



Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

IFT-D.002/04

As Geometrias dos Espaços de Bianchi

William Alexandre Labacca de Castro

Orientador

Helio Vasconcelos Fagundes



2004

Barcode - 230000003272

Agradecimentos

Agradeço sinceramente ao meu estimado orientador Prof. Helio Vasconcelos Fagundes pela dedicação, apoio e ensinamentos solidamente transmitidos.

À minha mulher, Marisa, pela infinita paciência, confiança, constante motivação e inestimável ajuda nos momentos mais difíceis.

Aos amigos Otávio Augusto Trivério Dias e Victo dos Santos Filho, pelas longas e agradáveis horas de frutíferas discussões e pelo grande companheirismo demonstrado.

À amiga e conselheira, Prof. Maria C. Tijero, pela atenção que sempre teve para comigo.

Aos professores do IFT que, direta ou indiretamente, me apoiaram.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro.

Resumo

No final do século XIX, L. Bianchi [1] fez a classificação das geometrias riemani-
anas em espaços tridimensionais, segundo seus possíveis grupos de isometrias. Parte
de seus resultados foi adaptada, em uma linguagem mais moderna, por C. G. Behr
[17] e outros, para o estudo de modelos cosmológicos espacialmente homogêneos
mas não necessariamente isotrópicos. Esta dissertação expõe as idéias e resultados
de Bianchi, e também os formalismos mais recentes no estudo desse problema. Por
completeza, o espaço tridimensional do modelo de Kantowski-Sachs também é aqui
incluído.

Palavras Chaves: Espaços de Bianchi; espaços homogêneos; geometrias não-
euclidianas; geometria riemanaiana; cosmologia.

Áreas do conhecimento: 1010106-3, 1050103-7.

Abstract

At the end of the 19th century, L. Bianchi [1] found a classification of the Riemannian geometries on three-dimensional spaces, according to their possible isometry groups. A part of his results has been adapted, in a more modern language, by C. G. Behr [17] and others, for the study of cosmological models with homogeneous but not necessarily isotropic spatial sections. This dissertation presents Bianchi's ideas and results, and also more recent formalisms in the study of this problem. For completeness, the three-space of Kantowski-Sachs cosmological model is also here included.

Índice

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Painel Histórico	1
1.2	Comentários Iniciais	4
2	ESPAÇOS RIEMANIANOS HOMOGÊNEOS	5
2.1	Formas na Geometria Riemaniana	5
2.1.1	Métrica	5
2.1.2	Tríadas	5
2.1.3	Base Recíproca	6
2.1.4	Vetores e Tensores em Termos das Tríadas	7
2.1.5	Escolha Particular	7
2.1.6	Volumes Fundamentais	8
2.1.7	Operador Distância	9
2.1.8	Relação entre os Tensores Métricos	10
2.1.9	Derivada Exterior Covariante	10
2.1.10	Primeira Equação de Estrutura de Cartan	11
2.1.11	Derivada Exterior Covariante da Métrica Definida pela Tríada	12
2.1.12	Segunda equação de estrutura de Cartan	14
2.1.13	Propriedades das formas ω e Ω	16
2.2	Equações de Killing	18
2.2.1	Grupos de Movimentos e Equação de Killing	18
2.2.2	Solução das Equações de Killing para a Métrica Euclidiana	21
2.3	Determinação dos Espaços Homogêneos	26
2.3.1	Álgebras de Lie	26
2.3.2	Grupo de Isometrias duma Variedade	26
2.3.3	Duais das Constantes de Estrutura	27
2.3.4	Geração duma Base Invariante	28
2.3.5	Homogeneidade	30
2.3.6	Invariança das 1-Formas $\theta^{(A)}$ e Constantes de Estrutura	32

2.3.7	Relação com os Coeficientes de Rotação de Ricci	34
2.3.8	Forma Vetorial de C^{AB}	35
2.4	Método de Behr	36
2.4.1	Determinação dos conjuntos com constantes de estrutura não-equivalentes:	37
3	ESPAÇOS DE BIANCHI E KANTOWSKI-SACHS	40
3.1	Classificação dos Espaços G_3 Transitivos	40
3.1.1	Definição	40
3.1.2	Relação de Comutação dos Tipos de Bianchi	40
3.2	Correspondência Bianchi-Behr	42
3.3	Descrição do Método de Determinação dos Espaços de Bianchi	43
3.3.1	Determinação dos Vetores de Killing	43
3.3.2	Determinação da Base Invariante	44
3.3.3	Determinação das 1-Formas duais à Base Invariante	44
3.4	Cálculos	45
3.4.1	BII	45
3.4.2	BVII(h)	48
3.4.3	Comentários sobre o cálculo de outros tipos	51
3.5	Tabela de Formas nos Espaços de Bianchi Padrão	53
4	GEOMETRIA DOS ESPAÇOS DE BIANCHI PADRÃO	58
4.1	Transição às Geometrias Não-euclidianas	58
4.2	Curvatura nos Espaços Padrão	61
4.2.1	Método de Cálculo	61
4.3	Cálculo das Curvaturas	63
4.3.1	Kantowski-Sachs	63
4.3.2	Tipo BI	64
4.3.3	Tipo BII	64
4.3.4	Tipo BIII	66
4.3.5	Tipo BIV	67
4.3.6	Comentários Adicionais	72
4.4	Tabela das Métricas e Curvaturas	73
4.5	Tabela Gráfica das Curvaturas Principais	75
5	CONCLUSÃO	78
	Referências	79

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Painel Histórico

A geometria não-euclidiana teve o germe de sua descoberta na tentativa de demonstrar o quinto postulado de Euclides: o Postulado das Paralelas.

Entre os árabes, Ibn Al-Haitham (c.965-1039), mais conhecido com Al-Hazen havia tentado demonstrar o 5º postulado através do quadrilátero tri-retângulo, mais tarde chamado de “Quadrângulo de Lambert”, utilizando a idéia de movimento. Omar Khayyam também fez sua tentativa, através do posteriormente chamado “Quadrilátero de Saccheri”. Ambos, conforme se demonstrou na idade moderna, utilizaram-se, inadvertidamente, de princípios que, por si mesmos, já eram equivalentes ao Postulado de Euclides. O mesmo se aplica à tentativa do irmão de Kublai Khan, Nasir Eddin Al-Tusi (1021-1274) que, além do interesse pelo 5º postulado, foi o autor do primeiro tratado formal sobre Trigonometria Esférica.

No século XVIII, o italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), provavelmente partindo da sistematização de Nasir Eddin, pois conhecia o trabalho daquele, derivou vários teoremas consistentes do que seriam os fundamentos duma geometria não-euclidiana, que acabou por descartar, com um raciocínio equivocado, na idéia: fixa de demonstrar o 5º postulado. Sua hipótese alicerçava-se num *reductio ad absurdum* como consequência da negação do Postulado.

