

FILIFE DE PAULA OLIVEIRA

**Gráficos de controle por atributos e variáveis para o monitoramento de processos
univariados e bivariados**

Filipe de Paula Oliveira

Gráficos de controle por atributos e variáveis para o monitoramento de processos univariados e bivariados

Trabalho de Graduação apresentado ao Conselho de Curso de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para obtenção do diploma de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Marcela Aparecida Guerreiro Machado

Oliveira, Filipe de Paula
O48g Gráficos de controle por atributos e variáveis para o monitoramento de processos univariados e bivariados / Filipe de Paula Oliveira – Guaratinguetá, 2019.
57f : il.
Bibliografia: f. 48-50

Trabalho de Graduação em Engenharia de Produção Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2019.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Marcela Aparecida Guerreiro Machado

1. Controle de Qualidade - Métodos Estatísticos. 2. Gráficos em engenharia. 3. Métodos de simulação. I. Título.

CDU 658.56

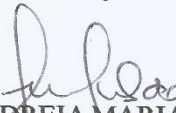
Luciana Máximo

Bibliotecária CRB-8/3595

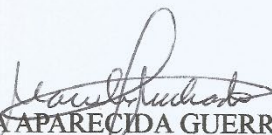
FILIFE DE PAULA OLIVEIRA

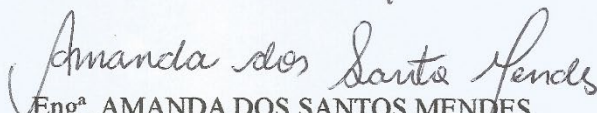
ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO COMO
PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA"

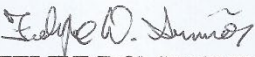
APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO MECÂNICA


Prof.ª. Dr.ª. ANDREIA MARIA SALGADO PEDRO
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof.ª. Dr.ª. MARCELA APARECIDA GUERREIRO MACHADO
Orientador/UNESP-FEG


Eng.ª. AMANDA DOS SANTOS MENDES
UNESP-FEG


Eng. FELIPE DOMINGUES SIMÕES
UNESP-FEG

Dezembro 2019

DADOS CURRICULARES

FILIPPE DE PAULA OLIVEIRA

NASCIMENTO	17.12.1994 – São José dos Campos / SP
FILIAÇÃO	Márcio Luiz de Oliveira Gislene Mariane Garcia de Paula Oliveira
2015/2019	Curso de Graduação Engenharia de Produção Mecânica – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá da Universidade Estadual Paulista

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais *Gislene* e *Márcio*, que sempre estiveram presentes em minha vida, deram todo o suporte necessário para meus estudos e me apoiaram em todas decisões da minha vida, sempre me incentivando e procurando ajudar em tudo que podiam.

À minha orientadora, *Prof. Dr^a. Marcela Aparecida Guereiro Machado* e ao *Prof. Antonio Fernando Branco*, que sempre providenciaram toda atenção, auxílio e incentivo necessários ao sucesso na trajetória do curso;

À minha melhor amiga e companheira *Diana* que trilhou comigo todo esse árduo caminho da graduação me ajudando e me dando apoio em todos os momentos de dificuldade, com toda sua paciência e compaixão.

A todos os professores que participaram de algum modo de minha formação, contribuindo de diversas formas para meu crescimento durante o curso, tanto profissionalmente quanto pessoalmente.

A todos os funcionários da Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá pela dedicação, trabalho duro e disposição a ajudar, qualidades que garantem o bom funcionamento da nossa instituição e tornam possíveis todas as atividades que nós alunos podemos desenvolver.

A todos os familiares, amigos e colegas que participaram desse momento de minha vida, me suportando e auxiliando como podiam, e dividindo bons momentos que estarão para sempre em minha memória.

RESUMO

Os gráficos de controle que combinam atributos e variáveis tem surgido na última década como uma alternativa aos gráficos comumente empregados no Controle Estatístico de Qualidade. O presente trabalho oferece um estudo de alguns dos gráficos propostos nos últimos anos que empregam a estratégia MIX de combinação de atributos e variáveis em um único gráfico. Os gráficos estudados foram simulados por meio de programas computacionais escritos na linguagem de programação FORTRAN, obtendo o seu desempenho por meio do número médio de amostras até que se detecte uma causa especial atuante no processo. Além disso, o trabalho apresenta a comparação desses gráficos com outros já consolidados na literatura, demonstrando as características dos gráficos baseados na estratégia MIX em relação aos gráficos puramente por atributo ou por variável. As vantagens dessa estratégia, que são o desempenho próximo ao dos gráficos por variável e a maior eficiência econômica de gráficos por atributos, foram comprovadas pelas simulações e comparações desenvolvidas.

PALAVRAS-CHAVE: Controle Estatístico de Qualidade. Gráficos de Controle. Estratégia MIX. Simulações.

ABSTRACT

Control charts that combine attributes and variables have emerged in the last decade as an alternative to the commonly employed control charts in Statistical Quality Control. The present paper offers a study of some of the proposed charts in the last years that employ the MIX strategy of combining attributes and variables in a single graph. The studied graphs were simulated by means of computer programs written in the FORTRAN programming language, obtaining their performance through the average number of samples until a special cause is detected in the process. In addition, the paper presents the comparison of these graphs with others already consolidated in the literature, demonstrating the characteristics of graphs based on the MIX strategy in relation to graphs purely by attribute or by variable. The advantages of this strategy, which are the close performance to variable graphs and higher economic efficiency of the attribute graphs, were proved by the simulations and comparisons developed.

KEYWORDS: Statistical Quality Control. Control Charts. MIX Strategy. Simulations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Quantidade de artigos publicados por ano contendo <i>Control chart</i>	15
Figura 2 – Quantidade de artigos publicados por ano contendo <i>Control Chart</i> , e as palavras-chave <i>attribute</i> e <i>variable</i>	16
Figura 3 – Gráfico de X: ocorrência de um alarme falso.	19
Figura 4 – Gráfico de X: ocorrência de um alarme verdadeiro.....	20
Figura 5 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle X.	23
Figura 6 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle <i>mixed control chart</i>	24
Figura 7 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle ATTRIVAR-1.....	25
Figura 8 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle ATTRIVAR-2.....	26
Figura 9 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle RMAX para o caso bivariado.....	27
Figura 10 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle RMAX para o caso bivariado.....	28
Figura 11 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle MaxD para o caso bivariado.....	30
Figura 12 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle DVmax para o caso bivariado.....	31
Figura 13 – Tipos de pesquisa científica e tipo utilizado no presente estudo	32

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Cronograma das atividades desenvolvidas.....	32
Tabela 2 – Validação do gráfico de controle <i>mixed control chart</i> para 10% de $%X_{\max}$ com o artigo de Aslam <i>et al.</i> (2015).	35
Tabela 3 – Validação do gráfico de controle <i>mixed control chart</i> para 10% de $%X_{\max}$ com o artigo de Leoni e Costa (2019).	36
Tabela 4 – Parâmetros w e CL_y para ambos os gráficos ATTRIVAR.	37
Tabela 5 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-1 para 5% de $%X_{\max}$	37
Tabela 6 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-1 para 15% de $%X_{\max}$	38
Tabela 7 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-1 para 25% de $%X_{\max}$	38
Tabela 8 – Média das diferenças do gráfico ATTRIVAR-1 simulado em relação aos de Ho e Aparisi (2016).....	39
Tabela 9 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-2 para 5% de $%X_{\max}$	39
Tabela 10 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-2 para 15% de $%X_{\max}$	40
Tabela 11 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-2 para 25% de $%X_{\max}$	40
Tabela 12 – Média das diferenças do gráfico ATTRIVAR-2 simulado em relação aos de Ho e Aparisi (2016).....	41
Tabela 13 – Validação do gráfico de controle DVmax para $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$ com $\rho = 0,0$ e $0,3$	41
Tabela 14 – Validação do gráfico de controle DVmax para $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$ com $\rho = 0,5$ e $0,8$	42
Tabela 15 – Simulação do gráfico de controle MaxD-RMAX.....	43
Tabela 16 – Comparação entre os gráficos de controle univariados <i>mixed control chart</i> , ATTRIVAR-1 e ATTRIVAR-2 simulados e o gráfico de médias $\bar{X}$ da literatura.	44
Tabela 17 – Comparação entre os gráficos de controle bivariados DVmax e MaxD-RMAX simulados e os gráficos RMAX, VMAX e MaxD.....	45
Tabela 18 – Comparação entre os gráficos de controle bivariados DVmax e MaxD-RMAX simulados.....	46

LISTA DE SÍMBOLOS

μ_0	média populacional sem efeito de causas especiais
H_0	hipótese base
μ	média populacional
H_1	hipótese a ser testada
μ_1	média populacional sob efeito de causas especiais
σ	desvio-padrão populacional
UCL	Upper Control Limit
LCL	Lower Control Limit
LC	Linha de Centro
n	tamanho da amostra
α	risco de erro tipo I
β	risco de erro tipo II
k	fator de desvio em relação ao desvio-padrão populacional
LIC	Limite Inferior de Controle
D	número de elementos não conformes na amostra
LSC	Limite Superior de Controle
p	fração de itens não-conformes
p_0	fração de itens não-conformes quando o processo está em controle
p_1	fração de itens não-conformes quando o processo está sob efeito de causas especiais
d	número de itens não-conformes
$\hat{p}$	fração de itens não-conformes
$\bar{x}$	média amostral
x_n	elemento de uma amostra
L	fator de controle dos limites de controle
$\bar{\bar{x}}$	estimativa de média populacional
m	número de amostras para o cálculo da estimativa de média populacional
S_p	estimativa do desvio padrão populacional
S_t^2	variância amostral
USL	Upper Specification Limit
k_1	coeficiente 1 de controle do <i>mixed control chart</i>
k_2	coeficiente 2 de controle do <i>mixed control chart</i>
k_3	coeficiente 3 de controle do <i>mixed control chart</i>
Y	número de itens não-conformes para o ATTRIVAR
CL_y	limite superior de itens conformes para a inspeção por atributos do ATTRIVAR
w	limite inferior de itens conformes para a inspeção por atributos do ATTRIVAR
$\%X_{\max}$	porcentagem de amostras que vão à inspeção por variáveis no <i>mixed</i> e ATTRIVAR
R_i	amplitude amostral
Σ_0	matriz de covariâncias sem efeito de causas especiais
p	número de características da qualidade
Σ_1	matriz de covariâncias sob efeito de causas especiais
a_k	desvio na matriz de covariâncias
δ	desvio na média
ρ	grau de correlação
w_{Li}	limite inferior de especificação para o MaxD
w_{Ui}	limite superior de especificação para o MaxD
n_{11}	número de elementos reprovados em ambas as características da qualidade
n_{01}	número de elementos reprovados apenas na característica da qualidade Y

n_{10}	número de elementos reprovados apenas na característica da qualidade X
n_{00}	número de elementos aprovados em ambas as características da qualidade
D_x	número de elementos reprovados na característica da qualidade X
D_y	número de elementos reprovados na característica da qualidade Y
n_1	subamostra 1 do DVmax
n_2	subamostra 2 do DVmax
CL_d	limite de controle para a inspeção por atributos do DVmax
CL_v	limite de controle para a inspeção por variáveis do DVmax
NMA_0	número médio de amostras até o sinal sem estarem presentes causas especiais
NMA_1	número médio de amostras até o sinal estando presentes causas especiais

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	OBJETIVOS.....	13
1.2	DELIMITAÇÃO.....	14
1.3	JUSTIFICATIVA	14
1.4	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2	REVISÃO DA LITERATURA	18
2.1	GRÁFICOS DE CONTROLE.....	18
2.1.1	Gráficos de controle por atributos	20
2.1.2	Gráficos de controle por atributos e variáveis	21
2.2	GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS	22
2.2.1	Gráfico de controle $\bar{X}$	22
2.2.2	Gráfico de controle <i>mixed control chart</i>	23
2.2.3	Gráfico de controle ATTRIVAR	25
2.3	GRÁFICOS DE CONTROLE BIVARIADOS	26
2.3.1	Gráfico de controle RMAX	26
2.3.2	Gráfico de controle VMAX.....	27
2.3.3	Gráfico de controle MAXD	28
2.3.4	Gráfico de controle DVmax.....	30
3	MÉTODOS.....	32
3.1	CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA	32
3.2	INSTRUMENTOS.....	33
3.3	TRATAMENTO DOS DADOS.....	34
4	RESULTADOS.....	35
4.1	SIMULAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE	35
4.2	COMPARAÇÃO COM GRÁFICOS UNIVARIADOS	43
4.3	COMPARAÇÃO COM GRÁFICOS BIVARIADOS	44
5	CONCLUSÃO.....	47
5.1	SUGESTÃO DE CONTINUIDADE DO TRABALHO	47
REFERÊNCIAS.....		48
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA		50
APÊNDICE A – Códigos computacionais		51

1 INTRODUÇÃO

O estudo dos gráficos de controle, criados por Shewhart na década de 20 para o monitoramento de características de qualidade, tem sido um tema consideravelmente importante para o Controle Estatístico da Qualidade (CEP), por serem amplamente utilizados para o monitoramento de processos na indústria.

Segundo Montgomery (2009), por mais que um processo seja cuidadosamente definido e sua manutenção adequadamente realizada, sempre existirá uma variância inerente que não pode ser evitada. Um processo operando apenas com esse tipo de variância é considerado em controle estatisticamente. Contrário a isso, um processo que é afetado por outros tipos de variância, como desregulamento de máquinas, erros de operador, entre outros, é considerado como fora de controle estatisticamente.

De acordo com Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), o monitoramento de processos pode resultar em custos facilmente pagos, devido ao fato de que a qualidade agrega valor ao processo. Os custos de falhas externas, em que os produtos não atendem as especificações do cliente, e falhas internas, em que itens não conformes são descobertos antes de chegar ao cliente, representam em torno de 70% dos custos totais envolvidos na qualidade.

Montgomery (2009) afirma que um gráfico de controle eficiente reduzirá refugos e retrabalhos, os principais redutores de produtividade em qualquer operação. Ao reduzir esses tipos de problemas, os custos diminuem e a capacidade de produção aumenta.

Segundo Aslam *et al.* (2015), os gráficos de controle são ferramentas poderosas para os engenheiros da indústria, pois são usados para: o monitoramento de processos da fabricação, a produção de itens conformes com os limites de especificação, reduzir os custos de inspeção e indicar a atuação de causas especiais de variância no processo. Assim, gráficos de controle são muito desejados para alcançar a alta qualidade dos produtos.

