão sólida dos números reais, incluindo sua representação e o desenvolvimento de habilidades operatórias associadas com esses números, pois estes, ao incluir todos os números, tanto os racionais quanto os irracionais, formam assim uma base para maior parte dos conceitos matemáticos. Uma

¹⁹⁴ Para demonstrar isso se procede pela redução ao absurdo.

compreensão profunda dos números reais é fundamental para o avanço em tópicos mais complexos da matemática, como funções, derivadas e integrais. A representação dos números reais na reta numérica desempenha um papel fundamental na compreensão dos gráficos de funções, pois permite visualizar e interpretar as relações entre os valores de entrada e saída de uma função. Além disso, no campo da Álgebra, essa representação é de extrema relevância, pois facilita a visualização e análise das soluções de equações, tornando possível identificar propriedades e comportamentos dos números em contextos mais amplos.

USg5.P5E: O professor P5E destaca a importância de trabalhar na Álgebra a compreensão mais aprofundada das variáveis, por exemplo, ao mostrar que $a \times a = a^2$ ou que a^2 pode ser entendida como a raiz de outra variável. Além disso, ressalta a necessidade de entender a relação entre números reais e sua representação na reta numérica, enfatizando que, enquanto números inteiros como 1, 2, 3 e 4 são mais facilmente compreendidos, a dificuldade surge quando se lida com números racionais de frações como $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{8}$ ou $\frac{10}{3}$, já que não estão representados de maneira tão intuitiva quanto os números inteiros.

O que diz essa US:

- * Importância das noções de variável na compreensão da Álgebra;
- * Importância das ideias da Álgebra, para poder abrir horizontes para a compreensão do próprio “conceito” de número.

US6.P5E Y entonces a los muchachos no se les regaña hoy en día, sino se les convence, del estudio de las variables como tales y [...] y que la vida de uno es una función. Pero entonces ahora toca lidiar con otro **problema**, porque la gente no se interesa en la Educación Matemática. Entonces, el problema de hoy en día es cómo abordar esas personas para que estudien el Álgebra como tal. Entonces volverlo más asequible al estudiante, no al maestro. [...] Y que se den cuenta que el Álgebra es la base para muchas cosas y no es un mecanismo de represión hacia el estudiantado

Tradução: E assim os meninos de hoje não precisam ser repreendidos, mas sim convencidos do estudo das variáveis como tais e [...] e de que a vida da gente é uma função. Mas agora temos que lidar com **outro problema**, porque as pessoas não estão interessadas em Educação Matemática. Então, o problema hoje é como abordar essas pessoas para que estudem Álgebra como tal. Então torná-lo mais acessível ao aluno, não ao professor. [...] E que percebam que a Álgebra é a base de muitas coisas e não é um mecanismo de repressão ao corpo discente

Enxerto Hermenêutico: Na narrativa deste fragmento do depoimento, o professor busca dar conta de sua perspectiva sobre o ensino a Álgebra. Como parte de sua experiência vivenciada na aprendizagem da Álgebra, quando aluno na escola — ele diz: naquela época, fiquei com raiva por ele [o professor] ter me tratado mal —, o professor sugere que, ao invés de recorrer a métodos

tradicionais de repressão ou de autoridade para motivar os estudantes, seria mais produtivo buscar engajá-los ao estudo da Álgebra, na perspectiva de que “a vida da gente é uma função”. Ao usar essa analogia, conforme entendemos, o professor procura tornar a Álgebra mais acessível e próxima dos estudantes. Com isso, o professor se coloca como um agente dinamizador das ideias matemáticas envolvidas e um observador atento tanto aos modos como os estudantes aprendem, como também às suas particularidades. Isso requer uma tentativa de se colocar no lugar do estudante, compreendendo o que é vivido e sentido pelo estudante em sua relação com o conteúdo matemático. A empatia, nesse caso, não é apenas uma atitude de escuta, mas uma tentativa de compreender a experiência vivida do outro, contribuindo para sua percepção da Matemática.

Na fenomenologia, para Husserl, “entre os nossos diversos atos, há um que podemos chamar de *Einfühlung*¹⁹⁵, e sua peculiaridade é a de sentirmos imediatamente que estamos em contato com outro ser humano, de modo tal que podemos falar ‘nós’” (Ales-Bello, 2006, p. 62-63). Embora não tenhamos acesso direto aos pensamentos e sentimentos de outra pessoa, reconhecemos que ela também possui a capacidade de pensar e sentir, assim como nós. Dessa forma, “pela intropatia [*Einfühlung*], percebemos as vivências do outro e podemos compreender que ele as experimenta de determinada maneira, mas essas vivências nunca são nossas” (Bicudo, 2022, p. 131, inserções nossas). Husserl, na obra *Meditações Cartesianas*, argumenta que a empatia não é uma percepção direta, mas uma forma de “apresentação” (*Appräsentation*) do outro; “uma certa *mediatez da intencionalidade* deve estar aqui presente, que, promanando, certamente, do subsolo subjacente do *mundo primordial*, torne representável o *ai-com*, que não está, todavia, ele próprio aí, nem se pode tornar um *ele-próprio-ai*. Trata-se, por conseguinte, de uma espécie do *tornar-copresente*, uma espécie de *apresentação*” (Husserl, 2013, p.147). Isso significa que, embora possamos ter uma experiência do outro, essa experiência nunca é completa ou direta, mas sempre mediada pela nossa própria subjetividade. Além disso, Husserl destaca que a empatia (*Einfühlung*) é fundamental para a intersubjetividade, ou seja, a capacidade de reconhecer e interagir com outras consciências. “Através da entropatia [*Einfühlung*], entramos em um mundo intersubjetivo, cuja vivência ajuda o nosso desenvolvimento pessoal, do ponto de vista fundamentalmente espiritual, cultural” (Ales-Bello, 2006, p.66, inserções nossas). Assim, compreendemos que, através da empatia (*Einfühlung*), podemos entender que o outro tem suas próprias experiências e vivências, distintas das nossas. Nesse contexto, a empatia (*Einfühlung*), um conceito central da fenomenologia, torna-se um elemento relevante para *compreender a relação* entre o professor, os estudantes e conteúdo Matemático.

Ainda mais, o professor P5E aponta o desafio sobre como aproximar ou engajar os alunos para o estudo da Álgebra. Conforme o dito pelo professor P5E, compreendemos que no ato de empatia

¹⁹⁵ “A palavra empatia foi traduzida do alemão *Einfühlung*, cujo núcleo – *fühl* – refere-se a *sentir*. É um sentir o outro (imediato) que se encontra antes de qualquer pensar (reflexão, interpretação) sobre o outro (Ales-Bello, 2014), porém pode-se encontrar em alguns textos de Husserl traduzidos para o português a palavra entropatia, ou mesmo, intropatia (como no caso das *Meditações Cartesianas*). A opção por esses dois termos serve mais para diferenciar o significado atribuído pela fenomenologia na relação a outras teorias ou, ainda, para diferenciar do significado mais simples e, por vezes, confuso, que o termo empatia adquiriu nos últimos anos” (Fadda e Cury, 2021, p. 6-7, grifos do autor).

(*Einführung*), ele aponta uma crítica à forma como a Álgebra tem sido incorporada nas práticas de ensino. A esse respeito, reconhece que a Álgebra ao ser utilizada eventualmente como um mecanismo de controle comportamental, a disciplina acaba sendo desvinculada de sua verdadeira função formativa. Portanto, ao serem subjugados a métodos de ensino que priorizam a Álgebra como uma ferramenta de disciplina coercitiva, os alunos acabam se distanciando de uma apreensão mais significativa e crítica da Álgebra, o que compromete sua capacidade de utilizar os conceitos matemáticos de forma contextualizada e integrada ao entendimento mais amplo do mundo ao seu redor. O professor, então, enfrenta a tarefa não apenas de ensinar, mas de encontrar formas de tornar a Álgebra mais acessível e atraente para os estudantes. Isso significa reformular as abordagens pedagógicas, em vez de impor um ensino rígido, visando, ao contrário, possibilitar que o estudante se aproprie dos conceitos de forma significativa.

USg6.P5E: Valendo-se de sua experiência vivenciada na aprendizagem da Álgebra, quando aluno na escola, o professor afirma que, nos dias de hoje, a abordagem tradicional de repreender os estudantes em relação ao estudo da Matemática precisa ser revista e que em vez de adotar a Álgebra como método punitivo, é indispensável buscar convencê-los ao estudo dessa disciplina, mostrando para eles que a vida humana pode ser vista, de forma simbólica, como uma função matemática. Desse modo, o professor procura tornar a Álgebra mais acessível e próxima dos estudantes. Contudo, o professor argumenta que o grande desafio atual não está apenas em reformular o modo de ensino, mas, sobretudo, em lidar com a falta de interesse pela Educação Matemática em geral e, em particular, de encontrar formas de tornar a Álgebra mais acessível e atraente para os estudantes, deixando de lado a percepção da Álgebra como um mecanismo de repressão sobre os estudantes.

O que diz essa US:

- * a Álgebra como mecanismo de repressão;
- * Experiências acerca do método de ensino da Álgebra;
- * Interesse dos alunos;
- * Desinteresse pela atitude de ensinar e educar trazida na Educação Matemática.

5.2.6 Professor P6E

US1.P6E Ya sobre mi experiencia como estudiante en el colegio pues, bueno, sí, lo que recuerdo era, o sea me tocó un profe que, él era coger el Álgebra, el Álgebra de Baldor y hacer 100 ejercicios, o sea, coger un cuaderno con solo ejercicios del Álgebra y haga y haga y haga ejercicios.

Tradução: Agora sobre a minha experiência como aluno na escola, bom, sim, o que eu lembro é, ou seja, eu tinha um professor que, ele era pegar a Álgebra, a Álgebra de Baldor e fazendo 100 exercícios, ou seja, pegando um caderno só com exercícios de Álgebra e fazer e fazer e fazer exercícios.

Enxerto Hermenêutico: A professora P6E relata sua vivência como aluna no período em que estudava Álgebra na escola, destacando o que mais a impressionou em sua experiência de aprendizagem: a abordagem adotada pelo professor da disciplina. Ela descreve a metodologia de ensino daquele tempo como centrada principalmente na resolução de exercícios extraídos do livro didático *Álgebra de Baldor*, que era amplamente utilizado. De acordo com o que é mencionado nas US2.P1E e US2.P5E, a prática comum envolvia a execução de atividades presentes em uma seção do livro chamada “miscelânea”, que oferecia uma variada série de exercícios com níveis de dificuldade crescente.

A professora P6E faz questão de enfatizar a quantidade significativa de exercícios que eram destinados aos alunos. Essa prática demandava que os estudantes mantivessem um caderno específico, dedicado exclusivamente à resolução dessas questões. Esse enfoque, voltado para a prática constante, foi um aspecto marcante de sua trajetória de aprendizagem e contribuiu para a formação de sua compreensão da Álgebra.

USg1.P6E: A professora P6E descreve sua experiência ao aprender Álgebra durante sua época de aluna na escola. O que mais a marcou foi a maneira como as aulas eram ministradas pelo professor de Álgebra. Segundo ela, a metodologia de ensino naquela época era amplamente focada no desenvolvimento de exercícios retirados do livro didático *Álgebra de Baldor*. Ela enfatiza a quantidade de exercícios indicados aos alunos, que precisavam de um caderno dedicado exclusivamente para resolvê-los.

O que diz essa US:

- * Influência do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;
- * Crença na eficácia dos exercícios na aprendizagem.

US2.P6E yo resalto de esa Álgebra [de Baldor] la cantidad de ejercicios, porque si bien es cierto, hay muchos ejercicios, y lo que le cuento, ¡diferentes! Entonces es un libro de tradición. O sea, un libro como los que trabaja uno hoy en día, traen cinco o diez ejercicios ¿sí? y más o menos son relacionados, o sea, toca hacer lo mismo, es muy mecánico, en cambio en el Álgebra [de Baldor] hay muchos y como hay fáciles, hay también muy complejos.

Tradução: eu destaco a quantidade de exercícios de Álgebra [de Baldor], porque embora seja verdade, são muitos exercícios, e o que eu te digo, diferentes! Então é um livro de tradição. Ou seja, um livro como os que a gente trabalha hoje em dia, trazem cinco ou dez exercícios, certo? e mais ou menos estão relacionados, ou seja, tem que fazer a mesma coisa, é muito mecânico, porém, na Álgebra [de Baldor] há muitos, e, como há os fáceis, também há os muito complexos.

Enxerto Hermenêutico: Na entrevista, a professora P6 não apenas critica o livro *Álgebra de Baldor*, mas também ressalta seus aspectos positivos. Ela destaca que, ao longo do texto, é apresentada uma vasta gama de exercícios, caracterizados por sua diversidade e complexidade.

Essa variedade permite que o estudante se envolva com diferentes tipos de desafios, exigindo a aplicação de estratégias e procedimentos algébricos variados na resolução dos exercícios, o que, por sua vez, favorece o desenvolvimento da capacidade criativa e o pensamento crítico dos alunos ao lidarem com os conceitos de Álgebra. A professora observa que, ao trabalhar com Álgebra no contexto escolar, a resolução desses exercícios proporciona ao aluno a oportunidade de se aprofundar em seus conhecimentos e nas técnicas algébricas, buscando superar assim abordagens mecânicas.

Ainda, a professora destaca que este é um livro de tradição. Mas, a que se pode referir ao falarem da tradição? De acordo com Husserl (2012, p. 293), “[a] nossa existência humana move-se em inúmeras tradições. O mundo da cultura inteiro existe, em todas as suas figuras, a partir de tradições”. Além disso, conforme este autor, as tradições não são um mero produto causal, “a tradição se tornou precisamente tradição a partir da atividade humana, [...] ainda que nada, ou praticamente nada, saibamos em geral sobre a origem” (Husserl, 2012, p. 293). Por sua vez, Gadamer (2011a) compreende a tradição como uma forma particular de autoridade que orienta a compreensão humana, que não é obstáculo ao pensamento crítico, pois, ao ser interrogada, age como uma condição de possibilidade para a compreensão. Assim, “[o] que é consagrado pela tradição e pela herança histórica possui uma autoridade que se tornou anônima, e nosso ser histórico e finito está determinado pelo fato de que também a autoridade do que foi transmitido, e não somente o que possui fundamentos evidentes, tem poder sobre essa base [...] A realidade dos costumes, p. ex., é e continua sendo, em âmbitos bem vastos, algo válido a partir da herança histórica e da tradição. Os costumes são adotados livremente, mas não criados por livre inspiração nem sua validade nela se fundamenta. É isso, precisamente, que denominamos tradição: o fundamento de sua validade” (Gadamer, 2011a, p. 421). Nessa abordagem, a tradição não é assumida como um obstáculo à crítica e à criatividade, uma vez que não se trata de imposição do que se tem aceitado como válido e correto, mas é o que vem junto ao solo histórico-cultural em que nos movemos.

À luz da fala da professora P6, podemos elucidar que o livro *Álgebra de Baldor* ocupa um papel significativo em duas tradições distintas. Em primeiro lugar, ele está inserido na tradição pedagógica, no que diz respeito às abordagens educacionais, caracterizadas por métodos, práticas e técnicas que têm sido adotadas ao longo do tempo. Nesse contexto, o livro *Álgebra de Baldor* geralmente opera como uma referência para o ensino de Álgebra, sendo utilizado de forma sistemática e consolidada para a transmissão dos conteúdos da disciplina. Em segundo lugar, o livro também se insere na tradição escolar de forma mais ampla, sendo parte de um legado histórico que está enraizado na cultura e na identidade das instituições de ensino. Nesse sentido, *Álgebra de Baldor* adquire o status de uma obra de autoridade, tendo um impacto no cotidiano escolar e influenciando o ensino e a aprendizagem da Álgebra. Assim, à luz dos depoimentos dados pelos professores (exceto a professora P4E), compreendemos que o livro *Álgebra de Baldor* ultrapassa a simples função de material didático, tornando-se um símbolo da tradição e continuidade no ensino da Álgebra escolar, sendo objeto de debate quanto à sua incorporação nas práticas de ensino.

USg2.P6E: A professora P6E destaca a quantidade e a variedade de exercícios presentes no livro *Álgebra de Baldor*. Ela afirma que, no contexto da Álgebra escolar, este livro é uma tradição. No entanto, os livros atualmente utilizados nas escolas para o ensino de Álgebra contêm poucos exercícios, que são bastante similares entre si. Isso resulta em desafios menos complexos e em um engajamento limitado dos estudantes na análise dos conceitos algébricos envolvidos, tornando o aprendizado mais mecânico.

O que diz essa US:

* O livro *Álgebra de Baldor* se tornou um referente na tradição do ensino da Álgebra escolar.

US3.P6E Y ya en la universidad, pues no, o sea, casi no se trabajó [el Álgebra], claro obviamente cuando se aplica ya a límites o a derivadas, pero igual, eso ya lo asumía cada uno, o sea, ya cada uno por su cuenta tenía que pues estudiar, revisar las fórmulas si no la recordaba o alguna cosa, porque igual, lo mismo en la universidad, pues era explicar el tema y se supone que se asume que usted ya sabe esos casos [de factorización] o los recuerda.

Tradução: E já na universidade, bom, não, ou seja, quase não se trabalha [a Álgebra], claro, obviamente, quando é aplicada a limites ou derivadas, mas de qualquer forma, cada um já assumia isso, ou seja, cada um por sua conta tinha que estudar, revisar as fórmulas se não lembrasse delas ou algo assim, porque igual, a mesma coisa na universidade, era explicar o tópico e presume-se que você já conhece esses casos [de fatoração] ou se lembra deles.

Enxerto Hermenêutico: de acordo com o depoimento da professora, ela manifesta que em sua experiência vivida como estudante na *Educação Superior*, no curso de Licenciatura em Matemática, a Álgebra não é trabalhada de maneira explícita, especialmente quando comparada ao tratamento dado ao conteúdo na *Educação Básica e Média*. Esse ponto de vista não é exclusivo da professora P6, sendo compartilhado por outros professores que participaram da pesquisa, como é expresso nos relatos das unidades US4.P2E, US2.P4E e US3.P5E. Ao aprofundar essa compreensão, evidencia-se que a professora P6E identifica a Álgebra principalmente com o conteúdo trabalhado na *Educação Básica*, onde o foco está nos conceitos algébricos fundamentais e sua aplicação direta. No entanto, para ela, no nível universitário, disciplinas como Álgebra Linear ou Estruturas Algébricas não são reconhecidas como pertencentes ao campo da Álgebra de forma explícita. Isso mostra que os conceitos algébricos, conforme o relato dos depoentes, são vistos apenas como *ferramentas aplicáveis* em um *nível procedimental*, voltadas para a resolução de problemas específicos, frequentemente no contexto de exercícios práticos. Para evidenciar isso, a professora exemplifica essa abordagem com tópicos como limites e derivadas, demonstrando como, nesses casos, os procedimentos

algébricos são empregados para alcançar soluções, sem que haja uma reflexão aprofundada sobre os fundamentos teóricos da Álgebra em si, como se poderia apreciar no seguinte exemplo¹⁹⁶:

Encontre o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

Este é um caso típico onde o limite não se pode calcular por substituição direta, pois a função $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, não está definida para $f(1)$. Também, não podemos aplicar a lei do quociente porque o limite do denominador é 0. Portanto, precisa-se de um procedimento algébrico preliminar, isto é, fatorando o numerador como uma diferença de quadrados, de modo que a fração possa ser expressa da seguinte maneira,

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

Sendo assim, o limite pode ser expresso como,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

Assim, graças esse *procedimento algébrico*, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite mediante substituição direta, da seguinte forma

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Neste caso, a aplicação de técnicas algébricas ocorre de forma pragmática, focada na resolução do exercício, sem considerar uma exploração mais profunda e teórica dos conceitos algébricos que fundamentam essas operações.

Além disso, a professora P6E manifesta que, no contexto da graduação, tópicos considerados elementares, como os de Álgebra, são geralmente abordados de maneira superficial, deixando ao estudante a responsabilidade de estudar por conta própria. Ela observa que, nesses casos, espera-se que o aluno, por já ter adquirido o conhecimento prévio na *Educação Básica*, revise as fórmulas ou recorra aos conceitos algébricos se não se lembrar deles. A pressuposição é de que o estudante já possui uma base sólida, por exemplo, o conhecimento sobre os casos de fatoração —que é tópico central no estudo da Álgebra na escola—, e que não há necessidade de um aprofundamento ou revisão explícita dessas técnicas no âmbito da formação universitária. Isso implica na abordagem de temas mais complexos, como limites e derivadas, pois os alunos são frequentemente deixados à mercê de sua memória e à sua capacidade de aplicar esses conceitos de maneira prática, sem que haja uma discussão mais detalhada sobre os fundamentos algébricos que sustentam essas operações.

USg3.P6E: Ao falar sobre sua experiência com o aprendizado de Álgebra na graduação, a professora assinala que os tópicos de Álgebra não são abordados de maneira substancial, estes aparecem escassamente, geralmente quando são aplicados em um nível procedimental em temas como cálculo, por exemplo, na resolução de exercícios de limites e derivadas, onde resulta útil a aplicação da fatoração. A professora também menciona que, na universidade, cabe aos estudantes revisarem e lembrar desses tópicos, pois presume-se que eles já conhecem os casos de fatoração.

¹⁹⁶ Exemplo extraído de Stewart (2012).

O que diz essa US:

- * Compreensão da Álgebra como conjunto de ferramentas aplicáveis em um nível procedimental;
- * Na graduação cabe aos estudantes o estudo da Álgebra.
- * Presunção de que conhecimento prévio de fatoração

US4.P6E pues en el caso de Álgebra, o sea [...], es más como asociado ya a la parte más como numérica y con letras, entonces, pero pues no [...], no sabría, o sea eh [...], no sabría cómo decirlo, o sea, pues obviamente le toca a uno, pues con ejercicios, pero no, no sé, no sé qué más. Eh [...] o sea, no sabría cómo explicarlo. Porque pues, es que es igual, o sea, todo está relacionado, o sea, es hacer todas las operaciones igual, hacer sumas, restas multiplicaciones, pero todo obviamente con letras.

Tradução: bom, no caso da Álgebra, isso é [...], é mais como associado à parte que é mais como numérica e com letras, então, mas aí não [...], não sei, ou seja eh [...], eu não saberia como dizê-lo, quer dizer, obviamente cabe a gente, pois com exercícios, mas não, não sei, não sei mais o que. Eh [...] ou seja, eu não saberia como explicá-lo. Porque bom, é igual, ou seja, está tudo relacionado, ou seja, é igualmente fazer todas as operações, fazer adições, subtrações, multiplicações, mas obviamente tudo com letras.

Enxerto Hermenêutico: No fragmento da entrevista, a professora busca expor sua concepção de Álgebra, destacando tanto o trabalho com expressões numéricas quanto o uso de letras, elementos que são frequentemente associados à disciplina. Essa visão é amplamente compartilhada, o que é evidenciado em análises como a apresentada no enxerto hermenêutico da US1.P5E. Nesse contexto, consideramos relevante a observação de Freudenthal (1977), que alerta para o risco de confundir os objetos matemáticos com a linguagem por meio da qual esses objetos são representados e, em que o uso das letras na Álgebra é visto como algo misterioso, com o único propósito de criar um senso de complexidade ou “mistificação”, como manifestado por Russell (2010). Essa concepção, embora comum, pode deixar de lado outras abordagens da Álgebra, como aquelas em que se empregam fórmulas para descrever propriedades geométricas (que costumam ser trabalhadas na *Educação Básica*), ampliando assim o escopo da disciplina para além da mera manipulação de números e símbolos algébricos.

Ainda, neste fragmento, a professora manifesta sua dificuldade em expressar o que entende por Álgebra. No entanto, ela sugere que a compreensão da Álgebra é possível se dar no contexto de resolver (ou fazer) exercícios. Essa maneira de compreender a Álgebra se alinha ao questionamento proposto por Lins e Giménez (2001), que se perguntam: o que é Álgebra? E o que é Aritmética? Como afirmam os autores, “coisas da Álgebra são equações, inequações, funções etc., e as da Aritmética são números, as quatro operações, tabuada etc. *Todo mundo sabe*” (p. 12, grifos do autor). À luz do que foi dito pela professora e pelos autores citados,

podemos entender que uma maneira *comum* de compreender a Álgebra é vê-la como o desenvolvimento de uma “atividade” matemática, ou seja, como uma “ação”. Assim, a tentativa da professora em definir Álgebra e a concepção popular que ela evoca indicam que a Álgebra pode ser frequentemente vista como algo prático, associado à resolução de problemas ou exercícios, em vez de uma teoria abstrata. A ideia de “atividade” ou “ação” também sugere que a Álgebra é compreendida, em muitas situações, como um *conjunto de procedimentos ou manipulações*, onde o foco está nas transformações dos elementos e não na natureza dos objetos matemáticos em si. Isso reflete uma visão pragmática da Álgebra, onde sua utilidade é percebida mais em seu funcionamento do que em sua definição formal. A visão de Lee também reforça essa abordagem, ao destacar que a ênfase recai sobre a ação matemática e suas transformações, o que pode ser um reflexo de uma compreensão mais intuitiva, focada no *fazer*, em vez de uma compreensão teórica ou conceitual mais profunda.

De outra parte, o “fazer Álgebra”, conforme abordado por Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), envolve uma série de ações físicas e mentais que se inter-relacionam e permitem a manipulação e a resolução de problemas matemáticos. Para esses autores, essas ações são fundamentais para a compreensão, interpretação e aplicação dos conceitos algébricos. Algumas das principais ações envolvidas, segundo Arcavi, Drijvers e Stacey (2017) são:

- *Perceber, descrever, denotar e representar*: essas ações envolvem a identificação de regularidades e padrões presentes em uma situação matemática, que podem ser representados de diferentes maneiras, como palavras, símbolos, tabelas ou gráficos.
- *Manipulação de expressões simbólicas*: no contexto da Álgebra, manipular expressões simbólicas é uma das atividades mais comuns. Isso envolve a aplicação de regras algébricas para modificar expressões, substituindo números por variáveis, simplificando expressões ou resolvendo equações. Essa manipulação exige um conhecimento profundo das operações algébricas e das propriedades das expressões, além da habilidade de aplicar essas regras de maneira precisa para alcançar a solução desejada.
- *“Dessimbolizar” e ler*: a dessimbolização é um processo crucial em Álgebra, pois envolve a leitura e a interpretação de expressões algébricas para extrair informações significativas. Esse processo não se limita à simples leitura de símbolos, mas também inclui a compreensão sobre como esses símbolos e operações se relacionam entre si e com o contexto do problema. Assim, “dessimbolizar” implica um olhar mais atento e uma análise detalhada das expressões algébricas.
- *Conectar representações*: ao trabalhar com Álgebra, frequentemente é necessário conectar diferentes formas de representação matemática, como gráficos, tabelas e expressões algébricas. Essa habilidade permite uma compreensão mais profunda dos conceitos, pois torna possível operar sobre múltiplas representações simultaneamente. Além disso, a conexão entre representações facilita a geração de novos conhecimentos, proporcionando uma visão mais abrangente e precisa do problema em questão.
- *Criação de expressões algébricas*: durante os estágios iniciais da modelagem matemática, a criação de expressões algébricas é um passo fundamental. Esse processo envolve a escolha

de uma variável adequada e a formulação de expressões, equações ou inequações que representem as relações entre as variáveis do problema. A capacidade de construir essas expressões corretamente é fundamental, pois elas servem como a base para a resolução do problema modelado, permitindo que o matemático organize e manipule as relações envolvidas de maneira sistemática.

Essas ações, descritas por Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), não apenas caracterizam o “fazer Álgebra”, mas também revelam a complexidade e a profundidade dos aspectos cognitivos e operacionais envolvidos na prática algébrica. No entanto, esses autores evidenciam que, embora seja amplamente reconhecido que o domínio da Álgebra exige prática, eles questionam: que tipo de prática é essa? Eles sugerem que não é tão evidente que habilidades processuais automatizadas e o desenvolvimento do pensamento algébrico flexível caminhem de forma paralela, e podem até mesmo entrar em uma relação de tensão. Nesse sentido, Freudenthal, citado por Arcavi, Drijvers e Stacey (2017, p. 87, tradução nossa), expressa essa tensão da seguinte maneira: “Eu [Freudenthal] observei, não apenas com outras pessoas, mas também comigo mesmo ... que as fontes de insight podem ser obstruídas pelo automatismo. Finalmente, domina-se uma atividade tão perfeitamente que a questão de como e por que não é mais perguntada, não pode mais ser feita e nem mesmo é mais entendida como uma questão significativa e relevante”¹⁹⁷. Esse trecho ilustra como o processo de automatização pode, paradoxalmente, restringir a capacidade de questionamento e de reflexão sobre as razões e os significados subjacentes às operações algébricas, enfatizando um possível obstáculo para a compreensão profunda da disciplina.

Na entrevista, a professora ao explicar sua visão sobre a Álgebra, considera-a como uma continuidade do trabalho realizado na Aritmética, ou seja, uma forma de “Aritmética generalizada”, na qual as letras são tratadas da mesma maneira que os números, e as regras da Aritmética, e suas operações, continuam a ser aplicadas de forma usual. Essa compreensão da Álgebra é alinhada com a proposta de Lins e Giménez (2001, p. 138), para os quais a Álgebra “consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações Aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”. A professora, em sua visão sobre a Álgebra, percebe-a como uma continuidade natural da Aritmética, onde as letras assumem o papel de números, mantendo as mesmas operações fundamentais. Esse entendimento, conforme refletido no enxerto hermenêutico da US1.P3E, mostra que, embora a Álgebra seja apresentada como uma extensão da Aritmética, facilitando uma transição para os estudantes devido à familiaridade que esses possuem com os procedimentos aritméticos, essa abordagem também pode limitar a compreensão mais profunda e abrangente dos conceitos algébricos. Nesse contexto, Russell (2010) destaca que, na introdução da Álgebra, o ensino segue o mesmo método da Aritmética geralmente, no qual as regras são apresentadas sem uma explicação adequada que as sustentem. Como resultado, os alunos acabam

¹⁹⁷ I have observed, not only with other people but also with myself ... that sources of insight can be clogged by automatism. One finally masters an activity so perfectly that the question of how and why is not asked any more, cannot be asked any more, and is not even understood any more as a meaningful and relevant question.

por aplicar essas regras de forma mecânica, sem verdadeira compreensão, o que cria uma falsa impressão de domínio tanto para o professor quanto para o aluno.

USg4.P6E: Para a professora P6, a Álgebra está associada a práticas matemáticas que envolvem operar com números e letras. No entanto, ela manifesta dificuldade para expressar claramente o que entende por Álgebra e seu ensino. Ela indica que é por meio de exercícios que o sentido da Álgebra se revela. A professora considera a Álgebra como uma continuidade natural da Aritmética, onde as letras assumem o papel dos números, mantendo as mesmas operações usuais.

O que diz essa US:

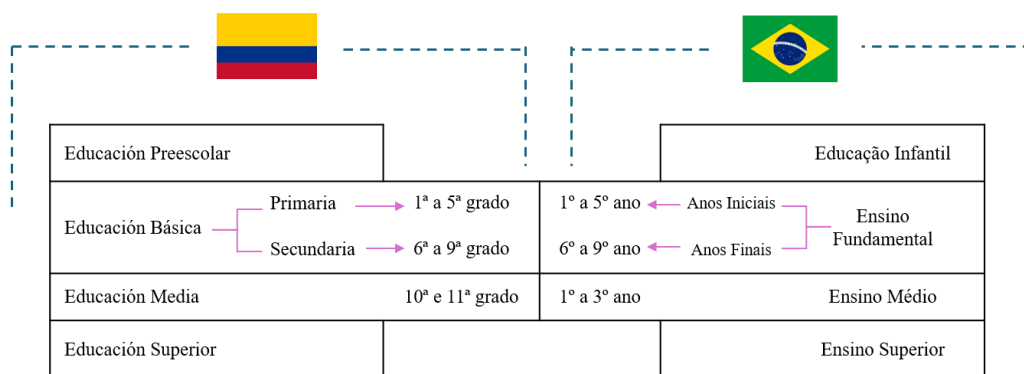
- * É por meio de exercícios que o sentido da Álgebra se revela;
- * Relação entre a Álgebra e a Aritmética;
- * Concepção de Álgebra.

US5.P6E En los cuatro años he dictado en octavo, he tenido que orientar esa materia entonces, pues a veces sí es **un poco complejo** porque, bueno, o sea, **el paso** de solamente la parte numérica y ya entrarles a los chicos con letras.

Tradução: Nos quatro anos que lecionei na oitava série, tive que ensinar essa disciplina então, bom, às vezes é um pouco complexo porque, bom, quer dizer, a passagem só da parte numérica e depois a introdução das letras para as crianças.

Excerto Hermenêutico: a professora narra sua experiência ao longo do tempo que tem atuado como educadora na escola, destacando sua prática no ensino de Álgebra para turmas do oitavo ano. Essa informação, em si, oferece um ponto de partida importante para refletir sobre o contexto educacional em que a docente está inserida e sobre o currículo que orienta sua prática pedagógica. Assim, ao considerar sua narrativa, é fundamental situar o seu relato no panorama mais amplo dos sistemas educacionais de diferentes países, como a Colômbia e o Brasil, cujos níveis de ensino possuem estruturas comparáveis, embora com algumas diferenças contextuais. A estruturação dos ciclos de ensino e a organização curricular tanto no Brasil quanto na Colômbia têm pontos de convergência, especialmente no que diz respeito à divisão da *Educación Básica*, que compreende, de maneira geral, o ciclo de alfabetização seguido pelos anos subsequentes, em que as disciplinas de conteúdo são introduzidas de forma mais abrangente e aprofundada.

Figura 16 - Níveis de ensino nos sistemas educacionais do Brasil e da Colômbia



Fonte: elaboração própria

Esse paralelo entre os sistemas educacionais permite compreender de forma mais clara o contexto curricular que envolve o ensino da Álgebra no oitavo ano. Na Colômbia¹⁹⁸, conforme os documentos curriculares elaborados pelo Ministério da Educação Nacional (MEN), o ensino da Álgebra é definido como transversal tanto na *Educación Básica* quanto na *Educación Média*. A partir dos *Lineamientos Curriculares* (1998), ou orientações curriculares nacionais, busca-se que os alunos desenvolvam, de forma integrada, o *Pensamiento Variacional* e o domínio dos *Sistemas Algébricos*. No entanto, ao analisar o relato da professora, vê-se que, na prática, o ensino da Álgebra, é frequentemente introduzido subitamente no oitavo ano, contradizendo a proposta apresentada nos documentos oficiais. Esse modelo disruptivo de ensino da Álgebra no oitavo ano reflete, na realidade, uma continuidade de uma tradição pedagógica originada nos programas curriculares de 1967. Como a professora observa, essa abordagem ainda permanece presente, evidenciando a persistência de um padrão curricular que remonta às primeiras propostas educacionais dessa época, em que o ensino da Aritmética é seguido pelo ensino da Álgebra.

A professora assinala a complexidade associada ao fenômeno do “passo” da Aritmética para a Álgebra. Esse processo, conforme discutido no enxerto hermenêutico nas unidades US1.P3E e US1.P5E, pode ser interpretado também como o “salto da Aritmética para a Álgebra”. Nesse contexto, observa-se que a transição entre essas duas áreas da Matemática não ocorre de maneira simples ou linear. O “passo” ou “salto” reflete a mudança de uma abordagem numérica concreta e focada na manipulação de números para uma estrutura algébrica mais abstrata, que exige a compreensão de conceitos como variáveis, expressões algébricas e a resolução de equações. Esse fenômeno envolve não apenas uma adaptação conceitual, mas também uma mudança no modo de pensar e na forma como os estudantes lidam com os problemas matemáticos.

USg5.P6E: A professora P6E narra sua experiência ao longo dos quatro anos em que tem atuado como educadora nessa escola, ressaltando sua prática no ensino de Álgebra para turmas do oitavo ano. Ela expõe acerca da complexidade de lecionar nessas turmas, argumentando que essa

¹⁹⁸ Alertamos ao leitor que uma descrição mais ampla sobre o sistema educacional colombiano se apresenta na terceira seção da presente tese.

difficuldade se deve à transição da parte numérica para a introdução das letras no trabalho como os estudantes.

O que diz essa US:

*O ensino da Álgebra é introduzido subitamente no oitavo ano;

*Salto da Aritmética para a Álgebra;

U6.P6E entonces ellos [los estudiantes] ya creen, o sea, en ese momento, ellos piensan es que ese número ellos se lo **inventan**, entonces inmediatamente ellos empiezan a **colocarle** ese número. Entonces es la idea como de colocar un como **una estructura**, les digo yo, como colocar que todos tengamos esa misma **letra**, para que después ahí sí le podamos **colocar** un valor

Tradução: então eles [os estudantes] já acreditam, ou seja, **naquele momento**, eles pensam que **inventaram** aquele número, então imediatamente começam a **atribuir** aquele número a ele. Então é a ideia de colocar como uma **estrutura**, eu lhes digo, como ter certeza de que todos temos a mesma **letra**, para depois podermos **atribuir** um valor a ela.

Enxerto Hermenêutico: Na entrevista, a professora compartilha sua experiência com o ensino de Álgebra, destacando que, “naquele momento”, ao iniciar esse conteúdo com os alunos, um dos primeiros desafios que surgem é a crença de que as letras presentes nas expressões algébricas devem representar valores fixos ou assegurados, tal como acontece com os números. Nesse contexto, os alunos tentam aplicar as operações de forma semelhante à Aritmética, esperando que as letras se comportem como valores numéricos concretos. Para que isso ocorra, conforme a professora manifesta, os estudantes “inventam” esses números. Esse entendimento inicial da Álgebra, observado pela professora, parece relacionar-se com a referência feita no enxerto hermenêutico na US1.P5E, em que o professor P5E, ao se referir à sua experiência como estudante na escola, manifesta que a Álgebra, naquela época, parecia-lhe “ambígua”, pois as letras não possuíam um valor garantido. Assim, conforme entendemos do dito pela professora P6E, ela considera que esse modo de compreender as letras na Álgebra se torna um obstáculo que precisa ser superado, no intuito que os estudantes compreendam o significado das variáveis na Álgebra e como elas funcionam dentro das operações algébricas.

Diante do obstáculo mencionado, a professora P6E considera que, ao iniciar com os estudantes o tratamento das letras em Álgebra, é importante pensar na ideia de apresentar as letras como uma espécie de “estrutura”, a qual, em seu olhar, deve ser concebida de forma que possa “conter” valores numéricos específicos, permitindo aos estudantes perceberem que as letras não representam apenas números fixos, mas variáveis que podem assumir diferentes valores. A ideia de interpretar as letras dessa maneira visa proporcionar uma compreensão mais ampla, voltada para a generalização, conforme sugerido no enxerto hermenêutico da US4. P1E. Esse caráter

multifacetado do conceito de variável também pode ser examinado conforme o argumentado no hermenêutico na US5.P5E.

Arcavi, Drijvers e Stacey (2017) evidenciam a importância de examinar, no campo da Educação Matemática, as múltiplas facetas inerentes ao conceito de variável. Em particular, eles distinguem cinco facetas no conceito de variável com base em um vasto corpo de literatura disponível na Educação Matemática, a saber: um espaço reservado para um número, um número desconhecido, uma quantidade variável, um número generalizado e um parâmetro.

A primeira e provavelmente mais direta faceta da variável é o *espaço reservado* para um valor numérico, que pode ser vista como uma caixa vazia, um recipiente para valores numéricos, que pode ser preenchido por um valor específico. Na segunda faceta, a variável pode representar um *número desconhecido* que precisa ser encontrado, como é usual na resolução de equações. A terceira faceta diz respeito à *quantidade variável*, isto é, o símbolo literal representa um processo em execução em um domínio de valores possíveis, como em relações ou funções de entrada-saída, nas quais busca-se investigar a co-variação de variáveis dependentes e independentes.

A variável pode atuar como um *número generalizado*, permitindo a descrição de propriedades gerais e formulando afirmações (leis, propriedades) que valem para todos os objetos que nomeiam. Um *parâmetro* é uma variável de ordem superior cujo valor determina a situação como um todo, podendo variar, mas sendo considerado fixo localmente, por exemplo, na expressão $y = ax + b$, usualmente pensamos em x e y como as quantidades variáveis e a e b fixas (mas desconhecidas). O *parâmetro* também pode ser uma variável “intermediária” que vincula duas outras variáveis, como nas equações que representam um círculo de raio 1: $x = \cos(t)$ e $y = \sin(t)$.

Segundo o compreendemos do exposto pela professora P6E e as facetas descritas por Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), ela busca que seus estudantes possam passar do contexto aritmético para o algébrico, fomentando um entendimento do sentido da variável que parte da primeira faceta, em que os estudantes atribuem diretamente um valor à variável, para uma faceta em que se compreenda a variável em um sentido mais abrangente, que ela reconhece como uma “forma de estrutura”. Para Usiskin (1995, p.18), ao considerar a Álgebra como o estudo de estruturas, a “variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Essa é a visão da variável na Álgebra abstrata”. Por sua parte, Arcavi, Drijvers e Stacey (2017) ressaltam que a Álgebra reflete estruturas equivalentes com significados diferentes. No entanto, os alunos, focados nas rotinas de manipulação de expressões algébricas, muitas vezes perdem de vista como a alteração da forma algébrica destaca aspectos diferentes da estrutura matemática, permitindo a resolução de problemas distintos. Por exemplo, “grande parte do currículo sobre expressões quadráticas é sobre a mudança de estrutura. A forma padrão é uma soma de três termos $ax^2 + bx + c$. Isso mostra explicitamente várias propriedades, como o valor quando $x = 0$, se a função tem um máximo ou um mínimo e a ‘largura’ da parábola de seu gráfico. A fatoração altera a soma dos termos para um produto $a(x - h)(x - k)$, e esta forma mostra os zeros da função. Completar o quadrado altera a soma dos termos para uma soma ou diferença de quadrados, o que revela outras características, incluindo as coordenadas do ponto de virada do

gráfico”¹⁹⁹ (Arcavi, Drijvers e Stacey, 2017, p.57, tradução nossa). Embora os alunos aprendam a encontrar expressões equivalentes, o propósito é que diferentes estruturas resolvem diferentes problemas, mas os alunos com frequência perdem esse propósito devido ao foco nas regras.

Na visão da professora P6E, ao iniciar o estudo da Álgebra, é fundamental que os estudantes desenvolvam a capacidade de perceber as estruturas equivalentes subjacentes às expressões algébricas. Essa percepção, segundo ela, é fundamental para que os alunos compreendam as relações entre os diferentes componentes das expressões algébricas. No entanto, Linchevski e Livneh (1999) destacam um ponto importante ao alertarem que, embora seja crucial expor os estudantes a situações que possibilitem essa percepção da estrutura algébrica, esse processo deve ser conduzido de maneira que favoreça o desenvolvimento do *sentido da estrutura*.

USg6.P6E: A professora P6E narra que, em sua prática docente, ao iniciar o ensino da Álgebra, observa que os estudantes, ao realizarem as operações, atribuem às letras valores numéricos arbitrários, que eles próprios inventam. No entanto, ela ressalta a necessidade de que os alunos reconheçam uma estrutura subjacente à expressão algébrica, de modo que, ao compreenderem o sentido da variável expressa pela letra, possam atribuir-lhe o valor correto.

O que diz essa US:

- * Sentido da estrutura subjacente à expressão algébrica;
- * Caráter multifacetado do conceito de variável.

U7.P6E entonces también es volver a **recordar esas propiedades**, que es como esos **miedos** que ellos a veces tienen, no sé, con las **propiedades**, con las fracciones, con los números **decimales**, entonces ahí, pues obviamente antes de eso se ha tenido que haber hecho un, digamos, un **repaso de sobre todo los números reales**, y eso es lo que de pronto ellos a veces **se les dificulta**, entonces tratar como de **mirar más la parte de fracciones, de decimales, para cuando se esté trabajando el Álgebra, pues ellos se puedan desenvolver un poco más fácil**

Tradução: então é também lembrar novamente dessas **propiedades**, que é como aqueles **medos** que eles às vezes têm, não sei, com **propiedades**, com **frações**, com **números decimais**, então aí, bem obviamente antes disso tinha que ter sido feito um, digamos, uma **revisão principalmente dos números reais**, e é isso que de repente eles acham **difícil** às vezes, então tente **olhar mais para a parte das frações, dos decimais, pois quando eles estão trabalhando em Álgebra, bem, eles podem desenvolver um pouco mais fácil**.

¹⁹⁹ [...] much of the curriculum about quadratic expressions is about changing structure. The standard form is a sum of three terms $ax^2 + bx + c$. This explicitly shows several properties such as the value when $x = 0$, whether the function has a maximum or a minimum and the “width” of the parabola of its graph. Factorizing changes the sum of terms to a product $a(x - h)(x - k)$, and this form shows the zeros of the function. Completing the square changes the sum of terms to a sum or difference of squares, which reveals other features, including the co-ordinates of the turning point of the graph.

Enxerto Hermenêutico: A professora aponta para as possíveis dificuldades dos estudantes. Ela considera que essas dificuldades em tópicos como as propriedades e as operações com frações e números decimais constituem um obstáculo quando os estudantes começam a trabalhar com Álgebra. Nessa concepção, a Álgebra é vista como uma continuação da Aritmética, e o domínio da Aritmética facilita a compreensão dos tópicos da Álgebra, considerando-se, em alguns casos, a Álgebra como uma forma de Aritmética generalizada, como foi examinado no enxerto hermenêutico na US4.P1E. Nesse sentido, Lins e Giménez (2001) manifestam que é preciso investigar, com base nas ligações realizadas em distintos âmbitos numéricos, em que as propriedades e as operações são executadas, e em outras informações, quais são os significados envolvidos e questionar por que, para os estudantes, aquelas ligações não se estabelecem. Assim mesmo, Booth (1995) salienta que, ao analisar o impacto dos conceitos matemáticos fundamentais no desempenho dos alunos em Álgebra, é possível observar que, se os conceitos relacionados à Aritmética não forem devidamente reconhecidos ou se os estudantes apresentarem concepções errôneas sobre eles, o desempenho em Álgebra pode ser significativamente prejudicado. Segundo o autor, “as dificuldades que o aluno tem em Álgebra não são tanto de Álgebra propriamente dita, mas de problemas em Aritmética que não foram corrigidos” (Booth, 1995, p.33). Nesse sentido, a professora P6E sugere que, ao iniciar o estudo da Álgebra, seja feita uma revisão dos números reais, no intuito de facilitar aos estudantes o trabalho com a Álgebra. Booth também acrescenta que essas dificuldades foram abordadas sob a ótica das distinções entre Aritmética e Álgebra, mas é crucial entender que “a Álgebra não é isolada da Aritmética; na verdade, é, em muitos aspectos, a *Aritmética generalizada*” (Booth, 1995, p.33, grifos nossos). Conforme os autores citados neste enxerto hermenêutico, bem como os examinados nos enxertos hermenêuticos das unidades US4.P1E e US5.P5E, e o mencionado pela professora P6E, percebe-se que algumas das raízes das dificuldades observadas nos estudantes se encontram na interseção entre os domínios da Aritmética e da Álgebra.

USg7.P6E: A professora P6E ressalta a importância de revisar as propriedades matemáticas da Aritmética antes de iniciar o ensino da Álgebra. Além disso, observa que os estudantes frequentemente apresentam dificuldades e medos relacionados a propriedades, frações e números decimais. Em seu posicionamento, uma revisão prévia dos números reais é fundamental, pois muitos alunos acham esses conceitos desafiadores. Para tal, sugere que se dê atenção especial às frações e aos números decimais, já que uma compreensão sólida desses tópicos pode facilitar o aprendizado da Álgebra.

O que diz essa US:

- * Dificuldades que o aluno tem em Álgebra;
- * Relação entre a Álgebra e a Aritmética.

U8.P6E en el Álgebra, o sea, lo que uno sabe que es los casos de factorización, que es lo que más uno usa de ahí en adelante, uno lo usa hasta en la universidad, o sea, ese es el tema principal

Tradução: na Álgebra, ou seja, o que a gente sabe é que os casos de fatoraço, que é o que mais se usa daí em diante, usa-se até na universidade, ou seja, esse é o tema principal.

Enxerto Hermenêutico: Na visão da professora P6E, os casos de fatoraço são elementos centrais no ensino da Álgebra no contexto escolar. Segundo a professora, esses tópicos desempenham um papel fundamental, sendo amplamente abordados tanto no *Educação Média* quanto nos cursos universitários que incluem disciplinas relacionadas à Matemática. Uma questão que surge a partir da concepção expressa pela professora é: por que esses tópicos são tão relevantes?

Segundo Lins e Giménez (2001) a Álgebra, junto com a Aritmética e a Geometria, são tradicionalmente reconhecidas como os pilares fundamentais da Matemática escolar. Essa visão, amplamente compartilhada pelos educadores da área, “é de fato a realidade cristalizada nos livros didáticos e nas propostas curriculares” (Lins e Giménez, 2001, p.12). Essa estrutura curricular consolidada evidencia o papel central que a Aritmética, a Álgebra e a Geometria desempenham no processo de aprendizagem da disciplina, estabelecendo um modelo de ensino que, embora tradicional, continua a ser amplamente adotado nas práticas pedagógicas e nas publicações especializadas.

Em particular, enquanto a Álgebra, e conforme o dito pela professora P6E, o questionamento “por que é importante fatorar?” toca em um ponto crucial no entendimento e na aplicação de conceitos algébricos. A esse respeito, segundo Eisenberg e Dreyfus (1995), a fatoraço assume um papel fundamental quando examinada no contexto dos números reais. Esses autores argumentam que, ao buscar as raízes de um polinômio, como por exemplo $f(x)$ e “se é possível fatorar $f(x)$ em dois fatores $g(x)$ e $h(x)$, então $g(x)=0$ ou $h(x)=0$. Portanto, o problema agora é achar as raízes de $g(x)$ e $h(x)$, considerando que cada um desses polinômios tem grau menor que o de $f(x)$ ” (Eisenberg e Dreyfus, 1995, p.129). Esse procedimento de fatoraço, consoante os autores, pode ser estendido a outros tipos de problemas, demonstrando a flexibilidade e a abrangência das técnicas de fatoraço. Para exemplificar, esses estudiosos citam alguns problemas que envolvem achar as raízes, como no caso de $\operatorname{sen} 3x + 3\operatorname{sen} 2x + 3\operatorname{sen} x = 0$, provar que 80 divide $3^{2n} - 1$, para todo número par n , ou provar que o triângulo ABC é retângulo se, e somente se, $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos C$. Esses exemplos ilustram a dependência da fatoraço para a resolução de problemas algébricos e evidenciam como a técnica permite estabelecer conexões significativas entre conceitos que, frequentemente, são abordados de maneira isolada no estudo de polinômios. Eisenberg e Dreyfus (1995, p. 129) frisam que “através dos polinômios, podem-se introduzir noções de nível superior sobre funções. A solução de problemas que, a primeira vista, parecem não ter qualquer ligação com polinômios acaba dependendo muito deles. Os polinômios são onipresentes em matemática, e é importante que os alunos os dominem com

segurança”. Assim, entendemos que essa abordagem que reforça a importância da fatoração no ensino da Álgebra procura por uma compreensão mais integrada e profunda das inter-relações entre âmbitos da Matemática.

USg8.P6E: Para a professora P6E, a Álgebra tem como um dos temas principais os casos de fatoração que são amplamente utilizados em níveis mais avançados de estudo, inclusive na universidade. Ela destaca que a compreensão desses casos é fundamental, pois constituem uma base importante para o aprendizado contínuo na área da Matemática.

O que diz essa US:

* Importância da fatoração para a Álgebra.

U9.P6E ellos [os estudiantes] a veces dicen, pero **eso para que**, si a mí no me sirve para **aplicarlo** en la vida diaria, o sea, yo que voy a decir en la vida diaria que el cuadrado de la suma de dos términos, que la suma por la diferencia, o sea, **eso no se aplica**. Entonces a veces, a mí me toca a veces como **salirme por la tangente y decirles** bueno, puede ser que no lo apliquen en la vida diaria, pero **sí lo necesita** para los grados superiores. Entonces, eh [...] **eso es como a veces lo que yo me cuestiono**, porque yo no sé, digamos, **cómo explicarles** el ¿para qué se usa en la vida diaria!. De pronto si **hay otras cosas en Matemáticas, Geometría o Estadística**, que uno **realmente sí las aplica** en la vida diaria, pero la parte de Álgebra sí es algo que me parece muy complejo.

Tradução: Eles [os alunos] às vezes falam “mas isso **para que**”, se não me serve para aplicá-lo **no dia a dia**, ou seja, vou dizer no dia a dia que o quadrado da soma de dois termos, que a soma pela diferença, ou seja, **isso não se aplica**. Então às vezes **eu tenho que sair pela tangente e dizer bem, você pode não aplicar isso no dia a dia, mas você precisa disso** para os seguintes anos escolares. Então, eh [...] isso é o que eu às vezes **me questiono**, porque não sei, digamos, **como explicar-lhes** para que serve no dia a dia! De repente **há outras coisas na Matemática, na Geometria ou na Estatística que realmente se aplicam** na vida quotidiana, mas a parte da Álgebra é algo que me parece muito complexo.

Excerto Hermenêutico: Na entrevista, a professora relatou sua experiência ao ensinar Álgebra, trazendo à tona uma questão recorrente entre os estudantes: frequentemente, eles questionam a necessidade de aprender a disciplina. De acordo com seu relato, muitos estudantes têm dificuldade em perceber como os conceitos de Álgebra, tal como são abordados no ambiente escolar, podem ser aplicados em seu cotidiano. A professora observou que, muitas vezes, os estudantes manifestam que não conseguem estabelecer uma conexão clara entre os conceitos de Álgebra abordados na escola e suas experiências do dia a dia. Esse questionamento, conforme ela própria mencionou, é um desafio constante em sua prática docente.

Qual é o sentido de aprender Álgebra em primeiro lugar? Como manifestam Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), essa é uma pergunta bastante comum entre estudantes de diversas partes do mundo. Isso mostra que a preocupação expressa pela professora P6E é uma problemática vigente e complexa. Conforme indicam os autores anteriormente citados, um estudo de avaliação (Projeto 2061, 2013) ao buscar um “senso de propósito” nos livros didáticos de Álgebra mais populares nos Estados Unidos revelou que “dos doze programas avaliados em ‘transmitir o propósito da unidade’, três se saíram mal, quatro se saíram bem, três foram satisfatórios, dois foram bons e nenhum foi excelente. Se os livros didáticos parecem falhar em transmitir o propósito da Álgebra, especulamos que a maioria das práticas em sala de aula também pode falhar”²⁰⁰ (Arcavi, Drijvers e Stacey, 2017, p.16, tradução nossa).

A professora P6E expressa certa dificuldade em fornecer respostas diretas aos questionamentos dos alunos, mas adota uma estratégia para contornar essa situação. Ela descreve sua abordagem como uma maneira de “sair pela tangente”, o que implica oferecer uma resposta que, embora não resolva diretamente a dúvida, justifique a continuidade do ensino da matéria. Em sua argumentação, a professora recorre à concepção de que a Álgebra é necessária para o desenvolvimento de competências que serão aplicadas nos anos subsequentes da formação escolar, bem como nos estudos universitários. Ela destaca, de maneira particular, que para os alunos que possuem a intenção de seguir carreiras acadêmicas ou cursos superiores que envolvem o uso da Matemática, o aprendizado da Álgebra é uma base necessária. Dessa forma, a professora defende que o conteúdo trabalhado na disciplina oferece habilidades fundamentais para abordar tópicos mais avançados que surgirão no futuro.

Em relação ao argumento apresentado pela professora P6E, Lins e Gimenez (2001) oferecem uma crítica à abordagem da “educação propedêutica”, entendida como a preparação antecipada para conteúdos futuros, especialmente em contextos como o da Álgebra. Eles argumentam que essa perspectiva pode ser contraproducente, pois, segundo os autores, “não é aconselhável sacrificar a maioria em nome de preparar uma minoria para futuros conteúdos” (p.161). Essa posição questiona a ênfase exclusiva em conteúdos avançados para poucos alunos, alertando para o risco de negligenciar as necessidades educacionais da maioria dos estudantes, que podem não se beneficiar dessa preparação direcionada apenas aos que seguirão carreiras acadêmicas ou cursos superiores.

Desse modo, o questionamento toma um outro matiz: por que todos os alunos deveriam aprender Álgebra? Frequentemente, a resposta inicial é que cabe a todo sistema educacional oferecer aos alunos as melhores condições possíveis para o aprendizado dessa área do conhecimento. No entanto, como apontam Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), embora “essas respostas podem tranquilizar os educadores sobre a centralidade da Álgebra no currículo, elas podem ser insuficientes para convencer os alunos, pois implicam adiar para o futuro a resposta a uma

²⁰⁰ [...] that out of the twelve programs evaluated on “conveying unit purpose,” three did poorly, four did fairly, three were satisfactory, two were good, and none was excellent. If textbooks seem to fail to convey the purpose of algebra, we speculate that most classroom practices may fail as well.

questão premente do presente”²⁰¹ (p.16, tradução nossa). Essa observação revela a necessidade de uma reflexão mais profunda sobre as motivações e os reais benefícios do ensino da Álgebra, especialmente no contexto das vivências imediatas dos estudantes. MacGregor (2004) manifesta que outras respostas aceitas por muitos no âmbito da Educação Matemática é que a Álgebra²⁰²:

- é uma parte necessária do conhecimento geral dos membros de uma comunidade instruída e sociedade democrática;
- é um pré-requisito para estudos adicionais de matemática, certos cursos superiores e muitas áreas de trabalho;
- é um componente crucial da alfabetização matemática, que sustenta a vida de uma nação;
- é uma maneira eficiente de resolver certos tipos de problemas;
- promove as atividades intelectuais de generalização, pensamento organizado e raciocínio dedutivo.

Um tipo diferente de resposta à questão de por que aprender Álgebra está no desenvolvimento da capacidade de criticar os usos, abusos e abusos de argumentos matemáticos que podem ser explorados para intimidar os outros. Segundo Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), “o conhecimento da Álgebra pode ser crucial para, entre outras coisas, a inspeção, compreensão e desenvolvimento de uma avaliação crítica da grande quantidade de informações e argumentos com os quais somos frequentemente confrontados”. Ainda, esses autores alertam que, “seguir um argumento (algébrico ou outro) e detectar suas falácias potenciais é uma maneira de fortalecer as habilidades de pensamento e de se isolar de tentativas de impor autoritarismo intelectual e até mesmo propaganda ‘baseada em matemática’”²⁰³ (Arcavi, Drijvers e Stacey, 2017, p.18, tradução nossa).

Conforme aponta MacGregor (2004), a análise detalhada de cada um dos argumentos apresentados exige um processo complexo e minucioso, cuja clareza não é imediatamente dada. Nesse contexto, a angústia demonstrada pela professora P6E emerge como um reflexo de um desafio significativo, um desafio que ela busca enfrentar no seu cotidiano na sala de aula. Segundo compreendemos, esse sentimento, entretanto, não é exclusivo de sua experiência pessoal; pelo contrário, ele permanece presente e relevante na comunidade da Educação Matemática, onde as dificuldades identificadas continuam a ser um tema recorrente e não

²⁰¹ These answers may reassure educators about the centrality of algebra in the curriculum, but they may be insufficient to convince students as they imply postponing for the future the answer to a pressing question from the present.

²⁰² Is a necessary part of the general knowledge of members of an educated and democratic society; Is a prerequisite for further study of mathematics, certain higher education courses, and many fields of employment; Is a crucial component of mathematical literacy, which underpins a nation’s technological future and economic progress; Is an efficient way to solve certain types of problems; Promotes the intellectual activities of generalisation, organised thinking, and deductive reasoning.

²⁰³ knowledge of algebra may be crucial for, among other things, the inspection, understanding and development of a critical appraisal of the large amount of information and arguments with which we are often confronted. Following an argument (algebraic or other) and detecting its potential fallacies is both a way to strengthen thinking skills and to fence oneself off from attempts of imposing intellectual authoritarianism and even “mathematically based” propaganda.

totalmente superado. A professora, ao expressar sua angústia, coloca em evidência a persistência de questões não resolvidas e a necessidade de um esforço constante para compreendê-las e enfrentá-las de maneira eficaz, refletindo uma preocupação que ultrapassa sua vivência individual e se expande para o contexto da região de inquérito da Educação Matemática.

USg9.P6E: A professora P6E observa que os alunos frequentemente questionam a utilidade da Álgebra no cotidiano, perguntando para que serve aprender conceitos como o quadrado da soma de dois termos ou a soma pela diferença, já que não veem aplicação prática imediata. Ela explica que, embora esses conceitos possam não ser utilizados no dia a dia, são fundamentais para os anos escolares seguintes. A professora P6E admite que, às vezes, ela mesma se questiona sobre como explicar a aplicação prática da Álgebra no cotidiano, reconhecendo que, enquanto outras áreas da Matemática, como Geometria ou Estatística, têm aplicações mais evidentes na vida diária, a Álgebra parece ser mais complexa nesse aspecto.

O que diz essa US:

- * Propósito de ensino da Álgebra;
- * Desafios do professor;
- * Preocupação por qualificar-se em modos de aplicar a Álgebra, visando o ensino.

5.3 Análise Nomotética

Na nossa busca por compreender o fenômeno investigado, começamos com a análise ideográfica, que busca identificar os sentidos e significados nas das experiências individuais dos participantes. Em seguida, avançamos para a análise nomotética, visando encontrar elementos comuns que revelem as estruturas das experiências vividas e a forma como o fenômeno se manifesta. Esse movimento reflexivo requereu conectar e integrar os sentidos compreendidos nas *Análises Ideográficas*, permitindo uma compreensão mais profunda do fenômeno como um todo. Para isso, recorremos à variação imaginativa, aos *insights* e às evidências disponíveis nas falas dos depoentes, buscando expressar essas conexões de forma clara por meio da linguagem.

5.3.1 Primeiras reduções dos depoimentos dos professores de escola

Após uma revisão minuciosa do material produzido ao longo da análise ideográfica, debruçamo-nos sobre as 96 ideias principais emergentes em cada Unidade de Sentido, bem como sobre as articulações conceituais que se manifestaram no decorrer dos enxertos hermenêuticos, como se mostra na Tabela 5. É “[...] com auxílio do *enxerto hermenêutico*, que age como *condição de possibilidade para a compreensão*, que procuramos descortinar os sentidos e significados da experiência vivenciada” (Chaparro-Cardozo e Bicudo, 2024, p.14).

Esse processo permitiu identificar *Núcleos de Significado* (Ns) que, por sua recorrência e relevância, revelam aspectos estruturais das vivências investigadas, conduzindo-nos gradativamente à formulação de sínteses compreensivas mais amplas e fundamentadas, tendo como horizonte de interpretativo nossa pergunta de pesquisa: *como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?*

Tabela 5 - Ideias principais de cada USg e as articulações realizadas nos enxertos hermenêuticos - PE

Prof Escola	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
P1E	USg1.P1E	* Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno.	
	USg2.P1E	* Relata a utilização do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado. * Interesse dos alunos.	
	USg3.P1E	* Semelhanças e diferenças nas práticas de ensino na Escola e na Universidade. * O foco no rigor formal das explicações vivenciadas no nível universitário.	USg2.P1E
	USg4.P1E	* Concepção de Álgebra como ferramenta. * Modos de compreender a Abstração no estudo da Álgebra. * Propósito de ensino da Álgebra.	
	USg5.P1E	* Preocupação por buscar estratégias de ensino diferentes em relação ao modo como vivenciou a Álgebra enquanto aluno na escola. * Limitação de ferramentas de ensino.	
	USg6.P1E	* Reconhecimento de que a forma com que inicia a abordagem do ensino é um erro. * Descrição sobre a sequência de ensino de Álgebra. * Ser útil e compreensível aos alunos.	USg4.P1E - USg2.P1E
	USg7.P1E	* Início do trabalho com Álgebra na escola. * Transição entre a linguagem comum e a algébrica. * A finalidade de trabalhar com equações é resolver problemas.	
	USg8.P1E	* A Álgebra como generalização da Aritmética. * O problema na aprendizagem da Álgebra radica na falta de domínio da Aritmética.	USg2.P1E
	USg9.P1E	* A chave é o domínio dos conceitos prévios que envolvem números racionais.	
	USg10.P1E	* Sequência de conteúdos.	
	USg11.P1E	* Terminologia diferente gera confusão nos alunos. * O modo de ensinar operações entre números racionais se torna um obstáculo na aprendizagem da Álgebra.	
	USg12.P1E	* Crença na eficácia dos exercícios na aprendizagem. * Adaptação dos professores aos interesses dos alunos atualmente. * Dilema do professor: sobre o modo de abordar o conteúdo de ensino.	USg3.P1E

Prof Escola	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
	USg13.P1E	*Dilema do professor: o modo de gerenciar o tempo da aprendizagem do aluno e o escolar.	USg11.P1E
	USg14.P1E	* Preocupação por buscar estratégias de ensino adequadas aos interesses dos alunos. * Material de ensino.	
	USg1.P2E	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> . * Gosto pela Álgebra. * Álgebra “comum e corrente”.	USg3.P1E
	USg2.P2E	* Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno * Descrição sobre a sequência de ensino de Álgebra * Característica dos professores	
	USg3.P2E	* Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno. * Interesse dos alunos. * Gosto pela Álgebra.	
	USg4.P2E	* Relata da utilização do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado. * Confronto de expectativas entre o modo de conceber a Álgebra na escola e na universidade. * O tipo da Álgebra da escola. * “Hiato” entre o que é aprendido no curso universitário e o que é ensinado em nível de escolarização prévia.	
	USg5.P2E	* Preocupação por buscar estratégias de ensino focadas na motivação. * Interesse dos alunos. * Papel do Professor.	
P2E	USg6.P2E	* A importância da Álgebra se revela gradualmente. * Importância focada na aplicabilidade.	
	USg7.P2E	* Importância da fatoração. * Concepção de ensino da Álgebra.	
	USg8.P2E	* Importância da fatoração. * Ênfase no aspecto utilitário da Álgebra.	USg7.P2E
	USg9.P2E	* Concepção de ensino da Álgebra.	USg3.P2E
	USg10.P2E	* Desafios do professor. * Interesse dos alunos. * Propósito do estudo percebido no comportamento dos estudantes.	USg12.P1E - USg13.P1E
	USg11.P2E	* Qualidade de beleza da Álgebra. * Caráter de utilidade da Álgebra. * Relação entre a Álgebra e a Aritmética. * Concepção de Álgebra.	USg8.P1E
	USg12.P2E	* Concepção de Álgebra. * Caráter de utilidade da Álgebra.	USg11.P2E
	USg13.P2E	* Concepção de Álgebra como cerne da Matemática.	USg12.P2E
	USg1.P3E	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> . * Crença na eficácia dos exercícios na aprendizagem. * Interesse dos alunos. * Salto da Aritmética para a Álgebra.	
P3E	USg2.P3E	* Contato com a Álgebra no curso de engenharia. * Trabalho com variáveis de fenômenos diversos da realidade empírica.	