Na obra *Dic Theorie der Parallellinien*, de 1766, mas publicada postumamente vinte anos depois, o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777), baseado na mesma hipótese de Saccheri, avança um pouco em relação àquele, ao determinar a relação de proporcionalidade entre a área de um triângulo e seu excesso esférico. Partiu do quadrilátero utilizado por Al-Hazen, hoje chamado “Quadrângulo de Lambert”. Um grande mérito de Lambert reside no fato de haver conjecturado sobre a possibilidade duma geometria sobre uma superfície nova, tal como uma esfera de raio imaginário. Um século depois sua conjectura seria confirmada por Beltrami.

Na 2ª década do séc. XVIII, C. F. Gauss (1777-1855) convenceu-se da inutilidade dos esforços para provar o 5º postulado e chegou à conclusão de que deviam ser possíveis geometrias diferentes da de Euclides, mas não tornou imediatamente públicas essas idéias, assim, as tentativas continuaram por parte de outros matemáticos.

Em 1826, o matemático russo Nikolai Ivanovitch Lobatchewsky (1793-1856) apresentou uma série de teoremas característicos do que seria uma geometria não-euclidiana. A partir de então, até 1829, Lobatchewsky foi-se convencendo da impossibilidade de demonstrar o 5º postulado a partir dos anteriores. O ano de 1829 é o marco do nascimento da geometria não-euclidiana, com a publicação do artigo *Sobre os Princípios da Geometria*, por Lobatchewsky. Apesar de perfeitamente consistente, essa nova geometria foi chamada pelo próprio Lobatchewsky de “geometria imaginária”. As idéias de Lobatchewsky foram bem recebidas por Gauss, o qual, em correspondência a terceiros, enfatiza seu valor. Este, porém, mostrava-se reticente em demonstrar aprovação expressa, segundo consta, por receio de repercussões negativas e críticas, mesmo que infundadas, no meio acadêmico [14].

De outro lado, independentemente, o húngaro Jonas Bolyai (1802-1860) chegou, nesse mesmo ano de 1829, a uma conclusão semelhante à de Lobatchewsky, desenvolvendo o que chamou de “Ciência Absoluta do Espaço”, publicando suas idéias no apêndice de um trabalho de seu pai, Farkas Bolyai, o qual, por sua vez, também havia tentado demonstrar o 5º postulado. Contudo, devido à reação pouco incentivadora de Gauss que, apesar de aprovar o trabalho, jamais expressou apoio oficial, Bolyai, que também receava ser privado da autoria da hipótese, nunca mais publicou nada sobre o assunto.

Os fundamentos de uma visão mais global da geometria foram lançados por G. F. Riemann (1826-1866) em 1854 no seu célebre trabalho *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen*, no qual propõe uma abordagem da geometria pelo estudo de variedades n -dimensionais em qualquer tipo de espaço. Riemann introduziu a noção da métrica e a idéia de que a geometria devia tratar de operações entre n -uplas, mais do que dos conceitos tradicionais de ponto e reta. Desenvolveu uma fórmula para a curvatura gaussiana de hipersuperfícies nesses espaços, o que despertou o entusiasmo de Gauss! No que se refere ao distanciamento dos princípios euclidianos, o formalismo da geometria de Riemann é bem abrangente que o de Lobatchewsky, embora modernamente seja mais comum se referir ela num senso mais restrito, referente à geometria derivada da hipótese de Saccheri para ângulos obtusos, abandonada a hipótese da infinitude da reta, pois Riemann demonstrou que uma tal geometria se realiza sobre uma superfície esférica, onde as “retas” são as geodésicas, i.e. círculos máximos.

Coube a Eugenio Beltrami (1835-1900), em 1868, mostrar que havia um modelo para a geometria de Lobatchewsky, demonstrando com isso a validade da conjectura de Lambert. Porém, contrariamente ao que pensava Lambert, Beltrami mostrou que tal superfície é real e tem curvatura gaussiana negativa constante. A tal superfície, obtida pela revolução de uma tratriz em torno de sua assíntota, chamou-se de pseudo-esfera. Definindo-se a “reta” da pseudo-esfera como a geodésica entre dois pontos, a geometria resultante satisfaz os postulados de Lobatchewsky.

Em 1872, Felix Klein (1849-1925), baseado nas idéias de Lie, e observando que toda geometria possui um grupo de bijeções correspondentes às transformações de congruência da geometria euclidiana, elaborou o “*Erlanger Programm*”, que passava a descrever a geometria como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes sob determinados grupos de transformações. Assim, toda classificação de grupos de transformações torna-se um estudo sistemático das geometrias [15]. Por exemplo, do estudo das propriedades das figuras que não variam sob a ação do grupo das transformações rígidas, ie, rotações e translações do plano, deriva-se a geometria euclidiana.

David Hilbert (1862-1943) realizou, no final do século XIX, uma análise lógica dos axiomas geométricos e, em seu trabalho. *Grundlagen der Geometrie*, de 1899, formulou um conjunto de 21 postulados. Era defensor e o principal representante da “Escola Axiomática” a qual afirmava que tudo pode ser expresso numa linguagem lógica de relações entre conjuntos. A matemática do sec. XX sofreu influência marcante dessas idéias.

O surgimento da geometria não-euclidiana representou, mais que uma mudança de paradigma, a superação de uma barreira psicológica, representada pelo monopólio da geometria euclidiana e a lógica impecável dos postulados de Euclides. A idéia de algo diferente disso abria um novo mundo de possibilidades.

Com o advento dos trabalhos do norueguês Sophus Lie (1842-1899) sobre teoria de grupos e a álgebra que levaria seu nome, formou-se o painel ideal para um trabalho de classificação de geometrias como pretendia Klein.

Os dados referentes ao texto acima podem ser encontrados principalmente nos livros [11], [15] e nos sites [19] e [20].

1.2 Comentários Iniciais

O trabalho de Luigi Bianchi, que é a base desta dissertação, procurou estabelecer todos os grupos de isometria que podem existir em espaços riemannianos tridimensionais. Na cosmologia atual a expressão “Espaço de Bianchi” é restrita aos espaços com grupos transitivos de *três* dimensões. Porém, no seu trabalho original [1], Bianchi considerou vários grupos além desses, inclusive o correspondente ao espaço de Kantowski-Sachs.

O interesse do presente estudo em Cosmologia está no fato de que os espaços de Bianchi com grupos tridimensionais transitivos podem ser usados como seções espaciais de modelos homogêneos (v. Ryan-Shepley [5], por exemplo).

A versão original em italiano do trabalho de Bianchi serviu-nos de referência principal, contudo, conseguimos localizar posteriormente uma versão inglesa da obra, feita por R. Jantzen, disponível no site [18].

