

RESSALVA

Atendendo solicitação do(a) autor(a), o texto completo desta dissertação será disponibilizado somente a partir de 30/09/2026.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Faculdade de Ciências e Tecnologia
Câmpus de Presidente Prudente

Um estudo sobre polinômios quase-ortogonais

Thaís Fernanda Pellin Bomfim

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Programa: Matemática Aplicada e Computacional

Presidente Prudente, novembro de 2024

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Um estudo sobre polinômios quase-ortogonais

Thaís Fernanda Pellin Bomfim

Orientadora: Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, novembro de 2024

B695e	Bomfim, Thaís Fernanda Pellin Um estudo sobre polinômios quase-ortogonais / Thaís Fernanda Pellin Bomfim. -- Presidente Prudente, 2024 101 p. : il., tabs. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente Orientadora: Vanessa Avansini Botta Pirani 1. Polinômios ortogonais. 2. Polinômios quase-ortogonais. 3. Zeros. 4. Relação de recorrência de três termos. 5. Ortogonalidade. I. Título.
-------	--



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Presidente Prudente

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um estudo sobre polinômios quase-ortogonais

AUTORA: THAÍS FERNANDA PELLIN BOMFIM

ORIENTADORA: VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Profa. Dra. VANESSA AVANSINI BOTTA PIRANI (Participação Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Profa. Dra. LARISSA FERREIRA MARQUES (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - FC/Unesp

Prof. Dr. MURILO RODOLFO CANDIDO (Participação Presencial)
Departamento de Matemática e Computação / Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente - FCT/Unesp

Presidente Prudente, 30 de setembro de 2024

Dedico este trabalho a Deus, à minha família e à minha orientadora Vanessa.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus pela vida, pelas oportunidades e experiências obtidas, pela força nos momentos de dificuldade e pelas bênçãos derramadas em minha vida até o presente momento.

Aos meus pais, Manoel e Silmara, por sempre terem feito de tudo por mim, por terem me dado condições de chegar até aqui, por todo o incentivo e apoio que me deram em todos os momentos em que precisei.

Ao meu irmão, Gustavo, pela parceria, amor e compreensão.

À minha orientadora, Prof.^a Dra. Vanessa Botta, por todo conhecimento compartilhado e excelente orientação. Sou grata também por todo o incentivo, motivação, paciência e amizade nesse período.

Às amigas que compartilharam comigo um pouco dessa trajetória, que me apoiaram, entenderam muitas das minhas ausências e me incentivaram ao longo desses anos. Vocês tornaram esse período mais leve.

A todos os professores e funcionários da Unesp de Presidente Prudente que, direta ou indiretamente, contribuíram nessa minha caminhada. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Dr. José Roberto Nogueira que foi quem me introduziu aos projetos de iniciação científica, me apresentou o estudo de polinômios e me motivou a percorrer essa caminhada acadêmica.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho. No entanto, gostaria de deixar aqui meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que estiveram ao meu lado nas horas tranquilas e apressadas e que me ajudaram a vencer mais esta etapa.

“Tentar e falhar é, pelo menos, aprender. Não chegar a tentar é sofrer a inestimável perda do que poderia ter sido. ”

Geraldo Eustáquio

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo das propriedades dos polinômios quase-ortogonais, envolvendo a pesquisa tanto da teoria geral destes polinômios quanto de algumas classes especiais, como os de primeira e segunda ordem. Nesse sentido, serão apresentados resultados relacionados às relações de ortogonalidade, relação de recorrência de três termos, comportamento dos zeros, dentre outros. Para isso, faz-se necessário o estudo dos polinômios ortogonais, que será a base para o desenvolvimento deste trabalho. Dessa forma, apresentaremos um pouco da teoria desses polinômios, abrangendo desde os seus principais resultados até propriedades importantes sobre os seus zeros. Além disso, abordaremos alguns conceitos e exemplos sobre polinômios ortogonais clássicos, dentre eles: Jacobi e seus casos especiais, Laguerre e Hermite.

Palavras-chave: *Polinômios ortogonais, Polinômios quase-ortogonais, Zeros, Relação de recorrência de três termos, Ortogonalidade.*

Abstract

The main objective of this work is to study the properties of quasi-orthogonal polynomials, involving research into both the general theory of these polynomials and specific classes, such as first and second-order polynomials.