Estudando os gráficos de controle é possível encontrar métodos cada vez mais rápidos e menos dispendiosos, maximizando o desempenho na detecção de causas especiais (outros tipos de variância) atuantes no processo e a eficiência econômica da aplicação do processo de inspeção.

Assim, visando a melhoria contínua dos gráficos de controle, no presente trabalho foram investigadas as propriedades dos gráficos de controle univariados para monitoramento da média *mixed control chart* e ATTRIVAR, e o gráfico multivariado para monitoramento da matriz de covariâncias DVmax, além de um tipo novo de gráfico multivariado, o MaxD-RMAX, e seus desempenhos foram comparados com gráficos tradicionais consolidados na literatura. A

obtenção das propriedades dos gráficos foi feita por simulação computacional e seu desempenho determinado pelo número médio de amostras até o sinal (NMA).

Os gráficos que foram estudados são relacionados à trabalhos recentes de outros pesquisadores na área, como Aslam *et al.* (2015), Ho e Aparisi (2016), Melo, Ho e Medeiros (2016), Aparisi e Ho (2018) e Machado e Ho (2018), que tratam de gráficos baseados na estratégia MIX, em que se utiliza a inspeção por atributos e variáveis em um mesmo gráfico de controle.

Com a crescente importância dessa ferramenta do controle de processos, veio a necessidade de obtenção de gráficos que sejam cada vez mais eficazes na detecção de causas especiais enquanto utilizam o mínimo de recursos possíveis, gerando as questões que motivaram esse trabalho:

- Como a utilização de atributos e variáveis em um mesmo gráfico de controle impacta em sua eficiência na detecção de causas especiais?
- Os modelos teóricos propostos de gráficos recentes que combinam atributos e variáveis produzem valores adequados para representar o processo de inspeção da qualidade?
- Qual a eficiência relativa entre gráficos de controle recentes que combinam atributos e variáveis e gráficos tradicionais da literatura puramente por atributos ou por variáveis?

1.1 OBJETIVOS

O objetivo geral desse trabalho é investigar as propriedades de gráficos de controle baseados na estratégia MIX para o monitoramento de processos univariados e bivariados, através de simulações computacionais.

Como objetivos específicos, tem-se:

- Obter as propriedades dos gráficos univariados para monitoramento da média *mixed control chart* e ATTRIVAR, e dos gráficos multivariados para monitoramento da matriz de covariâncias DVmax e MaxD-RMAX, utilizando simulações computacionais para obter o número médio de amostras até o sinal (NMA), visando medir seus desempenhos em diferentes casos.

- Validar experimentalmente os modelos teóricos de gráficos de controle existentes por meio de simulações computacionais
- Comparar o desempenho dos gráficos propostos com gráficos tradicionais já consolidados na literatura, como o gráfico $\bar{X}$ para o caso univariado e os gráficos MaxD, VMAX e RMAX para o caso multivariado.

1.2 DELIMITAÇÃO

O estudo dos gráficos de controle por simulação na linguagem FORTRAN demanda apenas a utilização de máquinas computacionais, não possuindo qualquer outra limitação de recursos físicos ou geográficos.

O presente trabalho se limita aos gráficos de controle do tipo univariado e bivariado, ou seja, gráficos utilizados para o monitoramento de uma ou duas variáveis. Além disso, todos os gráficos estudados são baseados na distribuição de probabilidades normal. Assume-se também que os dados estudados não possuam nenhum grau de auto correlação.

Os gráficos estudados para o caso univariado são apenas para monitoramento da média do processo, enquanto os gráficos multivariados estudados são apenas para monitoramento da matriz de covariâncias do processo.

É assumido que a biblioteca IMSL do *software* FORTRAN POWERSTATION 4.0 fornece distribuições normais adequadas para os casos univariado e bivariado estudados nesse trabalho.

1.3 JUSTIFICATIVA

O controle de qualidade é uma área que cresceu e ainda cresce em praticamente todos os setores econômicos do mundo. Os gráficos de controle são uma importante ferramenta dessa área, desde sua criação na década de 20 por Shewhart até atualmente, no monitoramento de processos, principalmente industriais, devido à sua fácil aplicação operacional, sendo amplamente utilizados no “chão de fábrica” para processos de fabricação. Ao se estudar diferentes tipos de gráficos é possível encontrar métodos cada vez mais rápidos e menos dispendiosos para a detecção de anormalidades no processo.

Controlar e melhorar a qualidade se tornou uma estratégia empresarial importante para muitas organizações: fabricantes, distribuidores, companhias de transporte, serviços

financeiros, organizações, serviços de saúde e agências governamentais. Qualidade é uma vantagem competitiva. Um negócio que consegue agradar clientes melhorando e controlando a qualidade pode dominar seus competidores (MONTGOMERY, 2009).

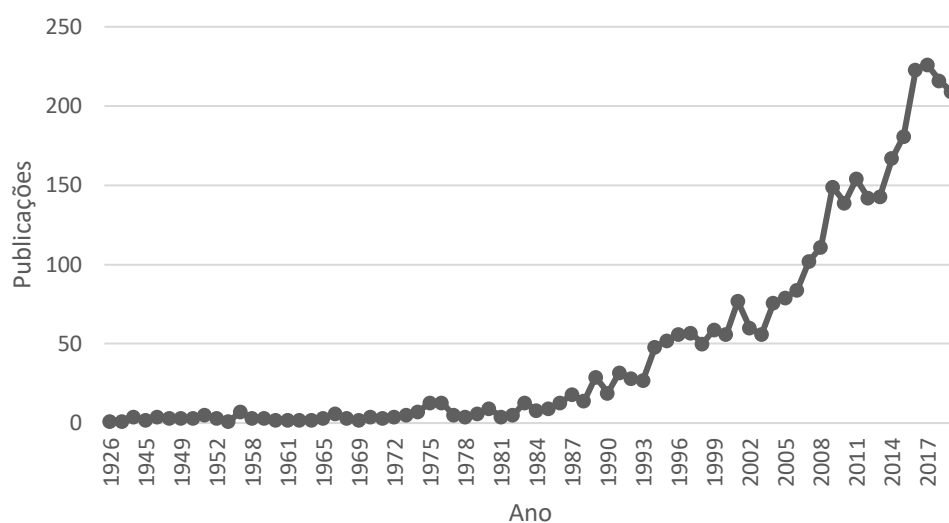
Até há pouco tempo, os gráficos de Shewhart eram voltados exclusivamente para o monitoramento de processos industriais; hoje não estão mais limitados ao “chão de fábrica” (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, ‘2005).

Quando a medição de uma característica de qualidade específica é cara e demorada, é razoável considerar se um gráfico de controle baseado na inspeção de atributos pode ser mais apropriado para monitorar a média ou variância do processo (HO; QUININO, 2016).

Assim, o presente trabalho almeja explorar novos tipos de gráfico de controle por meio da combinação de atributos e variáveis visando obter melhores alternativas aos gráficos de controle atuais, melhorando cada vez mais o desempenho na detecção de causas especiais e a eficiência econômica desse processo de inspeção. Além disso, para casos multivariados, a aplicação de um gráfico univariado para cada variável não é uma alternativa eficiente economicamente, sendo mais valioso estudar alternativas que aplicam apenas um gráfico, como foi realizado nesse trabalho.

A seguir, na Figura 1, é possível observar uma pesquisa bibliográfica de artigos realizada na base científica *Scopus* (2019), em que se pesquisou a palavra *control chart* no título de artigos:

Figura 1 – Quantidade de artigos publicados por ano contendo *Control chart*.

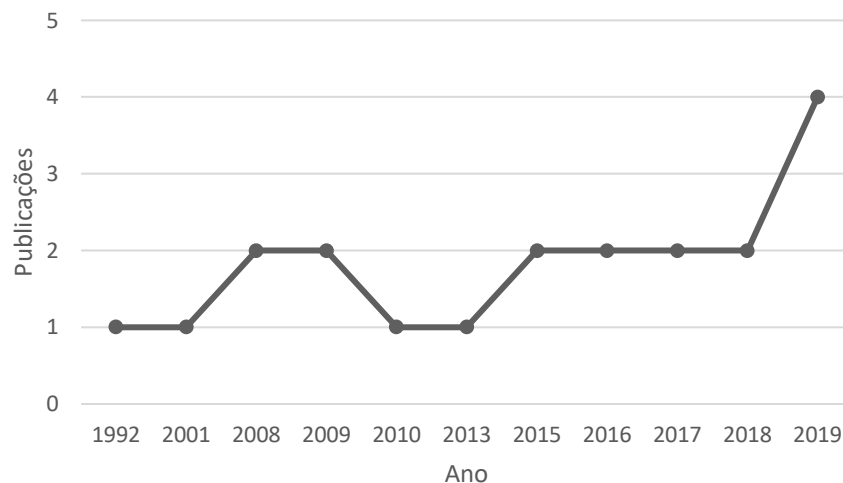


Fonte: Scopus (2019).

Como se pode observar na Figura 1, a ferramenta dos gráficos de controle, consideravelmente importante para o tema do Controle de Qualidade, tem sido bastante explorada nas décadas recentes, com pesquisas sendo desenvolvidas em número expressivo a partir do ano de 2005.

Na Figura 2, em outra pesquisa bibliográfica na base científica *Scopus* (2019), foi pesquisado a quantidade de artigos com título *control chart* e com palavras-chave *attribute* e *variable*:

Figura 2 – Quantidade de artigos publicados por ano contendo *Control Chart*, e as palavras-chave *attribute* e *variable*.



Fonte: Scopus (2019).

Com isso, pode-se observar a quantidade pequena de artigos que abordam inspeção por atributos e variáveis, demonstrando a atualidade dos estudos desse tipo de gráfico de controle.

1.4 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho está dividido em mais quatro capítulos, além da presente introdução. No Capítulo 2 serão apresentadas as fundamentações teóricas utilizadas para o adequado estudo dos assuntos abordados no trabalho, como os conceitos estatísticos necessários e os tipos de gráficos teóricos tradicionais da literatura.

O Capítulo 3 apresentará os métodos que foram utilizados no decorrer do trabalho, incluindo a caracterização da pesquisa realizada, os instrumentos necessários e sua elaboração e as abordagens utilizadas para o tratamento dos dados obtidos.

No Capítulo 4 estarão representados os resultados obtidos para os gráficos estudados por simulações computacionais. Além disso serão discutidas suas propriedades e as relações observadas para cada tipo de gráfico. Por fim será apresentada a comparação entre os tipos de gráficos estudados, tanto entre si quanto com os gráficos tradicionais da literatura. O Capítulo 5 terá como finalidade a conclusão dos estudos realizados e as possíveis extensões do presente trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 GRÁFICOS DE CONTROLE

Os gráficos de controle são uma ferramenta do CEP baseada em um teste de hipóteses. Segundo Montgomery (2009), para se testar a hipótese que a média é igual a um valor padrão, chamando-se esse de μ_0 , as hipóteses a serem testadas estão descritas pelas equações (1) e (2) a seguir:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad (1)$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad (2)$$

Ou seja, para testar se a média populacional do processo é igual a um valor conhecido μ_0 , ou se foi deslocada para um valor diferente μ_1 .

De acordo com Mohammed *et al.* (2012), o principal propósito dos gráficos de controle é auxiliar na distinção entre causas comuns e especiais de variação, obtendo assim as melhores decisões para correção do processo. Os gráficos de controle são obtidos plotando uma série temporal de dados em um gráfico, como, por exemplo, o número de casos emergenciais em um hospital por dia, com o auxílio de três linhas adicionais: uma linha de centro (normalmente a média), uma linha de limite de controle superior e uma linha de limite de controle inferior. Normalmente nesses limites são utilizados três desvios padrão para cima e para baixo da média, sendo conhecidos popularmente como limites três-sigma.

Segundo Montgomery (2009), quando são conhecidos a média μ e o desvio-padrão σ , os limites de controle superior UCL, inferior LCL, e a linha de centro LC são calculadas segundo as equações (3), (4) e (5) abaixo:

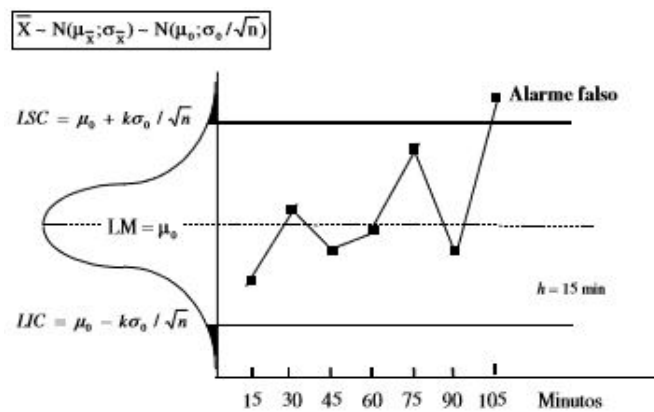
$$UCL = \mu + 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

$$LC = \mu \quad (4)$$

$$LCL = \mu - 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (5)$$

Segundo Costa, Epprecht e Carpinetti (2005), quando o processo está em controle estatisticamente, ou seja, isento de causas especiais, todos os pontos do gráfico deveriam estar dentro dos seus limites de controle. Porém, há um risco, denominado α , de que um ponto caia fora dos limites ainda assim. Isso é caracterizado como um alarme falso, em que é dado o alarme mesmo quando o processo está em controle, resultando em ajustes em momento indevido no processo. A Figura 3 representa um gráfico de controle com a estatística $\bar{X}$ (média amostral) em que ocorre um alarme falso.

Figura 3 – Gráfico de $\bar{X}$: ocorrência de um alarme falso.



Fonte: Costa, Epprecht, Carpinetti (2005).

Costa, Epprecht e Carpinetti (2005) afirmam que se a hipótese H_1 é verdadeira (ou seja, a média do processo está deslocada), existe o risco, denominado de risco β , de se inferir que o processo está em controle, quando na verdade não está.