Prof Escola	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
	USg3.P3E	* Álgebra intuída “inserida na realidade vivenciada. * Beleza da Álgebra.	USg11.P2E
	USg4.P3E	* Concepção da Álgebra como aquilo que possibilita a atividade de modelagem. * Caráter de utilidade da Álgebra. * Trabalho com variáveis.	USg2.P3E
	USg5.P3E	* Contato com a realidade. * Importância da Álgebra no tratamento de fenômenos mundanos. * Amor pela Álgebra e seu ensino. * Sentido da Álgebra.	USg2.P3E
	USg6.P3E	* Modos de trabalhar com as fórmulas.	
	USg7.P3E	* Concepção de ensino da Álgebra. * Importância do ver intuitivo. * Atenção à realidade vivenciada. * Sentido da Álgebra.	USg2.P3E - USg3.P3E
	USg8.P3E	* Importância das noções de variável e de função na compreensão da Álgebra. * Caráter de utilidade da Álgebra. * Sentido da Álgebra.	
	USg9.P3E	* Preocupação por qualificar-se em modos de aplicar a Álgebra, visando o ensino.	
P4E	USg1.P4E	* Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno.	
	USg2.P4E	* Semelhanças e diferenças nas práticas de ensino na Escola e na Universidade.	
	USg3.P4E	* Semelhanças e diferenças nas práticas de ensino na Escola e na Universidade. * Concepção de Álgebra. * Álgebra aplicada na resolução de problemas.	USg11.P2E
	USg4.P4E	* Dilema do professor: o modo de gerenciar o tempo da aprendizagem do aluno e o escolar. * Descrição sobre a sequência de ensino de Álgebra.	USg13.P1E
	USg5.P4E	* Pré-requisitos para aplicar a Álgebra. * Importância da fatoração.	USg3.P4E - USg8.P2E - USg7.P2E - USg9.P1E
	USg6.P4E	* Transição entre a linguagem comum e a algébrica.	USg11.P2E, USg7.P1E
P5E	USg1.P5E	* Percepção da Álgebra como uma disciplina “ambígua”.	USg1.P3E.
	USg2.P5E	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> . * Descrição sobre a sequência de ensino de Álgebra;	USg2.P1E - USg2.P6E - USg1.P2E - USg1.P3E - USg2.P5E
	USg3.P5E	* Hiato na transição entre Álgebra ensinada na <i>Educação Básica e Média</i> e aquela trabalhada no nível universitário.	
	USg4.P5E	* Relação entre a Álgebra e a Aritmética. * Concepção de Álgebra.	USg1.P5E

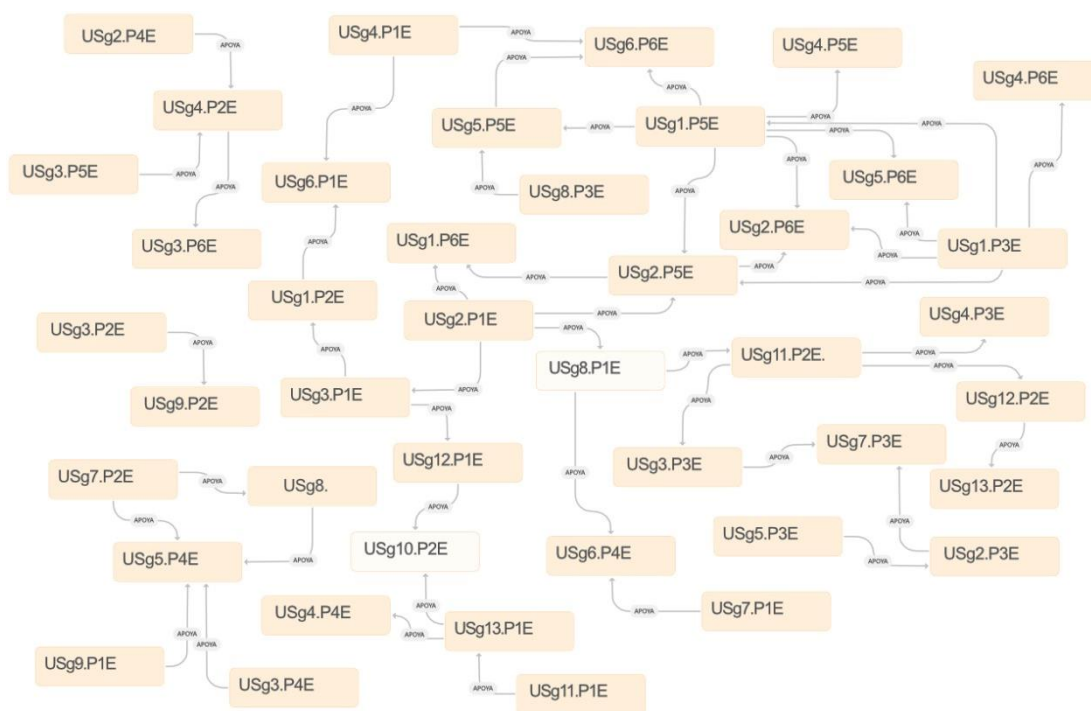
Prof Escola	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
	USg5.P5E	* Importância das noções de variável na compreensão da Álgebra. * Importância das ideias da Álgebra, para poder abrir a compreensão do próprio “conceito” de número.	USg1.P5E - USg8.P3E - USg8.P3E
	USg6.P5E	* A Álgebra como mecanismo de repressão. * Vivência com o ensino de Álgebra enquanto aluno. * Interesse dos alunos. * Desinteresse pela atitude de ensinar e educar trazida na Educação Matemática.	
	USg1.P6E	* Relata a utilização do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado. * Crença na eficácia dos exercícios na aprendizagem.	USg2.P1E - USg2.P5E
	USg2.P6E	* O livro <i>Álgebra de Baldor</i> se tornou num referente na tradição do ensino da Álgebra escolar.	USg2.P1E - USg2.P5E - USg1.P2E - USg1.P3E - USg2.P5E
	USg3.P6E	* Percepção da Álgebra como conjunto de ferramentas aplicáveis em um nível procedimental. * Na graduação cabe aos estudantes o estudo da Álgebra.	USg4.P2E - USg2.P4E - USg3.P5E
	USg4.P6E	* É por meio de exercícios que o sentido da Álgebra se revela. * Relação entre a Álgebra e a Aritmética. * Concepção de Álgebra.	USg1.P3E
P6E	USg5.P6E	* O ensino da Álgebra é introduzido subitamente no oitavo ano. * Salto da Aritmética para a Álgebra.	USg1.P3E - USg1.P5E
	USg6.P6E	* Sentido da estrutura subjacente à expressão algébrica. * Caráter multifacetado do conceito de variável.	USg5.P5E - USg4.P1E - USg1.P5E
	USg7.P6E	* Dificuldades que o aluno tem em Álgebra. * Relação entre a Álgebra e a Aritmética.	USg4.P1E - USg5.P5E - USg4.P1E
	USg8.P6E	* Importância da fatoração.	
	USg9.P6E	* Propósito de ensino da Álgebra. * Desafios do professor. * Preocupação por qualificar-se em modos de aplicar a Álgebra, visando o ensino.	

Fonte: elaboração própria

Um modo de visualizar as articulações explicitadas nos enxertos hermenêuticos, no movimento de análise ideográfica, é por meio de representações que evidenciem a inter-relação entre os sentidos emergentes (Figura 17, logo, seguir), visando a constituição de *Núcleos de Significado* (Ns). Essas articulações, ao serem observadas atentamente e analisadas em profundidade, possibilitam revelar a tessitura de significados que sustentam a experiência investigada, oferecendo uma perspectiva integrada dos sentidos individuais expressos nas Unidades de Significado — USg. Com essas conexões, torna-se possível delinear uma rede de

significados que reflete tanto a singularidade das vivências quanto seu potencial convergência em estruturas mais amplas e compartilhadas, as quais são aprofundadas na análise nomotética.

Figura 17 - Articulações de sentido das USg explicitadas nos enxertos hermenêuticos nas falas dos professores de escola



Fonte: elaboração própria

Após uma análise inicial das articulações emergentes nas entrevistas, explicitadas nos enxertos hermenêuticos, foram articulados *Núcleos de Significado* —Ns. Todavia, avançamos para uma revisão mais aprofundada do material, conduzida no movimento de Análise Ideográfica, com o objetivo de explorar e tornar esses núcleos mais claros, tendo em vista a compreensão do leitor. Nesse momento, buscamos abordar sistematicamente as 57 *Unidades de Significado* identificadas, a fim de revelar os sentidos e significados presentes na multiplicidade e complexidade das expressões presentes do que foi expresso nos depoimentos, traçando um caminho para indicar os invariantes do fenômeno em estudo.

Nesse primeiro movimento de reduções fenomenológicas, identificamos a convergência das *Unidades de Significado* (USg) em 26 *Núcleos de Significado* (Ns). Esses núcleos, quando expressos em forma de sentenças, buscam dar conta das convergências articuladas de sentidos e significados presentes nas USg. Na Tabela 6, apresentamos os *Núcleos de Significado* juntamente com a ocorrência das Unidades de Significado destacadas nos depoimentos dos Professores de Escola (PE).

Tabela 6 - Matriz de co-ocorrência das Unidades de Significado nas convergências dos Núcleos de Significado no movimento de análise ideográfico - PE

Código	Núcleo de significado	P1E	P2E	P3E	P4E	P5E	P6E
Ns1.PE	Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado:	USg2.P1E	USg1.P2E - USg3.P2E - USg4.P2E	USg1.P3E		USg2.P5E	USg1.P6E - USg2.P6E
Ns2.PE	Experiências acerca do método de ensino da Álgebra	USg1.P1E - USg6.P1E - USg10.P1E - USg11.P1E - USg12.P1E	USg2.P2E - USg3.P2E	USg2.P3E	USg1.P4E - USg2.P4E - USg6.P4E	USg1.P5E - USg2.P5E - USg3.P5E - USg6.P5E	USg1.P6E - USg2.P6E - USg3.P6E - USg5.P6E
Ns3.PE	Interesses e motivações	USg2.P1E	USg1.P2E - USg3.P2E	USg1.P3E - USg5.P3E	USg6.P4E		
Ns4.PE	Modos de perceber a Álgebra	USg4.P1E	USg4.P2E - USg6.P2E - USg12.P2E - USg13.P2E	USg1.P3E - USg3.P3E		USg1.P5E - USg3.P5E - USg6.P5E	USg4.P6E
Ns5.PE	Transição e confronto entre ensino escolar e universitário	USg3.P1E - USg5.P1E -	USg4.P2E - USg5.P2E - USg13.P2E	USg2.P3E - USg3.P3E	USg2.P4E	USg3.P5E - USg6.P5E	USg3.P6E - USg8.P6E
Ns6.PE	Concepção de Álgebra como ferramenta/meio e disciplina	USg1.P1E - USg4.P1E - USg5.P1E	USg8.P2E	USg4.P3E - USg7.P3E	USg3.P4E		USg1.P6E - USg2.P6E - USg3.P6E
Ns7.PE	Concepção de Álgebra como generalização da Aritmética	USg8.P1E - USg11.P1E	USg11.P2E			USg4.P5E	USg4.P6E
Ns8.PE	Caráter de utilidade da Álgebra	USg7.P1E	USg11.P2E - USg8.P2E -	USg2.P3E - USg4.P3E -	USg3.P4E		USg4.P6E - USg9.P6E

Código	Núcleo de significado	P1E	P2E	P3E	P4E	P5E	P6E
			USg12.P2E - USg6.P2E	Usg7.P3E - US8.P3E			
Ns9.PE	Concepção de Álgebra como cerne da Matemática	US6.P1E	USg12.P2E - USg13.P2E				USg8.P6E
Ns10.PE	Crença na eficácia dos exercícios	USg2.P1E - USg12.P1E	USg3.P2E	USg1.P3E		USg2.P5E	USg1.P6E - USg4.P6E
Ns11.PE	Importância da Fatoração na Álgebra		USg7.P2E - USg8.P2E				USg8.P6E
Ns12.PE	Importância das noções de variável e de função na compreensão da Álgebra			USg4.P3E - Usg8.P3E		USg1.P5E - USg5.P5E - USg6.P5E	USg6.P6E
Ns13.PE	Dilema do professor sobre o modo de gerenciar o tempo e conteúdo de ensino	USg12.P1E - USg13.P1E	USg10.P1E			USg5.P5E	USg5.P6E - USg9.P6E
Ns14.PE	Desafios do professor no contexto educacional atual	USg5.P1E - USg12.P1E				USg6.P5E	USg5.P6E - USg9.P6E
Ns15.PE	Preocupação por buscar estratégias de ensino	USg10.P1E - USg14.P1E	USg5.P2E - USg13.P2E	USg7.P3E			USg2.P6E
Ns16.PE	Adaptação aos interesses dos alunos	USg14.P1E	USg5.P2E - USg9.P2E	USg6.P3E			
Ns17.PE	Dificuldades dos alunos em Álgebra	USg8.P1E - USg9.P1E - USg11.P1E				USg1.P5E	USg6.P6E - USg7.P6E
Ns18.PE	Preocupação por qualificar-se em modos de aplicar a Álgebra	USg5.P1E	USg9.P2E	USg9.P3E			USg9.P6E

Código	Núcleo de significado	P1E	P2E	P3E	P4E	P5E	P6E
Ns19.PE	Transição entre a linguagem comum e a algébrica	USg7.P1E - USg11.P1E			USg6.P4E	USg1.P5E - USg4.P5E	USg5.P6E
Ns20.PE	Pré-requisitos para iniciar o estudo a Álgebra	USg8.P1E - USg9.P1E				USg5.P5E	USg6.P6E
Ns21.PE	O problema na aprendizagem da Álgebra radica na falta de domínio da Aritmética					USg5.P5E	USg7.P6E
Ns22.PE	Sentimentos e atitudes	USg13.P1E	USg1.P2E - USg2.P2E - USg3.P1E - USg5.P2E - USg9.P2E - USg10.P2E	USg1.P3E - USg5.P3E - USg6.P3E - USg7.P3E		USg6.P5E	
Ns23.PE	Sequência de ensino	USg2.P1E - USg3.P1E - USg5.P1E - USg6.P1E - USg10.P1E			USg1.P4E - USg2.P4E	USg2.P5E - USg4.P5E	USg1.P6E - USg3.P6E
Ns24.PE	Propósito de ensino da Álgebra		USg7.P2E - USg10.P2E	USg6.P3E - USg8.P3E		USg6.P5E	USg9.P6E
Ns25.PE	Qualidade de beleza da Álgebra		USg11.P2E	USg3.P3E			
Ns26.PE	Álgebra em contato com a realidade		USg6.P2E	USg2.P3E - USg3.P3E - USg5.P3E - USg.P3E			USg9.P6E

Fonte: elaboração própria ²⁰⁴

²⁰⁴ Tabela inspirada a partir do trabalho de Mancini e Mocrosky (2023)

5.3.2 A caminho dos núcleos de ideias -NI- mais abrangentes

Atentos à nossa pergunta de pesquisa, direcionamos nosso olhar para generalizações capazes de revelar perspectivas do fenômeno em estudo. Nesse movimento de pensar atento e reflexivo, conduziu-se a núcleos de sentidos e significados mais amplos, que elucidam modos de compreender as concepções de Álgebra e seu ensino, bem como os elementos de complementaridade entre esses aspectos. Assim, na segunda redução fenomenológica, articulamos 5 *Núcleos de Ideias*, como apresentado na Tabela 7, derivados dos 26 *Núcleos de Significado* inicialmente constituídos nos discursos presentes nos depoimentos dos professores das escolas.

Tabela 7 - Núcleos de Ideias obtidas como resultado das segundas reduções fenomenológicas - PE

Código	Núcleo de ideias	Núcleos de significado associados as NI	Nº de USg que a constituem
NI1.PE	Experiências vivenciadas com o ensino e a aprendizagem da Álgebra	Ns1.PE - Ns2.PE - Ns3.PE - Ns4.PE - Ns5.PE	62
NI2.PE	Concepções sobre a Álgebra e seu ensino	Ns6.PE - Ns7.PE - Ns8.PE - Ns9.PE - Ns10.PE - Ns11.PE - Ns12.PE	46
NI3.PE	Desafios e preocupações dos docentes no ensino da Álgebra	Ns13.PE - Ns14.PE - Ns15.PE - Ns16.PE - Ns17.PE - Ns18.PE	30
NI4.PE	Aspectos que envolvem o processo do ensino e da aprendizagem da Álgebra	Ns19.PE - Ns20.PE - Ns21.PE - Ns22.PE - Ns23.PE	36
NI5.PE	Sentido e significado atribuídos a Álgebra e seu ensino	Ns24.PE - Ns25.PE - Ns26.PE	21

Fonte: elaboração própria

A seguir, expomos a rede de articulações de sentidos e significados e as convergências associadas a cada núcleo de ideias, detalhando os aspectos que, em nossa perspectiva, manifestam sentidos e significados relevantes. Esses aspectos são apresentados descritivamente com o objetivo de nos apoiar na compreensão e síntese das ideias que compõem cada núcleo (NI). Além disso, essa compreensão busca identificar possíveis articulações que possam conduzir a uma fusão de horizontes, abrindo-nos ao horizonte de uma interpretação mais fecunda e aprofundada. Nesse contexto, a análise hermenêutica visa não apenas desvelar os significados implícitos nos discursos, mas também promover um diálogo entre as diferentes perspectivas, ampliando a complexidade e a profundidade da interpretação.

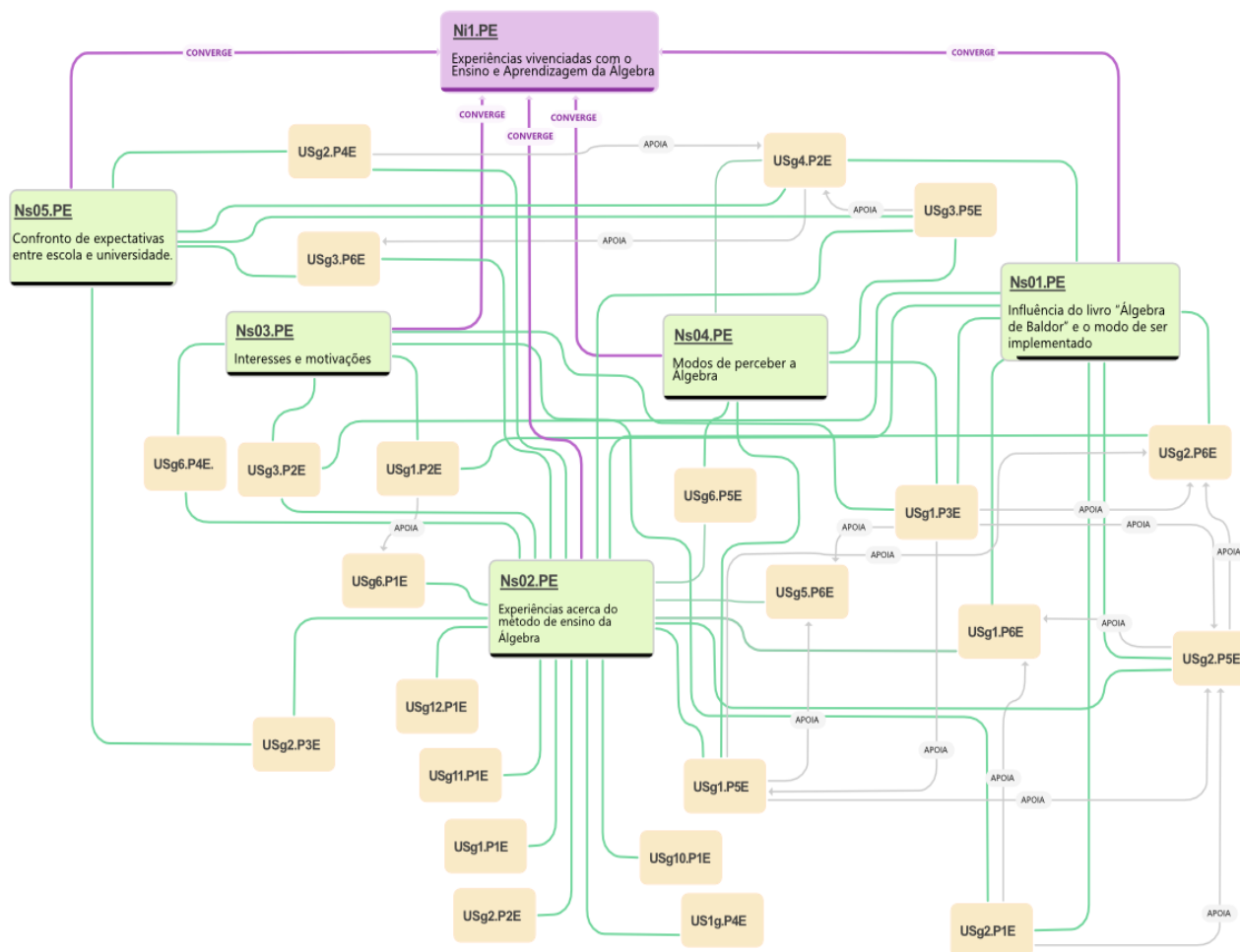
5.3.3 Interpretação das convergências nomotéticas

Empreendemos a construção de nossas interpretações por meio de um pensar que envolve um movimento dialético e dialógico, o qual se configura na interação entre a questão norteadora, a compreensão teórica articulada com os autores estudados e os depoimentos dos docentes entrevistados, visando à progressiva ampliação do nosso horizonte de compreensão.

NI1.PE —Experiências vivenciadas com o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Por meio das entrevistas, os professores revisitam essas vivências, trazendo à luz memórias e compreensões que conectam o passado ao presente. Assim, ao considerar o tempo fenomenológico, conforme Husserl (2006), como “essa forma de unidade de todos os vividos num fluxo de vivido”, em que a recordação, enquanto unidade de vivências constituídas, contém intenções de expectativa cujo preenchimento conduz ao presente, em que “a recordação não é, portanto, sem mais, recordação de uma percepção anterior” (p.86), ela possibilita compreensões de sentidos e significados no presente. Esse ato de rememoração revela um horizonte de sentidos e significados atribuídos à Álgebra, possibilitando compreender como essas vivências moldam suas perspectivas atuais sobre o ensino da disciplina. No movimento de análise nomotética, este núcleo temático se concentra nas vivências dos professores relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Álgebra, abrangendo tanto o período em que foram alunos quanto no exercício de sua profissão como docentes. Na Figura 18, são representados os núcleos de sentido que constituem a NI1.PE

Figura 18 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI1.PE



Fonte: elaboração própria.

Conforme relatado pelos professores, o livro *Álgebra de Baldor* tem uma influência significativa no ensino da Álgebra (Ns1.PE) que permanece como referência central na tradição do ensino desta disciplina. Esse livro é amplamente reconhecido por sua tradição e pela vasta quantidade de exercícios que oferece, o que é visto como um ponto positivo por alguns professores, pois permite que os alunos se envolvam com diferentes tipos de desafios e desenvolvam suas habilidades algébricas (USg2.P6E). No entanto, há críticas à metodologia do livro, que é centrada na prática de exercícios e na mecanização, com poucos problemas de aplicação contextualizados (USg2.P1E).

Os professores destacam que, durante sua formação, o ensino de Álgebra era amplamente pautado pelo livro *Álgebra de Baldor*, exceto no caso da professora P4E. A abordagem predominante consistia em explicações fornecidas pelo professor, seguidas pela resolução de exercícios retirados, em grande parte, da seção do livro denominada “miscelânea”.

Essa prática foi corroborada pelo relato do professor com mais tempo de atuação na docência (US2.P5E), que afirmou: “A Álgebra era estudada como a cartilha de toda a vida! que ainda continua sendo usada, a Álgebra de Baldor”. Com essa afirmação do professor P5E, notamos que a tradição e a autoridade do livro *Álgebra de Baldor* no contexto escolar são reconhecidas, influenciando o ensino e a aprendizagem da Álgebra até os dias atuais.

À luz da fala da professora P6, como foi analisado no enxerto hermenêutico na USg2.P6E, podemos elucidar que o livro *Álgebra de Baldor* ocupa um papel significativo em duas tradições distintas: na tradição pedagógica, como referência consolidada para o ensino sistemático da Álgebra; na tradição escolar, como parte de um legado histórico que marca a cultura e a identidade das instituições de ensino. Nessas duas dimensões, a obra assume um lugar de autoridade, tendo um impacto no cotidiano escolar e influenciando práticas educativas e o modo como a Álgebra é ensinada e aprendida.

Um aspecto que se destaca na análise da *história efetual*²⁰⁵, que permeia as articulações presentes no núcleo de sentido Ns1.PE, é a identificação do livro *Álgebra de Baldor* como um elemento representante de uma tradição que molda de forma particular um modo de compreender e ensinar a Álgebra. Nessa tradição, a Álgebra é concebida principalmente como o tratamento sintático de expressões algébricas, uma abordagem amplamente reforçada nesse livro, por meio de um trabalho sistemático e intensivo centrado na resolução de exercícios em que se enquadra o método de ensino (ver Figura 15), como evidenciado na USg2.P5E. O objetivo central dessa prática é desenvolver o domínio das regras operatórias para a manipulação simbólica. Essa interpretação é corroborada pelo depoimento do professor P2, que, na US1.P2E, refere-se à Álgebra escolar como a “Álgebra comum e corrente, [essa] que era a Álgebra de Baldor”, destacando sua compreensão como uma prática habitual e amplamente difundida na maneira de conceber e ensinar a disciplina.

As experiências relacionadas aos métodos de ensino da Álgebra (Ns2.PE) emergem como fator significativo neste núcleo de ideias analisado. Os professores refletem sobre suas vivências, tanto na posição de alunos, quanto na de docentes, revelando como essas experiências moldaram suas práticas e métodos de ensino atuais.

Na análise das entrevistas com os professores, particularmente na USg2.P1E, evidencia-se a experiência marcante relacionada à introdução da Álgebra no oitavo ano. Os professores relatam que essa etapa ocorre de forma abrupta, representando uma mudança significativa entre o ensino da Aritmética e o da Álgebra. Conforme analisado na USg3.P6E, na Colômbia, esse

²⁰⁵ Nesse sentido, Gadamer (2011a) manifesta que “isso é exatamente o que se tem de reter para a análise da consciência da história efetual: que ela tem a estrutura da *experiência*” (p. 512, grifos do autor).

modelo de ensino, caracterizado pela abrupta mudança do domínio da Aritmética tem origem nos programas curriculares de 1967 e reflete uma tradição pedagógica que ainda persiste. Na fala da professora P6, destaca-se que essa abordagem mantém um padrão curricular em que a Aritmética é seguida pela Álgebra sem uma transição gradual. De forma semelhante, o professor P5 descreveu o impacto dessa mudança, afirmando que o ensino da Álgebra “o tirava de contexto”, evidenciando a passagem repentina de operações com números para manipulações com letras, gerando estranhamento e desconexão em relação à Matemática ensinada até então.

Por outro lado, ao relatarem suas experiências como alunos na escola, os professores mencionaram que as aulas seguiam uma sequência geralmente fixa: inicialmente, os aspectos teóricos eram apresentados, seguidos de exemplos. Em seguida, os alunos se dedicavam à resolução de exercícios do livro *Álgebra de Baldor*, para, somente depois, abordar problemas de aplicação (ver Figura 15). No entanto, esses problemas eram limitados a situações muito específicas, em que os conteúdos poderiam ser aplicados de forma direta e evidente. Essa dinâmica foi relatada em diversas análises, como nas USg2.P2E, USg1.P4E, USg1.P1E, USg2.P5E e USg1.P6E.

Um aspecto relevante a ser considerado neste núcleo de ideias (NI1.PE), refere-se às percepções dos participantes sobre suas experiências relacionadas à interação entre professores e alunos no contexto do ensino da Álgebra (Ns3.PE). O professor P2E, na unidade de significado Usg2.P2E, acentua que, na época em que foi aluno, os professores enfatizavam a manutenção da ordem nas aulas, caracterizando-se por uma postura extremamente rigorosa. De forma similar, a unidade Usg3.P2E ressalta o papel central do professor nas atividades em sala de aula, frequentemente concentrado na prática expositiva do conteúdo. Por outro lado, o professor P6E, compartilha um relato marcante de sua vivência como estudante, evidenciando um evento negativo.

Com base no depoimento do professor P5E, é possível interpretar uma crítica contundente à maneira como a Álgebra tem sido adotada em algumas práticas de ensino, apontando que abordá-la como controle comportamental distorce sua função formativa. Ele assinala que, ao serem submetidos a métodos de ensino que priorizam a *Álgebra como uma ferramenta coercitiva*, impede-se aos alunos de desenvolver uma relação significativa e crítica com a disciplina.

Nos depoimentos dos professores P1E, P2E, P3E e P4E, emergem elementos que revelam seus interesses e motivações enquanto alunos na aprendizagem da Álgebra (Ns4.PE). A professora P4E, conforme a unidade significativa USg6.P4E, expressa um apreço especial

pelo trabalho com equações lineares, indicando uma experiência positiva e significativa relacionada a esse conteúdo específico. O professor P3E, segundo a USg1.P3E, valorizava o método adotado pelo livro *Álgebra de Baldor*, considerando-o motivador apesar de, em alguns casos, ser desafiador, sugerindo que a dificuldade era acompanhada de um estímulo que alimentava seu interesse. De forma semelhante, o professor P2E, como descrito na USg3.P2E, menciona que suas aulas de Álgebra eram principalmente baseadas em exercícios do mesmo livro, mas passou a apreciar a disciplina devido aos problemas de aplicação, que despertavam seu interesse e cuja resolução lhe trazia satisfação. Já o professor P1E, como indica a unidade USg2.P1E, menciona que a prática de realizar exercícios do referido livro também lhe gerava um sentimento de satisfação, reforçando um vínculo positivo com a disciplina. Esses relatos evidenciam como o envolvimento com a Álgebra, mediado por desafios e práticas significativas, teve um papel central na construção das motivações e interesses desses professores em sua trajetória escolar.

Um aspecto central que emerge nesse núcleo de ideias, refere-se aos modos como a Álgebra é percebida pelos professores (Ns4.PE). Essa experiência é compreendida enquanto vivência direta e imediata, desprovida de mediações conceituais ou julgamentos prévios, configurando-se como um fenômeno experiencial situado na prática do ensino e aprendizagem da Álgebra. Nesse contexto, destacam-se as significações subjacentes às narrativas dos participantes, as quais oferecem elementos que possibilitam desvelar como essas experiências contribuem para moldar a compreensão, as práticas e as abordagens da Álgebra.

No âmbito das percepções sobre a Álgebra, o professor P2E concebe essa área como um elemento central da Matemática na *Educação Média*, articulando-a de forma indissociável à Geometria e à Trigonometria. Para esse docente, a Álgebra transcende uma mera disciplina: ela constitui o *quid* da Matemática. Segundo seu entendimento, a relevância da Álgebra reside em sua ampla aplicabilidade a uma diversidade de situações. No entanto, ele ressalta que essa importância não se manifesta de forma imediata ou evidente, mas se revela progressivamente no decorrer de uma reflexão atenta sobre as experiências vivenciadas ao trabalhar com a Álgebra.

De outra perspectiva, um modo recorrente de compreender a Álgebra está frequentemente associado às práticas matemáticas que envolvem operações com números e letras. Tal entendimento é evidenciado na fala da professora P6E, que destaca: “é por meio de exercícios que o sentido da Álgebra se revela” (USg4.P6E). Essa percepção parece estar diretamente vinculada à maneira como a Álgebra é tradicionalmente abordada no contexto escolar. Conforme discutido em parágrafos anteriores, o livro *Álgebra de Baldor* contribuiu

significativamente para consolidar uma visão particular dessa disciplina, frequentemente descrita como a “Álgebra comum e corrente” (USg4.P2E). Trata-se da Álgebra trabalhada nas escolas, cuja prática de ensino se estrutura em grande medida com base no método proposto nesse material didático.

Embora essa visão seja comum, ela pode reforçar a concepção de que o uso de letras na Álgebra é algo enigmático, destinado unicamente a criar um senso de complexidade ou “mistificação”, conforme argumentado por Russell (2010). No entanto, é possível assumir uma perspectiva alternativa, que interpreta essa abordagem como parte do desenvolvimento de uma “atividade” matemática, isto é, como uma prática que privilegia a ação e o engajamento ativo dos sujeitos no processo de construção do conhecimento algébrico.

A ideia de “atividade” ou “ação” também sugere que a Álgebra é compreendida, em muitas situações, como um conjunto de procedimentos ou manipulações, em que o foco está nas transformações dos elementos e não na natureza dos objetos matemáticos em si, como sugerem Arcavi, Drijvers e Stacey (2017). O relato do professor P6E sugere a ideia de que a Álgebra é frequentemente compreendida não tanto por meio dos objetos em si, mas pelo modo como interagimos com eles (USg4.P6E), há, portanto, um certo consenso a respeito de quais são as coisas da Álgebra: equações, cálculo literal, funções, entre outras. Porém, Freudenthal alerta a respeito da possibilidade de cair em um automatismo, “domina-se uma atividade tão perfeitamente que a questão de como e por que não é mais perguntada, não pode mais ser feita e nem mesmo é mais entendida como uma questão significativa e relevante” (Arcavi, Drijvers e Stacey, 2017, p. 87).

O professor P5E comentou sobre sua percepção inicial da Álgebra, descrevendo-a como “muito ambígua”. Ele sentia que essa disciplina gerava dúvidas e incertezas, parecendo vaga e obscura. Esse caráter de “ambiguidade”, conforme examinado no enxerto hermenêutico na USg1.P5E, pode surgir de diferentes fontes, sendo uma das mais significativas a utilização de um conjunto mínimo de símbolos que pode ser interpretado de maneiras diferentes. Assim, em nosso modo de ver, tratar os símbolos como objetos matemáticos em si pode ser a raiz dessa percepção de ambiguidade mencionada pelo professor ao começar a estudar Álgebra na escola.

Os modos de perceber a Álgebra, conforme evocados no desdobramento das vivências formativas na graduação, manifestam variações entre os professores da *Educação Média* entrevistados. Para o professor P1E, a Álgebra torna-se mais abstrata à medida que se avança nos estudos, seja pela progressão escolar, passando de uma “Álgebra da escola” mais concreta para uma “Álgebra da universidade” mais abstrata, ou pelo aprofundamento na disciplina que a torna mais abstrata, pois conceitos iniciais mais concretos e ligados a números e operações

evoluem para teorias e estruturas complexas, como grupos, anéis e campos (USg4.P1E). O professor P3E, por outro lado, manifesta que no percurso da graduação foi reconhecendo a aplicabilidade e presença da Álgebra no cotidiano, o que lhe levou a compreender que essa disciplina está “inserida na vida” (USg3.P3E). Entretanto, o professor P5E nota que, no nível universitário, a Álgebra não é tratada explicitamente, sendo subentendida como uma base fundamental (USg3.P5E). Essa perspectiva sugere que a Álgebra é vista como uma disciplina restrita aos tópicos na *Educação Básica e Média*, indicando uma *desarticulação* com a Álgebra abordada no nível universitário, em que ela se torna um conteúdo que é visto como parte de uma base fundamental, muitas vezes diluída ou subentendida dentro de outros tópicos mais avançados.

Ainda, podemos destacar que a fala do professor P5E se refere à percepção sobre práticas de ensino por ele vivenciadas, que a Álgebra é adotada como um método punitivo ou ferramenta coercitiva para o controle comportamental dos estudantes. O professor P5E reconhece que um problema atual que se impõe é o desinteresse crescente pela educação matemática, e, mais especificamente, pela Álgebra (USg6.P5E). À luz do exposto pelo professor, compreendemos que ao se referir à educação matemática, ele alude não à região de inquérito em si, mas ao distanciamento entre o aluno e o conteúdo matemático que frequentemente resulta em uma desconexão com sua relevância prática e conceitual.

Por fim, o trazido neste núcleo de ideias (NI1.PE) avulta a transição e o confronto entre o ensino escolar e o universitário (Ns5.PE). Os professores apontam diferenças significativas entre as práticas de ensino desses dois níveis, refletindo a existência de um hiato na transição. Esse hiato evidencia uma discrepância nas expectativas e abordagem da Álgebra, desde os conceitos ensinados na *Educação Básica e Média* até os explorados na *Educação Superior*.

Segundo o relatado nos depoimentos, particularmente na USg3.P1E, as práticas de ensino desenvolvidas tanto na escola como na universidade seguiam sendo muito similares, como aparece representado nas figuras 12 e 13. A professora P6 destaca que um dos temas principais no decorrer da *Educação Básica e Média* são os casos de fatoração, que são amplamente utilizados em níveis mais avançados de estudo, inclusive na universidade. No entanto, como indicado na USg2.P4E, a abordagem da Álgebra na graduação se tornou mais avançada. Por sua vez, os professores P3, P5 e P6 manifestam que, na graduação, os tópicos de Álgebra não são abordados de maneira substancial, estes aparecem, escassamente, geralmente quando são *aplicados em um nível procedimental* (USg3.P6). Com esses depoimentos, evidenciamos o apontado por Usiskin (1995, p.9): “[...] a Álgebra ensinada na escola média tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores de Matemática”. Essa

perspectiva, conforme compreendemos, aponta para um “hiato” na transição entre os saberes constituídos na *Educação Básica e Média* e os conceitos tratados na *Educação Superior*.

Ainda, o professor, na USg5.P2E, narra sobre sua preocupação ao finalizar a graduação, momento no qual teve que realizar o estágio numa escola. Nesse depoimento, evidencia-se o desafio enfrentado pelos professores no início do exercício de sua profissão, marcado pela transição abrupta da teoria acadêmica para a prática em sala de aula. Consideramos esses depoimentos particularmente reveladores, pois evidenciam uma perspectiva distinta sobre o “hiato” entre o conhecimento adquirido na *Educação Superior* e o que efetivamente o professor de Matemática, no exercício de sua profissão, ensina na escola com base no aprendizado universitário. Tal contraste destaca o desafio enfrentado pelos professores em adaptar e aplicar seus conhecimentos acadêmicos e a teoria ensinada nas universidades à realidade prática do ensino nas escolas.

NI2.PE —Concepções sobre a Álgebra e seu ensino.

Este núcleo de ideias reflete as concepções dos professores sobre a Álgebra e seu ensino, destacando crenças, definições e entendimentos que fundamentam suas práticas de ensino e suas visões sobre a natureza dessa área do conhecimento. Essa análise busca evidenciar os significados atribuídos pelos docentes ao ensino da Álgebra, articulando tais significados às suas práticas profissionais, bem como às suas interpretações sobre o papel formativo dessa disciplina no desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes. Na figura 19 são apresentados os núcleos de significado que constituem o NI2.PE.

processos de cálculo mais automatizados (enxerto hermenêutico USg4.P1E). Compreendemos que essa interpretação reflete a visão de que a Álgebra não é um fim em si mesma, mas uma disciplina cuja *aplicabilidade* transcende seus próprios limites conceituais. Consideramos que essa interpretação se sustenta nas USg4.P1E e USg3.P4E, nas quais as compreensões dos professores convergem na ideia de que a Álgebra deve ser centralizada na resolução de problemas. Para eles, a Álgebra atua principalmente de um modo auxiliar, desempenhando a função de apoiar outras áreas da Matemática e de facilitar a resolução de problemas.

As análises nomotéticas dos depoimentos também revelam a concepção da Álgebra amplamente associada à ideia de generalização da Aritmética (Ns7.PE). No caso específico das falas de P1E e P2E, identificam-se elementos convergentes que reforçam essa concepção. Na USg11.P2E, é evidenciada a ideia da Álgebra como um campo da Matemática que incorpora e expande a Aritmética. De modo análogo, a unidade USg8.P1E também destaca a Álgebra como uma forma de generalização de aspectos da Aritmética. Essa visão, conforme Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.79), aproxima-se à “tendência tradicional [que a considerava] como uma Aritmética universal ou generalizada”.

As considerações da professora P6E, que compreende a Álgebra como uma continuidade natural da Aritmética, reforçam a correlação com a concepção predominante nos depoimentos analisados anteriormente. Segundo P6E, a Álgebra é percebida como uma continuidade natural da Aritmética, em que as letras assumem o papel de números, preservando as mesmas operações fundamentais (USg4.P6). Essa visão, de acordo com nossa interpretação, evidencia que, embora a Álgebra seja frequentemente apresentada como uma extensão da Aritmética – com o intuito de favorecer a transição dos estudantes, aproveitando sua familiaridade com os procedimentos aritméticos –, tal abordagem pode restringir uma compreensão mais ampla e aprofundada dos conceitos algébricos. Por exemplo, a ideia de variável, fundamental à Álgebra, pode ser limitada a uma visão mecanicista, reduzindo seu potencial de abstração e flexibilidade. Esse ponto será analisado de forma mais detalhada no desenvolvimento deste núcleo de ideias (NI2.PE).

Outro aspecto emergente neste núcleo de ideias diz respeito ao caráter utilitário atribuído à Álgebra (Ns8.PE). Tal dimensão emerge não apenas pela sua reconhecida relevância em situações práticas e cotidianas, mas também pela sua aplicabilidade em contextos interdisciplinares, como na modelagem de situações ou de objetos e na resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento. De maneira convergente, os relatos analisados, como evidenciado em USg12.P2E e USg4.P3E, enfatizam a percepção de que a Álgebra ocupa um

papel central no ensino de Matemática, sendo valorizada por sua ampla versatilidade e capacidade de subsidiar a compreensão e a operacionalização de situações diversas.

Além disso, os professores ressaltam determinados enfoques que consideram mais significativos para abordar sua dimensão utilitária da Álgebra no contexto de ensino. A professora P4E, por exemplo, enfatiza a necessidade de organizar o ensino da disciplina com foco na resolução de problemas (USg3.P4E), considerando essa abordagem fundamental para promover o desenvolvimento do pensamento crítico e aplicado. De maneira convergente, o professor P1E destaca a passagem de expressões da linguagem verbal para a linguagem simbólica como um elemento substancial que contribui no enfoque de resolução de problemas (USg7.P1E). Por sua vez, para o professor P2E, a *fatoração* é a parte da Álgebra mais enfatizada na resolução de problemas (USg8.P2E). Se bem que o enfoque de resolução de problemas tenha sido amplamente trabalhado no âmbito da Educação Matemática elementar, conforme evidenciado no enxerto hermenêutico USg3.P4E. Miorim e Miguel (1993) nos alertam que ao vincular a Álgebra à concepção de ser ela instrumento para a resolução de problemas, pode restringir sua aprendizagem a um mero “transformismo algébrico”, limitando, assim, sua compreensão e aplicabilidade em contextos mais amplos.

O professor P3E manifesta que devido à sua formação profissional ser em engenharia, a Matemática teve um enfoque predominantemente voltado para as aplicações práticas (USg2.P3E). Segundo seu depoimento, isso lhe permitiu abordar a Álgebra de maneira interdisciplinar, adquirindo um repertório maior de situações para desenvolver atividades práticas. Nesse sentido, ele considera relevante incorporar atividades práticas no ensino da Álgebra, de modo a direcionar os estudantes para a modelagem de situações do cotidiano, reforçando a importância das *noções de variável e de função*, fundamentais para a compreensão do sentido da Álgebra e sua aplicabilidade (USg7.P3E e USg8.P3E).

No entanto, a professora P6E observa que os alunos frequentemente questionam a utilidade da Álgebra no cotidiano, uma inquietação que, como compreendemos, é amplamente recorrente entre alunos em diversas realidades educacionais ao redor do mundo, conforme evidenciado na análise do enxerto hermenêutico na USg9.P6E. Entendemos que essa percepção destaca a necessidade de aprofundar a reflexão sobre as finalidades e os benefícios do ensino da Álgebra, sobretudo em relação à sua conexão com as experiências imediatas e significativas dos estudantes.

Um núcleo de sentido que emerge das entrevistas realizadas se refere à crença amplamente compartilhada pelos professores na eficácia do desenvolvimento de exercícios no ensino da Álgebra (Ns10.PE). As práticas repetitivas são vistas como fundamentais para

consolidar os conhecimentos e promover o desenvolvimento das habilidades algébricas nos estudantes.

Conforme descrito no núcleo de ideias anterior (NI1.PE), observa-se que os docentes entrevistados, em geral, associam suas próprias experiências de aprendizagem da Álgebra à metodologia tradicionalmente adotada no livro *Álgebra de Baldor*. Esse material didático, reconhecido por sua abordagem intensiva em exercícios práticos, é citado como uma referência central na formação matemática desses professores (USg1.P6E, USg2.P5E, USg3.P2E).

Contudo, como apontado por alguns professores, a metodologia fundamentada na prática intensiva de exercícios parece ter sido associada a um sentimento de satisfação pessoal durante seu processo de aprendizagem (USg1.P3E). Interpretamos que essas vivências contribuíram para moldar e consolidar a crença na eficácia dos exercícios no ensino da Álgebra. Essa crença reflete uma abordagem predominantemente pragmática, na qual o foco está direcionado às transformações dos elementos algébricos, em detrimento de uma exploração aprofundada sobre a natureza formal dos objetos matemáticos. Tal perspectiva privilegia a funcionalidade da Álgebra, percebida principalmente por sua aplicabilidade prática, ao invés de sua compreensão conceitual. Esse entendimento reforça a ideia amplamente aceita de que o domínio da Álgebra requer prática constante. Nesse contexto, como destacado pela professora P6E, é através da resolução de exercícios que o sentido da Álgebra se torna acessível e compreensível (USg4.P6E). A esse respeito, Lee (1997) observa que a Álgebra “[...] é muito mais sobre fazer, é na verdade sobre ação sobre as coisas [...] com a atenção mais voltada para as *transformações* do que para os próprios objetos”²⁰⁶ (p. 187, *apud* Kieran, 2004, p.22, tradução nossa e grifos do autor). No entanto, como argumentado no enxerto hermenêutico USg4.P6E, não é tão evidente que habilidades processuais automatizadas, como resultado da prática exaustiva, e o desenvolvimento do pensamento algébrico flexível caminhem de forma paralela, e podem até mesmo entrar em uma relação de tensão.

Entre os conteúdos destacados, a *fatoração* é frequentemente mencionada como um tópico central no ensino e na aprendizagem da Álgebra (Ns11.PE), valorizada tanto por sua relevância conceitual quanto por sua ampla aplicabilidade (USg8.P2E). No enxerto hermenêutico na USg8.P6E, levantamos o questionamento: por que é importante fatorar? Encontramos alguns indícios em Eisenberg e Dreyfus (1995) que argumentam sua importância no contexto da busca de raízes de polinômios.

²⁰⁶ ... is so much more about doing, is actually about action on things, ... with attention being more on the *transformations* than on the objects themselves

Esses autores apresentam vários exemplos onde se evidencia a capacidade da fatoração de estabelecer articulações significativas entre conceitos frequentemente tratados de forma isolada no estudo dos polinômios. Nesse sentido, a ênfase atribuída à fatoração no ensino da Álgebra não se limita a um objetivo técnico, mas reflete um esforço em promover uma compreensão integrada e aprofundada das inter-relações conceituais no campo da Matemática, contribuindo para o desenvolvimento de uma perspectiva mais ampla no ensino e na aprendizagem.

Além disso, as noções de *variável* e *função* são consideradas pilares fundamentais para o entendimento da Álgebra (Ns12.PE), sendo vistas como conceitos estruturantes que sustentam o raciocínio algébrico. Essas concepções refletem uma visão abrangente e multifacetada da Álgebra, que integra sua utilidade prática com a profundidade de sua fundamentação teórica, buscando promover um ensino que articule teoria e prática de forma significativa e eficaz.

Na tentativa de promover o engajamento dos estudantes no aprendizado da Álgebra, o professor P5E relata que, em suas aulas, utiliza a analogia de que “a vida da gente é uma função”. Com essa analogia, busca estabelecer um vínculo entre a vivência cotidiana dos alunos e os conceitos matemáticos, sugerindo que a vida humana pode ser vista, de forma simbólica, como uma função matemática. Conforme interpretamos à luz de seu depoimento, “o professor procura tornar a Álgebra mais acessível e próxima dos estudantes” (Enxerto hermenêutico na USg6.P5E).

No estudo das funções, as variáveis evidenciam-se como fundamentais, pois são elementos que podem assumir diferentes valores dentro de um domínio específico. Uma função²⁰⁷, nesse contexto, pode ser compreendida como “uma relação entre variáveis, tal que, ao se atribuir um valor a uma delas, determina-se um ou mais valores correspondentes para a outra” (Mora, 2001, p. 11540). Nesse sentido, o professor P3E destaca a importância das noções de função e variável, como componentes fundamentais para compreender e avaliar a previsibilidade proporcionada pelos modelos matemáticos. Nesse âmbito, os modelos matemáticos, especialmente na Matemática Aplicada, podem ser entendidos “como uma atividade em busca de sintetizar ideias concebidas a partir de situações empíricas que estão quase sempre, escondidas num *emaranhado de variáveis*” (Bassanezi, 1999, p. 13, grifos nossos).

O professor P3E relata que, em suas aulas, enfatiza aos estudantes a importância das variáveis na compreensão do sentido da Álgebra e sua aplicabilidade prática. Ele chega a

²⁰⁷ Formalmente, uma função f de um conjunto A para um conjunto B é uma regra que atribui a cada elemento x em A um único elemento y em B , denotado por $f(x)$.

afirmar que “o mundo funciona com variáveis” (USg8.P3E), buscando, dessa forma, despertar nos alunos uma percepção ampliada sobre a utilidade da noção do conceito de variável. No âmbito da Matemática, as múltiplas interpretações que podem ser atribuídas a uma variável são denominadas “valores da variável”. Esses valores podem pertencer a um conjunto variado de entidades, tais como proposições, funções, classes ou relações. Nesse sentido, “[na] Matemática convencional, uma variável geralmente representa um número ou quantidade indeterminada. Na lógica matemática, qualquer símbolo cujo significado não seja determinado é chamado de *variável*”²⁰⁸ (Whitehead e Russell, 1981, p.57, tradução nossa e grifos do autor).

A professora P6E relata que ao iniciar a lecionar os conteúdos de Álgebra, os estudantes tentam aplicar as operações de forma semelhante à Aritmética, esperando que as letras se comportem como valores numéricos concretos (USg6.P6E). Nesse mesmo sentido, o professor P5E relata que, em sua vivência quando estudante na escola, a Álgebra lhe parecia “ambígua”, pois as letras não possuíam um valor garantido. Drouhard e Teppo (2004) destacam que um dos aspectos fundamentais dos escritos simbólicos da Álgebra é a sua capacidade de ser compacta e poderosa — uma descrição sobre o potencial simbólico da Álgebra foi abordado na US12.P2E. Entretanto, conforme apontam Drouhard e Teppo (2004), essa natureza simbólica, embora eficiente, também confere à linguagem algébrica um potencial considerável de “ambiguidade”.

Assim mesmo, Usiskin (1995) defende que o conceito de variável possui um *caráter multifacetado*, tornando inadequada qualquer tentativa de reduzir a Álgebra ao simples estudo das variáveis. Essa multiplicidade de significados inerente ao conceito de variável, conforme interpretamos, possibilita diferentes domínios de significação, compreensão e aplicação da linguagem algébrica empregada. A *versatilidade* do conceito se torna evidente quando analisamos, por exemplo, a relação entre o produto de dois números e um terceiro número, o que pode ser explorado sob diferentes perspectivas. No entanto, Usiskin (1995) também alerta que as variáveis, por serem conceitos *multifacetados* e sujeitas a diversas definições, conotações e símbolos, devem ser compreendidas de modo mais amplo, pois “tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma super simplificação que, por sua vez, distorce os objetos da Álgebra” (p. 12). Sendo assim, compreendemos que o entendimento abrangente da variável é crucial para a formação de uma visão ampla da Álgebra e de suas múltiplas funções no campo da Matemática.

²⁰⁸ En la Matemática ordinaria, una variable representa generalmente a un número o cantidad indeterminados. En Lógica matemática, se llama variable a cualquier símbolo cuyo significado no esté determinado.

Da perspectiva de que as variáveis, enquanto elementos representacionais, podem ser concebidas como símbolos ou letras que indicam números emerge a compreensão de que os valores atribuídos a essas variáveis nem sempre correspondem estritamente a quantidades numéricas, mesmo no domínio da Álgebra escolar. Essa constatação revela a *flexibilidade* inerente à notação matemática, permitindo que a representação de variáveis transcenda o trabalho exclusivo de letras. Tal flexibilidade, contudo, exige um sentido próprio que é determinado pelas especificidades do contexto em que a notação é aplicada, reforçando a necessidade de considerar as práticas e interpretações dos professores e os estudantes na construção de significados matemáticos.

Na visão da professora P6E, ao iniciar o estudo da Álgebra, é fundamental que os estudantes desenvolvam a capacidade de perceber as estruturas equivalentes subjacentes às expressões algébricas (USg6.P6E). Em nosso entendimento, tal abordagem busca que os alunos compreendam as letras em Álgebra, não apenas como símbolos isolados, mas como objetos matemáticos que carregam uma flexibilidade e um potencial de variação. Esses aspectos são capitais para a construção de um entendimento mais profundo e abrangente da Álgebra, especialmente em sua dimensão estrutural e generalizadora.

Sendo assim, os símbolos empregados em Álgebra podem ser entendidos “como representações de procedimentos ou podem ser tomadas estruturalmente para representar objetos”²⁰⁹ (Drouhard e Teppo, 2004, p.241, tradução nossa). Assim, a mesma característica que confere à Álgebra sua força expressiva, permitindo a transição entre *camadas de abstração* e a compressão de *ideias complexas, também exige uma habilidade interpretativa mais refinada*, o que pode ser um desafio significativo para o estudante iniciante.

Linchevski e Livneh (1999) ressaltam um aspecto crucial ao enfatizarem que, embora seja fundamental proporcionar aos estudantes oportunidades para perceberem a estrutura subjacente às expressões algébricas, esse processo deve ser conduzido de maneira que favoreça o desenvolvimento do *sentido da estrutura*. Em outras palavras, conforme os autores argumentam, os estudantes devem ser “capazes de usar estruturas equivalentes de uma expressão de forma flexível e criativa. A instrução deve promover a busca pela decomposição e recomposição das expressões e garantir que a ginástica mental necessária na manipulação das expressões faça sentido”²¹⁰ (p. 191, tradução nossa).

²⁰⁹ collections of symbols can be seen as either representations of procedures or can be taken structurally to stand for mathematical objects.

²¹⁰ they will be able to use equivalent structures of an expression flexibly and creatively. Instruction should promote the search for decomposition and recomposition of expressions and guarantee that the mental gymnastics needed in manipulating expressions makes sense.

Segundo Usiskin (1995), ao se entender a Álgebra como o estudo de estruturas, a variável passa a ser concebida como um elemento arbitrário inserido em uma estrutura definida por propriedades específicas — essa é a concepção característica da variável na Álgebra abstrata. Por sua parte, Arcavi, Drijvers e Stacey (2017) destacam que a Álgebra revela estruturas equivalentes com significados diferentes. Entretanto, os alunos, focados nas rotinas de manipulação de expressões algébricas, muitas vezes perdem de vista como a alteração da forma algébrica destaca aspectos diferentes da estrutura matemática, permitindo a resolução de problemas distintos.

Compreendemos, portanto, que, embora os alunos aprendam a identificar expressões equivalentes, o propósito de centrar o foco em diferentes estruturas resolve diferentes problemas. No entanto, esse propósito frequentemente se perde no ensino da Álgebra, devido à ênfase nas regras e procedimentos, como ocorre na prática da fatoração, que muitas vezes é reduzida a um mero exercício de “transformismo” simbólico, desvinculado de seu *significado conceitual multifacetado*.

NI3.PE— Desafios e preocupações dos docentes no ensino da Álgebra.

Este núcleo abrange as dificuldades e os desafios enfrentados pelos professores no ensino de Álgebra. As visões apresentadas revelam um campo de tensões, no qual os professores precisam equilibrar o aprofundamento conceitual com as exigências curriculares, enfrentando dilemas de gestão de tempo e conteúdo (Ns13.Pe), entre outros desafios de sua prática docente no dia a dia. Na Figura 20 aparecem representados os núcleos de sentido que constituem a NI3.PE.

de ensino para aprofundar determinados tópicos pode comprometer o progresso esperado do currículo. Por outro lado, abordar os temas de forma superficial pode ser visto como inadequado tanto pela instituição quanto pelos colegas docentes e pelos próprios alunos. Essa dualidade, conforme entendemos nos depoimentos, coloca o professor em uma posição desafiadora, na qual precisa equilibrar a qualidade do ensino com as demandas institucionais, além de lidar com eventuais julgamentos decorrentes desse equilíbrio.

Outro dilema recorrente nos depoimentos está associado à prática de atribuir exercícios aos alunos. O professor P1E expressou sua preocupação sobre a aceitação de tal prática no ambiente escolar atual, em que a atribuição de uma quantidade elevada de exercícios não é considerada pedagogicamente aceitável (USg12.P1E). Contudo, ele enfatizou que, em certos momentos, a repetição de exercícios é necessária para que os estudantes desenvolvam ou consolidem habilidades matemáticas específicas. Esse dilema reflete uma contínua tensão entre as crenças particulares dos professores entrevistados e as demandas institucionais e sociais que moldam as práticas de ensino.

Também, os relatos dos professores mostram convergências de significação, revelando múltiplos desafios no ensino da Álgebra, atravessados por tensões pedagógicas, estruturais e sociais no contexto educacional atual (Ns14.PE). A professora P6E expõe uma dificuldade central ao ensinar Álgebra: explicar sua aplicabilidade prática no cotidiano (USg9.P6E). Ela reconhece que, enquanto áreas como Geometria e Estatística possuem aplicações mais acessíveis e intuitivas aos estudantes, a Álgebra se apresenta como uma área abstrata, dificultando tornar explícita a conexão com experiências próximas dos alunos. Ela aponta que os estudantes frequentemente verbalizam essa desconexão, questionando a relevância dos conceitos algébricos para suas vidas. Como tem indicado Arcavi, Drijvers e Stacey (2017), um questionamento bastante comum entre estudantes de diversas partes do mundo é: qual é o sentido de aprender Álgebra? Para lidar com tal questionamento, particularmente, a professora P6E manifesta adotar uma estratégia que descreve como “sair pela tangente”, isto é, oferecer respostas que, embora não sejam totalmente diretas, justificam a continuidade do ensino ao enfatizar a importância da Álgebra para o desenvolvimento de habilidades matemáticas com vistas a responder às necessidades escolares nos anos subsequentes de sua formação, tanto para a *Educação Média* quanto para a *Educação Superior*.

Nesse contexto, a angústia demonstrada pela professora P6E para explicar aos seus estudantes a aplicabilidade prática da Álgebra no cotidiano emerge como um reflexo de um desafio significativo que ela busca enfrentar no seu cotidiano na sala de aula. Em nossa acepção, esse sentimento de angústia, entretanto, não é exclusivo da experiência pessoal da professora

P6E. Pelo contrário, como argumentado por MacGregor (2004), esse desafio permanece presente e relevante na comunidade da Educação Matemática, onde os possíveis caminhos para abordá-lo exigem um processo complexo e minucioso de análise, cuja clareza não é imediatamente dada e continua a ser um tema recorrente e não totalmente superado.

A mesma professora menciona a transição da Aritmética para a Álgebra como outro desafio recorrente em sua prática docente (USg5.P6E), caracterizado pela introdução abrupta de letras no contexto de ensino que, até então, prioriza (ou enfatiza) o trabalho numérico. Na Colômbia, os documentos curriculares do Ministério da Educação Nacional (MEN) definem o ensino da Álgebra como transversal, visando desenvolver o Pensamento Variacional e o domínio dos Sistemas Algébricos e Analíticos²¹¹ desde a *Educación Básica*. No entanto, na prática, a Álgebra é frequentemente introduzida apenas no oitavo ano, o que evidencia uma contradição com essas orientações curriculares. Conforme entendemos à luz das análises dos depoimentos dos professores, esse modelo abrupto, herança dos currículos de 1967 na Colômbia, preserva dificuldades associadas à transição entre Aritmética e Álgebra, reforçando a persistência de um padrão de ensino, tornando-se um desafio para os professores.

Alguns dos professores entrevistados destacaram dificuldades relacionadas às ferramentas e aos recursos didáticos disponíveis, como se evidencia na USg5.P1E, o que, segundo os depoentes, frequentemente limita a possibilidade de implementação de metodologias inovadoras em sala de aula que envolvem o uso de recursos técnicos, como computadores e calculadoras, até materiais manipuláveis, fundamentais para apoiar o ensino da Matemática.

O professor P5E, na unidade USg6.P5E, amplia a discussão ao destacar o desinteresse dos estudantes pela Educação Matemática, em especial pela Álgebra. Com isso, ele busca dizer que o maior desafio não se limita apenas a reformular métodos de ensino, mas reside em tornar a disciplina mais atraente e significativa para os alunos. Essa falta de motivação, conforme frisado pelo professor, é influenciada pela percepção de que o conhecimento escolar não está alinhado às demandas do mercado de trabalho ou às perspectivas de futuro dos estudantes. O professor sugere que o desinteresse dos alunos reflete uma desconexão entre o ensino da Álgebra e sua relevância prática, o que contribui para a percepção da disciplina como descontextualizada e, em alguns casos, opressiva (USg6.P5E).

Esse frequente desinteresse manifestado pelos estudantes pela aprendizagem da Álgebra, delega aos professores o desafio de adaptar o ensino aos interesses e motivações dos

²¹¹ Este aspecto é abordado mais amplamente na seção 3.2 no presente texto.

estudantes, o que demanda abordagens mais contextualizadas e conectadas às suas realidades imediatas (Ns15.PE). Nesse contexto, na unidade USg5.P2E, o professor P2E também mostra o desafio enfrentado pelos professores no início do exercício de sua profissão, marcado pela transição abrupta da teoria acadêmica na graduação para a prática docente em sala de aula. Para ele, a preocupação central estava em encontrar maneiras de que os alunos o compreendessem, focando mais em motivar os alunos para que fizessem atividades de aula do que em ensinar somente com o livro *Álgebra de Baldor*.

Nesse sentido do dito pelo professor P2E, o professor P3E ressalta a necessidade de os estudantes interagirem com atividades práticas, fazendo com que eles se envolvam com situações reais, o que possibilita que os estudantes se encaminhem à modelação. Para P3E, é fundamental considerar a intuição dos alunos ao ensinar Álgebra e evidenciar a utilidade dessa disciplina de forma concreta. Essa valorização da experiência intuitiva remete ao "princípio dos princípios" da fenomenologia husserliana, segundo o qual o conhecimento legítimo deve emergir daquilo que se apresenta originariamente à consciência. Assim, a abertura à intuição — entendida como apreensão direta dos fenômenos — constitui um primado potente para a aprendizagem, pois permite que os significados matemáticos sejam constituídos à luz da experiência vivida, e não apenas da abstração formal.

Para isso, convém integrar essa *intuição* às práticas de ensino, propiciando um ambiente onde os estudantes sejam incentivados a se engajar em atividades que envolvam coisas palpáveis, ou seja, materiais concretos e tangíveis, que lhes permitam explorar sensorialmente, e comprovar através evidências sensórias, enriquecendo assim a experiência de aprendizado. Desde a perspectiva da fenomenologia husserliana, “perceber uma coisa é vê-la, tocá-la, cheirá-la ... é senti-la de diferentes maneiras e de acordo com as possibilidades dos sentidos” (Bicudo, 2002, p322), mas, “uma vez efetuado o ato de perceber, o fenômeno se mostra e o que foi percebido é enlaçado pela intencionalidade mediante [diversos] atos de consciência” (Bicudo, 2010, p.30). Em nosso entendimento, esses atos, possibilitam que as experiências de aprendizagem possam ser integradas aos conhecimentos prévios do estudante, pois, “[...] as vivências [*Erlebnisse*] de um sujeito formam a textura imanente de sua consciência, pela qual é capaz de se apropriar dos objetos do mundo” (Depraz, 2007, p.21).

Dessa maneira, emerge como uma preocupação frequentemente, manifestada pelos professores entrevistados, a busca por estratégias de ensino que tornem a Álgebra mais acessível e interessante para os alunos (Ns16.PE). Segundo os depoimentos, as atividades que incluem material manipulável possibilitam ao estudante um rol ativo na aula, em que eles podem estar a realizar algum tipo de análise conforme as instruções dadas pelo professor.

Outra questão significativa se refere às dificuldades específicas apresentadas pelos estudantes no aprendizado da Álgebra (Ns17.PE). Os professores entrevistados identificam que uma das principais dificuldades dos alunos em Álgebra provém do trabalho prévio com a Aritmética. Essa perspectiva manifestada pelos professores, coincide com a de Booth (1995, p.33), para quem “as dificuldades que o aluno tem em Álgebra não são tanto de Álgebra propriamente dita, mas de problemas em Aritmética que não foram corrigidos”. Em particular, os professores P1E e P6E apresentam um ponto de vista convergente: uma das dificuldades dos estudantes se centra na falta de domínio dos números racionais (USg9.P1E e USg7.P6E). Portanto, uma premissa que fica latente é que se os estudantes têm um domínio na Aritmética, então eles têm que ser capazes de “transferir” esse mesmo domínio à Álgebra. Nesse contexto, como argumentado pela professora P6E, os estudantes tentam aplicar as operações de forma semelhante à Aritmética, esperando que as letras se comportem como valores numéricos concretos e, para que isso ocorra, os estudantes “inventam” esses números, de modo arbitrário, buscando conferir sentido às expressões algébricas com base em sua experiência prévia com números.

À luz dos depoimentos, interpretamos que essas dificuldades percebidas pelos professores se tornam mais explícitas quando os estudantes trabalham com operações entre expressões algébricas que envolvem frações. A esse respeito, Lins e Giménez (2001) manifestam que é preciso investigar, com base nas ligações realizadas em distintos âmbitos numéricos, em que as propriedades e as operações são executadas, e em outras informações, quais são os significados envolvidos e questionar por que, para os estudantes, aquelas ligações não se estabelecem.

Entendemos que as dificuldades mencionadas pelos professores entrevistados podem estar intrinsecamente relacionadas ao deslocamento que ocorre na transição da Aritmética para a Álgebra, a qual é comumente denominada “salto da Aritmética para a Álgebra” (enxerto hermenêutico da US1.P3E). Essa mudança implica não apenas uma reorganização estrutural dos conceitos matemáticos trabalhados, mas também uma ressignificação dos objetos matemáticos envolvidos. Uma das distinções, aparentemente mais evidentes, entre a Aritmética e a Álgebra é o uso de letras como representantes de variáveis e parâmetros, embora as letras também apareçam na Aritmética, elas são utilizadas de maneira bastante diferente. Um dos desafios fundamentais que emergem é a concepção de que as letras nas expressões algébricas devem possuir valores fixos e determinados, como se fossem análogas diretas aos números na Aritmética.