In this context, results related to orthogonality relations, three-term recurrence relations, and the behavior of the zeros will be presented, among others. For this purpose, it is necessary to study orthogonal polynomials, which will serve as the foundation for the development of this work. Therefore, we will present some of the theory of these polynomials, covering their main results as well as important properties related to their zeros. Additionally, we will discuss some concepts and examples of classical orthogonal polynomials, including Jacobi polynomials and their special cases, as well as Laguerre and Hermite polynomials.

Keywords: Orthogonal polynomials, Quasi-orthogonal polynomials, Zeros, Three-term recurrence relation, Orthogonality.

Lista de Figuras

2.4.1 Polinômios de Jacobi de graus 1, 2, 3 e 4.	41
2.4.2 Polinômios de Legendre de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	43
2.4.3 Polinômios de Gegenbauer de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	44
2.4.4 Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	47
2.4.5 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	50
2.4.6 Polinômios de Chebyshev de 3ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	52
2.4.7 Polinômios de Chebyshev de 4ª espécie de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	53
2.4.8 Polinômios de Hermite de graus 1, 2, 3, 4 e 5.	57
3.2.1 $c_4 = 2$	68
3.2.2 $c_4 = -2$	68
3.2.3 $c_4 = 0.5$	69
3.2.4 $c_4 = -0.5$	69
3.3.1 $c_4 = -0.2$ e $b_4 = -2$	82
3.3.2 $c_4 = -0.9$ e $b_4 = 0.5$	82
3.3.3 $c_4 = -1.53$ e $b_4 = -2$	82
3.3.4 $c_4 = -3.4$ e $b_4 = 1$	82
3.3.5 $c_4 = -1.73$ e $b_4 = 1$	83
3.3.6 $c_4 = -2.5$ e $b_4 = 1.3$	83

Conteúdo

Lista de Figuras	9
Conteúdo	11
1 Introdução	13
2 Polinômios ortogonais	15
2.1 Definições e resultados preliminares	15
2.2 Propriedades	23
2.3 Polinômios ortogonais simétricos	32
2.4 Polinômios ortogonais clássicos	34
2.4.1 Polinômios de Jacobi	37
2.4.1.1 Polinômios de Legendre	40
2.4.1.2 Polinômios de Gegenbauer	42
2.4.1.3 Polinômios de Chebyshev	44
2.4.2 Polinômios de Laguerre	54
2.4.3 Polinômios de Hermite	55
3 Polinômios quase-ortogonais	59
3.1 Conceitos preliminares	60
3.2 Polinômios quase-ortogonais de ordem 1	64
3.2.1 Zeros dos polinômios	64
3.2.2 Relação de recorrência de três termos	69
3.2.3 Relação de ortogonalidade	72
3.3 Polinômios quase-ortogonais de ordem 2	74
3.3.1 Zeros dos polinômios	74
3.3.2 Relação de recorrência de três termos	83
3.3.3 Relação de ortogonalidade	88
4 Conclusões	93

Introdução

O estudo dos polinômios algébricos faz parte de uma área clássica da Análise e tem grande importância na Matemática, tanto pela sua vasta aplicabilidade quanto pela sua fácil manipulação. Este é um tema que vem despertando a atenção e curiosidade no cenário acadêmico há anos e, mesmo atualmente, ainda é uma área que apresenta uma abundante fonte de pesquisa e inúmeros problemas em aberto. No caso específico dos polinômios ortogonais, além de existirem várias aplicações relacionadas a assuntos da Matemática, são importantes ferramentas na solução de problemas de outras ciências, como na Física e nas Engenharias.

Existem muitas outras classes de polinômios que surgiram com o desenvolvimento do conceito de polinômios ortogonais, como os polinômios quase-ortogonais, polinômios para-ortogonais, polinômios ortogonais excepcionais, entre outros. Neste trabalho, o foco será o estudo das propriedades dos polinômios quase-ortogonais, que são importantes, por exemplo, na construção de fórmulas de quadratura.