Capítulo 2

ESPAÇOS RIEMANIANOS HOMOGÊNEOS

2.1 Formas na Geometria Riemaniana

2.1.1 Métrica

Matematicamente a métrica é definida como um operador bilinear não-singular comutativamente sobre pares de campos vetoriais produzindo uma função [5], i.e., se g é uma métrica, V é um espaço vetorial linear e $u, v, w \in V$, então:

$$i.a) \quad g(u, v + w) = g(u, v) + g(u, w)$$

$$i.b) \quad g(u + w, v) = g(u, v) + g(w, v)$$

$$ii) \quad g(u, v) = g(v, u)$$

$$iii) \quad g(u, v) = 0, \forall u \Rightarrow v = 0$$

Numa base geral de n dimensões $\{X_\mu\}$ são definidas n^2 funções:

$$g_{\mu\nu} = g(X_\mu, X_\nu) \equiv X_\mu \cdot X_\nu \quad (2.1)$$

2.1.2 Tríadas

Podemos definir no espaço tangente a uma variedade M num ponto P , um conjunto de vetores $\{e_{(A)}\}$, tais que $e_{(A)} = e^\alpha_{(A)} \partial_\alpha$, os quais determinam uma métrica:

$$\eta_{AB} = g(e_{(A)}, e_{(B)}) \quad (2.2)$$

Esses vetores, definidos em cada ponto, constituem bases, recebendo o nome de *tríadas*. As componentes contravariantes destes vetores são expressas na base $\{\partial/\partial x^\alpha\}$. A relação entre estas componentes e as covariantes pode ser obtida pela aplicação da métrica ambiente $g_{\alpha\beta}$. Em termos de suas componentes a relação acima escreve-se:

$$e^\alpha_{(A)} e_{\alpha(B)} = \eta_{AB} \quad (2.3)$$

Num espaço riemaniano a quatro dimensões tais grandezas, obedecendo à condição da métrica de Minkowski η_{AB} , recebem o nome de *tetradas*.

Escolhem-se geralmente tríadas ortonormais, i.e., $\eta_{AB} = \delta_{AB}$. Esta escolha, entretanto, pode ser menos trivial caso isso se apresente vantajoso.

2.1.3 Base Recíproca

É possível construir uma base recíproca $\{e^{(A)}\}$, tendo em conta as relações:

$$\begin{cases} e_\alpha^{(A)} e^\alpha_{(B)} = \delta^A_B \\ e_\alpha^{(A)} e^\beta_{(A)} = \delta_\alpha^\beta \end{cases} \quad (2.4)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \begin{cases} e_{(A)} \cdot e_{(B)} = \eta_{AB} \\ e^{(A)} \cdot e_{(B)} = \delta^A_B \end{cases} &\Rightarrow e_{(A)} \cdot e_{(B)} = \eta_{AC} \delta^C_B = \eta_{AC} e^{(C)} \cdot e_{(B)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e_{(A)} = \eta_{AC} e^{(C)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Define-se então a métrica recíproca por

$$e^{(A)} \cdot e^{(B)} = \eta^{AB} \quad (2.6)$$

Daí,

$$e_{(A)} \cdot e^{(B)} = \eta_{AC} e^{(C)} \cdot e^{(B)} = \eta_{AC} \eta^{CB} \quad (2.7)$$

implicando

$$\eta_{AC} \eta^{CB} = \delta_A^B \quad (2.8)$$

o que significa que a métrica recíproca η^{AB} é a inversa de η_{AB} .

Então

$$\eta^{BA} e_{(A)} = \eta^{BA} \eta_{AC} e^{(C)} = \delta^B_C e^{(C)} = e^{(B)} \quad (2.9)$$

Logo:

$$e^{(B)} = \eta^{BA} e_{(A)} \quad (2.10)$$

Dada a relação (2.8) vemos que, se a tríada for ortonormal, i.e., $\eta_{AB} = \delta_{AB}$, sua base recíproca também o será.

2.1.4 Vetores e Tensores em Termos das Triádas

As componentes triádicas dum vetor são definidas como suas projeções nas direções das triádas, ou seja, se V é um vetor em M , então:

$$V_A \hat{=} V \cdot \mathbf{e}_{(A)} = V_\alpha e_\alpha^{(A)} \quad (2.11)$$

Daí,

$$V_\alpha \hat{=} V \cdot e_\alpha^{(A)} \mathbf{e}_{(A)} = e_\alpha^{(A)} V_A \quad (2.12)$$

Analogamente,

$$V^\alpha = e^\alpha_{(A)} V^A \quad (2.13)$$

e suas relações inversas:

$$V_A = e^\alpha_{(A)} V_\alpha, \quad V^A = e^\alpha_{(A)} V^\alpha \quad (2.14)$$

Além disso, define-se a derivada de uma grandeza ϕ na direção dum vetor da triáda por:

$$\partial_A \phi = e^\alpha_{(A)} \partial_\alpha \phi \quad (2.15)$$

Por extensão podemos determinar as componentes triádicas dum tensor de qualquer ordem. Por exemplo,

$$T_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \vec{T} \cdot \mathbf{e}_\beta = e_\alpha^{(A)} \mathbf{e}_{(A)} \cdot \vec{T} \cdot e_\beta^{(B)} \mathbf{e}_{(B)} = e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} T_{AB} \quad (2.16)$$

e, inversamente:

$$T_{AB} = e^\alpha_{(A)} e^\beta_{(B)} T_{\alpha\beta} \quad (2.17)$$

Assim, definem-se tensores genéricos:

$$T_{A\dots B}{}^{C\dots D} = e^\alpha_{(A)} \dots e^\beta_{(B)} e_\mu^{(C)} \dots e_\nu^{(D)} T_{\alpha\dots\beta}{}^{\mu\dots\nu} \quad (2.18)$$

$$T_{\alpha\dots\beta}{}^{\gamma\dots\delta} = e_\alpha^{(A)} \dots e_\beta^{(B)} e^\gamma_{(C)} \dots e^\delta_{(D)} T_{A\dots B}{}^{C\dots D} \quad (2.19)$$

2.1.5 Escolha Particular

Se adotarmos uma triáda do tipo $e^\alpha_{(A)} = \delta^\alpha_A$, a partir de suas propriedades deduz-se:

$$\left. \begin{array}{l} (i) \ e^\alpha_{(A)} = \delta^\alpha_A \\ (ii) \ e^\alpha_{(A)} e^\beta_{(B)} = \delta_A^B \end{array} \right\} \Rightarrow \delta^\alpha_A e_\alpha^{(B)} = \delta_A^B \Rightarrow$$

Tomando o produto da igualdade acima por δ^A_β :

$$\begin{aligned}\delta^\alpha_A e^{(B)}_\alpha \delta^A_\beta &= \delta^B_A \delta^A_\beta \Rightarrow e^{(B)}_\alpha \delta^\alpha_\beta = \delta^B_\beta \Rightarrow \\ e^{(B)}_\beta &= \delta^B_\beta\end{aligned}\quad (2.20)$$

De fato, o resultado é imediato, pois a inversa da matriz identidade é ela própria.