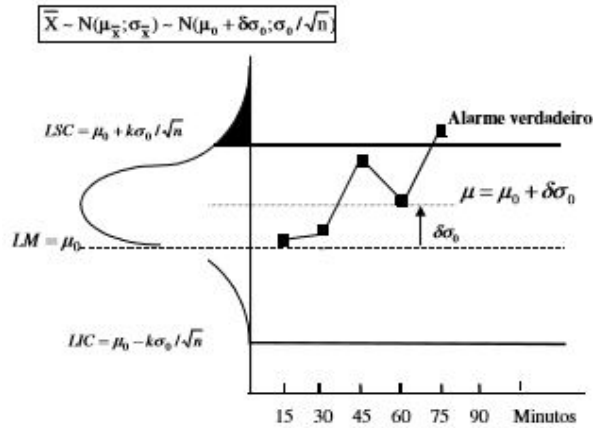
Montgomery (2009) afirma que se a média de um processo passa de seu valor padrão, como por exemplo μ_0 , para outro valor $\mu_1 = \mu_0 + k\sigma$, a probabilidade de não se detectar essa alteração na primeira próxima amostra, ou seja, o risco β , é dado pela equação (6):

$$\beta = P\{LCL \leq \bar{x} \leq UCL \mid \mu = \mu_1 = \mu_0 + k\sigma\} \quad (6)$$

Quando a hipótese H_1 é a hipótese verdadeira (processo sob a influência de causas especiais), o ideal seria que o primeiro ponto plotado já caísse fora dos limites de controle (sinalizando o estado de falta de controle). Contudo, isso nem sempre ocorre, especialmente se o deslocamento sofrido pela média do processo for pequeno (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

A Figura 4 demonstra um gráfico de controle em que se detectou corretamente um desvio na média do processo, sem ter acontecido erros do tipo α ou β .

Figura 4 – Gráfico de $\bar{X}$: ocorrência de um alarme verdadeiro.



Fonte: Costa, Epprecht, Carpinetti (2005).

2.1.1 Gráficos de controle por atributos

Segundo Montgomery (2009), para várias características da qualidade não é possível aferir uma medição numérica, sendo necessário inspecionar os itens como defeituosos ou não defeituosos de acordo com a característica inspecionada. Além disso, nos tempos atuais tem-se usado a denominação conformes ou não-conformes.

Os gráficos de controle por variáveis são utilizados para monitorar características de qualidade contínuas, como por exemplo, o diâmetro de um eixo. Os gráficos de controle por atributos são utilizados para monitorar características de qualidade que não são possíveis de serem avaliadas por meio de mensurações. Por exemplo, itens como pregos, parafusos ou lâmpadas são simplesmente classificados como “defeituosos” ou “não defeituosos” (COSTA; EPPRECHT; CARPINETTI, 2005).

Em um gráfico de controle por atributos, Costa, Epprecht e Carpinetti (2005) afirmam que os riscos α e β devem ser calculados com base na distribuição binomial, seguindo as seguintes expressões (7) e (8):

$$\alpha = 1 - \Pr[LIC \leq D \leq LSC \mid p = p_0] \quad (7)$$

$$\beta = \Pr[LIC \leq D \leq LSC \mid p = p_1] \quad (8)$$

Onde as probabilidades são calculadas pela equação (9):

$$\Pr[D = d] = \binom{n}{d} p^d (1 - p)^{n-d}, d = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Para Montgomery (2009), a fração dos itens não conformes, denominada $\hat{p}$, é definida como a razão entre itens não conformes na amostra D e o tamanho n da amostra, como na seguinte expressão (10):

$$\hat{p} = \frac{D}{n}. \quad (10)$$

2.1.2 Gráficos de controle por atributos e variáveis

Quando a mensuração de uma característica de qualidade é dispendiosa e consome muito tempo, é interessante avaliar a possibilidade de se utilizar um gráfico de controle baseado na inspeção por atributo para monitorar a média ou a variância do processo (HO; QUININO, 2013).

Segundo Aparisi e Ho (2018), a medição de características da qualidade pode exigir certas habilidades ou conhecimentos que um operador pode não possuir, acarretando custos de treinamento no processo. Além disso, pode tomar mais tempo que o necessário e o descarte de amostras em que só é possível inspeção por experimentos destrutivos. Nesses casos pode ser mais atraente gráficos que combinem atributos e variáveis para o monitoramento desse processo, tendo em vista suas vantagens de implementação e eficiência econômica.

Os gráficos que combinam atributos e variáveis em sua execução apresentam duas etapas, que diferem em execução para cada tipo de gráfico, porém apresentam normalmente a seguinte estrutura: na primeira etapa executa-se uma avaliação por atributos, ou seja, mais simples, rápida e econômica, e caso a avaliação sinalize um ponto fora dos limites, uma segunda avaliação é feita por variável, ou seja, mais demorada e precisa, e caso seja novamente sinalizado um ponto fora dos limites, o processo é definido fora de controle (OLIVEIRA, 2018).

De acordo com Aparisi e Ho (2018), é desejável que a maioria das decisões sejam tomadas a primeira fase de inspeção, por atributos, para que o custo de gráficos combinados se assemelhe ao custo de um gráfico puramente por atributos. Assim, somente alguns casos, em que se necessita confirmação, a decisão será tomada pela segunda fase de inspeção, por variáveis.

2.2 GRÁFICOS DE CONTROLE UNIVARIADOS

2.2.1 Gráfico de controle $\bar{X}$

Montgomery (2009) afirma que o controle de processos em que é necessário monitorar sua média é geralmente feito por meio do gráfico de controle para médias, ou seja, o gráfico de controle $\bar{X}$.

Segundo Montgomery (2009), sendo uma característica da qualidade de média μ e desvio-padrão σ conhecidos e que segue uma distribuição normal, ao se retirar uma amostra de tamanho n , a média dos elementos será dada pela equação (11):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (11)$$

Para Jardim, Chakraborti e Epprecht (2019), o gráfico de $\bar{X}$ pode ocorrer em três casos de processo: o caso em que se conhece tanto a média μ e o desvio-padrão σ do processo; o caso em que se conhece a média μ porém não se conhece o desvio-padrão σ do processo; o caso em que se desconhece ambos os parâmetros μ e σ .

De acordo com Jardim, Chakraborti e Epprecht (2019), para os casos em que a média e o desvio padrão μ e σ são conhecidos, os limites superior e inferior de controle, UCL e LCL , respectivamente, são dados pelas expressões (12) e (13) abaixo:

$$UCL = \mu + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \quad (12)$$

$$LCL = \mu - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (13)$$

Em que o fator de controle L normalmente tem como valor 3, o popular limite três sigma, ou é estabelecido como forma de se obter um NMA de 370 ou para uma determinada porcentagem de erros α .

Para casos em que a média μ não é conhecida, Montgomery (2009) afirma que deve-se retirar um número m suficiente de amostras, e sendo $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ a média de cada amostra, ou seja, a média das médias amostrais, denominada $\bar{\bar{x}}$, é uma boa estimativa para μ , podendo servir de linha centro para o gráfico de $\bar{X}$, e é dada pela equação (14):

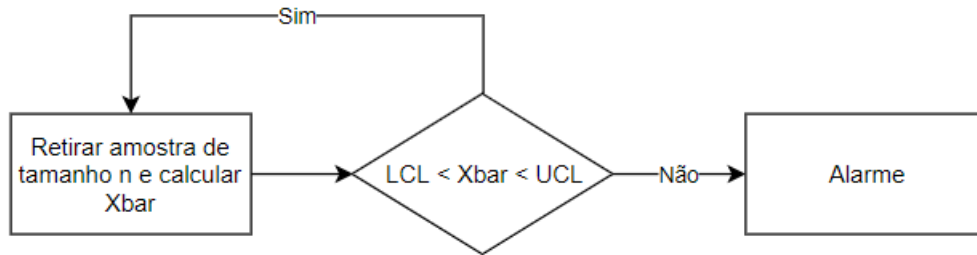
$$\bar{\bar{x}} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_m}{m}. \quad (14)$$

Para Jardim, Chakraborti e Epprecht (2019), uma estimativa adequada para o desvio-padrão σ pode ser calculada utilizando-se a média dos desvios-padrão amostrais, obtendo-se a seguinte expressão (15):

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m S_i^2}{m}}, \text{ em que } S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n-1}. \quad (15)$$

A Figura 5 ilustra um fluxograma que demonstra o funcionamento do gráfico de médias $\bar{X}$:

Figura 5 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle $\bar{X}$.



Fonte: Adaptado de Montgomery (2009).

2.2.2 Gráfico de controle *mixed control chart*

De acordo com Aslam *et al.* (2015), o *mixed control chart*, segue o seguinte procedimento:

- Uma amostra de tamanho n é retirada. Verifica-se o número d de elementos não conformes de acordo com o limite superior de especificação, USL.
- Considera-se o processo fora de controle se $d > UCL_1$ ou $d < LCL_1$. Considera-se o processo em controle caso $LCL_2 < d < UCL_2$. Caso contrário, a inspeção passa para o estágio de variáveis.
- Calcula-se $\bar{X}$ e considera-se o processo fora de controle se $\bar{X} < LCL_3$ ou $\bar{X} > UCL_3$. Se $LCL_3 < \bar{X} < UCL_3$, o processo está sob controle.

Segundo Aslam *et al.* (2015), os limites de controle são dados pelas seguintes expressões (16) até (21):

$$UCL_1 = np_0 + k_1\sqrt{np_0(1-p_0)} \quad (16)$$

$$LCL_1 = \max [0, np_0 - k_1\sqrt{np_0(1-p_0)}] \quad (17)$$

$$UCL_2 = np_0 + k_2\sqrt{np_0(1-p_0)} \quad (18)$$

$$LCL_2 = \max [0, np_0 - k_2\sqrt{np_0(1-p_0)}] \quad (19)$$

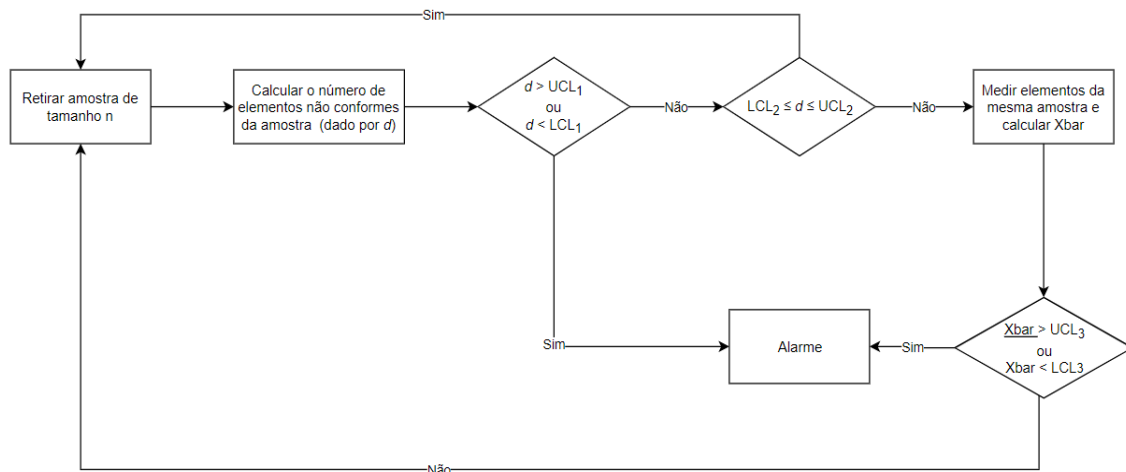
$$UCL_3 = m + k_3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (20)$$

$$LCL_3 = m - k_3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (21)$$

Sendo p_0 a fração de itens não-conformes quando o processo está em controle, enquanto k_1 , k_2 e k_3 são coeficientes de controle a serem determinados.

A Figura 6 apresenta um fluxograma que demonstra o funcionamento desse tipo de gráfico:

Figura 6 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle *mixed control chart*.



Fonte: Adaptado de Aslam *et al.* (2015).

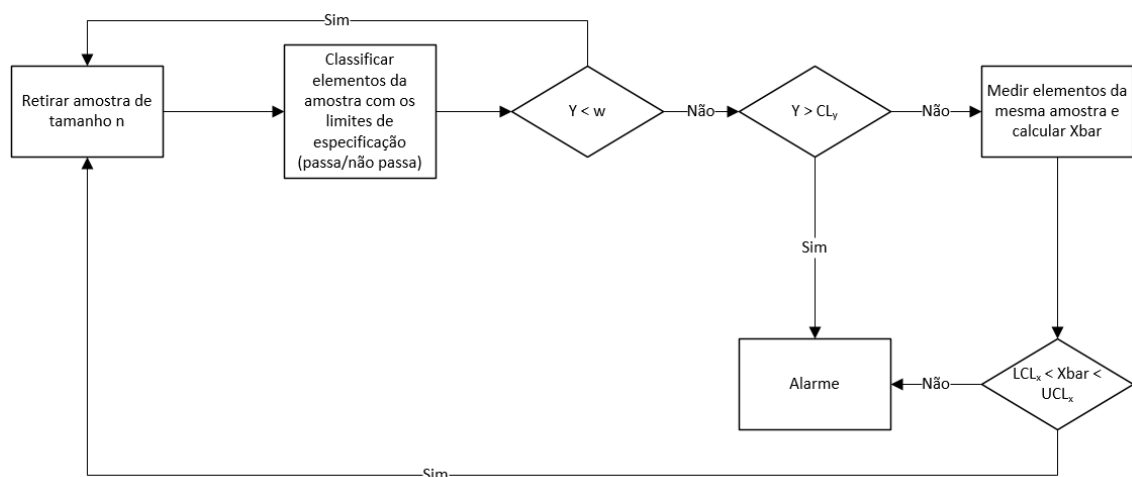
2.2.3 Gráfico de controle ATTRIVAR

O gráfico de controle ATTRIVAR, proposto por Ho e Aparisi (2016), possui duas versões, uma em que se utiliza a mesma amostra nos dois estágios de inspeção, chamado ATTRIVAR-1, e uma em que se retira uma nova amostra para o segundo estágio, chamado ATTRIVAR-2.

De acordo com Ho e Aparisi (2016), inicialmente, retira-se uma amostra de n elementos do processo e avalia-se cada elemento por um dispositivo do tipo passa/não-passa, para caracterizar a primeira fase de atributos, e conta-se a quantidade de unidades não conformes de acordo com a especificação do processo, denominada Y . Caso $Y > CL_y$, o processo é imediatamente definido como fora de controle, e caso $Y < w$ o processo é definido sob controle e passa-se para a próxima amostra. No último caso, em que $w < Y < CL_y$, passa-se para o estágio de inspeção por variáveis. Para o gráfico ATTRIVAR-1, utiliza-se a mesma amostra no segundo estágio, e para o gráfico ATTRIVAR-2 coleta-se uma nova amostra para a inspeção. Medem-se todos os elementos e é calculada a média $\bar{X}$ da amostra. Se $LCL_x < \bar{X} < UCL_x$ o processo é definido sob controle. Caso contrário, considera-se o processo fora de controle. A máxima porcentagem de vezes em que a estatística $\bar{X}$ é calculada, ou seja, a porcentagem do total de amostras em que se passa para o segundo estágio de inspeção, é denominada $\%X_{max}$.