O polinômio $R_n(x)$ de grau $n \geq r$ é chamado de polinômio quase-ortogonal de ordem r em relação à função peso $w(x)$ no intervalo $[a, b]$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

$$\int_a^b R_m(x)R_n(x)w(x)dx = 0, \quad \text{para } m \neq n-r, \dots, n+r.$$

Mais detalhes podem ser encontrados em [12], onde um conceito mais geral de polinômios quase-ortogonais a respeito da definição de quase-ortogonalidade dada anteriormente foi considerado: seja $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios ortogonais em $[a, b]$ em relação à função peso positiva $w(x)$; uma condição necessária e suficiente para que o polinômio $R_n(x)$ de grau n seja um polinômio quase-ortogonal de ordem r em $[a, b]$ em relação à $w(x)$ é que

$$R_n(x) = c_{n,0}P_n(x) + c_{n,1}P_{n-1}(x) + \dots + c_{n,r}P_{n-r}(x),$$

onde $c_{n,i}$, $i = 0, \dots, r$, são números que podem depender de n e $c_{n,0}c_{n,r} \neq 0$.

No que diz respeito aos zeros dos polinômios quase-ortogonais, para $r \geq 1$, se $R_n(x)$ é um polinô-

mio quase-ortogonal de ordem r no intervalo $[a, b]$ em relação a uma função $w(x)$, então $R_n(x)$ possui pelo menos $n - r$ zeros distintos no intervalo $[a, b]$ [12]. Um dos principais motivos para estudar onde estão localizados os zeros dos polinômios quase-ortogonais de grau n é sua conexão com a fórmula de quadratura positiva que utiliza n pontos. Essa fórmula é exata para polinômios de grau $2n - r - 1$, com $0 \leq r \leq n$. Para mais informações e uma análise mais detalhada dessa relação, consulte [34].

Portanto, iniciaremos uma análise das propriedades desses polinômios, começando com um estudo prévio dos polinômios ortogonais, que servirá como base para a compreensão dos polinômios quase-ortogonais. Em seguida, abordaremos a teoria fundamental e alguns resultados importantes, incluindo a relação de recorrência de três termos, a relação de ortogonalidade e propriedades dos zeros dos polinômios quase-ortogonais de ordem 1 e 2. Este estudo está fundamentado nas referências [1, 5, 7, 17].

Conclusões

O objetivo deste trabalho é analisar as propriedades gerais dos polinômios quase-ortogonais, além de investigar alguns de seus casos especiais, como os polinômios quase-ortogonais de primeira e segunda ordem. Para isso, foi essencial revisar a teoria dos polinômios ortogonais, que serviu como base para este estudo.

No contexto dos polinômios ortogonais, realizamos uma análise das principais características desses polinômios, abordando a relação de ortogonalidade, a relação de recorrência de três termos e o comportamento de seus zeros. Observou-se que os seus zeros possuem características singulares: são reais, distintos e situam-se no intervalo de ortogonalidade (a, b) . Além disso, em uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, os zeros desses polinômios estão entrelaçados, ou seja, entre dois zeros consecutivos de um polinômio de grau $n - 1$, existe exatamente um zero do polinômio $P_n(x)$, de grau n .

Com base nessa teoria, foi possível realizar um estudo similar para os polinômios quase-ortogonais, onde também foi analisado as propriedades dos zeros, a relação de recorrência de três termos e as condições necessárias para que combinações lineares de polinômios ortogonais resultem em novas sequências de polinômios ortogonais. Dessa forma, foi observado que os polinômios quase-ortogonais apresentam características próprias, além de propriedades que são similares às dos polinômios ortogonais.

Bibliografia

- [1] ALFARO, M.; MARCELLÁN, F.; PEÑA, A.; REZOLA, M. L. *When do linear combinations of orthogonal polynomials yield new sequences of orthogonal polynomials?*. Journal of Computational and Applied Mathematics, [s. l.], p. 1446–1452, 2010.
- [2] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F.; RAFAELI, F. R. *Introdução aos Polinômios Ortogonais*. Notas em Matemática Aplicada, SBMAC, v. 64, 2012.
- [3] BERTI, A. C.; SRI RANGA, A. *Companion orthogonal polynomials: some applications*. Applied numerical mathematics, v. 39, n. 2, p. 127-149, 2001.
- [4] BOCHNER, S. *Über sturm-liouvillesche polynomsysteme*. Mathematische Zeitschrift, v. 29, n. 1, p. 730-736, 1929.
- [5] BOTTA, V.; SUNI, M. H. *On the location of zeros of quasi-orthogonal polynomials with applications to some real self-reciprocal polynomials*. Journal of Classical Analysis, [S. l.], v. 19, p. 89-115, 19 ago. 2022.
- [6] BRENKE, W. C. *On polynomial solutions of a class of linear differential equations of the second order*. Bull. Amer. Math. Soc., v. 36, p. 77-84, 1930.
- [7] BREZINSKI, C.; Driver, K. A.; and Redivo-Zaglia, M. *Quasi-orthonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials*. Applied Numerical Mathematics 48 (2004), 157–168.
- [8] BREZINSKI, C.; DRIVER, K.; Redivo-Zaglia, M. (2018). *Zeros of quadratic quasi-orthogonal order 2 polynomials*. Applied Numerical Mathematics, 135:143-145. doi: 10.1016/J.APNUM.2018.08.012
- [9] CASTILLO, K.; COSTA, M. S.; SRI RANGA, A.; VERONESE, D. O. *A Favard type theorem for orthogonal polynomials on the unit circle from a three term recurrence formula*. Journal of Approximation Theory, v. 184, p. 146-162, 2014.
- [10] CHEN, Y.; ISMAIL, M. E. H. *Ladder operators and differential equations for orthogonal polynomials*. J. Phys. A, 30 (1997), p. 7818-7829.