2.1.6 Volumes Fundamentais

O volume fundamental dos vetores da base recíproca num dado ponto é dado por:

$$V = \mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{e}^{(3)} \quad (2.21)$$

enquanto que o da tríada é:

$$\begin{aligned}\bar{V} = \mathbf{e}_{(1)} \times \mathbf{e}_{(2)} \cdot \mathbf{e}_{(3)} \quad \text{ou} \quad |\mathbf{e}_{(A)} \mathbf{e}_{(B)} \mathbf{e}_{(C)}| &= \mathbf{e}_{(A)} \times \mathbf{e}_{(B)} \cdot \mathbf{e}_{(C)} = \epsilon_{ABC} \bar{V} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\mathbf{e}_{(A)} \times \mathbf{e}_{(B)}}{\bar{V}} \cdot \mathbf{e}_{(C)} &= \epsilon_{ABD} \delta^D_C\end{aligned}\quad (2.22)$$

Por outro lado, usando a relação $\mathbf{e}^{(A)} \cdot \mathbf{e}_{(B)} = \delta^A_B$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{e}_{(A)} \times \mathbf{e}_{(B)}}{\bar{V}} \cdot \mathbf{e}_{(C)} &= \epsilon_{ABD} \mathbf{e}^{(D)} \cdot \mathbf{e}_{(C)} \Rightarrow \\ \frac{\mathbf{e}_{(A)} \times \mathbf{e}_{(B)}}{\bar{V}} &= \epsilon_{ABC} \mathbf{e}^{(C)}\end{aligned}\quad (2.23)$$

Analogamente, demonstra-se que:

$$\frac{\mathbf{e}^{(A)} \times \mathbf{e}^{(B)}}{V} = \epsilon^{ABC} \mathbf{e}_{(C)} \quad (2.24)$$

onde V é o volume fundamental dos vetores da base recíproca.

Então, a partir das expressões seguintes é possível estabelecer a relação entre $\bar{V}$ e V :

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{array}{l} V = |\mathbf{e}^{(A)}_\alpha| \\ \bar{V} = |\mathbf{e}^\alpha_{(A)}| \end{array} \right. \Rightarrow V\bar{V} = |\mathbf{e}^{(A)}_\alpha| |\mathbf{e}^\beta_{(B)}| = |\mathbf{e}^{(A)}_\alpha \mathbf{e}^\alpha_{(B)}| = |\delta^A_B| = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{V} = \frac{1}{V}\end{aligned}\quad (2.25)$$

Portanto, podemos expressar a equação (2.23) por:

$$\mathbf{e}_{(A)} \times \mathbf{e}_{(B)} = \frac{1}{V} \epsilon_{ABC} \mathbf{e}^{(C)} \quad (2.26)$$

ou, de outro modo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \epsilon_{ABC} e_{\gamma}^{(C)} &= \epsilon_{\alpha\beta\lambda} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} e_{(C)}^{\lambda} e_{\gamma}^{(C)} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \epsilon_{\alpha\beta\gamma} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} &= \frac{1}{V} \epsilon_{ABC} e_{\gamma}^{(C)} \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.1.7 Operador Distância

O operador distância é definido pela 2-forma:

$$g = g_{\alpha\beta}(x) dx^{\alpha} dx^{\beta} \quad (2.28)$$

Sejam $\{\mathbf{e}^{(A)}\}$ a base recíproca duma tríada $\{\mathbf{e}_{(A)}\}$ e

$$\theta^A = e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha} \quad (2.29)$$

três 1-formas independentes. Multiplicando ambos os membros da equação acima por $e_{(A)}^{\beta}$ e somando em (A) vem:

$$e_{(A)}^{\beta} \theta^A = e_{(A)}^{\beta} e_{\alpha}^{(A)} dx^{\alpha} = \delta_{\alpha}^{\beta} dx^{\alpha},$$

ou seja,

$$dx^{\alpha} = e_{(A)}^{\alpha} \theta^A \quad (2.30)$$

e o operador distância assume a forma:

$$g = g_{\alpha\beta}(x) e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} \theta^A \theta^B \equiv ds^2 = \eta_{AB} \theta^A \theta^B, \quad (2.31)$$

com

$$\eta_{AB} = g(\mathbf{e}_{(A)}, \mathbf{e}_{(B)}) = g_{\alpha\beta} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} \Rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{AB} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} \quad (2.32)$$

A escolha mais simples, $\eta_{AB} = \delta_{AB}$, implica:

$$g_{\alpha\beta} = \delta_{AB} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} \quad (2.33)$$

2.1.8 Relação entre os Tensores Métricos

Os determinantes dos tensores métricos $g_{\alpha\beta}$ e η_{AB} são, respectivamente:

$$|g| = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\rho\nu} \quad \text{e} \quad |\eta| = \frac{1}{3!} \epsilon^{ABC} \epsilon^{A'B'C'} \eta_{AA'} \eta_{BB'} \eta_{CC'} \quad (2.34)$$

Por outro lado, o volume descrito pelos vetores da triáda recíproca é:

$$V = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\rho} \epsilon_{ABC} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} e_{\rho}^{(C)} \quad (2.35)$$

Então, utilizando a expressão (2.32), temos:

$$|g| = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu} g_{\alpha\lambda} g_{\beta\mu} g_{\rho\nu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g| = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\rho} \epsilon^{\lambda\mu\nu} \left(\eta_{AA'} e_{\alpha}^{(A)} e_{\lambda}^{(A')} \right) \left(\eta_{BB'} e_{\beta}^{(B)} e_{\mu}^{(B')} \right) \left(\eta_{CC'} e_{\rho}^{(C)} e_{\nu}^{(C')} \right) \Rightarrow$$

$$|g| = \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\rho} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} e_{\rho}^{(C)} \eta_{AA'} \eta_{BB'} \eta_{CC'} \epsilon^{\lambda\mu\nu} e_{\lambda}^{(A')} e_{\mu}^{(B')} e_{\nu}^{(C')} \quad (2.36)$$

e inserindo a relação $\frac{1}{3!} \epsilon^{ABC} \epsilon_{ABC} = 1$ na expressão acima:

$$\begin{aligned} |g| &= \frac{1}{3!} \epsilon^{\alpha\beta\rho} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} e_{\rho}^{(C)} \frac{\epsilon^{ABC} \epsilon_{ABC}}{3!} \eta_{AA'} \eta_{BB'} \eta_{CC'} \frac{\epsilon^{A'B'C'} \epsilon_{A'B'C'}}{3!} \epsilon^{\lambda\mu\nu} e_{\lambda}^{(A')} e_{\mu}^{(B')} e_{\nu}^{(C')} = \\ &= \left(\frac{\epsilon^{ABC} \epsilon_{A'B'C'}}{3!} \eta_{AA'} \eta_{BB'} \eta_{CC'} \right) \left(\frac{\epsilon^{\alpha\beta\rho} \epsilon_{ABC}}{3!} e_{\alpha}^{(A)} e_{\beta}^{(B)} e_{\rho}^{(C)} \right) \left(\frac{\epsilon^{\lambda\mu\nu} \epsilon_{A'B'C'}}{3!} e_{\lambda}^{(A')} e_{\mu}^{(B')} e_{\nu}^{(C')} \right) \\ &\Rightarrow |g| = |\eta| V^2 \end{aligned} \quad (2.37)$$

2.1.9 Derivada Exterior Covariante

Seja $\Omega_{(p)}$ uma p-forma:

$$\Omega_{(p)} = \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p}(x) dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (2.38)$$

Então, sua derivada exterior covariante será definida pela expressão (v. [7]):

$$\mathcal{D}\Omega_{(p)} = \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p || \rho} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (2.39)$$

onde

$$\Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p || \rho} = \left(\frac{\partial \Omega_{\alpha_1 \dots \alpha_p}}{\partial x^{\rho}} - \Gamma_{\alpha_1 \rho}^{\beta} \Omega_{\beta \dots \alpha_p} - \dots - \Gamma_{\alpha_p \rho}^{\beta} \Omega_{\alpha_1 \dots \beta} \right) \quad (2.40)$$

Porém, como os símbolos de Christoffel são simétricos em relação aos índices covariantes, temos que

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} = \Gamma_{\rho\alpha}^{\beta} \Rightarrow \mathcal{D}\Omega_{(p)} = \frac{\partial\Omega_{\alpha_1\dots\alpha_p}}{\partial x^{\rho}} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (2.41)$$

devido à anti-simetria característica do produto exterior, isto é:

$$\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} = -\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\rho} = -\Gamma_{\rho\alpha}^{\beta} dx^{\alpha} \wedge dx^{\rho} = -\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} = 0$$

Logo, a derivada exterior covariante se reduz à derivada exterior comum para conexões de Christoffel.

Assim, podemos escrever:

$$\mathcal{D}\Omega_{(p)} = d\Omega_{(p)} = \Omega_{\alpha_1\dots\alpha_p|\rho} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_p} \quad (2.42)$$

2.1.10 Primeira Equação de Estrutura de Cartan

Com relação ao material nesta seção e nas seguintes, seguimos em linhas gerais o tratamento usado em [7].

Aplicando a derivada exterior covariante a θ^A (2.29) obtém-se:

$$d\theta^A = e_{\alpha}^{(A)}{}_{||\beta} dx^{\beta} \wedge dx^{\alpha} = e_{\alpha}^{(A)}{}_{||\beta} e^{\beta}_{(B)} e^{\alpha}_{(C)} \theta^B \wedge \theta^C \quad (2.43)$$

Definindo o coeficiente:

$$\gamma^A_{BC} \hat{=} -e_{\alpha}^{(A)}{}_{||\beta} e^{\alpha}_{(B)} e^{\beta}_{(C)} \quad (2.44)$$

Pode-se reescrever:

$$d\theta^A = -\gamma^A_{CB} \theta^B \wedge \theta^C = \gamma^A_{CB} \theta^C \wedge \theta^B = \gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (2.45)$$

Esses coeficientes γ^A_{BC} são chamados de *coeficientes de rotação de Ricci*, em analogia às relações obtidas no produto vetorial da geometria euclidiana.

Dada a métrica do espaço tangente, podemos obter coeficientes de Ricci com índices covariantes apenas:

$$\gamma_{ABC} = \eta_{AE} \gamma^E_{BC} \quad (2.46)$$

Estes são anti-simétricos com relação aos dois primeiros índices, i.e.,

$$\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC} \quad (2.47)$$

dem:

$$\gamma_{ABC} + \gamma_{BAC} = \eta_{AE} \gamma^E_{BC} + \eta_{BE} \gamma^E_{AC} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\eta_{AE} e_{\alpha}^{(E)}{}_{||\beta} e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} - \eta_{BE} e_{\alpha}^{(E)}{}_{||\beta} e_{(A)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} \Rightarrow \\
\gamma_{ABC} + \gamma_{BAC} &= - \left(\eta_{AE} e_{\alpha}^{(E)}{}_{||\beta} e_{(B)}^{\alpha} + \eta_{BE} e_{\alpha}^{(E)}{}_{||\beta} e_{(A)}^{\alpha} \right) e_{(C)}^{\beta} \Rightarrow \\
\gamma_{ABC} + \gamma_{BAC} &= - \left(e_{\alpha(A)}{}_{||\beta} e_{(B)}^{\alpha} + e_{\alpha(B)}{}_{||\beta} e_{(A)}^{\alpha} \right) e_{(C)}^{\beta} = \\
&= - \left(e_{(A)}^{\alpha}{}_{||\beta} e_{\alpha(B)} + e_{(A)}^{\alpha} e_{\alpha(B)}{}_{||\beta} \right) e_{(C)}^{\beta} = - \left(e_{(A)}^{\alpha} e_{\alpha(B)} \right)_{||\beta} e_{(C)}^{\beta} \Rightarrow \\
\gamma_{ABC} + \gamma_{BAC} &= - \underbrace{\eta_{AB}}_0{}_{||\beta} e_{(C)}^{\beta} = 0 \Rightarrow \\
\gamma_{ABC} + \gamma_{BAC} &= 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\gamma_{ABC} = -\gamma_{BAC} \quad (2.48)$$

Definem-se também as 1-formas de rotação:

$$\omega_B^A \hat{=} \gamma_{BC}^A \theta^C \quad (2.49)$$

Dessa maneira, reescrevemos $d\theta^A$ como:

$$d\theta^A = -\omega_B^A \wedge \theta^B \quad (2.50)$$

que é chamada de *primeira equação de estrutura de Cartan*.