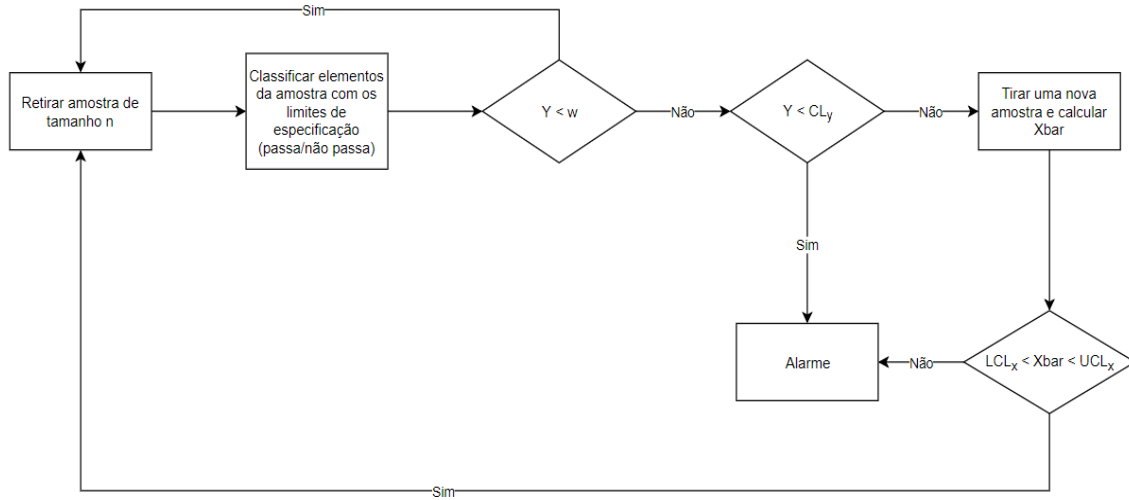
Um fluxograma que demonstra o funcionamento do ATTRIVAR-1 está presente na Figura 7, enquanto um fluxograma para o ATTRIVAR-2 pode ser observado na Figura 8:

Figura 7 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle ATTRIVAR-1.



Fonte: Adaptado de Ho e Aparisi (2016).

Figura 8 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle ATTRIVAR-2.



Fonte: Adaptado de Ho e Aparisi (2016).

2.3 GRÁFICOS DE CONTROLE BIVARIADOS

Segundo Aparisi e Ho (2018), a maioria dos trabalhos recentes de gráficos combinando atributos e variáveis trata do monitoramento de apenas uma característica da qualidade, e na prática, isso não corresponde às necessidades dos processos de fabricação.

Nas seções a seguir, serão apresentados alguns gráficos de controle que tratam de casos multivariados de inspeção, e em seguida gráficos multivariados que utilizam a combinação de atributos e variáveis.

2.3.1 Gráfico de controle RMAX

Costa e Machado (2010) propuseram um gráfico de controle com uma estatística baseada nas amplitudes amostrais para monitorar a matriz de covariâncias de processos com p características de qualidade. Essa estatística ficou conhecida como RMAX.

Sendo a amplitude $R_i = \max \{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\} - \min \{X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in}\}$, $RMAX = \max (R_1, R_2, \dots, R_p)$, em que X_{ij} , $i = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, n$, são a matriz $p \times n$ de medidas das características de qualidade feitas nas n unidades da amostra (COSTA; MACHADO, 2010).

A matriz de covariâncias em controle Σ_0 é dada pela expressão (22) a seguir:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

Onde σ_{ij} , $i = j = 1, 2, \dots, p$, são as p variâncias das características de qualidade e σ_{ij} , com $i \neq j = 1, 2, \dots, p$, são as covariâncias entre duas características de qualidade. O gráfico de controle baseado na estatística RMAX é chamado gráfico RMAX. Se a estatística RMAX cair além de CL (Limite de Controle), o gráfico de controle sinaliza uma condição fora de controle (COSTA; MACHADO, 2010).

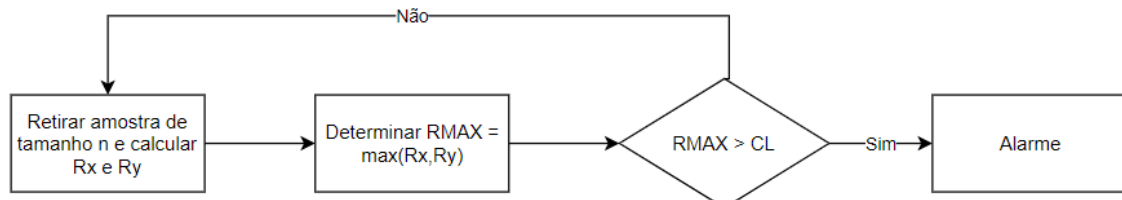
A ocorrência de causas especiais muda a matriz de covariâncias de Σ_0 para Σ_1 , como na expressão (23):

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & \cdots & a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{1p} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{p1} & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

É assumido que $a_k > 1$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ e $a_{ij} \geq 1$, $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ (COSTA, MACHADO, 2010).

A Figura 9 ilustra o funcionamento do gráfico RMAX para o caso bivariado:

Figura 9 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle RMAX para o caso bivariado.



Fonte: Adaptado de Costa e Machado (2010).

2.3.2 Gráfico de controle VMAX

Segundo Costa e Machado (2008), a estatística VMAX é o máximo dos valores das variâncias amostrais padronizadas $S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^n x_{ij}^2}{n}$, $i = 1, 2, \dots, p$, com $x_{ij} = (X_{ij} - \mu_i)/\sigma_i$, ou seja, $VMAX = \max\{S_1^2, S_2^2, \dots, S_p^2\}$, para p características da qualidade que seguem uma distribuição normal.

A matriz de covariâncias em controle Σ_0 é dada na expressão (24) abaixo:

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

Onde σ_{ij} , $i = j = 1, 2, \dots, p$, são as p variâncias de $X_1, X_2, \dots, X_p$ e σ_{ij} , com $i \neq j = 1, 2, \dots, p$, são as covariâncias entre X_i e X_k (COSTA; MACHADO, 2008, tradução livre).

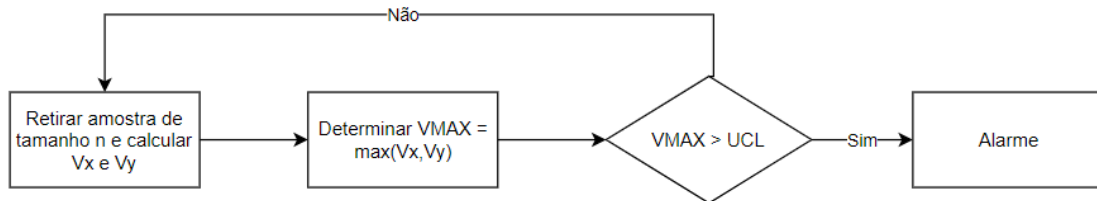
Se a estatística VMAX cair além do limite superior de controle (UCL), o gráfico de controle sinaliza uma condição de fora de controle. Quando o gráfico VMAX sinaliza, o usuário pode imediatamente examinar as variâncias amostrais de $X_1, X_2, \dots, X_p$ para descobrir qual variável foi afetada pela causa especial, ou seja, a que possui variância amostral maior que o limite superior de controle. Para segurança, pode-se considerar que a causa especial também tenha afetado outras variáveis quando suas variâncias amostrais estão próximas do limite superior de controle, mesmo que não o ultrapassem. (COSTA; MACHADO, 2008, tradução livre).

Segundo Costa e Machado (2008), a ocorrência de causas especiais muda a matriz de covariâncias de Σ_0 para Σ_1 , como na expressão (25):

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 \cdot \sigma_{11} & a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{12} & \cdots & a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{1p} \\ a_1 \cdot a_2 \cdot \sigma_{21} & a_2 \cdot a_2 \cdot \sigma_{22} & \cdots & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_1 \cdot a_p \cdot \sigma_{p1} & a_2 \cdot a_p \cdot \sigma_{p2} & \cdots & a_p \cdot a_p \cdot \sigma_{pp} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

A Figura 10 apresenta o funcionamento do gráfico VMAX para o caso bivariado:

Figura 10 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle RMAX para o caso bivariado.



Fonte: Adaptado de Costa e Machado (2008).

2.3.3 Gráfico de controle MAXD

Melo, Ho e Medeiros (2016) propuseram um gráfico de controle multivariado, ou seja, para inspeção de mais de uma característica da qualidade, denominado MaxD, para a inspeção

de um processo em que a média do processo é afetada por desvios unilaterais, passando de μ_{0x} e μ_{0y} para $\mu_1' = (\mu_{0x} + \delta_x \sigma_x, \mu_{0y} + \delta_y \sigma_y)$, tendo a matriz de covariâncias como descrito em (26):

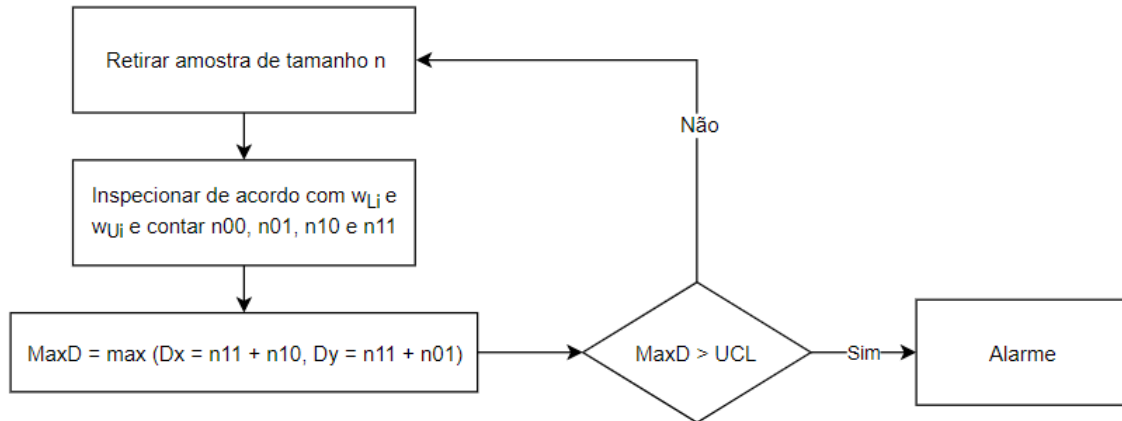
$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho \sigma_x \sigma_y \\ \rho \sigma_x \sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

A todo intervalo de amostragem, n unidades são retiradas. Usando um dispositivo como um anel de calibragem, cada unidade é classificada como reprovada na característica de qualidade i , se o valor da característica de qualidade i está fora dos limites discriminantes. Note que o item classificado como reprovado na dimensão i não significa que não se conforma ou que é inadequado, apenas que o valor da dimensão está fora dos limites discriminantes $[w_{Li}, w_{Ui}]$; $i = X, Y$. Depois da classificação, temos n_{11} , o número de unidades reprovadas em ambas as características de qualidade; n_{01} , o número de unidades reprovados em Y e aprovados em X ; n_{10} , o número de unidades aprovados em Y e reprovados em X e n_{00} , aprovados em ambas as características de qualidade, com $n = n_{11} + n_{10} + n_{01} + n_{00}$. Sendo $D_x = n_{11} + n_{10}$, $D_y = n_{11} + n_{01}$, respectivamente o número de unidades reprovadas na característica de qualidade X e Y . O Vetor (D_x, D_y) segue uma distribuição normal (MELO; HO; MEDEIROS, 2016, tradução livre).

Segundo Melo, Ho e Medeiros (2016), para o caso bivariado, a inspeção seguirá normalmente enquanto $D_x \leq UCL_{xy}$ e $D_y \leq UCL_{xy}$, ou seja, até o momento em que ocorrerá o sinal, por uma amostra apresentar $(D_x > UCL_{xy}) \cup (D_y > UCL_{xy})$. A vantagem do gráfico MaxD é de que não é necessário plotar um gráfico separado para cada uma das características de qualidade $x, y, \dots, p$, sendo mais prático plotar $MaxD = \max \{D_x, D_y, \dots, D_p\}$, e se $MaxD > UCL_{xy}$, o sinal para ajuste do processo é igualmente disparado, até mesmo quando se utiliza amostras com apenas um elemento, ou seja, $n = 1$.

A Figura 11 demonstra o funcionamento do gráfico MaxD para o caso bivariado:

Figura 11 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle MaxD para o caso bivariado.



Fonte: Adaptado de Melo, Ho e Medeiros (2016).

2.3.4 Gráfico de controle DVmax

Segundo Machado, Costa e Ho (2019), o gráfico de controle DVmax tem suas amostras divididas em duas subamostras, sendo os itens da primeira subamostra de tamanho n_1 submetidos a inspeção por atributos, ou seja, num dispositivo do tipo passa/não-passa, enquanto os itens da subamostra de tamanho n_2 são inspecionados por variáveis, sendo assim necessária sua medição.

Machado, Costa e Ho (2019) afirmam que o processo a ser monitorado pelo gráfico DVmax possui média populacional conhecida $\mu = (\mu_x, \mu_y)$. Enquanto o processo está em controle, a matriz de covariâncias é dada pela expressão (27):

$$\Sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \rho\sigma_x\sigma_y \\ \rho\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

De acordo com Machado, Costa e Ho (2019), ao ser afetado por uma causa especial, o processo pode ter aumentos de variância na característica da qualidade X e/ou na variância da característica da qualidade Y , sem, contudo, afetar a correlação (X, Y) . Ao assumir um estado fora de controle estatisticamente, a matriz de covariâncias passa a ser dada pela equação (28):

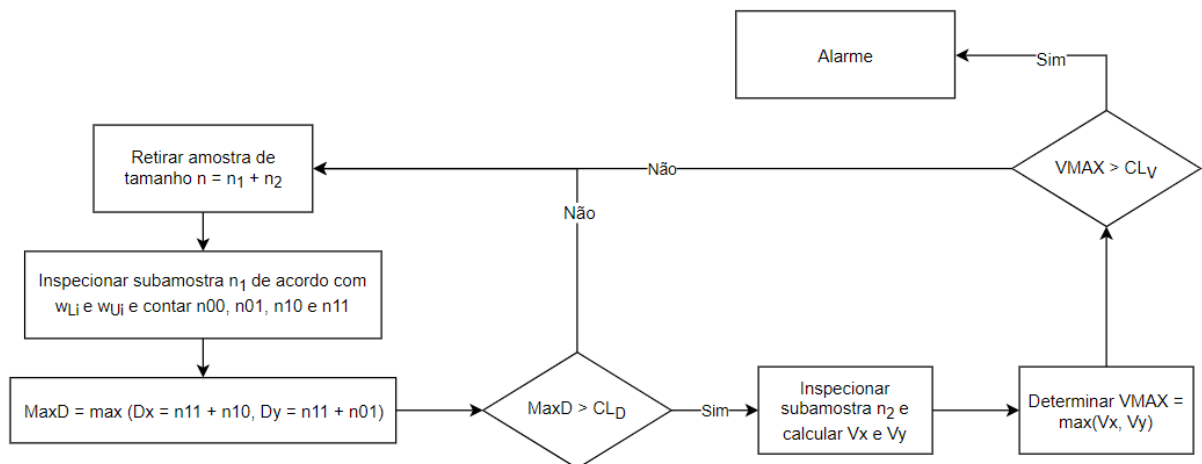
$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} a_1^2\sigma_x^2 & \rho a_1 a_2 \sigma_x \sigma_y \\ \rho a_1 a_2 \sigma_x \sigma_y & a_2^2\sigma_y^2 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

Sendo a_1 e a_2 os desvios na variância do processo, que ocorrem devido a causas especiais.