Ademais, conforme enfatizado pelo professor P1E, a introdução de terminologias diferentes no processo de ensino pode estar contribuindo para a confusão dos estudantes. De forma particular, o professor destaca que determinadas práticas consolidadas no ensino da Aritmética podem, inadvertidamente, constituir num obstáculo na aprendizagem, em consonância com o evidenciado no enxerto hermenêutico USg11.P1E. Dessa forma, entendemos que a transição da Aritmética para a Álgebra também exige uma *habilidade interpretativa mais refinada*, o que pode representar um desafio significativo para o estudante que inicia no estudo da Álgebra. Para ilustrar esse argumento, consideremos um exemplo proporcionado por Drouhard e Teppo (2004), sobre os sentidos atribuídos a tipos de sentenças algébricas que envolvem o uso do signo “=”. Esse símbolo pode ser usado para indicar equivalência de expressões ($a + b = a - (-b)$), igualdade de números ($4 + 3 = 7$), ou para definir uma função ($f(x) = 2x + 7$). Assim, a natureza da relação algébrica em cada caso é conceitualmente diferente devido à natureza dos objetos que estão ligados pelo sinal de igual.

Uma forma alternativa de compreender esse “salto da Aritmética para a Álgebra”, conforme expresso pelos depoentes, encontra-se no horizonte da ideia de “choque cultural”. Nesse conceito, Lee (1996) propõe ver a Álgebra como uma *minicultura* inserida em uma cultura mais abrangente, a da Matemática. Essa perspectiva é “útil para pensar sobre a interação da linguagem e do conhecimento no processo gradual de aculturação algébrica que ocorre na sala de aula, bem como a interação entre a Álgebra e outras culturas matemáticas, como a Aritmética”²¹² (Lee, 1996, p.87, grifos e tradução nossos). Para Lee, o conceito de *minicultura* proporciona uma maneira de compreender como os alunos se envolvem com os conceitos algébricos, interagindo com uma *tradição* matemática mais ampla e assimilando diferentes formas de conhecimento matemático, dentro de um ambiente educacional.

Para enfrentar os desafios enfrentados no ensino da Álgebra, os professores entrevistados ressaltam a necessidade de um processo contínuo de qualificação (Ns18.PE), visando aprofundar seus conhecimentos sobre as aplicações práticas da Álgebra e explorar abordagens de ensino que favoreçam a conexão entre os conceitos algébricos e a vida cotidiana dos estudantes (USg9.P6E). Esse movimento reflete uma busca por estratégias de ensino que transcendam os modelos tradicionais com os quais foram formados (USg5.P1E), que possibilitem modos de ensino mais dinâmicos, contextualizados e significativos, no qual a

²¹² It is also helpful in thinking about the interaction of language and knowledge in the gradual process of algebraic acculturation that takes place in the classroom, as well as the interaction between algebra and other mathematical cultures such as arithmetic.

Um dos aspectos emergentes neste núcleo de ideias envolve o fenômeno da transição entre a linguagem comum e a linguagem algébrica (Ns19.PE). Em particular, os relatos dos professores P1E, P4E e P5E destacam a necessidade de buscar estratégias para que os estudantes consigam transitar entre a linguagem comum, utilizada cotidianamente e mais próxima da fala, e a linguagem algébrica, caracterizada por ser suscinta e simbólica. Nesse contexto, trazemos à tona o pensar de Schleiermacher (1999, p.12), que destaca que a “linguagem comum não pode iniciar senão como intuição comum”. Isso, em nosso entendimento, sugere que a compreensão inicial dos conceitos que envolvem o aprendizado da Álgebra tem como fundamento a vivência²¹³ intuitiva, a qual deve ser posteriormente articulada com a formalidade dos símbolos da linguagem algébrica, sendo isso o foco principal no ensino tradicional da Álgebra na *Educação Média*.

Por sua vez, Fiorentini *et al.* (1993) sugerem uma possível leitura sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra em função das fases evolutivas da linguagem algébrica. Esses autores descrevem três fases da linguagem algébrica, a saber: a *retórica*, a *sincopada* e, finalmente, a *simbólica* — como descrito no enxerto hermenêutico da US6.P4E. Esses autores também ressaltam ainda que a transição entre essas fases ocorreu de maneira gradual, ao longo de diferentes períodos históricos, refletindo transformações profundas na forma como a linguagem algébrica foi sendo construída e compreendida — como evidenciado no enxerto hermenêutico da US11.P2E.

Os professores P1E, P4E e P5E sugerem que iniciar o estudo de equações pode ser uma ponte entre a linguagem verbal e a linguagem simbólica da Álgebra. Entendemos que este modo de trabalhar o ensino da Álgebra, via um acesso intuitivo da linguagem verbal, ou *retórico*, para a linguagem simbólica de expressões, proporciona os elementos simbólicos necessários à formulação e manipulação de equações. Desse modo os professores buscam articular, de maneira progressiva e contextualizada, diferentes formas de representação matemática, e a compreensão de conceitos como variáveis, expressões algébricas e a resolução de equações, visando o domínio de uma linguagem simbólica que possibilita ao estudante ter competência necessária para resolver problemas (Usg5.P6E). No entanto, um aspecto que se mostra menos presente nas falas dos professores a respeito da linguagem algébrica é o caráter *sincopado* da Álgebra, que se trata de um passo intermediário da linguagem comum à linguagem simbólica.

No contexto do ensino de Álgebra na escola, busca-se não apenas a construção de procedimentos e relações matemáticas, mas também de habilidades para expressá-los de forma

²¹³ Sobre o significado da palavra, orientamos ao leitor para consultar a nota de rodapé 98, na página 127.

concisa e generalizável. Alguns autores, como Mason, Graham, Pimm e Gowar (1999), têm argumentado que a generalidade é um aspecto fundamental da Matemática, e que a Álgebra é *a linguagem através da qual essa generalidade é expressa*. Tal perspectiva é evidenciada na fala do professor P1E, particularmente, na unidade USg11.P1E, em que o professor favorece a compreensão de procedimentos aritméticos mais generalizáveis, de modo que seja propiciado ao estudante “transferir” essas estruturas operatórias da Aritmética a outros âmbitos da Matemática, como na Álgebra.

Drouhard e Teppo (2004) destacam, em sua análise sobre a linguagem algébrica, que uma das características principais dos escritos simbólicos da Álgebra é a sua capacidade de ser compacta e poderosa. Essa característica da linguagem algébrica “torna possível mover-se fluentemente por *camadas de abstração* e comprimir pensamentos matemáticos complexos em sequências de símbolos eficientes. Ao mesmo tempo, no entanto, essas características tornam os escritos simbólicos muito opacos para o aluno. Existem profundas *ambigüidades* no uso de símbolos que são vantajosas para o especialista, mas difíceis para o novato”²¹⁴ (Drouhard e Teppo, 2004, p.240, grifos e tradução nossos). Esses autores apontam que tal “ambiguidade” pode surgir de diversas fontes, sendo uma das mais significativas a *economia simbólica*, isto é, a utilização de um conjunto mínimo de símbolos, que pode ser interpretado de maneiras diferentes. Esse aspecto de “ambiguidade” da Álgebra é ressaltado pelo professor P5E, na unidade USg1.P5E, quando, ao iniciar sua aprendizagem da Álgebra, ele teve que passar de trabalhar com números para trabalhar com letras. Em consonância com essa discussão, Freudenthal (1977, p.192) alerta sobre a frequente confusão entre os objetos matemáticos e sua representação simbólica, pois os símbolos “não são objetos da Matemática [...], mas fazem parte da linguagem pela qual os objetos matemáticos são representados”, o que pode, segundo entendemos, ser outra fonte de dificuldade no ensino e a aprendizagem da Álgebra.

Um dos aspectos centrais da linguagem algébrica é o uso de variáveis. Tanto Usiskin (1995) quanto Arcavi, Drijvers e Stacey (2017) argumentam que o conceito de variável é multifacetado. Conforme esses autores, esse caráter multifacetado possibilita diferentes domínios de significação, compreensão e aplicação da linguagem algébrica. No enxerto hermenêutico da unidade USg5.P5E, apresentamos alguns exemplos explorados por Usiskin (1995) que demonstram como distintas perspectivas podem ser adotadas na análise da relação

²¹⁴ The symbolic writings of algebra are compact and powerful. This aspect of the language makes it possible to move fluently through layers of abstraction and compress complex mathematical thoughts into efficient symbol strings. At the same time, however, these characteristics make symbolic writings very opaque for the learner. There are deep ambiguities in symbol use that are advantageous to the expert, but difficult for the novice.

entre variáveis. Nesse contexto, o caráter multifacetado do conceito de variável, expresso pelos professores entrevistados, e examinado nos enxertos hermenêuticos das unidades USg5.P5E e USg6.P6E, possibilita que os alunos compreendam as letras em Álgebra não apenas como símbolos isolados, mas como objetos dotados de flexibilidade e potencial de variação, fundamentais para o entendimento da Álgebra em um aspecto mais geral.

Segundo os depoimentos, antes de iniciar o estudo dessa disciplina, é fundamental que os alunos desenvolvam uma *compreensão sólida dos conceitos e operações da Aritmética* (NI20.PE). No entanto, frequentemente os estudantes chegam ao estudo da Álgebra com lacunas nesse domínio, o que compromete sua capacidade de avançar. Esse problema, conforme apontado, está diretamente relacionado à dificuldade em conectar os conhecimentos aritméticos às novas demandas que provêm do estudo da Álgebra, evidenciando que as barreiras na aprendizagem dessa disciplina frequentemente têm origem na falta de compreensão da Aritmética (NI21.PE) e na dificuldade em avançar em direção a mais abstrações em que letras têm um espectro maior de variabilidade em relação à determinação de números, como trabalhados na Aritmética dos anos iniciais de escolaridade.

Os professores P1E, P3E e P4E apresentam pontos de vista convergentes quanto à necessidade de fortalecer a aprendizagem, em particular, dos conteúdos de Aritmética dos números racionais, pois isso contribui para a compreensão de conteúdos da Álgebra, tais como o trabalho com expressões algébricas que contém coeficientes fracionários. Nesse contexto, para o professor P1E, a “chave”, para a aprendizagem da Álgebra, é fazer com que o estudante consiga ter domínio sobre os conceitos prévios, particularmente no que se refere ao trabalho com os números racionais. Sendo assim, se os estudantes desenvolvem domínio nesse conteúdo da Aritmética, então eles deveriam ser capazes de “transferir” esse mesmo domínio à Álgebra. No entanto, este tipo de conteúdo representa uma dificuldade para os alunos, pois os indícios trazidos nos depoimentos dos professores revelam não ser clara para eles a correlação entre o trabalho com quantidades concretas nos números racionais e o trabalho com expressões algébricas.

Junto aos aspectos cognitivos, os sentimentos e as atitudes também emergem como aspectos nucleares no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra (Ns22.PE). Os professores relatam sentir gosto pela Álgebra, e até mesmo o amor pela disciplina e pelo ato de ensiná-la, o que pode ser um fator motivador significativo, tanto para os educadores quanto para os alunos. Por outro lado, a Álgebra pode ser fonte de medo e ansiedade, especialmente quando utilizada de forma coercitiva em avaliações ou como um instrumento de exigência rígida.

Os professores P1E, P2E e P3E relatam que, em sua trajetória escolar, desenvolveram uma apreciação significativa pela Álgebra, considerando-a uma das disciplinas mais estimulantes que tinham cursado. Eles atribuem esse interesse, em parte, à experiência desafiadora proporcionada pelo estudo com o livro *Álgebra de Baldor*. Particularmente, destacam o envolvimento gerado pela identificação de erros presentes nos exercícios do livro, o que lhes permitia não apenas aprofundar a compreensão dos conceitos algébricos, mas também o desenvolvimento da argumentação matemática por meio da necessidade de fundamentação das correções realizadas. Entendemos que essa vivência escolar, conforme relatado nos depoimentos, contribuiu para a construção de uma relação positiva e engajada com a Álgebra.

Por sua vez, o professor P3E destaca que sua afinidade com a Álgebra surgiu do reconhecimento do potencial desta disciplina para expressar modelos matemáticos aplicados a fenômenos. Esse aspecto, segundo o professor, despertou um amor pela Álgebra, evidenciado pelo apreço à capacidade dessa disciplina de representar relações matemáticas em aplicações práticas. Para ele, essa característica particular da Álgebra é o que lhe permite transmitir aos seus estudantes esse conhecimento com uma razão de ser. Assim, segundo o professor P3E, esse sentimento de amor pela Álgebra também se estende ao ensino dessa disciplina. A esse respeito, compreendemos que, para o professor P3E, a razão de ser, ou seja, o núcleo fundamental que dá sentido e justifica o ensino da Álgebra, reside na sua capacidade de expressar, através de uma linguagem própria, variáveis de fenômenos que se destacam na realidade mundana.

Na análise dos depoimentos dos professores, emergem outros sentimentos como parte da transição da formação para o exercício da profissão. Assim, na unidade USg5.P2E, interpretamos que, quando o professor P2E expressa que “tem que começar a ensinar” não apenas evidencia a entrada abrupta do professor P2E na docência da Matemática, mas também revela um estado de incerteza e inquietação que permeia essa transição. O uso da construção imperativa sugere um deslocamento inesperado para uma posição de responsabilidade pedagógica, sem a suficiente preparação prévia, o que parece acentuar um sentimento de inquietude e angústia. A desconexão entre os conteúdos trabalhados na graduação e as demandas concretas da *Educação Básica e Média* intensifica essa sensação de vulnerabilidade profissional. Assim, sua experiência inicial na docência é marcada por um processo de adaptação tenso, no qual a necessidade de desenvolver estratégias de ensino se impõe como um desafio urgente e angustiante.

Os sentimentos nas experiências vivenciadas com a aprendizagem da Álgebra se mostram como elementos significativos de reflexão, projetados na tomada de decisões sobre o modo de ensinar a Álgebra. Por exemplo, o professor P5E relata uma experiência negativa ao aprender Álgebra, quando aluno na escola. O professor diz: “naquela época, fiquei com raiva por ele [o professor] ter me tratado mal” (USg6.P5E). No percurso da entrevista realizada com esse professor, percebemos que essa experiência vivenciada se tornou um elemento de reflexão ao buscar compreender os estudantes.

Retomando a fala do professor P5E, no contexto da vivência reportada na passagem da USg6.P5E, interpretamos que o conceito fenomenológico de empatia (*Einfühlung*), possibilita compreender o modo pelo qual o professor está com os estudantes e com o conteúdo Matemático. Desse modo, ao refletir sobre sua vivência na aprendizagem da Álgebra, o professor P5E sugere que, “[...] ao invés de recorrer a métodos tradicionais de repressão ou de autoridade para motivar os estudantes, seria mais produtivo buscar engajá-los ao estudo da Álgebra, na perspectiva de que “a vida da gente é uma função” (USg6.P5E).

Entre os aspectos emergentes nas falas dos professores entrevistados, sobressai-se a relevância das sequências no ensino e na aprendizagem da Álgebra (Ns23.PE). Ao focar nas experiências vivenciadas pelos professores durante sua formação, tanto na *Educação Básica* quanto na universidade, evidenciam-se diferentes formas de organização e estruturação dos conteúdos dessa disciplina. Entendemos que analisar essas formas mostraram-se relevantes para elucidar o movimento de constituição do conhecimento algébrico, podendo ter contribuído substancialmente para consolidar concepções sobre a Álgebra, além de fundamentar as práticas pedagógicas adotadas.

Nos depoimentos analisados, os professores descrevem as sequências de ensino com as quais iniciaram o aprendizado da Álgebra na escola, destacando, entre elas, a ênfase na resolução sistemática de exercícios — conforme ilustrado na Figura 12 (US2.P1E) — e a centralidade atribuída ao uso do livro didático *Álgebra de Baldor*, como evidenciado no enxerto hermenêutico na US3.P1E.

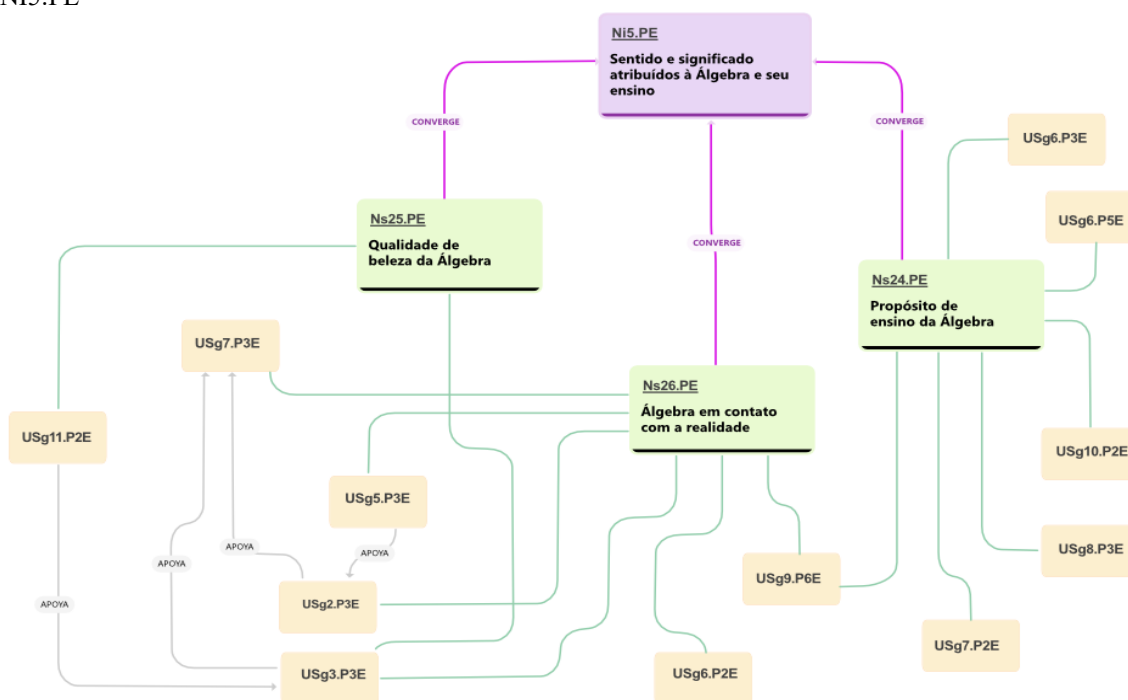
Por outro lado, ao examinar os relatos dos professores sobre suas experiências vivenciadas na aprendizagem da Álgebra no nível de sua formação universitária, eles descrevem que a abordagem dessa disciplina se tornou mais avançada. No entanto, em consonância com o que foi relatado pelo professor P1E, as sequências de ensino tanto no nível da *Educação Básica* quanto na *Educação Superior* parecem ser similares, como se aprecia nos enxertos hermenêuticos das unidades US2.P1E e US3.P1E. Os professores manifestam que, no

primeiro semestre, é realizada uma revisão dos conteúdos de Matemática básica, incluindo tópicos de Álgebra. Todavia, segundo o professor P6E, esses tópicos não são abordados de maneira substancial ao longo da formação universitária, exceto quando eventualmente aplicados em um nível procedimental em conteúdo mais avançado. Assim, ao refletirem sobre suas experiências na aprendizagem da Álgebra, os professores manifestam interesse em buscar estratégias de ensino diferentes ao modo como eles, em sua época, vivenciaram o ensino desta disciplina (USg5.P1E).

NI5.PE — Sentido e significado atribuídos a Álgebra e seu ensino.

Este Núcleo de Ideias possibilita a compreensão de uma estrutura de análise centrada no sentido e no significado atribuídos à Álgebra e ao seu ensino, abrangendo múltiplas dimensões que refletem a complexidade dessa disciplina no contexto escolar em que atuam os professores entrevistados (ver Figura 22). Essa abordagem busca compreender não apenas como os professores compreendem a Álgebra, mas, também, os propósitos e valores que lhe são atribuídos.

Figura 22 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI5.PE



Fonte: elaboração própria

Um dos aspectos relevantes levantados na análise dos depoimentos diz respeito ao propósito de ensino da Álgebra (Ns24.PE) que se torna um questionamento imperante dos

estudantes, para o qual os professores buscam mostrar finalidades que vão além da mera transmissão de conteúdo. Assim, ao considerar o propósito de ensino da Álgebra, alguns estudos como os referenciados por Arcavi *et al.* (2017) mostram a dificuldade dos livros didáticos para transmitir aos alunos o “sentido de propósito” da Álgebra. Esses autores especulam que essa dificuldade pode também estar presente nas salas de aula. Para abordar esse assunto, eles propõem que o questionamento tome um outro matiz: por que todos os alunos deveriam aprender Álgebra? Uma resposta inicial é que cabe a todo sistema educacional oferecer aos alunos as melhores condições possíveis para o aprendizado dessa área do conhecimento. Além disso, aprender Álgebra contribui para ser hábil ao pensar de modo lógico e ao buscar resolver problemas úteis em diversas áreas da vida e do trabalho.

Embora tais respostas iniciais possam oferecer certo alento aos educadores quanto à centralidade da Álgebra no currículo, elas se revelam insatisfatórias para convencer aos alunos, na medida em que remetem para um futuro hipotético a resolução de uma inquietação que se manifesta com urgência no presente. Assim, por exemplo, no depoimento da professora P6E, ela expressa que para contornar as perguntas frequentes dos estudantes sobre o sentido da Álgebra, ela manifesta o argumento de que o estudo desta disciplina é importante para o desenvolvimento de competências que serão aplicadas nos anos subsequentes da formação escolar, e ainda mais para nos estudos universitários que contemplam conteúdo matemático.

A esse respeito, MacGregor (2004) aponta que, na Educação Matemática, a Álgebra é amplamente reconhecida por sua relevância em diversos aspectos, dentre os quais, ela:

- integra o conhecimento básico esperado de cidadãos em sociedades democráticas e instruídas;
- é requisito fundamental para estudos avançados em matemática, cursos superiores e diversas profissões;
- compõe a alfabetização Matemática essencial ao desenvolvimento nacional;
- oferece ferramentas eficazes para resolver problemas específicos;
- estimula a generalização, o pensamento estruturado e o raciocínio dedutivo.

Arcavi *et al.* (2017) ampliam a compreensão sobre o propósito do ensino da Álgebra, ao destacar que acompanhar um argumento — seja algébrico ou não — e identificar possíveis falácias é um modo de fortalecer as habilidades de pensamento crítico e permite atuar como proteção contra formas autoritarismo intelectual e até mesmo manipulações discursivas travestidas de argumentos matemáticos.

Por sua vez, o que se mostra nas falas dos professores entrevistados sobre o propósito de ensino da Álgebra é um reflexo de suas preocupações cotidianas nas salas de aula, especialmente diante da ausência de expectativas e interesses dos alunos. Nesse sentido, o professor P2E manifesta que “tem coisas que estão complicadas neste momento na educação, principalmente na dos jovens, é que eles não veem valor em nada, né? como que não tem interesse [...] Tipo, sim, eu estudo, e com que propósito eu estudo?” (US10.P2E). A fala do professor evidencia uma preocupação central: a falta de motivação dos alunos em relação ao aprendizado. Essa falta de interesse pode estar relacionada a diversos fatores, como a relevância percebida do conteúdo ou a metodologia de ensino implementada. Seria apenas falta de interesse em relação ao conteúdo ensinado e à metodologia? Poderia ser aventado que essa falta de interesse poderia ser bem mais abrangente, podendo-se entender que abrangeria também o seu interesse em relação à vida?

No cenário educativo complexo, os professores dilucidam propósitos para o ensino da Álgebra. Eles se preocupam com modos dos estudantes experienciarem “formas de ver” as fórmulas matemáticas, indo além da simples memorização. Entendem que os estudantes devem ser capazes de construir expressões matemáticas das coisas que os impactam em seu cotidiano e do que eles observam no mundo circundante. Assim, por exemplo, o professor P3E enfatiza a necessidade de que os estudantes compreendam ideias fundamentais da Álgebra, tais como a noção de variável e de função. Nos depoimentos (US8.P3E), ele coloca expressões como “o mundo funciona com variáveis” ou “tudo no mundo é uma função”, buscando dar a entender que muitos aspectos da realidade podem ser compreendidos e descritos por variáveis e funções matemáticas. Dessa maneira, esse professor pontua a utilidade da Matemática para descrever e compreender o mundo ao nosso redor.

Conforme a análise dos depoimentos, os professores enfrentam a tarefa não apenas de ensinar, mas de encontrar formas de tornar a Álgebra mais acessível e atraente para os estudantes. Isso implica reformular as abordagens de ensino rígido para permitir que o estudante se aproprie dos conceitos de forma significativa. No depoimento do professor P5E, ele comenta que busca engajar os alunos no estudo da Álgebra, na perspectiva de que “a vida da gente é uma função” (US6.P5E), de modo que ele não apenas busca tornar a Álgebra mais acessível e próxima dos estudantes, mas também convidá-los a perceber como noções como as de variáveis e de funções permeiam sua própria existência.

Um aspecto que se mostra emergente nas falas dos professores é a atribuição da qualidade de beleza da Álgebra (Ns25.PE). Destaca-se nos depoimentos o caráter estético da Álgebra, evidenciado pelo sentimento de gosto e de fascinação gerado pelas suas múltiplas possibilidades de aplicação. Um exemplo dessa percepção é fornecido pelo professor P2E, que afirma: “[...] para mim Álgebra é acredito que junto com a trigonometria as duas coisas mais bonitas da vida, porque é o que mais se aplica. Que a gente não saiba aplicar vai ser uma coisa, porque Álgebra está, não importa para onde você olhe, ela está aí, né?” (US11.P2E). Além disso, o professor P2E realça a necessidade de um olhar atento para encontrar onde a Álgebra está imersa, o que, segundo ele, possibilita perceber qualidades estéticas dessa disciplina.

Bortolete (2024, p.117) destaca que “no fazer algébrico do qual se dá conta analisando sua história, está presente uma espécie de intuição abstracionista que os primeiros algebristas tinham das potencialidades dessa área de investigação ao se preocuparem com a resolução dos problemas do cotidiano”. Ao compreender a Álgebra desde uma dimensão constitutiva das experiências diárias e da realidade vivenciada no cotidiano, o professor P3E assinala que essa perspectiva sobre a disciplina lhe permitiu começar a atribuir “significado às coisas na vida e às belezas que se podem encontrar com isso” (US3.P3E). Isso sugere que, para ele, foi importante esse modo de compreensão “intuitiva” da Álgebra, permitindo-lhe perceber traços de beleza nessa disciplina.

Outro aspecto relevante que emerge neste núcleo de ideias (NI5.PE), conforme evidenciado nos depoimentos dos professores, diz respeito à articulação da Álgebra com situações concretas do cotidiano (Ns26.PE), revelando uma aproximação significativa entre os conhecimentos algébricos e a realidade. A necessidade por compreender a articulação do conteúdo algébrico e a realidade é manifestada pela professora P6E. Ela admite que, às vezes, questiona-se sobre como explicar para seus estudantes a aplicação prática da Álgebra no cotidiano (US9.P6E). Essa dúvida é comum entre os professores, conforme evidenciado nos depoimentos.

No depoimento do professor P2E, ele diz que “a Álgebra é muito importante porque com o tempo a gente percebeu que há muitas situações na vida real onde a Álgebra é necessária” (US6.P2E). Nesse sentido, em consonância com o expresso pelos professores P2E e P3E, foi por meio da reflexão das situações da experiência vivenciada que eles conseguiram reconhecer a importância da Álgebra em múltiplas formas de aplicação, abarcando tanto situações da vida cotidiana quanto em outros campos de conhecimento. Isso indica perceber que a importância

da Álgebra mediante o contato com a realidade não é algo que se produz de maneira imediata, mas que se revela gradualmente, com a experiência. Além disso, é importante considerar como nossas experiências moldam nossa compreensão dos conceitos matemáticos. No âmbito da fenomenologia, a realidade “é constituída pela trama de experiências vividas, expressas, compartilhadas com o outro, no mundo. Trama que é dinâmica, fluida, em processo de ser. É criada/construída, em constante atualização, efetuada pela *forma/ação* da rede de significações explícitas” (Bicudo, 2002, p.326, grifos do autor). Essa perspectiva destaca como a realidade vai sendo co-constituída com experiências vividas e compartilhadas com os outros, na dimensão da intersubjetividade, reforçando a ideia de que a compreensão da Álgebra em contato com a realidade se desenvolve ao longo do tempo.

O professor P3E enfatiza a importância do contato com a realidade no ensino da Álgebra. Ele sugere realizar atividades dentro e fora da sala de aula para que os estudantes possam explorar fenômenos sensorialmente. Isso ajuda os alunos a entenderem melhor os conceitos ao ter que testar seus raciocínios com evidências empíricas e expressar suas ideias.

A fala do professor se revela particularmente significativa ao considerarmos a intenção dele em explorar as possibilidades de compreender como aspectos da Álgebra podem ser abordados intuitivamente por meio das experiências cotidianas e da realidade vivenciada. O professor enfatiza que é mediante a intuição que o aluno pode se abrir à compreensão da Álgebra e evidenciar sua utilidade. No âmbito da fenomenologia husserliana, o ato de intuir “abre à consciência a visão do que é, na imediatez do visto e do percebido, donde ser um começo válido para o deslanchar do movimento de conhecer-se o mundo” (Bicudo, 2022, p.120). Em outras palavras, trata-se do modo como a consciência apreende diretamente os fenômenos, sem mediações conceituais prévias. Essa perspectiva sustenta a concepção do professor de que a intuição constitui um caminho legítimo e potente para a construção do saber algébrico, na medida em que articula vivência, significado e compreensão.

5.4 Análise ideográfica: trabalhando com o discurso dos professores da *Licenciatura em Matemática*

5.4.1 Professor PIL

US1.P1L Bueno, pues con el Álgebra empecé más que todo de pregrado, en aquí en la UPTC en Matemáticas eh [...] y pues ahí me empecé a interesar con la línea de Álgebra y

trabajé mi tesis en esa línea [...] Del colegio recuerdo eh [...] en el colegio eh [...] que el Álgebra de fracciones, sistemas de ecuaciones, ecuaciones lineales, sí, toda esa cuestión.

Tradução: Bem, comecei com a Álgebra **principalmente como estudante de graduação**, aqui na UPTC [no bacharel] em *Matemáticas*, eh [...] e então **comecei a me interessar pela linha da Álgebra** e trabalhei na minha tese nessa linha [...] Da escola eu me lembro, eh [...] na escola, eh [...] a Álgebra de frações, sistemas de equações, equações lineares, sim, todas essas coisas.

Enxerto Hermenêutico: Nesta Unidade de Significado, destacamos que, diferentemente dos demais docentes entrevistados nesta pesquisa, a professora P1L destaca que seu interesse mais significativo pelo estudo da Álgebra teve início durante a formação no curso de Bacharelado em *Matemáticas*. Ela enfatiza que tais experiências acadêmicas foram decisivas na definição de sua trajetória de estudos e atuação na área de Álgebra, influenciando tanto sua formação na graduação quanto seu percurso na pós-graduação. Além disso, a professora menciona, em seu depoimento, conteúdos da *Educación Básica e Média*, tais como frações, sistemas de equações e equações lineares, que foram marcantes em sua vivência escolar. Essa lembrança sugere que, apesar da distância no tempo, certos temas da Álgebra básica deixaram impressões duradouras, possivelmente em razão de sua complexidade, frequência no currículo ou, ainda, pela maneira como foram abordados.

USg1.P1L: A professora relata que seu contato mais significativo com a Álgebra começou no curso de Bacharelado em *Matemáticas* na UPTC, quando foi despertado o seu interesse pela área e desenvolveu seu trabalho de pesquisa no âmbito dessa linha de estudos. Ao lembrar da escola, menciona que teve contato com tópicos básicos da Álgebra, como frações, sistemas de equações e equações lineares, que marcaram sua experiência escolar.

O que diz essa US:

* Interesse pela Álgebra.

US2.P1L mí comprensión [del Álgebra], no, la verdad no lo habría pensado, porque digamos, Álgebra como tal, Álgebra de colegio, [...] porque es que, digamos, el Álgebra tiene tantas áreas, tantas ramas, de Geometría, no conmutativa, se puede trabajar con Topología, se puede trabajar con programación, [...] pero ya es Álgebra avanzada. Si ya hablamos de Álgebra básica, ya es diferente, porque es digamos que los sistemas de ecuaciones que trabajan con las ecuaciones lineales, con fracciones, con los números naturales, enteros, racionales, reales. Ya son dos cosas, una es el Álgebra básica y otra es el Álgebra ya avanzada que uno trabaja en la universidad, pregrado, posgrado, que es un poquito distante.

Tradução: [...] minha compreensão [de Álgebra], não, eu realmente não teria pensado nisso, porque, digamos, Álgebra como tal, Álgebra da escola, [...] porque, digamos, a Álgebra tem tantas áreas, tantos ramos, de Geometria, não comutativa, você pode trabalhar com topologia, você pode trabalhar com programação, [...], mas já é Álgebra avançada. Se já falamos de Álgebra básica, já é diferente, porque é, digamos, os sistemas de equações que trabalham com equações lineares, com frações, com números naturais, inteiros, racionais, reais. Já são duas coisas, uma é a Álgebra básica e a outra é a Álgebra já avançada que se trabalha na universidade, graduação, pós-graduação, o que é um pouco distante.

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento da entrevista, a professora busca tornar explícita sua compreensão sobre a Álgebra e o ensino dessa disciplina. Mesmo com uma trajetória acadêmica marcada pelo aprofundamento no estudo da Álgebra (como aparece descrito no enxerto hermenêutico da US1.P1L), a professora relata que nunca havia se questionado sobre o que, de fato, é a Álgebra para ela, qual é sua natureza epistêmica, histórica ou pedagógica. Essa postura sugere que a Álgebra é vivenciada como um saber dado, legítimo por sua funcionalidade e presença nos diferentes níveis de ensino, mas não necessariamente como um objeto de problematização crítica. Sendo assim, interpretamos que a fala da professora revela uma concepção naturalizada da Álgebra, ainda mais, no sentido husserliano, uma forma de atitude natural frente à Álgebra, isto é, o “fazer” sem o “pensar sobre o fazer”. Nesse sentido, conforme observa Moura (1989), na atitude natural, os objetos “são em si, independentes da percepção, independente de seus fenômenos”, o que implica considerá-los como conteúdos positivos, pensáveis para além de sua manifestação, concebido como existente independentemente de qualquer ponto de vista ou perspectiva.

Conforme compreendemos à luz do relato da professora, sua concepção da Álgebra é considerada como um saber diferenciado em níveis. Em particular, ela distingue uma *Álgebra básica*, ou *Álgebra da escola*, centrada no trabalho com equações lineares, com frações, com números naturais, inteiros, racionais, reais; e uma *Álgebra avançada*, presente nos estudos de graduação e pós-graduação, que é abordada em diferentes âmbitos da Matemática e em aplicações, como na computação. Além disso, a distinção que a professora estabelece entre *Álgebra básica* e *Álgebra avançada* reforça a perspectiva na qual saberes disciplinares são tomados como neutros, embora ela reconheça diferentes níveis de complexidade e aplicação, a própria estrutura da disciplina, conforme ela a descreve, não é colocada em análise, o que sugere que há, um olhar pragmático e funcional, voltado para conteúdos e usos, mas não para a construção crítica do conhecimento.

Também, a fala da professora revela uma percepção de “distância” entre a Álgebra ensinada na escola e aquela praticada nos níveis superiores. Essa separação, ainda que não nomeada explicitamente, remete ao hiato descrito por Felix Klein entre a matemática básica e a matemática superior (fenômeno descrito no primeiro capítulo deste trabalho). Ao distinguir uma *Álgebra*

básica, voltada para conteúdos operatórios e procedimentos escolares, e uma *Álgebra avançada*, associada a aplicações e formalismos da *Educación Superior*, a professora evidencia uma cisão que, segundo Klein, compromete a continuidade formativa e a compreensão profunda dos conceitos.

USg2.P1L: A professora admite não ter refletido previamente sobre o significado da Álgebra em sua trajetória acadêmica, revelando uma concepção implícita que a distingue em dois grandes domínios: uma *Álgebra básica* — ou *Álgebra da escola* —, identificada com o ensino escolar e centrada em conteúdo como equações lineares, frações e números nos diferentes conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, reais); e uma *Álgebra avançada*, associada à *Educación Superior*, à pesquisa e às aplicações em outros domínios da Matemática — como na Topologia, na Geometria, na Álgebra não comutativa ou na computação. Ao estabelecer essa diferença, a professora evidencia uma percepção de distanciamento entre os dois níveis.

O que diz essa US:

- * Distinção entre Álgebra básica e avançada;
- * Concepção da Álgebra como um saber em diferentes níveis;
- * Percepção de “distância” entre a Álgebra ensinada na escola e aquela ensinada nos níveis superiores.

US3.P1L Yo creo que **ideas fundamentales en Álgebra** eh [...], como el **procedimiento**, [...] la **rigurosidad**. El Álgebra es muy **rigurosa**, hay que ser muy **riguroso** en el Álgebra [...] porque digamos, o como uno les dice [a los estudiantes] [...] hay una prioridad en el orden de las operaciones, usted si ve primero una multiplicación, eso es lo primero que hay que hacer, que, en una suma, entonces hay una prioridad, digamos, usted no puede hacer primero la suma, después la multiplicación, porque el resultado le va a dar totalmente diferente. Esa es la rigurosidad que me refiero yo [...] ¿Si? **en el proceso**. [...] Que sí hay diferentes formas de entenderlo y de explicarlo, pero que hay una forma como correcta de hacerlo.

Tradução: Eu acho que **ideias fundamentais** em Álgebra, eh [...], como o procedimento [...] o **rigor**. Álgebra é muito **rigorosa**, tem-se que ser muito **rigoroso** em Álgebra [...] porque, digamos, ou como a gente diz a eles [os alunos] [...] há uma prioridade na ordem das operações, você vê uma multiplicação primeiro, essa é a primeira coisa que você tem que fazer, que, em uma soma, então há uma prioridade, digamos, você não pode fazer a adição primeiro, depois a multiplicação, porque o resultado será totalmente diferente. É a esse rigor que me refiro [...], Certo? **No processo**. [...] Isso sim, existem diferentes maneiras de entendê-lo e explicá-lo, mas há uma maneira correta de fazê-lo.

Enxerto Hermenêutico: A professora expressa que uma das ideias centrais em Álgebra está relacionada como os procedimentos e o rigor. Ao realizar uma busca inicial no dicionário Houaiss da língua portuguesa, o termo *rigor* remete à ausência de flexibilidade, expressando ideias de rigidez, dureza e inflexibilidade; também está associado a um nível elevado de exatidão, severidade e intransigência, além de denotar retidão e precisão nos procedimentos ou juízos.

Conforme o relato da professora, a ênfase no rigor — repetido e exemplificado pela professora — aparece como um valor central que estrutura sua concepção de Álgebra. Ela enfatiza “tem-se que ser muito *rigoroso* em Álgebra”. Conforme compreendemos, tal afirmação sugere que, para a docente, a aprendizagem da Álgebra passa prioritariamente pela internalização de regras formais e pela execução exata dos procedimentos operatórios — como ela exemplifica com a ordem das operações — elementos que conferem à disciplina uma aura de precisão e previsibilidade. Com a expressão há uma só forma “correta” de fazer, entendemos que a professora se posiciona desde uma concepção que reforça o caráter normativo da Álgebra como conjunto de procedimentos a serem dominados conforme padrões fixos, em que se prioriza as provas formais, mais que as respostas finais. Segundo Bicudo e Garnica (2021), duas questões nucleares da Matemática, entendida como ciência da civilização ocidental, são o rigor e a exatidão. Ainda, estes autores manifestam que, “[a]mbos, exatidão e rigor, são expressos na linguagem que embasa a formalização das idealidades matemáticas assim constituídas e produzidas” (p.13). De outra parte, em Matemática, os adjetivos de rigoroso ou formal se encontram implícitos nas provas ou demonstrações. “A necessidade ou não de tais adjetivações dependerá, em muito, dos aspectos focados: para uns, os matemáticos chamados ‘puros’, uma prova é, já, prova rigorosa. Para outros, o rigor estabeleceria, entre as várias provas matemáticas possíveis, aquelas herdeiras diretas da sistematização euclidiana” (Bicudo e Garnica, 2021, p.73). Sendo assim, essa visão da Álgebra pode estar enraizada em sua própria experiência formativa, marcada por um modelo de ensino pautado pela reprodutibilidade e validação formal. O destaque ao “processo” revela que o foco da professora recai mais sobre o como fazer do que sobre o porquê fazer ou o que significa fazer. Segundo o dicionário Michaelis, o termo *procedimento* refere-se à ação ou efeito de proceder, compreendendo uma maneira de agir ou se comportar; pode designar também um método, processo, técnica ou um conjunto de etapas destinadas à realização de algo ou à obtenção de um objetivo. Isso evidencia uma abordagem técnica e instrumental da Álgebra, que tende a desconsiderar suas dimensões históricas, epistêmicas e conceituais, aspectos que podem resultar significativos para uma compreensão mais ampla e crítica da disciplina.

USg3.P1L: A professora concebe a Álgebra como uma área de conhecimento pautado pelo rigor e pela normatividade dos procedimentos. Em sua fala, destaca a prioridade na ordem das operações como exemplo representativo da exigência algébrica por exatidão, enfatizando que a execução correta das etapas é determinante para a obtenção de resultados válidos. Ao afirmar que “há uma maneira correta de fazê-lo”, mesmo reconhecendo a existência de distintas formas

de explicar ou entender os procedimentos, revela uma perspectiva prescritiva do conhecimento algébrico, centrada na precisão formal e na reprodução de métodos formais.

O que diz essa US:

* Rigor nos processos algébricos.

US4.P1L las Matemáticas en sí son **difíciles de enseñar**. Los estudiantes llegan, bueno, los que estudian licenciatura en matemáticas no mucho porque [...] uno supondría que tienen **cierto amor y cierto gusto por las matemáticas**. ¿Sí? Entonces [...]. Pero sí **se les nota** ciertas, eh [...] **¿cómo diría yo? [...], vacíos**, de cosas que no [...] o que según ellos no aprendieron o no se acuerdan ¿sí? o nunca entendieron.

Tradução: a Matemática em si é **difícil de ensinar**. Os alunos chegam, bem, aqueles que estudam licenciatura em matemática, não tanto porque [...] se poderia presumir que eles têm um certo amor e um certo gosto pela matemática. Certo? Então [...]. Mas se percebe em eles certas, uh [...] como devo dizer? [...], vazios, de coisas que eles não [...] ou que, segundo eles, não aprenderam ou não se lembram, certo? ou nunca entenderam.

Enxerto Hermenêutico: a professora reconhece a dificuldade inerente ao ensino da Matemática, utilizando o termo “difícil” o que sugere um marcador de um desafio, que parece atravessar sua prática docente. Contudo, ela parece indicar uma distinção entre os alunos em geral e aqueles da Licenciatura em Matemática, dos quais ela diz que se “presume” certo gosto e afinidade com a disciplina, o que poderia facilitar o ensino. Compreendemos do relato da professora que esse modo de julgar a atitude do licenciado indica uma expectativa projetada sobre o perfil do futuro professor, cuja identidade com o campo de estudo, deveria estar acompanhada de domínio e compreensão sólida dos conteúdos matemáticos. No entanto, a professora se depara com “vazios”, ou seja, lacunas na formação conceitual desses alunos, que ela mesma hesita em nomear diretamente (“uh, como devo dizer?”), revelando um certo incômodo ou até mesmo surpresa diante da ausência de conhecimentos que considera básicos. Esses “vazios” referem-se não apenas à falta de memorização, mas também à compreensão apropriada dos conceitos. Isso, segundo entendemos, sugere a existência de rupturas no processo de aprendizagem na *Educação Básica*, particularmente em relação à Álgebra.

Na perspectiva do ensino, um modo de compreender o dito pela professora pode indicar que a concepção do aluno ideal, nesse imaginário, é aquele que “traz” consigo um repertório de conhecimentos prévios que podem ser acionados com facilidade. No entanto, a ausência desse repertório é percebida como uma limitante substantiva, com pouco espaço para a problematização dos processos formativos, dos sentidos atribuídos ao conteúdo ou das condições reais de construção do saber matemático.

USg4.P1L: A professora expressa sua percepção de que o ensino da Matemática, em geral, ela diz que é intrinsecamente “difícil de ensinar”. Ainda que se espere que estudantes de Licenciatura em Matemática demonstrem afinidade e amor pela disciplina, ela observa que, mesmo nesse grupo, são recorrentes lacunas conceituais. Essas lacunas se referem tanto ao não aprendizado de determinados conteúdos quanto à dificuldade de uma compreensão consolidada. A fala sugere, assim, uma preocupação com a fragilidade da formação matemática prévia, mesmo entre aqueles que optaram por seguir a Licenciatura em Matemática, o que parece tensionar as expectativas docentes quanto ao domínio dos conteúdos necessários, em especial no que se refere à Álgebra.

O que diz essa US:

- * Dificuldade no ensino;
- * Vazios de sentido conceituais.

US5.P1L Y llegan a la universidad y [...] hay cosas esenciales eh [...] Las fracciones. ¡Uy, no!, Sí [...], difícil las **fracciones** y los **radicales**. Y como esa **comprensión** de lo que le digo a sumercé, la rigurosidad no la tienen. ¿Sí? Entonces, si me gustaría, digamos, que en la Educación Básica se les empezara [...] no hacer demostraciones ni nada, sino usted, a ¿qué tiene que llegar?, que entiendan a ¿qué tienen que llegar?, que entiendan cuál es el objetivo al que tienen que llegar y cuál es el procedimiento adecuado para llegar a ese objetivo [...] Sí, el **razonamiento** si es algo que lo tienen ahí,

Tradução: E eles chegam à faculdade e [...] há coisas **essenciais** eh [...] **As frações**. Ah, não! Sim [...], **difíceis as frações e radicais**. E como essa **compreensão** do que estou lhe dizendo, eles [os estudantes] **não têm a rigorosidade**. Sim? Então, eu gostaria, digamos, que na *Educação Básica* se começasse [...] não fazendo demonstrações nem nada, mas sim, você, aonde precisa chegar? que eles entendam a que precisam chegar? que eles entendam qual é o objetivo que eles precisam atingir e qual é o **procedimento apropriado** para atingir esse objetivo [...] Sim, o **raciocínio** é algo que eles têm aí.

Enxerto Hermenêutico: A professora expressa sua preocupação em relação à formação precária dos estudantes que ingressam na *Educação Superior*. Para ela, são “essenciais”, ou seja, conteúdos fundamentais como frações e radicais e aponta a dificuldade que os alunos demonstram nesses conteúdos como o que parece indicar uma lacuna persistente no processo formativo da *Educação Básica* para a *Educação Superior*. Ainda que, em particular, como pode ser evidenciado nas U11.P1E, US4.P6E, US7.P6E, US11, P2E e US5.P5E, essas dificuldades na Aritmética parecem estar fortemente enraizadas, gerando limitações na compreensão da Álgebra

na *Educação Média* que se prolongam e se manifestam com nitidez também na *Educação Superior*. Nesse cenário, torna-se pertinente a reflexão proposta por Lins e Giménez (2001), ao afirmarem que é necessário investigar quais significados os estudantes constroem a partir das ligações estabelecidas entre os diferentes âmbitos numéricos, nos quais propriedades e operações são postas em jogo. Para os autores, compreender por que tais ligações não se consolidam é passo fundamental para repensar o ensino da Matemática, especialmente da Álgebra, em uma perspectiva mais significativa e articulada. A esse respeito, ao enfatizar que as dificuldades em Álgebra decorrem, muitas vezes, de concepções inadequadas ou não consolidadas de conceitos aritméticos, Booth (1995) reforça a ideia de que a construção do conhecimento algébrico depende fortemente de uma base Aritmética sólida. Nesse sentido, o relato da professora P1L sobre o desconhecimento ou a incompreensão de conteúdos como frações e radicais adquirem relevância particular, evidenciando que tais fragilidades não são apenas circunstanciais, parecem mostrar problemas estruturais nos processos de transição entre os diferentes níveis de ensino que afetam formação matemática.

De outra parte, entendemos que a menção realizada pela professora sobre a falta de “rigoriedade” sinaliza, mais do que uma carência de conteúdo, uma ausência de postura disciplinar e procedimental frente à linguagem matemática.

Entretanto, a professora destaca sua visão sobre o papel da escola básica: ela defende um ensino que não se fundamente em demonstrações formais, mas na construção da compreensão dos objetivos e do percurso para atingi-los. Nessa concepção sobre o ensino da Álgebra, conforme interpretamos, parece indicar uma tensão entre duas perspectivas: de um lado, a exigência de rigor e precisão; de outro, a valorização de um ensino mais orientado por sentido e finalidade, que ajude os alunos a compreenderem *para que e como* realizar determinadas operações. Isso pode indicar uma visão pragmática da “Álgebra escolar”, em que o importante não é tanto justificar os processos, mas fazer com que os estudantes compreendam “para onde precisam ir” e como proceder corretamente. Podemos interpretar que, ao indicar que “o raciocínio é algo que eles têm aí”, a professora reconhece a existência de uma capacidade cognitiva dos estudantes, mas vê essa capacidade como inativa ou mal orientada. O que parece criticar não é a falta de inteligência dos estudantes, mas a ausência de mediação adequada que permita transformar essa potencialidade.

USg5.P1L: A professora aponta que muitos estudantes ingressam na *Educação Superior* sem domínio de conteúdos considerados básicos, como frações e radicais, o que, em sua perspectiva, revela não apenas lacunas conceituais, mas também a ausência de uma postura rigorosa diante do conhecimento matemático. Ao falar sobre sua concepção a respeito do ensino, já na *Educação Básica*, ela manifesta que o ensino da Matemática deveria priorizar a compreensão da finalidade dos procedimentos e determinar quais destes são adequados, mais do que a ênfase em demonstrações formais, embora reconheça que os alunos dispõem de capacidade de raciocínio, parece considerar que essa não é mobilizada de forma eficaz.

O que diz essa US:

* Defasagem na base matemática necessária para a graduação;

* Importância da clareza dos objetivos e dos procedimentos matemáticos na *Educação Básica*.

US6.P1L Eh [...] digamos [...] el razonamiento [...] (risas) es que va todo por ahí, digamos en las estructuras [Algebraicas] no es tanto de que se aprendan un concepto, sino que uno les enseña más que todo es [...] por lo menos yo trato de hacer eso eh [...] el teorema, ¿para qué les sirve el teorema? [...] Entonces el objetivo es que aprendan que hay cosas que ya están, que ya desarrollaron otros matemáticos para facilitar las cosas, para facilitar las cuestiones.

Tradução: Uh [...] digamos [...] o raciocínio [...] (risas) tudo vai por aí, digamos nas estruturas [algébricas], não é tanto que você aprende um conceito, mas sim a gente ensina mais do que tudo é [...] pelo menos estou tentando fazer isso, eh [...] o teorema, para que serve o teorema? [...] Então o objetivo é que eles aprendam que existem coisas que já estão, que já desenvolveram outros matemáticos para tornar as coisas mais fáceis, para tornar as questões mais fáceis.

Enxerto Hermenêutico: A professora enfatiza que o foco de sua prática docente na disciplina de Estruturas Algébricas — que envolve Teoria de Grupos e Teoria de Anéis — está em mostrar para que servem os teoremas, evidenciando uma tentativa de promover nos estudantes a compreensão da Álgebra não como acúmulo de definições formais e teoremas a serem memorizados de modo isolado, mas como um corpo de conhecimentos articulados que têm finalidades. Ela destaca que o aspecto central nessa disciplina é o raciocínio. A capacidade de estruturar de maneira coerente e estruturada os encadeamentos lógicos de argumentos nas demonstrações matemáticas. Ao destacar que “os teoremas já foram desenvolvidos para tornar as coisas mais fáceis”, ela atribui valor histórico e utilitário ao saber algébrico, reconhecendo o papel da produção matemática acumulada como ferramenta de pensamento e resolução de problemas.

USg6.P1L: Segundo a professora P1L, o raciocínio é a via que possibilita a aprendizagem da Álgebra, particularmente, quanto à disciplina que ela leciona, as Estruturas Algébricas. Em sua fala, enfatiza que o foco do ensino não está na mera memorização de conceitos isolados, mas na compreensão do papel funcional de elementos como os teoremas. Ao afirmar que busca mostrar “para que serve o teorema”, evidencia uma intenção pedagógica voltada à compreensão da finalidade e da aplicabilidade, mostrando a relevância dos resultados desenvolvidos pelos matemáticos previamente, visando facilitar uma compreensão mais profunda do campo de estudo.

O que diz essa US:

* Importância do raciocínio na compreensão das estruturas algébricas;

* Álgebra como um sistema estruturado de conhecimento herdado da tradição matemática.

US7.P1L El Álgebra, pues para mí, yo sé que suena un poquito eh [...], es como la base prácticamente todas las Matemáticas, porque es lo básico, básico como operar números, qué operaciones tiene que hacer, cómo resolver una ecuación. Y todo eso se usa en todas las ramas de las matemáticas que uno mira y para arriba en el pregrado, posgrado, todo eso se va usando, lo quiera o no, así sea para su labor docente. ¿Sí? Entonces para mí el Álgebra es como la base de todo.

Tradução: A Álgebra, bem, para mim — sei que soa um pouco como [...] — é como a base de praticamente toda a Matemática, porque é o básico, o básico de como operar números, quais operações você precisa realizar, como resolver uma equação. E tudo isso é usado em todos os ramos da Matemática que se estuda, e até mesmo na graduação e na pós-graduação, tudo isso vai-se usado, quer você goste ou não, até mesmo para o seu trabalho como professor. Certo? Então, para mim, a Álgebra é como a base de tudo.

Enxerto Hermenêutico: A professora concebe a Álgebra como uma área fundamental que permeia o conjunto do saber matemático em todos os níveis de ensino. Ao afirmar que a Álgebra é “o básico de como operar números, quais operações você precisa realizar, como resolver uma equação”, a professora concebe esta disciplina como um conhecimento estruturante. Nesse sentido, o conhecimento algébrico é pensado não como um objeto entre outros, mas como condição de possibilidade para o desenvolvimento matemático e profissional a partir da qual o sujeito se torna capaz de transitar por outras linguagens e ramos da Matemática. Essa consideração é relevante, porquanto robustece a ideia expressa nas US11.P2E e US12.P2E, pois traz à tona o status da Álgebra na Matemática, em que é considerando o percurso histórico que, desde o trabalho de Vietè, com sua arte analítica, o *isagoge*, foi consolidado essa disciplina. A expressão “quer você goste ou não” sugere que esta disciplina tem um caráter incontornável na trajetória do estudante e do professor de Matemática. Assim, interpretamos que a concepção da professora não é apenas uma valorização da Álgebra como conteúdo, mas uma visão de mundo disciplinar: a Álgebra aparece como eixo estruturante da Matemática escolar e universitária, caracterizada por sua presença intrínseca na própria Matemática.

USg7.P1L: A professora concebe a Álgebra como fundamento estrutural de toda a Matemática. Em sua perspectiva, essa área do conhecimento constitui a base operatória a partir da qual se

compreendem e se articulam procedimentos substanciais, como a realização de operações, a resolução de equações e o desenvolvimento do pensamento formal. Tal entendimento se estende à ideia da Álgebra como eixo estruturante, uma vez que ela é mobilizada em praticamente todos os âmbitos da Matemática, desde os níveis elementares até a pós-graduação, incluindo a prática profissional docente. Ao afirmar que esse saber é inevitável, “quer você goste ou não”, a professora atribui à Álgebra um caráter indispensável, tanto na formação acadêmica quanto na atuação profissional dos professores de Matemática.

O que diz essa US:

* Concepção da Álgebra como eixo estruturante da Matemática.

US8.P1L Entonces pues tratar de eh [...] esa **rigurosidad**, trabajarla en otro punto de vista [...] Entonces, primero, pues digamos, la **motivación**. **Yo sé que eso es difícil con algunos estudiantes**, porque no todo es fácil, **no todas las instituciones son iguales, no todos los estudiantes son iguales, son difíciles, yo lo sé. Pero no perder ese amor**, porque uno lo va perdiendo, los estudiantes ven cuando uno pierde ese **amor de enseñar**, [...] y ese no es el objetivo.

Tradução: Então, pois tentar eh [...] esse **rigor**, trabalhá-lo de outro ponto de vista [...]. Então, primeiro, digamos, a **motivação**. **Eu sei que isso é difícil com alguns alunos**, porque nem tudo é fácil, nem todas as instituições são iguais, nem todos os alunos são iguais, **são difíceis**, eu sei disso. Mas não **perder esse amor**, porque se a gente o perde, os alunos veem quando você perde esse **amor pelo ensino**, [...] e esse não é o objetivo.

Enxerto Hermenêutico: a professora P1L indica uma intenção de “trabalhar o rigor de outro ponto de vista”, o que sugere uma abertura à resignificação dessa noção, usualmente associada à precisão formal e à normatividade dos procedimentos matemáticos (como indicado na US3.P1L). Ao buscar outras formas de abordar o rigor, ela propõe um deslocamento de perspectiva que coloca em cena a importância da motivação discente como ponto de partida do processo formativo. Esse movimento denota uma sensibilidade pedagógica que reconhece a diversidade dos contextos educacionais (“nem todas as instituições são iguais”) e das trajetórias individuais dos estudantes (“nem todos os alunos são iguais”), mostrando o caráter heterogêneo das realidades escolares e da aprendizagem da matemática. O fragmento é fortemente embasado em uma dimensão afetiva, sintetizada na expressão “não perder esse amor”. Ao afirmar que os alunos percebem quando o professor perde o entusiasmo pelo ensino, a professora demonstra uma concepção do ato pedagógico como prática carregada de sentido e vínculo, em que a presença do professor não somente como transmissor de saberes, mas como sujeito comprometido e apaixonado, é constitutiva da experiência de aprendizagem.

USg8.P1L: A professora evidencia uma concepção de ensino da Álgebra que busca integrar a dimensão do rigor conceitual com uma abordagem sensível à motivação dos estudantes. Sua fala indica a tentativa de ressignificar o rigor, concebendo-o não como imposição normativa, mas como algo que pode ser trabalhado a partir de perspectivas mais acessíveis. Reconhece as dificuldades inerentes à diversidade de contextos institucionais e perfis discentes, mas destaca a importância de preservar o envolvimento afetivo com o ato de ensinar. Ao afirmar que os alunos percebem quando o professor perde o entusiasmo, ressalta o papel formativo da relação pedagógica e a centralidade da postura docente comprometida.

O que diz essa US:

- * Motivação;
- * Afetividade em relação ao ensino.

5.4.2 Professor P2L

US1.P2L el Álgebra básica que yo recibí para el grado 8.º, 9.º en adelante, pues fue muy tradicional. [...] Utilizábamos el texto guía, el texto temido por todos los estudiantes, que finalmente uno comprende que es simplemente como una mecanización de los ejercicios. [...] Entonces el Álgebra ahí fue como muy tradicional. Mhm [...] entonces no teníamos ningún material, solo el material del Álgebra de Baldor, que llevaba el profesor y nos decía: bueno, consíganlo. Si lo conseguíamos lo teníamos por ahí a la mano para estudiar, pero estudiar era es un decir, porque pues en 8.º, 9.º uno no entendía que eran todos esos símbolos y le parecían pues horribles. Mhm [...]. Entonces eso fue lo que pasó, como básica y media, algo difícil de comprender.

Tradução: a Álgebra básica que recebi do 8º e 9º ano em diante era muito tradicional. [...] Usávamos o livro didático, o temido texto para todos os alunos, que você finalmente entende que é simplesmente uma mecanização dos exercícios. [...] Então, a Álgebra aí foi muito tradicional. Mhm [...] naquela época, não tínhamos nenhum material, apenas o material de Álgebra de Baldor, que o professor trazia e nos dizia: bom, procure por isso. Se nós conseguíssemos, o teríamos em mãos para estudar, mas estudar era somente uma maneira de falar, porque no 8º e 9º ano, a gente não entendia o que eram todos aqueles símbolos e eles pareciam horríveis para a gente. Mhm [...]. Então foi isso que aconteceu, como na Educação Básica e Média, algo difícil de entender.

Enxerto Hermenêutico: Conforme relatado pela professora P2L, ao relembrar sua experiência com a aprendizagem da Álgebra na escola, ela enfatiza o caráter tradicional com que essa disciplina lhe foi ensinada. Dentro dessa concepção tradicional, o livro didático *Álgebra de Baldor* assume notoriedade como um elemento central na organização das sequências de ensino,

marcadas pela mecanização dos exercícios e pela ausência de sentido atribuído aos símbolos matemáticos. O relato da professora também evidencia o uso recorrente desse material no ensino da disciplina, o que facilitava o acesso dos estudantes ao livro — *Álgebra de Baldor* por meio de familiares ou conhecidos. Ainda sobre esse livro, a professora menciona a sensação de temor que ele provocava entre os alunos, o que podemos interpretar como uma relação distante e até aversiva com a Álgebra, vista como um conteúdo “temido”, pouco acessível e desvinculado da compreensão dos alunos. Contudo, segundo a professora, esse sentimento foi gradualmente superado à medida que ela passou a compreender o significado dos procedimentos e o modo de trabalhar com o texto. O relato também revela uma precariedade no acesso a materiais didáticos diversificados e atualizados, assim como uma lacuna entre o material didático e a capacidade dos alunos de interpretá-lo autonomamente.

Na fala da professora, destaca-se o início abrupto do ensino da Álgebra no oitavo ano, o que evidencia uma articulação de sentido com o que foi apontado em US5.P6E. Sendo assim, nesse nível de escolaridade, as experiências relatadas pelos professores (também observado em US5.P1E) marcam a transição da Aritmética para a Álgebra como um salto, ou seja, uma mudança significativa no modo de trabalhar a Matemática. Nesse contexto, a professora relata que, no início de sua experiência com a Álgebra na escola, “aqueles símbolos lhe pareciam horríveis”. Isso revela uma ruptura entre uma abordagem numérica concreta, centrada na manipulação de números, e uma estrutura algébrica mais abstrata. Por fim, ela compartilha que sua vivência com a aprendizagem da Álgebra foi marcada por dificuldades de compreensão, o que aponta que esse processo de transição entre Aritmética e Álgebra envolve não apenas uma adaptação conceitual, mas também uma mudança profunda na forma de pensar e de abordar a Matemática na escola.

USg1.P2L: A professora relata que sua iniciação à Álgebra, ocorrida nos anos finais da *Educação Básica e Média*, foi marcada por uma abordagem descrita por ela como tradicional, centrada na repetição mecânica de exercícios. O livro *Álgebra de Baldor*, descrito como um material temido pelos alunos, constituía praticamente o único recurso didático disponível, sendo frequentemente indicado pelo professor sem mediação pedagógica significativa. Tal prática reduzia o estudo à mera reprodução de procedimentos, sem que os alunos compreendessem o significado dos símbolos algébricos, os quais eram percebidos como estranhos e assustadores. Essa experiência denota a transição da Aritmética para a Álgebra como um momento de dificuldade cognitiva e conceitual para os estudantes, persistente ao longo da *Educação Básica e Média*.

O que diz essa US:

- * Influência do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;
- * Salto da Aritmética para a Álgebra.

US2.P2L Y luego pues en la universidad todos los cursos de Álgebra pues son difíciles de entender. Pues inicialmente el Álgebra lineal, que fue la que la primera que recibimos en tercer semestre, tal vez entonces eh [...], pues fue como de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, tal vez, y ya. Mhm [...]. Seguimos con pues Álgebra como tal, solo las estructuras que creo que son la continuación. Pero vimos eh [...], grupos y anillos separados. Tal vez las bases que uno trae son como muy vanas porque el proceso se dificulta siempre, es difícil comprender algo que no tenga números para generalizar cosas.

Tradução: E logo, na universidade, todos os cursos de Álgebra são difíceis de entender. Pois inicialmente, Álgebra linear, que foi a primeira que fizemos no terceiro semestre, talvez naquela época eh [...], pois foi como sobre resolução de sistemas de equações lineares, talvez, e só. Hum [...]. Continuamos com a Álgebra como tal, apenas com as estruturas, que eu acho que são a continuação. Mas vimos, uh [...], grupos e anéis separados. Talvez as **bases que a gente traz sejam muito vagas** porque o processo é sempre difícil, **é difícil entender** algo que não tenha números para **generalizar as coisas**.

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento da entrevista, a professora relata sua experiência na *Educação Superior*, revelando uma trajetória acadêmica marcada por dificuldades na aprendizagem da Álgebra no curso de *Licenciatura em Matemáticas*. Especificamente nesse curso, conforme apontado na *Tabela 4*, os estudantes iniciam os estudos algébricos com uma revisão dos conteúdos abordados na *Educação Média*, como fatoração e resolução de equações, buscando com isso ancorar conexões entre os conhecimentos prévios e os que serão desenvolvidos na universidade.

A disciplina seguinte, com maior foco nos conteúdos de Álgebra, é a de Álgebra Linear, como indicado pela professora no depoimento. Nessa disciplina, são abordados temas como vetores, espaços vetoriais, transformações lineares e sistemas de equações lineares, além da resolução de problemas aplicados em diferentes áreas das ciências e da engenharia. De acordo com o plano de estudos do programa de *Licenciatura em Matemáticas* da UPTC, um dos objetivos dessa disciplina é “que os alunos realizem em conjunto dois processos fundamentais: o desenvolvimento de cálculos matemáticos e demonstrações devidamente argumentadas”²¹⁵ (UPTC, disciplina 8107868 do plano de estudos 13001 de 2010, tradução nossa).

Conforme indicado pela professora, a disciplina seguinte no curso de *Licenciatura em Matemáticas* que dá continuidade ao estudo da Álgebra é aquela voltada às estruturas algébricas. Nessa disciplina, os principais temas abordados incluem uma introdução ao trabalho com as teorias de Grupos e Anéis, permitindo aos estudantes o contato inicial com conceitos fundamentais da Álgebra abstrata. Nos planos de estudos anteriores ao código 13001, de 2010,

²¹⁵ busca que los estudiantes lleven de la mano dos procesos fundamentales como el desarrollo de cálculos matemáticos y demostraciones debidamente argumentadas.

do curso de *Licenciatura em Matemáticas* da UPTC, os conteúdos referentes às teorias de Grupos e Anéis eram distribuídos em disciplinas distintas, cada uma dedicada exclusivamente ao desenvolvimento de uma dessas estruturas algébricas.

As dificuldades por ela mencionadas revelam não apenas lacunas conceituais herdadas de etapas anteriores de sua formação universitária, mas também evidenciam a presença de uma concepção algébrica ainda ancorada no âmbito do trabalho numérico. Essa abordagem, mais concreta e operatória, parece dificultar a transição para conteúdos algébricos mais avançados, os quais demandam níveis superiores de abstração. Além disso, a forma como esse conteúdo foi vivenciado contribuiu para a construção de uma concepção pessoal sobre a Álgebra como uma área de difícil compreensão.

USg2.P2L: A professora relata que, no âmbito da formação universitária, os cursos de Álgebra foram marcados por uma elevada dificuldade na compreensão. A iniciação na Álgebra universitária se deu com a disciplina de Álgebra Linear, no terceiro semestre, cuja abordagem inicial estava centrada na resolução de sistemas de equações lineares. Posteriormente, o aprofundamento em conteúdos algébricos ocorreu por meio do estudo das estruturas algébricas, especialmente as teorias de grupos e anéis, que foram tratadas no curso como disciplinas independentes. Na fala, a professora atribui a dificuldade às bases conceituais frágeis trazidas de sua formação anterior, fortemente ancoradas na manipulação numérica. Essa limitação se torna particularmente evidente na transição para conteúdos algébricos mais abstratos, os quais exigem uma compreensão que vai além do uso de números para a generalização.