- [11] CHIHARA, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials*. Gordon and Breach Science Publishers, 1978.
- [12] CHIHARA, T. S.; *On quasi-orthogonal polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 765–767.
- [13] DELSARTE, P.; GENIN, Y. *The split Levinson algorithm*. IEEE transactions on acoustics, speech, and signal processing, v. 34, n. 3, p. 470-478, 1986.
- [14] DRAUX, A. *On quasi-orthogonal polynomials*, J. Approx. Theory 62 (1990) 1–14.
- [15] FERJER, L. *Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen*, Math. Z. 37(1933), p. 287–309.
- [16] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. *Polinômios e equações algébricas*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.
- [17] ISMAIL, M. E. H; WANG, X.-S., *On quasi-orthogonal polynomials: Their differential equations, discriminants and electrostatics*, J. Math. Anal. Appl. 474 (2019), 1178–1197.
- [18] ISMAIL, M.E.H. *Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in One Variable*, With two chapters by Walter Van Assche. With a foreword by Richard A. Askey. Reprint of the 2005 original Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol.98, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.
- [19] JONES, W. B.; THRON, W. J.; WAADELAND, H. *A strong Stieltjes moment problem*, Transactions of the american mathematical society, v. 261, n. 2, p. 503-528, 1980.
- [20] MARCELLAN, F.; PETRONILHO, J. *Orthogonal polynomials and quadratic transformations*, Portugal. Math. 56 (1999) 81–113.
- [21] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. *Adrien-Marie Legendre*. MacTutor. Disponível em: <<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Legendre/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2023.
- [22] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. *Carl Gustav Jacob Jacobi*. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Jacobi/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2023.
- [23] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. *Charles Hermite*. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hermite/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2023.
- [24] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. *Edmond Nicolas Laguerre*. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Laguerre/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2023.

- [25] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Leopold Bernhard Gegenbauer. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gegenbauer/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2023.
- [26] O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON, E. F. Pafnuty Lvovich Chebyshev. MacTutor. Disponível em: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Chebyshev/>>. Acesso em: 22 de abr. de 2023.
- [27] RIESZ, M. Sur le probl'eme des moments, Troisi'eme Note, Ark. Mat. Fys. 17 (1923),p.1–52.
- [28] ROUTH, E. J. *On some properties of certain solutions of a differential equation of the second order*. Proceedings of the London Mathematical Society, v. 1, n. 1, p. 245-262, 1884.
- [29] DA SILVA, A. P.; SRI RANGA, A. *Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros*, Linear algebra and its applications, v. 397, p. 299-324, 2005.
- [30] SHOHAT, J. *On mechanical quadratures, in particular, with positive coefficients*. Transactions of the American Mathematical Society, 42(3):461-496. doi: 10.1090/S0002-9947-1937-1501930-6,1997.
- [31] SRI RANGA, A. *Symmetric orthogonal polynomials and the associated orthogonal L-polynomials*. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 123, n. 10, p. 3135-3141, 1995.
- [32] SZEGÖ, G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, RI: American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, 1975.
- [33] VIEIRA, R. S.; BOTTA, V. *Orthogonal polynomials and Möbius transformations*. Computational and Applied Mathematics, v.40, n. 6, p. 181, 2021.
- [34] XU, Y. "A Characterization of Positive Quadrature Formulae." Mathematics of Computation, vol. 62, no. 206, 1994, p. 703–18. JSTOR. Disponível em <<https://doi.org/10.2307/2153531>>. Acesso em 10 jul. de 2024.