Com o gráfico DVmax em uso, os itens da primeira subamostra são submetidos a duas inspeções passa/não-passa; a primeira (segunda) classifica os itens como aprovados ou reprovados com respeito a característica da qualidade X (Y), e os resultados das duas inspeções são usados para obter D – o máximo de D_x e D_y , o número de itens reprovados com respeito às características da qualidade X e Y , respectivamente. Se D é menor que o limite de controle CL_D , a inspeção da amostra é interrompida e o processo é declarado estando em controle; caso contrário, as características da qualidade X e Y da segunda subamostra são medidas, e as medidas de X e Y são usadas para obter o valor $Vmax$, em que $Vmax$ é o máximo de S_x^2 e S_y^2 , as variâncias das medidas de X e Y , respectivamente. O processo é declarado fora de controle (em controle) quando o ponto $Vmax$ é plotado acima (abaixo) do limite de controle CL_V . (MACHADO; COSTA; HO, 2019, tradução livre).

A Figura 12 apresenta o funcionamento do gráfico DVmax para o caso bivariado:

Figura 12 – Fluxograma do funcionamento do gráfico de controle DVmax para o caso bivariado.



Fonte: Adaptado de Machado, Costa e Ho (2019).

3 MÉTODOS

As atividades que foram executadas para o desenvolvimento do presente trabalho estão representadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Cronograma das atividades desenvolvidas.

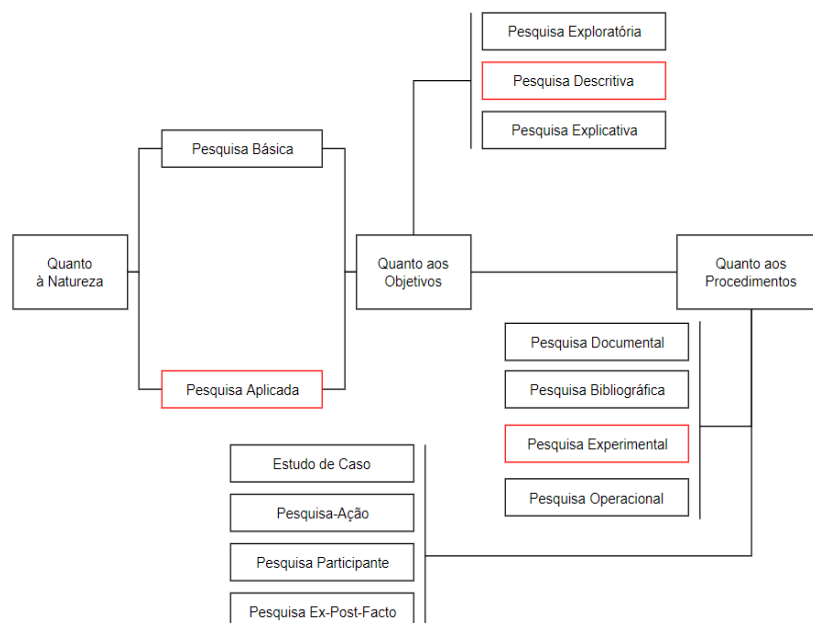
Etapa	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov
Elaboração do projeto							
Revisão teórica							
Elaborar programas computacionais							
Validação de programas							
Simulações de desempenho							
Tabulação de resultados							
Comparação com gráficos existentes							
Elaboração da Monografia							

Fonte: próprio autor.

3.1 CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

A abordagem utilizada para o trabalho é do tipo pesquisa aplicada, descritiva e experimental, utilizando métodos quantitativos. Na Figura 13 estão representados esquematicamente os tipos de pesquisa utilizados nesse trabalho, destacados em vermelho.

Figura 13 – Tipos de pesquisa científica e tipo utilizado no presente estudo



Fonte: Adaptado de Prodanov e Freitas (2013).

Quanto à natureza, a pesquisa pode ser classificada como aplicada por buscar desenvolver uma contribuição aplicável de imediato na indústria (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Segundo Silva e Menezes (2005), pesquisas do tipo aplicada envolvem a resolução de problemas específicos de aplicações práticas, gerando verdades e interesses de caráter local, ou seja, não-universais.

Esta pesquisa é classificada como descritiva, quanto aos objetivos, uma vez que a finalidade da pesquisa é interpretar e analisar fenômenos em simulações sem interferir na resposta do processo (PRODANOV; FREITAS, 2013).

Silva e Menezes (2005) afirmam que uma pesquisa do tipo experimental se caracteriza pela determinação de um objeto de estudo em que se analisa variáveis influenciadoras, formas de controle e efeitos produzidos por essas variáveis no objeto.

De acordo com Prodanov e Freitas (2013), uma pesquisa experimental utiliza de manipulação das variáveis do objeto de estudo, de modo a encontrar relações de causa e efeito do fenômeno.

Como afirmam Silva e Menezes (2005), pesquisas com abordagem quantitativa procuram traduzir informação em números, de modo a encontrar possíveis análises, utilizando de recursos e métodos estatísticos para tal.

3.2 INSTRUMENTOS

A obtenção das propriedades dos gráficos de controle será por simulação na linguagem computacional FORTRAN.

Foram criados programas computacionais para cada um dos tipos de gráfico, tendo normalmente como parâmetros o número de repetições do programa, número de amostras a serem geradas, tamanho de amostra, número de características da qualidade (variáveis), grau de correlação (apenas caso multivariado), limites de controle e desvios a serem aplicados nas médias ou covariâncias do processo. Os respectivos códigos computacionais para cada gráfico podem ser encontrados no Apêndice A.

A biblioteca de funções estatísticas IMSL foi utilizada, fornecendo a maioria das funções necessárias para a geração de amostras de forma aleatória, simulando um processo de fabricação.

3.3 TRATAMENTO DOS DADOS

A principal estatística para medir o desempenho dos gráficos será o NMA (número médio de amostras até o alarme), que, segundo Ho e Aparisi (2016), é a estatística mais utilizada para se determinar a eficiência de um gráfico de controle.

Segundo Montgomery (2009), o ARL_0 (NMA_0), ou seja, o NMA quando o processo encontra-se sob controle estatístico, pode ser expressado como na equação (30), e o ARL_1 (NMA_1), ou seja, o NMA quando o processo encontra-se sob o efeito de uma causa especial, pode ser expressado como na equação (31):

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} \quad (30)$$

$$ARL_1 = \frac{1}{(1-\beta)} \quad (31)$$

De uma maneira aplicada, o NMA, segundo Ho e Aparisi (2016), é a média do número de pontos (amostras) no gráfico até que um alarme ocorra. Para casos em que o processo está sob controle estatístico, o gráfico em teoria deve demorar a detectar um ponto fora dos limites, gerando um número de NMA alto. De modo contrário, quando o processo está fora de controle estatisticamente, o gráfico em teoria deve detectar rapidamente um ponto fora dos limites, gerando um número de NMA baixo, sendo o mais próximo de 1 (o mínimo de amostras inspecionadas) quanto for possível.

Na validação dos programas computacionais, será utilizada a diferença em porcentagem entre NMA teórico e simulado, dada pela equação (32):

$$Diferença = \frac{NMA_s - NMA_t}{NMA_t} \cdot 100 \quad (32)$$

4 RESULTADOS

4.1 SIMULAÇÃO DOS GRÁFICOS DE CONTROLE

Serão apresentados nessa seção a validação dos programas computacionais utilizados e a simulação dos gráficos de controle, obtendo seu desempenho para os casos em que não há causas especiais agindo no processo, ou seja, seu NMA_0 e seu desempenho quando são aplicadas causas especiais que deslocam sua média μ ou desvio padrão σ , ou seja, seu NMA_1 . A validação será dada pela comparação entre seu NMA simulado em relação ao NMA teórico presente em seus respectivos artigos. Os programas utilizados nas simulações dos gráficos podem ser encontrados no Apêndice A.

Nas Tabelas 2 e 3 estão apresentados os valores de NMA encontrados para o gráfico *mixed control chart* por simulação utilizando os coeficientes k_1 , k_2 e k_3 para cada caso encontrado em Aslam *et al.* (2015), juntamente com os valores obtidos no referido artigo e a diferença entre os dois valores. A magnitude da perturbação na média é dada por δ .

Tabela 2 – Validação do gráfico de controle *mixed control chart* para 10% de $\%X_{\max}$ com o artigo de Aslam *et al.* (2015).

n	20			30			40		
δ	Aslam	Simulado	Diferença	Aslam	Simulado	Diferença	Aslam	Simulado	Diferença
0,0	200,00	108,17	-45,91%	200,00	182,573	-8,71%	200,00	120,959	-39,52%
0,1	87,11	51,175	-41,25%	70,65	69,67	-1,39%	61,72	41,516	-32,73%
0,2	31,94	20,31	-36,41%	21,15	21,667	2,44%	15,53	11,735	-24,44%
0,3	12,64	9,041	-28,47%	7,58	8,1	6,86%	5,09	4,43	-12,97%
0,4	5,74	4,693	-18,24%	3,39	3,785	11,65%	2,31	2,234	-3,29%
0,5	3,06	2,787	-8,92%	1,91	2,161	13,14%	1,43	1,459	2,03%
0,6	1,93	1,888	-2,18%	1,34	1,491	11,27%	1,12	1,158	3,39%
0,7	1,42	1,445	1,76%	1,11	1,195	7,66%	1,03	1,045	1,46%
0,8	1,183	1,215	2,70%	1,02	1,068	4,71%	1,00	1,011	1,10%
0,9	1,074	1,096	2,05%	1,00	1,019	1,90%	1,00	1,002	0,20%
1,0	1,02	1,04	1,96%	1,00	1,004	0,40%	1,00	1,000	0,00%
USL		1,282			1,282			1,282	
(LCL ₁ , UCL ₁)		(0, 6.5)			(0, 8.5)			(0, 10.5)	
(LCL ₂ , UCL ₂)		(0.5, 3.5)			(2.5, 3.5)			(2.5, 5.5)	
k_3		2,56			2,88			2,64	
LCL		0,5724			0,5258			0,4174	
UCL		-0,5724			-0,5258			-0,4174	

Fonte: próprio autor.

Foram verificadas grandes diferenças entre os resultados da simulação realizada em FORTRAN e os resultados de Aslam *et al.* (2015), como se pode observar nas colunas de diferenças da Tabela 2. Os valores de k_3 , utilizados no cálculo do LCL_3 e UCL_3 , aparentam estar errados. Uma possibilidade é terem sido utilizados conceitos equivocados de probabilidade, descartando a probabilidade condicional associada com a utilização da mesma amostra em dois estágios de inspeção consecutivos.

Recentemente, Leoni e Costa (2019) obtiveram os resultados de NMA do *mixed control chart*, considerando a distribuição de probabilidades truncada. Utilizando os valores teóricos publicados em Leoni e Costa (2019), e o novo coeficiente k_3 apresentado nesse artigo, obteve-se os valores de NMA simulado da Tabela 3.

Tabela 3 – Validação do gráfico de controle *mixed control chart* para 10% de $\%X_{\max}$ com o artigo de Leoni e Costa (2019).

n	20			30			40		
δ	Leoni	Simulado	Diferença	Leoni	Simulado	Diferença	Leoni	Simulado	Diferença
0,0	200,00	201,783	0,89%	200,00	199,617	-0,19%	200,00	198,091	-0,95%
0,1	83,42	87,102	4,41%	71,35	74,420	4,30%	59,69	61,179	2,49%
0,2	31,89	32,762	2,73%	22,52	23,072	2,45%	16,08	16,226	0,91%
0,3	13,61	13,820	1,54%	8,54	8,558	0,21%	5,70	5,653	-0,82%
0,4	6,62	6,653	0,50%	3,96	3,951	-0,23%	2,67	2,647	-0,86%
0,5	3,68	3,676	-0,11%	2,25	2,232	-0,80%	1,62	1,608	-0,74%
0,6	2,33	2,319	-0,47%	1,53	1,519	-0,72%	1,22	1,218	-0,16%
0,7	1,67	1,661	-0,54%	1,21	1,207	-0,25%	1,07	1,064	-0,56%
0,8	1,33	1,323	-0,53%	1,07	1,073	0,28%	1,02	1,016	-0,39%
0,9	1,15	1,150	0,00%	1,02	1,021	0,10%	1,00	1,003	0,30%
1,0	1,06	1,065	0,47%	1,00	1,005	0,50%	1,00	1,000	0,00%
USL		1,282			1,282			1,282	
(LCL ₁ , UCL ₁)		(0, 6.5)			(0, 8.5)			(0, 10.5)	
(LCL ₂ , UCL ₂)		(0.5, 3.5)			(2.5, 3.5)			(2.5, 5.5)	
k_3		2,89			2,92			2,85	
LCL		0,6462			0,5331			0,4506	
UCL		-0,6462			-0,5331			-0,4506	

Fonte: próprio autor.

Nas colunas de diferenças da Tabela 3 pode-se observar que os valores estão de acordo com os obtidos por Leoni e Costa (2019). As diferenças entre os valores simulados e os valores teóricos não passam de 5%.

Foram simulados os gráficos ATTRIVAR-1 e ATTRIVAR-2. Foram adotados tamanhos de amostra de 3, 5 e 10 e $\%X_{\max}$ de 5%, 15% e 25%. Tendo em vista a grande quantidade de

parâmetros possíveis e os inúmeros casos que isso gera, foram fixados os parâmetros w e CL_y do primeiro estágio de inspeção, como mostra a Tabela 4. Seus resultados estão apresentados nas Tabelas 5 a 7.

Tabela 4 – Parâmetros w e CL_y para ambos os gráficos ATTRIVAR.

n	w	CL_y
3	0	3
5	1	5
10	3	9

Fonte: próprio autor.