O que diz essa US:

- * Dificuldade na aprendizagem da Álgebra universitária;
- * Lacunas conceituais herdadas de etapas anteriores à formação universitária.

US3.P2L Bueno [...] y en la universidad, o sea, uno al venir de un colegio que, pues le brinda unas herramientas básicas, pero no las necesarias para afrontar una universidad. Entonces eso también es difícil. Mhm. Y cosas difíciles que uno que uno vivió y que todavía vive con los estudiantes son los procesos demostrativos. Mhm. Porque es algo como tan abstracto para uno en su tiempo, para ellos actualmente.

Tradução: Bom [...] e na universidade, quero dizer, a gente vinda de uma escola que, bem, te dá ferramentas básicas, mas não as necessárias para encarar a universidade. Então isso também é **difícil**. Hum. E coisas difíceis que a gente vivenciou e ainda vive com os alunos são os processos demonstrativos. Hum. Porque é algo tão abstrato para a gente naquela época, para eles agora.

Enxerto Hermenêutico: A professora compartilha as dificuldades vivenciadas durante sua formação, especialmente na universidade, e associa essas experiências aos desafios enfrentados atualmente por seus alunos na *Licenciatura em Matemáticas*. Sua fala revela tensões entre a formação escolar anterior e as exigências da *Educação Superior*. Ao afirmar que a escola oferece “ferramentas básicas, mas não as necessárias para encarar a universidade”, entendemos que ela expressa a percepção de uma ruptura entre os conhecimentos adquiridos na *Educação Básica e Média* e aqueles demandados na universidade, o que sugere uma disparidade significativa entre a escola e a universidade. Essa lacuna parece indicar que o domínio de técnicas de manipulação simbólica, o que Fiorentini *et al.* (1993) denominam “transformismo algébrico”, não é suficiente para uma compreensão profunda da Álgebra. Aspectos substanciais como a generalização e a abstração acabam sendo negligenciados. Assim, a Álgebra escolar se mostra limitada frente às demandas de formalização e abstração presentes no âmbito universitário.

Nesse cenário, a professora reconhece uma dificuldade persistente com os aspectos formais da Álgebra, especialmente com as demonstrações, tanto em sua trajetória como aluna da licenciatura quanto na experiência atual com seus estudantes. Conforme compreendemos do relato da professora, a dificuldade com as demonstrações parece estar relacionada não apenas à complexidade dos conteúdos, mas também à exigência de uma capacidade mais refinada de abstração conceitual; habilidade esta que, aparentemente, não é devidamente incentivada ao longo da *Educação Básica e Média*.

USg3.P2L: A professora aponta uma lacuna significativa entre os conhecimentos adquiridos na *Educação Básica e Média* e as demandas cognitivas e conceituais exigidas na *Educação Superior*, particularmente no contexto universitário. Essa ruptura formativa constitui uma dificuldade que repercute na trajetória acadêmica. Essa defasagem se torna ainda mais crítica no enfrentamento dos processos demonstrativos, considerados pelo entrevistado como especialmente difíceis, tanto em sua própria experiência de formação quanto na vivência atual com estudantes. Essa persistente dificuldade com as demonstrações na formação dos licenciados, parece estar vinculada a uma falta de capacidade mais refinada de abstração conceitual.

O que diz essa US:

* Lacuna entre os conhecimentos adquiridos na *Educação Básica e Média* e as exigências da *Educação Superior*;

* Persistente dificuldade com as demonstrações na formação dos licenciados.

US4.P2L Digamos que ese proceso es difícil de **entender**, difícil de **explicar** y difícil para que lo **comprendan**. Mhm. O sea, uno estudia su demostración, ya la analiza, la interpreta y sabe de dónde sale. Mhm. Uno va y la comparte con sus estudiantes. Pero ver esas caras de que no entendí nada. **Sí, es frustrante. Es difícil**. O sea, uno prepara a clase y la hace con cariño. Vamos a demostrar esto. Entonces yo digo: ¡Uy, estas caras que hicieron me angustian!

¿Preguntas? Nada [...]. No entendieron nada o entendieron todo, pero yo creo que no entendieron nada. O sea, esos procesos son difíciles para todos.

Tradução: Digamos que esse processo seja difícil de entender, difícil de explicar e difícil para os outros entenderem. Hum. Quer dizer, você estuda sua demonstração, analisa-a, interpreta-a e sabe de onde ela vem. Hum. Você a compartilha com seus alunos. Mas ver aquelas caras que não entendem nada? Sim, é frustrante. É difícil. Quer dizer, você se prepara para a aula e a faz com carinho. Vamos demonstrar isso. Então eu digo: Ah, essas caras que fizeram me angustiam! Perguntas? Nada [...]. Eles não entenderam nada, ou entenderam tudo, mas acho que não entenderam nada. Quer dizer, esses processos são difíceis para todos.

Excerto Hermenêutico: A fala da professora permite evidenciar o caráter intersubjetivo da prática de ensino, que evidência um entrelaçamento entre o conhecimento matemático, a experiência subjetiva de compartilhá-lo e uma tentativa de encontro com o outro, que se mostra marcada por esforço, dedicação e frustração diante da incompreensão dos estudantes. Conforme Husserl (2006, p.76), no encontro no mundo com outros seres humanos, “[c]ada um tem seu lugar, a partir do qual vê as coisas disponíveis, e respectivamente ao qual elas se manifestam diferentemente para cada um deles”.

Diante desse cenário de incompreensão do conteúdo por parte dos alunos, a professora relata que prepara cuidadosamente as demonstrações que pretende ensinar. Para isso, ela estuda, analisa, interpreta e, logo, compartilha o material com seus estudantes. Esse percurso, segundo compreendemos, revela um movimento interpretativo de caráter hermenêutico, no qual o conhecimento não é simplesmente transmitido, mas compreendido e ressignificado antes de ser ensinado para possibilitar o entendimento de seus alunos. A demonstração, nesse sentido, não é apenas parte de um sistema formal, mas pode ser observada como um texto que o professor lê, interpreta e tenta traduzir para os alunos e, nesta tradução, abre-se a possibilidade (ou não) do entendimento. Isso nos remete ao conceito gadameriano de “fusão de horizontes” — *Horizontverschmelzung*, pois o professor tenta fazer coincidir seu horizonte de compreensão (construído por estudo, reflexão e ressignificação) com o dos alunos, ainda em construção.

No relato, ainda, a professora manifesta que o processo “é difícil de entender, difícil de explicar e difícil para os outros entenderem”, esse triplo reconhecimento de dificuldade aponta correspondentemente para três âmbitos: os alunos, o professor e as práticas de ensino. O que sugere que no ato de ensinar o saber não é apenas conteúdo, mas experiência vivida — *Erlebnis* (Ales-Bello, 2006). Assim, podemos interpretar que a mediação do conhecimento realizada pela professora é também um caminho de incertezas e limites, que revelam o enfrentamento com a complexidade tanto do conteúdo quanto da comunicação didática, na expectativa de um retorno, manifestado na compreensão dos estudantes. O relato da professora sugere que, quando esse retorno não se concretiza, surge o sentimento de frustração, revelado nas expressões “ver aquelas caras que não entendem nada” e “essas caras que fizeram me angustiam”. Esse sentimento de

angústia manifestado pela professora evidencia a vivência intersubjetiva no ato de ensinar, em que a experiência do outro (os alunos) afeta e constitui também a experiência do eu (o professor). Assim, o fracasso na compreensão também pode ter um impacto que reverbera no professor. Conforme compreendemos na expressão “você se prepara para a aula e a faz com carinho” pode revelar uma intencionalidade amorosa e ética no ofício docente. Aqui, a “intencionalidade” parece não apenas voltada para o conteúdo a ser ensinado, mas para o modo como esse ensino é oferecido: com cuidado e dedicação. Mesmo em meio à frustração, há um compromisso com o outro, que é o aluno. Por fim, a professora reconhece que “esses processos são difíceis para todos” indica uma tentativa de intropatia com os alunos. Na fenomenologia, “entre os nossos diversos atos, há um que podemos chamar de *Einfühlung* [intropatia], e sua peculiaridade é a de sentirmos imediatamente que estamos em contato com outro ser humano” (Ales-Bello, 2006, pp 62-63).

USg4.P2L: A professora expressa que o processo de elaboração e ensino de demonstrações em Álgebra é atravessado múltiplas complexidades: é difícil de ser compreendido, difícil de ser comunicado e, sobretudo, difícil de ser assimilado pelos alunos. Nesse contexto, ela descreve um percurso que envolve estudo, análise e interpretação das demonstrações como parte do seu compromisso com a clareza conceitual antes de ser ensinado. Ela manifesta que apesar desse esforço e da dedicação mobilizada na preparação das aulas, planejadas “com carinho”, relata sentimento de frustração e angústia diante da percepção de que os estudantes não compreendem o conteúdo apresentado. As expressões faciais dos alunos e a ausência de perguntas emergem, nesse relato, como indicativos de incompreensão ou de uma dificuldade na mediação didática. Também, afirma que tais desafios são recorrentes e não se restringem a ela, mas fazem parte da experiência vivenciada por todos os envolvidos no processo de ensino e aprendizagem.

O que diz essa US:

- * Dificuldade no ensino de Álgebra;
- * Dimensão intersubjetiva da prática de ensino;

US5.P2L Comprender qué es, qué son, cuáles o qué tenemos como hipótesis Mhm [...] y a qué debemos llegar. Eso en la parte pues demostrativa. Ya se va dando igual lo que sea, así como el Álgebra, entonces digamos seguimos los axiomas, al tener los axiomas que ya están definidos, que no necesitamos demostrar, sino simplemente los damos como proposiciones válidas. Si nosotros sabemos de dónde partimos, tenemos la herramienta, que son los axiomas, pues sabemos a dónde vamos a llegar, pues simplemente es como una combinación de axiomas, una interpretación de lo que se está haciendo, al tener claro la interpretación, pues seguramente vamos a saber. Pero, si no reconocemos como la representación de cada uno de los objetos que estamos trabajando, pues va a ser terrible.

Tradução: **Compreender** o que é, o que são, o que temos como hipóteses, Mhm [...] e aonde devemos chegar. Isso está na parte **demonstrativa**. Não importa o que seja, assim como na Álgebra, então digamos que seguimos os axiomas, já que temos os axiomas já definidos, que não precisamos provar, mas simplesmente apresentar como proposições válidas. Se sabemos de onde partimos, temos a ferramenta, que são os axiomas, porque sabemos onde vamos chegar, porque é simplesmente como uma combinação de axiomas, uma **interpretação** do que está sendo feito. Uma vez que tenhamos uma interpretação clara, certamente saberemos. Mas sim, se não reconhecermos como cada um dos objetos que estamos trabalhando é representado, então será terrível.

Enxerto Hermenêutico: A professora descreve alguns aspectos envolvidos no ensino da Álgebra no âmbito da *Educação Superior*, particularmente na *Licenciatura em Matemáticas*. Um dos pontos centrais no relato aborda o trabalho com demonstrações no ensino da Álgebra e as dificuldades para serem compreendidas pelos estudantes. Ela manifesta que o núcleo para a compreensão das demonstrações está em entender o que é dado como hipótese e o objetivo a ser atingido. Dessa forma, a fala da professora revela uma compreensão da Álgebra como uma linguagem estruturada por um conjunto de regras básicas, a partir das quais é possível desenvolver raciocínios e construir demonstrações. Para ela, o entendimento adequado de uma demonstração depende de três elementos centrais: reconhecer as hipóteses de partida, dominar os axiomas como ferramentas operatórias e ter clareza sobre o objetivo a ser alcançado. Trata-se, portanto, de uma abordagem estruturada, em que o raciocínio algébrico é visto como uma espécie de percurso lógico planejado. Conforme Bicudo (1999), o matemático profissional, ao focar substancialmente na atividade teórica, dedica-se principalmente a duas operações fundamentais: definir conceitos e demonstrar propriedades. No entanto, esse duplo esforço conduz inevitavelmente a um retrocesso infinito, já que cada definição ou demonstração exige fundamentos anteriores. Para contornar essa regressão, estabelece-se um ponto de partida, aceitando certos conceitos sem definição e algumas propriedades sem demonstração — os chamados axiomas e postulados — a partir dos quais se constrói todo o restante da teoria de forma lógica e coerente. Essa é, de modo geral, “a arquitetura da matemática que nos foi doada pelo pensamento grego dos V e IV séculos a. C., e sistematizada por Euclides em sua obra *ELEMENTOS (stoicheia)*, três séculos antes de nossa era” (Bicudo, 1999, p.18).

Segundo o relato da professora, a Álgebra envolve não apenas apresentar esses fundamentos, mas também ajudar os alunos a entenderem como eles se combinam de forma lógica e coerente para gerar novos significados. Essa visão evidencia-se quando ela afirma que “é simplesmente como uma combinação de axiomas, uma interpretação do que está sendo feito”. Ou seja, isso sugere que o saber algébrico é também interpretativo: não basta aplicar regras; é necessário compreender o que está sendo feito e por que se faz dessa forma. Contudo, a professora alerta que “se não reconhecermos como cada um dos objetos que estamos trabalhando é representado,

então será terrível”. Aqui, a professora reconhece que não basta dominar axiomas, é fundamental entender o significado dos objetos matemáticos em jogo. A representação, nesse sentido, aparece como chave para a compreensão: se o aluno não reconhece o que os símbolos e estruturas representam, toda a construção algébrica perde seu sentido e utilidade. Ensinar Álgebra, então, torna-se também o desafio de tornar os objetos matemáticos acessíveis e compreensíveis em sua forma simbólica.

USg5.P2L: No relato, a professora destaca que, no contexto do trabalho com a Álgebra com os estudantes de licenciatura em Matemática, o processo de demonstração requer, em primeiro plano, a compreensão clara das hipóteses de partida e dos objetivos a serem alcançados. Essa trajetória é orientada por axiomas previamente estabelecidos, os quais não necessitam ser demonstrados, mas apenas apresentados como proposições válidas. Assim, o desenvolvimento do raciocínio depende de uma combinação interpretativa desses axiomas, que funcionam como ferramentas no entrelaçamento lógico das demonstrações. A clareza na interpretação desse processo é apontada como fundamental para garantir a compreensão. Contudo, a professora adverte que, sem o devido reconhecimento das representações dos objetos matemáticos envolvidos, isto é, sem que o aluno compreenda o significado simbólico e conceitual do que está manipulando, a aprendizagem torna-se difícil.

O que diz essa US:

- * A interpretação dá sentido às demonstrações matemáticas;
- * Saber demonstrar.

US6.P2L O sea la idea fundamental que es **comprendan** qué es lo que están **haciendo**. Mmm [...]. Si estamos comprendiendo **qué es lo que estamos haciendo**, así como le pasaba a uno, que uno de pronto iba a clase y no sabía específicamente qué era lo que estaba recibiendo. Entonces, **comprensión** podría ser **lectora** simplemente, al tener la **comprensión lectora**, pues podemos **interpretar**, de igual manera en el Álgebra ya un poco avanzada, **comprender qué es lo que se está demostrando**.

Tradução: Ou seja, a ideia fundamental é que eles **compreendam o que estão fazendo**. Humm [...] Se estamos **compreendendo o que estamos fazendo**, assim como costumava acontecer a gente, talvez a gente ia para a aula e não sabíamos especificamente o que estávamos recebendo. Então, **compreensão** pode ser simplesmente **leitora**. Ao ter **compreensão de leitura**, pois podemos **interpretar**, da mesma forma que **em Álgebra um pouco avançada**, **compreender o que está sendo demonstrado**.

Enxerto Hermenêutico: Conforme interpretamos, o fragmento revela que o aspecto central na concepção da professora sobre o ensino de Álgebra está fortemente vinculado à ideia de *compreensão*, não apenas como domínio técnico de procedimentos, mas como apropriação consciente e significativa do que está sendo feito. A fala da professora sugere que o processo de ensinar e aprender Álgebra envolve mais do que executar cálculos ou aplicar fórmulas, implica compreender o *sentido* da atividade matemática que está sendo trabalhada. Assim como na US5.P2L, a professora coloca ênfase na atividade de compreender. Conforme Heidegger (2006, p. 183) “compreender é ser capaz de algo; o ser do ente compreendido é um poder-ser”. Ou seja, compreender é mais do que captar cognitivamente um conteúdo, é experienciar possibilidades. Nesse sentido, a fala da professora se aproxima a uma abordagem hermenêutica, na qual a compreensão de uma demonstração algébrica não se resume à reprodução de um encadeamento lógico, mas representa a abertura de um caminho de sentido que permite ao aluno compreender o que está em jogo naquela construção. Ainda mais, a professora ressalta a importância de que os alunos *saibam o que estão fazendo*, o que, em nossa interpretação, aponta para uma crítica implícita às práticas de ensino que priorizam a memorização e a mecanização em detrimento do entendimento. Ao relembrar sua própria experiência como estudante, quando comparecia às aulas sem saber exatamente o que estava aprendendo, ela enfatiza a necessidade de que o ensino proporcione *clareza de sentido*, o que se configura como um compromisso ético com o processo formativo. Nesse contexto, a *compreensão leitora* é considerada pela professora como um modo de tornar possível interpretar e atribuir sentido aos conceitos algébricos. A professora sugere que, assim como na leitura de um texto, interpretar demonstrações em Álgebra exige a capacidade de atribuir significado ao que está sendo manipulado simbolicamente. Tal postura ressoa diretamente na experiência hermenêutica, conforme propõe Dilthey: “o compreender e a interpretação estão, desta forma, sempre vivos e ativos na própria vida” (Dilthey, 1999, p. 27).

USg6.P2L: A professora enfatiza que a base do processo de aprendizagem em Álgebra está na capacidade dos estudantes compreenderem, de forma consciente, o que estão fazendo. Ela reflete sobre experiências anteriores como aluna, quando frequentava as aulas sem clareza sobre os conteúdos recebidos e considera esse aspecto problemático. Nesse sentido, a compreensão não se restringe à execução mecânica de procedimentos matemáticos, mas envolve um processo interpretativo semelhante à leitura. A partir do domínio da compreensão leitora, torna-se possível interpretar e atribuir sentido aos conceitos algébricos, mesmo em níveis mais avançados, como ao compreender o que está sendo demonstrado em um argumento formal. Assim, a professora vincula a aprendizagem significativa em Álgebra à habilidade de interpretar e entender os objetos e processos matemáticos em sua dimensão simbólica e lógica.

O que diz essa US:

- * A compreensão leitora possibilita interpretar e atribuir sentido a conceitos algébricos;
- * Aponta questões concernentes ao ensino.

US7.P2L Bueno, el Álgebra como tal eh [...]. Bueno, empiezo por el Álgebra básica. El Álgebra básica me parece importante porque ¡está en todo! La básica. Sino que, pues nosotros la vemos como muy alejada de la realidad, siempre le tememos, pero en sí está inmersa en todo. Entonces, como yo les decía a mis estudiantes de básica, decían: profe, y ¿cuándo vamos a empezar a ver Álgebra? Yo dije pues es que Álgebra ya estamos viendo. [...] Entonces esa es la idea que tengo del Álgebra.

Tradução: Bem, a Álgebra como tal, eh [...]. Bem, vou começar com a Álgebra básica. A Álgebra básica me parece importante porque está em tudo! A Álgebra básica. Mas, bem, nós a vemos como algo muito distante da realidade, sempre a tememos, mas ela está imersa em tudo. Então, como eu costumava dizer aos meus alunos da Educação Básica, eles disseram: professora, quando vamos começar a ver Álgebra? Eu disse para eles que já estamos vendo Álgebra. Quer dizer, só porque eu não conto a eles que estamos vendo Álgebra não significa que não a estejamos vendo. Então essa é a ideia que tenho da Álgebra.

Enxerto Hermenêutico: Ao tentar explicitar sua concepção sobre a Álgebra e seu ensino, a professora estabelece uma diferença entre o que denomina “Álgebra como tal — ou em si” e a “Álgebra básica”. A partir dessa diferenciação, ela passa a expor sua compreensão acerca da Álgebra básica, ressaltando que essa disciplina é muito importante, pois, segundo suas palavras, “está em tudo”. Essa afirmação demanda ser interpretada para revelar possíveis sentidos e significados que auxiliem sua compreensão. Sendo assim, ao declarar que a Álgebra “está em tudo”, a professora parece evidenciar uma concepção que valoriza sua funcionalidade e aplicabilidade, ainda que essas não sejam facilmente perceptíveis. É como se a compreensão da Álgebra permanecesse velada, embora inerente à realidade mundana, aguardando ser revelada. Isso pode indicar uma dificuldade em traduzir sua importância, conforme descrito pela professora, para uma prática de ensino, o que, por sua vez, pode contribuir para o que ela própria nomeia como “distância com a realidade”. Por outro lado, da fala da professora P2L também emergem indícios de uma tensão afetiva e escolar relacionada ao ensino da Álgebra. Ao afirmar que “nós a tememos”, revela-se uma sensação de medo associada ao conteúdo, sugerindo que o processo de ensino não favoreceu a construção de significados que tornassem essa disciplina acessível. A Álgebra, assim, permanece envolta em uma camada de abstração que a torna intimidadora para os alunos.

Ainda, a respeito do dito pela professora neste fragmento, também intuimos uma tensão que se dá entre o conhecimento da professora ao respeito da Álgebra e as expectativas dos estudantes sobre esta disciplina, que esperam por um início explícito ao trabalhar com a Álgebra. Isso revela uma concepção implícita da professora sobre a Álgebra como algo que não depende de nomeação formal para estar presente na prática de ensino. A fala da professora sugere uma visão da Álgebra como uma linguagem oculta, que se revela por meio de situações cotidianas e tarefas escolares,

o que pode envolver padrões, regularidades e generalizações. A professora parece compreender que o ensino da Álgebra começa muito antes de nomeá-la formalmente. Essa perspectiva está em consonância com abordagens que defendem uma iniciação precoce à Álgebra, como descrito, por exemplo pelo NTCM: “Álgebra abrange as relações entre grandezas, o uso de símbolos, a modelagem de fenômenos e o estudo matemático da mudança. A palavra Álgebra não é comumente ouvida em salas de aula do ensino fundamental, mas as investigações e conversas matemáticas dos alunos nessas séries frequentemente incluem elementos de raciocínio algébrico. Essas experiências apresentam contextos ricos para o avanço da compreensão matemática e são um importante precursor para o estudo mais formalizado da Álgebra nos anos finais do ensino fundamental e médio”²¹⁶ (National Council of Teachers of Mathematics [NTCM], 2000, p. 37, tradução nossa).

Segundo Carraher, Schliemann e Schwartz (2008), o que se denomina Álgebra inicial — *Early Algebra* — não corresponde exatamente à Álgebra tradicionalmente ensinada no oitavo ou nono ano do ensino fundamental. A *Early Algebra* se entrelaça com temas recorrentes do currículo dessa etapa da escolarização, introduz a notação algébrica de forma gradual e é fortemente sustentada por contextos ricos e significativos para os alunos. Essa abordagem, conforme Carraher *et al.*, aproxima-se do relato da professora ao comentar sobre sua prática quando trabalhava com alunos do ensino fundamental: não conto a eles que estamos vendo Álgebra, não significa que não a estejamos vendo. Essa afirmação revela uma concepção de Álgebra que transcende os conteúdos explicitamente rotulados como “algébricos”, manifestando-se no raciocínio, nas operações e nas estruturas lógicas presentes desde os primeiros anos do ensino fundamental.

USg7.P2L: A professora expressa uma concepção de Álgebra que distingue entre uma forma mais elaborada e a “Álgebra básica”, a esta última atribui um papel relevante, pois, segundo ela, está em tudo. Conforme seu relato, embora a Álgebra básica permeie diversos aspectos da realidade mundana, ela é frequentemente compreendida como distante ou inacessível, gerando inclusive sentimentos de temor. Ao relatar sobre sua experiência quando trabalhava com alunos de *Educación Básica*, eles perguntavam frequentemente quando começariam “a ver Álgebra”, e ela costumava dizer para eles que já estavam vendo Álgebra, mesmo sem nomeá-la formalmente, a professora revela uma visão que compreende o conteúdo algébrico como transversal ao currículo e implícito desde os anos iniciais do ensino.

O que diz essa US:

* Concepção sobre a Álgebra básica;

²¹⁶ Algebra encompasses the relationships among quantities, the use of symbols, the modeling of phenomena, and the mathematical study of change. The word algebra is not commonly heard in elementary school classrooms, but the mathematical investigations and conversations of students in these grades frequently include elements of algebraic reasoning. These experiences present rich contexts for advancing mathematical understanding and are an important precursor to the more formalized study of algebra in the middle and secondary grades.

* Temor pela Álgebra.

US8.P2L Pues finalmente no sé que [risas] Mhm [...] uno anda en muchas ideas del Álgebra, pero decir mi idea sobre el Álgebra es esta, no [...]. O sea, de pronto Álgebra básica, la parte de la transición entre la Aritmética y el Álgebra, y en la universidad procesos demostrativos, que sería específicamente en la licenciatura, porque los estudiantes que venían de Ingeniería pues quieren que le muestren es solamente la aplicación, eso para qué, algo práctico, así, inmediato.

Tradução: Bem, finalmente, eu não sei o que [risos] Mhm [...] a gente tem muitas ideias sobre Álgebra, mas dizer que a minha ideia sobre Álgebra é esta, não [...]. Quer dizer, de repente Álgebra Básica, a parte da transição entre Aritmética e Álgebra, e na universidade, processos demonstrativos, que seriam especificamente na licenciatura, porque os alunos que vêm da Engenharia, bem, eles querem que lhes seja mostrada apenas a aplicação, por isso, algo prático, tipo, imediato.

Enxerto Hermenêutico: Segundo expressa a professora, há uma polissemia de sentidos e significados de Álgebra. Isso evidencia a dificuldade em formular uma definição única sobre o que a Álgebra representa para ela enquanto objeto de ensino. O relato sugere que, para a professora, a Álgebra não está restrita a uma definição fechada ou a um conceito único, não é apenas um conjunto de conteúdos formais, mas uma prática vivida, atravessada por diversas experiências. Nesse sentido, na fala, ela distingue dois momentos significativos tomados como referência de suas experiências vividas ao trabalhar como a Álgebra, tanto como aluna quanto como professora. Por um lado, ela destaca a *Álgebra básica*, entendida como transição entre a Aritmética e a manipulação simbólica, mais abstrata. Por outro, os *processos demonstrativos* desenvolvidos na universidade, especialmente no curso de *Licenciatura em Matemáticas*. Conforme os relatos das US4.P2L e US7.P2L, essa forma de intuir sua concepção da Álgebra e seu ensino, parece ter um enraizamento nas dificuldades manifestadas pela professora, tanto na aprendizagem como no ensino desta disciplina. Essa distinção aponta para a compreensão da Álgebra como uma disciplina que se desdobra em camadas, cada uma com sua intencionalidade de ensino e correspondentes níveis de complexidade. Na *Licenciatura em Matemáticas*, a ênfase está na estrutura formal e nas demonstrações matemáticas, enquanto em outros cursos, como o de Engenharia, predomina a expectativa por aplicações imediatas e práticas dos conteúdos, o que podemos interpretar como um tensionamento entre o “saber pelo saber” e o “saber para fazer”.

USg8.P2L: A professora reconhece que possui múltiplas ideias sobre Álgebra, produto de sua reflexão sobre sua experiência escolar, mas não se identifica com uma concepção única e definida da disciplina. Em sua fala, indica que essas ideias se organizam de forma contextual, progressiva e marcada pelas principais dificuldades identificadas por ela nesta disciplina: na

Educación Básica e Média, a Álgebra aparece como uma transição entre a Aritmética e a linguagem simbólica; no ensino universitário, sobretudo na *Licenciatura en Matemáticas*, o foco recai sobre processos demonstrativos e o aprofundamento conceitual. A professora também observa diferenças nas expectativas dos estudantes de diferentes cursos, como os de Engenharia, que tendem a buscar aplicações imediatas e práticas dos conteúdos algébricos, o que contrasta com o caráter mais teórico e formal da licenciatura.

O que diz essa US:

- * Conceção de Álgebra atravessada por diversas experiências vivenciadas;
- * Expectativas sobre a Álgebra entre áreas.

5.4.3 Professor P3L

US1.P3L Bueno, haciendo un esfuerzo de memoria, pienso que el Álgebra que más recuerda uno de su bachillerato²¹⁷ es el famoso **libro de Baldor** y [...], yo hice mis **cursos de 8.º y 9.º** aquí en la **Escuela X** y con un profesor famoso de la época. Pero lo tradicional era el libro de Álgebra [de Baldor] y la repetición de ejercicios. Esa era como [...] **la finalidad**, era, eh [...], practicar procedimientos o algoritmos algebraicos para producir un resultado, [...] pero **comprensión**, o sea, tener un **concepto** o tener un **significado** de lo que se hacía no [...], no lo recuerdo. O sea, no había esa esa posibilidad, sino sencillamente era, eh [...], una rutina que se interiorizaba simbólicamente, sin conceptualización de base, solamente la parte **mecánica** de unos [...], una simbolización. Y entonces en eso consistía el Álgebra bachillerato, en un manejo simbólico referente a polinomios y a funciones racionales, fracciones algebraicas.

Tradução: Bem, tentando lembrar, acho que a Álgebra que mais me lembro da *Educación Básica Secundaria* é o famoso livro de Baldor e [...] fiz minhas aulas do 8º e 9º ano aqui na Escola X com um professor famoso da época. Mas a abordagem tradicional era o livro de Álgebra [de Baldor] e a repetição de exercícios. Isso era como [...] o propósito, era, eh [...], praticar procedimentos algébricos ou algoritmos para produzir um resultado [...], mas a compreensão, isto é, ter um conceito ou um significado para o que estava sendo feito, [...] não me lembro. Quer dizer, não havia essa possibilidade, mas era simplesmente, eh [...], uma rotina que era internalizada simbolicamente, sem conceitualização de base, apenas a parte mecânica de alguma [...], uma simbolização. E era nisso que consistia a Álgebra na *Educación Básica Secundaria*: uma manipulação simbólica de polinômios e funções racionais, frações algébricas.

²¹⁷ Sobre o significado da palavra, convidamos o leitor a consultar a nota de rodapé 91, na página 83.

Enxerto Hermenêutico: Ao evocar suas vivências escolares, o professor P3L destaca o livro didático *Álgebra de Baldor* como principal referência para o ensino da Álgebra durante a *Educação Básica Secundaria*. Ainda ao se referir ao estudo da Álgebra no 8º e 9º ano, o professor sugere que, em particular o estudo da Álgebra tem início de forma abrupta nesse período da escolarização, evidenciando o “salto” entre a Aritmética e a Álgebra, conforme indicado nas unidades US1.P2L e US5.P6E. Segundo o relato do professor, o ensino da Álgebra estava pautado por práticas consolidadas, inseridas em uma “abordagem tradicional”, fortemente centrada na repetição de exercícios e na execução de procedimentos algébricos e algoritmos. O principal material utilizado em sala de aula era o próprio livro de *Baldor*, reforçando essa metodologia baseada em treino técnico. O professor afirma não se recordar de momentos em que se estimulava a busca pelo significado do que estava sendo feito, indicando que o processo de aprendizagem nesse período escolar se limitava à manipulação simbólica sem uma fundamentação conceitual explícita. Ao utilizar a expressão “rotina internalizada simbolicamente”, ele sugere que o ensino da Álgebra foi vivenciado como uma experiência marcada por uma aprendizagem automatizada e pouco significativa, em que os signos matemáticos se apresentavam descolados de uma compreensão intencional e reflexiva. A fala evidencia uma dissociação entre o fazer algébrico mecânico e o pensar conceitual, revelando também uma ausência de abertura para que os alunos atribuíssem sentido àquilo que aprendiam. Ao afirmar que “não havia essa possibilidade” de compreender o que fazia, sugere uma desconexão entre o ato de simbolizar e o significado do que é simbolizado. A esse respeito, Husserl (2012, p.41) manifesta que “a roupagem das ideias faz com que o sentido próprio do método, das fórmulas, das ‘teorias’ permaneça incompreendido”. Assim, ausência de sentido, na prática algébrica reportada pelo professor, revela uma experiência de esvaziamento, em que o conhecimento matemático deixa de ser vivenciado como pensar analítico e reflexivo construção intelectual e passa a ser apropriado apenas como uma técnica de manipulação simbólica. Desse modo, o estudante é colocado diante de símbolos que não se articulam com sua experiência, impossibilitando a constituição do saber como fenômeno vivido e significativo. A referência a polinômios, funções racionais e frações algébricas indica que o ensino estava centrado em procedimentos operacionais, como fatoração, simplificação e resolução de equações, sem uma preocupação explícita com a compreensão conceitual e suas possibilidades de aplicação. Também aponta que, na prática, esses conteúdos eram frequentemente tratados de forma fragmentada, o que evidencia a dificuldade na construção de sentido reportada pelo professor P3E.

USg1.P3L: Ao lembrar suas experiências vivenciadas na aprendizagem da Álgebra durante a *Educação Básica Secundaria*, o professor destaca como referência principal o livro amplamente utilizado de *Baldor*, o qual norteava as práticas pedagógicas no ensino dessa disciplina. O depoente reporta que, em sua época escolar, as aulas de Álgebra eram ministradas no 8º e 9º anos e eram estruturadas de maneira tradicional, centradas em exercícios repetitivos com foco na execução de procedimentos algébricos e algoritmos. O objetivo subjacente à prática pedagógica

que ele descreve estava orientado para a obtenção de resultados operacionais, não sendo fomentada uma compreensão conceitual dos conteúdos abordados. Tal abordagem favorecia a automatização de rotinas algébricas, internalizadas por meio da manipulação simbólica, sem a devida construção de significado ou base conceitual. Dessa forma, para ele, a Álgebra era abordada apenas como um conjunto de operações mecanizadas, envolvendo conteúdos tais como polinômios, funções racionais e frações algébricas.

O que diz essa US:

- * Influência do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;
- * Redução do ensino da Álgebra à prática operatória e ausência conceitual.

US2.P3L Ya en la universidad entra uno a dominios un poquito más resbaladizos, ¿no? Las estructuras algebraicas, y recuerdo que [...] no cambia mucho la forma de trabajo, porque es analice un conjunto, una operación, mire qué propiedades cumple, pero no le queda a uno eh [...] el significado de qué es eso de grupo, qué es eso de anillo, o sea, no hay una comprensión. Sencillamente es una mecanización.

Tradução: Já na universidade, a gente entra em domínios um pouco mais escorregadios, né? As estruturas algébricas, e eu me lembro que [...] a forma de trabalhar não muda muito, porque se trata de analisar um conjunto, uma operação, observar quais propriedades ela cumpre, mas não fica para a gente, uh [...] o significado do que é um grupo, o que é um anel, quer dizer, não há entendimento. É simplesmente uma mecanização.

Enxerto Hermenêutico: Ao relatar sua experiência com a aprendizagem da Álgebra no nível superior, o professor P3L recorre à metáfora “domínios um pouco mais escorregadios” para expressar a instabilidade conceitual e a dificuldade de compreensão associadas às estruturas algébricas, particularmente no que se refere às estruturas de grupos e anéis, comumente abordadas nos cursos de licenciatura em Matemática. Ele observa que a metodologia de ensino da Álgebra seguida na graduação permaneceu semelhante àquela vivenciada na *Educação Básica Secundaria*, sugerindo uma continuidade no enfoque, mesmo diante de conteúdos mais abstratos. De modo específico, P3L relata que o trabalho acadêmico consistia em analisar conjuntos e operações, verificando o cumprimento de determinadas propriedades. Essa descrição aponta para uma abordagem marcadamente formalista, centrada em algoritmos e critérios de validação, dissociada da construção de significados e que não se conectam com a experiência subjetiva do estudante.

O professor enfatiza que, nesse modelo de ensino, não se consolidou a compreensão dos conceitos fundamentais, como o que constitui um grupo ou um anel, evidenciando uma lacuna na sedimentação das ideias substanciais da Álgebra abstrata. A conclusão expressa pelo professor

parece contundente: “não há entendimento. É simplesmente uma mecanização”. A mecanização mencionada revela uma experiência de analisar e compreender as ideias presentes no conceito, em que o conhecimento matemático é reduzido à execução de regras desprovidas de sentido.

USg2.P3L: Ao relatar sua experiência na formação universitária, o professor P3L assinala a entrada em âmbitos teóricos mais abstratos, referindo-se às estruturas algébricas como “domínios um pouco mais escorregadios”. Ainda que o conteúdo se aprofunde com a introdução de objetos matemáticos mais abstratos nas estruturas algébricas, a metodologia adotada permanece basicamente a mesma que a trabalhada na *Educação Básica Secundaria*. Ele aponta que o trabalho acadêmico com essa disciplina na graduação consistia em: análise de conjuntos e operações, verificação do cumprimento de determinadas propriedades. O professor observa que, apesar do engajamento com tais estruturas, não se desenvolve uma compreensão substancial sobre o que representam matematicamente os grupos ou anéis. Ele conclui que, nesse cenário, o ensino universitário da Álgebra se constitui majoritariamente como uma prática de mecanização.

O que diz essa US:

* Continuidade metodológica das práticas de ensino entre os níveis de ensino;

* Caracterização do ensino da Álgebra no âmbito universitário como mecanização.

US3.P3L Entonces, si, la experiencia ha sido estéril en bachillerato, estéril en la universidad eh [...] y empecé a abrir a la comprensión cuando trabajamos con el *Ministerio de Educación Nacional* [MEN] y con el doctor **Carlos Eduardo Vasco Uribe**, que en paz descanse; pero digamos que él fue mi maestro, que logró abrir esas ventanas de la **comprensión**. Empezar a cambiar un poquito la concepción del Álgebra, mirarla eh [...] como un **juego de adivinanza primero**, como una oportunidad para **lograr generalizaciones** y para **expresar esas generalizaciones**, fundamentalmente. Cómo partir de los **sistemas concretos**, para a partir de ellos, elaborar un **significado** que empezara a **producir un concepto**. Y lo último que viene en ese proceso, que él propone, es ya el manejo de la parte simbólica, que es lo del **Álgebra tradicional**, que hemos tenido que **sufrir o que vivir**.

Tradução: Então, sim, a experiência tem sido estéril na Educação Básica e Média, estéril na universidade, eh [...] e eu comecei a me abrir para a compreensão quando trabalhamos com o *Ministério de Educación Nacional* [MEN] e com o **Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe**, que ele descanse em paz; mas digamos que ele foi meu mestre, aquele que conseguiu abrir essas janelas da **compreensão**. Começar a mudar um pouco a concepção da Álgebra, olhá-la, eh [...] como um **jogo de adivinhação primeiro**, como uma oportunidade para alcançar **generalizações** e **expressar essas generalizações**, fundamentalmente. Como partir de **sistemas concretos**, para a partir deles elaborar um **significado** que começasse a **produzir um conceito**. E a última coisa

que entra nesse processo, que ele propõe, é o manejo da parte simbólica, que é a da Álgebra tradicional, que tivemos que sofrer ou viver.

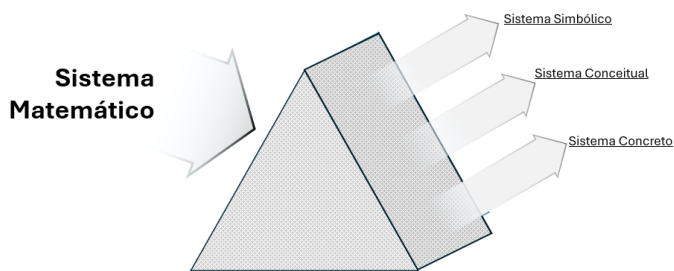
Enxerto Hermenêutico: No relato, o professor descreve sua experiência com a aprendizagem da Álgebra como “estéril”, tanto na *Educação Básica e Média* quanto na universidade. Essa esterilidade é associada à ausência de compreensão, sugerindo um ensino centrado na repetição de procedimentos simbólicos, desprovido de sentido. Contudo, ele menciona um ponto de inflexão em sua trajetória: o contato com o MEN e, em especial, com o Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe, a quem reconhece como mestre e figura inspiradora. Foi esse encontro que lhe possibilitou abrir-se para uma nova forma de compreender a Álgebra. O trabalho citado pelo professor foi desenvolvido no contexto do *Programa de Renovación Curricular* na Colômbia²¹⁸, iniciativa que compreendeu uma série de reformas implementadas no sistema educacional colombiano entre o final dos anos 1970 e início dos anos 1980, com o propósito de atualizar e melhorar a qualidade da educação. Essas mudanças envolveram revisões nos conteúdos curriculares, práticas pedagógicas e estratégias de avaliação, buscando responder às demandas sociais e econômicas do país. O professor P3L destaca, com evidente afeto e reconhecimento, a figura de Carlos Eduardo Vasco Uribe²¹⁹, cuja influência considera determinante para a abertura de “janelas da compreensão” e para sua transformação no modo de entender e ensinar. Carlos Eduardo Vasco Uribe atuou como assessor do Ministério da Educação Nacional entre 1978 e 1993, sendo responsável pela formulação dos Programas Curriculares de Matemática voltados à *Educação Básica*. Nesse processo, introduziu uma abordagem²²⁰ fundamentada na *teoria geral de sistemas* e na *ciência cognitiva*. Segundo o depoimento do professor P3L, esse trabalho com Vasco lhe permitiu se abrir a uma nova concepção da Álgebra, até então marcadamente negativa, como resultado de suas experiências formativas tanto na *Educação Básica* quanto na universidade. O contato com essa perspectiva renovadora abriu caminhos para uma compreensão mais significativa e contextualizada da disciplina. Na nova concepção, à qual o professor P3L se refere, a Álgebra é inicialmente apresentada como um “jogo de adivinhação”, metáfora que evoca uma atividade dinâmica e lúdica de exploração e descoberta, especialmente no trabalho com noções de variável. Ele considera esse primeiro contato como uma oportunidade: uma condição propícia à formulação de generalizações e à expressão dessas generalizações com base em *sistemas concretos*. Dentro dessa perspectiva, a Álgebra assume duas funções substanciais: como ato de pensamento e como linguagem. Segundo o professor P3L, o trabalho com a Álgebra a partir do *Enfoque de Sistemas* (ver Figura 23, a seguir) parte do trabalho com os *sistemas concretos* que permitem ir atribuindo significados aos objetos matemáticos, o que conduz à construção de conceitos cada vez mais elaborados — no âmbito dos *sistemas conceituais*. Somente após essa etapa, o enfoque aborda os *sistemas simbólicos*, que correspondem à Álgebra tradicionalmente ensinada na *Educação Básica Secundaria e Média*.

²¹⁸ Uma descrição mais ampla dessas reformas é apresentada na seção 3.1.2 da presente tese.

²¹⁹ Carlos Eduardo Vasco Uribe (1937-2022), <https://revistas.upn.edu.co/index.php/RCE/article/view/860/875>

²²⁰ Uma descrição do *Enfoque de Sistemas* no *Programa de Renovación Curricular* na Colômbia é apresentada na seção 3.1.4 da presente tese.

Figura 23 - Proposta curricular Eduardo Vasco Uribe



Fonte: elaborado a partir de Vasco (1984).

USg3.P3L: No relato o professor manifesta que a experiência de aprendizagem da Álgebra, tanto na *Educação Básica Secundaria e Média* quanto na *Educação Superior*, foi marcada por uma profunda esterilidade em termos de compreensão significativa dos conceitos. A abertura para uma nova concepção ocorreu durante o trabalho com o MEN, especialmente sob a orientação do Dr. Carlos Eduardo Vasco Uribe, figura que o professor reconhece como mestre e cuja contribuição foi determinante para a abrir as “janelas da compreensão”. Essa nova concepção lhe permitiu ressignificar a Álgebra, olhando para essa disciplina, inicialmente, como um “jogo de adivinhação”, isto é, uma atividade que fundamentalmente possibilita alcançar generalizações e expressar essas generalizações. A abordagem proposta por Vasco Uribe, parte da experiência sensível, elaborando significados progressivamente com base em *sistemas concretos*, até trabalhar com a formalização conceitual. Nesse percurso, o aspecto simbólico, característico da Álgebra tradicional, é abordado apenas na etapa final, em oposição ao modo convencional de ensino, que privilegia a manipulação simbólica desarticulada da experiência concreta.

O que diz essa US:

- * Ausência de compreensão significativa;
- * Concepção de Álgebra baseada no *Enfoque de Sistemas*.

US4.P3L Y lo que él [Carlos Vasco] mencionaba con mucha sabiduría es que los profesores de bachillerato y muchos profesores de universidad lo que hacemos es, eh [...], trabajar los sistemas simbólicos, para tratar de que los símbolos permeen la corteza cerebral de los estudiantes, esperando un milagro que llegue al cerebro y pueda producir algún tipo eh [...] de luz, ¿no? ¡Y pues el proceso es un fracaso, completamente!

Tradução: E o que ele [Carlos Vasco] mencionou muito sabiamente é que o que nós, professores na *Educação Básica Secundaria e Média*, e muitos professores universitários, fazemos é, uh, [...], trabalhar os sistemas simbólicos, para tentar fazer com que os símbolos permeiem o córtex

cerebral dos alunos, na esperança de um milagre que chegue ao cérebro e possa produzir algum tipo de eh, [...] luz, certo? E o processo é um fracasso completo!

Enxerto Hermenêutico: Neste fragmento, o professor aponta para uma notada dificuldade à prática pedagógica predominante no ensino da Álgebra, tanto no nível de *Educação Básica Secundaria e Média* quanto de *Educação Superior*. Ele cita Carlos Eduardo Vasco Uribe como referência crítica e inspiradora, atribuindo-lhe a lucidez de reconhecer que o ensino da Álgebra tem se limitado ao trabalho com os *sistemas simbólicos*. Segundo o professor, insistir nesse caminho do ensino da Álgebra, consiste em tentar fazer com que os símbolos matemáticos “permeiem o córtex cerebral dos alunos”, numa metáfora que sugere um processo mecânico, quase mágico, de internalização dos conteúdos. A expressão “na esperança de um milagre” sugere uma ausência de mediação significativa entre o símbolo e o sentido, o que compromete a construção de conhecimento. Conforme Bicudo (1994b, p.3) “[à] medida que o professor se põe com o aluno, em uma atitude de diálogo, procurando penetrar no texto de Matemática e inicia a busca de possíveis compreensões do que está dito, dando atenção aos sentidos que surgem e não só os referentes aos signos e significados matemáticos, aqueles vazios vão sendo preenchidos”. O professor conclui que esse processo é um fracasso completo, o que sugere que ele não está apenas descrevendo uma prática, mas revelando uma vivência pedagógica marcada por frustração. Na entrevista, ele revela pensar em uma busca de sentido das dificuldades experienciadas com o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

USg4.P3L: O professor P3L enfatiza a observação de Carlos Eduardo Vasco Uribe ao apontar que uma prática recorrente entre docentes de *Educação Básica Secundaria, Educação Média* e da *Educação Superior* consiste na centralização dos sistemas simbólicos como eixo metodológico predominante no ensino da Álgebra. Essa abordagem busca, de modo mecânico e descontextualizado, introjetar os símbolos matemáticos na cognição dos estudantes, é como tentar fazer com que os símbolos matemáticos “permeiem o córtex cerebral dos alunos”, operando sob a expectativa implícita de que essa exposição simbólica provoque espontaneamente uma compreensão conceitual, uma “luz” esclarecedora no intelecto dos alunos. Ele conclui que tal prática se revela didaticamente ineficaz, resultando o processo de ensino da Álgebra num completo fracasso.

O que diz essa US:

* A centralização excessiva dos sistemas simbólicos no ensino da Álgebra resulta ineficaz.

US5.P3L O sea. Bueno, yo pienso que el Álgebra no se explica. Pero sí [...], ese es el error de la mayoría de [...] la enseñanza de la Matemática y es que se redujo a explicarse y no a

construirse, no a darse la oportunidad de descubrirse, de elaborarse, de encontrar las regularidades, las diferencias etcétera.

Tradução: Bem, eu acho que a Álgebra não se explica. Mas sim, [...] esse é o erro da maioria [...] do ensino de Matemática, que é que ele tem sido reduzido a explicar e não a construir, não se dando a oportunidade de descobrir, elaborar, encontrar regularidades, diferenças etc.

Excerto Hermenêutico: O professor inicia o relato com uma afirmação provocativa: “a Álgebra não pode ser explicada”. Essa frase, aparentemente paradoxal, carrega uma crítica à abordagem reducionista do ensino da Matemática, que privilegia a explicação formal em detrimento da construção significativa. A fala prossegue apontando que o erro recorrente no ensino é “reduzir a Matemática a explicar”, sem abrir espaço para descobrir, elaborar, encontrar regularidades e diferenças. Essa descrição do professor sugere que o ensino da Álgebra tem sido tradicionalmente marcado por uma metodologia que favorece a transmissão, em que o professor explica e o aluno escuta, sem que haja espaço para a experiência ativa do pensamento matemático. Neste fragmento, o professor denuncia a perda da intuição e da construção no ensino da Álgebra, de modo que, a explicação, quando desvinculada da vivência, torna-se uma simbologia vazia, incapaz de produzir compreensão. Hans-Georg Gadamer, por sua vez, destaca que a compreensão não é um ato técnico, mas um processo hermenêutico que envolve fusão de horizontes entre o intérprete e o objeto interpretado. Para ele, “compreender é sempre interpretar” (*Verdade e Método*, 1999, p. 384). Aplicando essa ideia ao ensino da Álgebra, compreendê-la não seria apenas aplicar regras, mas interpretar situações, reconhecer padrões e construir significados em contextos diversos.

USg5.P3L: O professor P3L problematiza a abordagem tradicional do ensino da Álgebra, ao afirmar que essa disciplina tem sido reduzida à transmissão de conteúdos explicativos, desconsiderando o papel fundamental da experiência investigativa e de construção ativa de significado por parte dos estudantes. O professor destaca a importância de criar condições para que os alunos possam descobrir, elaborar e identificar regularidades e diferenças.

O que diz essa US:

* Álgebra exige construção de significados.

US6.P3L Entonces, primero comparto con él [Carlos Vasco] que no hay una sola Álgebra, sino son muchas Algebras. Segundo, que la que más conocemos es el *Álgebra de bachillerato*, podríamos llamarla así, como él [Carlos Vasco] también la llamaba *Álgebra de bachillerato*, que se llama *Álgebra simbólica elemental*; sencillamente es una parte del Álgebra de funciones, que se restringe a funciones polinómicas y funciones racionales. Digamos, cada rama de la

Matemática tiene su propia Álgebra: el Álgebra de conjuntos y el Álgebra en pensamiento lógico, el Álgebra lineal para la Geometría. Entonces digamos que se convierte es en un lenguaje. Para mí el Álgebra es un lenguaje, que permite expresar conceptos de un dominio matemático y que tiene la gran cualidad de que ese lenguaje a su vez es operatorio y permite crear nuevos objetos, o sea, ¡es un lenguaje vivo! Entonces el Álgebra la concibo como [...] una oportunidad de poder expresar la generalidad. Entonces es un lenguaje, fundamentalmente es un lenguaje para mí.

Tradução: Então, primeiro, compartilho com ele [Carlos Vasco] que não existe apenas uma Álgebra, mas sim muitas Álgebras. Segundo, que a que mais conhecemos é a *Álgebra da Educação Básica Secundaria e Média*, poderíamos chamá-la assim, como ele [Carlos Vasco] também a chamava de *Álgebra da Educação Básica Secundaria e Média*, que se chama *Álgebra simbólica elementar*; é simplesmente uma parte da Álgebra de funções, que se restringe a funções polinomiais e racionais. Digamos que cada ramo da Matemática tem sua própria Álgebra: a Álgebra de conjuntos e a Álgebra no pensamento lógico, a Álgebra linear para a Geometria. Então, digamos que ela se torna uma linguagem. Para mim, a Álgebra é uma linguagem que nos permite expressar conceitos de um domínio matemático e que tem a grande qualidade de que essa linguagem, por sua vez, é operacional e nos permite criar novos objetos, ou seja, é uma linguagem viva! Então, eu concebo a Álgebra como [...] uma oportunidade de expressar a generalidade. Então é uma linguagem, fundamentalmente é uma linguagem para mim.

Enxerto Hermenêutico: No início de sua exposição sobre a compreensão da Álgebra e de seu ensino, o professor P3E manifesta, em primeiro lugar, concordância com a perspectiva de Carlos Eduardo Vasco Uribe, ao defender uma concepção ontológica plural da disciplina — ou seja, a ideia de que não existe uma Álgebra única, mas sim múltiplas Álgebras. Tal afirmação revela uma postura epistemológica aberta, que reconhece a multiplicidade de abordagens e aplicações da Álgebra nos diferentes ramos da Matemática. O professor P3E distingue a *Álgebra simbólica elementar*, ensinada na *Educação Básica Secundaria e Média*, como uma parte restrita da Álgebra de funções, voltada principalmente para funções polinomiais e racionais.

No Programa Curricular para o 8º ano (MEN, 1988), Carlos Eduardo Vasco Uribe inicia com a provocativa pergunta: *Álgebra ou Álgebras?* Ao destacar que a Álgebra apresentada aos alunos do 8º e 9º anos foi equivocadamente reduzida à simples manipulação simbólica. Em contraste, ele argumenta que cada ramo da Matemática possui sua própria “Álgebra”, entendida como um sistema simbólico específico que permite operar e representar conceitos com base em regras próprias. Vasco propõe compreendê-la como múltiplos sistemas simbólicos vinculados a diferentes áreas da Matemática, como lógica, conjuntos e geometria. Cada “Álgebra” funciona como uma linguagem operativa capaz de representar e construir conceitos matemáticos complexos. Há, por exemplo, a Álgebra da lógica, dos conjuntos, a Álgebra linear da Geometria,

entre outras. Assim, “uma Álgebra” constitui uma linguagem simbólica que expressa e organiza sistemas conceituais desenvolvidos em diferentes campos matemáticos.

O relato finaliza com uma definição pessoal e potente: “a Álgebra é uma linguagem viva”, capaz de expressar conceitos, operar sobre eles e criar novos objetos. Essa concepção desloca a Álgebra do campo da mera manipulação simbólica para o campo da *expressão e da criação*, revelando uma visão dinâmica e significativa do conhecimento matemático. Ainda, o professor manifesta conceber a Álgebra como uma oportunidade para expressar a generalidade. “A generalização é o sangue vital, o coração da Matemática”²²¹ (Mason, 1996, p.74, tradução nossa). Essa concepção é compartilhada por diversos estudiosos da Educação Matemática, os quais têm destacado que a generalidade é um dos pilares fundamentais da Matemática, pois permite abstrair padrões, estruturar relações e formular leis que transcendem casos particulares. Segundo Mason, Graham, Pimm e Gowar (1999), essa característica é especialmente evidente na Álgebra, que funciona como a linguagem por meio da qual se expressa essa generalidade. Ao afirmar que a Álgebra é “fundamentalmente uma linguagem”, o professor desloca o foco da Álgebra como técnica para a Álgebra como meio de comunicação e expressão. Essa concepção sugere que os símbolos algébricos não são apenas instrumentos de cálculo, mas *signos que carregam significados*, capazes de representar ideias matemáticas complexas de forma sintética e poderosa. A fenomenologia permite compreender que o ensino da Álgebra, para ser significativo, precisa partir da experiência vivida dos sujeitos, da percepção e compreensão de sentido ao trabalhar com os objetos matemáticos. Conforme interpretado por Bortolote (2024, p.5), a “Álgebra é concebida como uma área da Matemática que dá conta de mencionar generalidades, ao definir axiomáticamente seus objetos, que abarcam as idealidades e, portanto, aqueles objetos do pensar que são livres de qualquer posição de fato”. Essa concepção reforça a ideia de que a Álgebra é uma linguagem que não apenas representa, mas também cria uma *linguagem viva*, como afirmou o professor em outro trecho de sua entrevista. Ao reconhecer a Álgebra como linguagem de generalidade, o professor se posiciona como sujeito do conhecimento, capaz de pensar, expressar e transformar conceitos matemáticos.

USg6.P3L: O professor P3L manifesta compartilhar a perspectiva de Carlos Eduardo Vasco Uribe, ao reconhecer que não existe apenas uma Álgebra, mas sim muitas Álgebras. Ele distingue, por exemplo, entre a *Álgebra simbólica elementar*, predominante abordada *Educação Básica Secundaria e Média* e voltada à manipulação de funções polinomiais e racionais, e outras formas de Álgebra vinculadas a distintos domínios da Matemática, tais como a Álgebra de conjuntos, a Álgebra Lógica e a Álgebra Linear. Esse modo de ser da Álgebra conduz à compreensão da Álgebra como uma linguagem que, além de representar conceitos matemáticos, possui caráter operacional, permitindo a criação de novos objetos e estruturas. Para o professor, trata-se de uma linguagem viva que permite a expressão da generalidade.

O que diz essa US:

²²¹ Generalization is the life-blood, the heart of mathematics.

* A Álgebra é uma linguagem viva que permite expressar a generalidade;

* Concepção de pluralidade de Álgebras.

US7.P3L Pues es que, en **la generación de un lenguaje**, lo fundamental es saber cuándo **se introduce un lenguaje** [...]. Entonces, **lo que hemos hecho, al contrario**, es primero darle los nombres y tratar de **memorizar los nombres** y no sabemos de quién estamos hablando. Entonces pienso que primero tiene que darse **la oportunidad** de eso, de **experimentar**, de indagar, de [...] **usar el lenguaje usual**, usar el **lenguaje cotidiano** para expresar ese **pensamiento matemático incipiente o inicial** [...]. Y el **estudiante lo puede decir en español**, lo puede **describir en español**, pero se da cuenta que, si finalmente puede acudir a un **lenguaje mucho más operatorio**, más ágil para poderlo manipular, entonces surge la **incógnita**, la **variable**, la **letra** que representa un objeto, **el símbolo** que representa una operación, que antes se tenía que decir en lenguaje cotidiano. Y esa **simbolización**, si se hace de manera **consciente**, comprensiva, después de haber tenido la oportunidad de **crear el concepto** o la regularidad o haber descubierto esa regularidad de ese concepto, entonces ya **adquiere un significado diferente** y además se puede **apreciar el valor** que tiene esa **simbolización**, para poder **volver a lo mismo** que la creó, a lo mismo que la **originó**. O sea, **es un lenguaje que permite después mejorar lo que se expresó**.

Tradução: Pois, na geração de uma linguagem, o fundamental é saber quando uma linguagem é introduzida [...]. Então, o que fizemos, ao contrário, foi primeiro dar-lhe nomes e tentar memorizá-los, e não sabemos de quem estamos falando. Então, eu acho que primeiro tem que haver a oportunidade para isso, para experimentar, para investigar, para [...] usar a linguagem comum, usar a linguagem comum para expressar aquele pensamento matemático incipiente ou inicial [...]. E o aluno pode dizê-lo em espanhol, pode descrevê-lo em espanhol, mas ele percebe que, se finalmente puder recorrer a uma linguagem muito mais operacional, mais ágil, para poder manipulá-la, então surge a incógnita, a variável, a letra que representa um objeto, o símbolo que representa uma operação, o símbolo que representa uma operação que antes tinha que ser expressa na linguagem comum. E essa simbolização, se feita de forma consciente e compreensiva, após ter tido a oportunidade de criar o conceito ou a regularidade, ou de ter descoberto essa regularidade desse conceito, assume um significado diferente, e também se pode apreciar o valor dessa simbolização, permitindo-se retornar àquilo que a criou, àquilo que a originou. Em outras palavras, é uma linguagem que permite posteriormente aprimorar o que foi expresso.

Enxerto Hermenêutico: No início do relato, o professor P3L argumenta que, na geração de uma linguagem o fundamental, é compreender o momento de sua introdução. Essa observação já aponta para uma preocupação com a temporalidade e a intencionalidade do processo de aprendizagem. A fala do professor evidencia uma crítica à prática comum de nomear e memorizar símbolos antes de compreender seu significado, introduzindo uma linguagem simbólica descontextualizada, o que acaba por dificultar a construção de significados por parte dos estudantes. Ao invés disso, propõe que se estimule a possibilidade de uma abordagem em que a linguagem algébrica emerge de uma vivência prévia de investigação, experimentação e usar a linguagem comum para expressar o pensamento matemático inicial. Assim, o professor entrevistado propõe que o aluno tenha, antes de tudo, a oportunidade de vivenciar o conceito matemático em sua forma mais intuitiva e informal, utilizando sua própria língua (no caso, o espanhol), para posteriormente reconhecer a necessidade e o valor da simbolização algébrica. A simbolização, nesse contexto, é vista como resultado de um encontro, e não como ponto de partida. Nesse sentido, o surgimento de símbolos, como a incógnita ou a variável, não se dá como um fim em si mesmo, mas como um recurso que se justifica na medida em que o estudante encontra neles uma ferramenta para representar regularidades. No relato, o professor enfatiza que a linguagem simbólica, quando construída conscientemente, permite aprimorar o pensamento inicialmente expresso em linguagem natural. Isso reforça a concepção da Álgebra como *linguagem viva* (US6.P3E), que emerge da experiência e retorna a ela, num movimento circular de significação, permitindo-se retornar àquilo que a originou.

A fala do professor sugere uma reconexão entre símbolo e intuição, de modo que a simbolização, quando precedida pela experiência e pela descoberta, assume um formativo, permitindo ao aluno não apenas manipular símbolos, mas compreender o que eles representam.

À luz de uma perspectiva fenomenológica husserliana, podemos compreender essa fala como um apelo ao “retorno às coisas mesmas”, isto é, à vivência originária dos significados antes de sua formalização abstrata. Conforme compreendemos, o entrevistado não nega o valor da linguagem algébrica, mas propõe que esta se constitua na compreensão da experiência vivenciada, ao compreender-se o sentido que emerge do contato direto com os fenômenos matemáticos. Isso, por sua vez, aproxima-se da ideia husserliana de intencionalidade da consciência, segundo a qual a consciência é sempre consciência de algo “consciência é consciência de algo” (Husserl, 2006, p.22), em que, mediante os atos em movimento de realização que são vivenciados, possibilita que a pessoa que os realiza possa se dar conta do que está realizando.

A fala do professor pode sugerir que a linguagem matemática ganha sentido quando emerge de uma necessidade sentida pelo sujeito, e não quando é imposta de forma arbitrária, como frequentemente pode se evidenciar na aprendizagem da Álgebra escolar. Gadamer (2011a, p.687) destaca que “o ser que pode ser compreendido é linguagem”, ressaltando que toda compreensão está sempre mediada pela linguagem e pelo horizonte de sentido do sujeito. Assim, o professor, ao afirmar que o aluno deve poder se expressar primeiro em sua própria linguagem

e depois reconhecer a utilidade de um sistema simbólico mais ágil, sugere a centralidade da linguagem como meio de apropriação e elaboração do saber matemático.

USg7.P3L: O professor entrevistado defende que, na constituição de uma linguagem matemática, é fundamental considerar o momento e as condições em que essa linguagem é introduzida ao estudante. Ele critica abordagens didáticas que antecipam a terminologia simbólica e a memorização de códigos sem que os alunos tenham previamente construído compreensões conceituais significativas. Em sua perspectiva, o ensino da Álgebra deve promover práticas investigativas em que os estudantes utilizem a linguagem comum para expressar pensamentos matemáticos iniciais. Essa expressão espontânea, quando orientada por processos de exploração e descoberta, facilita o surgimento de elementos algébricos, como incógnitas, variáveis e símbolos operacionais, cuja função simbólica se torna mais clara e contextualizada. A simbolização, nesse caso, adquire sentido autêntico por emergir da própria experiência do aluno com a regularidade ou conceito identificado, promovendo não apenas compreensão, mas também a valorização da estrutura algébrica como linguagem funcional e aprimorável.

O que diz essa US:

- * A linguagem algébrica deve emergir de experiências significativa do estudante;
- * Os símbolos matemáticos fazem sentido quando surgem das próprias descobertas dos alunos.

US8.P3L Creo que llevamos casi un siglo y pues yo aquí en la universidad cuatro décadas trabajando y diciendo lo mismo. O sea, decimos lo mismo, los chicos llegan mal y tratamos de hacer algo con los colegas de educación preuniversitaria. Yo tuve la oportunidad de recorrer todo el Departamento vendiendo. Porque digo que el docente es un vendedor [...]. Nosotros no enseñamos la matemática que hacemos. Nosotros somos unos mostradores, estamos detrás de un mostrador, somos vendedores. Entonces lo que uno trata es de eso [...] de poder vender corbatas en el desierto. Entonces es buscar el mecanismo para crear una necesidad, para crear algo que les llame la atención [a los estudiantes], que es una tarea bastante complicada. Pienso que ha faltado pues desarrollar más el espíritu crítico, la comprensión de lectura, eh [...] ¡No sé! Y también como un espíritu de servicio, ¿no? De decir oiga, tengo que pensar como en hacer lo mejor que esté a mi alcance para poder ayudar a los estudiantes en su proceso de crecimiento.

Tradução: Acho que estamos aqui na universidade há quase um século, e eu trabalhando aqui na universidade há quatro décadas, dizendo a mesma coisa. Ou seja, dizemos a mesma coisa: os

alunos chegam mal, e tentamos fazer algo com nossos colegas da educação pré-universitária. Tive a oportunidade de percorrer todo o Departamento [Estado] vendendo. Porque eu digo que o professor é um vendedor [...]. Nós não ensinamos a matemática que fazemos. Nós somos mostradores, estamos atrás de um balcão, somos vendedores. Então, o que a gente está tentando fazer é isso [...] ser capaz de vender gravatas no deserto. Então, trata-se de encontrar o mecanismo para criar uma necessidade, para criar algo que chame a atenção [dos alunos], o que é uma tarefa bastante complicada. Acho que tem faltado mais pensamento crítico, compreensão de leitura, eh [...]. Não sei! E também um espírito de serviço, né? dizer, escuta, eu tenho que pensar em fazer o melhor que puder para ajudar os estudantes em seu processo de crescimento.

Enxerto Hermenêutico: O professor destaca a trajetória histórica do programa de Licenciatura em Matemática. Conforme indicado por Jiménez (2019), o curso da UPTC possui uma tradição de cerca de cem anos na formação de professores nessa área. Nesse contexto, o professor entrevistado, identificado como P3L, compartilha uma reflexão pautada em sua longa experiência docente no referido programa. Assim, o professor P3L identifica um problema persistente historicamente: “estamos aqui na universidade há quase um século [...] dizendo a mesma coisa”. Com isso, ele indica como crítica a formação matemática dos estudantes que ingressam no âmbito universitário — “os alunos chegam mal”. Essa constatação é acompanhada por uma crítica implícita à falta de eficácia nas tentativas de articulação entre os diferentes níveis de ensino, principalmente com a *Educação Média*. Desde uma perspectiva da fenomenologia hermenêutica gadameriana, o relato do professor pode ser lido como expressão de uma *tradição* que se reconfigura, mas permanece no horizonte da queixa e da resistência à mudança. Gadamer afirma que “a tradição não é algo do qual nos libertamos simplesmente ao nos colocarmos em oposição a ela” (Gadamer, 2011a, p. 365), e sim algo com que dialogamos continuamente. O professor, ao repetir a crítica sobre a má formação dos alunos, também se insere numa *tradição discursiva* que molda suas expectativas e práticas, revelando as tensões entre o ideal formativo e a realidade cotidiana.