2.1.11 Derivada Exterior Covariante da Métrica Definida pela Tríada

Suponhamos uma métrica geral $\tilde{g}_{AB}(x) : \tilde{g}_{AB} = g_{\alpha\beta} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta}$ definida pela base de tríadas $\{e_{(A)}\}$ (mudamos aqui a notação de η_{AB} para $\tilde{g}_{AB}$ apenas para enfatizar o caráter geral dessa métrica). Vamos calcular sua derivada exterior covariante $\tilde{g}_{AB||\rho}$

$$\tilde{g}_{AB||\rho} = g_{\alpha\beta||\rho} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} + g_{\alpha\beta} e_{(A)||\rho}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} + g_{\alpha\beta} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)||\rho}^{\beta} \quad (2.51)$$

Lembrando que a derivada covariante da métrica é nula, temos:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{AB||\rho} &= g_{\alpha\beta} e_{(A)||\rho}^{\alpha} e_{(B)}^{\beta} + g_{\alpha\beta} e_{(A)}^{\alpha} e_{(B)||\rho}^{\beta} = \\
&= g_{\alpha\beta} \left(e_{(A)||\rho}^{\alpha} + e_{(A)}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\alpha} \right) e_{(B)}^{\beta} + g_{\alpha\beta} e_{(A)}^{\alpha} \left(e_{(B)||\rho}^{\beta} + e_{(B)}^{\lambda} \Gamma_{\lambda\rho}^{\beta} \right)
\end{aligned}$$

O segundo termo da equação acima pode ser retrabalhado:

$$\begin{aligned}
g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(A)} \left(e^{\beta}_{(B)|\rho} + e^{\lambda}_{(B)} \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} \right) &= \\
&= g_{\alpha\beta} \left(e^{\lambda}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\rho} + e^{\alpha}_{(A)} e^{\lambda}_{(B)} \Gamma^{\beta}_{\lambda\rho} \right) = \\
&= g_{\alpha\beta} \left(e^{\lambda}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} g^{\alpha\mu} \Gamma_{\mu\lambda\rho} + e^{\alpha}_{(A)} e^{\mu}_{(B)} g^{\beta\nu} \Gamma_{\nu\mu\rho} \right) = \\
&= \left(e^{\alpha}_{(A)} e^{\mu}_{(B)} \Gamma_{\mu\alpha\rho} + e^{\alpha}_{(A)} e^{\mu}_{(B)} \Gamma_{\alpha\mu\rho} \right) = \\
&= e^{\alpha}_{(A)} e^{\mu}_{(B)} (\Gamma_{\mu\alpha\rho} + \Gamma_{\alpha\mu\rho})
\end{aligned}$$

Substituindo na equação acima a relação

$$g_{\alpha\mu|\rho} = \Gamma_{\alpha\mu\rho} + \Gamma_{\mu\alpha\rho}, \quad (2.52)$$

e reintroduzindo esse resultado na equação para $\tilde{g}_{AB||\rho}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\tilde{g}_{AB||\rho} &= g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(A)|\rho} e^{\beta}_{(B)} + g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)|\rho} + e^{\alpha}_{(A)} e^{\mu}_{(B)} g_{\alpha\mu|\rho} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \tilde{g}_{AB||\rho} = \left(g_{\alpha\beta} e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)} \right)_{|\rho} = \tilde{g}_{AB|\rho} \Rightarrow \\
&\tilde{g}_{AB||\rho} = \tilde{g}_{AB|\rho}
\end{aligned} \quad (2.53)$$

Desse modo,

$$d\tilde{g}_{AB} = \tilde{g}_{AB|\rho} dx^{\rho} \Rightarrow d\tilde{g}_{AB} = \tilde{g}_{AB||\rho} dx^{\rho} \quad (2.54)$$

Então:

$$d\tilde{g}_{AB} = \left(e^{\alpha}_{(A)||\rho} e^{\beta}_{(B)} + e^{\alpha}_{(A)} e^{\beta}_{(B)||\rho} \right) g_{\alpha\beta} dx^{\rho} \quad (2.55)$$

Este resultado pode ser imediatamente obtido se considerarmos que g_{AB} comporta-se como um escalar para operações no espaço ambiente $\mathcal{V}$, portanto, $\tilde{g}_{AB||\rho} = \tilde{g}_{AB|\rho}$.

Numa base em que as tríadas têm suas componentes convenientemente escolhidas nas direções coordenadas, as de suas bases recíprocas também terão essa forma. i.e., $e^{\alpha}_{\alpha}{}^{(A)} = \delta_{\alpha}{}^A$ (cf. sec. 2.1.5) e teremos:

$$\theta^A = e^{\alpha}_{\alpha}{}^{(A)} dx^{\alpha} = \delta_{\alpha}{}^A dx^{\alpha} = dx^A \quad (2.56)$$

Nesse caso, os coeficientes de Ricci podem ser identificados com os símbolos de Christoffel, conforme se mostra em seguida:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{BC}^A &= -e_{\alpha \parallel \beta}^{(A)} e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} \\ e_{\alpha}^{(A)} &= \delta_{\alpha}^A \end{aligned} \right\} \Rightarrow e_{\alpha \parallel \beta}^{(A)} = e_{\alpha \parallel \beta}^{(A)} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} e_{\gamma}^{(A)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{\alpha \parallel \beta}^A = \underbrace{\delta_{\alpha \parallel \beta}^A}_0 - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \delta_{\gamma}^A \Rightarrow$$

$$\gamma_{BC}^A = -(-\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \delta_{\gamma}^A) e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} \delta_{\gamma}^A \delta_{\alpha}^{\beta} \delta_C^{\beta} \Rightarrow$$

$$\gamma_{BC}^A = \Gamma_{BC}^A \quad (2.57)$$

2.1.12 Segunda equação de estrutura de Cartan

Vamos tomar a derivada exterior das formas ω_B^A :

$$\omega_B^A = \gamma_{BC}^A \theta^C = \gamma_{BC}^A e_{\alpha}^{(C)} dx^{\alpha} \Rightarrow$$

$$d\omega_B^A = (\gamma_{BC}^A e_{\alpha}^{(C)})_{\parallel \rho} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} \quad (2.58)$$

onde:

$$\begin{aligned} (\gamma_{BC}^A e_{\alpha}^{(C)})_{\parallel \rho} &= - \left(e_{\mu \parallel \nu}^{(A)} e_{(B)}^{\mu} e_{(C)}^{\nu} e_{\alpha}^{(C)} \right)_{\parallel \rho} = - \left(e_{\mu \parallel \nu}^{(A)} e_{(B)}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} \right)_{\parallel \rho} = \\ &= - \left(e_{\mu \parallel \alpha}^{(A)} e_{(B)}^{\mu} \right)_{\parallel \rho} = -e_{\mu \parallel \alpha \parallel \rho}^{(A)} e_{(B)}^{\mu} - e_{\mu \parallel \alpha}^{(A)} e_{(B) \parallel \rho}^{\mu} \end{aligned}$$