Tabela 5 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-1 para 5% de $\%X_{\max}$.

n	3			5			10		
δ	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença
0	370	370,18	0,05%	370	370,19	0,05%	370	369,67	-0,09%
0,25	192,85	189,42	-1,78%	145,48	138,79	-4,60%	89,55	86,815	-3,05%
0,5	64,78	63,846	-1,44%	40,98	36,172	-11,73%	19,27	17,083	-11,35%
1	11,65	10,593	-9,07%	5,29	5,033	-4,86%	2,66	2,38	-10,53%
1,25	5,83	5,406	-7,27%	2,76	2,667	-3,37%	1,76	1,479	-15,97%
1,5	3,36	3,186	-5,18%	2,25	1,723	-23,42%	1,3	1,156	-11,08%
2	1,73	1,573	-9,08%	1,15	1,123	-2,35%	1,04	1,008	-3,08%
LIE		-2,3877			-1,7717			-1,4394	
LSE		2,3877			1,7717			1,4394	
k3		2,8850			2,8496			2,6188	
LCL		-1,6657			-1,2744			-0,8281	
UCL		1,6657			1,2744			0,8281	

Fonte: próprio autor.

Observa-se, na Tabela 5, que há uma diferença significativa entre os valores da simulação em relação aos do algoritmo genético, chegando a ser até 23,42% menor, no caso em que $n = 5$ e $\delta = 1,5$.

Tabela 6 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-1 para 15% de $\%X_{\max}$.

n	3			5			10		
δ	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença
0	370	370,05	0,01%	370	370,9	0,24%	370	370,2	0,05%
0,25	189,84	189,01	-0,44%	140,04	135,2	-3,46%	77,82	77,022	-1,03%
0,5	61,29	62,219	1,52%	35,64	34,156	-4,16%	14,31	13,868	-3,09%
1	10,19	10,05	-1,37%	4,78	4,604	-3,68%	2,01	1,916	-4,68%
1,25	5,2	5,062	-2,65%	2,61	2,436	-6,67%	1,36	1,272	-6,47%
1,5	3,03	2,951	-2,61%	1,71	1,59	-7,02%	1,08	1,069	-1,02%
2	1,61	1,487	-7,64%	1,11	1,083	-2,43%	1	1,002	0,20%
LIE		-1,9367			-1,4688			-1,2382	
LSE		1,9367			1,4688			1,2382	
k3		3,0110			2,9880			2,8980	
LCL		-1,7384			-1,3363			-0,9164	
UCL		1,7384			1,3363			0,9164	

Fonte: próprio autor.

Na Tabela 6, os valores de NMA simulados também se apresentam menores em relação aos do algoritmo genético utilizado por Ho e Aparisi (2016), porém em menor magnitude.

Tabela 7 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-1 para 25% de $\%X_{\max}$.

n	3			5			10		
δ	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença
0	370	370,14	0,04%	370	370,12	0,03%	370	370,49	0,13%
0,25	189,84	200,49	5,61%	139,68	139,18	-0,36%	79,55	75,019	-5,70%
0,5	61,29	69,698	13,72%	34,64	35,25	1,76%	14,18	13,371	-5,71%
1	10,19	11,092	8,85%	4,61	4,697	1,89%	1,99	1,828	-8,14%
1,25	5,16	5,485	6,30%	2,51	2,465	-1,79%	1,36	1,23	-9,56%
1,5	3	3,154	5,13%	1,59	1,593	0,19%	1,06	1,053	-0,66%
2	1,51	1,533	1,52%	1,08	1,08	0,00%	1,02	1,001	-1,86%
LIE		-1,6862			-1,2991			-1,1243	
LSE		1,6862			1,2991			1,1243	
k3		3,0750			3,0270			2,9640	
LCL		-1,7754			-1,3537			-0,9373	
UCL		1,7754			1,3537			0,9373	

Fonte: próprio autor.

Na Tabela 7, observa-se que os valores de NMA apresentaram comportamentos variados em relação ao tamanho de amostra. Para $n = 3$, os valores foram em geral significativamente maiores que os da literatura; para $n = 5$, os valores foram maiores, porém muito próximos; e, para $n = 10$, foram significativamente menores.

A Tabela 8 apresenta um resumo das diferenças entre os valores de NMA do gráfico ATTRIVAR-1 em relação aos obtidos por Ho e Aparisi (2016) para cada $\%X_{\max}$ e para cada tamanho de amostra n .

Tabela 8 – Média das diferenças do gráfico ATTRIVAR-1 simulado em relação aos de Ho e Aparisi (2016).

$\%X_{\max} \backslash n$	3	5	10	Média
5%	-4,82%	-7,18%	-7,88%	-6,63%
15%	-1,88%	-3,88%	-2,29%	-2,69%
25%	5,88%	0,25%	-4,50%	0,54%
Média	-0,28%	-3,61%	-4,89%	-2,92%

Fonte: próprio autor.

Pode-se observar que a grande maioria dos valores encontrados por simulação computacional foram menores que os do artigo de Ho e Aparisi (2016). Vale salientar que, conforme a Tabela 8, alguns casos obtiveram média das diferenças superior a 5%. Porém, a média geral das diferenças, foi inferior a 5%.

O gráfico de controle ATTRIVAR-2 foi simulado, com o auxílio do aluno do Programa de Mestrado em Engenharia de Produção da UNESP, Felipe Domingues Simões. Foram obtidos os valores de NMA para os casos de $\%X_{\max} = 5\%$, 15% e 25%, considerando $n = 3$ e $n = 5$, conforme apresentado nas Tabelas 9, 10 e 11.

Tabela 9 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-2 para 5% de $\%X_{\max}$.

n	3			5		
	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença
0	370	370,22	0,06%	370	370,09	0,02%
0,25	219,49	219,56	0,03%	182,26	178,9	-1,84%
0,5	78,1	77,928	-0,22%	51,35	49,571	-3,46%
1	12,38	12,337	-0,35%	6,69	6,651	-0,58%
1,25	6,49	6,515	0,39%	3,78	3,776	-0,11%
1,5	3,87	4,115	6,33%	2,65	2,703	2,00%
2	2,07	2,443	18,02%	1,46	2,028	38,90%
LIE		-2,3684			-1,7588	
LSE		2,3684			1,7588	
k3		1,9277			1,9273	
LCL		-1,1130			-0,8619	
UCL		1,1130			0,8619	

Fonte: próprio autor.

Na Tabela 9, a grande maioria dos valores da simulação estão semelhantes aos teóricos, exceto para os casos em que δ é muito elevado.

Tabela 10 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-2 para 15% de $\%X_{\max}$.

n	3			5		
δ	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença
0	370	370,21	0,06%	370	370,06	0,02%
0,25	209,53	208,51	-0,49%	160,61	161,89	0,80%
0,5	72,39	72,208	-0,25%	43,59	43,664	0,17%
1	11,49	11,529	0,34%	6,16	6,156	-0,06%
1,25	6,06	6,063	0,05%	3,69	3,523	-4,53%
1,5	3,78	3,783	0,08%	2,36	2,511	6,40%
2	1,98	2,157	8,94%	1,48	1,852	25,14%
LIE		-1,8608			-1,4175	
LSE		1,8608			1,4175	
k3		2,3955			2,3767	
LCL		-1,3830			-1,0629	
UCL		1,3830			1,0629	

Fonte: próprio autor.

De maneira semelhante, na Tabela 10, os valores da simulação se apresentaram próximos aos teóricos, exceto para os casos em que δ é muito elevado.

Tabela 11 – Validação do gráfico de controle ATTRIVAR-2 para 25% de $\%X_{\max}$.

n	3			5		
δ	Ho	Simulado	Diferença	Ho	Simulado	Diferença
0	370	370,01	0,00%	370	370,29	0,08%
0,25	209,53	232,57	10,99%	154,96	164,28	6,02%
0,5	72,39	89,797	24,05%	42,28	45,51	7,64%
1	11,49	14,259	24,10%	6,16	6,47	5,03%
1,25	6,06	7,088	16,96%	3,52	3,611	2,59%
1,5	3,78	4,131	9,29%	2,34	2,49	6,41%
2	1,98	2,07	4,55%	1,46	1,732	18,63%
LIE		-1,5247			-1,1894	
LSE		1,5247			1,1894	
k3		2,8334			2,6243	
LCL		-1,6359			-1,1736	
UCL		1,6359			1,1736	

Fonte: próprio autor.

Nas Tabelas 9, 10 e 11, pôde-se observar que os valores de NMA simulados apresentaram média superior aos de Ho e Aparisi (2016), principalmente no caso em que $\%X_{\max} = 25\%$. Porém, para os casos de $\%X_{\max} = 5\%$ e 15% percebe-se que a maioria dos valores obtidos são semelhantes ou até inferiores aos esperados, com exceção dos casos em que δ é muito grande.

A Tabela 12 apresenta um resumo das diferenças entre os valores de NMA do gráfico ATTRIVAR-2 em relação aos apresentados por Ho e Aparisi (2016) em seu artigo para

cada $\%X_{\max}$ e para cada tamanho de amostra n . Percebe-se que a média geral foi próxima de 5%.

Tabela 12 – Média das diferenças do gráfico ATTRIVAR-2 simulado em relação aos de Ho e Aparisi (2016).

$\%X_{\max} \setminus n$	3	5	Média
5%	3,47%	4,99%	4,23%
15%	1,25%	3,99%	2,62%
25%	12,85%	6,63%	9,74%
Média	5,85%	5,20%	5,53%

Fonte: próprio autor.

Foi simulado o gráfico de controle DVmax para o caso de $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$, com valores de correlação ρ de 0, 0,3, 0,5 e 0,8, conforme os valores teóricos obtidos de Machado, Costa e Ho (2019). Os limites de controle utilizados pelos autores fornecem um número médio de amostra 5. A Tabela 13 apresenta os resultados para os casos de $\rho = 0$ e 0,3, enquanto a Tabela 14 apresenta os resultados para $\rho = 0,5$ e 0,8.

Tabela 13 – Validação do gráfico de controle DVmax para $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$ com $\rho = 0,0$ e 0,3.

a11	a22	Teórico	Simulado	Diferença	Teórico	Simulado	Diferença
1,0	1,0	370,47	369,42	-0,28%	370,43	369,36	-0,29%
1,0	1,25	25,13	25,11	-0,08%	25,27	25,3	0,12%
1,0	1,5	5,58	5,58	0,00%	5,61	5,61	0,00%
1,0	1,75	2,64	2,64	0,00%	2,65	2,65	0,00%
1,0	2,0	1,8	1,8	0,00%	1,8	1,8	0,00%
1,25	1,25	10,5	10,5	0,00%	10,81	10,81	0,00%
1,25	1,5	4	3,99	-0,25%	4,1	4,1	0,00%
1,25	1,75	2,23	2,23	0,00%	2,27	2,27	0,00%
1,25	2,0	1,63	1,63	0,00%	1,65	1,65	0,00%
1,5	1,5	2,51	2,51	0,00%	2,6	2,6	0,00%
1,5	1,75	1,77	1,77	0,00%	1,81	1,81	0,00%
1,5	2,0	1,43	1,43	0,00%	1,45	1,45	0,00%
1,75	1,75	1,45	1,45	0,00%	1,48	1,48	0,00%
1,75	2,0	1,28	1,28	0,00%	1,3	1,3	0,00%
2,0	2,0	1,18	1,18	0,00%	1,2	1,2	0,00%
ρ		0,0			0,3		
LC		0,5			0,5		
LCV		2,433			2,4313		
LDS		2,0912			2,0817		
LDI		-2,0912			-2,0817		

Fonte: próprio autor.

Tabela 14 – Validação do gráfico de controle DVmax para $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$ com $\rho = 0,5$ e $0,8$.

a11	a22	Teórico	Diferença	Erro	Teórico	Simulado	Diferença
1,0	1,0	370,42	370,54	0,03%	370,48	370,38	-0,03%
1,0	1,25	25,44	25,45	0,04%	24,84	24,83	-0,04%
1,0	1,5	5,63	5,64	0,18%	5,48	5,48	0,00%
1,0	1,75	2,66	2,66	0,00%	2,61	2,61	0,00%
1,0	2,0	1,81	1,81	0,00%	1,78	1,78	0,00%
1,25	1,25	11,38	11,38	0,00%	13,02	13,03	0,08%
1,25	1,5	4,29	4,29	0,00%	4,7	4,7	0,00%
1,25	1,75	2,34	2,34	0,00%	2,45	2,45	0,00%
1,25	2,0	1,68	1,68	0,00%	1,73	1,73	0,00%
1,5	1,5	2,75	2,75	0,00%	3,21	3,21	0,00%
1,5	1,75	1,9	1,9	0,00%	2,13	2,13	0,00%
1,5	2,0	1,5	1,5	0,00%	1,62	1,62	0,00%
1,75	1,75	1,55	1,55	0,00%	1,74	1,74	0,00%
1,75	2,0	1,34	1,34	0,00%	1,47	1,47	0,00%
2,0	2,0	1,23	1,23	0,00%	1,33	1,33	0,00%
ρ		0,5		0,8			
LC		0,5		0,5			
LCV		2,4261		2,3943			
LDS		2,0628		1,9979			
LDI		-2,0628		-1,9979			

Fonte: próprio autor.

Para esse tipo de gráfico a maioria dos valores simulados apresentaram bastante exatidão, sendo em sua maioria exatamente iguais aos teóricos para casos com desvio na matriz de covariâncias maior que 1,25.

O gráfico experimental MaxD-RMAX, elaborado como um dos objetivos desse trabalho, foi desenvolvido utilizando a mesma estratégia utilizada no gráfico DVmax, substituindo-se apenas a estatística utilizada no estágio de variáveis VMAX pela estatística RMAX, elaborada por Costa e Machado (2010).

Esse novo tipo de gráfico foi simulado com parâmetros semelhantes aos utilizados no DVmax, com a intenção de se obter resultados comparáveis. Assim, temos $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$ e valores de correlação ρ de 0, 0,3, 0,5 e 0,8. Os mesmos limites de controle na fase de atributos também foram utilizados, considerando que o mesmo gráfico de atributos MaxD foi utilizado. A Tabela 15 apresenta os resultados dessa simulação.