A metáfora que usa P3L do professor como “vendedor” se mostra capital em seu argumento. Ele afirma que “não ensinamos a matemática que fazemos”, mas apenas “mostramos”, como quem está atrás de um balcão oferecendo produtos. Logo, o professor utiliza uma metáfora expressiva: a gente tem que ser capaz de “vender gravatas no deserto”, indicando o esforço quase infrutífero de tornar atrativo um conteúdo que não encontra, a priori, interesse ou necessidade no público discente. Seu relato sugere que ele se coloca como um “vendedor” de um produto, a matemática acadêmica, que não é naturalmente demandado pelos alunos, indicando um distanciamento entre a matemática ensinada e a realidade vivida pelos estudantes, ou seja, um ensino que não dialoga com as necessidades dos estudantes. Ainda mais, esse papel de “mostrador” e “vendedor atrás do balcão” sugere um modelo de ensino marcado pela exposição e pela tentativa de convencimento, ou seja, em que o saber matemático é tratado como mercadoria, e não como construção compartilhada. Nesse contexto, o professor reconhece a dificuldade de “criar uma necessidade”, ou seja, de despertar o interesse dos alunos por conteúdos que lhes parecem

distantes ou irrelevantes. Finalmente, o professor identifica a ausência de pensamento crítico, de compreensão leitora (esse aspecto também é mencionado na US6.P2L) e de um “espírito de serviço” como obstáculos adicionais ao processo de ensino e de aprendizagem. A expressão “espírito de serviço” sugere uma dimensão ética do trabalho docente que ultrapassa a transmissão de conteúdos e se orienta pelo compromisso com o crescimento humano e intelectual dos estudantes.

USg8.P3L: O professor P3L apresenta uma crítica recorrente à qualidade da formação matemática dos estudantes que ingressam na universidade, destacando que essa defasagem se mantém há quase um século e permanece como um desafio institucional ainda não resolvido. Ele relata ter percorrido todo o Estado, comparando sua atuação à de um “vendedor”. Ele afirma que os professores de Matemática não ensinam a Matemática que fazem. Para sustentar essa afirmação, P3L aprofunda essa analogia, afirmando que os professores são como expositores atrás de um balcão, tentando “vender algo” que os estudantes não buscam espontaneamente. Nessa perspectiva, o professor defende que os docentes deveriam ser capazes de “vender gravatas no deserto”, isto é, de encontrar estratégias para despertar o interesse por conteúdos matemáticos que, à primeira vista, não são desejados, o que ele manifesta ser uma tarefa bastante difícil. Além disso, P3L identifica outras fragilidades no processo formativo, como a ausência de pensamento crítico, dificuldades na compreensão de leitura e, sobretudo, a falta de uma atitude pedagógica orientada por um espírito de serviço. Para ele, essa postura representa o comprometimento ético e formativo necessário para auxiliar o estudante em seu processo de crescimento pessoal.

O que diz essa US:

* A formação matemática insuficiente dos estudantes é um problema persiste historicamente;

* Desafio institucional permanente para encarar as dificuldades na aprendizagem da Matemática.

US9.P3L Eso es, me parece que [...] el Álgebra ha sido el coco [papón]. Y en lugar de ser un descubrimiento llamativo para mirar todas las bondades que tiene y lo maravillosa que es, se ha convertido en un impedimento para que la mayoría de niños accedan al pensamiento matemático. Porque como ya dije, el pensamiento matemático tiene como máximo horizonte la generalización [...] O sea, si se generaliza, se está frente al pensamiento matemático. Y el lenguaje para expresar esa generalización es el Álgebra. Pero esa es como la frustración que queda al final de todo. Seguiremos ahí, haciendo los esfuerzos que estén a nuestro alcance para vender esas ideas.

Tradução: Isso mesmo, parece-me que [...] a **Álgebra tem sido o bicho-papão**. E em vez de ser uma **descoberta** impressionante para explorar todos os seus benefícios e quão maravilhosa ela é, tornou-se um impedimento para o acesso da maioria das crianças **ao pensamento matemático**. Porque, como eu disse, **o pensamento matemático tem a generalização como máximo horizonte** [...]. Em outras palavras, se você **generaliza**, está diante do **pensamento matemático**. E a linguagem para expressar essa generalização é a **Álgebra**. Mas essa é como a frustração que permanece no final de tudo. Continuaremos assim, fazendo todos os esforços ao nosso alcance para vender essas ideias.

Enxerto Hermenêutico: Segundo o relato do professor P3E, a Álgebra, em vez de ser apresentada como uma descoberta potente e reveladora do pensamento matemático, tem sido mostrada e vivenciada como um “bicho-papão”, ou seja, como um obstáculo temido que frustra os estudantes, tornando-se uma barreira que bloqueia o ingresso dos estudantes no âmbito do pensamento matemático mais elaborado. O professor assinala que a generalização constitui o ápice do pensamento matemático — “o pensamento matemático tem a generalização como máximo horizonte”, e que a Álgebra se apresenta justamente como a linguagem capaz de formalizar e expressar essa generalização. Essa concepção da Álgebra, manifestada pelo professor P3E, parece estar direcionada ao modo como John Masson, Alan Graham e Sue Johnston-Wilder (2006), que considera a generalidade: “No fundo do coração da Álgebra está a *expressão de generalidade* [...]. Os símbolos algébricos são uma linguagem para expressar generalidades. À medida que a fluência e a facilidade com as expressões de generalidade se desenvolvem, as expressões se tornam mais *sucintas* e, portanto, manipuláveis”²²² (p.310, tradução e grifos nossos). Ou seja, ele reconhece a Álgebra é como instrumento fundamental do pensamento matemático, mas sugere que sua apropriação está comprometida por práticas de ensino que não favorecem a construção de sentido. Esse modo de considerar a generalização como um elemento capital na Álgebra, também aparece nas falas dos professores entrevistados, como, como exposto nas US4.P1E, US8.P1E, US11.P1E, US2.P2L, US6.P3L. O que pode ser entendido como expressão de generalidade? Para Mason, Burton e Stacy (1989), a generalização é o ato de tentar encontrar um sentido a um modelo subjacente, “[s]ignifica observar que certos aspectos são comuns a diferentes casos particulares, ignorando outros. Uma vez formulada, a generalização torna-se uma conjectura que deve ser investigada para verificar se é confirmada ou não. Todo esse processo [particularização e generalização] constitui a essência do pensamento matemático”²²³ (p.35, tradução e inserções nossas).

A Álgebra, enquanto linguagem de generalização, é reconhecida como poderosa e necessária, mas seu ensino tem sido marcado por práticas que a tornam inacessível, gerando medo, rejeição

²²² At the very heart of algebra is the expression of generality [...]. Algebraic symbols are a language for expressing generalities. As fluency and facility with expressions of generality develops, the expressions become more succinct, and hence manipulable.

²²³ Significa observar que certos aspectos são comuns a diferentes casos particulares, ignorando outros. Uma vez formulada, a generalização torna-se uma conjectura que deve ser investigada para verificar se é confirmada ou não. Todo esse processo [particularização e generalização] constitui a essência do pensamento matemático.

e frustração. Assim, ao dizer que “a frustração que permanece no final de tudo”, revela uma experiência recorrente de desconexão entre potencial motivado pelo interesse de ensino e realidade escolar. Essa tensão remete à crítica fenomenológica à educação tecnicista, que privilegia a mera manipulação simbólica em detrimento dos sentidos e os significados dessa simbologia (Bortolote e Bicudo, 2024).

O professor P3E encerra seu relato com um gesto de esperança que revela um compromisso ético com a busca pela transformação do ensino: “Continuaremos assim, fazendo todos os esforços ao nosso alcance para *vender* essas ideias”. Tal declaração exprime uma postura ativa e engajada frente aos desafios educacionais, reafirmando a crença na potência das ideias como motor de mudança. Essa fala final proferida pelo professor P3E dialoga com a reflexão proposta por Mason, Graham e Johnston-Wilder (2006, p. 4, tradução nossa), ao enfatizar que “o que eles [os alunos] precisam é de encorajamento e permissão para desenvolver essas habilidades em um ambiente de apoio. Além disso, a generalização, sendo fundamental para a matemática, está presente em todo tópico matemático. Em outras palavras: uma aula em que os alunos não tenham a oportunidade de expressar uma generalidade não pode ser considerada uma aula de matemática”²²⁴. O alinhamento entre a fala do professor e o pensamento dos autores reforça a importância de práticas pedagógicas que valorizem a construção de significados, o desenvolvimento da autonomia e a promoção de ambientes favoráveis que promovam a generalização ao trabalharem com a matemática.

USg9.P3L: O professor P3L expressa que, sob sua perspectiva, a Álgebra tem sido vista pelos alunos como um verdadeiro “bicho-papão”. Em vez de ser apresentada como uma descoberta significativa, essa disciplina tem sido historicamente tratada como uma barreira que limita o acesso de grande parte dos estudantes ao pensamento matemático, especialmente no contexto da *Educação Básica*. O professor afirma que a generalização constitui o horizonte máximo do pensamento matemático, e que a Álgebra representa precisamente a linguagem que permite expressar tais generalizações. Diante dessas dificuldades, o professor manifesta um sentimento de frustração persistente. Ainda assim, ele diz permanecer engajado na missão de “vender” essas ideias, realizando todos os esforços possíveis para superar tal percepção negativa.

O que diz essa US:

- * Álgebra como abertura ao pensamento matemático;
- * A generalização constitui o horizonte máximo do pensamento matemático;
- * A Álgebra representa a linguagem que permite expressar as generalizações.

²²⁴ They have all generalized and expressed generalities to themselves and others. What they need is encouragement and permission to develop those powers in a supportive setting. Furthermore, generalisation, being fundamental to mathematics, is a part of every mathematical topic. Put another way: A lesson without learners having the opportunity to express a generality is not a mathematics lesson.

5.4.4 Professor P4L

US1.P4L Pues empezando desde el colegio, pues como **todo mundo** ¿no?, [...] si no estoy mal **desde 8º**, que a uno le enseñaron [...] que nos mostraron como tal el libro del **Álgebra de Baldor**. Desde ahí fue como los **primeros inicios** como tal en lo que fue en el **Álgebra**. Mhm [...]. Recuerdo que, **al principio**, ¡parecía un monstruo de siete cabezas! Esas letras en medio de los números, la x, la y... para mí era como: ¿qué es esto? ¿Por qué no usamos números? [...] La idea de una **variable** era la más **confusa**. ¿Por qué una letra representaría un número? ¿Y cómo podía tener múltiples valores? **Era muy confuso**. Pero, al mismo tiempo, tuve un profesor excelente que usaba **ejemplos cotidianos**. Creo que fue entonces **cuando empecé a entenderlo** e incluso a encontrarle cierto **encanto al Álgebra**. También fue con el **Álgebra de Baldor** casualmente, pero entonces también **contextualizada** hacia ese momento.

Tradução: Comecei desde a escola, como todo mundo, [...] se não me engano, no oitavo ano, que ensinaram a gente [...] que nos mostraram o livro de Álgebra de Baldor. Daí em diante, foi como os primeiros começos do que era Álgebra. Mhm [...]. Lembro que, no começo, parecia um monstro de sete cabeças! Essas letras no meio dos números, o x, o y... para mim era tipo: o que é isso? Por que não usamos números? [...] A ideia de uma variável era a mais confusa. Por que uma letra representaria um número? Como poderia ter vários valores? Era muito confuso. Mas, ao mesmo tempo, eu tinha um excelente professor que usava exemplos do cotidiano. Acho que foi quando comecei a entender e até encontrei um certo encanto na Álgebra. Foi também com a Álgebra de Baldor coincidentemente, mas ela também era contextualizada para aquele momento.

Enxerto Hermenêutico: Neste trecho do relato, a professora P4L compartilha sua experiência inicial com a Álgebra, vivenciada ainda na *Educação Básica*, mais precisamente no oitavo ano, por meio do livro didático *Álgebra de Baldor*. Segundo o relato, a maneira como esse conteúdo é introduzido nos currículos escolares, também se revela nas unidades US5.P6E e US1.P2L, evidenciando-se como uma prática consolidada, que sugere uma transição abrupta entre o ensino predominantemente voltado à Aritmética e o início do estudo da Álgebra.

Esse relato é situado em uma memória escolar marcada pelas primeiras impressões de estranhamento e dificuldade na compreensão dos símbolos algébricos, em especial, das letras utilizadas como variáveis. O uso de expressões como o “monstro de sete cabeças” indica algo amedrontador, algo inusitado e apavorante; metaforicamente diz do distanciamento e complexidade inicial associada à linguagem simbólica da Álgebra, que, na época como estudante de *Educação Básica*, representava uma *ruptura* significativa em relação à abordagem tradicional da Matemática escolar dos anos anteriores, voltada majoritariamente ao tratamento de quantidades numéricas concretas.

A principal dificuldade apontada pela professora refere-se à compreensão da variável como um elemento capaz de assumir múltiplos valores. Segundo ela, “a ideia de uma variável era a mais confusa”. De maneira semelhante ao relato da professora P4L, o trecho registrado em US1.P3E evidencia que a natureza simbólica da Álgebra possui o potencial de ser compreendida como *ambígua* pelos estudantes iniciantes. Conforme observado por Drouhard e Teppo (2004), tal concepção pode estar relacionada à característica da Álgebra de se constituir como uma linguagem compacta e sucinta, ou, como indicado por Mason, Graham, Johnston-Wilder (2005) ao permitir múltiplas leituras ou interpretações dos símbolos algébricos.

Entretanto, a professora P4L também ressalta o papel principal de um docente que, ao recorrer a exemplos do cotidiano, conseguiu estabelecer pontes entre o conteúdo matemático e a realidade vivenciada por ela. Essa mediação, aliada à contextualização adequada durante o trabalho com o próprio livro de Baldor, parece ter sido decisiva para transformar o receio inicial em curiosidade e encantamento pela Álgebra.

USg1.P4L: A professora P4L relata que seu primeiro contato com a Álgebra ocorreu por volta do oitavo ano de *Educação Básica*, por meio do livro didático *Álgebra de Baldor*, difundido amplamente naquela época. Ela descreve que a experiência inicial foi marcada por grande estranhamento e dificuldade de assimilação dos símbolos algébricos, que contrastavam com os números já familiares. O primeiro contato com a Álgebra é descrito pela professora como desafiador. A ideia de variável foi apontada como particularmente confusa nessa etapa inicial, por sua natureza abstrata e representar múltiplos valores. Segundo o relato de P4L, apesar das dificuldades enfrentadas na aprendizagem, o papel do professor naquela época foi relevante. Graças ao uso de exemplos oriundos do cotidiano, o docente conseguiu tornar os conteúdos mais acessíveis e significativos para ela, o que contribuiu para uma mudança gradual na concepção da disciplina. P4L menciona que, graças a esse processo de contextualização do livro e a mediação pedagógica, passou não apenas a compreender melhor a Álgebra, mas também a desenvolver um sentimento de encanto pela disciplina.

O que diz essa US:

- * Influência do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;
- * Desafios iniciais com a linguagem simbólica da Álgebra;
- * Importância da mediação pedagógica.

US2.P4L En la universidad, las cosas se volvieron **más complicadas**; ¡cambió muchísimo! ¿Sí? El Álgebra ya no se trataba solo de resolver **ecuaciones simples**, sino de comprender las **estructuras** que estaban por detrás. Teníamos **cursos como pre-cálculo**, que se ve un poco del Álgebra, Mhm [...] ya después creo que el Álgebra Lineal, que consistía más o menos en solucionar ecuaciones de diferente grado, resolver matrices, determinantes, hacer gráficas y

también un poco de [...] vectores. Y siguiendo así, por esta línea [de Álgebra], vamos a lo que es el Álgebra Abstracta, estructuras algebraicas más que todo, empezando con lo que es un grupo, qué propiedades se cumplen para que sea grupo, de ahí que es un subgrupo, [...] después viene lo que son [...] los anillos. Recuerdo que, al principio, en la universidad, sentí que estaba aprendiendo un idioma completamente nuevo. Los conceptos eran más abstractos, los exámenes más complicados. Pues bueno, fue un proceso. Digamos que el comienzo, como todo estudiante, tiene como ciertas dificultades, pero después, entonces uno ya los empieza a entender.

Tradução: Na universidade, as coisas ficaram **mais complicadas**; mudaram muito! Certo? Álgebra não era mais apenas sobre resolver **equações simples**, mas sobre entender as **estruturas** por trás delas. Tínhamos cursos como **Pré-cálculo**, que inclui um pouco de Álgebra, Mhm [...] e então acho logo foi a Álgebra Linear, que consistia mais ou menos em resolver equações de diferentes graus, resolver matrizes, determinantes, gráficos e também um pouco de [...] vetores. E continuando nessa linha [da Álgebra], chegamos ao que é **Álgebra Abstrata, estruturas algébricas** mais do que qualquer outra coisa, começando com o que é um grupo, quais propriedades são satisfeitas para que seja um grupo, a partir disso o que é um subgrupo, [...] logo vem o que são [...] os anéis. Lembro que, **no começo, na universidade, eu sentia como se estivesse aprendendo uma linguagem completamente nova**. Os conceitos eram mais **abstratos**, as provas mais complicadas. Bem, foi um processo. Digamos que no começo, como todo aluno, há certas dificuldades, mas depois, a gente começa a entender.

Excerto Hermenêutico: A professora P4E relata que ao iniciar o percurso pelos estudos universitários, ela reconhece uma mudança abrupta no que diz respeito ao modo como a Álgebra estava sendo abordada no nível pré-universitário. Enquanto na *Educação Básica* e Média predominavam atividades relacionadas à resolução de equações simples, na universidade, houve um aprofundamento teórico buscando entender as estruturas subjacentes a essas equações. À luz do relato da professora, surge um ponto de interesse para uma análise hermenêutica que ajude a compreender a “mudança abrupta” mencionada. Essa transição relatada apresenta características que dialogam com o desenvolvimento histórico da Álgebra. Assim, a professora observa que, no nível pré-universitário, o ensino de Álgebra se concentra principalmente no trabalho com equações, sobretudo as equações polinomiais de primeiro e segundo grau, ou seja, equações lineares e quadráticas.

Segundo Bortolete (2024), as raízes da Álgebra remontam à obra de Diofanto com a Aritmética. Entretanto, foi com Viète, na obra *In Artem Analyticem Isagoge*, que a Álgebra deixou de ser apenas uma forma refinada de resolver problemas aritméticos, tornando-se a própria “*arte do raciocínio matemático*” (Mahoney, 1973). Dessa forma, o relato da professora revela conexão entre a “Álgebra Clássica” e a “Álgebra escolar”, cujo núcleo gira em torno da resolução explícita de equações e incursões pontuais na geometria (Gray, 2018).

Por outro lado, ao comentar sua experiência na *Educação Superior*, a professora P4L indica que o foco do trabalho como a Álgebra passou a ser nas *estruturas algébricas*, isto é, no âmbito da “Álgebra Moderna”. Como explica Gray (2018), o significado primário do termo “Álgebra Moderna” é Álgebra estrutural: o estudo de grupos, anéis e corpos.

A professora relata que, no início do curso de Licenciatura em Matemática, teve contato com conteúdos algébricos na disciplina de Pré-cálculo. Na Colômbia, é comum que programas de graduação, especialmente os que envolvem matemática, incorporem no primeiro semestre uma disciplina denominada Fundamentos de Matemática ou Pré-cálculo. Seu objetivo é revisar os temas abordados na escola e introduzir os alunos em tópicos com maior profundidade conceitual e rigor formal. Ela também menciona que, antes de se aprofundar nas estruturas algébricas, estudou tópicos introdutórios de Álgebra Linear. Isso revela que o currículo do curso de licenciatura considera as conexões significativas entre esses dois ramos da Matemática, valorizando tanto a articulação conceitual quanto as possibilidades de aplicação prática. Mais adiante, a professora aponta que sua formação se concentrou no estudo das estruturas algébricas. Segundo Dávila (2003), esse ramo da Matemática tem como objeto principal o estudo dos sistemas algébricos, entendidos como conjuntos de elementos sobre os quais se definem uma ou mais leis de composição que operam entre esses elementos e que satisfazem axiomas previamente estabelecidos. Como destaca o autor, “[...] a abstração vem do fato de que a natureza dos elementos operados não interessa; o que realmente importa é que os axiomas que definem as operações entre os referidos elementos sejam satisfeitos”²²⁵ (Dávila, 2003, p.76, tradução nossa). Um dos tópicos ressaltados pela professora P4L em seus estudos sobre estruturas algébricas é o conceito de grupo. O estudo dos grupos representa um dos pilares fundamentais da Álgebra Moderna, como observa H. Wussing, “[a] teoria dos grupos emerge como uma disciplina distinta na Matemática moderna. Ela permeia as mais diversas áreas como um princípio organizador e classificador”²²⁶ (Dávila, 2003, p.76, tradução nossa).

No depoimento, a professora P4L compartilha que seu percurso acadêmico foi inicialmente marcado por uma dificuldade: o desafio de “aprender uma linguagem completamente nova”. Essa afirmação evidencia uma ruptura significativa entre a matemática escolar e o que é exigido no nível superior, onde se destaca uma abordagem mais abstrata, conceitualmente rigorosa e centrada na compreensão estrutural dos conteúdos. Apesar dessa dificuldade inicial, ela relata que foi ao longo do processo de formação que começou a compreender a disciplina. O relato da professora, assim, revela como a superação da barreira inicial não apenas facilitou sua aprendizagem, mas também reconfigurou sua relação com a Matemática. Esse movimento de amadurecimento relatado pela professora pode ser entendido também como reflexo do próprio desenvolvimento histórico da disciplina. Segundo Gray (2018), “O fim do século XIX e o início do século XX testemunham a transição da Álgebra clássica para a Álgebra moderna, no sentido

²²⁵ [...] la abstracción viene del hecho de que no interesa para nada la naturaleza de los elementos con los que se opera; lo que realmente importa es que se satisfagan los axiomas que definen las operaciones entre dichos elementos.

²²⁶ La teoría de grupos aparece como una disciplina distinta a través de toda la Matemática moderna. Permea las áreas más variadas como un principio ordenador y clasificante.

importante de que os conceitos estruturais passam da fronteira de pesquisa para o núcleo e se tornam não apenas a maneira pela qual problemas clássicos podem ser reformulados, mas uma fonte de problemas legítimos por si mesmos. Este foi um processo longo, e a publicação de [van der Waerden] *Moderne Algebra* [em 1930] marca uma fase importante em um processo que ainda está em andamento”²²⁷ (p.5, tradução e inserções nossas).

USg2.P4L: a professora P4L relata que sua experiência universitária em relação à Álgebra foi marcada por uma mudança significativa de enfoque. Enquanto na *Educação Básica* o estudo da Álgebra estava voltado predominantemente à resolução de equações simples, na universidade essa abordagem deu lugar à compreensão das estruturas subjacentes a essas equações. Ao longo de disciplinas como Pré-Cálculo, Álgebra Linear e Álgebra Abstrata, a docente passou a lidar com um conteúdo de maior complexidade, incluindo o estudo de matrizes, determinantes, vetores, gráficos e, posteriormente, estruturas como grupos, subgrupos e anéis. Ela manifesta que esse percurso acadêmico exigiu uma adaptação, especialmente nos momentos iniciais, nos quais descreve a sensação de estar “aprendendo um novo idioma”, em referência à natureza abstrata e formal dos conceitos algébricos apresentados. Segundo o relato, a dificuldade enfrentada nos primeiros semestres é reconhecida como parte do processo formativo, sendo progressivamente superada.

O que diz essa US:

* Percurso disciplinar da Álgebra na *Educação Superior*;

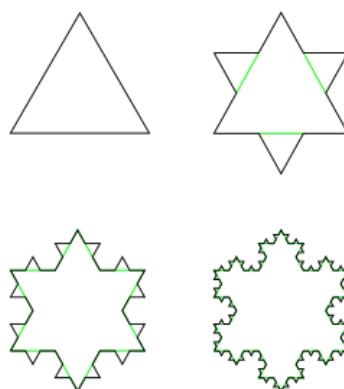
* Dificuldades iniciais com a Álgebra estudada na universidade.

US3.P4L Bueno, lo que digo del Álgebra es que es una materia muy bonita que se puede lograr aplicar y trabajar en diferentes contextos. Que si uno le coge el gusto puede lograr hasta programar [...]. O sea que es una materia que uno puede trabajar de diferentes formas y desde diferentes enfoques. O sea, es una materia que uno la puede asociar con diferentes contextos, por ejemplo, cuando [a los estudiantes] les gusta descubrir claves, hasta a veces, cuando estamos hablando de fractales, también tiene que ver que mucho del Álgebra Lineal ahí. Para mí, el Álgebra es mucho más que simplemente manipular letras y números. Es como una forma de describir y resolver problemas. Es una herramienta que nos permite generalizar y crear modelos.

²²⁷ The end of the nineteenth century and the start of the 20th see the shift from classical algebra to modern algebra, in the important sense that the structural concepts move from the research frontier to the core and become not only the way in which classical problems can be reformulated but a source of legitimate problems themselves. This was a lengthy process, and the publication of *Moderne Algebra* marks an important stage in what is still an ongoing process

Tradução: Bem, o que eu digo sobre Álgebra é que é uma disciplina muito **bonita** que pode ser **aplicada** e trabalhada em diferentes **contextos**. Se a gente pegar o jeito, pode até **programar** [...]. Ou seja, é uma disciplina que a gente pode trabalhar de diferentes maneiras e desde diferentes perspectivas. Ou seja, é uma disciplina que a gente pode associar a diferentes contextos, por exemplo, quando eles [os estudantes] gostam de descobrir chaves, às vezes, quando falamos de fractais, também tem muito a ver com Álgebra Linear. Para mim, Álgebra é muito mais do que simplesmente manipular letras e números eh [...]. É como uma maneira de descrever e resolver problemas. É uma **ferramenta** que nos permite **generalizar** e criar **modelos**.

Enxerto Hermenêutico: a professora P4L atribui à Álgebra a qualidade de beleza, fundamentando-se nas múltiplas possibilidades de aplicação e nas potencialidades que emergem do trabalho com essa disciplina em diferentes contextos. Essa dimensão estética também se manifesta nos enxertos hermenêuticos das unidades US11.P2E e US3.P3E, nas quais os entrevistados destacam que tal beleza está intrinsecamente relacionada ao caráter aplicável da Álgebra e à sua capacidade de gerar compreensões significativas no âmbito do educativo. A professora também destaca que o domínio da Álgebra favorece o desenvolvimento de habilidades em programação, visto que variáveis representam espaços de memória que armazenam dados manipuláveis por meio de instruções codificadas, refletindo o uso simbólico da Álgebra. As operações Aritméticas e lógicas, derivadas das estruturas algébricas, são amplamente utilizadas em algoritmos, com destaque para a Álgebra Booleana, fundamental na lógica binária dos sistemas computacionais. Entre suas aplicações, ela ressalta a criptografia, onde são usadas matrizes na codificação e decodificação de mensagens, como pode observar-se no método de Hill, que utiliza matrizes para substituir cada letra do texto por um número, e então multiplica essas matrizes por uma matriz chave para codificar a mensagem. Além disso, a professora menciona os fractais como exemplo de aplicação da Álgebra em contextos geométricos. Os fractais são estruturas geométricas caracterizadas pela autossimilaridade, ou seja, partes menores reproduzem o padrão do conjunto como um todo. Eles surgem de equações iterativas e são utilizados para modelar fenômenos complexos e irregulares, como formações naturais ou sistemas dinâmicos. Na Álgebra Linear, por exemplo, são estudadas as transformações que podem ser representadas por matrizes, que são fundamentais para construir fractais como o *Triângulo de Sierpinski* ou a *Curva de Koch* (ver Figura 24).

Figura 24 - Floco de neve de Koch

Fonte: tomado de https://en.wikipedia.org/wiki/Koch_snowflake.

No final do relato da professora, ela expressa que a Álgebra é uma ferramenta que permite generalizar, criar modelos e resolver problemas. Essa concepção é compartilhada por outros docentes entrevistados, como se observa nas unidades US4.P1E, US6.P1E e US3.P6E, em que a Álgebra é considerada predominantemente como um instrumento de aplicação em nível procedimental para a resolução de problemas. Bortolote e Bicudo (2024) apresentam uma crítica à maneira como a Álgebra tem sido concebida nos currículos escolares, destacando uma perspectiva que privilegia excessivamente seus aspectos utilitários, ao tratá-la unicamente como instrumento de interpretação do mundo. Observa-se, nesses currículos, a presença de “modelos, estruturas, letras e símbolos, que dizem respeito à instrumentalização da Álgebra e que não necessariamente indicam uma atenção dirigida para a compreensão do que ela é, ou seja, o que faz da Álgebra, Álgebra” (Bortolote e Bicudo, 2024, p.6). Por essa razão, os autores defendem a necessidade de uma abordagem mais profunda da Álgebra, que vá além da simples aplicação técnica e instrumental, ainda, alertam que é fundamental compreender os símbolos que constituem sua linguagem, bem como os conceitos, axiomas e regras operatórias que a sustentam. Trata-se de explorar suas intuições fundantes, seus significados e a lógica interna que justifica seus procedimentos, promovendo, assim, uma formação que resista à alienação provocada pelo tecnicismo excessivo e valorize a natureza conceitual e estrutural da disciplina.

USg3.P4L: Segundo a professora, a Álgebra é uma disciplina cuja qualidade de beleza reside na sua capacidade de se integrar a múltiplos contextos e sua ampla aplicabilidade. Ela manifesta que o domínio dessa disciplina favorece o desenvolvimento de habilidades em áreas como programação na computação. Além disso, ela destaca as conexões que a Álgebra possibilita com temas como criptografia e fractais, evidenciando a relevância da Álgebra Linear. Para tanto, a professora concebe a Álgebra como mais do que a manipulação simbólica de números e letras; para ela, a Álgebra constitui uma ferramenta indispensável para a generalização e resolução de problemas por meio da construção de modelos matemáticos.

O que diz essa US:

* Beleza e aplicabilidade da Álgebra;

* A Álgebra possibilita expressar e organizar sistemas conceituais desenvolvidos em diferentes campos matemáticos.

US4.P4L Sin embargo, el talón de Aquiles sigue siendo lo que mencioné antes: las operaciones básicas y la noción de variable. Muchos estudiantes llegan a la universidad con una visión muy mecanicista de las matemáticas, acostumbrados a las recetas, a las fórmulas. Por ejemplo, cuando uno les presenta el concepto de espacio vectorial, que es un conjunto con ciertas propiedades, se pierden. Siguen buscando un “número” o algo concreto a lo que aferrarse. Les lleva un tiempo comprender que trabajamos con estructuras más amplias, donde los “vectores” pueden ser polinomios, funciones o incluso matrices, y no solo las flechitas que aprendieron en el colegio.

Tradução: No entanto, o calcanhar de Aquiles continua sendo o que mencionei antes: as operações básicas e a noção de variável. Muitos alunos chegam à *Educação Superior* com uma visão muito mecânica da matemática, acostumados a receitas e fórmulas. Por exemplo, quando a gente apresenta a eles o conceito de espaço vetorial, que é um conjunto com certas propriedades, eles se perdem. Ficam procurando um “número” ou algo concreto para se apegar. Levam um tempo para entender que trabalhamos com estruturas mais amplias, onde “vetores” podem ser polinômios, funções ou até matrizes, e não apenas as setinhas que aprenderam na escola.

Enxerto Hermenêutico: No relato, a professora chama atenção para um ponto central no desempenho dos estudantes: a *Educação Básica* costuma reduzir a Matemática a uma série de procedimentos mecânicos e à memorização de fórmulas. Como evidencia sua fala, essa abordagem gera uma lacuna significativa quando os alunos ingressam na *Educação Superior*, onde enfrentam dificuldades para compreender representações matemáticas mais abstratas e abrangentes. Ela também destaca, em seu relato, que o “calcanhar de Aquiles”, o ponto nevrálgico dos estudantes universitários é, sobretudo, a deficiência no domínio das operações básicas e uma compreensão limitada da noção de variável. Essas dificuldades também são reiteradas por outros docentes entrevistados, conforme apontado nas unidades US5.P1L, US3.P2L e US8.P3L. A professora P4L, por exemplo, ressalta que a noção de variável, considerada como um eixo estruturante da Álgebra, representa uma barreira conceitual para os alunos que chegam à universidade. Nesse contexto, é pertinente recorrer a Usiskin (1995), que argumenta que o conceito de variável é multifacetado. Por essa razão, reduzir a Álgebra ao estudo das variáveis ou à mera manipulação simbólica descontextualizada não dá conta da complexidade envolvida. Tal redução ignora o caráter estrutural e relacional da Álgebra,

aspectos que são centrais para compreender suas aplicações e avançar no aprendizado de conceitos mais avançados, como funções, sistemas de equações e polinômios.

Para ilustrar essas dificuldades, a professora P4L toma como exemplo o conceito de espaço vetorial, frequentemente introduzido no curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Álgebra Linear. A definição de *espaço vetorial* apresentado por Anton (2012, p.172) é a seguinte: Seja V um conjunto não vazio qualquer de objetos no qual estejam definidas duas operações, a adição e a multiplicação por escalares. Por **adição** entendemos uma regra que associa a cada par de objetos u e v em V um objeto $u + v$, denominado soma de u com v ; por **multiplicação por escalar** entendemos uma regra que associa a cada escalar a , e a cada objeto u em V um objeto au , denominado **múltiplo escalar** de u por a . Se os axiomas seguintes forem satisfeitos por todos os objetos u, v e w em V e quaisquer escalares a e b , diremos que V é um **espaço vetorial** e que os objetos de V são **vetores**.

1. Se u e v são objetos em V , então $u + v$ é um objeto em V .
2. $u + v = v + u$
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$
4. Existe um objeto 0 em V , denominado vetor nulo de V , ou vetor zero, tal que $0 + u = u + 0 = u$, com qualquer u em V .
5. Dado qualquer u em V , existe algum objeto $-u$, denominado negativo de u , tal que $u + (-u) = (-u) + u = 0$.
6. Se a for qualquer escalar e u um objeto em V , então au é um objeto em V .
7. $a(u + v) = au + av$
8. $(a + b)u = au + bu$
9. $a(bu) = (ab)u$
10. $1u = u$

Resulta de especial interesse a observação que realiza tanto Anton (2012) quanto Steinbruch e Winterle (1987) a respeito da definição de espaço vetorial. Esses autores enfatizam a natureza não específica nem dos vetores nem das operações envolvidas. A única exigência para a caracterização de um espaço vetorial é que os axiomas sejam satisfeitos — independentemente da natureza dos elementos que o constituem. Ainda, Steinbruch e Winterle (1987) apontam que “[p]ode parecer estranho, e à primeira vista não deixa de ser, o fato de se chamar de vetores os *polinômios* (quando V for constituído de polinômios), as *matrizes* (quando V for constituído por matrizes) os *números* (quando V for um conjunto numérico), e assim por diante. A justificativa está no fato de as operações de adição e de multiplicação por escalar realizadas com esses elementos de natureza tão distinta se comportarem de forma idêntica, como se estivéssemos trabalhando com os próprios vetores do $\mathbb{R}^2$ ou do $\mathbb{R}^3$ ” (p.19, grifos do autor). Esse estranhamento conceitual, apontado pelos autores, Steinbruch e Winterle (1987), converge com o relato da professora P4L acerca das dificuldades enfrentadas pelos estudantes ao lidar com definições mais abstratas, como a de *espaço vetorial*. Conforme o dito pela professora, muitos estudantes esperam encontrar “números” ou elementos tangíveis, o que se mostra como reflexo de uma formação que associa vetores apenas a representações visuais particulares, como as “setinhas”

aprendidas na escola. Compreender que vetores podem ser polinômios, funções ou matrizes exige romper com essa visão limitada e avançar rumo a uma concepção ampliada da Álgebra como uma linguagem capaz de expressar estruturas.

USg4.P4L: Segundo o relato da professora P4L, persistem como principais dificuldades dos estudantes ingressantes na *Educação Superior*: o domínio nas operações básicas e a compreensão da noção de variável. Ela aponta que muitos alunos chegam com uma concepção mecanicista da matemática, moldada por rotinas procedimentais e uso sistemático de fórmulas. Ao introduzir o conceito de espaço vetorial, definido como um conjunto que satisfaz determinadas propriedades, observa-se que os discentes frequentemente demonstram confusão, buscando elementos numéricos ou concretos que lhes sirvam de referência. A docente destaca que os estudantes levam tempo para compreender que estão diante de estruturas abstratas, nas quais os vetores podem corresponder a polinômios, funções ou matrizes, e não apenas às representações gráficas convencionais, as “setinhas” assimiladas na *Educação Básica e Média*.

O que diz essa US:

- * Dificuldades recorrentes dos estudantes ingressantes na *Educação Superior*;
- * Ruptura conceitual entre a matemática escolar e a universitária.

US5.P4L En cuanto a la enseñanza del Álgebra, la veo como **un desafío y una oportunidad** a la vez. El desafío es precisamente uno poder ayudar a los estudiantes a repasar los **conceptos previos** y a superar esa **barrera inicial de la abstracción**. Y la oportunidad es mostrarles que el Álgebra no es “el coco”, sino una herramienta poderosa para resolver problemas. Y pues en el caso de la enseñanza del Álgebra, aunque parezca que es un tema muy árido, eh [...] hay muchas **aplicaciones** que permiten ver el Álgebra de otra manera, por ejemplo, en informática se encuentran muchas ¿no? Siempre intento conectar los conceptos con situaciones de la vida real para que vean la utilidad y la belleza del Álgebra. Y, por supuesto, les refuerzo la idea de que una variable es algo que puede cambiar, que representa algo que queremos descubrir o que puede asumir diferentes valores.

Tradução: Em relação ao ensino de Álgebra, vejo isso como um desafio e uma oportunidade. O desafio é justamente a gente poder ajudar os alunos a revisar conceitos prévios e superar aquela barreira inicial da abstração. E a oportunidade é mostrar a eles que a Álgebra não é apenas um “bicho-papão”, mas uma poderosa ferramenta para a resolução de problemas. E no caso do ensino de Álgebra, embora possa parecer uma matéria muito árida, eh [...] tem muitas aplicações que nos permitem ver a Álgebra de uma forma diferente, por exemplo, na informática tem muitas, né? Sempre tento conectar os conceitos a situações da vida real para que eles possam ver

a utilidade e a beleza da Álgebra. Também, reforço a ideia de que uma variável é algo que pode mudar, que representa algo que queremos descobrir ou que pode assumir valores diferentes.

Enxerto Hermenêutico: A professora P4E inicia seu depoimento reconhecendo a complexidade inerente ao ensino de Álgebra, caracterizando-o simultaneamente como um desafio e uma oportunidade. O desafio reside na necessidade de apoiar os alunos na revisão de conhecimentos anteriores e na superação da dificuldade que surge diante do caráter abstrato da disciplina. Já a oportunidade se expressa no potencial da Álgebra como ferramenta eficaz na resolução de problemas, contribuindo para desmistificar a percepção negativa que muitos estudantes têm — ilustrada pela metáfora do “bicho-papão”, apontada também na unidade US9.P3L. No contexto do depoimento, a referência à Álgebra indicia que se trata de uma disciplina árida e se relaciona com a excessiva ênfase na manipulação simbólica e na necessidade de abordar as aplicações. A professora destaca a relevância prática dessa disciplina, mencionando o campo da informática como exemplo concreto. Sendo assim, assinala que, em sua prática docente, tenta conectar os conceitos algébricos a situações da vida cotidiana, apontando para uma perspectiva didática contextualizada, que entende o ensino da Álgebra como algo dinâmico, situado e acessível. É na possibilidade da Álgebra ser aplicada na resolução de problemas e na compreensão de sua utilidade que ela reconhece a qualidade de beleza dessa disciplina. Por fim, a professora chama a atenção para o conceito de variável, enfatizando sua natureza mutável e seu papel central como representação de uma incógnita ou de um conjunto de possibilidades.

USg5.P4L: A professora P4L identifica o ensino de Álgebra simultaneamente como um desafio e uma oportunidade. O desafio reside na necessidade de apoiar os estudantes na revisão de conhecimentos matemáticos prévios e na superação das dificuldades relacionadas à abstração inicial própria da disciplina. Por outro lado, aponta como oportunidade o fato de a Álgebra se constituir como ferramenta potente para a resolução de problemas, contrapondo-se à percepção negativa frequentemente atribuída à disciplina, que a considera o “bicho-papão”. Ela reconhece que, embora seja comum a caracterização da Álgebra como um conteúdo árido, há diversas aplicações que permitem aos alunos compreenderem seus conceitos sob uma perspectiva diferenciada, com destaque para o campo da informática. Nesse sentido, a professora diz adotar estratégias didáticas que conectam os conteúdos algébricos a situações da vida cotidiana, visando favorecer a compreensão da utilidade e o reconhecimento da dimensão estética da Álgebra. Além disso, enfatiza a noção de variável entendida como elemento que pode sofrer variações, representando incógnitas que podem assumir valores diferentes.

O que diz essa US:

- * Desafios e possibilidades no ensino da Álgebra;
- * Importância das noções de variável.

US6.P4L Diría que ensinar el Álgebra consiste en ayudar a los estudiantes a comprender que esas letras y símbolos no están pensados para complicar las cosas, sino para simplificar y ampliar nuestra capacidad de pensar y resolver problemas. Pasar a ver el “bosque” y no solo el “árbol”. O sea, se trata de pasar del “caso por caso” al “todo a la vez”. ¿Sí? Lo que nosotros aspiramos es que cuando él salga ahorita como licenciado, es que él pueda escoger los temas: cuáles tienen mayor profundidad, cuáles tienen mayor complejidad y pueda dedicar un tiempo adecuado a cada uno de ellos, y que sean capaces de desapegarse de un texto y hacer su propia propuesta pedagógica para enseñar una temática.

Tradução: Eu diria que ensinar Álgebra é ajudar os alunos a compreender que essas letras e símbolos não estão pensados para complicar as coisas, mas sim para simplificar e expandir nossa capacidade de pensar e resolver problemas. É passar a ver a “floresta” e não apenas a “árvore”. Em outras palavras, é passar de “caso a caso” para “tudo de uma vez”. Certo? O que esperamos é que, quando ele se formar agora como licenciado, ele possa escolher os temas: quais são mais aprofundados, quais são mais complexos, e que ele possa dedicar tempo adequado a cada um deles, e que ele seja capaz de se distanciar de um texto e criar sua própria proposta pedagógica para ensinar um tema.

Enxerto Hermenêutico: A professora concebe o ensino da Álgebra como uma forma de auxiliar os estudantes a compreenderem que o tratado nessa disciplina conduz à generalização do pensamento. Para ilustrar sua abordagem, ela utiliza o recurso da metáfora ao comparar o raciocínio algébrico à capacidade de *ver* a “floresta” em vez de apenas a “árvore”, ou seja, de compreender o todo em vez de focar nos casos particulares. A metáfora da floresta e da árvore remete à passagem do particular ao geral, do concreto ao abstrato. Essa perspectiva dialoga com o olhar fenomenológico, conforme descrito por Bicudo e Paulo (2025), que afirmam que: “Os *conceitos* são construídos, ao identificarmos características comuns entre diferentes coisas que observamos [...]. Esse ato de destacar e reunir características vistas, da perspectiva do sujeito que busca conhecer intencionalmente algo, olhando-o atentamente, é o que chamamos de *abstração*. O algo pode ser uma situação, pode ser uma afirmação matemática como $A=A$, pode ser uma narrativa que expõe um acontecimento, etc. As características abstraídas originam uma compreensão sobre o conjunto mais amplo de dados sob estudo passível de ser expressa em uma linguagem” (p.7, grifos das autoras). Um aspecto característico da linguagem algébrica, destacado por Drouhard e Teppo (2004), é que permite transitar com fluidez entre diferentes *camadas de abstração*, condensando ideias matemáticas complexas em *encadeamentos eficientes de símbolos*. Dessa forma, a fala da professora P4L revela uma concepção da Álgebra que transcende o tratamento fragmentado de casos específicos ou a abordagem como um conjunto de técnicas isoladas, comumente presente na prática rotineira de exercícios, visando uma compreensão mais ampla, tanto da linguagem simbólica quanto dos conceitos envolvidos.

Essa concepção ressoa com as considerações de Linchevski e Livneh (1999), que defendem que o ensino da Álgebra deve favorecer o desenvolvimento do *sentido de estrutura*. Para isso, é fundamental proporcionar aos estudantes oportunidades de perceber e explorar as estruturas subjacentes às expressões algébricas. A depoente enfatiza o valor da linguagem simbólica, representada por letras e expressões algébricas, sua capacidade de expressar generalizações e abstrações que vão além do número imediato ou do exemplo concreto, um movimento que se mostra central na experiência ao trabalhar com a Álgebra — como evidenciado também nas US2.P4L, US9.P3L, US6.P3L.

Assim, conforme a perspectiva da professora P4L sobre a Álgebra, ela destaca a importância da formação do futuro professor de Matemática. Além disso, ela manifesta que sua expectativa é que o licenciando não apenas domine o conteúdo a ser ensinado, mas que seja capaz de reinterpretá-lo, adaptá-lo e recriá-lo em função de contextos específicos de aprendizagem. Ao mencionar que espera que o futuro professor seja capaz de se “distanciar de um texto e criar sua própria proposta pedagógica”, a fala destaca a autonomia reflexiva como um valor formativo preponderante.

USg6.P4L: Para a professora P4L, ensinar Álgebra consiste em favorecer a compreensão dos estudantes, e que os elementos simbólicos que envolvem essa disciplina não têm como propósito gerar dificuldades, mas contribuir para simplificar e ampliar a capacidade de pensar e resolver de problemas. Conforme o dito pela professora, esse modo de compreender a Álgebra pode ser comparado com a analogia de ver a “floresta” e não apenas a “árvore”, ou seja, visando à superação de abordagens fragmentadas — passar de “caso a caso” —, em direção a uma perspectiva mais geral — para “tudo de uma vez” —. A professora manifesta sua expectativa sobre os licenciandos que estão em fase de culminação de seus estudos, sobre a capacidade deles de selecionar os conteúdos a partir de critérios como os de complexidade e profundidade, assim como de gerenciar adequadamente o tempo dedicado a cada tema e a autonomia que lhes permite distanciar-se do texto guia como único recurso pedagógico para elaborar propostas pedagógicas próprias.

O que diz essa US:

- * O papel da Álgebra no ensino;
- * Formação do professor de Matemática.

5.4.5 Professor P5L

US1.P5L Cuando estuve en bachillerato, realmente yo recibí un Álgebra basada en el Álgebra de Baldor y pues obviamente, es un Álgebra muy **mecánica**, pero que son procesos **ineludibles** de comprender. Entonces considero que **esa base** que se me dieron allí fue **importante** para mi **formación**, para la carrera de licenciado en Matemáticas. Entonces pienso

que eso, que, aunque era de tipo algorítmico, fue importante para mi **formación**, digámoslo así. Eh [...], yo considero que sí, esos procesos de todas maneras hay que tenerlos, y hay que tenerlos muy **claros**, porque si no pues cuando se presente la oportunidad en una situación donde haya que pensar en deducir cosas pues va a haber más problemas.

Tradução: Quando eu estava na *Educación Básica Secundaria e Média*, recebi uma Álgebra baseada na *Álgebra de Baldor* e, obviamente, é uma Álgebra muito mecânica, mas envolve processos incluíveis de compreender. Então, acredito que essa base que recebi lá foi importante para a minha formação, para a minha graduação como Licenciado em Matemática. Então, acho que, embora fosse de tipo algorítmica, foi importante para a minha formação, digamos assim. Hum [...], acredito que sim, mesmo assim esses processos devem ser dominados, e devem estar muito claros, porque, caso contrário, quando surgir a oportunidade, em uma situação em que você tenha que pensar em deduzir coisas, haverá mais problemas.

Enxerto Hermenêutico: O relato do professor P5L começa com a rememoração de sua experiência vivenciada com a Álgebra enquanto estudante na escola. Ele destaca que, naquele período, o ensino da disciplina priorizava o domínio de procedimentos algorítmicos, caracterizando-a como uma prática escolar “muito mecânica”, baseada principalmente no trabalho com o livro didático *Álgebra de Baldor*. Embora ele critique de forma implícita o caráter excessivamente técnico do ensino, que prioriza a repetição e a execução de algoritmos em detrimento da compreensão conceitual, o professor também reconhece o valor formativo do pensamento matemático desse tipo de abordagem, pois considera que tal base foi fundamental para a continuidade de seus estudos na graduação de licenciatura em Matemática. O professor continua o relato reforçando a ideia de que, mesmo sendo uma Álgebra que ensina de maneira algorítmica, essa abordagem contribuiu significativamente para o desenvolvimento intelectual, tornando-se parte fundamental de sua formação. Defende, ainda, a importância do domínio desses processos, ressaltando que a clareza na execução dos procedimentos é fundamental em situações futuras, nas quais será preciso “deduzir coisas”. Desse modo, o professor reconhece a necessidade de um ensino que vá além do aspecto operacional da Álgebra, sem desprezar sua função técnica, desde que os processos sejam compreendidos com clareza, o que pode favorecer uma articulação produtiva entre o domínio técnico e o desenvolvimento de um raciocínio mais elaborado. Nesse sentido, a clareza mencionada pelo professor pode ser compreendida à luz da fenomenologia, como propõe Husserl (1980, p. 61), ao afirmar que “quando se exige aquela clareza que faz uma coisa ser evidente, que torna ‘a própria coisa’ clara para nós, tornando assim cognoscível a sua possibilidade e a sua verdade, somos então remetidos à intuição, no sentido de nossos atos intuitivos”. Essa perspectiva é aprofundada por Bicudo e Paulo (2025, p. 8), que compreendem a clareza como “um predicado, embasado em uma intuição – sensorial ou eidética – que espreita a ideia. Dizemos que uma ideia é clara e distinta, quando podemos reconhecer que uma coisa é um objeto intuído e, como ele, esse objeto, se evidencia na intuição”. Para as autoras,

esse movimento de decomposição e reunião de aspectos presentes em proposições ocorre no pensar com e sobre os objetos do conhecimento, sendo reavivado pela intuição. O manifestado pelos autores ecoa com o relato do professor P5L, revelando que a articulação entre experiência vivida, clareza conceitual e intuição sugerem que a formação docente se constitui em camadas, e que experiências prévias, ainda que pareçam limitadas (como sugere a crítica implícita no relato do professor P5L), podem se converter em um repertório útil, desde que o professor seja capaz de *ressignificar essas vivências* em sua prática futura.

USg1.P5L: O professor P5L relata que, durante a *Educación Básica Secundaria e Média*, teve contato com uma abordagem algébrica fundamentada no livro *Álgebra de Baldor*, caracterizada por uma prática predominantemente mecânica. Apesar dessa natureza algorítmica, ele considera que os processos envolvidos exigem compreensão e que essa base foi relevante para sua formação inicial, especialmente no percurso da graduação em licenciatura em Matemática. Ressalta, ainda, que o domínio desses procedimentos é necessário e que sua clareza é fundamental, pois, em situações futuras que demandem deduções, a ausência dessa clareza pode gerar dificuldades adicionais.

O que diz essa US:

- * Influência do livro *Álgebra de Baldor* e o modo de ser implementado;
- * Valor formativo da experiência escolar para a formação do licenciado em Matemática.

US2.P5L Digamos que a nivel universitario nosotros vimos un Álgebra también, pues en su momento, como que la metodología formal era el **conductismo**. Aunque se trabajaban algunos problemas, se veían como una situación igualmente muy eh [...] **mecanizada**, digámoslo así, ¿no? Y sobre todo en su momento fue muy orientado a la parte **demostrativa**, que de todas maneras, **vuelvo y repito**, estos son procesos muy **importantes, que incidieron** en mi vida como profesional de para la enseñanza de la Matemática. Nosotros vimos las tres Álgebras, veíamos Teoría de Anillos y Teoría de Campos y Cuerpos. Entonces eh [...], era bastante **profunda** la situación. Eh [...] digamos que en algunas se desarrollaba trabajo en el contexto de hacer **deducción** de fórmulas y cosas de ese estilo, y en algunos momentos [...] **muy fuertes**, la parte **demostrativa**, o sea, obviamente tocaba como hacer las deducciones de por qué razón se daba una propiedad, por qué era un lema, por qué un axioma y por qué **tocaba demostrar** en esa situación.

Tradução: Digamos que, no nível universitário, também vimos uma Álgebra, mas na época, como que a metodologia formal era o behaviorismo. Embora alguns problemas fossem

abordados, eles eram vistos como uma situação igualmente muito eh [...] mecanizada, digamos assim. E, acima de tudo, na época, era muito voltado para a parte demonstrativa, que, de qualquer forma, repito, são processos muito importantes que influenciaram minha vida como profissional para o ensino da Matemática. Vimos as três Álgebras; vimos a teoria dos anéis e a teoria dos campos e corpos. Então, a situação era bastante profunda. Digamos que, em alguns momentos, o trabalho foi desenvolvido no contexto da dedução de fórmulas e coisas desse estilo, e em alguns momentos, muito forte, a parte demonstrativa, ou seja, obviamente, era necessário fazer deduções sobre a razão pela qual uma propriedade foi dada, por que era um lema, por que um axioma, e por que tinha que ser demonstrado naquela situação.

Enxerto Hermenêutico: O professor P5L relata vivências sobre sua trajetória formativa no contexto universitário, especialmente em relação ao trabalho com Álgebra. Ele relata que, naquela época, a abordagem metodológica predominante era de orientação behaviorista. Segundo Ertmer e Newby (1993, p. 48, tradução nossa), no behaviorismo, “os elementos-chave são o estímulo, a resposta e a associação entre os dois. A preocupação primária é como a associação entre o estímulo e a resposta é feita, fortalecida e mantida”. Ao mencionar essa perspectiva como dominante, o professor sugere uma crítica implícita à falta de abertura para outras concepções de ensino. No plano dos conteúdos, o professor destaca o estudo aprofundado de três estruturas algébricas: teoria dos anéis, teoria dos corpos e teoria dos campos. A referência à dedução de fórmulas e à necessidade de justificar propriedades, lemas e axiomas evidencia uma prática fortemente orientada pela lógica formal e pela demonstração matemática. Essa ênfase na dedução e na demonstração é reiterada como um elemento central da formação, sendo reconhecida como decisiva na constituição de seu pensamento matemático, de sua identidade profissional e de sua atuação como docente de Matemática.

USg2.P5L: O professor P5L relata que, no nível universitário, teve contato com o ensino de Álgebra sob uma metodologia formal, identificada por ele como behaviorista. Embora alguns problemas tenham sido abordados, ele os caracteriza como inseridos em uma abordagem igualmente mecanizada. Destaca que, naquele período, o ensino era fortemente voltado para a dimensão demonstrativa, a qual considera composta por processos importantes que influenciaram sua trajetória profissional no ensino da Matemática. Menciona que foram estudadas três estruturas algébricas, a teoria dos anéis, a teoria dos campos e a teoria dos corpos, indicando que o conteúdo trabalhado foi aprofundado. Segundo seu relato, o trabalho envolvia a dedução de fórmulas e procedimentos, com forte presença da prática demonstrativa, exigindo justificativas para propriedades, lemas e axiomas, bem como a demonstração de sua validade nas situações propostas.

O que diz essa US:

* Caráter mecanizado do ensino de Álgebra no contexto universitário, com ênfase na prática de demonstração formal;

* Valor formativo da experiência escolar para a formação do licenciado em Matemática.

US3.P5L Digamos que definirle a una persona del común que es el Álgebra, pues es un poquito complicado, porque eh [...] es que hay un concepto ahí, que es el concepto tácito de variable, que es un concepto que no es fácil de entender. Es una matemática que a veces uno no la ve pero que está inmersa en las situaciones, entonces pues es muy importante que se tenga en cuenta ese tipo de conceptos. Y entonces, eh [...], digamos que básicamente lo que le explicaría a una persona del común sobre en qué se basa el Álgebra. Es eso. Es como un estudio donde se tienen **relaciones y operaciones entre variables**.

Tradução: Digamos que definir o que é Álgebra para uma pessoa comum é um pouco complicado, porque, eh [...] há um conceito aí, que é o conceito tácito de variável, que é um conceito que não é fácil de entender. É uma matemática que às vezes você não vê, mas está imersa em situações, então é muito importante manter esses tipos de conceitos em mente. E então, eh, [...], digamos que isso é basicamente o que eu explicaria para uma pessoa comum sobre em que se baseia a Álgebra. É isso. É como um estudo onde você tem relações e operações entre variáveis.

Enxerto Hermenêutico: Nessa unidade de sentido, o professor P5L tenta explicitar sua concepção de Álgebra. Ele reconhece a complexidade envolvida na tarefa de explicar o conceito de Álgebra para uma pessoa leiga e aponta que essa dificuldade está relacionada, sobretudo, à natureza do conceito de variável, que considera tácito e de difícil compreensão. Conforme os depoimentos dos professores entrevistados, a noção de variável também é vista como difícil ao iniciar na Álgebra, como se evidencia nas unidades US1.P4L e US4.P4L. O conceito de variável é amplamente reconhecido como um dos pilares da Álgebra, sendo considerado por Booth (1995) como um dos aspectos mais importantes dessa área do conhecimento. Sua relevância está diretamente ligada ao *caráter multifacetado* e à flexibilidade de uso, como apontam Usiskin (1995), Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005), Arcavi, Drijvers, Stacey (2017), que destacam a capacidade da variável de assumir diferentes domínios de significação, compreensão e aplicação. Essa versatilidade, no entanto, está intrinsecamente ligada à sua natureza simbólica, que, segundo Drouhard e Teppo (2004), permite múltiplas *camadas de abstração* e uma economia simbólica capaz de condensar ideias complexas em expressões concisas. Contudo, como alerta Freudenthal (1977), essa mesma simbologia pode gerar dificuldades de compreensão, especialmente quando os estudantes confundem o símbolo com o objeto matemático que ele representa, interpretando a variável como um número fixo em vez de um elemento abstrato da linguagem algébrica. Ao caracterizar a Álgebra como uma “matemática que às vezes você não vê”, o professor P5L sugere que ela está presente de forma implícita em

diversas situações cotidianas, ainda que não seja imediatamente perceptível. Esse modo de entender a Álgebra também é observado no relato da US7.P2L. Esse modo “velado” em que a Álgebra se mostra, segundo ele, reforça a importância de manter certos conceitos fundamentais sempre em mente, por exemplo o de variável, como elemento estruturante. Na tentativa de oferecer uma explicação acessível sobre sua concepção, o professor P5L define a Álgebra como um campo de estudo que trata das relações e operações entre variáveis. Essa concepção da Álgebra se aproxima do que Usiskin (1995) tem denominado como a concepção de *Álgebra como estudo de relações*. Nessa concepção, trabalha-se com um modelo a ser generalizado, no qual as variáveis de fato variam, diferentemente do modelo fixo predominante na Aritmética. Trata-se, portanto, de um modelo fundamentalmente algébrico, em que a variável assume o papel de *argumento* (representando os valores do domínio de uma função) ou de *parâmetro* (um número do qual outros valores dependem). É apenas nesse contexto que fazem sentido as noções de variável independente e dependente. As funções emergem quase naturalmente, uma vez que se torna necessário nomear os valores que dependem do argumento ou parâmetro x .

USg3.P5L: O professor P5L afirma que definir Álgebra para uma pessoa não especializada é uma tarefa complexa, em razão da presença de conceitos que considera tácitos, como o de variável, cuja compreensão não é simples. Ainda, ressalta que a Álgebra é uma forma de matemática que, embora nem sempre visível, está presente em diversas situações, o que torna fundamental manter esses conceitos em mente. Ao sintetizar sua explicação, manifesta sua concepção de Álgebra como um estudo que envolve relações e operações entre variáveis.

O que diz essa US:

- * Complexidade do conceito de variável;
- * Concepção de Álgebra como estudo que envolve relações e operações entre variáveis.

US4.P5L Bueno, mi comprensión del Álgebra [...] lo que pasa es que, en la matemática, todo el mundo aprende algo y ya quieren ver la **aplicación**. ¿Y eso para qué sirve? ¿Sí? Entonces en la parte del Álgebra sucedía lo mismo: uno medio veía un concepto, y bueno, ¿y esto **para qué sirve**? Digamos que, **necesitamos** saber sumar, restar, multiplicar y dividir perfectamente. **Necesitamos** saber simplificar. **Necesitamos** poder desarrollar **ejercicios** donde haya que **hacer transformaciones**, por ejemplo, e **inmerso allí hay una serie de conceptos**, como por ejemplo todo lo que es la **factorización**. Entonces, **haría el mismo hincapié en la ejercitación**, pero eh [...], digamos, que utilizaría el aspecto más **inductivo**, o sea, de lo **particular** a llegar a casos **generales**, es decir, **hacer cositas concretas**, para ir trabajando hasta que el estudiante logre hacer **generalizaciones** y sacar conclusiones, ¿Si? Entonces yo pienso que acerca de **la enseñanza del Álgebra** sería como eso.

Tradução: Bem, minha compreensão da Álgebra [...] acontece que, em matemática, todo mundo aprende alguma coisa e quer ver já a aplicação. E para que serve isso? Certo? Então, no caso da Álgebra, acontecia a mesma coisa: a gente meio que viu um conceito e, bem, para que serve isso? Digamos que precisamos saber como somar, subtrair, multiplicar e dividir perfeitamente. Precisamos saber como simplificar. Precisamos ser capazes de desenvolver exercícios onde tenham que ser feitas transformações, por exemplo, e imersos há uma série de conceitos, por exemplo, tudo o que envolve fatoração. Então, eu daria a mesma ênfase aos exercícios, mas, digamos, eu usaria o aspecto mais indutivo, ou seja, do particular para chegar a casos gerais, ou seja, fazer coisas concretas, para trabalhar até que o aluno consiga fazer generalizações e tirar conclusões, certo? Então, eu acho que em relação ao ensino de Álgebra, seria assim.

Enxerto Hermenêutico: Ao ampliar seu relato sobre a compreensão de Álgebra e seu ensino, o professor PL5 ressalta a preocupação recorrente dos estudantes em perguntar “para que serve” cada conceito matemático aprendido, evidenciando a busca por aplicação prática e imediata dos conteúdos trabalhados. Ele observa que, ao se depararem com a Álgebra, esse mesmo questionamento sobre sua utilidade persiste, colocando em evidência uma tensão entre o caráter abstrato da Álgebra e a exigência por funcionalidade imediata imposta tanto por alunos quanto, muitas vezes, pelo próprio sistema educacional. Ele defende a importância de desenvolver e aprimorar habilidades fundamentais, tais como: dominar as quatro operações básicas, simplificar expressões e realizar transformações algébricas, com ênfase especial na fatoração. Na Álgebra elementar em particular, os procedimentos de fatoração são apontados como conteúdos centrais, conforme mencionado nos enxertos hermenêuticos das unidades US7.P2E, US8.P2E, US8.P6E e US4.P5L.

Ao descrever seu método de ensino, o professor apoia uma abordagem indutiva, que parte de situações concretas e exercícios para, gradualmente, construir generalizações. Conforme registrado em US2.P5E, ele reitera que a prática sistemática de exercícios contribui positivamente para a formação dos estudantes. A esse respeito, Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) afirmam que a destreza na manipulação de símbolos se desenvolve à medida que se exploram diversas situações e se expressam. No entanto, esses autores alertam que a repetição mecânica de exercícios só tem valor quando deixa de focar nos aspectos técnicos da manipulação e passa a servir como meio para avançar em direção a outro objetivo, como, por exemplo, a exploração de uma conjectura. A ideia expressa pelo professor P5L de “fazer coisas concretas para trabalhar até que o aluno consiga fazer generalizações” revela uma valorização da formação intelectual, na qual o aluno participa ativamente da construção do conhecimento algébrico e, sugere que, embora valorize a prática algorítmica e a proficiência em manipulações simbólicas, reconhece a importância de construir o conhecimento a partir da experiência do aluno, permitindo que este chegue aos conceitos mais abstratos por meio da observação, da prática e da reflexão de exemplos concretos. A concepção de ensino apresentada pelo professor P5L, que valoriza a generalização nas práticas de Álgebra, alinha-se à proposta de Mason (1996), na qual “uma maneira de desenvolver a consciência da generalidade é distinguir entre olhar através e

olhar para o que leva às experiências primordiais de abstração e concretização, ou seja, ver uma generalidade por meio do particular e ver o particular na generalidade. Essas experiências são aprimoradas ao distinguir entre trabalhar em uma sequência de exercícios e trabalhar nesses exercícios como um todo”²²⁸ (Mason, 1996, p. 64, tradução nossa). Essa perspectiva ecoa a metáfora referida pela professora P4L no excerto US6.P4L, ao falar sobre *ver* a generalidade no ensino.

O relato de P5L reforça a ideia de que os exercícios não devem servir apenas para aprimorar a técnica, mas também para alimentar a compreensão de conceitos matemáticos. Nesse sentido, Mason (1996) afirma que “fazer exercícios matemáticos é reconhecer ‘tipos’ de perguntas e ser capaz de reconstruir uma técnica geral para si mesmo. Automatizar uma técnica é apenas um aspecto da ‘prática para aprimorar’. O problema com a prática sem reflexão é que ela se torna mecânica, focando justamente os aspectos que deveriam ser executados sem atenção quando a técnica está dominada”²²⁹ (Mason, 1996, p. 71, tradução nossa). A prática de ensino explicitada pelo professor P5L busca equilibrar o domínio técnico com a constituição progressiva de sentido, por meio de experiências concretas e do raciocínio indutivo, conduzindo os alunos à abstração gradual e à autonomia na formulação de conclusões.

USg4.P5L: Ao se referir sobre sua compreensão de Álgebra, o professor P5L inicialmente destaca a recorrente demanda dos alunos por compreender a imediata aplicabilidade dos conteúdos ensinados na Matemática. Ele observa que, no caso da Álgebra, essa necessidade se manifesta da mesma forma, com os estudantes questionando a utilidade dos conceitos apresentados. Para ele, é fundamental que os alunos saibam realizar operações básicas — somar, subtrair, multiplicar e dividir —, além de dominar a simplificação de expressões algébricas. Ressalta a importância de propor exercícios que envolvam transformações e que integrem diversos conceitos, como os relacionados à fatoração. P5L enfatiza que manteria o foco nos exercícios, adotando uma abordagem indutiva, partindo de situações particulares e concretas para lograr que os estudantes consigam realizar generalizações e extrair conclusões. Essa, segundo ela, seria sua perspectiva quanto ao ensino da Álgebra.

O que diz essa US:

- * Necessidade de mostrar a aplicabilidade imediata de conceitos algébricos;
- * Perspectiva indutiva no ensino da Álgebra.

²²⁸ One way to work at developing awareness of generality is to be sensitized by the distinction between looking through and looking at, which leads to the primal abstraction and concretization experiences, namely seeing a generality through the particular and seeing the particular in the general. These are enhanced by distinguishing between working through a sequence of exercises, and working on those exercises as a whole.