Substituindo o resultado acima na expressão (2.58):

$$d\omega_B^A = - \left(e_{\mu \parallel \alpha \parallel \rho}^{(A)} e_{(B)}^{\mu} + e_{\mu \parallel \alpha}^{(A)} e_{(B) \parallel \rho}^{\mu} \right) dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} \quad (2.59)$$

sabe-se, por outro lado, da geometria diferencial, que o tensor de curvatura pode ser obtido pela fórmula:

$$V_{\mu \parallel \alpha \parallel \rho} - V_{\mu \parallel \rho \parallel \alpha} = R_{\mu\alpha\rho}^{\lambda} V_{\lambda} \quad (2.60)$$

para qualquer vetor V . Então, operando o primeiro membro da expressão (2.59), sem o fator $e_{(B)}^{\mu}$:

$$e_{\mu \parallel \alpha \parallel \rho}^{(A)} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} = e_{\mu \parallel \rho \parallel \alpha}^{(A)} dx^{\alpha} \wedge dx^{\rho} = -e_{\mu \parallel \rho \parallel \alpha}^{(A)} dx^{\rho} \wedge dx^{\alpha} \Rightarrow$$

$$e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha||\rho} dx^\rho \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2} \left(e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha||\rho} - e_{\mu}^{(A)}{}_{||\rho||\alpha} \right) dx^\rho \wedge dx^\alpha \quad (2.61)$$

que, pela relação (2.60) pode ser reescrito na forma:

$$e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha||\rho} dx^\rho \wedge dx^\alpha = \frac{1}{2} R^\lambda{}_{\mu\alpha\rho} e_\lambda^{(A)} dx^\rho \wedge dx^\alpha \quad (2.62)$$

Assim, substituindo esse resultado na equação (2.59), chegamos a:

$$d\omega^A{}_B = - \left(\frac{1}{2} R^\lambda{}_{\mu\alpha\rho} e_\lambda^{(A)} e^\mu{}_{(B)} + e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(B)||\rho} \right) dx^\rho \wedge dx^\alpha \quad (2.63)$$

Agora, reescrevendo $dx^\rho = e^\rho{}_{(C)} \theta^C$ na equação acima:

$$d\omega^A{}_B = - \left(\frac{1}{2} R^\lambda{}_{\mu\alpha\rho} e_\lambda^{(A)} e^\mu{}_{(B)} + e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(B)||\rho} \right) e^\rho{}_{(C)} e^\alpha{}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F \Rightarrow$$

$$d\omega^A{}_B = - \frac{1}{2} R^\lambda{}_{\mu\alpha\rho} e_\lambda^{(A)} e^\mu{}_{(B)} e^\rho{}_{(C)} e^\alpha{}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F - e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(B)||\rho} e^\rho{}_{(C)} e^\alpha{}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F$$

Lembrando porém que:

$$\gamma^A{}_{DF} = -e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(D)} e^\alpha{}_{(F)} \Rightarrow e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} = -\gamma^A{}_{DF} e_\mu^{(D)} e_\alpha^{(F)} \quad (2.64)$$

e que, pelas propriedades das tríadas:

$$e_{\rho(A)} e^\rho{}_{(C)} = \eta_{AC} \Rightarrow e_{\rho(A)} e^\rho{}_{(C)} e_\lambda^{(C)} = \eta_{AC} e_\lambda^{(C)} \Rightarrow$$

$$e_{\rho(A)} \delta^\rho{}_\lambda = \eta_{AC} e_\lambda^{(C)} \Rightarrow e_{\lambda(A)} = \eta_{AC} e_\lambda^{(C)} \quad (2.65)$$

verifica-se, então, que o segundo termo também pode ser retrabalhado:

$$\begin{aligned} e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(B)||\rho} &= -\gamma^A{}_{DF} e_\mu^{(D)} e_\alpha^{(F)} (g^{\mu\nu} \eta_{BS} e_\nu^{(S)})_{||\rho} = \\ &= -\gamma^A{}_{DF} e_\mu^{(D)} e_\alpha^{(F)} g^{\mu\nu} \eta_{BS} e_\nu^{(S)}_{||\rho} = -\gamma^A{}_{DF} e_\mu^{(D)} e_\alpha^{(F)} g^{\mu\nu} \eta_{BS} (-\gamma^S{}_{EC} e_\nu^{(E)} e_\rho^{(C)}) = \\ &= \gamma^A{}_{DF} \gamma_{BEC} e^{\nu(D)} e_\nu^{(E)} e_\alpha^{(F)} e_\rho^{(C)} = \gamma^A{}_{DF} \gamma_{BEC} \eta^{DE} e_\alpha^{(F)} e_\rho^{(C)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(B)||\rho} = \gamma^{AE}{}_F \gamma_{BEC} e_\alpha^{(F)} e_\rho^{(C)} \quad (2.66)$$

e daí obtém-se:

$$e_{\mu}^{(A)}{}_{||\alpha} e^\mu{}_{(B)||\rho} e^\rho{}_{(C)} e^\alpha{}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F = \gamma^{AD}{}_G \gamma_{BDH} e_\alpha^{(G)} e_\rho^{(H)} e^\rho{}_{(C)} e^\alpha{}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F =$$

$$= \gamma^{AD}_G \gamma_{BDH} \delta^G_F \delta^H_C \theta^C \wedge \theta^F \Rightarrow$$

$$e^{(A)}_{\mu} e^{\mu}_{(B)} e^{\rho}_{(C)} e^{\alpha}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F = \gamma^{AD}_F \gamma_{BDC} \theta^C \wedge \theta^F \quad (2.67)$$

Portanto, a expressão (2.1.12) pode ser reduzida a:

$$d\omega^A_B = -\frac{1}{2} R^{\lambda}_{\mu\alpha\rho} e^{\mu}_{(B)} e^{\rho}_{(C)} e^{\alpha}_{(F)} \theta^C \wedge \theta^F - \gamma^{AD}_F \gamma_{BDC} \theta^C \wedge \theta^F \quad (2.68)$$

ou:

$$d\omega^A_B = -\frac{1}{2} R^A_{BFC} \theta^C \wedge \theta^F - \gamma^{AD}_F \gamma_{BDC} \theta^C \wedge \theta^F \quad (2.69)$$

Usando a definição (2.49) , ainda é possível melhorar a expressão acima, notando que:

$$\gamma^{AD}_F \gamma_{BDC} = -\gamma^{AD}_F \gamma_{DBC} = -\eta_{DE} \gamma^{AD}_F \gamma^E_{BC} = -\gamma^A_{EF} \gamma^E_{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma^{AD}_F \gamma_{BDC} \theta^C \wedge \theta^F = -\gamma^A_{EF} \gamma^E_{BC} \theta^C \wedge \theta^F = -\omega^E_B \wedge \omega^A_E = \omega^A_E \wedge \omega^E_B$$

Logo:

$$d\omega^A_B = \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D - \omega^A_E \wedge \omega^E_B \quad (2.70)$$

Definindo-se então as 2-formas de curvatura:

$$\Omega^A_B \doteq \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (2.71)$$

chega-se finalmente ao resultado:

$$\Omega^A_B = d\omega^A_B + \omega^A_C \wedge \omega^C_B \quad (2.72)$$

que é denominada 2ª equação de estrutura de Cartan.