Tabela 15 – Simulação do gráfico de controle MaxD-RMAX.

a11	a22	Simulado			
1,0	1,0	369,3	370,25	370,54	370,34
1,0	1,25	34,51	34,74	34,96	34,42
1,0	1,5	7,7	7,75	7,78	7,58
1,0	1,75	3,36	3,38	3,39	3,31
1,0	2,0	2,11	2,12	2,13	2,09
1,25	1,25	14,49	14,87	15,46	17,43
1,25	1,5	5,43	5,56	5,78	6,32
1,25	1,75	2,81	2,86	2,94	3,09
1,25	2,0	1,9	1,92	1,96	2,02
1,5	1,5	3,29	3,38	3,57	4,13
1,5	1,75	2,16	2,21	2,32	2,61
1,5	2,0	1,63	1,67	1,72	1,87
1,75	1,75	1,69	1,73	1,81	2,05
1,75	2,0	1,41	1,44	1,49	1,65
2,0	2,0	1,26	1,28	1,32	1,46
p		0,0	0,3	0,5	0,8
LC		0,5	0,5	0,5	0,5
LCR		5,305	5,3046	5,2977	5,2608
LDS		2,0912	2,0817	2,0628	1,9979
LDI		-2,0912	-2,0817	-2,0628	-1,9979

Fonte: próprio autor.

Devido ao fato que esse é um gráfico experimental, não há resultados teóricos para se comparar com a simulação, não sendo possível estimar a porcentagem de validação desse tipo de gráfico.

4.2 COMPARAÇÃO COM GRÁFICOS UNIVARIADOS

Nessa seção serão comparados os resultados de eficiência dos gráficos de controle univariados simulados nesse trabalho com o gráfico univariado mais tradicionalmente consolidado da literatura, o gráfico de médias $\bar{X}$. O tamanho de amostra utilizado em todos os gráficos foi de $n = 5$. O gráfico *mixed control chart* foi simulado utilizando $LCL_1 = 0,0$, $UCL_1 = 3,5$, $LCL_2 = 0,5$, $UCL_2 = 2,5$ e $k_3 = 2,9768$. Os gráficos ATTRIVAR-1 e ATTRIVAR-2 já foram simulados com $n = 5$ na seção 4.1 deste trabalho, logo seus parâmetros utilizados foram os mesmos. Essa comparação está apresentada na Tabela 16.

Tabela 16 – Comparação entre os gráficos de controle univariados *mixed control chart*, ATTRIVAR-1 e ATTRIVAR-2 simulados e o gráfico de médias $\bar{X}$ da literatura.

n		5		
δ	Xbar	<i>mixed</i>	ATTRIVAR-1	ATTRIVAR-2
0	370	370,172	370,193	370,087
0,25	133,04	149,843	138,785	178,903
0,5	33,38	38,787	36,172	49,571
1	4,49	5,218	5,033	6,651
1,25	2,29	2,724	2,667	3,776
1,5	1,57	1,74	1,723	2,703
2	1,08	1,124	1,123	2,028
Média da Diferença		11,28%	7,86%	50,85%

Fonte: próprio autor.

Com os resultados da Tabela 16 pode-se concluir que o gráfico de controle ATTRIVAR-1 obteve desempenho similar ao gráfico de médias, enquanto o ATTRIVAR-2 apresentou desempenho consideravelmente inferior, estando o *mixed control chart* em um patamar intermediário. Vale salientar que os três gráficos ainda possuem eficiência econômica maior que o gráfico de médias, sendo assim vantajoso a utilização de ambos os gráficos. Em situações que a amostra não pode ser reutilizada no segundo estágio de inspeção o gráfico ATTRIVAR-2 ainda pode ser uma opção mais economicamente desejável.

4.3 COMPARAÇÃO COM GRÁFICOS BIVARIADOS

Nessa seção serão comparados os resultados de eficiência dos gráficos de controle bivariados simulados nesse trabalho com os gráficos bivariados que foram utilizados na sua elaboração, os gráficos MaxD, VMAX e RMAX. Os valores teóricos obtidos por Costa e Machado (2010) para o gráfico RMAX utilizam $NMA_0 = 200,0$, porém todos os outros gráficos dessa comparação utilizaram $NMA_0 = 370,0$. Assim, foi necessário simular também o gráfico RMAX nesse caso específico para que fosse possível essa comparação. O tamanho de amostra utilizado para os gráficos MaxD, VMAX e RMAX foi 5, enquanto de maneira semelhante o tamanho médio de amostra para os gráficos DVmax e MaxD-RMAX também foi 5. Os tamanhos de subamostra utilizados foram $n_1 = 3$ e $n_2 = 5$. O caso estudado foi sem correlação, ou seja, $\rho = 0,0$. Os resultados dessa comparação estão dispostos na Tabela 17.

Tabela 17 – Comparação entre os gráficos de controle bivariados DVmax e MaxD-RMAX simulados e os gráficos RMAX, VMAX e MaxD.

$\rho = 0.0$						
a11	a22	RMAX	VMAX	MaxD	DVmax	MaxD-RMAX
1,0	1,0	370,77	370,00	369,97	370,28	370,04
1,0	1,25	47,27	35,93	52,78	37,57	47,31
1,0	1,5	11,9	8,46	13,72	8,97	11,96
1,0	1,75	5,24	3,79	6,03	3,99	5,26
1,0	2,0	3,2	2,37	3,57	2,48	3,16
1,25	1,25	25,42	19,33	28,63	17,09	21,85
1,25	1,5	9,9	7,21	11,37	6,60	8,70
1,25	1,75	4,86	3,57	5,57	3,41	4,44
1,25	2,0	3,0	2,30	3,43	2,26	2,85
1,5	1,5	6,3	4,64	7,24	4,06	5,34
1,5	1,75	3,89	2,92	4,45	2,63	3,39
1,5	2,0	2,7	2,08	3,03	1,93	2,42
1,75	1,75	2,91	2,24	3,31	2,02	2,55
1,75	2,0	2,2	1,78	2,51	1,64	2,01
2,0	2,0	1,9	1,53	2,08	1,43	1,70
LC		-	-	1	1	1
LCV/LCR		5,379	3,964	-	3,5353	5,0377
LDS		-	-	2,51905	1,7414	1,7414
LDI		-	-	-2,519	-1,7414	-1,7414

Fonte: próprio autor.

Observa-se que os gráficos DVmax e MaxD-RMAX apresentaram desempenho semelhante aos seus respectivos gráficos de variáveis VMAX e RMAX. Por consequência, também obtiveram desempenho superior ao gráfico de atributos MaxD, sendo assim uma comprovação da viabilidade de utilização dos gráficos que combinam atributos e variáveis, dado que seu desempenho foi quase tão bom quanto os gráficos que utilizam somente inspeção por variáveis, possuindo ainda a vantagem econômica da utilização de inspeção por atributos na grande maioria das inspeções. Vale também observar que o gráfico MaxD-RMAX apresentou valores muito próximos ao gráfico RMAX para pequenos desvios, mas consideravelmente inferiores para maiores desvios.

Além disso, foram comparados ambos os gráficos que combinam atributos e variáveis bivariados simulados nesse trabalho, o DVmax e o MaxD-RMAX, para o caso em que $n_1 = 3$ e $n_2 = 10$. A Tabela 18 apresenta os resultados dessa comparação.

Tabela 18 – Comparação entre os gráficos de controle bivariados DVmax e MaxD-RMAX simulados.

a11	a22	$\rho = 0.0$			$\rho = 0.5$		
		DVmax	MaxD-RMAX	Diferença	DVmax	MaxD-RMAX	Diferença
1,0	1,0	369,42	369,30	-0,03%	370,54	370,54	0,00%
1,0	1,25	25,11	34,51	37,44%	25,45	34,96	37,37%
1,0	1,5	5,58	7,70	37,99%	5,64	7,78	37,94%
1,0	1,75	2,64	3,36	27,27%	2,66	3,39	27,44%
1,0	2,0	1,80	2,11	17,22%	1,81	2,13	17,68%
1,25	1,25	10,50	14,49	38,00%	11,38	15,46	35,85%
1,25	1,5	3,99	5,43	36,09%	4,29	5,78	34,73%
1,25	1,75	2,23	2,81	26,01%	2,34	2,94	25,64%
1,25	2,0	1,63	1,90	16,56%	1,68	1,96	16,67%
1,5	1,5	2,51	3,29	31,08%	2,75	3,57	29,82%
1,5	1,75	1,77	2,16	22,03%	1,9	2,32	22,11%
1,5	2,0	1,43	1,63	13,99%	1,5	1,72	14,67%
1,75	1,75	1,45	1,69	16,55%	1,55	1,81	16,77%
1,75	2,0	1,28	1,41	10,16%	1,34	1,49	11,19%
2,0	2,0	1,18	1,26	6,78%	1,23	1,32	7,32%
LC		0,5	0,5		0,5	0,5	
LCV/LCR		2,433	5,305		2,4261	5,2977	
LDS		2,0912	2,0912		2,0628	2,0628	
LDI		-2,0912	-2,0912		-2,0628	-2,0628	
Média				22,48%	22,35%		
Média Total				22,41%			

Fonte: próprio autor.

Pode-se observar que a diferença entre os dois gráficos é a favor do gráfico que utiliza a estatística VMAX. Isso era esperado de acordo com os estudos apresentados em Costa e Machado (2010), em que se compara o gráfico VMAX com o gráfico RMAX, demonstrando que o VMAX sempre apresenta melhor desempenho. Assim, o presente trabalho comprova que essa relação se mantém mesmo em gráficos combinados de atributos e variáveis, em que o gráfico que utiliza RMAX apresentou resultados em média 22,41% maiores que o gráfico que utiliza VMAX.

5 CONCLUSÃO

O objetivo geral desse trabalho, de investigar as propriedades dos gráficos de controle univariados e bivariados baseados na estratégia MIX através de simulações computacionais, foi alcançado com sucesso. Os gráficos de controle *mixed control chart*, ATTRIVAR, DVmax e MaxD-RMAX foram todos simulados e suas propriedades obtidas com êxito, atendendo ao primeiro objetivo específico do trabalho, enquanto suas comparações com gráficos tradicionais da literatura também foram desenvolvidas apropriadamente, concluindo o segundo objetivo específico.

Por meio da observação dos comportamentos dos gráficos nos resultados das simulações, foi possível comprovar a eficácia da estratégia MIX em obter desempenho muito similar aos gráficos de controle puramente por variáveis, enquanto ainda mantendo o forte desempenho econômico dos gráficos por atributos.

Entre os gráficos univariados, o gráfico ATTRIVAR-1 apresentou o melhor desempenho, quase comparável ao gráfico $\bar{X}$ de médias, seguido do gráfico *mixed control chart* e por fim o ATTRIVAR-2.

Já entre os dois gráficos multivariados simulados, o gráfico DVmax apresentou o melhor desempenho, se aproximando muito do seu gráfico original VMAX. A diferença entre o gráfico DVmax e MaxD-RMAX se mostrou muito próxima da diferença entre os gráficos de variáveis que os originaram, VMAX e RMAX, respectivamente.

5.1 SUGESTÃO DE CONTINUIDADE DO TRABALHO

O presente trabalho oferece a oportunidade de elaboração do gráfico MaxD-RMAX, mais um tipo de gráfico que utiliza eficientemente a estratégia MIX para gráficos de controle, já subsidiando o seu desenvolvimento com os valores experimentais obtidos para esse gráfico. Além disso, o presente estudo se manteve aos casos univariado e bivariado, podendo ser estendido para casos com maior quantidade de variáveis, a depender da necessidade de um processo específico com grande número de variáveis.

REFERÊNCIAS

- APARISI, F.; HO, L. L. M-ATTRIVAR: an attribute-variable chart to monitor multivariate process means. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 34, n. 2, p. 214–228, 2018.
- ASLAM, M. *et al.* A mixed control chart to monitor the process. **International Journal of Production Research**, London, v. 53, n. 15, p. 4684-4693, 2015.
- COSTA, A.F.B.; EPPRECHT E.K.; CARPINETTI, L.C.R. **Controle estatístico de qualidade**. 2. ed. São Paulo: Atlas, 2005. 334 p.
- COSTA, A.F.B.; MACHADO, M. A. G. A new chart based on sample variances for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 41, n. 7-8, p.770-779, 2008.
- COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. A control chart based on sample ranges for monitoring the covariance matrix of multivariate processes. **Journal of Applied Statistics**, v. 38, n. 2, p. 233-245, 2010.
- HO, L. L.; QUININO. R. C. An attribute control chart for monitoring the variability of a process. **International Journal of Production Economics**, v. 145, n. 1, p. 263-267, 2013.
- HO, L. L.; QUININO. R. C. Combining attribute and variable data to monitor process variability: MIX S2 control chart. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 83, n. 9-12, p. 3389–3396, 2016.
- HO, L. L.; APARISI, F. ATTRIVAR: optimized control charts to monitor process mean with lower operational cost. **International Journal of Production Economics**, v. 182, p. 472-483, 2016.
- JARDIM, F. S.; CHAKRABORTI, S.; EPPRECHT, E. K. $\bar{X}$ chart with estimated parameters: the conditional ARL distribution and new insights. **Production and Operations Management**, v. 28, n. 6, p. 1545-1557, 2019.
- LEONI, R. C.; COSTA, A. F. B. The performance of the truncated mixed control chart. **Communications in Statistics: theory and methods**, v. 48, n. 17, p. 4294-4301, 2019.
- MACHADO, M. A. G; COSTA, A. F. B.; HO, L. L. Gráficos de controle por atributos e variáveis para o monitoramento da matriz de covariâncias de processos bivariados. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 41., 2019, Limeira. **Anais eletrônicos** [...]. Campinas: Galoá, 2019.
- MELO, M. S.; HO, L. L.; MEDEIROS, P. G. MAX D: an attribute control chart to monitor a bivariate process mean. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 90, p. 489-498, 2016.
- MOHAMMED, M. A.; PANESAR, J. S.; LANEY, D. B.; WILSON, R. Statistical process control charts for attribute data involving very large sample sizes: a review of problems and solutions. **BMJ Quality and Safety**, v. 22, n. 4, p. 362-368, 2012.

MONTGOMERY, D. C. **Introduction to statistical quality control**. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2009.

OLIVEIRA, F. P. Monitoramento da média de processos univariados por meio de atributos e variáveis. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 30., 2018, Guaratinguetá. **Anais [...]**. Guaratinguetá: PROPe, 2018.

SILVA, E. L.; MENEZES, E. M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. Florianópolis: UFSC, 2005.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

AYKROYD, R. G.; LEIVA, V.; RUGGERI, F. Recent developments of control charts, identification of big data sources and future trends of current research. **Technological Forecasting and Social Change**, v. 144, p. 221-232, 2019.

COSTA, A. F. B.; MACHADO, M. A. G. Monitoring the mean vector and the covariance matrix of multivariate processes with sample means and sample ranges, **Produção**, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 197-208, 2011.

MACHADO, M. A. G.; HO, L. L.; COSTA, A. F. B.; Attribute control charts for monitoring the covariance matrix of bivariate processes. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 34, n. 2, p. 257–264, 2018.