²²⁹ [...] doing mathematical exercises is about recognizing “types” of questions and about being able to re-construct a general technique for oneself. Automating a technique is only one aspect of “practice to make perfect”. The trouble with mindless practice is that it takes place in a rarefied context, and often mindlessly. Practice tends to focus attention on precisely those aspects of a technique which have to be done without attention when the technique is mastered

US5.P5L Bueno, en este momento están llegando, digámoslo así, con la idea de que el Álgebra es solo una ejercitación, y que el Álgebra realmente es, pues lo que ellos conciben en bachillerato, que es el *Álgebra de Baldor*, prácticamente con sus operaciones. Luego se pegan un estrellón, cuando uno empieza a ver Álgebra en la universidad, que por ejemplo ya empieza con el Álgebra Lineal, Teoría de Grupos, Teoría de Anillos. Entonces ellos dicen, bueno, ¿y el Álgebra que nosotros vimos en dónde está? Pero sí, obviamente que está inmersa en toda la situación que se está llevando a cabo. O sea, digamos que realmente cuando se hace ese trabajo con los estudiantes, hay un despegue de la parte usual a otro nivel. El licenciado tiene que estar en otro nivel, de tal manera que le permita ver muy claramente los diferentes conceptos y poderlos adaptar, poderlos manejar, digámoslo así. Eso es lo que le permite crecer al licenciado en matemáticas y ver, eh [...], digamos, como desde un horizonte diferente, lo que él va a enseñar de aquí a mañana.

Tradução: Bem, neste momento, os estudantes estão chegando, digamos assim, com a ideia de que Álgebra é apenas uma exercitação, e, que a Álgebra é o que eles concebem na *Educação Básica Secundaria e Média*, que é a *Álgebra de Baldor*, praticamente com suas operações. Então, eles colidem com a realidade, quando começam a ver Álgebra na faculdade, que, por exemplo, começa com a Álgebra Linear, Teoria de Grupos, Teoria dos Anéis. Então, eles dizem: bem, e onde está a Álgebra que estudamos? Mas sim, obviamente ela está imersa em toda a situação que está ocorrendo. Ou seja, digamos que, quando se realiza esse trabalho com os estudantes, há um avanço da parte usual para outro nível. O licenciando precisa estar em outro nível, de tal forma que lhe permita ver os diferentes conceitos com muita clareza e ser capaz de adaptá-los, poder dominá-los, digamos assim. É isso que permite que o licenciando em Matemática cresça e veja, eh [...] digamos assim, desde um horizonte diferente, o que ele vai ensinar futuramente.

Excerto Hermenêutico: Neste excerto, o professor P5L expressa sua preocupação com o nível de conhecimento em Matemática dos estudantes que ingressam na *Educação Superior*, especialmente no que diz respeito à Álgebra. Essa inquietação é compartilhada por outros docentes universitários entrevistados, como se observa nas unidades US4.P1L, US5.P1L, US2.P2L, US8.P3L e US4.P4L. O professor P5L destaca, em particular, a concepção limitada de Álgebra com a qual os alunos chegam à universidade. Segundo seu relato, esse descompasso acadêmico decorre do fato de que muitos estudantes associam a Álgebra à prática repetitiva de operações algébricas aprendidas na *Educação Básica Secundaria e Média*, geralmente por meio do uso quase exclusivo do livro didático *Álgebra de Baldor*, focado na resolução de equações e na manipulação simbólica intensiva. A referência à *Álgebra de Baldor* simboliza não apenas um conteúdo específico, mas uma tradição pedagógica centrada na mecanização e na resolução de

problemas padronizados. Essa abordagem, embora útil em certos contextos, limita a compreensão da Álgebra como linguagem e estrutura do pensamento matemático, quando o foco da atenção está posto na prática mecanizada de técnicas algébricas em sequências de exercícios (Mason, Graham e Johnston-Wilder, 2005).

Ao ingressarem na *Educação Superior*, esses estudantes se deparam com uma abordagem mais abstrata e estrutural da Álgebra — como a Álgebra Linear, a Teoria de Grupos e a Teoria dos Anéis — o que provoca um choque conceitual. Esse impacto leva os alunos a questionarem onde está a Álgebra que estudaram anteriormente. Tal descompasso corresponde ao hiato descrito por Felix Klein, já mencionado na primeira seção deste trabalho. Assim, o “choque” mencionado pelo professor pode ser considerado como um momento de ruptura, em que o estudante é confrontado com a complexidade e a abstração da Álgebra. A universidade, nesse sentido, não apenas amplia o repertório conceitual, mas também exige uma ressignificação da própria concepção de Álgebra. A fala do professor reforça a evidência de que esse fenômeno é persistente e continua sendo percebido pelos docentes da graduação como um problema latente. Apesar disso, o professor observa que a Álgebra elementar aparece de forma implícita nos conteúdos do curso, sugerindo que esses tópicos são tratados como ferramentas procedimentais, diluídas em atividades de outras disciplinas. Ele ressalta que essa transição exige uma mudança de perspectiva por parte dos licenciandos. Assim, ao trabalhar com os futuros professores de Matemática, o docente afirma que é esperado que, à medida que avançam nos estudos, desenvolvam uma visão mais ampla e profunda dos conceitos algébricos. Essa evolução intelectual deve capacitá-los a compreender com *clareza* tais conceitos e adaptá-los ao contexto do ensino (a respeito do compreendido por *clareza* remetimos ao enxerto hermenêutico na US1.P5L). O professor descreve esse avanço como um processo de crescimento que permite ao licenciando enxergar a Álgebra “desde um horizonte diferente”. Gadamer (2011a, p. 425) enfatiza que o *horizonte* não é um limite estático, mas “algo no qual trilhamos nosso caminho e que conosco faz o caminho”. Nesse movimento hermenêutico, cada encontro, seja com textos, seja com interlocutores, provoca uma *fusão de horizontes*, ampliando o ponto de vista de quem compreende. O “horizonte” a que o professor P5L alude aponta para uma passagem de um entendimento puramente procedural da Álgebra, restrita à manipulação simbólica, para uma perspectiva conceitual mais rica. Trata-se, portanto, não apenas de assimilar novos conteúdos, mas de fundir o horizonte algébrico prévio ao novo horizonte de compreensão. Sob a ótica gadameriana, o relato do professor indica que a formação do licenciando configura simultaneamente um deslocamento e uma fusão de horizontes, em que a abertura contínua do horizonte de sentido impulsiona tanto o crescimento intelectual quanto a capacidade de adaptação do futuro docente.

USg5.P5L: O professor P5L relata que, ao ingressarem na *Educação Superior*, os estudantes apresentam uma concepção de Álgebra restrita à exercitação de operações e manipulação simbólica, tal como vivenciada na *Educação Básica Secundaria e Média*, exemplificada pela abordagem presente no livro *Álgebra de Baldor*. Ao se depararem com conteúdos como Álgebra

Linear, Teoria de Grupos e Teoria dos Anéis, os alunos experienciam um choque conceitual, questionando a ausência da Álgebra estudada na *Educação Básica Secundaria e Média*. O docente afirma que essa Álgebra elementar está presente, embora de forma implícita na nova abordagem. Ele destaca que o trabalho realizado com os licenciandos promove uma transição da abordagem usual para um nível mais elevado de compreensão. Em seu olhar, é necessário que o licenciando alcance esse novo nível, que lhe permita visualizar os diferentes conceitos com clareza, para poder dominá-los e adaptá-los ao contexto do ensino. Esse processo é apontado como fundamental para o crescimento do futuro professor de Matemática, possibilitando-lhe enxergar, a partir de um horizonte distinto, os conteúdos que irá ensinar.

O que diz essa US:

* Hiato na transição entre Álgebra ensinada na *Educação Básica e Média* e a trabalhada no nível universitário.

* O futuro professor precisa desenvolver clareza conceitual para adaptar os conteúdos ao ensino.

US6.P5L Bueno, ya poniéndome en el sitio de estar trabajando con los futuros licenciados en matemáticas, eh, haría justamente lo siguiente: en primer lugar, insinuarles que hay que utilizar una metodología más **constructiva**, digámoslo así. Siempre he sido amigo de la parte **constructiva**, no del **constructivismo** como tal, pero sí una parte **constructiva**. Como lo que ya te he dicho, que es como el trabajo de abajo hacia arriba, o sea, trabajo con casos **particulares** y lograr que ellos puedan **generalizar** cosas. Cuando tú logras **generalizar** algo, eso **no se te olvida** porque ya lo tienes, o sea, lo **construiste**, lo tienes fácilmente. Puede que se te olvide, pero lo recuerdas fácilmente y lo tienes ahí. En cambio, cuando te lo dan de forma **deductiva**, como una regla, **se te olvida**. Y, es más, la mayoría de las veces ni siquiera hay la **comprensión** del concepto. Entonces, cuando él [el estudiante] ve un caso **particular**, que sucede aquí, que sucede allá, y ahora si vamos a tratar de **generalizar** la cosa, la situación funciona más, pero no nos quedamos solamente en la parte **constructiva**.

Tradução: Bem, me colocando no lugar de estar trabalhando com futuros licenciados em matemática, eh, eu faria exatamente o seguinte: primeiro, eu sugeriria a eles que precisassem usar uma metodologia mais construtiva, digamos assim. Sempre fui fã do lado construtivo, não do construtivismo em si, mas sim de um lado construtivo. É como o que eu já disse para você, é como um trabalho de baixo para cima, ou seja, eu trabalho com casos particulares e faço com que eles consigam generalizar as coisas. Quando você consegue generalizar algo, você não esquece porque você já o tem, quer dizer, você o construiu, você o tem facilmente. Você pode esquecer, mas você se lembra facilmente e ele está lá. Por outro lado, quando dão para você

dedutivamente, como uma regra, você o esquece. E, além disso, na maioria das vezes não há nem mesmo uma compreensão do conceito. Então, quando ele [o estudante] vê um caso particular que acontece aqui, que acontece ali, e agora se a gente vai tentar generalizar a coisa, a situação funciona mais, mas a gente não fica só na parte construtiva.

Excerto Hermenêutico: No excerto, o professor P5L focaliza sua fala na perspectiva do trabalho com a formação de futuros licenciados em Matemática. O professor destaca que tem preferência uma abordagem construtiva no ensino de Álgebra e que incentiva os licenciandos a optar por este tipo de metodologia de ensino. Porém, ele aclara que valoriza menos as filiações teóricas ao *construtivismo*²³⁰ e mais a prática de “construir” o conhecimento a partir de exemplos concretos. O professor P5L propõe um trabalho “de baixo para cima”, em que se parte de casos particulares para conduzir o estudante à abstração e à generalização dos conceitos. Essa estratégia, segundo ele, favorece a retenção do aprendizado porque o aluno reconstrói o conhecimento Matemático, e rememora mais facilmente o que descobriu por si mesmo. Na sequência, o professor entrevistado contrasta essa via com o método puramente *dedutivo*, fruto da exposição direta de definições e regras algébricas. Seu posicionamento indica uma concepção de Álgebra como um saber que emerge da experiência e da reflexão do aprendiz e não como um repositório de verdades prontas. Para ele, esse caminho leva ao esquecimento rápido e à apreensão superficial dos conceitos, pois o estudante não participa ativamente do processo de construção do saber. A imposição de regras “de cima para baixo” falha em promover a compreensão significativa, reduzindo a Álgebra à memorização de um conjunto de regras.

USg6.P5L: O professor P5L afirma que, ao atuar com futuros licenciados em Matemática, ele adota uma metodologia de caráter construtivo — não no sentido estrito da teoria educacional do construtivismo —, e incentiva os licenciandos a optar por este tipo de metodologia de ensino. Ele entende essa metodologia como um processo de baixo para cima: partir de casos particulares para conduzir à generalização de conceitos. Ele explica que, ao construir o conhecimento dessa forma, o estudante retém com mais facilidade o que foi desenvolvido, pois “já o construiu, você o tem facilmente”. Em contrapartida, o professor argumenta que, quando um conceito é apresentado dedutivamente como mera aplicação de regra, o estudante tende a esquecê-lo e não desenvolve compreensão sólida. P5L ressalta que, embora o ponto de partida seja o trabalho construtivo, o objetivo não é permanecer apenas nessa dimensão, mas avançar para a generalização e compreensão clara dos conceitos algébricos.

O que diz essa US:

* Formação de professores de Matemática;

²³⁰ O construtivismo, como outras teorias de aprendizagem, tem origem em diferentes correntes filosóficas e psicológicas do século atual, destacando-se trabalhos de Piaget, Bruner e Goodman (Ertmer e Newby, 1993). Atualmente, o construtivismo é amplamente reconhecido como a principal teoria educacional e foi incorporado em praticamente todas as iniciativas de reforma educacional promovidas nos últimos vinte anos (Karagiorgi e Symeou, 2005).

* Vantagem da construção ativa do conhecimento algébrico.

US7.P5L Pero lo más importante de todo es, tal vez [...], esas ganas que debe tener el docente de Matemáticas de que su clase tenga algo innovador todos los días, que todas las veces haya necesidad de hacer cambiecitos, ¿eh? Algo que yo creo que es una de las características fundamentales del docente es la capacidad de improvisación. Un docente debe ser capaz de planear una clase de determinada manera, pero de pronto, por las preguntas y por el tipo de estudiantes que tienen al frente, tiene que en algún momento cambiarla y tener esa capacidad para adaptarse a las a las necesidades que tiene ese grupo.

Tradução: Mas o mais importante de tudo é, [...], talvez esse desejo que um professor de Matemática deve ter de que sua aula tenha algo inovador todos os dias, que sempre tenha a necessidade de fazer pequenas mudanças, certo? Algo que acredito ser uma das características fundamentais de um professor é a capacidade de improvisar. Um professor deve ser capaz de planejar uma aula de determinada maneira, mas de repente, devido às perguntas e ao tipo de alunos que tem pela frente, ele precisa em algum momento mudar o planejado na aula e ter essa capacidade de se adaptar às necessidades daquele grupo.

Enxerto Hermenêutico: O professor P5L destaca que, no contexto da formação de professores de Matemática, um dos traços mais relevantes de quem ensina essa disciplina é o cultivo da inovação diária, o impulso constante de buscar “algo novo” a cada aula, ainda que sejam pequenas modificações. Para ele, a *improvisação* ocupa um papel central na prática docente, sendo reconhecida como uma característica fundamental do docente. Ao expandir o significado da palavra improvisação, vemos que ela faz referência à ação de criar algo, de forma espontânea, sem planejamento prévio. No contexto artístico, como teatro ou música, a improvisação envolve a criação no momento, utilizando a criatividade e a interação com o ambiente e outros participantes. No dia a dia, a improvisação pode ser uma habilidade valiosa para lidar com situações inesperadas e desafios imprevistos. Na perspectiva de P5L, o professor deve ser capaz de elaborar um planejamento para suas aulas, mas também precisa desenvolver a habilidade de improvisar, ou seja, de modificar e adaptar esse plano inicial conforme surgem perguntas, demandas ou características específicas dos alunos. Esse enfoque revela que, para ele, a aula não deve seguir um roteiro rígido, mas constituir um espaço flexível, em que o docente ajusta o conteúdo e a forma de apresentação de acordo com a dinâmica do grupo.

USg7.P5L: O professor P5L destaca que um aspecto central na atuação do docente de Matemática é o desejo constante de introduzir elementos inovadores em suas aulas, ainda que sejam pequenas mudanças no cotidiano. Para ele, uma das características fundamentais do professor é a capacidade de improvisação. Embora o planejamento seja necessário, P5L afirma

que, diante das perguntas e do perfil dos alunos, o professor deve estar preparado para modificar sua abordagem de forma espontânea, adaptando-se às necessidades específicas do grupo com o qual está trabalhando.

O que diz essa US:

- * Formação de professores de Matemática;
- * A capacidade de adaptabilidade às necessidades dos alunos é considerada uma característica fundamental do docente.

5.5. Análise Nomotética

Dando continuidade ao procedimento assumido na análise, conforme descrito na seção 4.5, passamos agora a examinar os depoimentos dos professores que exercem sua atividade docente no curso de *Licenciatura em Matemáticas*. Nesta seção, avançamos para a análise nomotética, buscando reconhecer elementos compartilhados que revelem as estruturas subjacentes às experiências vivenciadas e à forma como o fenômeno se manifesta nas falas desse grupo de professores. Nesse movimento reflexivo, articulamos e integramos os significados emergentes, recorrendo à variação imaginativa, aos insights e às evidências presentes nos depoimentos, de modo a expressar de maneira clara e consistente as conexões entre os elementos comuns identificados.

5.5.1 Primeiras reduções dos depoimentos dos professores da Licenciatura em Matemática

Com base no material examinado durante a análise ideográfica, voltamo-nos para as 74 ideias principais emergentes identificadas nas Unidade de Sentido, conforme apresentado no Tabela 8, bem como as articulações conceituais possibilitadas pela abertura de sentidos e significados ao longo dos enxertos hermenêuticos (Chaparro e Bicudo, 2024). Esse movimento de análise permitiu a constituição de Núcleos de Significado (Ns) que, em razão de sua recorrência e relevância, revelam aspectos estruturais do fenômeno investigado. No encadeamento desses núcleos, fomos conduzidos gradualmente à formulação de sínteses compreensivas mais amplas e fundamentadas, iluminadas pela pergunta de pesquisa que orienta a presente investigação.

Tabela 8 - Ideias principais de cada USg e as articulações realizadas nos enxertos hermenêuticos - PL

Prof Licen	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
P1L	USg1.P1L	* Interesse pela Álgebra	

Prof Licen	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
	USg2.P1L	* Distinção entre Álgebra básica e avançada * Concepção da Álgebra como um saber em diferentes níveis * Percepção de “distância” entre a Álgebra ensinada na escola e aquela ensinada nos níveis superiores	USg1.P1L
	USg3.P1L	* Rigor nos processos algébricos	
	USg4.P1L	* Dificuldade no ensino * Vazios de sentido conceituais	
	USg5.P1L	* Defasagem na base Matemática necessária para a graduação * Importância da clareza nos objetivos e procedimentos matemáticos na <i>Educação Básica</i>	U11.P1E, US4.P6E, US7.P6E, US11.P2E, US5.P5E
	USg6.P1L	* Importância do raciocínio na compreensão das estruturas algébricas * Álgebra como um sistema estruturado de conhecimento herdado da tradição matemática	
	USg7.P1L	* Concepção da Álgebra como eixo estruturante da Matemática	US11.P2E, US12.P2E
	USg8.P1L	* Motivação * Afetividade em relação ao ensino	
P2L	USg1.P2L	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado * Salto da Aritmética para a Álgebra	US5.P6E, US5.P1E
	USg2.P2L	* Dificuldade na aprendizagem da Álgebra universitária * Lacunas conceituais herdadas de etapas anteriores à formação universitária	
	USg3.P2L	* Lacuna entre os conhecimentos adquiridos na <i>Educação Básica e Média</i> e as exigências da <i>Educação Superior</i> * Persistente dificuldade com as demonstrações na formação dos licenciados	
	USg4.P2L	* Dificuldade no ensino de Álgebra * Dimensão intersubjetiva da prática de ensino	
	USg5.P2L	* A interpretação dá sentido às demonstrações matemáticas * Saber demonstrar	
	USg6.P2L	* A compreensão leitora possibilita interpretar e atribuir sentido a conceitos algébricos * Aponta questões concernentes ao ensino	US5.P2L
	USg7.P2L	* Concepção sobre a Álgebra básica * Temor pela Álgebra	
	USg8.P2L	* Concepção de Álgebra atravessada por diversas experiências vivenciadas * Expectativas sobre a Álgebra entre áreas	US4.P2L, US7.P2L
P3L	USg1.P3L	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado * Redução do ensino da Álgebra à prática operatória e ausência conceitual	US1.P2L, US5.P6E
	USg2.P3L	* Continuidade metodológica das práticas de ensino entre os níveis de ensino * Caracterização do ensino da Álgebra no âmbito universitário como mecanização	

Prof Licen	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
	USg3.P3L	* Ausência de compreensão significativa. * Concepção de Álgebra baseada no <i>Enfoque de Sistemas</i>	
	USg4.P3L	* A centralização excessiva dos sistemas simbólicos no ensino da Álgebra resulta ineficaz	
	USg5.P3L	* Álgebra exige construção de significados	
	USg6.P3L	* A Álgebra é uma linguagem viva que permite expressar a generalidade * Concepção de pluralidade de Álgebras	
	USg7.P3L	* A linguagem algébrica deve emergir de experiências significativa do estudante * Os símbolos matemáticos fazem sentido quando surgem das próprias descobertas dos alunos	
	USg8.P3L	* A formação matemática insuficiente dos estudantes é um problema persistente historicamente * Desafio institucional permanente para encarar as dificuldades na aprendizagem da Matemática	US6.P2L
	USg9.P3L	* Álgebra como porta ao pensamento matemático * A generalização constitui o horizonte máximo do pensamento matemático * A Álgebra representa a linguagem que permite expressar as generalizações.	US4.P1E, US8.P1E, US11.P1E, US2.P2L, US6.P3L
	USg1.P4L	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado * Desafios iniciais com a linguagem simbólica da Álgebra * Importância da mediação pedagógica	US1.P3E, US5.P6E, US1.P2L
	USg2.P4L	* Percorso disciplinar da Álgebra na <i>Educação Superior</i> * Dificuldades iniciais com a Álgebra estudada na universidade	
P4L	USg3.P4L	* Beleza e aplicabilidade da Álgebra * A Álgebra possibilita expressar e organizar sistemas conceituais desenvolvidos em diferentes campos matemáticos	US11.P2E, US3.P3E, US4.P1E, US6.P1E, US3.P6E
	USg4.P4L	* Dificuldades recorrentes dos estudantes ingressantes na <i>Educação Superior</i> * Ruptura conceitual com a Matemática escolar para estruturas abstratas	US5.P1L, US3.P2L, US8.P3L
	USg5.P4L	* Desafios e possibilidades no ensino da Álgebra * Importância das noções de variável	US9.P3L
	USg6.P4L	* O papel da Álgebra no ensino * Formação do professor de Matemática	US2.P4L, US9.P3L, US6.P3L
	USg1.P5L	* Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado * Valor formativo da experiência escolar para a formação do licenciado em Matemática	
	USg2.P5L	* Caráter mecanizado do ensino de Álgebra no contexto universitário, com ênfase na prática de demonstração formal * Valor formativo da experiência escolar para a formação do licenciado em Matemática	

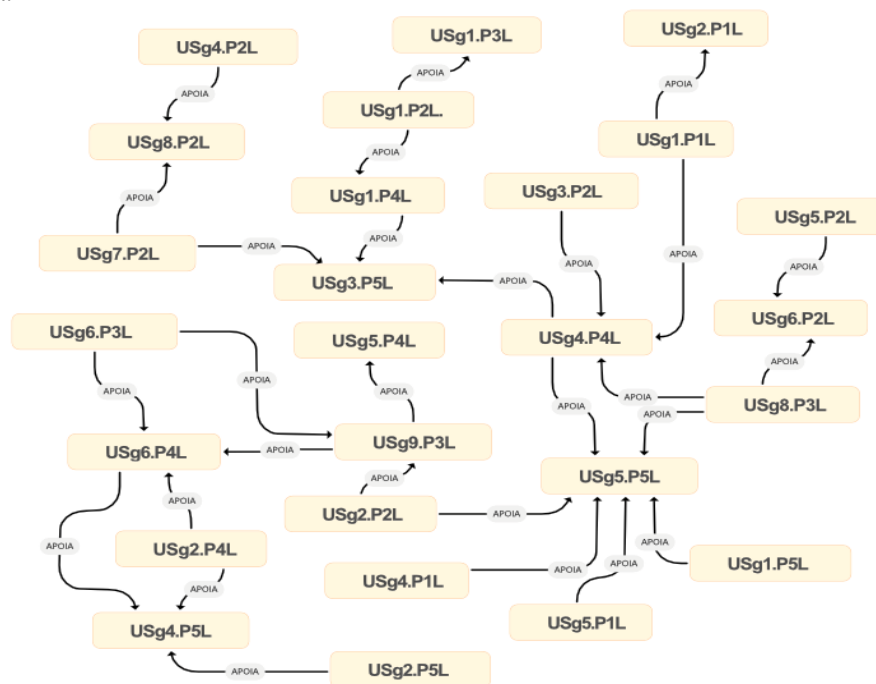
Prof Licen	USg	O que diz essa USg	Articulações de USg explicitadas no enxerto hermenêutico
	USg3.P5L	* Complexidade do conceito de variável * Concepção de Álgebra como estudo que envolve relações e operações entre variáveis	US1.P4L, US4.P4L, US7.P2L
	USg4.P5L	* Necessidade de mostrar a aplicabilidade imediata de conceitos algébricos * Perspectiva indutiva no ensino da Álgebra	US7.P2E, US8.P2E, US8.P6E, US4.P5L, US2.P5E, US6.P4L
	USg5.P5L	* Hiato na transição entre Álgebra ensinada na <i>Educação Básica e Média</i> e aquela trabalhada no nível universitário * O futuro professor precisa desenvolver clareza conceitual para adaptar os conteúdos ao ensino	US4.P1L, US5.P1L, US2.P2L, US8.P3L, US4.P4L, US1.P5L
	USg6.P5L	* Formação de professores de Matemática * Vantagem da construção ativa do conhecimento algébrico	
	USg7.P5L	* Formação de professores de Matemática. * A capacidade de adaptabilidade às necessidades dos alunos é considerada uma característica fundamental do docente	

Fonte: elaboração própria

Fonte: elaboração própria

De modo semelhante ao apresentado na seção 5.2.1, iniciamos com um exame minucioso do material produzido durante o movimento de *análise ideográfica*. Em particular, deparamo-nos com as articulações explicitadas nos enxertos hermenêuticos, buscando revelar a tessitura de significados, com vistas a identificar convergências que apontem para perfis da essência do fenômeno investigado. Na figura 25, apresentamos essas articulações, evidenciando a inter-relação entre os sentidos emergentes e a contribuição para a constituição dos *Núcleos de Significado* (Ns).

Figura 25 - Articulações de sentido das USg explicitadas nos enxertos hermenêuticos nas falas dos professores da *Licenciatura*



Fonte: elaboração própria

Após o exame inicial das articulações emergentes advindas dos enxertos hermenêuticos, foram delineados os *Núcleos de Significado* (Ns), no desdobramento de uma revisão mais exaustiva do material produzido no movimento de *Análise Ideográfica*. Dessa forma, buscamos abordar sistematicamente as 38 Unidades de Significado (USg), a fim de revelar os sentidos presentes na multiplicidade e na complexidade das expressões extraídas dos depoimentos. Esse percurso permitiu traçar um caminho interpretativo capaz de indicar invariantes do fenômeno em estudo.

No âmbito desse primeiro movimento de reduções fenomenológicas, identificamos a convergência das Unidades de Significado (USg) em 21 *Núcleos de Significado* (Ns). Na Tabela 9, apresentamos esses *Núcleos de Significado* juntamente com a ocorrência das Unidades de Significado destacadas nos depoimentos dos Professores da licenciatura em Matemática (PL).

Tabela 9 - Matriz de co-ocorrência das Unidades de Significado nas convergências dos Núcleos de Significado no movimento de análise ideográfico - PL

Código	Núcleo de significado	P1L	P2L	P3L	P4L	P5E
Ns1.PL	Experiências iniciais com Álgebra	USg1.P1L	USg1.P2L	USg1.P3L	USg1.P4L	USg1.P5L
Ns2.PL	Lembranças do livro <i>Álgebra de Baldor</i> e o modo de ser implementado		USg1.P2L	USg1.P3L	USg1.P4L	USg1.P5L - USg5.P5L
Ns3.PL	Transições difíceis: da Aritmética à linguagem algébrica e à compreensão da noção de variável		USg1.P2L - USg2.P2L -	USg1.P3L -	USg1.P4L - USg2.P4L	USg3.P5L
Ns4.PL	Abordagens e sentidos atribuídos à Álgebra	USg1.P1L - USg4.P1L - USg7.P1L	USg1.P2L - USg2.P2L - USg6.P2L - USg7.P2L	USg1.P3L - USg2.P3L - USg3.P3L - USg5.P3L - USg8.P3L - USg9.P3L -	USg1.P4L - USg2.P4L - USg3.P4L - USg4.P4L - USg5.P4L -	USg1.P5L - USg3.P5L - USg4.P5L -
Ns5.PL	Continuidade no modo de ensino da Álgebra		USg6.P2L	USg2.P3L - USg3.P3L - USg4.P3L - USg8.P3L	USg2.P4L	USg2.P5L
Ns6.PL	Álgebra como linguagem para expressar generalizações em Matemática		USg2.P2L - USg8.P2L	USg3.P3L - USg6.P3L - USg7.P3L - USg9.P3L	USg2.P4L - USg3.P4L - USg6.P4L	USg6.P5L
Ns7.PL	Distinção entre Álgebra básica (escolar) e avançada (universitária)	USg2.P1L	USg3.P2L - USg7.P2L - USg8.P2L	USg2.P3L - USg6.P3L		USg5.P5L

Código	Núcleo de significado	P1L	P2L	P3L	P4L	P5E
Ns8.PL	Álgebra como estudo das estruturas	USg3.P1L - USg6.P1L - USg7.P1L	USg3.P2L - USg8.P2L	USg2.P3L - USg7.P3L	USg4.P4L	USg2.P5L - USg3.P5L
Ns9.PL	A generalização como horizonte do pensamento matemático	USg6.P1L	USg2.P2L	USg3.P3L - USg5.P3L - USg6.P3L - USg9.P3L -	USg3.P4L - USg6.P4L	USg4.P5L - USg5.P5L
Ns10.PL	Conexão da Álgebra com o cotidiano e aplicabilidade		USg8.P2L	USg7.P3L	USg3.P4L - USg5.P4L	USg4.P5L
Ns11.PL	Defasagens de base: alunos chegam sem domínio de conteúdos básicos	USg4.P1L - USg5.P1L	USg2.P2L - USg3.P2L -	USg3.P3L - USg8.P4L -	USg4.P4L	USg5.P5L
Ns12.PL	Hiato escola–universidade e choque de expectativas (demonstrações e abstração como obstáculos persistentes)	USg2.P1L - USg4.P1L	USg2.P2L - USg3.P2L - USg8.P2L	USg2.P3L	USg2.P4L - USg4.P4L	USg5.P5L
Ns13.PL	Afetividade, motivação e frustração docente	USg1.P1L - USg7.P1L - USg8.P1L	USg4.P2L - USg7.P2L	USg3.P3L - USg4.P3L - USg8.P3L - USg9.P3L	USg1.P4L - USg3.P4L - USg5.P4L	USg4.P5L - USg7.P5L
Ns14.PL	Temor e percepção negativa da Álgebra pelos alunos		USg1.P2L - USg7.P2L	USg9.P3L	USg1.P4L - USg5.P4L	
Ns15.PL	Centralidade do simbólico e mecanização versus construção de significados		USg1.P2L - USg3.P2L - USg6.P2L	USg3.P3L - USg4.P3L - USg7.P3L	USg4.P4L - USg6.P4L -	USg5.P5L -
Ns16.PL	Investigação (exploração), indução e construção ativa do conhecimento		USg6.P2L	USg3.P3L - USg5.P3L - USg7.P3L -	USg5.P4L -	USg4.P5L - USg6.P5L -

Código	Núcleo de significado	P1L	P2L	P3L	P4L	P5E
Ns17.PL	Mediação pedagógica, contextualização e exemplos do cotidiano	USg8.P1L	USg4.P2L - USg7.P2L	USg3.P3L - USg5.P3L - USg7.P3L -	USg5.P4L - USg6.P4L	USg5.P5L - USg7.P5L
Ns18.PL	Expectativas formativas: domínio e clareza conceitual para adaptar conteúdos ao contexto escolar	USg4.P1L - USg7.P1L	USg4.P2L - USg6.P2L	USg8.P3L	USg6.P4L	USg1.P5L - USg5.P5L
Ns19.PL	O desenvolvimento da capacidade de adaptação, inovação e um espírito de serviço como competências fundamentais do futuro professor.			USg5.P3L - USg8.P3L - USg9.P3L		USg7.P5L
Ns20.PL	Autonomia didática e crítica à tradição			USg5.P3L - USg7.P3L	USg6.P4L	USg7.P5L
Ns21.PL	Compreensão leitora como base para aprender		USg5.P2L - USg6.P2L	USg3.P3L - USg8.P3L		

Fonte: elaboração própria.

5.5.2 A caminho dos núcleos de ideias -NI- mais abrangentes

O movimento de pensar atento e reflexivo, sempre orientado pela nossa pergunta de pesquisa, levou-nos a identificar núcleos de sentidos e significados mais amplos — denominados por nós como *Núcleos de Ideias* (NI) —, capazes de esclarecer modos de compreender as concepções de Álgebra e seu ensino e de evidenciar a complementaridade entre esses aspectos. Nesse contexto, durante a segunda redução fenomenológica, realizamos a articulação de quatro *Núcleos de Ideias*, os quais foram derivados dos 21 *Núcleos de Significado* inicialmente constituídos à luz dos discursos presentes nos depoimentos dos professores do curso de *Licenciatura em Matemáticas*.

Tabela 10 - Núcleos de Ideias obtidas como resultado das segundas reduções fenomenológicas - PL

Código	Núcleo de ideias	Núcleos de significado associados as NI	Nº de USg que a constituem
NI1.PL	Experiências vivenciadas com a aprendizagem da Álgebra na formação do professor de Matemática	Ns1.PL - Ns2.PL - Ns3.PL - Ns4.PL - Ns5.PL	44
NI2.PL	Concepções sobre a Álgebra	Ns6.PL - Ns7.PL - Ns8.PL - Ns9.PL - Ns10.PL	42
NI3.PL	Concepções sobre o modo de ensinar Álgebra	Ns15.PL - Ns16.PL - Ns17.PL - Ns18.PL - Ns19.PL - Ns20.PL - Ns21.PL	51
NI4.PL	Tensões e desafios pedagógicos no ensino da Álgebra	Ns11.PL - Ns12.PL - Ns13.PL - Ns14.PL	36

Fonte: elaboração própria.

A seguir, voltamos para a tarefa hermenêutica de desvelar os significados implícitos presentes nos discursos dos depoentes. Inicialmente, identificamos em cada *NI* os elementos centrais que, em nossa visão, carregam sentidos e significados relevantes, de modo a possibilitar a compreensão e a síntese de cada conjunto de ideias. Em seguida, a análise hermenêutica busca não apenas revelar as camadas de sentido ocultas nos discursos, mas também estabelecer um diálogo entre diferentes perspectivas, favorecendo uma leitura mais ampla, densa e profunda do material, de modo a potencializar a complexidade e a profundidade da interpretação. Nesse contexto, o movimento hermenêutico se enriquece ao expor a rede de articulações de sentidos e significados, revelando como os diversos *NI* se entrelaçam e se complementam.

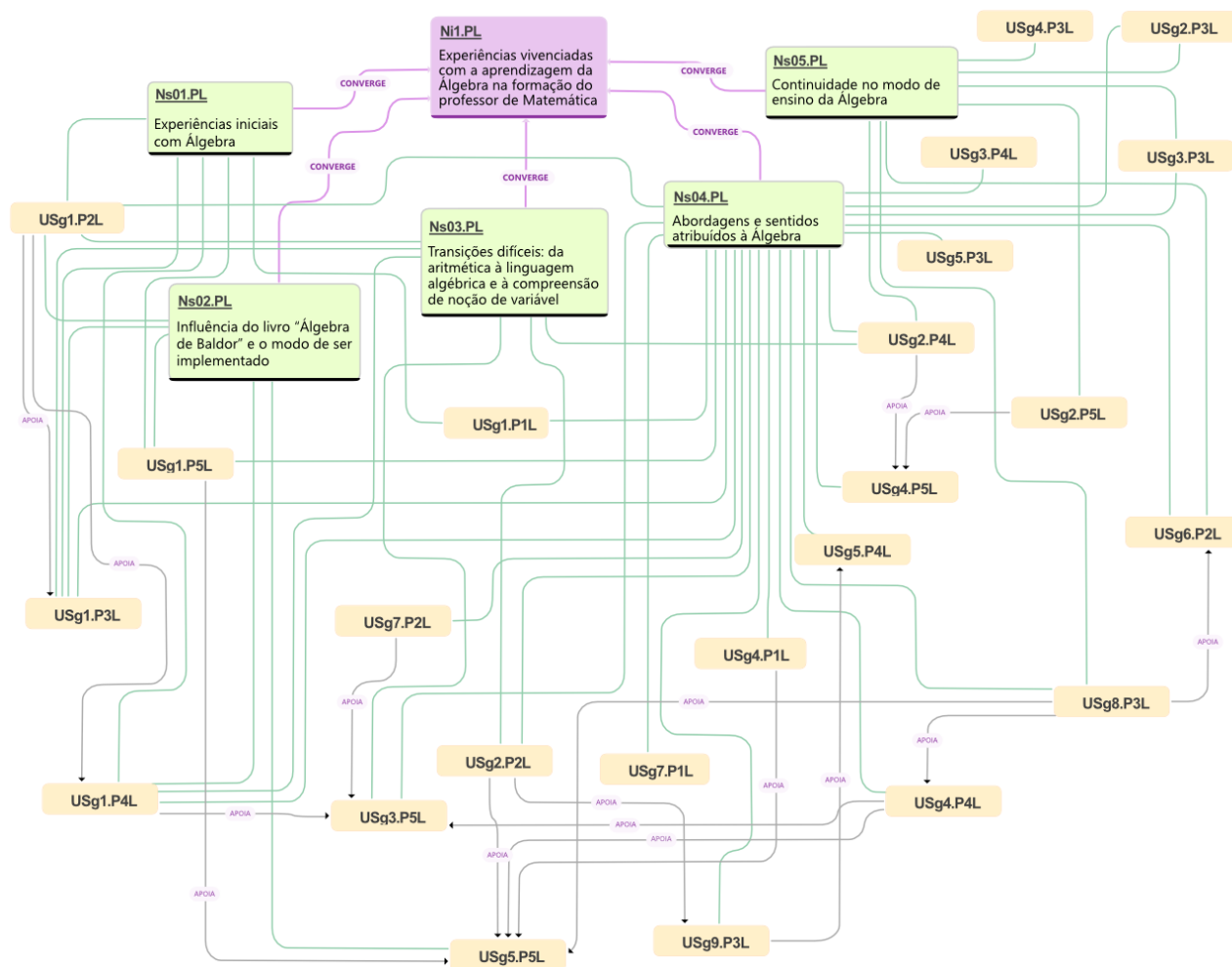
5.5.3 Interpretação das convergências nomotéticas

A construção de nossas interpretações foi orientada por um pensar que combina movimento dialético e dialógico, articulando de forma dinâmica três dimensões: a questão norteadora da pesquisa, a compreensão teórica entendida nos autores estudados e os depoimentos dos docentes entrevistados. Essa interação contínua permitiu a ampliação progressiva do nosso horizonte de compreensão, favorecendo leituras mais integradas e aprofundadas do fenômeno investigado.

NI1.PL — Experiências vivenciadas com a aprendizagem da Álgebra na formação do professor de Matemática.

O núcleo temático NI1.PL focaliza os relatos das vivências dos professores de licenciatura em Matemática no âmbito do ensino e da aprendizagem da Álgebra, englobando tanto o período em que atuaram como alunos quanto sua experiência na prática docente. Esse núcleo evidencia de que forma experiências iniciais, recursos didáticos e trajetórias de ensino se entrelaçam na constituição das concepções de Álgebra e na formação da identidade docente. A Figura 26 ilustra a rede de articulação dos Núcleos de Significado que compõem NI1.PL.

Figura 26 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI1.PL



Fonte: elaboração própria.

A análise dos depoimentos dos professores sobre suas primeiras experiências com a Álgebra (Ns1.PL) revela vivências marcadas por estranhamento, dificuldades conceituais e o uso de metodologias que eles classificam como “tradicionais”. Os relatos evidenciam que o aprendizado dessa disciplina representou uma ruptura significativa em relação à abordagem usual da Matemática nos anos anteriores ao oitavo ano, focada predominantemente no tratamento de quantidades numéricas concretas. Alguns descrevem esse início como algo inesperado e assustador — ou, nas palavras da professora P4L, como estar diante de um “monstro de sete cabeças”.

Os relatos dos professores também revelam que a ruptura conceitual vivenciada no oitavo ano — especialmente no contato inicial com a Álgebra — não se configura como um episódio isolado, mas como parte de uma continuidade estrutural presente nos currículos escolares colombianos. Conforme apontamos na seção 3.1 da presente tese, essa organização

curricular tem se mantido praticamente inalterada desde as reformas educacionais da década de 1960. Essa permanência histórica contribui para a cristalização de uma transição abrupta entre o ensino da Aritmética, centrado em operações com números concretos, e o âmbito abstrato da linguagem algébrica, sem que haja uma preparação gradual ou contextualizada. Os professores indicam que essa estrutura curricular reforça a sensação de ruptura e dificulta a construção de significados mais profundos.

Os professores recordam essa transição como um momento desafiador, permeado por incompreensão e estranhamento diante da linguagem simbólica da Álgebra (Ns3.PL). A transição abrupta da Aritmética para a Álgebra vivenciada pelos professores é descrita como um “salto” conceitual que lhes gerou confusão e resistência. Como expressa a professora P2L: “a gente não entendia o que eram todos aqueles símbolos e eles pareciam horríveis para a gente” (US1.P2L). No contexto dessa transição, os professores destacam a noção de variável como uma das mais confusas e difíceis de compreender, conforme examinado nas unidades US1.P4L e US4.P4L, US3.P5L.

A variável, considerada um dos fundamentos centrais da Álgebra, destaca-se por sua versatilidade e múltiplas possibilidades de interpretação e aplicação (Booth, 1995). Apesar de sua importância conceitual, essa complexidade pode tornar sua compreensão especialmente desafiadora na transição da Aritmética para Álgebra, devido à natureza abstrata e multifacetada do conceito de variável (Booth, 1995; Usiskin, 1995; Mason *et al.*, 2005; Arcavi *et al.*, 2017). No depoimento da professora P4L, essa dificuldade é evidenciada: “A ideia de uma variável era a mais confusa. Por que uma letra representaria um número? Como poderia ter vários valores? Era muito confuso” (US1.P4L).

Conforme analisado no enxerto hermenêutico da USg3.P5L, uma das características centrais da natureza simbólica da variável é sua versatilidade, que permite múltiplas camadas de abstração e possibilita uma economia simbólica capaz de condensar ideias complexas em expressões sintéticas (Drouhard e Teppo, 2004). Contudo, esse mesmo potencial simbólico da Álgebra pode gerar obstáculos à compreensão, especialmente quando os símbolos são confundidos com os objetos matemáticos que representam (Freudenthal, 1977). Tal confusão pode levar, por exemplo, à interpretação da variável como um número fixo, em vez de reconhecê-la como um elemento abstrato da linguagem algébrica. No contexto específico da Matemática, o símbolo apresenta-se “revestido de ambigüidades, solicitando resoluções, ou seja, solicitando preenchimento dos vazios sentidos pelo humano” (Bicudo, 1994b, p.5), de modo que, conforme entendemos, a compreensão matemática não se dá apenas pela decodificação, mas também pela busca de compreensão do sentido.

Outro ponto de tensão relatado pelos professores se refere às experiências iniciais com a Álgebra durante a graduação. Expressões como “entrar em domínios um pouco mais escorregadios” (USg2.P3L), a sensação de estar “aprendendo um novo idioma” (US2.P4L) ou ainda a afirmação de que “na universidade, todos os cursos de Álgebra são difíceis de entender” (US2.P2L) revelam a vivência de uma ruptura significativa entre a matemática escolar e as exigências da *Educação Superior*. Nesse novo contexto, sobressai uma perspectiva conceitualmente rigorosa, centrada na compreensão estrutural dos conteúdos, exigindo dos estudantes uma adaptação à natureza simbólica e formal dos conceitos algébricos. Os depoimentos dos professores evidenciam que a aprendizagem da Álgebra na universidade foi marcada por uma abordagem formal, com forte ênfase na realização de demonstrações. Em particular, o professor P3L relata que o trabalho acadêmico com a Álgebra consistia em analisar conjuntos e operações, verificando o cumprimento de determinadas propriedades. No entanto, segundo ele, essa abordagem não favoreceu a consolidação dos conceitos fundamentais, como os de *grupo ou anel*, revelando uma lacuna na sedimentação das ideias essenciais da Álgebra abstrata.

Frente ao descrito anteriormente, sobre a experiência vivenciada com a aprendizagem da Álgebra na graduação, o professor P3L expressa uma conclusão que parece contundente: “não há entendimento. É simplesmente uma mecanização” (US2.P3L). Tal afirmação aponta para uma experiência de aprendizagem em que o conhecimento matemático é reduzido à aplicação de regras, frequentemente desprovidas de sentido, sem a necessária compreensão conceitual. A mecanização mencionada revela um processo de ensino centrado na execução de procedimentos formais, em detrimento da análise e da construção significativa dos conceitos envolvidos. Por outro lado, o professor P5L, embora reconheça que as práticas de ensino vivenciadas na graduação foram “mecanizadas”, não as desqualifica. Ao contrário, considera que essa formação foi importante e significativa, destacando que ela influenciou em sua trajetória profissional e contribuiu para sua atuação como docente de Matemática (US2.P5L). Os depoimentos indicam que, no âmbito universitário, os cursos de Álgebra foram marcados por uma elevada dificuldade de compreensão, evidenciando o impacto dessa transição no processo formativo dos futuros professores.

As experiências relatadas pelos professores entrevistados revelam um conjunto de abordagens e significados atribuídos à Álgebra (Ns4.PL). Os depoimentos indicam que uma abordagem tradicional e mecanicista tem permeado as trajetórias de aprendizagem dessa disciplina, desde a *Educação Básica* até a formação universitária no curso de *Licenciatura em Matemáticas*. Nessa perspectiva, a manipulação simbólica aparece dissociada da compreensão

conceitual. Essa desconexão é evidenciada na fala do professor P3L, que afirma: “sim, a experiência tem sido estéril na *Educação Básica Secundária e Média*, estéril na universidade” (US3.P3L). A noção de “esterilidade” aqui está associada à ausência de sentido e compreensão, sugerindo um ensino centrado na repetição de procedimentos algébricos, sem articulação com os significados subjacentes. Tal cenário aponta para uma continuidade e sedimentação no modo de ensinar Álgebra, pautado majoritariamente por práticas mecânicas e descontextualizadas.

Entretanto, alguns relatos dos depoentes evidenciam a centralidade do rol do professor e da mediação pedagógica no processo de aprendizagem da Álgebra. Essa mediação foi decisiva para que alguns professores, enquanto alunos, superassem o estranhamento inicial e estabelecessem um vínculo mais significativo com a disciplina. A professora P4L, por exemplo, relata que, apesar das dificuldades enfrentadas no início, “graças ao uso de exemplos oriundos do cotidiano, o docente conseguiu tornar os conteúdos mais acessíveis e significativos”, o que lhe permitiu desenvolver um sentimento de encanto pela Álgebra, levando-a a valorizar a beleza da Álgebra pela sua capacidade de integrar múltiplos contextos, promover generalizações e resolver problemas, realçando seu caráter estético aliado à utilidade prática.

NI2.PL — Concepções sobre a Álgebra.

O núcleo de ideias NI2.PL expõe as concepções que o grupo de professores atuantes no curso de Licenciatura de Matemática têm sobre a Álgebra, revelando uma diversidade de significados atribuídos à disciplina, organizados de forma contextual e progressiva. As experiências vivenciadas pelos docentes se entrelaçam com mudanças que, ao longo do tempo, consolidaram-se contribuindo para a configuração das concepções atuais. Essa articulação de sentidos delineia traços estruturantes das concepções dos professores e oferece subsídios relevantes para reflexões sobre a formação inicial de professores de Matemática. A Figura 27 ilustra a rede de articulação dos Núcleos de Significado que compõem o NI2.PL.

A relevância da generalização no âmbito do ensino da Matemática é reforçada por Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005, p. 310, tradução nossa), ao afirmarem que “[...] uma aula sem uma oportunidade para os alunos generalizarem não pode ser considerada uma aula de matemática”. Essa afirmação sublinha a ideia de que a generalização não é apenas uma habilidade desejável, mas uma condição necessária para que o ensino de Matemática cumpra seu papel formativo. A perspectiva desses autores converge com a concepção de Álgebra explicitada nos relatos de P3L que considera que a verdadeira prática matemática só se realiza quando os estudantes têm a oportunidade de expressar e explorar essa generalidade.

Nesse contexto, a professora P4L acrescenta uma perspectiva complementar, ao destacar que a Álgebra constitui uma ferramenta necessária para a generalização e a resolução de problemas, especialmente na construção de modelos matemáticos. Para Mason, Burton e Stacy (1989), a generalização é o ato de tentar compreender o sentido subjacente a um modelo, destacando certos aspectos que são comuns entre diferentes casos particulares e ignorando outros. Ao ser formulada a generalização em uma linguagem apropriada, ela se torna uma conjectura que deve ser examinada para verificar se é confirmada ou não. A professora P4L utiliza o recurso da metáfora da capacidade de ver a “floresta” em vez de apenas a “árvore”, para ilustrar sua concepção da passagem do particular ao geral. Esse movimento de particularização e generalização constitui o fundamento do pensamento matemático.

Um traço distintivo da linguagem algébrica, conforme apontado por Drouhard e Teppo (2004), é sua capacidade de permitir a transição fluida entre diferentes camadas de abstração, condensando ideias matemáticas complexas em eficientes sequências simbólicas sucintas. Nesse sentido, compreendemos que a fala da professora P4L revela uma concepção de Álgebra que ultrapassa o tratamento fragmentado de casos particulares ou a redução da disciplina a um conjunto de técnicas operatórias isoladas, comumente presente na prática mecânica de exercícios. Essa perspectiva valoriza uma compreensão mais ampla, tanto da linguagem simbólica quanto dos conceitos subjacentes, reconhecendo a Álgebra como um instrumento necessário para a construção de significados e para o desenvolvimento do pensamento matemático.

A linguagem algébrica, ao permitir a representação simbólica de relações matemáticas, possibilita expressar generalizações (Ns6.PL). Os professores destacam que, ao captar regularidades em casos particulares, os símbolos algébricos — variáveis, incógnitas, operadores — tornam-se ferramentas poderosas de comunicação, permitindo o salto do específico ao geral, capaz de dar voz às regularidades matemáticas. Conforme manifestado pelo professor P3L, “a Álgebra é uma linguagem viva” que não apenas representa conceitos, mas cria novos objetos e

estruturas, oferecendo a possibilidade de “expressar a generalidade” (US6.P3L). Assim, a Álgebra se apresenta justamente como a linguagem capaz de formalizar e expressar essa generalização.

Essa concepção manifestada pelo professor P3E desloca a Álgebra do campo da mera manipulação simbólica para o campo da expressão e da criação, revelando uma visão dinâmica do conhecimento matemático, possibilitada pela linguagem algébrica. Essa concepção da Álgebra, é matizada pelas compreensões de Masson, Graham e Johnston-Wilder (2006), que consideram que no fundo do coração da Álgebra está a expressão de generalidade e os símbolos algébricos funcionam como uma linguagem própria para comunicar essas generalizações. Assim, à medida que o estudante desenvolve maior familiaridade e domínio sobre essa forma de expressão, as representações tornam-se mais compactas e, com isso, mais fáceis de serem manipuladas e aplicadas em diferentes contextos. Ao longo dos depoimentos, emerge a noção de que essa linguagem algébrica precisa ser gestada em um diálogo constante entre o concreto e o simbólico.

A Álgebra como estudo das estruturas (Ns8.PL) — entendidas como sistemas organizados de objetos e operações que revelam propriedades universais, independentes da natureza concreta dos elementos envolvidos — constitui uma perspectiva recorrente nos relatos dos professores universitários entrevistados. Segundo Bicudo e Garnica (2021), duas questões nucleares da Matemática, entendida como ciência da civilização ocidental, são o rigor e a exatidão. Ainda, esses autores manifestam que, “[a]mbos, exatidão e rigor, são expressos na linguagem que embasa a formalização das idealidades matemáticas assim constituídas e produzidas” (p.13). No âmbito da Matemática, os adjetivos “rigoroso” e “formal” costumam estar implícitos nas provas ou demonstrações. Como destacam Bicudo e Garnica (2021), “a necessidade ou não de tais adjetivações dependerá, em muito, dos aspectos focados: para uns, os matemáticos chamados ‘puros’, uma prova é, já, prova rigorosa. Para outros, o rigor estabeleceria, entre as várias provas matemáticas possíveis, aquelas herdeiras diretas da sistematização euclidiana” (Bicudo e Garnica, 2021, p.73).

Expressões como “tem-se que ser muito rigoroso em Álgebra” (US3.P1L) ou a ideia de que há apenas uma “maneira correta de fazer” (US3.P1L) as operações e provas, aparecem recorrentemente nos relatos dos professores universitários como um valor central que estrutura sua concepção de Álgebra. Essa perspectiva enfatiza o caráter normativo da disciplina, compreendida como um conjunto de procedimentos a serem dominados segundo padrões fixos, nos quais se priorizam as provas formais mais do que as respostas finais em si. Além disso, os docentes destacam os processos demonstrativos e o aprofundamento conceitual como

elementos constitutivos da Álgebra na *Educação Superior*, especialmente nos cursos de licenciatura em Matemática.

Reconhecem, ainda, que o trabalho com demonstrações matemáticas constitui um elemento fundamental na formação de seu pensamento matemático, além de desempenhar papel central na construção de sua identidade profissional e na prática docente em Matemática. Ao afirmarem que “os teoremas já foram desenvolvidos para tornar as coisas mais fáceis” (USg6.P1L) evidenciam uma concepção de Álgebra que valoriza a produção matemática acumulada como ferramenta de pensamento e resolução de problemas. Nessa perspectiva, a Álgebra é compreendida como parte de um sistema de ferramentas intelectuais herdadas da tradição matemática, que contribui para a estruturação do pensamento matemático e para a atuação pedagógica dos professores.

Os professores também destacam que o raciocínio constitui o aspecto central da disciplina, especialmente no que diz respeito à capacidade de organizar, de forma lógica e coerente, os encadeamentos argumentativos presentes nas demonstrações matemáticas. Para eles, a Álgebra é concebida como um campo de estudo que envolve relações e operações entre variáveis.

Embora não seja uma concepção predominante entre os professores entrevistados, alguns docentes apontam para a conexão entre a Álgebra e o cotidiano, destacando sua aplicabilidade prática (Ns10.PL). Segundo os relatos, a Álgebra pode ser vista como “uma ferramenta que nos permite generalizar e criar modelos” e que possibilita “descrever e resolver problemas” (US3.P4L). Usiskin (1995) reforça essa concepção ao afirmar que, na perspectiva da Álgebra como procedimentos para resolver certos tipos de problemas, as variáveis são consideradas como ou incógnitas ou como constantes. “Enquanto as instruções-chave no uso de uma variável como generalizadora de modelos são traduzir e generalizar, neste caso as instruções-chave são *simplificar e resolver*” (p. 15, grifos do autor).

Conforme relatos dos professores, a beleza da Álgebra reside justamente na capacidade de dialogar com diferentes áreas do conhecimento e de se manifestar em situações concretas do cotidiano. Essa característica torna a disciplina altamente aplicável, conectando-se diretamente com desafios reais enfrentados em campos como engenharia, economia, ciências da computação e educação.

Uma das perspectivas mais recorrentes nos relatos dos professores entrevistados aponta para uma distinção nítida entre a Álgebra básica, ensinada na educação escolar, e a Álgebra avançada, abordada na *Educação Superior* (Ns7.PL). Para esses docentes, a Álgebra escolar configura-se como uma “Álgebra básica”, centrada na manipulação de equações lineares,

operações com frações e no estudo dos diferentes conjuntos numéricos — naturais, inteiros, racionais e reais. Em contraposição, os professores vislumbram uma “Álgebra avançada” associada ao contexto universitário, caracterizada por domínios mais abstratos e estruturais, como a Teoria de Grupos, a Álgebra Linear, entre outros. Nesse nível, a ênfase desloca-se para o trabalho com demonstrações formais, exigindo do estudante não apenas domínio técnico, mas também capacidade argumentativa e compreensão conceitual aprofundada.

No relato da professora PIL, essa separação entre os níveis de Álgebra é claramente evidenciada: “são duas coisas, uma é a Álgebra básica e a outra é a Álgebra já avançada que se trabalha na universidade, graduação, pós-graduação, o que é um pouco distante”. Sua fala revela uma percepção de *ruptura* entre esses estágios de ensino, como se cada “ilha algébrica” ocupasse uma região autônoma e desconectada das demais. Essa dicotomia, embora funcional para a organização curricular das instituições escolares, reflete um olhar pragmático e utilitário — centrado em conteúdos e usos, mas pouco comprometido com a construção crítica do conhecimento matemático. Ao tratar os níveis como compartimentos estanques, corre-se o risco de obscurecer as conexões epistemológicas e pedagógicas que poderiam favorecer uma transição mais fluida entre os diferentes níveis educacionais.

NI3.PL — Concepções sobre o modo de ensinar Álgebra.

Nos depoimentos dos professores universitários entrevistados, evidencia-se uma recorrente ênfase em falar sobre suas concepções acerca do ensino de Álgebra. Tais concepções parecem estar, em grande medida, relacionadas às experiências vividas com a disciplina, tanto na condição de estudantes quanto no exercício da prática docente. Essa relação pessoal e profissional com a Álgebra contribui para moldar suas abordagens pedagógicas, revelando tensões entre a reprodução mecânica de procedimentos matemáticos e a valorização da construção de significados. Na Figura 28, aparecem representados os núcleos de sentido que constituem a NI3.PL.

Apesar disso, o professor P5L defende que os estudantes devem “ser capazes de desenvolver exercícios onde tenham que ser feitas transformações” (US2.P5E), indicando que, em sua perspectiva, a prática sistemática de exercícios desempenha um papel positivo na formação dos alunos. Em contraponto, Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005, p. 310, tradução nossa) alertam que “a prática rotineira em exercícios só é valiosa se a atenção for desviada dos aspectos técnicos da manipulação e utilizada para orientar o progresso em direção a algum outro objetivo, talvez uma conjectura sendo explorada”²³¹. Isso indica que a prática sistemática de exercícios só adquire valor pedagógico quando está orientada para a construção de significados e para o desenvolvimento da capacidade de analisar as estruturas matemáticas subjacentes. Trata-se, portanto, de uma concepção que transcende a mera execução mecânica, promovendo uma aprendizagem mais reflexiva e conceitualmente rica que favorece a exploração e a abstração.

Nas falas dos professores, ensinar Álgebra vai além de tornar os alunos hábeis em cálculos ou aplicação de fórmulas. Implica compreender o sentido da atividade matemática que está sendo trabalhada, saber o que se está fazendo e desenvolver a capacidade de pensar e resolver problemas. Para eles, ensinar Álgebra é promover a compreensão dos elementos simbólicos que envolve essa disciplina, permitindo aos estudantes ver a “floresta” em vez de apenas a “árvore” (USg4.P4L), ou seja, compreender o todo, abstrair generalizações e avançar para uma visão ampliada da Álgebra como linguagem capaz de expressar estruturas.

Essa perspectiva dialoga com o olhar fenomenológico, conforme descrito por Bicudo e Paulo (2025), que compreendem os conceitos como construções derivadas da identificação de características comuns entre diferentes elementos observados. Segundo as autoras, “[e]sse ato de destacar e reunir características vistas, da perspectiva do sujeito que busca conhecer intencionalmente algo, olhando-o atentamente, é o que chamamos de abstração. O algo pode ser uma situação, pode ser uma afirmação matemática como $A=A$; pode ser uma narrativa que expõe um acontecimento, etc. As características abstraídas originam uma compreensão sobre o conjunto mais amplo de dados sob estudo passível de ser expressa em uma linguagem” (p.7, grifos das autoras). Essa perspectiva reforça a ideia de que ensinar Álgebra não se limita à manipulação simbólica, mas envolve favorecer nos estudantes a capacidade de abstrair, generalizar e atribuir sentido às estruturas matemáticas, ampliando sua visão para além dos casos particulares e promovendo uma compreensão mais profunda e significativa da linguagem algébrica.

²³¹ Routine practice on exercises is only of value if attention is attracted away from the technical aspects of manipulation, and used to direct progress towards some other goal, perhaps a conjecture being explored.

No depoimento, o professor P3L retoma a análise de Carlos Eduardo Vasco Uribe ao destacar que uma prática recorrente entre docentes da *Educação Básica, Média e Superior* consiste na centralização dos *Sistemas Simbólicos* como eixo metodológico predominante no ensino da Álgebra. Para P3E, essa abordagem se revela didaticamente ineficaz, resultando o processo de ensino da Álgebra, em muitos casos, num completo fracasso (US3.P3L). No próprio contexto universitário, mesmo diante de conteúdos mais complexos — como grupos e anéis —, a prática docente permanece centrada na verificação de propriedades e na execução de procedimentos formais, tornando-se uma continuidade do modelo mecanicista herdado da *Educação Básica Secundaria e Média*.

A concepção dos professores enfatiza a dialética entre o concreto e o simbólico: antes de introduzir formalmente a notação algébrica, eles defendem iniciar com sistemas numéricos ou situações do cotidiano, garantindo que a emergência da variável e da generalização brote de vivências significativas dos estudantes. Só então, procede-se à simbolização, assegurando que cada letra ou expressão carregue uma intencionalidade de ensino e não seja apenas um código a memorizar.

A leitura, entendida não apenas como decodificação de símbolos, mas como um processo interpretativo profundo, emerge nos relatos dos professores como um elemento central para a aprendizagem significativa da Álgebra (Ns21.PL). A compreensão leitora, nas concepções dos professores entrevistados, não é um acessório do ensino de Álgebra, mas seu cerne. Ela permite que o conteúdo seja interpretado, ressignificado e compartilhado. Ensinar Álgebra, portanto, é também ensinar a ler símbolos, estruturas, hipóteses e demonstrações como textos vivos que exigem mediação. A leitura, nesse sentido, é o que abre as janelas da compreensão e transforma o ensino em experiência vivida.

A professora P2L, por exemplo, destaca que o ensino de demonstrações algébricas é atravessado por múltiplas dificuldades: compreender, comunicar e fazer-se compreender. Também, reforça que ensinar Álgebra é mais do que aplicar regras: é tornar os objetos compreensíveis em sua forma simbólica, o que exige leitura e interpretação. Esse relato revela que o ato de ensinar é intersubjetivo, marcado por esforço ético e afetivo e que a demonstração matemática pode ser vista como um texto a ser lido e interpretado, numa tentativa de fusão de horizontes de sentido entre professor e aluno.

Essa dimensão interpretativa é aprofundada por Bicudo (1994b, p.3), ao afirmar que “[à] medida que o professor se põe com o aluno, em uma atitude de diálogo, procurando penetrar no texto de Matemática e inicia a busca de possíveis compreensões do que está dito, dando atenção aos sentidos que surgem e não só os referentes aos signos e significados matemáticos,

aqueles vazios vão sendo preenchidos”. A leitura, nesse contexto, torna-se um ato compartilhado na busca de sentido, ou seja, pelo que está sendo dito no texto, que ultrapassa a técnica e se inscreve na experiência vivida entre sujeitos. Nessa mesma direção, o professor P3L reforça que a Álgebra deve ser compreendida como linguagem e como ato de pensamento, sendo a leitura e a construção de significados o ponto de partida para a compreensão. Ele também aponta que a ausência de pensamento crítico e de competência leitora constitui um obstáculo persistente na formação matemática dos estudantes.

Nos relatos dos professores entrevistados, evidencia-se que o ensino da Álgebra é compreendido como um campo propício para a exploração e a construção ativa do conhecimento (Ns16.PL). O ensino dessa disciplina, quando orientado por práticas exploratórias na sala de aula, permite que os alunos se tornem protagonistas na aprendizagem, atribuindo sentido aos símbolos e às estruturas algébricas. Nesse contexto, ensinar Álgebra é criar condições para que o aluno descubra, intérprete, construa e não apenas repita.

A Álgebra, nesse horizonte, deixa de ser um conjunto de regras a memorizar e passa a ser entendida como uma linguagem viva, que nasce da experiência concreta e da exploração ativa dos estudantes. Nesse sentido, o professor P3E afirma que “a Álgebra não se explica”, denunciando a limitação das práticas de ensino centradas na exposição de regras e na memorização de símbolos sem significado. Em contraposição, defende a criação de espaços em sala de aula que favoreçam a descoberta de regularidades, a formulação de hipóteses e a construção de significados. Como afirma Heidegger (2006, p. 183), “compreender é ser capaz de algo; o ser do ente compreendido é um poder-ser”. Compreender, portanto, é mais do que captar diretamente um conteúdo, é experienciar possibilidades. A professora P4L também contribui com essa visão ao afirmar que a Álgebra, embora desafiadora, oferece oportunidades para conectar os conteúdos a situações da vida cotidiana.

O professor P3L aponta para uma preocupação com a temporalidade e a intencionalidade no ensino da Álgebra, entendida esta disciplina como *linguagem viva*. Ele manifesta que “na geração de uma linguagem, o fundamental é saber quando uma linguagem é introduzida” (US7.P3L). A fala do professor revela uma crítica à prática comum de nomear e memorizar símbolos e regras sintáticas antes de compreender seu significado, introduzindo uma linguagem simbólica descontextualizada, o que acaba por dificultar a construção de significados por parte dos estudantes. Segundo o professor, para dar conta dessa crítica é possível realizar uma abordagem de ensino em que a linguagem algébrica emerge de uma exploração e uso da linguagem comum para expressar o pensamento matemático inicial. No depoimento ele diz,

“[...] eu acho que primeiro tem que haver a oportunidade para isso, para experimentar, para investigar, [...] usar a linguagem comum para expressar aquele pensamento matemático incipiente ou inicial [...]. E o aluno pode dizê-lo em espanhol, pode descrevê-lo em espanhol, mas ele percebe que, se finalmente puder recorrer a uma linguagem muito mais operacional, mais ágil, para poder manipulá-la, então surge a incógnita, a variável, a letra que representa um objeto, o símbolo que representa uma operação, o símbolo que representa uma operação que antes tinha que ser expressa na linguagem comum” (US7.P3L).

Conforme entende o depoente, só depois dessa exploração o estudante reconhece a necessidade e o valor da simbolização algébrica. Assim, nessa perspectiva, a simbolização é entendida como resultado de uma atividade de exploração, e não como ponto de partida.

O professor P3L manifesta que sua concepção se fundamenta na proposta de Carlos Vasco sobre o *Enfoque de Sistemas* (US3.P3L). Nesse modelo, o trabalho com a Álgebra inicia a partir de *Sistemas Concretos* que possibilitam a atribuição de significados aos objetos matemáticos. Esse processo conduz à construção progressiva de conceitos mais elaborados, situados no âmbito dos *Sistemas Conceituais*. Somente após essa etapa, o enfoque se volta para os *Sistemas Simbólicos*.

No âmbito da concepção do professor P3L, em vez de expor o aluno diretamente à manipulação de letras e fórmulas, propõe-se iniciar o ensino por meio de situações que funcionam como um “como um jogo de adivinhação primeiro, como uma oportunidade para alcançar generalizações e expressar essas generalizações” (US3.P3L). Assim, o trabalho com os *Sistemas Concretos* precipita a emergência das noções de variável e generalização de forma natural e contextualizada. Somente após essa etapa é que se introduz a simbolização formal, assegurando que cada símbolo carrega um significado construído, e não apenas uma função operatória desprovida de sentido.