MELO, M. S.; HO, L. L.; MEDEIROS, P. G. A 2-Stage Attribute-Variable Control Chart to Monitor a Vector of Process Means. **Quality and Reliability Engineering International**, v. 33, n. 7, p. 1589-1599, 2017.

MICROSOFT FORTRAN POWER STATION 4.0. Professional Edition with Microsoft IMSL Mathematical and Statistical Libraries. **Microsoft Corporation**, 1995.

APÊNDICE A – Códigos computacionais

mixed control chart

```

program mix
use msimsl
implicit none
integer amostra, n
integer Cun, Ca, Cnma
integer, allocatable :: nas(:)
double precision, allocatable :: unids(:)
double precision, allocatable :: x(:,:)
double precision media, desvx, xm, nma
double precision d, usl, k3
double precision ucl1, ucl2, ucl3, lcl1, lcl2, lcl3

amostra = 100000
n = 20
desvx = 0.6
media = 0.0
usl = media + 1.282
lcl1 = 0.0
ucl1 = 6.5
lcl2 = 0.5
ucl2 = 3.5
k3 = 2.56
lcl3 = media - k3/sqrt(real(n))
ucl3 = media + k3/sqrt(real(n))

allocate(nas(amostra))
allocate(unids(n))
allocate(x(amostra,n))

call rnset(0)

do Cnma = 1, amostra
  do Cun = 1, amostra
    call drnnor(n, unids)
    d = 0
    do Ca = 1, n
      x(Cun,Ca) = unids(Ca) + desvx + media
      if (x(Cun,Ca) > usl) then
        d = d + 1
      end if
    end do
    if (d > ucl1 .or. d < lcl1) then
      exit
    end if
    if (d > lcl2 .and. d < ucl2) then
      cycle
    end if
    xm = sum(x(Cun,1:n))/n
    if (xm > ucl3 .or. xm < lcl3) then
      exit
    end if
  end do
  nas(Cnma) = Cun
end do
nma = sum(nas(1:amostra))/dble(amostra)

write(*,'(A,F8.3)') ' NMA = ', nma
write(*,*)

end

```

ATTRIVAR-1

```

program attrivar1
use msimsl
implicit none
integer repet, amostra, n
integer Cun, Ca, Cnma
integer, allocatable :: nas(:), Cf(:)
double precision, allocatable :: unids(:)
double precision, allocatable :: x(:, :)
double precision desvx, desvs, xm, nma, freqtot
double precision d, LSE, LIE, k3
double precision LIA, ISA, ucl, lcl

repet = 1000000
amostra = 1000000
n = 5
desvx = 0.0
desvs = 1.0
LSE = 2.3877
LIE = -1*LSE
LIA = 0.5
ISA = 2.5
k3 = 2.885
ucl = k3/dsqrt(dble(n))
lcl = -1*ucl

allocate(nas(repet))
allocate(unids(n))
allocate(x(amostra,n))
allocate(Cf(repet))

call rnset(0)

do Cnma = 1, repet
  Cf(Cnma) = 0
  do Cun = 1, amostra
    call drnnor(n, unids)
    d = 0
    do Ca = 1, n
      x(Cun,Ca) = unids(Ca)*desvs + desvx
      if (x(Cun,Ca) > LSE .or. x(Cun,Ca) < LIE) then
        d = d + 1
      end if
    end do
    if (d < LIA) then
      cycle
    end if
    if( d > ISA) then
      exit
    end if
    Cf(Cnma) = Cf(Cnma) + 1
    xm = sum(x(Cun,1:n))/n
    if (xm > ucl .or. xm < lcl) then
      exit
    end if
  end do
  nas(Cnma) = Cun
end do
nma = sum(nas(1:repet))/dble(repet)
freqtot = sum(dble(Cf(1:repet)))/sum(nas(1:repet))

write(*,'(A,F8.3)') ' NMA = ', nma
write(*,'(A,F6.2,A)') ' Freq = ', freqtot*100,'% '
write(*,*)

end

```

ATTRIVAR-2

```

program attrivar2
use msimsl
implicit none
integer repet, amostra, n
integer Cun, Ca, Cnma, Cont
integer, allocatable :: nas(:), Cf(:)
double precision, allocatable :: unids(:)
double precision desvx, desvs, xm, nma, freqtot
double precision d, LSE, LIE, k3
double precision LIA, ISA, ucl, lcl

repet = 1000000
amostra = 1000000
n = 3
desvx = 0.0
desvs = 1.0
LSE = 1.5247
LIE = -1*LSE
LIA = 0.5
ISA = 2.5
k3 = 2.8334
ucl = k3/dsqrt(dble(n))
lcl = -1*ucl

allocate(nas(repet))
allocate(unids(n))
allocate(Cf(repet))

call rnsset(0)

do Cnma = 1, repet
  Cf(Cnma) = 0
  Cont = 0
  do Cun = 1, amostra
    Cont = Cont + 1
    call drnnor(n, unids)
    do Ca = 1, n
      unids(Ca) = unids(Ca)*desvs + desvx
    end do
    d = 0
    do Ca = 1, n
      if (unids(Ca) > LSE .or. unids(Ca) < LIE) then
        d = d + 1
      end if
    end do
    if (d < LIA) then
      cycle
    end if
    if (d > ISA) then
      nas(Cnma) = Cont
      exit
    end if

    Cf(Cnma) = Cf(Cnma) + 1
    Cont = Cont + 1
    call drnnor(n, unids)
    do Ca = 1, n
      unids(Ca) = unids(Ca)*desvs + desvx
    end do
    xm = sum(unids(1:n))/n
    if (xm > ucl .or. xm < lcl) then
      nas(Cnma) = Cont
      exit
    end if
  end do
end do
nma = sum(nas(1:amostra))/dble(repet)
freqtot = sum(dble(Cf(1:repet)))/sum(nas(1:amostra))

write(*, '(A,F8.3)') ' NMA = ', nma
write(*, '(A,F6.2,A)') ' Freq = ', freqtot*100, '%'
write(*,*)

end

```

RMAX

```

program rmax1
use msimsl
implicit none
integer nv, zeros
integer n, repet, lda
integer Cnma, Cun, Cele, Cont
double precision, allocatable :: matriz(:,:), cov(:,:)
double precision, allocatable :: nas(:), unids(:,:), covInv(:,:)
double precision, allocatable :: vet1(:), vet2(:)
double precision nma, ro, u1, u2, sigma1, sigma2, rmax, r1, r2
double precision delta1, delta2, a1, a2, LCR

repet = 1000000
n = 5
nv = 2
u1 = 0.0
u2 = 0.0
sigma1 = 1.0
sigma2 = 1.0
ro = 0.0
delta1 = 0.0
delta2 = 0.0
a1 = 1.0
a2 = 1.0
LCR = 5.152
lda = nv

allocate(matriz(nv,nv))
allocate(cov(nv,nv))
allocate(unids(n,nv))
allocate(nas(repet))
allocate(covInv(nv,nv))
allocate(vet1(n))
allocate(vet2(n))

cov(1,1) = sigma1*a1*a1
cov(1,2) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,1) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,2) = sigma2*a2*a2

call rnsset(0)
call dchfac(nv, cov, nv, 100*DMACH(4), zeros, matriz, nv)

do Cnma = 1, repet
  Cont = 0
  do Cun = 1, repet
    Cont = Cont + 1
    call drnmavn(n, nv, matriz, nv, unids, n)

    do Cele = 1, n
      unids(Cele,1) = unids(Cele,1) + delta1 + u1
      unids(Cele,2) = unids(Cele,2) + delta2 + u2
      vet1(Cele) = unids(Cele,1)
      vet2(Cele) = unids(Cele,2)
    end do

    r1=maxval(vet1)-minval(vet1)
    r2=maxval(vet2)-minval(vet2)

    rmax = max(r1,r2)
    if (rmax > LCR) then
      nas(Cnma) = Cont
      exit
    end if
  end do
end do

nma = sum(nas(1:repet))/dble(repet)

write(*,'(A,F8.2)') ' NMA = ', nma

end

```

DVmax

```

program MaxDVMAX
use msimsl
implicit none
integer nv, zeros, nbar, contr
integer n1, n2, repet, d1, d2, n00, n01, n10, n11, maxd, lda
integer Cnma, Cun, Cele, Cont
double precision, allocatable :: matriz(:,:), cov(:,:)
double precision, allocatable :: nas(:), unids(:,:), covInv(:,:)
double precision, allocatable :: xbar(:), y(:), vet1(:), vet2(:)
double precision nma, ro, LC, LCV, u1, u2, sigma1, sigma2
double precision wu1, w11, wu2, w12, delta1, delta2, vmax, a1, a2
double precision v1, v2

repet = 1000000
n1 = 3
n2 = 10
nbar = n1+n2
nv = 2
u1 = 0.0
u2 = 0.0
sigma1 = 1.0
sigma2 = 1.0
ro = 0.8
delta1 = 0.0
delta2 = 0.0
a1 = 2.0
a2 = 2.0
wu1 = 1.9979
w11 = -1*wu1
wu2 = wu1
w12 = -1*wu2
LC = 0.5
LCV = 2.3943
lda = nv

allocate(matriz(nv,nv))
allocate(cov(nv,nv))
allocate(unids(nbar,nv))
allocate(nas(repet))
allocate(xbar(nv))
allocate(y(nv))
allocate(covInv(nv,nv))
allocate(vet1(n2))
allocate(vet2(n2))

cov(1,1) = sigma1*a1*a1
cov(1,2) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,1) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,2) = sigma2*a2*a2
allocate(xbar(nv))
allocate(y(nv))
allocate(covInv(nv,nv))
allocate(vet1(n2))
allocate(vet2(n2))

cov(1,1) = sigma1*a1*a1
cov(1,2) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,1) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,2) = sigma2*a2*a2

call rnset(0)
call dchfac(nv, cov, nv, 100*DMACH(4), zeros, matriz, nv)

do Cnma = 1, repet
  Cont = 0
  do Cun = 1, repet
    Cont = Cont + 1
    call drnmvn(nbar, nv, matriz, nv, unids, nbar)

    do Cele = 1, nbar
      unids(Cele,1) = unids(Cele,1) + delta1 + u1
      unids(Cele,2) = unids(Cele,2) + delta2 + u2
    end do

    n00 = 0
    n10 = 0
    n01 = 0
    n11 = 0
    do Cele = 1, n1
      if(unids(Cele,1)>w11.and.unids(Cele,1)<wu1) then
        if(unids(Cele,2)<w12.or.unids(Cele,2)>wu2) then
          n01 = n01 + 1
        else
          n00 = n00 + 1
        end if
      else
        if(unids(Cele,2)<w12.or.unids(Cele,2)>wu2) then
          n11 = n11 + 1
        end if
      end if
    end do
  end do
end do

```

```

                else
                    n10 = n10 + 1
                end if
            end if
        end do
        d1 = n10 + n11
        d2 = n01 + n11
        maxd = max(d1,d2)

        if (maxd > LC) then

            do contr = 1, n2
                vet1(contr) = unids(contr+n1,1)
                vet2(contr) = unids(contr+n1,2)
            end do

            v1=sum((vet1(1:n2))**2)/n2
            v2=sum((vet2(1:n2))**2)/n2

            vmax = max(v1,v2)
            if (vmax > LCV) then
                nas(Cnma) = Contr
                exit
            end if

        end if

    end do
end do

nma = sum(nas(1:repet))/dble(repet)
write(*,'(A,F8.2)') ' NMA = ', nma
end

```

MaxD-RMAX

```

program MaxDRMAX
use msimsl
implicit none
integer nv, zeros, nbar, contr
integer n1, n2, repet, d1, d2, n00, n01, n10, n11, maxd, lda
integer Cnma, Cun, Cele, Cont
double precision, allocatable :: matriz(:,:), cov(:,:)
double precision, allocatable :: nas(:), unids(:,:), covInv(:,:)
double precision, allocatable :: xbar(:), y(:), vet1(:), vet2(:)
double precision nma, ro, LC, LCV, u1, u2, sigma1, sigma2
double precision wu1, w11, wu2, w12, delta1, delta2, rmax, a1, a2
double precision r1, r2

repet = 100000
n1 = 4
n2 = 3
nbar = n1+n2
nv = 2
u1 = 0.0
u2 = 0.0
sigma1 = 1.0
sigma2 = 1.0
ro = 0.9
delta1 = 0.0
delta2 = 0.0
a1 = 1.0
a2 = 2.0
wu1 = 1.182
w11 = -1*wu1
wu2 = wu1
w12 = -1*wu2
LC = 1.0
LCV = 4.4065
lda = nv

allocate(matriz(nv,nv))
allocate(cov(nv,nv))
allocate(unids(nbar,nv))
allocate(nas(repet))
allocate(xbar(nv))
allocate(y(nv))
allocate(covInv(nv,nv))
allocate(vet1(n2))
allocate(vet2(n2))

cov(1,1) = sigma1*a1*a1
cov(1,2) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2

```

```

cov(2,1) = ro*sigma1*sigma2*a1*a2
cov(2,2) = sigma2*a2*a2

call rnset(0)
call dchfac(nv, cov, nv, 100*DMACH(4), zeros, matriz, nv)

do Cnma = 1, repet
  Cont = 0
  do Cun = 1, repet
    Cont = Cont + 1
    call drnmavn(nbar, nv, matriz, nv, unids, nbar)

    do Cele = 1, nbar
      unids(Cele,1) = unids(Cele,1) + delta1 + u1
      unids(Cele,2) = unids(Cele,2) + delta2 + u2
    end do

    n00 = 0
    n10 = 0
    n01 = 0
    n11 = 0
    do Cele = 1, n1
      if(unids(Cele,1)>w11.and.unids(Cele,1)<wul) then
        if(unids(Cele,2)<w12.or.unids(Cele,2)>wu2) then
          n01 = n01 + 1
        else
          n00 = n00 + 1
        end if
      else
        if(unids(Cele,2)<w12.or.unids(Cele,2)>wu2) then
          n11 = n11 + 1
        else
          n10 = n10 + 1
        end if
      end if
    end do
    d1 = n10 + n11
    d2 = n01 + n11
    maxd = max(d1,d2)

    if (maxd > LC) then

      do contr = 1, n2
        vet1(contr) = unids(contr+n1,1)
        vet2(contr) = unids(contr+n1,2)
      end do
      r1=maxval(vet1)-minval(vet1)
      r2=maxval(vet2)-minval(vet2)

      rmax = max(r1,r2)
      if (rmax > LCV) then
        nas(Cnma) = Cont
        exit
      end if

    end if

  end do
end do

nma = sum(nas(1:repet))/dble(repet)

write(*, '(A,F8.2)') ' NMA = ', nma

end

```