Nessa mesma perspectiva, o professor P5L adota uma metodologia que ele denomina como “indutiva”, em que partindo de situações concretas trabalha para conduzir os alunos à abstração e à generalização. Trata-se de uma construção do conhecimento “de baixo para cima”, que, segundo ele, promove maior retenção e uma compreensão mais significativa dos conceitos matemáticos (US6.P5L). O professor P5L manifesta que, ao atuar com licenciandos, enfatiza a importância de uma abordagem construtiva, na qual o estudante participa ativamente da elaboração dos conceitos. Ele critica o ensino dedutivo, que trata o conhecimento como algo pronto e acabado, sem permitir que o aluno experiencie o processo de descoberta.

As concepções dos professores universitários sobre o ensino de Álgebra revelam uma preocupação com a mediação pedagógica e com a construção de significados que transcendam a mera manipulação simbólica (Ns17.PL). O ensino da Álgebra, nesse contexto, é compreendido como uma prática que exige clareza conceitual, sensibilidade didática e conexão

com a experiência vivida. A mediação não se limita à transmissão de conteúdo, mas envolve o compromisso com a compreensão, a escuta ativa e a contextualização do conhecimento matemático. Os docentes expressam o desejo de tornar a Álgebra mais acessível, significativa e afetivamente envolvente para os estudantes.

No depoimento da professora P2L, as expressões faciais dos alunos e a ausência de perguntas são interpretadas como sinais de incompreensão, revelando os desafios da mediação didática. O que reforça a ideia de que ensinar não se limita à transmissão de conteúdo, mas envolve lidar com a complexidade da comunicação. Nesse contexto, a professora P1L, ao afirmar que os alunos percebem quando o professor perde o entusiasmo, destaca o papel formativo da relação pedagógica e a centralidade de uma postura docente comprometida, que influencia diretamente o engajamento dos estudantes.

A professora P2L, por sua vez, descreve um percurso que envolve estudo, análise e interpretação das demonstrações como parte de seu compromisso com a clareza conceitual, evidenciando uma mediação que valoriza o entendimento profundo dos conteúdos. A professora P1L ao propor “trabalhar o rigor de outro ponto de vista”, articula-se com a mediação pedagógica ao deslocar o foco da normatividade formal para uma abordagem mais próxima à realidade dos alunos. Essa resignificação do rigor não implica sua negação, mas sua reconstrução à luz de experiências significativas, exigindo do professor uma postura interpretativa que lhe permita explorar formas mais acessíveis e contextualizadas de trabalhar com a Álgebra.

Além disso, P4L enfatiza a Álgebra como uma ferramenta potente para a resolução de problemas, especialmente quando seus conceitos são conectados a situações da vida cotidiana. Ao reconhecer que a disciplina é frequentemente percebida como árida, ela propõe estratégias didáticas que evidenciem suas aplicações práticas, com destaque para o campo da informática. Essa abordagem revela uma perspectiva contextualizada e dinâmica que entende o ensino da Álgebra como uma prática acessível, significativa e enraizada na experiência dos alunos. Essa concepção se articula com a afirmação de que “a Álgebra está em tudo” (US7.P2L), mesmo sem ser nomeada formalmente, revelando uma valorização da contextualização e da aplicabilidade da disciplina.

Os professores reforçam essa perspectiva ao destacar que a formação docente deve ir além do domínio técnico do conteúdo. Espera-se que o licenciando seja capaz de reinterpretar, adaptar e recriar os saberes em função dos contextos específicos de aprendizagem, sendo capaz de se “distanciar de um texto e criar sua própria proposta pedagógica” (US6.P4L). Essa postura

aponta para uma mediação flexível e situada, que reconhece a diversidade dos cenários escolares e a necessidade de práticas pedagógicas responsivas.

Os relatos dos professores revelam concepções que defendem um ensino de Álgebra pautado na autonomia didática e na superação de práticas tradicionais centradas na transmissão mecânica de conteúdo, valorizando a autonomia didática e a construção ativa de significados (Ns20.PL). As falas dos professores revelam uma crítica consistente ao formalismo excessivo e à antecipação precoce da linguagem simbólica.

Ainda, criticam a redução do ensino à mera explicação, negligenciando o papel substancial da experiência e da participação ativa dos estudantes na produção de sentido, e alerta contra a antecipação da linguagem simbólica antes da compreensão conceitual. Para eles, o erro recorrente é “reduzir a Matemática a explicar” (US5.P3L), sem abrir espaço para que os alunos descubram, elaborem e identifiquem regularidades e diferenças. Essa crítica aponta para um modelo tradicional de ensino da Álgebra, no qual o professor transmite e o aluno escuta, resultando na perda da intuição e da vivência matemática.

Os relatos indicam que, mesmo na universidade, a metodologia permanece centrada na verificação mecânica de propriedades e na execução de algoritmos, sem desenvolver uma compreensão profunda do significado conceitual (US2.P3L). Para os docentes, não se trata apenas de memorizar definições ou decorar teoremas, mas de compreender a razão de cada resultado e sua articulação em um todo coerente. Ao explicitar “para que serve o teorema” (US6. P1L), buscam mostrar que o conhecimento algébrico constitui uma armação funcional, cuja finalidade está na resolução de problemas e na explicação de regularidades matemáticas.

No contexto da formação inicial de professores, P4L ressalta que o futuro docente deve ir além do domínio do conteúdo: precisa ser capaz de reinterpretá-lo, adaptá-lo e recriá-lo conforme os contextos de aprendizagem, considerando critérios de complexidade e profundidade, além de gerenciar adequadamente o tempo dedicado a cada tema. Ao defender que o professor seja capaz de “distanciar-se de um texto e criar sua própria proposta pedagógica”, ainda, enfatiza a necessidade de uma postura crítica e autônoma, rompendo com a tradição que coloca o texto-guia como único recurso pedagógico. Nessa mesma direção, P5L argumenta que a aula não deve seguir um roteiro rígido, mas constituir um espaço flexível, no qual o docente ajuste conteúdo e forma de apresentação de acordo com a dinâmica do grupo e esteja preparado para modificar sua abordagem de forma espontânea, respondendo às perguntas e necessidades específicas dos alunos.

Nas falas dos professores, eles atribuem à Álgebra não apenas o valor de um conteúdo a ser ensinado, mas o papel de eixo estruturante da Matemática (Ns18.PL). Por estar presente

em praticamente todos os âmbitos da disciplina, da *Educação Básica* à Pós-graduação, incluindo a prática profissional docente, a Álgebra é vista como um campo cujo domínio e clareza conceitual são indispensáveis para que o futuro professor possa adaptá-la a diferentes contextos escolares. Essa perspectiva implica compreender a Álgebra como um sistema de ideias interligadas, cuja apropriação exige tanto rigor conceitual quanto sensibilidade pedagógica, de modo a favorecer a construção de significados pelos estudantes.

Para a professora P2L, a análise e a interpretação de demonstrações fazem parte de um compromisso prévio com a clareza conceitual, condição necessária antes de ensinar. O professor P5L reforça que o domínio desses procedimentos é fundamental e que a clareza é determinante, pois, em situações futuras que exijam deduções, a ausência dessa clareza pode gerar dificuldades adicionais. Essa compreensão dialoga com Bicudo e Paulo (2025, p. 8), que entendem a clareza como “um predicado, embasado em uma intuição – sensorial ou eidética – que espreita a ideia. Dizemos que uma ideia é clara e distinta, quando podemos reconhecer que uma coisa é um objeto intuído e, como ele, esse objeto, se evidencia na intuição”. Para as autoras, o pensar com e sobre os objetos do conhecimento envolve decompor e reunir aspectos presentes nas proposições, num movimento reavivado pela intuição.

O manifestado pelas autoras ecoa com o relato do professor P5L, revelando que a articulação entre experiência vivida, clareza conceitual e intuição sugerem que a formação docente se constitui em camadas. Mesmo experiências prévias aparentemente limitadas podem se tornar repertório útil, desde que o professor seja capaz de ressignificar essas vivências em sua prática futura. Essa ideia também pode ser compreendida com base na noção gadameriana de *Bildung*, entendida como formação que ultrapassa a simples aquisição de conhecimentos e implica uma abertura ao diálogo, à interpretação e à construção de sentidos próprios. Conforme Bicudo (2003, p.28) “[f]ormação designa o processo do devir, em que o contorno da imagem, que persegue o modelo, se realiza”. Ainda que, “o resultado da formação não se produz na forma de uma finalidade técnica, mas nasce do processo interno de constituição e de formação e, por isso, permanece em constante evolução e aperfeiçoamento” (Gadamer, 2011a. p.50, grifos do autor e inserções nossas).

A professora P1L acrescenta que a Matemática é, em geral, “difícil de ensinar” e que o perfil esperado do futuro professor deve incluir identidade com o campo de estudo, acompanhada de domínio e compreensão sólida dos conteúdos. Nessa mesma linha, o professor P5L afirma que, à medida que avançam nos estudos, os licenciandos devem desenvolver uma visão mais ampla e profunda dos conceitos algébricos, ampliando sua capacidade de adaptação pedagógica. Para ele, o licenciando deve apresentar um nível elevado de compreensão da

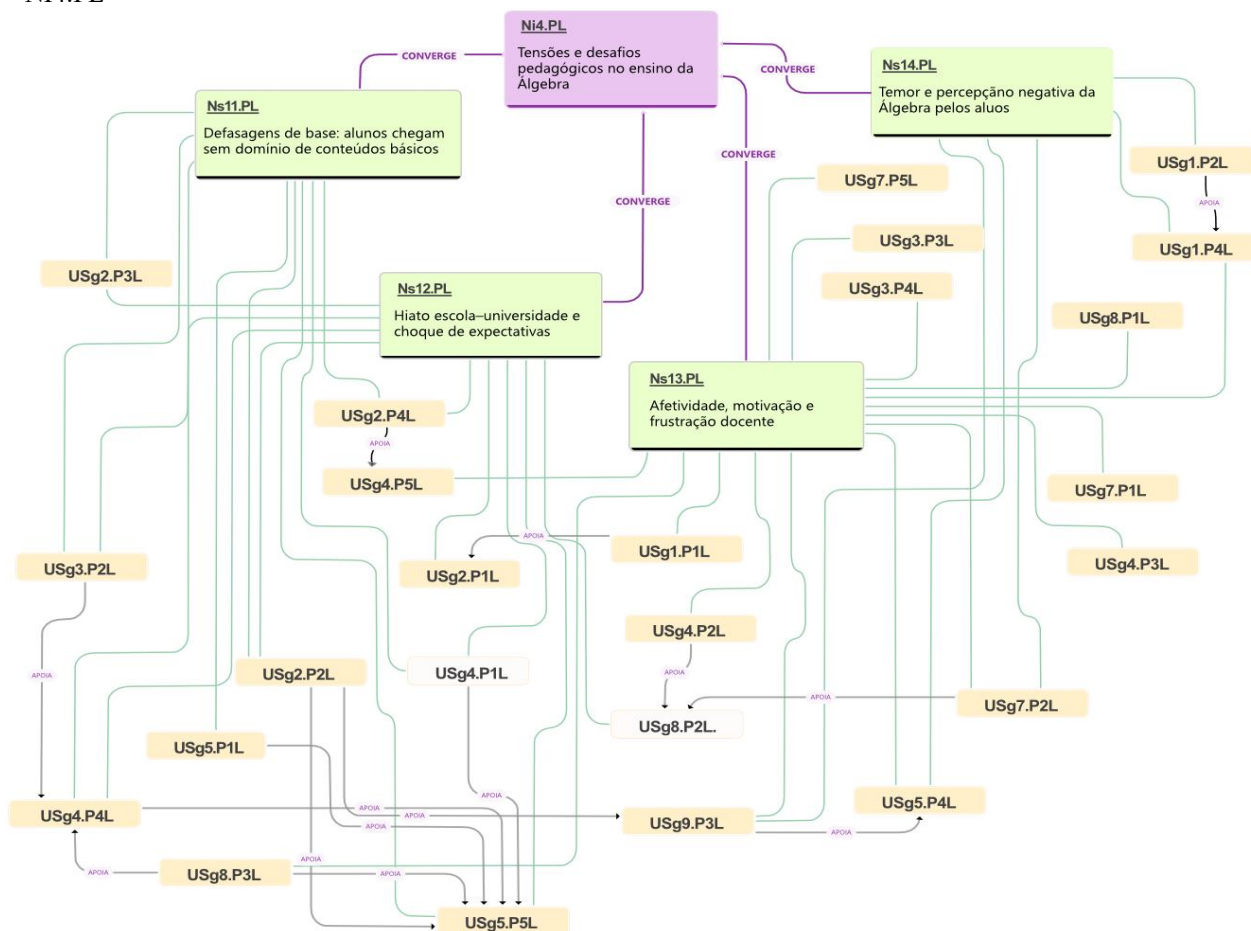
Álgebra, capaz de lhe permitir visualizar conceitos com nitidez, dominá-los e adaptá-los ao contexto de ensino. Esse processo é descrito como central para o crescimento do futuro professor, possibilitando-lhe enxergar os conteúdos “desde um horizonte diferente”. Sob a ótica gadameriana, esse avanço configura um deslocamento e uma fusão de horizontes: a abertura contínua do horizonte de sentido impulsiona tanto o crescimento intelectual quanto a capacidade de adaptação do docente. Não se trata apenas de assimilar novos conteúdos, mas de fundir o horizonte algébrico prévio ao novo horizonte de compreensão.

Nos relatos que tratam sobre as concepções do modo de ensinar Álgebra, os docentes que veem a capacidade de adaptação, a inovação constante e o espírito de serviço como competências centrais no ensino dessa disciplina (Ns19.PL). O professor P5L destaca que, no contexto da formação de professores de Matemática, um dos traços mais relevantes de quem ensina essa disciplina é o cultivo da inovação diária, o impulso constante de buscar “algo novo” a cada aula, ainda que sejam pequenas modificações no planejamento ou no modo de expor um conceito mantém as aulas dinâmicas e mais sensíveis ao ritmo e às dúvidas da turma. Já P3L aponta fragilidades no processo formativo, como a carência de pensamento crítico, as dificuldades na compreensão de leitura e, principalmente, a ausência de uma atitude pedagógica movida por um espírito de serviço. Para ele, esse espírito reflete o compromisso ético de guiar o estudante em seu desenvolvimento pessoal e acadêmico.

NI4.PL — Tensões e desafios pedagógicos no ensino da Álgebra.

O ensino da Álgebra, especialmente na formação de professores de Matemática, é marcado por tensões que envolvem frustração, desmotivação e afetividade docente. Os relatos dos professores entrevistados revelam o esforço contínuo dos professores para tornar acessível um saber concebido pelos alunos como árido e distante. A metáfora do professor que precisa “vender gravatas no deserto” ilustra esse desafio: despertar o interesse por um conteúdo por vezes indesejado, reinventando práticas e vínculos para transformar o estranhamento em sentido. Na Figura 29 aparecem representados os núcleos de sentido que constituem a NI4.PL.

Figura 29 - Representação da rede de articulação dos Núcleos de Sentido que constituem o Núcleo de Ideias NI4.PL



Fonte: elaboração própria.

No contexto do ensino de Álgebra, é recorrente, nas falas de professores universitários entrevistados, a preocupação com a defasagem conceitual e a falta de domínio dos conteúdos matemáticos que os alunos apresentam ao ingressar na graduação (Ns11.PL). Segundo esses docentes, uma das principais dificuldades observadas nos estudantes está relacionada ao domínio limitado das operações básicas e à compreensão restrita da noção de variável, como evidenciado nas unidades USg4.P4L, USg5.P1L, USg2.P2L e USg5.P5L. A esse respeito, a professora P4L enfatiza, em seu relato, que o “calcanhar de Aquiles” dos estudantes universitários é, sobretudo, a deficiência no domínio das operações básicas e a compreensão superficial da noção de variável.

De modo particular, os professores apontam que a persistência dessa fragilidade acadêmica, desde a *Educação Básica* ao *Educação Superior*, é evidenciada na dificuldade de uma compreensão significativa das operações e propriedades que envolvem o trabalho com frações, potências e radicais (USg5.P1L). Conforme compreendemos, os relatos dos professores indicam que essas dificuldades no âmbito da Aritmética parecem estar fortemente

enraizadas nos estudantes, gerando limitações na aprendizagem da Álgebra na *Educação Básica*; limitações essas que se prolongam e se manifestam ainda com mais nitidez na *Educação Superior*.

A esse respeito, ao enfatizar que as dificuldades em Álgebra decorrem, muitas vezes, de concepções inadequadas ou não consolidadas de conceitos aritméticos, Booth (1995) reforça a ideia de que a construção do conhecimento algébrico depende fortemente de uma base Aritmética sólida. Nesse sentido, o relato da professora P1L sobre o desconhecimento ou a incompreensão de conteúdos como frações e radicais adquire relevância, evidenciando que tais fragilidades não são apenas circunstanciais, parecem mostrar problemas estruturais nos processos de transição entre os diferentes níveis de ensino que afetam formação matemática.

Diante desse cenário, torna-se pertinente a reflexão proposta por Lins e Giménez (2001), ao afirmarem que é necessário investigar os significados que os estudantes constroem no entrelaçamento das conexões estabelecidas entre os diferentes âmbitos numéricos, em que propriedades e operações estão em jogo. Essa limitação, na compreensão articulada da Matemática, torna-se particularmente evidente na transição para conteúdos algébricos mais abstratos, os quais exigem uma compreensão que vai além da operação com números para a generalização. A esse respeito, a professora P4L manifesta: “por exemplo, quando a gente apresenta a eles [os estudantes] o conceito de espaço vetorial, que é um conjunto com certas propriedades, eles se perdem. Ficam procurando um ‘número’ ou algo concreto para se apegar” (US4.P4L).

As dificuldades relatadas pelos professores evidenciam que, entre os estudantes que ingressam na *Educação Superior*, persiste uma concepção da Álgebra ainda *ancorada no âmbito do trabalho numérico*. Essa abordagem, de caráter mais concreto e operatório, parece dificultar a transição para conteúdos algébricos mais avançados, os quais exigem níveis superiores de *abstração*. Nesse sentido, a professora P4L chama atenção para um ponto central no desempenho dos estudantes: “muitos alunos chegam à *Educação Superior* com uma visão muito mecânica da matemática, acostumados a receitas e fórmulas” (US4.P4L). Sua fala evidencia que essa abordagem gera uma lacuna significativa no momento em que os alunos enfrentam representações matemáticas mais abstratas e abrangentes. Ainda, sob a perspectiva da professora P1L, essa dificuldade observada na *Educação Superior* revela não apenas *lacunas conceituais*, mas também a ausência de uma *postura rigorosa* diante do conhecimento matemático. Ela afirma: “eles [os estudantes] não têm a rigurosidade [...] eu gostaria, digamos [...] que eles entendam qual é o objetivo que eles precisam atingir e qual é o procedimento apropriado para atingir esse objetivo” (US5.P1L).

Outro aspecto relatado pelos professores em relação às dificuldades enfrentadas pelos alunos ao ingressarem na graduação é a presença de uma *concepção mecanicista da matemática*, moldada por rotinas procedimentais e pelo uso intensivo de fórmulas — o que Fiorentini *et al.* (1993) denominam o “transformismo algébrico” —. Como aponta o professor P5L, “os estudantes estão chegando, digamos assim, com a ideia de que Álgebra é apenas uma exercitação, e, que a Álgebra é o que eles concebem na *Educação Básica Secundaria*, que é a *Álgebra de Baldor*”. Segundo seu relato, esse *descompasso acadêmico* decorre do fato de que muitos estudantes associam a Álgebra à prática repetitiva de operações algébricas aprendidas na *Educação Básica Secundaria*, geralmente por meio do uso quase exclusivo do livro didático *Álgebra de Baldor*, centrado na resolução de equações e na manipulação simbólica intensiva.

Entretanto, essa *concepção mecanicista da Álgebra* não se limita à *Educação Básica Secundaria* e *Média*. Conforme o depoimento do professor P3L, há uma continuidade desse enfoque mesmo diante de conteúdos mais abstratos. Ele afirma: “o significado do que é um grupo, o que é um anel, quer dizer, não há entendimento. É simplesmente uma mecanização” (US2.P3L). A *mecanização* mencionada evidencia que, mesmo no âmbito universitário — e, em especial, na formação de professores de Matemática — o conhecimento matemático pode ser reduzido à mera execução de regras desprovidas de sentido, quando não se promove um espaço efetivo para a *análise* e a *compreensão* das ideias subjacentes aos conceitos trabalhados.

Por outro lado, a ideia de *distanciamento* entre a Álgebra escolar — voltada para procedimentos operatórios e rotinas simbólicas — e a Álgebra avançada — associada a formalismos, abstrações e aplicações na *Educação Superior* — evidencia uma transição problemática (Ns12.PL). Na *Licenciatura em Matemáticas*, por exemplo, o foco recai sobre processos demonstrativos e o aprofundamento conceitual, o que acentua esse hiato. Segundo Felix Klein, essa mudança de enfoque compromete a *continuidade formativa* e dificulta uma compreensão profunda dos conceitos. Tal ruptura contribui para intensificar as *tensões pedagógicas* entre a matemática da *Educação Básica* e *Média* e a matemática da *Educação Superior*, como indicam os depoimentos dos professores, que apontam para uma lacuna significativa entre os conhecimentos adquiridos na educação pré-universitária e as demandas cognitivas e conceituais exigidas na *Educação Superior*.

As falas dos docentes revelam essas tensões de forma enfática. A professora P2L, por exemplo, observa que a escola oferece as “ferramentas básicas, mas não as necessárias para encarar a universidade” (US3.P2L), evidenciando que a Álgebra da *Educação Básica* se mostra insuficiente diante das exigências de formalização e abstração na *Educação Superior*. Essa

defasagem torna-se ainda mais crítica quando os estudantes precisam lidar com processos demonstrativos, especialmente no contexto da formação de professores de Matemática.

Nesse contexto, tanto professores quanto estudantes vivenciam um *choque de expectativas* ao longo dos estudos universitários. Conforme apontam os professores nos depoimentos, ao se depararem com disciplinas como Álgebra Linear, Teoria de Grupos e Teoria dos Anéis, muitos alunos experienciam um *choque conceitual*, questionando: “bem, e onde está a Álgebra que estudamos?” (USg5.P5L), ou seja, expressando estranhamento diante da ausência da *Álgebra escolar*, centrada em procedimentos e manipulações simbólicas. Esse *choque* representa um momento de ruptura, em que o estudante é confrontado com a complexidade e o nível de abstração exigido pela Álgebra na *Educação Superior*. A universidade, nesse sentido, não apenas amplia o repertório conceitual, mas também demanda uma *ressignificação* da própria concepção de Álgebra compreendida ao longo da *Educação Básica* e da *Educação Média*.

Contudo, os professores também demonstram preocupação com a fragilidade da formação matemática prévia dos estudantes, inclusive entre aqueles que optaram pela licenciatura em Matemática. Essa lacuna parece gerar tensão nas expectativas docentes quanto ao domínio dos conteúdos fundamentais, especialmente no âmbito da Álgebra. O professor P3L expressa uma crítica recorrente à qualidade da formação dos ingressantes: “estamos aqui na universidade há quase um século, e eu trabalhando aqui há quatro décadas, dizendo a mesma coisa [...] os alunos chegam mal! e tentamos fazer algo com nossos colegas da educação pré-universitária” (US8.P3L). Sua fala evidencia que essa defasagem persiste há décadas, configurando-se como um desafio no âmbito do ensino e da aprendizagem que ainda persiste. As manifestações dos docentes reforçam a ideia de que esse fenômeno de ruptura é duradouro e continua sendo encarado, na *Educação Superior*, como um problema latente.

As falas dos professores revelam que os desafios pedagógicos no ensino da Álgebra vão além das questões cognitivas, envolvendo dimensões afetivas, motivacionais e emocionais, como a frustração docente diante das dificuldades enfrentadas em sala de aula (Ns13.PL). Os depoimentos evidenciam uma concepção do ato pedagógico como uma prática carregada de sentido e vínculo emocional, na qual a presença do professor, não apenas como transmissor de conhecimento, mas como sujeito comprometido e apaixonado pela sua profissão, é substancial para a experiência de aprendizagem. Nesse contexto, a professora P1L destaca com sensibilidade o papel formativo da relação pedagógica e a importância da postura docente engajada. Em suas palavras: “não perder esse amor, porque se a gente o perde, os alunos veem quando você perde esse amor pelo ensino, [...] e esse não é o objetivo” (US8.P1L). Sua

declaração reforça a ideia de que o envolvimento afetivo do professor é reconhecido pelos alunos e constitui um elemento central na construção de ambientes de aprendizagem.

Os relatos dos professores revelam que o ensino da Álgebra, embora reconhecido como fundamental na formação matemática, é atravessado por uma experiência docente marcada por frustração, angústia e sentimento de impotência. Essa frustração não se limita à dificuldade dos alunos em compreender os conteúdos, mas emerge como uma experiência compartilhada, em que o esforço e a dedicação do professor parecem não encontrar eco na resposta dos estudantes. A professora P2L reconhece que no processo de ensino da Álgebra é “difícil de entender, difícil de explicar e difícil para os outros entenderem” (US4.P2L), apontando para três âmbitos de complexidade: o conteúdo, a mediação e a recepção. Essa tríplice dificuldade revela que o ensino da Álgebra é um caminho permeado por incertezas, limites e expectativas, em que o fracasso na compreensão gera um impacto emocional tanto em alunos quanto nos docentes. Contudo, a professora P2L manifesta que, apesar de “preparar as aulas com carinho” (US4.P2L), sente-se frustrada e angustiada ao perceber que os alunos não compreendem o que é ensinado. A expressão “ver aquelas caras que não entendem nada” (US4.P2L) pode ser interpretado não apenas como uma falha na comunicação, mas como uma angústia silenciosa que reverbera no professor, afetando sua motivação e seu vínculo com o ato de ensinar. Compreendemos da experiência descrita pela professora que o saber, no âmbito do ensino, não é apenas conteúdo a ser transmitido, mas uma experiência vivenciada, como trazido na *Erlebnis*, conforme expõe Ales-Bello (2006).

O professor P3L, por sua vez, reforça essa vivência ao criticar a centralização na manipulação simbólica como eixo metodológico predominante no ensino da Álgebra. Ele denuncia que essa abordagem, recorrente tanto na *Educação Básica Secundaria e Média* quanto na *Educação Superior*, tem se mostrado didaticamente ineficaz. Sua conclusão de que o processo representa um “fracasso completo” (US4.P3L) pode ser interpretada não somente como uma análise técnica, mas como a expressão de uma experiência pedagógica marcada por frustração e desencanto. Ainda, a fala “a frustração que permanece no final de tudo” (US9.P3L) evidencia esse sentimento recorrente de desconexão entre o desejo de ensinar e a realidade escolar, uma expressão profunda da tensão entre o compromisso do professor e os limites impostos pelas práticas pedagógicas e pelas condições institucionais.

Os relatos dos professores revelam que o ensino da Álgebra, embora permeado por dificuldades e desafios persistentes, também é atravessado por uma força motivadora que sustenta o compromisso docente. O professor P3L, por exemplo, reconhece um sentimento de frustração duradoura diante das limitações que marcam o ensino da Álgebra. No entanto, sua

fala revela também um traço de resistência: “continuaremos assim, fazendo todos os esforços ao nosso alcance para vender essas ideias” (US9.P3L). Ele permanece engajado na missão de “vender” essas ideias, realizando todos os esforços possíveis para superar a percepção negativa que cerca a disciplina. Essa postura indica que, mesmo diante da frustração, há uma motivação latente, que se reinventa na tentativa de transformar a experiência de aprendizagem.

Traços mais evidentes dessa motivação aparecem nos relatos do professor P5L, que destaca o desejo constante de introduzir elementos inovadores em suas aulas, ainda que sejam pequenas mudanças no cotidiano (US7.P5L). Essa busca por “algo novo” a cada aula pode ser interpretada como uma estratégia de enfrentamento da desmotivação, uma forma de manter vivo o interesse e o envolvimento com o ensino, mesmo quando os resultados não são imediatamente observados.

A fala da professora P1L também contribui para essa análise ao afirmar que a Álgebra é um saber inevitável, “quer você goste ou não” (US7.P1L). Essa expressão sugere que, apesar da resistência que a disciplina pode provocar, ela ocupa um lugar incontornável na trajetória formativa do estudante e do professor de Matemática. O reconhecimento da inevitabilidade da Álgebra pode, paradoxalmente, alimentar tanto o compromisso quanto a desmotivação: por um lado, reforça a responsabilidade docente ao ministrar essa disciplina; por outro, pode gerar um sentimento de impotência diante da dificuldade de tornar esse conhecimento acessível. Assim, compreendemos que a desmotivação docente não se apresenta como ausência de esforço, mas como uma tensão entre o desejo de inovar e a persistência das dificuldades.

Como assinala esse mesmo professor, a Álgebra tem sido historicamente percebida pelos alunos como um verdadeiro “bicho-papão”, sendo vista como uma disciplina que, em vez de ser apresentada como descoberta significativa, configura-se como barreira ao pensamento matemático, especialmente na *Educação Básica e Média* (USg9.P3L). No entanto, é justamente nesse cenário que se revela a potência da ação criativa do docente: transformar o desinteresse em curiosidade, o estranhamento em sentido.

A metáfora do professor-vendedor também permite compreender que o ensino da Álgebra não se sustenta apenas na transmissão de conteúdo, mas na construção de vínculos e na mobilização de afetos. Portanto, ensinar Álgebra pode ser vista, de fato, como vender gravatas no deserto: uma tarefa difícil, que exige persistência, empatia e reinvenção constante. Mas é, também, uma prática carregada de sentido, em que o compromisso com o estudante transforma o deserto em possibilidade, e a gravata em símbolo de um saber que, quando bem mediado, pode ser desejado, compreendido e apropriado.

6. EXPLICITANDO A FUSÃO DE HORIZONTES

[o] que nos é dado é um caminho, uma experiência que esclarece a si própria, que se retifica e prossegue o diálogo consigo mesma e com o outro. Portanto, o que nos arranca da dispersão dos instantes não é uma razão acabada, é – como se disse sempre – uma luz natural, nossa abertura a alguma coisa.

Merleau-Ponty (1990, p. 56)

6.1 Uma metacompreensão da pesquisa realizada

Neste momento deste trabalho investigativo trazido como uma tese a ser apresentada e defendida com o objetivo da obtenção do título de doutor, no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, não procedemos realizando uma conclusão que traz resultados obtidos, porém mantemo-nos na postura hermenêutico-fenomenológica expondo uma metacompreensão²³² do percurso trilhado. A pesquisa, como já explicitado anteriormente, nós a compreendemos como se movimentando em torno de uma interrogação (Bicudo, 1993b) que busca saber algo. Foi com esse espírito que conduzimos nosso percurso, não em busca de verdades absolutas, mas como uma abertura contínua ao sentido que se faz à medida que nos envolvemos com a interrogação e com o interrogado. A pergunta que nos orientou — “*como a Álgebra é concebida e ensinada em cursos de formação de professores de Matemática e por professores da Educação Média na Colômbia?*” — permanece viva, pulsante, e nos convoca a revisita-la sob a luz das compreensões que se revelaram ao longo do processo investigativo.

Nesse sentido, esta seção pretende explicitar compreensões que emergem do diálogo entre o pesquisador e os sujeitos significativos, entre os textos e os contextos, entre o vivenciado e o interpretado. Trata-se de um movimento que, inspirado na hermenêutica filosófica de Hans-Georg Gadamer, busca a fusão de horizontes, entre o horizonte do pesquisador e o dos professores que, comprometidos com a formação de futuros professores de Matemática, compartilham suas concepções e práticas sobre a Álgebra e seu ensino, bem como as perspectivas dos autores estudados. Assim, nesta pesquisa, vivenciamos a compreensão como um movimento dinâmico e dialógico, que envolve a fusão de horizontes entre o intérprete e o interpretado, trazendo à luz memórias e compreensões que conectam fluir temporal futuro-presente-passado. Retomando as palavras de Gadamer (2011a, p.487), “[...] toda atualização na compreensão pode compreender-se como uma possibilidade histórica daquilo que é compreendido. A própria finitude histórica de nossa existência implica estarmos conscientes de que, depois de nós, haverá pessoas que compreenderão de modo cada vez mais diferente”. Essa

²³² Para Bicudo (2014) a meta-análise é entendida “[...] como uma retomada da pesquisa realizada, mediante um pensar sistemático e comprometido de buscar dar-se conta da investigação efetuada. Esse ‘dar-se conta’ significa tomar ciência, mediante uma volta sobre o efetuado” (p.13).

dinâmica interpretativa nos convoca a reconhecer que cada nova compreensão não é uma repetição do já sabido, mas uma atualização histórica do sentido que se revela.

A fusão de horizontes, conforme compreendemos, é a ampliação do campo de visão por meio do encontro entre diferentes perspectivas. Assim, ao explicitar este movimento de metacompreensão, reconhecemos que o fenômeno investigado — a Álgebra e os modos de ela ser concebida e ensinada — não se esgota, mas se renova a cada leitura, a cada escuta, a cada interpretação.

Nesse movimento investigativo, a abordagem fenomenológica mostrou-se importante, pois nos orientou a permanecer focados no fenômeno, buscando compreendê-lo em sua manifestação e sentido. Como afirma Husserl, “[...] a fenomenologia procede esclarecendo intuitivamente, determinando e diferenciando o sentido. Ela compara, diferencia, conecta, põe em relação, divide em partes, ou separa em momentos. Mas tudo no puro intuir” (Husserl, 2020, p. 114). Essa postura investigativa nos convida a nos manter atentos ao que se mostra, sem antecipações ou julgamentos prévios, permitindo que o fenômeno da Álgebra, tal como concebido e vivenciado pelos professores, vai se revelando em sua complexidade para aquele que intencionalmente o foca e o interroga.

Nesta seção da pesquisa, buscamos evidenciar núcleos comuns das ideias manifestadas por professores de um curso de licenciatura em Matemática e professores atuantes em escolas de *Educação Média*, no que diz respeito às concepções de Álgebra e seu ensino. Esses núcleos não foram definidos previamente, porém emergiram das narrativas e dos depoimentos, num movimento de análise fenomenológica-hermenêutica exaustiva realizado junto às Unidades de Sentido destacadas nos depoimentos, revelando articulações significativas entre as concepções expressas sobre as experiências vivenciadas por cada participante. A escuta atenta e o exercício interpretativo permitiram entrever como essas concepções se entrelaçam com trajetórias formativas e práticas de ensino, compondo um tecido denso de significados que não se apresenta de forma linear, mas como uma rede complexa de sentidos.

Ao adentrarmos pelos meandros nos núcleos de ideias que exploram as concepções — tanto dos professores que lecionam em *Educação Média* como dos professores da licenciatura — sobre Álgebra e seu ensino, e após o criterioso trabalho de análise ideográfica e nomotética, apoiados nos enxertos hermenêuticos como substrato e estímulo para a abertura de sentidos e significados rumo a compreensões, entendemos que tais concepções, configuram-se numa complexa amalgama de experiências vivenciadas, tensões e desafios conforme os relatos dos professores entrevistados. Esse panorama permite examinar o fenômeno investigado sob duas

óticas de níveis de ensino, cada uma delineando expectativas e características próprias. Demos conta de que desvelar núcleos conceituais comuns se revela uma tarefa desafiadora.

A análise das concepções sobre Álgebra de professores da escola e da universidade revela convergências relevantes, divergências e complementaridades que ajudam a compreender a complexidade do fenômeno. Entre os professores da escola, a Álgebra aparece frequentemente concebida como ferramenta auxiliar, um meio instrumental para outras áreas da Matemática e para a resolução de problemas. Depoimentos como o do professor P1E, que a caracteriza como meio ou ferramenta, e o do professor P2E, que reconhece que “com o passar do tempo, [...] há ido reconhecendo múltiplas situações da vida real em que a Álgebra é necessária” (US6.P2E), ainda do professor P3E que manifestou “o mundo funciona com variáveis” (USg8.P3E) reforçam uma perspectiva dirigida para um sentido orientado às aplicações. Nessa perspectiva, a Álgebra é compreendida não apenas como um conjunto de técnicas abstratas, mas como uma linguagem poderosa que transcende os limites da sala de aula e se projeta sobre o mundo-da-vida.

Nessa mesma perspectiva, os professores P2E e P6E destacam a *fatoração* como tópico central, pois a veem como a parte da Álgebra mais solicitada na resolução de problemas e como base necessária para conteúdo mais avançado, mas ainda considerando a Álgebra no âmbito de uma perspectiva propedêutica. Essa concepção se articula com a ideia da Álgebra como continuidade natural da Aritmética, aproximando-a da tendência tradicional que a concebia como “uma Aritmética universal ou generalizada” (Fiorentini, Miorim e Miguel, 1993, p.79). Isso sugere que a Álgebra tende a ser concebida pelos professores da escola como uma prática ligada à resolução de problemas e à realização de exercícios, mais do que como um campo de conhecimento.

Entre os professores da licenciatura, observa-se uma forte ênfase na generalização como horizonte máximo do pensamento matemático. Nessa perspectiva, o professor P3L defende que a prática matemática só se concretiza quando os estudantes têm a oportunidade de expressar e explorar a generalidade, alinhando-se à visão de Mason (1996), que considera a generalização como “o sangue vital” e “o coração da matemática”. Autores como Mason, Graham, Pimm e Gowar (1999) ressaltam que a generalidade constitui um dos pilares fundamentais da Matemática, sendo a Álgebra a linguagem por excelência em que essa generalidade se manifesta. Nesse contexto, conforme o relato do professor P1E, emerge a concepção da Álgebra como uma forma de generalizar aspectos da Aritmética. Sob essa ótica, as letras passam a representar números e as regras aritméticas continuam sendo aplicadas de maneira convencional. Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) reforçam a relevância de promover

situações de generalização em sala de aula, argumentando que tais atividades são necessárias para que o ensino seja verdadeiramente matemático.

A professora P4L complementa ao destacar que a Álgebra é a ferramenta necessária para a generalização e a resolução de problemas. Ela recorre à metáfora de ver a “floresta” em vez de apenas a “árvore”, para ilustrar a passagem do particular ao geral, evidenciando como a linguagem algébrica permite ampliar as possibilidades de pensamento, simplificar procedimentos e compreender estruturas mais abrangentes, expressas por meio de uma linguagem simbólica apropriada, e não como um simples conjunto de símbolos complexos e inacessíveis. Sendo assim, compreendemos que enquanto no contexto da *Educação Básica* e da *Educação Média* a generalização aparece vinculada à extensão da Aritmética, no contexto da *Educação Superior* ela é apresentada como o estudo de estruturas. Do mesmo modo, a valorização da modelagem no ensino escolar, como no depoimento de P3E — “o mundo funciona com variáveis” (USg8.P3E) —, encontra eco na perspectiva universitária de P4L, que vê a Álgebra como ferramenta para a construção de modelos.

As concepções de variável e função, tanto entre professores que lecionam em escolas quanto entre docentes universitários, são reconhecidas como pilares para o entendimento da Álgebra, sendo compreendidas como conceitos estruturantes do raciocínio algébrico. Os professores de *Educação Média* buscam aproximar esses conceitos da vivência dos alunos, como exemplificado pela analogia expressa pelo professor P5E — “a vida da gente é uma função” (US6.P5E) — que visa tornar a Álgebra mais acessível. Os professores universitários enfatizam a complexidade conceitual envolvida, assinalando as dificuldades enfrentadas pelos estudantes na transição da Aritmética para a Álgebra, especialmente no entendimento da variável como entidade abstrata e que revela uma multiplicidade de possibilidades. Como relata P4L: “a ideia de uma variável era a mais confusa. Por que uma letra representaria um número? Como poderia ter vários valores? Era muito confuso” (US1.P4L), e P5L complementa: “[...] há um conceito aí, que é o conceito tácito de variável, que é um conceito que não é fácil de entender” (US3.P5L). Essa dificuldade é amplamente discutida por autores como Booth (1995), Usiskin (1995), Mason *et al.* (2005) e Arcavi *et al.* (2017) ao apontarem a natureza abstrata inerente ao conceito de variável, indicam que essa natureza se torne um dos principais desafios na aprendizagem da Álgebra.

No estudo das funções, as variáveis se evidenciam como elementos que assumem diferentes valores em um domínio específico, sendo a função compreendida como “uma relação entre variáveis, tal que, ao se atribuir um valor a uma delas, determina-se um ou mais valores correspondentes para a outra” (Mora, 2001, p. 11540). Nesse sentido, P3E destaca a importância

desses conceitos para compreender a previsibilidade dos modelos matemáticos. Anastácio (2010) pontua que a Modelagem Matemática parte de problemas da realidade que podem ser representados por modelos matemáticos. Bassanezi (2002) reforça esse vínculo ao definir a Matemática Aplicada como a arte de aplicar a matemática a situações problemáticas por meio da Modelagem. Para este último autor, construir modelos significa sintetizar ideias extraídas de contextos empíricos, muitas vezes encobertos em um emaranhado de variáveis. Assim, tanto os professores da *Educação Média* quanto os da *Educação Superior* reconhecem que as noções de função e variável são centrais para a construção de significados na Álgebra, ainda que mobilizem estratégias distintas para lidar com sua complexidade.

Além disso, ambos os grupos de professores atribuem à linguagem algébrica uma dimensão estética, ao reconhecerem que a qualidade de beleza reside em sua capacidade de integrar múltiplos contextos, revelar padrões e oferecer ampla aplicabilidade. Essa beleza não se limita à elegância formal das expressões, mas emerge da harmonia entre estrutura e significado, entre forma e função, entre símbolo e fenômeno. Para os professores da escola, essa beleza se manifesta na clareza com que a Álgebra permite modelar situações do cotidiano; para os professores universitários, ela se revela na profundidade com que a linguagem algébrica expressa estruturas abstratas e generalizações. Em ambos os casos, a beleza matemática é compreendida como uma experiência formativa, que desperta o olhar para a ordem, a coerência e a potência expressiva do pensamento algébrico.

Outro ponto de convergência entre os dois grupos é o reconhecimento da linguagem algébrica como um meio de condensar ideias e transitar entre diferentes camadas de significação. Conforme destacado por Bortolete (2024), na linguagem algébrica as letras desempenham múltiplas funções: podem representar incógnitas, variáveis, números gerais, nomes de conjuntos, entre outros — e não apenas elementos de conjuntos. Como o autor ressalta, “esse modo restrito de tratar o uso das letras *ofusca*, portanto, o *entendimento da presença desses símbolos* na linguagem algébrica em seus diferentes modos de aparição” (Bortolete, 2024, p. 93, grifos nossos).

Drouhard e Teppo (2004) evidenciam a natureza da linguagem algébrica como “compacta e poderosa”, embora reconheçam sua propensão à “ambiguidade”. No contexto da *Educação Básica*, conforme relatado pelos professores, essa ambiguidade se manifesta na dificuldade inicial dos alunos que tendem a esperar que as letras se comportem como números concretos. Como relata o professor P5E: “[...] a Álgebra foi uma matéria muito ambígua para nós, porque começaram a trabalhar com letras e as letras não tinham, digamos assim, um valor garantido” (US1.P5E). Nesse sentido, Bortolete (2024) ressalta que uma das características

fundamentais da linguagem algébrica é justamente a multiplicidade de significados atribuídos aos símbolos que a compõem, os quais não se prestam a uma leitura única ou literal. Sendo assim, conforme compreendemos, as letras em Álgebra podem ser compreendidas não apenas como símbolos isolados, mas como *objetos que carregam uma flexibilidade e um potencial de variação*, fundamentais para o entendimento da Álgebra em seu aspecto mais geral.

Já na *Educação Superior*, conforme os depoimentos dos professores da Licenciatura em Matemática, a linguagem algébrica é valorizada como mecanismo de criação e expressão de objetos matemáticos. O professor P3L, por exemplo, considera a Álgebra uma linguagem “[...] que nos permite expressar conceitos de um domínio matemático e que tem a grande qualidade de que essa linguagem, por sua vez, é operacional e nos permite criar novos objetos, ou seja, é uma linguagem viva! [...] capaz de expressar a generalidade” (US6.P5E). Nesse contexto, eles apontam para uma experiência que transcende a mera manipulação de símbolos: trata-se de uma linguagem que emerge da vivência e da construção ativa de significados. Essa perspectiva dialoga com a abordagem de Bortolote (2024, p. 193) que propõe compreender as expressões algébricas “como um meio de vislumbrarmos o objeto, simultaneamente, construído e em construção, bem como tomar parte ativa no ato de construção”. Ainda, o relato do professor P3L, ao conceber a Álgebra como uma linguagem viva, aponta para uma reconexão entre o símbolo e a experiência originária que o fundamenta, isso sugere que a simbolização, quando precedida por vivência e descoberta, assume um papel formativo.

Nessa perspectiva, conforme interpretamos, o estudante não apenas manipula símbolos, ele também é conduzido à compreensão de seus significados ao realizar uma atividade que consegue atribuir um sentido. Sob uma ótica fenomenológica husserliana, essa abordagem pode ser compreendida como um apelo ao “retorno às coisas mesmas” (Husserl, 2006, p. 61), isto é, à vivência original dos significados antes de sua abstração formal. Complementarmente, à luz da hermenêutica gadameriana, segundo a qual toda compreensão é expressa pela linguagem e pelo horizonte de sentido do sujeito (Gadamer, 2011a), compreende-se que a linguagem algébrica, enquanto meio simbólico, não apenas comunica: ela constitui um espaço formativo na constituição do conhecimento matemático, no qual o estudante é interpelado a construir sentido ao refletir sobre sua experiência vivenciada.

A concepção da Álgebra como linguagem, é marcada nos depoimentos dos professores justamente pela capacidade de expressar a generalidade. Ao permitir a formulação de conceitos abstratos e a criação (ou recriação) de objetos matemáticos, a linguagem algébrica se revela não apenas como ferramenta técnica, mas como núcleos simbólicos e um movimento do pensar que favorece a generalização. Essa dimensão permeia as falas tanto dos professores da *Educação*

Média quanto dos docentes da *Educação Superior*, embora cada grupo mobilize essa noção desde perspectivas distintas. Entre os professores da *Educação Média*, a generalização está frequentemente associada à concepção da Álgebra como uma Aritmética generalizada, na qual as letras assumem o papel de números e preservam as operações fundamentais. Essa abordagem conduz à construção de expressões algébricas que permitem generalizar e criar modelos para descrever situações específicas. Nesse sentido, a professora P1E afirma: “a Álgebra é como uma ferramenta que nos ajuda em Matemática a generalizar. [...] Como para construir ou formar certos algoritmos” (US4.P1E).

Por outro lado, entre os professores universitários, a generalização é compreendida como um princípio que orienta o estudo das estruturas algébricas — sistemas organizados de objetos e operações que revelam propriedades universais, independentemente dos elementos envolvidos, por exemplo, as Estruturas de Grupo (Bortolete, 2024). Essa perspectiva implica um nível mais elevado de abstração, no qual a Álgebra é vista como parte de um sistema conceitual herdado da tradição matemática (como indicado na fala do professor P1L), contribuindo para a formação do pensamento matemático e para a atuação dos licenciandos. Assim, no âmbito da *Educação Superior*, a generalização se vincula à capacidade de organizar, de forma lógica e coerente, os encadeamentos argumentativos presentes nas demonstrações matemáticas, consolidando a Álgebra como uma linguagem que expressa a generalidade.

Apesar das diferenças apontadas pelos professores entre os níveis de ensino, há complementaridades significativas quanto à relevância de determinados tópicos da Álgebra que atravessam a trajetória escolar, sendo a fatoração um dos mais recorrentes. A presença constante desse tema nos depoimentos dos professores pode ganhar profundidade conceitual quando articulada à ideia de “mudança de estrutura”, conforme discutido por Arcavi, Drijvers e Stacey (2017). Para esses autores, diferentes formas algébricas revelam propriedades distintas e oferecem soluções para variados tipos de problemas, favorecendo a compreensão progressiva de estruturas mais abstratas. Essa abordagem está alinhada à perspectiva de Linchevski e Livneh (1999) que defendem o uso flexível e criativo das estruturas algébricas como estratégia para ampliar o pensamento matemático. Segundo Linchevski e Livneh (1999), é fundamental que os alunos desenvolvam progressivamente um “sentido de estrutura”, compreendendo as relações subjacentes às expressões algébricas. No âmbito dessa abordagem, que concebe a Álgebra como o estudo de estruturas, a variável deixa de ser apenas um símbolo genérico e passa a ser compreendida como um elemento arbitrário pertencente a uma estrutura definida por propriedades particulares, concepção que, conforme Usiskin (1995), é característica da Álgebra abstrata (um exemplo a esse respeito se aporta no enxerto hermenêutico da unidade U6.P6E).

Por outro lado, Fiorentini *et al.* (1993) alertam para os riscos de uma abordagem restrita, centrada no chamado “transformismo algébrico”, que reduz o trabalho com fatoração à mera manipulação simbólica, limitando sua compreensão e aplicabilidade em contextos mais amplos. Nesse sentido, Eisenberg e Dreyfus (1995) destacam o potencial da fatoração como ferramenta para estabelecer articulações significativas entre conceitos frequentemente tratados de forma isolada no estudo de polinômios, evidenciando sua importância na construção de conexões matemáticas mais profundas.

As concepções de Álgebra expressas pelos professores nos relatos revelam uma continuidade histórica marcada pela influência do livro *Álgebra de Baldor*, que emerge como principal referência didática no ensino da disciplina. Entre os professores de *Educação Média*, o livro é descrito como um recurso amplamente utilizado durante sua formação e prática docente, caracterizado por uma abordagem centrada na explicação expositiva e na resolução mecânica de exercícios, especialmente os da seção “miscelânea”. Essa prática reforça uma concepção de Álgebra como manipulação simbólica e aplicação de regras operatórias. Já os professores universitários, embora não utilizem diretamente o livro, reconhecem seu impacto na formação dos licenciandos, que chegam à universidade com uma visão limitada da Álgebra. Como aponta o professor PL5, “[...] os estudantes estão chegando, digamos assim, com a ideia de que Álgebra é apenas uma exercitação, e, que a Álgebra é o que eles concebem na *Educação Básica Secundária*, que é a *Álgebra de Baldor*” (US5.P5L).

Ao realizar uma leitura hermenêutica inspirada na *história efetual* gadameriana, compreende-se que o livro *Álgebra de Baldor* ultrapassa sua função de material didático, tornando-se um símbolo de uma tradição pedagógica e escolar que molda o modo de ensinar e aprender Álgebra. Essa tradição, transmitida de geração em geração, privilegia a rigidez procedimental e a repetição, dificultando a construção de significados e a compreensão conceitual da linguagem algébrica. Enquanto alguns professores de *Educação Média* tendem a reproduzir essa abordagem, alguns professores universitários buscam romper com ela, promovendo uma visão da Álgebra como *linguagem viva*, capaz de expressar a generalidade e estruturar o pensamento matemático. Assim, entendemos que o livro atua como marcador cultural de uma forma específica de ensinar Álgebra, cujas implicações se estendem à formação docente e à estrutura curricular.

As divergências se tornam mais evidentes ao se analisar a finalidade atribuída à Álgebra e ao seu ensino. Entre os professores de *Educação Média*, alguns privilegiam uma abordagem de cunho operacional, marcada pela valorização intensa da prática de exercícios como principal estratégia de aprendizagem. A professora P6E afirma: “a gente acha que [...] quanto mais

exercícios fizer, melhor!” (US12.P1E), revelando uma crença implícita na eficácia da repetição como meio de acesso ao sentido da Álgebra. Essa concepção está alinhada à perspectiva descrita por Kieran (2004), ao comentar a análise de Lee (1997): a Álgebra é entendida como uma prática voltada para a ação sobre os objetos, privilegiando os processos de transformação em detrimento da análise dos próprios objetos matemáticos.

Por outro lado, entre os professores da licenciatura, observa-se uma ênfase no rigor formal e nas demonstrações matemáticas. Expressões como “tem-se que ser muito rigoroso em Álgebra” e a ideia de que há apenas uma “maneira correta de fazer” (US3.P1L) revelam uma concepção normativa, centrada no aprofundamento conceitual e na estruturação lógica do raciocínio. Para esses docentes, os teoremas e as demonstrações não são apenas procedimentos matemáticos, mas também componentes fundamentais da identidade profissional do professor de Matemática. Entretanto, no âmbito da licenciatura em Matemática, a prática demonstrativa pode se reduzir a uma mera exercitação técnica, como aponta o professor P3L: “[...] a forma de trabalhar não muda muito, porque se trata de analisar um conjunto, uma operação, observar quais propriedades ela cumpre, mas não fica para a gente o significado do que é um grupo, o que é um anel, quer dizer, não há entendimento. É simplesmente uma mecanização” (US2.P3L).

Assim, no contexto descrito anteriormente, compreendemos que tanto entre professores da *Educação Média* quanto entre docentes da licenciatura em Matemática, evidencia-se uma crença compartilhada na eficácia da prática de exercícios como meio privilegiado de aprendizagem algébrica. Enquanto os primeiros adotam uma abordagem operacional, centrada na repetição como forma de domínio técnico, os segundos, embora enfatizem o rigor formal e as demonstrações, também recorrem à exercitação como prática recorrente. Essa valorização da prática encontra respaldo na perspectiva de Lee (1997), que reconhece seu papel significativo na construção do sentido algébrico. No entanto, para que essa prática contribua efetivamente para o desenvolvimento do pensamento matemático, é necessário que vá além da mera manipulação técnica. Como alertam Bortolete e Bicudo (2024), a mera manipulação técnica descontextualizada pode esvaziar o significado da atividade matemática, tornando-se um obstáculo à compreensão conceitual. Nessa mesma direção, Mason, Graham e Johnston-Wilder (2005) advertem que a prática rotineira só é valiosa quando a atenção do aluno se desloca dos aspectos mecânicos da manipulação para objetivos mais amplos, como a formulação e exploração de conjecturas.

Entre os professores participantes da pesquisa, é recorrente a distinção entre uma “Álgebra básica”, ensinada na *Educação Básica* e na *Educação Média*, centrada em o trabalho com equações e operações elementares, e uma “Álgebra avançada”, vinculada a domínios mais

abstratos, como a Teoria de Grupos e a Álgebra Linear, abordados nos cursos universitários. A professora P1L explicita essa separação ao afirmar: “são duas coisas, uma é a Álgebra básica e a outra é a Álgebra já avançada [...] o que é um pouco distante”. Embora essa cisão seja funcional do ponto de vista da organização curricular, ela pode obscurecer conexões conceituais relevantes e dificultar a transição entre os diferentes níveis de ensino. Essa separação se agudiza ao considerarmos as demandas particulares de cada contexto educativo: na escola, o ensino da Álgebra tende a enfatizar sua dimensão operacional, como ferramenta aplicável em um nível procedimental; já na universidade, prevalece uma abordagem formal, que exige rigor conceitual e demonstrações matemáticas. Esse cenário de “ruptura”, conforme entendemos, revela tensões na formação docente e aponta para a necessidade de práticas educacionais que favoreçam a articulação entre os diversos modos de compreender e ensinar Álgebra.

Ao longo da análise fenomenológico-hermenêutica dos relatos dos professores — tanto da *Educação Média* quanto da *Educação Superior* — evidenciamos que as concepções de Álgebra e de seu ensino, expressas em suas falas, estão marcadas pelas experiências vivenciadas ao longo de suas trajetórias escolares e profissionais. Essas vivências com a Álgebra constituem uma complexa rede de significações que se atualiza e se transforma continuamente à medida que os docentes refletem sobre suas práticas e suas experiências ao estar com a Álgebra.

Nos relatos, emergem tensões e desafios, preocupações e expectativas que, por vezes, de forma consciente, outras inconscientes, se entrelaçam à ação pedagógica que desenvolvem e ao modo como compreendem e ensinam a Álgebra. Esse entrelaçamento revela como a experiência pessoal e profissional influencia não apenas o fazer docente, mas também a construção de sentidos atribuídos à própria disciplina. Nesse contexto, a metáfora do *professor-vendedor* — aquele que precisa “vender gravatas no deserto” (USg8.P3L), conforme expressa o professor P3L — revela-se ilustrativa e provocadora. Para esse docente, ensinar Álgebra exige a busca constante por estratégias capazes de despertar o interesse dos alunos por um saber que, à primeira vista, se apresenta como árido e distante de sua realidade. A imagem da gravata no deserto simboliza o paradoxo de oferecer algo que não é desejado, em um ambiente que não favorece sua aceitação, evidenciando os desafios enfrentados na prática pedagógica da Álgebra.

Nos relatos dos professores, torna-se evidente que ensinar Álgebra vai muito além da simples transmissão de fórmulas: envolve um compromisso com a construção de sentido, a disposição para experimentar novas abordagens a cada aula e uma atenção genuína às necessidades e ao desenvolvimento dos estudantes. Como afirma o professor P5L, “[...] o mais importante de tudo é, talvez, esse desejo que um professor de Matemática deve ter, de que sua aula tenha algo inovador todos os dias, que sempre tenha a necessidade de fazer pequenas

mudanças” (US7.P5L). A angústia diante da incompreensão dos alunos revela a dimensão intersubjetiva do ensino, em que o fracasso na aprendizagem repercute diretamente na experiência e no empenho do próprio docente. Como expressa o professor P3L, “[...] mas, essa é como a frustração que permanece no final de tudo. Continuaremos assim, fazendo todos os esforços ao nosso alcance para vender essas ideias” (US9.P3L), evidenciando o sentimento de persistência diante um cenário de tensão constante entre a tradição educacional que vivenciou e na qual molda suas crenças, e as exigências da realidade educacional contemporânea em que realiza o exercício de sua profissão. Nesse sentido, compreendemos que, para esses professores, proporcionar clareza de sentido na Álgebra não se configura apenas como uma técnica pedagógica, mas como um compromisso ético e profissional com sua prática docente, refletindo uma postura sensível, resiliente e engajada.

6.2 Elo de retomada

Revisitando as considerações apresentadas na primeira seção desta tese, foi evidenciado um hiato — ou ruptura/desconexão — entre a universidade e a escola, um problema que Felix Klein (2006) denominou de “dupla descontinuidade” na formação de professores de Matemática. Essa análise nos motivou a investigar como a Álgebra é concebida e ensinada por professores, *tendo em vista compreender o que esse hiato revela*. O termo “hiato”, conforme compreendemos, sugere um vazio, uma ausência de articulação entre os diferentes momentos formativos. Por isso, consideramos que os professores que atuam tanto na universidade como na *Educação Média* revelam estar familiarizados com um acervo de experiências profissionais que podem ser objeto de reflexão neste contexto investigativo. Nessa perspectiva, nesta pesquisa, analisamos como as concepções de professor de Matemática, particularmente no que diz respeito à Álgebra, configuram-se nessa dupla descontinuidade, que abarca tanto a passagem da escola para a universidade, quanto da universidade para a escola. No entanto, ao longo da presente pesquisa, identificamos rupturas ou hiatos complementares significativos na trajetória escolar relatada pelos professores, tanto no que diz respeito à formação na *Educação Básica* e na *Educação Média* quanto à formação universitária no âmbito da Álgebra.

Uma primeira “ruptura” significativa apontada pelos professores entrevistados refere-se à transição da Aritmética para a Álgebra, vivenciada tanto em suas trajetórias escolares quanto em suas práticas docentes. Essa passagem, frequentemente marcada por dificuldades e incompreensões, representa um momento crítico na aprendizagem da Matemática, no qual se transita do campo das operações concretas e numéricas para adentrar ao âmbito das variáveis e do pensamento abstrato. No ensaio *Introdução à Filosofia Matemática*, Bertrand Russell já

alertava para esse desafio, ao afirmar que até mesmo os alunos mais inteligentes enfrentam obstáculos ao iniciar o estudo da Álgebra, cuja simbologia — especialmente o uso de letras — tende a parecer enigmática e desprovida de sentido (Russell, 2010). Segundo o filósofo, essa dificuldade é agravada pela continuidade de métodos aritméticos, nos quais regras são aplicadas mecanicamente, sem explicitação de suas bases conceituais, levando os estudantes a operar por puro automatismo.

Segundo Filloy, Puig e Rojano (2008), ao compreender a natureza dessa “ruptura”, o professor pode planejar intervenções pedagógicas mais eficazes para ajudar a preencher essa lacuna e contribuir para que os alunos superem essa dificuldade. Essa desconexão pode ser compreendida como o “salto da Aritmética para a Álgebra”, uma transição que não ocorre de maneira simples ou linear. O “passo” ou “salto” reflete a mudança de uma abordagem numérica concreta e focada na manipulação de números para uma estrutura algébrica mais abstrata, que exige a compreensão de conceitos como variáveis, expressões algébricas e resolução de equações, mas que sucede no âmbito educativo de modo abrupto. Os relatos dos professores confirmam essa lacuna formativa, revelando que a ausência de mediações adequadas nesse momento de transição compromete não apenas a compreensão dos conteúdos algébricos, mas também a construção de uma base sólida para o desenvolvimento do pensamento matemático. Essa perspectiva é ilustrada, por exemplo, na fala do professor P1E, que concebe a Álgebra como uma generalização de aspectos da Aritmética. Para ele, o núcleo das dificuldades na aprendizagem algébrica reside na falta de domínio prévio da Aritmética.

Esse fenômeno envolve não apenas uma adaptação conceitual, mas também uma mudança no modo de pensar e na forma como os estudantes lidam com os problemas matemáticos. Bednarz, Kieran e Lee (1996), bem como Mason, Graham e Pimm (1998), propõem abordar o ensino da Álgebra por meio da concepção da Álgebra como generalização de padrões aritméticos. Nessa perspectiva, argumentam que a passagem para o pensamento algébrico não deve ocorrer como uma ruptura abrupta, mas como um processo gradual, no qual os alunos são incentivados a identificar regularidades nas operações numéricas e a representá-las simbolicamente.

No entanto, conforme compreendemos, essa mudança abrupta no modo de pensar está enraizada em uma prática consolidada de mecanização da Aritmética, que frequentemente privilegia a eficiência e a rapidez nos cálculos numéricos em detrimento de uma compreensão significativa das ideias matemáticas envolvidas. Tal abordagem limita o potencial de ampliação do pensamento matemático, pois restringe a Aritmética a um domínio técnico e operacional. Assim, mesmo na hipótese de uma transição fluida para a Álgebra, o domínio prévio da

Aritmética — quando reduzido à aplicação mecânica de regras — tende a reforçar a ruptura entre essas duas disciplinas, uma vez que mobiliza modos de pensar distintos. Essa tensão é ilustrada no procedimento mnemotécnico descrito no enxerto hermenêutico (US11.P1E), conhecido entre o grupo de docentes — na Colômbia — como o método da “carinha feliz”, considerado eficaz no ensino de frações na Aritmética, mas que se revela um obstáculo ao se trabalhar com Álgebra na *Educação Média e Superior*.

Ao retomar as reflexões desenvolvidas na subseção 3.2 desta tese, nas quais destacamos aspectos da Álgebra no currículo colombiano, e ao contrastá-las com os depoimentos dos professores entrevistados, evidencia-se uma ênfase significativa no uso dos Sistemas Simbólicos no ensino da Álgebra. Essa ênfase se manifesta especialmente na manipulação intensiva da linguagem algébrica, centrada nos aspectos sintáticos de conceitos, operações e relações. Tal abordagem, embora recorrente, acaba por negligenciar outros sistemas de representação matemática referenciados nos documentos *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (MEN, 1998) e *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2016), comprometendo uma compreensão mais abrangente da Álgebra e, por sua vez, desde nossa perspectiva, contribui a consolidar a ruptura entre Aritmética e Álgebra, pois a Álgebra termina sendo entendida como um mero sistema simbólico, restrita a desempenhar apenas um papel de mediação.

Uma segunda “ruptura” evidenciada nos depoimentos dos professores participantes se refere à passagem da educação pré-universitária para a *Educação Superior*, especialmente no que diz respeito ao enfoque da Álgebra nos cursos de formação de professores de Matemática. Ao refletirem sobre esse fenômeno à luz de suas experiências vivenciadas como alunos — e, no caso dos docentes universitários, também como formadores — os professores convergem pontos de vista ao relatar um *choque de expectativas* quanto ao conteúdo abordado e à forma de trabalhar com a Álgebra na graduação. Essa mudança é marcada por uma transição abrupta entre abordagens mais operacionais com ênfase no domínio sintático, trazidos da *Educação Básica* e da *Educação Média*, e uma perspectiva mais formal e abstrata, característica do ensino universitário, gerando tensões e desafios na adaptação dos estudantes. O “choque” mencionado pelos professores pode, portanto, ser compreendido como um momento de ruptura, em que o estudante é confrontado com a complexidade conceitual e o rigor lógico da Álgebra, perdendo, por vezes, a conexão com essa disciplina construída nos estudos anteriores — muitas vezes resumidas num só livro didático. Como expressa o professor P5E: “[...] na universidade não tratam isso [a Álgebra] como tal. Eles [os professores na universidade] dizem: esta é a solução por razões conhecidas” (US3.P5E), é sugerida uma identificação restrita da Álgebra ao

repertório escolar, evidenciando a ausência de mediações e reflexão que favoreçam a continuidade e o sentido entre os diferentes níveis de ensino.

A universidade, nesse sentido, não apenas amplia o repertório conceitual dos estudantes, como também exige uma ressignificação da própria concepção de Álgebra construída ao longo da formação pré-universitária. Diante disso, revisitamos as concepções de Álgebra explicitadas pelos professores participantes, já discutidas anteriormente, para refletir sobre essa ruptura. A nosso ver, é possível identificar três raízes que contribuem para essa desconexão: a primeira refere-se ao trabalho pedagógico centrado no livro *Álgebra de Baldor*, que assume a posição de autoridade e permanece como símbolo da Álgebra nos níveis escolares anteriores, moldando uma visão tradicional e procedimental da disciplina; a segunda está relacionada à abordagem de ensino que privilegia o domínio técnico e algorítmico, em detrimento de uma compreensão conceitual mais profunda; e a terceira diz respeito à ênfase excessiva na exercitação, que acaba por suprimir práticas didáticas voltadas à abstração, à generalização e à busca pelo sentido. Esses aspectos, conforme compreendemos, indicam uma atividade de mecanização do trabalho algébrico que, ao se consolidar, dificulta a transição para compreensão da Álgebra mais abrangente, como aquela exigida no contexto universitário.

Apesar das dificuldades apontadas, é importante destacar que a percepção de “ruptura” entre a Álgebra escolar e a universitária não se sustenta diante de uma análise histórica mais cuidadosa. Como indica Bortolete (2024), ao realizar um olhar atento para a Álgebra em seu fluxo histórico, é possível compreender que não há uma cisão entre os períodos clássico — centrado no estudo de equações e operações sobre quantidades discretas ou contínuas — e moderno — voltado às estruturas algébricas abstratas. Segundo Bortolete (2024, p.117),

Analizando o movimento desse fluxo histórico, o estudo das equações quínticas surge como um mote para o nascimento da Álgebra Moderna, em virtude da efetivação de um salto teórico que reúne, em um campo mais abrangente, ideias constantes dos períodos clássico e moderno da Álgebra. Assim, entende-se não serem duas ciências distintas; entretanto, não há apenas uma continuidade entre ambos os períodos, há um pensar teorizante que nucleia muitas ideias concernentes a ambos os períodos.

Essa perspectiva histórica²³³ permite vislumbrar uma conexão mais fluida entre a Álgebra trabalhada na *Educação Básica* e na *Educação Média* e aquela desenvolvida na

²³³ Nessa perspectiva, destacamos a tese *O ensino de Álgebra numa perspectiva lógico-histórica*, realizada por Maria do Carmo de Sousa (2004), que incorpora no seu estudo o conceito de *fluência algébrica*, entendido como a capacidade de transitar com desenvoltura entre diferentes formas de representação e pensamento algébrico, especialmente dentro de uma abordagem que considera o desenvolvimento histórico e lógico dos conceitos matemáticos. Essa abordagem se inspira fortemente nos estudos de Davydov e Vygotsky, que defendem que o desenvolvimento do pensamento matemático ocorre por meio da mediação cultural e da internalização de conceitos científicos, e não apenas pela repetição de procedimentos.

*Educação Superior*²³⁴, favorecendo a construção de pontes conceituais que podem ressignificar a experiência dos estudantes e contribuir para uma transição mais significativa entre os níveis de ensino.

No âmbito da formação de professores de Matemática, conforme apontado por Klein (2016), evidencia-se uma terceira ruptura que, embora não apareça de forma explícita em todos os depoimentos dos professores entrevistados no presente estudo, pode ser identificada de maneira implícita nas falas dos docentes ao se referirem às tensões e desafios enfrentados em suas práticas de ensino e em suas concepções de Álgebra. Essa ruptura diz respeito à dificuldade de estabelecer uma conexão clara entre os conhecimentos algébricos trabalhados na licenciatura em Matemática e uma compreensão mais ampla e profunda da Álgebra, capaz de sustentar práticas pedagógicas que transcendam uma abordagem mecanicista. Em muitos casos, os conhecimentos adquiridos na formação superior não se traduzem em estratégias didáticas que rompam com os modelos tradicionais de ensino da Álgebra na *Educação Básica* e na *Educação Média*, perpetuando uma lógica de reprodução de procedimentos em detrimento da construção de sentido e da valorização do pensamento matemático.

Em particular, a fala do professor P5L revela um pressuposto recorrente na formação inicial: a ideia de que o aprofundamento conceitual proporcionado pelas disciplinas de Álgebra na universidade, por si só, habilita o licenciado a ensinar com clareza e propriedade,

O licenciado precisa estar em outro nível, de tal forma que lhe permita ver os diferentes conceitos com muita clareza e ser capaz de adaptá-los, poder dominá-los, digamos assim. É isso que permite que o licenciado em Matemática cresça e veja, eh [...] digamos assim, desde um horizonte diferente, o que ele vai ensinar futuramente. (US5.P5L).

No entanto, essa perspectiva desconsidera que a apropriação dos conhecimentos matemáticos, especialmente no campo da Álgebra, não se traduz automaticamente em práticas pedagógicas capazes de romper com os modelos tradicionais de ensino. A crença na transferência direta entre conhecimento acadêmico e prática didática contribui para a manutenção da ruptura já discutida. Assim, o “horizonte diferente” mencionado pelo professor pode se tornar uma abstração distante se não for acompanhado de reflexões sobre como tornar esse conhecimento acessível, significativo e transformador para os estudantes da *Educação Básica* e da *Educação Média*.

²³⁴ Outra “ruptura” — conforme analisado no inciso 3.3.3 desta tese — é evidenciada na pesquisa de Sanabria (2013), que aponta que o cenário típico do ensino inicial de Cálculo é marcado por repetição mecânica, abandono precoce, mal-entendidos conceituais, uso inadequado do raciocínio e baixa competência algébrica na resolução de novos problemas. Segundo a autora, os cursos são frequentemente conduzidos de forma algorítmica e automatizada, sem promover a compreensão profunda dos conceitos e do raciocínio envolvidos no cálculo. Nesse contexto, ela sugere a investigação da *Transição Álgebra-Cálculo* como uma abordagem necessária para impactar a aprendizagem do Cálculo.

Por sua vez, o relato do professor P2E explicita com clareza essa ruptura vivenciada na passagem tanto da escola para a universidade, quanto da universidade para a escola no percurso de sua formação e atuação docente:

Naquela época, era quase que só desenvolver todos os exercícios da Álgebra [de Baldor], e essa era a minha ilusão, de ir para a universidade para continuar trabalhando nessa Álgebra, e, surpresa! Só vi aquele tipo de Álgebra de novo apenas quando estava no estágio, ou seja, durante toda a universidade, alguma aplicação por acaso, mas [...], digamos que todos os temas que foram vistos lá [na licenciatura] eram totalmente diferentes! ao que estamos aqui nas escolas, vendo e ensinando neste momento” (US4.P2E).

O depoimento do professor evidencia o descompasso entre a Álgebra ensinada na escola, marcada pela ênfase em procedimentos e exercícios, e a Álgebra abordada na universidade, voltada para estruturas abstratas e formalizações teóricas. As implicações para a formação docente são significativas: os futuros professores precisam não apenas dominar o conteúdo algébrico, mas, sobretudo, desenvolver a habilidade de “traduzir” experiências concretas em expressões simbólicas, articulando diferentes níveis de representação e significado. Essas reflexões dialogam com o pensamento de Freudenthal (1973, *apud* Bortolete, 2024, p. 96), que defende que

[o] uso das letras, portanto, deve ser pensado e planejado não apenas do ponto de vista dos critérios da Matemática, isto é, não basta estar matematicamente correto, mas tem que ser didaticamente bem elaborado, de modo a possibilitar que o aluno use-as não de forma mecânica, mas dando-se conta de que elas sempre significam alguma coisa.

Tal perspectiva exige uma postura docente reflexiva e autônoma, capaz de selecionar conteúdos pertinentes, planejar trajetórias didáticas que favoreçam a transição do concreto ao abstrato e conceber, em vez de simplesmente reproduzir, realizar propostas pedagógicas inovadoras, considerando recursos de ensino que extrapolem o uso exclusivo do livro didático.

Ao analisar essas rupturas à luz das diferentes concepções de Álgebra e de seu ensino, emergem questionamentos relevantes. Um deles é: até que ponto o foco predominante na resolução de exercícios, nos distintos âmbitos do trabalho matemático, em particular os já discutidos aqui —Aritmética, Álgebra escolar e Álgebra universitária — contribui para a mecanização dos procedimentos específicos em cada contexto? E será que essa mecanização acaba por consolidar visões restritas da Álgebra, dificultando a capacidade de transitar com desenvoltura entre diferentes formas de representação e modos de pensamento algébrico? A ausência de uma explicitação clara dos horizontes conceituais durante a prática intensiva de exercícios gera um domínio limitado à manipulação sintática, sem compreensão mais profunda dos significados envolvidos?

Outro aspecto recorrente nos depoimentos é a fragilidade da base aritmética, reconhecida desde a *Educação Básica* e da *Educação Média* até a *Educação Superior*. Nesse sentido, seria possível afirmar que um enfoque que vá além da simples compreensão operatória e que valorize a exploração de múltiplas formas de representar e atribuir significado aos procedimentos aritméticos, com vistas à generalização, pode contribuir para estabelecer conexões mais significativas e superar essas rupturas?

Até que ponto o trabalho excessivo em sala de aula voltado à mecanização das operações básicas negligencia a análise das estruturas aritméticas e o entendimento rigoroso das propriedades que as sustentam? Quais seriam as ideias estruturantes da Álgebra para garantir uma transição fluida, minimizando as rupturas e permitindo o avanço entre distintos níveis de abstração? Como explicitar os vínculos entre a Álgebra trabalhada na *Educação Básica* e na *Educação Média* e a trabalhada na *Educação Superior*? De que modo adaptar e aplicar os conhecimentos adquiridos durante a graduação à realidade prática do ensino nas escolas? E como evitar que essas rupturas se manifestem de forma abrupta, comprometendo o desenvolvimento de um pensamento matemático mais articulado?

Essas e outras questões deveriam ser preocupações de professores de Matemática, licenciandos e formadores de docentes dessa área. No entanto, será que elas são efetivamente discutidas nos cursos de formação docente?

Fey *et al.* (2007) apontam que os cursos de formação docente em Matemática, ao abordarem a Álgebra Abstrata, frequentemente não promovem compreensões significativas sobre a Álgebra escolar. Os licenciandos raramente conseguem estabelecer conexões entre os conteúdos universitários e os desafios concretos do ensino, inclusive durante as experiências de estágio, evidenciando uma lacuna entre teoria e prática. Segundo os autores, Fey *et al.* (2007), parte-se da hipótese de que uma compreensão mais aprofundada dos conceitos algébricos deveria capacitar implicitamente os professores a elaborar problemas mais interessantes, oferecer explicações mais eficazes, estabelecer conexões significativas dentro da Matemática e avaliar com maior precisão o progresso dos alunos.

A formação de professores de Matemática, embora contemple aspectos formais da Álgebra em seus currículos, ainda carece de espaços sistemáticos para discutir como esses conhecimentos podem ser efetivamente mobilizados nas práticas pedagógicas. Como aponta Mondini (2009), essa ausência de articulação entre teoria e prática contribui para que, ao final da graduação, muitos docentes iniciantes reproduzam os modelos de ensino que vivenciaram ao longo de sua trajetória escolar, apoiando-se em abordagens tradicionais ou no conteúdo dos livros didáticos disponíveis.

Como destacam Pimenta (2002) e Paulo, Amaral e Santiago (2010), a ausência de uma reflexão crítica que permita aos futuros professores estabelecer conexões entre os conhecimentos acadêmicos adquiridos na universidade e os desafios concretos do ensino escolar contribui para a perpetuação das rupturas já mencionadas. Essa desconexão dificulta a elaboração de propostas didáticas que favoreçam a transição entre diferentes níveis de abstração, formas de representação e modos de pensamento matemático, comprometendo a construção de uma prática pedagógica mais integrada e significativa. Conforme destacado pelos autores mencionados — Fey *et al.* (2007), Mondini (2009), Pimenta (2002), Paulo, Amaral e Santiago (2010) —, os desafios relacionados à articulação entre os saberes acadêmicos e as práticas pedagógicas, bem como à ausência de reflexão crítica na formação docente, também se evidenciam nos depoimentos dos professores entrevistados neste estudo. Os relatos revelam dificuldades em mobilizar os conhecimentos adquiridos na graduação para enfrentar os desafios concretos da sala de aula, especialmente no que diz respeito ao ensino de Álgebra.

Essa constatação reforça a persistência das rupturas entre teoria e prática, entre a Álgebra conforme abordada na universidade e na escola, e aponta para a necessidade imperante de repensar os espaços formativos. Alertamos, entretanto, não se tratar tão somente de uma questão de conhecimento do que se aprende na universidade e do que se vai ensinar na *Educação Básica* e na *Educação Média*. É preciso já de início uma compreensão mais integrada e contextualizada da Matemática que se ensina. Porém é necessário que se vá além, de modo que na ação de ensinar-aprender-ensinando-aprendendo ao estar com os alunos e com a Álgebra, em qualquer nível de ensino, focando, conforme o que se espera que seja tratado nos respectivos níveis que se tenha como meta: trabalhar de modo que o sentido de aritmética e de suas operações se façam para os alunos; que eles compreendam as operações fundamentais e dominem seus procedimentos; que se abram aos sentidos e aos significados de números; que se abram ao horizonte de compreensões dos sentidos de variável passíveis de serem expressos por letras; que se abram aos sentidos e significados de as letras substituírem os números, enlaçando o sentido de generalização; o trabalho com regras sintáticas e procedimentos formais algébricos deve ser conduzido sem perder de vista a necessidade de estabelecer uma conexão entre essas regras e a compreensão de seus significados; trabalhar com sentidos e significados de estrutura algébrica, para possibilitar compreensões sobre os modos de generalização que se evidenciam em possibilidades de avançar em direção a poderem criar modelos para situações específicas, abrindo-se à compreensão de as estruturas algébricas revelarem propriedades universais.

6.3 Síntese compreensiva

Considerando uma síntese compreensiva sempre em transição à espreita de mais compreensões, destacamos compreensões de sentidos e de significados que se fizeram para nós, a respeito da concepção de Álgebra e do seu ensino ao olharmos para a convergência de horizontes de depoentes, autores estudados e investigadores.

A Álgebra é entendida, em seu cerne, como expressão de um pensar que realiza generalização com base em procedimentos matemáticos específicos. Entretanto, essa generalização é compreendida por perspectivas diferentes: os professores que lecionam na *Educação Média* têm uma perspectiva e os da Licenciatura, outra. Os primeiros a tomam como vinculadas à extensão da Aritmética, ou seja, como uma generalização da Aritmética, como uma Aritmética generalizada, em que as letras assumem a função dos números, preservando as operações fundamentais, nessa perspectiva, espera-se retomar estratégias didáticas já consolidadas no trabalho com a Aritmética, utilizando-as como referente para o ensino da Álgebra. Os professores da *Educação Superior* concebem a generalização como um princípio que orienta o estudo das estruturas algébricas — sistemas organizados de objetos e operações que revelam propriedades universais. Entendem que a generalização se dá por meio das estruturas que ampliam possibilidades de compreensão de ideias matemáticas, permitindo que se generalizem e criem-se modelos para descrever situações específicas.

Todos os depoentes entendem que há uma distinção entre uma “Álgebra básica”, ensinada na *Educação Básica* e na *Educação Média*, centrada no trabalho com equações e operações elementares, e uma “Álgebra avançada”, vinculada a domínios mais abstratos, como a Teoria de Grupos e Álgebra Linear.

Os professores entrevistados evidenciam uma crença compartilhada na eficácia da prática de exercícios como meio privilegiado de aprendizagem algébrica, diversificando-os quanto ao teor dos exercícios. Os primeiros assumem uma abordagem operacional, centrada na repetição como forma de domínio técnico; os professores da Licenciatura enfatizam o rigor formal e as demonstrações.

A investigação revelou que, na Colômbia, a formação dos professores em Álgebra é fortemente influenciada pelo livro “A Álgebra de Baldor” que se mostra como um marco cultural de um modo específico de ensinar e de compreender Álgebra, e, mais do que isso, de delinear a estrutura curricular no que tange a esse assunto. Entendemos que esse livro vai além de ser tomado como um recurso didático. Ele se tornou um símbolo de uma tradição pedagógica que sustenta a compreensão da Álgebra e do seu ensino.

Compreendemos que o ensino de Álgebra, ao longo do tempo-espaço escolar, evidencia três rupturas — entendidas mais como transição entre epistemologia, do que como uma quebra entre um modo e outro de compreender — que *conduzem a* ou são *reveladas por* dificuldades de aprendizagem dos alunos com a compreensão e respectivo trabalho com Álgebra. Uma primeira “ruptura” se refere à transição da Aritmética para a Álgebra, em que se passa do trabalho do campo das operações numéricas para adentrar no âmbito das variáveis. O que acontece aqui, é uma maior exigência de pensamento abstrato. Uma segunda “ruptura” se refere à passagem da *Educação Média* para a *Educação Superior*, especialmente quanto ao enfoque da Álgebra nos cursos de formação de professores de Matemática, quando se muda da visão da Álgebra sincopada para aquela que trabalha com estruturas. Uma terceira “ruptura” diz respeito à dificuldade de os professores estabelecerem uma conexão clara entre os conhecimentos algébricos trabalhados na Licenciatura em Matemática e uma compreensão mais ampla da Álgebra, capaz de sustentar práticas pedagógicas que transcendam uma abordagem mecanicista.

Entendemos, com a pesquisa que realizamos, que essas “rupturas” ou transição entre epistemologias, na Colômbia, são sustentadas por três conjuntos de aspectos que carecem de atenção: o primeiro reúne a centralidade do livro *Álgebra de Baldor*, assumido como uma autoridade e como um modelo didático; o segundo conjunto de aspectos diz respeito à abordagem de ensino que privilegia o domínio técnico e algorítmico, em detrimento de uma compreensão conceitual possibilitada por atividades que viabilizem vivências de ideias centrais ao pensamento algébrico; e o terceiro diz respeito à ênfase excessiva na realização de exercícios.

Entendemos, com nossos estudos, que a história da Álgebra revela que a Álgebra Moderna não realiza uma ruptura com o realizado até então, porém reúne, em um campo mais abrangente, ideias constantes dos períodos clássico e moderno da Álgebra, mostrando haver uma continuidade entre ambos os períodos e, mais do que isso, um pensar teorizante que nucleia muitas ideias concernentes a ambos. Isso posto, depreendemos que é preciso que o estudo de Álgebra foque as ideias que persistem ao longo do tempo em sua historicidade e que destaque o pensar teorizante que reúne, estruturando essas ideias.

Entendemos ser preciso repensar os espaços formativos do professor que ensina Álgebra. Alertamos, entretanto: não se tratar tão somente de uma questão de integrar o conhecimento do que se aprende na universidade e do que se vai ensinar na *Educação Básica* e na *Educação Média*. É preciso uma compreensão mais integrada e contextualizada da

Matemática que se ensina. Integrada em termos das ideias que são historicamente trazidas na região de inquérito da Álgebra; contextualizada em termos do que visa trabalhar ao ensinar e aprender Álgebra, no próprio movimento de aprender-ensinar-ensinando-aprendendo ao estar junto aos alunos, à Álgebra e na realidade escolar.

Compreendemos que é preciso trabalhar com vistas a possibilitar que:

* O sentido da Aritmética e de suas operações sejam compreensíveis para os alunos. É importante propor atividades de aprendizagem inseridas em cenários variados, que permitam aos alunos explorar o trabalho com a Aritmética e aplicar as operações tanto em situações concretas quanto desafiadoras. Ao vivenciarem contextos que envolvem diferentes formas de cálculo, comparação e organização numérica, os estudantes têm a oportunidade de reconhecer como as propriedades das operações podem ser mobilizadas para resolver problemas de maneira mais flexível. Entendemos que essa experiência, além de favorecer uma compreensão funcional da aritmética, também abre caminhos para o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois à medida que os alunos identificam padrões, formulam regras a caminho de generalizações. Assim, promove-se uma transição natural e fluida para níveis mais abstratos do raciocínio matemático.

* Os alunos compreendam as operações fundamentais e dominem seus procedimentos. Embora esse propósito apareça com frequência em currículos e práticas escolares, não basta repetir rotinas mecanicistas, é necessário conceber o ensino das operações como uma experiência vivenciada, na qual o aprender envolve sentido, intenção e o estar uns com os outros, e não apenas a reprodução técnica de passos. Ver as operações desse modo permite reconhecer que o aprendizado se dá quando os alunos participam ativamente de situações significativas — manipulam objetos, constroem representações, argumentam com pares, testam hipóteses, erram e reconstroem sentidos e nomeiam — e quando o professor faz a mediação do sentido dessas vivências para articular conceitos, representações e procedimentos.

* O ensinante e o aprendente se abram aos sentidos e aos significados de números. Nesse cenário, procura-se passar do uso meramente instrumental dos Algarismos para uma vivência reflexiva em que os números são compreendidos como construções culturais — elementos para interpretar o mundo e portadores de múltiplos significados, como quantidade, posição, medida, razão, código e escala. Nessa perspectiva amplia da compreensão do conceito de número, é possível avançar para abordagens mais profundas, como “número como símbolo” ou “número como quantidade abstrata” (Bortolote, 2024).

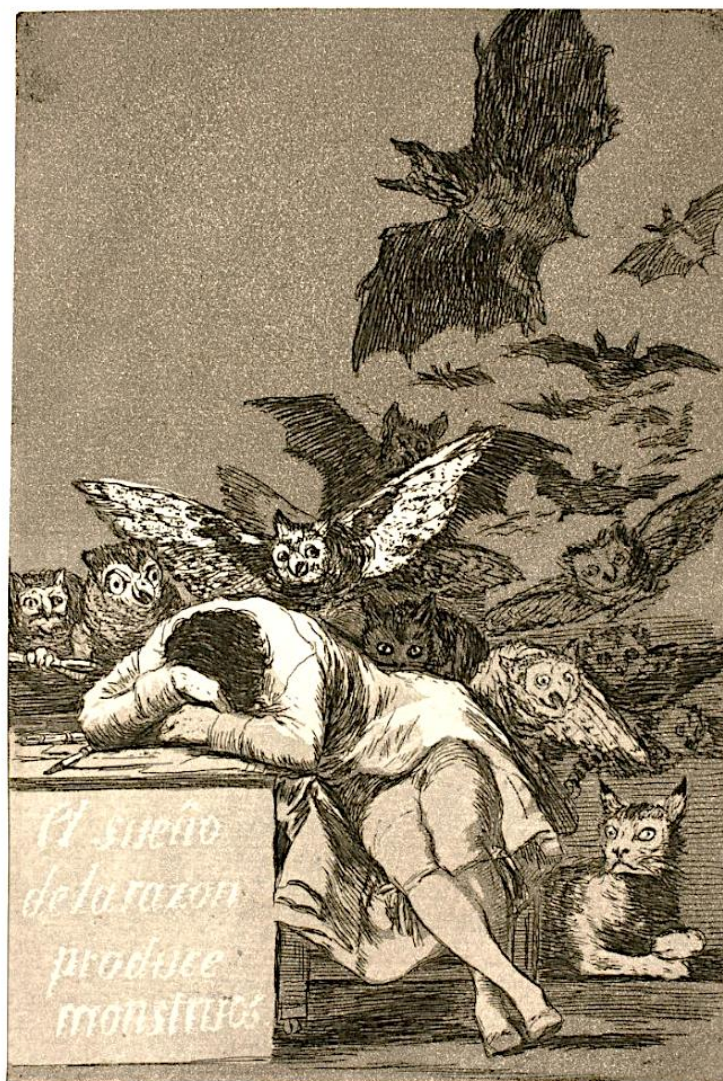
* O ensinante e o aprendente se abram ao horizonte de compreensões dos sentidos de variável passíveis de serem expressos por letras. Isso exige deslocar a letra do papel de símbolo puramente procedural para a posição de representação de relações, dependências e possibilidades: a letra pode encarnar um valor que varia, um parâmetro que controla um padrão, uma etiqueta que organiza informações, uma incógnita em busca de solução, ou uma função que relaciona grandezas. Abrir-se a esse horizonte significa cultivar sensibilidade para a pluralidade de significados assumidos pela letra e para a passagem entre intuições concretas e descrições simbólicas.

* O ensinante e o aprendente que se abram aos sentidos e significados de as letras substituírem os números, enlaçando o sentido de generalização. Esse movimento implica deslocar a compreensão das letras de meros sinais operacionais para objetos de significado que expressam padrões, regularidades e relações gerais entre quantidades. Nesse cenário a letra passa a ser porta de entrada para o pensamento algébrico, permitindo que situações particulares sejam vistas como instâncias expressas em uma linguagem de regras mais gerais. Abrir espaço para que ensinantes e aprendentes possam avançar ao horizonte em que letras substituem números requer desenvolver atividades que conectem exemplos concretos à expressão simbólica. Trata-se de investir em mediações que tornem explícito o que diz a letra, na generalização, e proporcionar formações que permitam aos docentes ler e intervir nas trajetórias de compreensão algébrica dos estudantes.

* Compreendemos que é importante conduzir o ensino da Álgebra de modo a articular o domínio sintático — centrado na manipulação formal de expressões simbólicas — com a construção de significados. Embora regras sintáticas e procedimentos formais sejam necessários para transformar e resolver expressões algébricas, esse trabalho não pode se reduzir à aplicação mecânica de algoritmos. É preciso favorecer o desenvolvimento de práticas que promovam a compreensão dos *porquês* envolvidos, estabelecendo conexões entre os procedimentos e os conceitos que os sustentam. Quando os alunos operam apenas no nível formal, sem compreender os significados das regras que aplicam, corre-se o risco de restringir o desenvolvimento do pensamento algébrico, comprometendo sua capacidade de interpretar, generalizar e aplicar o conhecimento.

* O ensinante e o aprendente trabalhem com sentidos e significados de estrutura algébrica, para possibilitar compreensões sobre os modos de generalização que se evidenciam em possibilidades de avançar em direção a poderem criar modelos para situações específicas, abrindo-se à compreensão de as estruturas algébricas revelarem propriedades universais. Entendemos que isso exige tratar a Álgebra não como um conjunto de procedimentos isolados,

mas como um modo de pensar para organizar relações, reconhecer regularidades e expressar generalidades que se aplicam além de casos concretos. Nesse contexto, a estrutura algébrica deve emergir de práticas de ensino que promovam a indagação, exploração, modelagem e argumentação, em que letras, expressões e equações são objetos matemáticos com sentido, que possibilitam descrever dependências, invariâncias e transformações.



GOYA, Francisco de
El sueño de la razón produce monstruos
1799

REFERÊNCIAS

- ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia**. Trad. Ivone Castilho Benedetti. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.
- AGUDELO-VALDERRAMA, Cecilia. Challenging the teaching-learning patterns in elementary algebra: A Colombian case. **12th ICMI Study: The Future of the Teaching and Learning of Algebra**. Melbourne, Australia. 2001.
- AGUDELO-VALDERRAMA, Cecilia. The power of Colombian mathematics teachers' conceptions of social/institutional factors of teaching. **Educ Stud Math**. v. 68, p. 37–54, 2008, <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9107-z>.
- ALES-BELLO, Angela. **Introdução à fenomenologia**. Trad. Ir. Jatinta Turolo Garcia e Miguel Mahfoud. Bauru, SP: Eduse, 108 p., 2006.
- ANASTACIO, Maria Q. Realidade: uma aproximação através da modelagem matemática. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**. v. 1, n. 1, p. 2-9, 2010.
- ANTON, Howard. **Álgebra linear com aplicações**. Trad. Claus Ivo Doering. – 10 ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
- ARCAVI, Abraham; DRIJVERS, Paul; STACEY, Kaye. **The Learning And Teaching Of Algebra: Ideas, Insights, and Activities**. London and New York: Routledge, 2017.
- BASSANEZI, Rodney. C. **Modelagem Matemática: uma disciplina emergente nos programas de formação de professores**. Biomatemática, Campinas, v. 9, p. 9-22, 1999.
- BAZANTE, Caldas. G. Breve historia del currículo y la formación de maestros en Colombia. **Revista Práxis Pedagógica**, [S. l.], v. 6, n. 7, p. 6–21, 2006.
- BICUDO, Maria. O Professor de matemática nas escolas de 1. e 2. graus. In: Bicudo, M.A.V. (Org.). **Educação Matemática**. 2 ed. São Paulo: MORAES, p. 45-57, 1987.
- BICUDO, Maria. A hermenêutica e o trabalho do professor de matemática. **Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos**. São Paulo: A Sociedade, v. 3, n. 3, 1993a.
- BICUDO, Maria. Pesquisa em Educação Matemática. **Pro-Posições**, v. 4, n. 1, mar. 1993b.
- BICUDO, Maria. Sobre a Fenomenologia. In. BICUDO, Maria e ESPOSITO, Vitoria (Org.). **A pesquisa em Educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Unimep, p. 15-34, 1994a.
- BICUDO, Maria. Compreensão do Simbólico na Educação Matemática. **Bolema: Rio Claro – SP**, v. 9, n. 10, 1994b.
- BICUDO, Maria. Fenomenologia: uma abordagem alternativa na pesquisa em educação. **Revista Brasileira de Educação**, n. 15, p. 62–70, jan./abr, 2000.

BICUDO, Maria. Construção do Conhecimento e construção da realidade. In: Bicudo, M; Belluzzo, R. (Org.). **Formação Humana e Educação**. 1ª. ed. Bauru: Editora da Universidade Sagrado Coração EDUSC, p. 317-326, 2002.

BICUDO, Maria. Pesquisa qualitativa: significados e a razão que a sustenta. **Revista Pesquisa Qualitativa**, v.1, n. 1, p.7-26, 2005.

BICUDO, Maria. Filosofia da Educação Matemática: por quê? **Revista Bolema**, Rio Claro (SP), v. 22 n. 32, p. 229-240, 2009.

BICUDO, Maria. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In **Filosofia da educação matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. Org. Bicudo, Maria. São Paulo: Editora UNESP, Edición de Kindle. p.22-48, 2010a.

BICUDO, Maria. Sobre o grupo Fenomenologia em Educação Matemática (FEM). In: Bicudo, Maria (Org.). **Filosofia da educação matemática: fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas**. São Paulo: Editora UNESP, Edición de Kindle. p. 225, 2010b.

BICUDO, Maria. A pesquisa qualitativa olhada para além dos seus procedimentos. In: Bicudo Maria. (Org.). **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. São Paulo: Cortez Editora. p.11-28, 2011a.

BICUDO, Maria. Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In: Bicudo Maria. (Org.). **Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica**. São Paulo: Cortez, p. 29-40, 2011b.

BICUDO, Maria. Pesquisa qualitativa fenomenológica: interrogação, descrição e modalidades de análise. In: Bicudo Maria. (Org.). **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. São Paulo: Cortez Editora. p.41-52, 2011c.

BICUDO, Maria. Análise fenomenológica estrutural e variações interpretativas. In: Bicudo Maria. (Org.). **Pesquisa Qualitativa Segundo a Visão Fenomenológica**. São Paulo: Cortez Editora. p.53-74, 2011d.

BICUDO, Maria. Pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, v. 5, p. 15-26, 2012.

BICUDO, Maria. Educação Matemática: um ensaio sobre concepções a sustentarem sua prática pedagógica e produção de conhecimento. In: FLORES, C. R. e CASSIANI, S. (Orgs.). **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica: sobre linguagens e práticas culturais**. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, p. 1-17, 2013.

BICUDO, Maria. Sobre história e historicidade em Edmund Husserl. **Cadernos da EMARF, Fenomenologia e Direito**, Rio de Janeiro, v.9, n.1, p.1-174 abr./set. 2016.

BICUDO, Maria. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In Borba e Araújo (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 6 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2019.

BICUDO, Maria. Pesquisa Fenomenológica em Educação: Possibilidades e desafios. **Revista Paradigma** (S. L.), v. 41, p. 30 – 56, 2020a.

BICUDO, Maria. The origin of number and the origin of geometry: issues raised and conceptions assumed by Edmund Husserl. **Revista Pesquisa Qualitativa**, [S. l.], v. 8, n. 18, p. 387–418, 2020b. DOI: 10.33361/RPQ.2020.v.8.n.18.337. Disponível em: <https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/337>.

BICUDO, Maria. Lógica da pesquisa qualitativa e os modos de procedimentos nela fundados. **Revista Pesquisa Qualitativa**, [S. l.], v. 9, n. 22, p. 540–552, 2021. DOI: 10.33361/RPQ.2021. v.9.n.22.507. Disponível em: <https://editora.sepq.org.br/rpq/article/view/507>.

BICUDO, Maria. O corpo-vivente: centro de orientação eu-mundo-outro. **International Medical Humanities Review**. v. 10, n. 2, p. 119-135, 2022.

BICUDO, Maria; COSTA, António. **Leituras em pesquisa qualitativa**. São Paulo: Editora Livraria da Física. p. 440, 2019.

BICUDO, Maria; GARNICA, Vicente. **Filosofia da Educação Matemática**. 5 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021.

BICUDO, Maria; PAULO, Rosa. Formação de Professores de Matemática: Como compreendê-la? **PARADIGMA**, Maracay, v. 46, n. 2, p. e2025020, 2025.

BOOT, Lesley. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: **As ideias da Álgebra**. Organizadores: Arthur F Coxford. Alberto Shulte; Trad. por Hygino H Domingues - São Paulo Atual. 1995. pp 23-36.

BORTOLETE, Juliano. **O pensar algébrico: uma perspectiva fenomenológica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2024.

BORTOLETE, Juliano; BICUDO, Maria. O pensar algébrico explicitado na BNCC sob análise. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro (SP), v. 38, p. e230285, 2024.

BOYER, Carl. **História de la Matemática**. Trad. Martínez Mariano. Madrid: Alianza, 1987.

CARRAHER, David; MARTINEZ, Mara; SCHLIEMANN, Analúcia. Early algebra and mathematical generalization. **ZDM Educación Matemática**. v. 40, 3–22, 2008. <https://doi.org/10.1007/s11858-007-0067-7>.

CASTRO, Walter. Razonamiento algebraico elemental: propuestas para el aula. **REVISTA CIENTÍFICA** v. 20, n. 3, p. 138-147, 2014.

CERBONE, David. **Fenomenologia**. Trad. Caesar Souza. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

CERVANTES-BARRAZA, Jonathan.; VALBUENA, Sonia; PATERNINA, Yovana. Argumentos de estudiantes de primaria en el contexto del Álgebra temprana. **Educación y Humanismo**, v. 21, n. 37, p. 120-138, 2019. DOI: 10.17081/eduhum.21.37.3459.

CHARLOT, Bernard. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artmed, 2000.

CONTRERAS-JAIMES, Karen; MARTINEZ-AGUILAR, Jessica; PRADA-NÚÑEZ, Raúl. Intervención pedagógica tendiente a desarrollar el pensamiento variacional en estudiantes de Educación Básica Primaria. **Eco Matemático**, v.11, n. 1, p. 6-19, 2020.

CORTES, Hector. Las herramientas web 2.0 en la enseñanza de la matemática fundamental. **Revista Dialéctica**, v. 27, p. 130-149, 2011.

CUNHA, Renata; FERNANDES, Carla; MOTA, Ednaceli; NOGUEIRA, Eliane Greice. Professor/a: os elementos de uma identidade em construção. **Pro-posições**, Campinas, v.18, n. 52, p.153-167, jan./abr. 2006.

DÁVILA R, Guillermo. El desarrollo del Álgebra Moderna-Parte III: El surgimiento del Álgebra abstracta. **Apuntes de Historia de las Matemáticas**. Universidad de Sonora-México, v.2, n.2, may. 2003.

DEPRAZ, Natalie. **Compreender Husserl**. Trad. Santos Fábio dos. Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

DILTHEY, Wilhelm. O Surgimento da Hermenêutica (1900). Tradução: Gross, E. Die Entstehung der Hermeneutik (1900), In: **Gesammelte Schriften, Numen: revista de estudos e pesquisa da religião**, Juiz de Fora, v.2, n.1, p. 11-32, 1999.

DOERR, Helen M. Teachers' Knowledge and the Teaching of Algebra. In: Stacey K., Chick H. e Kendal M. (Edit). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study**. New York: Kluwer Academic Publishers, p. 265-290, 2004.

DROUHARD Jean-Philippe; TEPPON Anne. Symbols and Language. In: Stacey K., Chick H. e Kendal M. (Edit). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study**. New York: Kluwer Academic Publishers, p. 227-265, 2004.

DURAN-LAMUS, Josué; HERNÁNDEZ-SUÁREZ, Cesar; PRADA-NÚÑEZ, Raúl. Dificultades alrededor de tareas algebraicas, ¿existen diferencias de género? **Eco Matemático**, v. 11, n. 2, p.18-29, 2020.

EISENBERG, Theodore; DREYFUS, Tommy. Os polinômios no currículo da escola média. In: **As ideias da Álgebra**. Organizadores: Arthur F Coxford. Alberto Shulte; Trad. Hygino H Domingues - São Paulo Atual, pp.127-134, 1995.

ERTMER, Peggy A.; NEWBY, Timothy J. **Behaviorism, Cognitivism, Constructivism: Comparing Critical Features From an Instructional Design Perspective**. Performance Improvement Quarterly, v. 6, n. 4, p. 50-72, 1993. DOI: 10.1111/j.19378327.1993.tb00605.x.

ESCUADERO, Jesús Adrián. **El lenguaje de Heidegger**: Diccionario filosófico 1912-1927. Barcelona: Herder, 2009.

ESPÓSITO, Vitoria. Hermenêutica: Estudo Introdutório. **Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos**. São Paulo: A Sociedade, v.2, n.2, p. 85-111, 1991.

ESPÓSITO, Vitoria. Pesquisa Qualitativa: Modalidade Fenomenológico-Hermenêutica: relato de uma pesquisa. In: BICUDO, Maria e ESPOSITO, Vitoria (Org.). **A pesquisa em Educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Unimep, p. 81-93, 1994.

FADDA, Gisella; CURY, Vera. O fenômeno da intersubjetividade na relação psicoterapêutica. **Revista Subjetividades: Especial: Psicologia & Fenomenologia**. v.21 (Especial 1): e9445, 2021.

FERREIRA, Miliam. J. A. **A constituição e a produção do conhecimento matemático ao ser-com o computador**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2019.

FEY, James; DOERR, Helen; FARINELLI, Robert; FARLEY, Rueben; LACAMPAGNE, CAROLE; MARTIN, Gary; PAPICK, Ira; YANIK, Elizabeth. Preparation and Professional Development of Algebra Teachers. In: KATZ, Victor (Edit.). **Algebra, Gateway to a Technological Future**. United States of America: The Mathematical Association of America, 2007.

FIALLO-LEAL, Jorge; PARADA-RICO, Sandra. Curso de precálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento varacional. **Científica**. v. 20, n. 3, p. 56-71, 2014.

FISCHER, Thomas. Antes de la separación de panamá: la guerra de los mil días, el contexto internacional y el canal. **Universidad Nacional de Colombia Revistas electrónicas UN Anuario Colombiano de Historia Social y de la Cultura**, 1998. Disponible en: <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/30451>

FIGUEROA, Claudia. Orígenes, formación y proyección de las Facultades de Educación en Colombia 1930 - 1954. **Revista Historia de la Educación Latinoamericana**, v.8, p. 201-220, 2006. ISSN: 0122-7238. Disponible en: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=86900810>.

FILLOY, Eugenio; PUIG, Luis; ROJANO, Teresa. **Educational Algebra: A Theoretical and Empirical Approach**. New York, NY: Springer, 2008.

FINI, Maria. Sobre a Pesquisa Qualitativa em Educação, que Tem a Fenomenologia como Suporte. In: **A pesquisa qualitativa em educação: um enfoque fenomenológico**. (Org) Bicudo Maria e Esposito Vitória. Piracicaba: Editora Unimep, p. 81-93, 1994.

FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-posições**, Campinas, v. 4 [1], n. 10, p. 78-91, março, 1993.

FRAILE, Angel. R. **El Álgebra: del arte de la cosa a las estructuras abstractas**. Ciencia Hoy., Santillana, 1998.

FRALEIGH, John B. **Algebra Abstracta**, Primer Curso, 3. ed. México: Addison-Wesley, 1988.

FREUDENTHAL, Hans. What is algebra and what has it been in history?. **Arch. Rational Mech.** 16, p.189 – 200, 1977. <https://doi.org/10.1007/BF00328154>.

GARCÍA-MÁRQUEZ, Gabriel. **Cien Años De Soledad**. 47. ed. Buenos Aires, Editorial Sudamericana, 1976.

GADAMER, Hans-Georg. **O problema da consciência histórica**. Fruchon Pierre (Org) e Duque-Estrada Paulo (trad). -2. ed. Rio de Janeiro: Editora FGV, 72p, 2003.

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e método I**: Traços fundamentais de uma hermenêutica filosófica. Tradução: GIACHINI, Enio P. Petrópolis, RJ: Vozes, 631p, 2011a.

GADAMER, Hans-Georg. **Verdade e método II**: complementos e índice. Tradução: GIACHINI, Enio P. Petrópolis, RJ: Vozes, 621, 2011b.

GARNICA, Vicente. M. Um ensaio sobre as concepções de professores de Matemática: possibilidades metodológicas e um exercício de pesquisa. **Educação e Pesquisa**, v. 34, n. 3, p. 495-510, 2008.

GEORGI, Amadeo; GIORGI, Barbro; MORLEY James. The Descriptive Phenomenological Psychological Method. In. STANTON-ROGERS Wendy e WILLIG Carla (Ed.). **The SAGE Handbook of Qualitative Research in Psychology**, 2nd Ed. Los Angeles: SAGE, 2017.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GÓMEZ, Alfonso. Implementación de la matemática moderna en Colombia: serie matemática moderna estructurada. **Palabra**, v. 21, n. 1, p. 24-42, 2021.

GOMEZ, Oscar. Desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de grado noveno. **Revista científica**, v. 1, n.1, p. 115-120, 2013.

GONZÁLEZ, Fredy; BICUDO, Maria. A Base Filosófico-Científica sobre a qual ocorreu a Educação Matemática do Jovem Husserl. **REVISTA ACTA SCIENTIAE**, v. 26, p. 1-24, 2025.

GRAY, Jeremy. **A history of Abstract Algebra: from Algebraic Equations to Modern Algebra**. Switzerland: Springer, 2018.

GUACANEME, Edgar; OBANDO, Gilberto; GARZÓN, Diego; VILLA-OCHOA Jhony. Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Año 8. Especial Noviembre. p. 11-49, 2013.

GUARUMO, Ines. Didáctica del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos en instituciones indígenas del resguardo Escopetera y Pirza, Riosucio - Caldas. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 11, n. 2, p. 76-97, 2018.

HEIDEGGER, Martin. **Ser e Tempo**. Parte I. 15. ed. Trad. Schuback M. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2005a.

HEIDEGGER, Martin. **Ser e Tempo**. Parte II. 13. ed. Trad. Schuback M. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2005b.

HUSSERL, Edmund. **Lições para uma fenomenologia da consciência interna do tempo.** Tradução, introdução e notas de Pedro M. S. Alves. Lisboa: Casa da Moeda, 1994.

HUSSERL, Edmund. **A crise da humanidade europeia e a filosofia.** Trad. Urbano Zilles, Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HUSSERL, Edmund. **Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica:** introdução geral à fenomenologia pura. Trad: Suzuki M. Aparecida, SP: Idéias & Letras, 2006.

HUSSERL, Edmund. **A Crise das Ciências Europeias e a Fenomenologia Transcendental:** Uma Introdução à Filosofia Fenomenológica. Edit. Biemel Walter; Trad. Ferrer Diogo. -1.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2012.

HUSSERL, Edmund. **Meditações cartesianas e Conferências de Paris:** de acordo com o texto de Husserliana I. Edit. Strasser Stephan, Trad. Alves Pedro M. S. - 1 ed. - Rio de Janeiro: Forense, 2013.

HUSSERL, Edmund. **Investigações Lógicas - Sexta Investigação:** Elementos de uma elucidação fenomenológica do conhecimento (Coleção Os Pensadores). Trad. Zeljko Loparic. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

HUSSERL, Edmund. **A ideia da fenomenologia:** cinco lições. Trad. De Marloren Miranda. Petrópolis: Editora Vozes, 2020.

JIMÉNEZ, Alfonso. Formación de profesores de matemáticas: el caso de la licenciatura más antigua de Colombia. **Revista Praxis & Saber**, v. 10, n. 22, p. 45-70, 2019.
<https://doi.org/10.19053/22160159.v10.n22.2019.7945>.

KATZ, Victor. **Algebra, Gateway to a Technological Future.** United States of America: The Mathematical Association of America, 2007.

KIERAN, Carolyn. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em Álgebra. In: As ideias da Álgebra. Organizadores: Arthur F Coxford. Alberto Shulte; Trad. Hygino H Domingues - São Paulo Atual. p.9-22, 1995.

KIERAN, Carolyn. The Core of Algebra: Reflections on its Main Activities. In: Stacey K., Chick H.e Kendal M. (Edit). **The Future of the Teaching and Learning of Algebra: The 12th ICMI Study.** New York: Kluwer Academic Publishers, p.21-33, 2004.

KLEIN, Felix. **Matemática elemental desde un punto de vista superior:** Aritmética, Álgebra, Análisis. Trad. Jesús Fernández *et al.* España: NIVOLA, 2006.

KLUTH, Verilda S. Metodologia de Pesquisa Fenomenológica em Educação Matemática: A Rede de Significação. **Educ. Matem. Pesq**, São Paulo, v.22, n. 3, p. 84-104, 2020.

KLUTH, Verilda S. **Estruturas da Álgebra:** Investigação fenomenológica sobre a construção do seu conhecimento. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2005.

KVALE, Steiner. **Las entrevistas en Investigación Cualitativa**. Trad. Blanco, C. Madrid: Ediciones Morata, S. L., 2011.

LAMMOGLIA, Bruna. **O sistema de avaliação de rendimento escolar do Estado de São Paulo (SARESP) em escolas da Rede Estadual de Ensino**. 2013. Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2013.

LEE, Lesley. An initiation into algebraic culture through generalization activities. In: BEDNARZ N., KIERAN C. e LEE L. **Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching**. LONDON: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, p. 87-106, 1996.

LEÓN SALINAS, Carlos. El pensamiento covariacional y GeoGebra: herramientas para la explicación científica de algunas realidades. **Tecné, Episteme y Didaxis: TED**, [S. l.], n. 42, p. 159–171, 2017. DOI: 10.17227/01203916.6969.

LINCHEVSKI, Liora; LIVNEH, Drora. Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. **Educational Studies in Mathematics**. v.40, p. 173–196, 1999.

LIMA-SANTOS, Francisco. A Escola de Alexandria e sua interpretação alegórica das Sagradas Escrituras. **Revista de Pesquisa em Teologia, PqTeo**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 11, p. 108-123 jan./jun. 2023.

LINS, Romulo; GIMENEZ Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. 4. ed. Campinas, SP: Papirus, 2001.

LÓPEZ Lina *et al.* **Reflexiones en torno a la enseñanza de las Ciencias Económicas**. Tunja: Editorial UPTC, 238p, 2022.

MACHADO, Ozeneide V. Pesquisa qualitativa: modalidade fenômeno situado. In: BICUDO, Maria e ESPOSITO, Vitoria (Org.). **A pesquisa em Educação: um enfoque fenomenológico**. Piracicaba: Unimep, p. 35-46, 1994.

MACINI, Lidiani; MOCROSKY, Luciane. **A formação inicial do professor no movimento de aprender-ensinar Matemática**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e em Matemática, setor de ciências exatas). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2024.

MACGREGOR, Mollie. Goals and Content of an Algebra Curriculum for the Compulsory Years of Schooling. In: Stacey K., Chick H. e Kendal M. (Edit) **The Future of the Teaching and Learning of Algebra The 12th ICMI Study**. New York: Kluwer Academic Publishers, p. 313-328, 2004.

MAHONEY, Michael S. **The Mathematical Career of Pierre de Fermât (1601-1665)**. New Jersey: Princeton University Press, 1973.

MARDONES, José; URSÚA, Nieves. **Filosofía de las ciencias humanas y sociales: materiales para una fundamentación científica**. Barcelona: Editorial Fontamara, 1982.

MARTINEZ-LOPEZ, Leonardo; GUALDRON-PINTO, Elgar. Fortalecimiento del pensamiento variacional a través de una intervención mediada con TIC en estudiantes de grado noveno. **Rev.investig.desarro.innov**, v. 9, n.1, p. 91-102, 2018. doi: 10.19053/20278306.v9.n1.2018.8156.

MARTINS, Joel; BOEMER, Magali; FERRAZ. A Fenomenologia como Alternativa Metodológica para Pesquisa-Algumas considerações. **Cadernos da Sociedade de Estudos e Pesquisa**, v.1, n.1, p. 33-47, 1991.

MASSA-ESTEVE, María. Las relaciones entre el Álgebra y la geometría en el siglo XVII. **Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas**, v. 24, n. 51, p. 705-726, 2001.

MASON, Jhon. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ N., KIERAN C. e LEE L. **Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching**. LONDON: KLUWER ACADEMIC PUBLISHERS, p. 65-86, 1996.

MASON, John.; GRAHAM, Alan.; PIMM, David. **Rutas hacia el algebra-Raíces hacia el algebra** Traducción: AGUDELO-VALDERRAM C. Routs to/Roots of Álgebra. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 1988.

MASON, Jhon; BURTON, Leone; STACEY, Kaye. **Pensar matemáticamente**. Barcelona: Editorial Labor, 1989.

MASON, John; GRAHAM, Alan; JOHNSTON-WILDER, Sue. **Developing Thinking in Algebra**. London: The Open University, 2005.

MERLEAU-PONTY, Maurice. **Fenomenologia da percepção**. Trad. Moura C. Alberto. 2. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. **O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde**. 7. ed. São Paulo: Hucitec, 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL [MEN]. **Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas**. Editorial Magisterio: Bogotá, 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL [MEN]. **Propuesta programa curricular Matemáticas**. Colombia, Santafé de Bogotá: Dirección General de Capacitación, Currículo y Medios Educativos, MEN. Editorial Magisterio: Santafé de Bogotá, 1988.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL [MEN]. **Derechos Básicos de Aprendizaje Matemáticas (DBA v. 2)**. Santafé de Bogotá. 2016.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL [MEN]. **Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas**. Bogotá: MEN, 2006.

MOLANO, Milton. Carlos Eduardo Vasco Uribe. Trayectoria biográfica de un intelectual colombiano: una mirada a las reformas curriculares en el país. **Revista Colombiana de Educación**, n.61, p. 161- 198, 2011.

MOLINA-Toro, Juan; VILLA-OCHOA, Jhony; SUÁREZ-TELLEZ, Liliana. La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v.11, n. 1, p. 87-115, 2018.

MONDINI, Fabiane. **Modos de conceber a Álgebra em cursos de formação de professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2009.

MONDINI, Fabiane. **A Presença da Álgebra na Legislação Escolar Brasileira**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2013.

MONDINI, Fabiane; MOCROSKY, Luciane; BICUDO, Maria. A hermenêutica em educação matemática: compreensões e possibilidades. **REVEMAT**. Florianópolis (SC), v.12, n. 1, p. 1-10, 2017.

MORA, Ferrater. **Dicionário de filosofia**. São Paulo- Brasil: Edições Loyola, 2001.

MOURA, C. Alberto. **Crítica da razão na fenomenologia**. São Paulo-Nova Stella: Editora da Universidade de São Paulo, 1989.

MAURY, Erwin; PALMEZANO, Gregorio; CARCAMO, Sandro. Sistema de tareas para el desarrollo del pensamiento variacional en 5º grado de Educación Básica Primaria. **Escenarios**, v.10, n.1, p.7-16, 2012.

NUÑEZ, Juan; SANCHEZ, Alfonso. Modelamiento Matemático como herramienta de articulación de la matemática universitaria en estudiantes de pre-cálculo. **Rev. Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información**, v.3, n.5, p.37-50, 2016.

OLIVEIRA, Vanessa de. **Pensamento Algébrico nos anos iniciais**: Um olhar para as expressões do professor. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2022.

ORDÓÑEZ-ORTEGA, Odair; GUALDRÓN-PINTO, Elgar; AMAYA-FRANKY Germán. Pensamiento variacional mediado con baldosas algebraicas y manipuladores virtuales. **Rev.investig.desarro.innov**, v. 9, n. 2, p. 347-362, 2019.

PADILLA, Iván; MAYORAL, Vanessa. Las tutorías académicas en el fortalecimiento del algebra en estudiantes de octavo grado en una escuela distrital de Barranquilla. **Revista Zona Próxima**, v. 32, p.33-54, 20202.

PALMER, Richard. E. **Hermenêutica**. Tradução: Maria Luísa Ribeiro Ferreira. Lisboa: Edições 70, 1999.

PASTRAN, José; PINZON, Francisco. Software libre: Una estrategia para aprender a factorizar. **Visión Electrónica**, v.9 n.1, p. 139-148, 2015.

PAULO, Rosa; AMARAL, Carmen; SANTIAGO, Rosemary. A pesquisa na perspectiva fenomenológica: explicitando uma possibilidade de compreensão do ser-professor de matemática. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**. v.10. n.3, p.71-86, 2010.

PERRENOUD, Philippe. **Ensinar**: agir na urgência, decidir na incerteza. Porto Alegre: Artmed, 1999.

PIMENTA, Selma. Formação de professores: identidade e saberes da docência. In.: PIMENTA, S. Org. **Saberes pedagógicos e atividade docente**. São Paulo, Cortez, 2002.

PINILLA, Diana. Interpretación de la letra en estudiantes “talentosos” de educación básica y media. **Revista científica**, v.1, p. 611-616, 2013.

PINHEIRO, José M. **O movimento e a percepção do movimento em ambientes de Geometria Dinâmica**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2018.

PONTE, João. Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, In J. P. Ponte (Ed.), **Educação matemática: Temas de investigação**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, p. 185-239, 1992.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. - 2.Ed. Rio de Janeiro: Interciência, 196 p., 1995.

PRADA-NÚÑEZ, Raúl; HERNÁNDEZ SUÁREZ, César Augusto; JAIMES CONTRERAS, Luis Alberto. Representaciones semióticas alrededor del concepto de función en estudiantes de ingeniería. Góndola, **Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias**, [S. l.], v. 12, n. 2, p. 14–31, 2017. DOI: 10.14483/23464712.10491.

RICOEUR, Paul. **Interpretação e ideologias**. Trad. Japiassu Milton. Rio de Janeiro: F. Alves, p.172, 1990.

RICOEUR, Paul. **O conflito das interpretações: ensaios de hermenêutica**. Trad. Correia M.F. Sá. Porto-Portugal: RÉS-Editora, p.487, 1988.

RICOEUR, Paul. **Do texto a ação: ensaios de hermenêutica II**. Trad. Cartaxo Alcino e Sarabando Maria. Porto-Portugal: RÉS-Editora, p.407, 1989.

RINCÓN-HERNÁNDEZ, Diana M. Pensamiento algebraico: Una experiencia de aula, apoyada por TIC, sobre ecuaciones lineales con estudiantes de grado noveno. **Revista Científica**, [S. l.], v. 17, n. 2, p. 593–597, 2014. DOI: 10.14483/23448350.7732. Disponível em: <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/revcie/article/view/7732>.

RINCÓN-BONILLA, Luis. La Educación Colombiana en la Década de los 80. **Convergencia Revista de Ciencias Sociales**, Universidad Autónoma del Estado de México, n. 14, p.143-148, 1997.

RUSSELL, Bertrand. **Introdução à Filosofia Matemática**. Edição e tradução de Augusto J. Franco de Oliveira. Centro de Estudos de História e Filosofia da Ciência da Universidade de Évora, 1ª edição (provisória), janeiro de 2006.

RUSSELL, Bertrand. **Misticismo y Lógica y otros ensayos**. Trad. Jordan Santiago. Barcelona: Edhasa, 2010.

SALLES, Walter. Paul Ricoeur e a hermenêutica de si no espelho das palavras. **Utopía y Praxis Latinoamericana**, Maracaibo, v. 14, n. 47, p. 41-58, dic. 2009.

SANABRIA, Gloria I. Dificultades detectadas al pasar del Álgebra al cálculo en educación matemática. **Infancias Imágenes**, [S. l.], v. 12, n. 1, p. 44–50, 2013. DOI: 10.14483/16579089.4919. Disponível em: <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/infancias/article/view/4919>.

SÁNCHEZ, Clara H; ALBIS, Víctor S. Historia de la enseñanza de las matemáticas en Colombia. De Mutis al siglo XXI, **Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología**, v.14 n.1, p.109-157, 2012.

SOKOLOWSKI, Robert. **Introdução a fenomenologia**. Trad: DE OLIVEIRA-MORAES, Alfredo. 3. ed. São Paulo: Edições Loyola, 2012.

SOUSA, Maria do Carmo de. **O ensino de Álgebra numa perspectiva logico-histórica: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental**. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas-SP, 285 p, 2004.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra Linear**. São Paulo: Editora Makron Books, 1987

STRUCHINER, Cinthia D. Fenomenologia: de volta ao mundo-da-vida. **Rev. Abordagem gestalt.**, Goiânia, v.13, n.2, p.241-246, dez. 2007.

SUÁREZ, Sonia; ROJAS, Silvia; PARADA PICO, Sandra. Actividades de refuerzo para estudiantes de once grado alrededor de sus habilidades comunicativas en matemáticas: una alternativa de preparación para el ingreso a la universidad. **Revista Científica**, [S. l.], v. 17, n. 2, p. 418–422, 2013. DOI: 10.14483/23448350.6510.

TAMAYO-VALENCIA Alfonso. El Movimiento pedagógico en Colombia: Un encuentro de los maestros con la Pedagogía. **Revista HISTEDBR On-line**, Campinas, n.24, p. 102 –113, dez. 2006 - ISSN: 1676-2584.

TAMBARUSSI, Carla. **A produção do conhecimento matemático ao se trabalhar com modelagem matemática**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, 2021.

TAVERA-ACEVEDO, Ferney; VILLA-OCHOA, Jhony Alexander. El pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas: una mirada desde los libros de texto. **Revista Científica**, [S. l.], v. 17, n. 2, p. 298–302, 2013. DOI: 10.14483/23448350.7058.

THOMPSON, Alba. Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In. **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. Douglas A. Grouws. (Edit.) USA: The National Council of Teachers of Mathematics. p. 127-146, 1992.

TIRADO, B., GUALDRÓN, E; ÁVILA, A. Estrategia didáctica para fortalecer la competencia de comunicación matemática por medio de la fotografía. **Revista Logos Ciencia & Tecnología**, v. 11, n. 2, p. 102-112, 2019. <http://dx.doi.org/10.22335/rlct.v11i2.827>.

TORRES, Alfonso. **Aprender a investigar en Comunidad**. Bogotá, D. C. UNAD. 1996.

TURATO, Egberto; BASTOS Rodrigo; VIEIRA André; WEBER Aldair. As pesquisas qualitativas: desafios de sua cientificidade. In: Bicudo MV. e Costa, A. **Leituras em pesquisa qualitativa**. São Paulo: Editora Livraria da Física. 1ª. p. 135-144, 2019.

USISKIN Zalman. Concepções sobre a Álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: **As ideias da Álgebra**. Organizadores: Arthur F. Coxford, Alberto Shulte; Trad. Hygino H. Domingues - São Paulo Atual. 1995. pp.9-22.

VAN-MANEN, Max. **Investigación educativa y experiencia vivida**: Ciencia humana para una pedagogía de la acción y la sensibilidad. Barcelona-España: Idea Book, S.A, 2003.

VASCO, Carlos. **Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas**. Vol. II. Ministerio de Educación Nacional: Bogotá, 1984.

VASCO, Carlos. Reformas de los currículos escolares en matemáticas en las Américas: el caso colombiano. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Costa Rica, 2018. v. 13, n. 17, p. 223-229, 2018.

VERGEL, Rodolfo. Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). **REVISTA CIENTÍFICA**, v. 17, n.2, 2013.

VIGOTSKI, Lev Semionovitch. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VIRKLER, Henry A. **Hermenêutica Avançada: princípios e processos de interpretação Bíblica**. Tradução: APARECIDO-CARUSO Luiz. São Paulo: Editora Vida, 1998.

WHITEHEAD, Alfred; RUSSELL, Bertrand. **Principia Mathematica**. Trad. Dominguez J. M. Paraninfo, S.A. Madrid, España, 1981.

ZAPATA, Sandra, SANTA, Zaida; JARAMILLO, Carlos. El profesor de primaria: una reflexión sobre su papel en la inclusión del Álgebra temprana en el currículo escolar. **Revista Virtual Universidad Católica del Norte**, v.55, p. 192 – 209, 2018.

ZULUAGA, Olga; OSSENBACH, Gabriela. **Compiladoras y otros catorce autores**. Génesis y desarrollo de los sistemas Educativos Iberoamericanos Siglos XIX. Grupo de la História Pedagógica. 1ª ed. Bogotá: Editorial: Magisterio, 2004.

ANEXOS

Anexo 1. Termo de consentimiento libre e esclarecido

Este documento, compuesto por seis folhas, foi entregue aos entrevistados para ser lido em um tempo razoável, fornecendo os devidos esclarecimientos sobre as dúvidas enquanto participavam na sala.

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TÍTULO DEL PROYECTO: Concepções de álgebra explicitadas por professores e professores em formação na Colômbia

Investigador: ARLEY ZAMIR CHAPARRO CARDOZO

Institución: Universidade Estadual Paulista
Instituto de Geociências e Ciências Exatas –
Câmpus de Rio Claro–
São Paulo – Brasil
Dirección: Avenida 24 A, 1515 - Rio Claro/SP - CEP 13506-

900

1. PROPÓSITO DEL ESTUDIO

Partiendo de la experiencia del investigador en la docencia, en diferentes niveles de escolaridad, y luego de amplias discusiones al interior del grupo de investigación Fenomenología em Educação Matemática (FEM)¹ se fue tomando clara la necesidad de comprender cómo el Álgebra es concebida y enseñada en la formación de profesores y en Educación Básica en Colombia. Esta cuestión involucra, según nuestra comprensión, la posibilidad de reflexionar sobre el acto de enseñar y el vínculo con el conocer,

¹ El grupo de investigación es liderado por la profesora Dra. Maria Aparecida Vigiani Bicudo. En términos de investigación científica, los resultados de los trabajos realizados al interior del grupo repercuten en la Filosofía de la Educación Matemática, evidenciando la línea de pensamiento fenomenológico, en lo que respecta a las visiones: de conocimiento e de realidad; de conocimiento matemático e de realidad del objeto matemático; de construcción existencial de lo pre-reflexivo; de las ideas de numeración y de geometría; de la temporalidad en el horizonte de la constitución de la aritmética e de la geometría; del lenguaje: desplegando la comprensión existencial; de la temporalidad en el horizonte de la constitución de la aritmética y la geometría; del tiempo vivido en la *forma/ação* del profesor de matemática. Actúan en el área del conocimiento de la Educación, en lo que dice al respecto fenómeno de la educación, y en la investigación, lo que dice respecto a los procedimientos de investigación cualitativa y respecto a los cimientos filosóficos.

TERMO DE CONSENTIMIENTO LIVRE E ESCLARECIDO

particularmente en lo que se refiere al Álgebra, que en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas busca establecer posibles caminos que permitan explicitar conexiones entre lo que se aprende en el pregrado y los que es enseñado en Educación Básica y Media.

Esta interrogación manifiesta el carácter situado de la investigación, por tanto, demanda dar cuenta de la realidad educativa colombiana. Por eso tomamos como referente una de las primeras Facultades de Educación de Colombia. La trayectoria histórica de la Matemática y su enseñanza en Colombia ha estado ligada desde 1935 a la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia —UPTC—, y a la trayectoria de su programa de Licenciatura en Matemáticas², que aún se encuentra vigente en la formación de profesores de Matemáticas impactando la educación de la región.

2. SUJETOS PARTICIPANTES

Para realizar esta investigación serán entrevistados profesores de Matemáticas y estudiantes para profesor que vivencian el fenómeno. Esto es, profesores del programa de Licenciatura en Matemáticas de la UPTC, de la ciudad de Tunja, que enseñan Álgebra en diferentes materias, estudiantes de ese programa de pregrado y profesores de Educación Básica y Media, cuyo currículo contempla temas de Álgebra en colegios de la misma ciudad y en que los estudiantes de la universidad realizan prácticas, en virtud de convenios entre la UPTC y tales Colegios.

Los sujetos significativos serán entendidos como aquellos sujetos que en el contexto de la formación de profesores de Matemáticas y como docentes actuantes en Educación Básica vivencian, en cuanto formadores o formandos, la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra. Por tanto, buscaremos los profesores de esas disciplinas del currículo de la Licenciatura, estudiantes de éste mismo programa y profesores de Educación Básica de escuelas con los

² En sus diferentes denominaciones (Jiménez, A. (2019). Formación de profesores de matemáticas: el caso de la licenciatura más antigua de Colombia. *Praxis & Saber*, 10 (22), 45-70.)

TERMO DE CONSENTIMIENTO LIVRE E ESCLARECIDO

que se tienen convenios de práctica, y los invitaremos a realizar una entrevista. Explicaremos de que trata la investigación y lo que queremos saber. Dejaremos claro que no serán mencionados sus nombres, pues trabajaremos con sus declaraciones, tan libres cuanto sea posible, al respecto del tema enfocado en la entrevista; también explicaremos, que nuestra intención no es hacer una evaluación sobre el proceder de los profesores o estudiantes, pero sí tener un insumo sobre las múltiples comprensiones respecto al Álgebra y su enseñanza.

3. CRITERIO DE INCLUSIÓN

Se incluirán todos los sujetos que acepten su participación voluntaria en el estudio. En caso de concordar, solicitaremos la firma del presente documento de compromiso, aceptando ser considerado un sujeto significativo de esta investigación y que sus respuestas serán registradas y analizadas.

4. POSIBLES RIESGOS Y BENEFICIOS:

a. Riesgos

- Se considera que la participación de cualquier sujeto en el estudio no representa riesgo alguno, ni afecta su integridad.

b. Beneficios:

- Esperamos que la participación en el estudio permita al sujeto reflexionar sobre el Álgebra y la manera como es enseñada.

5. COMPENSACIÓN O COSTO

La participación en el estudio es voluntaria y no contempla compensaciones económicas ni está condicionada por motivos diferentes de los descritos anteriormente.

6. CONFIDENCIALIDAD

TERMO DE CONSENTIMIENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Si usted decide participar en el estudio, la información sobre su nombre, teléfono y residencia solo estará disponible para los investigadores que podrán usarla solo para efectos de verificar la calidad de los datos consignados.

La información que lo identifique no será enviada a ninguna entidad externa y se mantendrá en los archivos del investigador. Los registros que le identifican serán confidenciales y, hasta donde las leyes y las regulaciones en vigor lo permitan, no serán accesibles públicamente. Los resultados de este estudio podrán ser presentados en simposios científicos o regulatorios o en publicaciones. En estas presentaciones, no se revelará su identidad.

7. A QUIEN PUEDE CONTACTAR SI TIENE PREGUNTAS

En cualquier momento durante el desarrollo del estudio si tiene preguntas puede contactar:

- **Arley Zamir Chaparro Cardozo**
- **Teléfono :**

TERMO DE CONSENTIMIENTO LIVRE E ESCLARECIDO

FORMULARIO DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

Al firmar el consentimiento declaro que:

- He leído o me han leído y me ha quedado claro el consentimiento informado.
- He tenido la oportunidad de hacer preguntas y estas han sido respondidas.
- Entiendo que mi participación en este estudio es voluntaria.
- Doy permiso para que se publique y se comparta la información de los datos del estudio bajo un seudónimo o código descriptivo y que en ningún momento se publicará mi nombre o información que dé lugar a mi identificación.
- Acepto que la información personal confidencial quede disponible para revisión (acceso directo) solo para las personas que hacen parte del estudio.
- Comprendo y acepto que la información recolectada durante el estudio sea codificada de modo que mi nombre no aparezca en sus registros computarizados. Tengo conocimiento que la información computarizada pueda ser utilizada en simposios y en publicaciones.
- Comprendo que se me informará sobre cualquier información nueva que pudiera afectar mi participación en este estudio.
- Puedo elegir no participar o retirarse del estudio cuando así lo decida, comunicándoselo al investigador del estudio. No se me sancionará por esta decisión de retiro.
- Yo comprendo que recibiré una copia de este formato de consentimiento.

Recibí copia del informe de consentimiento

Firma del participante	Nombre del participante	Fecha de recibido

TERMO DE CONSENTIMIENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Declaración del investigador para realizar el procedimiento de consentimiento informado:

Certifico que he explicado la naturaleza y el propósito de este estudio, así como los beneficios potenciales y los riesgos razonablemente previsibles asociados con la participación al voluntario mencionado anteriormente, en la fecha indicada en este formulario de consentimiento. He respondido todas las preguntas formuladas y he entregado una copia del presente documento el cual ha sido firmado.

Nombre completo de la persona que realiza el
procedimiento de consentimiento informado (*en
letra de imprenta*)

Firma

Fecha