2.1.13 Propriedades das formas ω e Ω

Podemos determinar as propriedades de simetria da 1-forma ω :

$$\omega_{AB} = \gamma_{ABC} \theta^C = -\gamma_{BAC} \theta^C = -\omega_{BA} \quad (2.73)$$

Além disso:

$$\omega^A_B \doteq \eta^{AC} \omega_{CB} \Rightarrow \omega^C_B = \eta^{CA} \omega_{AB} = -\eta^{CA} \omega_{BA} = -\omega^C_B \Rightarrow$$

$$\omega^A_B = -\omega^A_B \quad (2.74)$$

Assim, devido à anti-simetria:

$$\omega^A_A = -\omega^A_A = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^A_A = 0 \quad (2.75)$$

Idem para

$$\omega_{AA} = 0 \quad (2.76)$$

Analogamente, analisando a 2-forma Ω^A_B :

$$\Omega^A_B \doteq \frac{1}{2} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \Rightarrow$$

$$\Omega_{AB} \doteq \eta_{AE} \Omega^E_B = \frac{1}{2} \eta_{AE} R^E_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D = \frac{1}{2} R_{ABCD} \theta^C \wedge \theta^D \Rightarrow$$

$$\Omega_{AB} = -\Omega_{BA} \quad (2.77)$$

devido à anti-simetria do tensor de Riemann no primeiro par de índices. Disso deduz-se:

$$\Omega_{AA} = 0 \quad (2.78)$$

Ademais:

$$\Omega^A_B = \eta^{AE} \Omega_{EB} = -\eta^{AE} \Omega_{BE} = -\Omega^A_B \Rightarrow$$

$$\Omega^A_B = -\Omega^A_B \quad (2.79)$$

e, conseqüentemente:

$$\Omega^A_A = 0 \quad (2.80)$$

Essas propriedades facilitam sobremaneira o cálculo das componentes do tensor de Riemann.

Aliado a isso, se optarmos por uma notação de índices em ordem crescente, por exemplo, eliminaremos a repetição de índices de mesmo valor e, com isso, o fator 1/2 desaparece da expressão associada à 2-forma de curvatura, o que possibilita uma identificação direta entre os dois membros da equação:

$$\Omega^A_B = \sum_{C < D} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (2.81)$$

o que naturalmente simplifica a determinação das componentes do tensor de Riemann.

2.2 Equações de Killing

Os geradores de um grupo de isometrias se chamam vetores de Killing. Na seção seguinte vamos obter a equação que estes vetores devem satisfazer, desenvolvendo em pormenores a exposição de Eisenhart [11, Cap. XII].

2.2.1 Grupos de Movimentos e Equação de Killing

Uma vez definida a aplicação:

$$Xf = \xi^i \partial_i f, \quad (2.82)$$

onde

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2.83)$$

denota-se então

$$X \equiv \xi^i \partial_i. \quad (2.84)$$

Se adotarmos a transformação

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i t \quad (2.85)$$

sendo t um parâmetro qualquer, podemos expandir a função $f(x)$ em série de Taylor:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(x) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k (\xi^i \partial_i)^k}{k!} \right] f(x) = f(x) + \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k X^k}{k!} \right] f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(\bar{x}) = f(x) + t Xf + \frac{t^2}{2!} X^2 f + \dots + \frac{t^r}{r!} X^r f + \dots \end{aligned} \quad (2.86)$$

onde $X^r f$ é entendido como a atuação de X sobre f por r vezes consecutivas, i.e.,

$$X^2 f = X(Xf) \text{ etc.} \quad (2.87)$$

Considerando t infinitesimal e utilizando a notação $t \rightarrow \delta t$, temos

$$\bar{x}^i = x^i + \xi^i \delta t \Rightarrow \delta x^i = \xi^i \delta t \quad (2.88)$$

Dessa forma podemos reescrever $f(\bar{x})$ como

$$f(\bar{x}) = f(x) + \delta t Xf + O(2) \simeq f(x) + \delta t Xf \Rightarrow$$

$$\delta f(x) = Xf \cdot \delta t \quad (2.89)$$

Então, usando os resultados acima para calcular a variação sobre os infinitésimos dx^i :

$$\delta(dx^i) = d(\delta x^i) = d(\xi^i \delta t) = dx^j \partial_j \xi^i \cdot \delta t \quad (2.90)$$

e fazendo $f = g_{ij}$:

$$\delta g_{ij} = X(g_{ij}) \delta t = \xi^k \partial_k g_{ij} \cdot \delta t \quad (2.91)$$

Considerando agora a aplicação de X sobre o elemento de linha ds^2 , temos:

$$X(ds^2) \delta t = \delta(ds^2) \quad (2.92)$$

onde $\delta(ds^2)$ pode ser calculado através das expressões já obtidas:

$$\begin{aligned} \delta(ds^2) &= \delta(g_{ij}) dx^i dx^j + g_{ij} \delta(dx^i) dx^j + g_{ij} dx^i \delta(dx^j) = \\ &= \xi^k \partial_k g_{ij} dx^i dx^j \cdot \delta t + g_{ij} dx^j dx^k \partial_k \xi^i \cdot \delta t + g_{ij} dx^i dx^k \partial_k \xi^j \cdot \delta t = \\ &= (\xi^k \partial_k g_{ij} dx^i dx^j + g_{kj} dx^i dx^j \partial_i \xi^k + g_{ik} dx^i dx^j \partial_j \xi^k) \delta t = \\ &= (\xi^k \partial_k g_{ij} + g_{kj} \partial_i \xi^k + g_{ik} \partial_j \xi^k) dx^i dx^j \delta t \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\delta(ds^2) = h_{ij} dx^i dx^j \delta t \quad (2.93)$$

onde

$$h_{ij} = (\xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{kj} \partial_i \xi^k) \quad (2.94)$$

Conclui-se daí que

$$X(ds^2) \delta t = \delta(ds^2) = h_{ij} dx^i dx^j \delta t \Rightarrow$$

$$X(ds^2) = h_{ij} dx^i dx^j \quad (2.95)$$

Redenominando o elemento de linha ds^2 pela 2-forma φ , podemos então descrevê-lo, após o acréscimo variacional, pela expressão:

$$\bar{\varphi} = \varphi + \delta\varphi = \bar{g}_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j \cong \bar{g}_{ij} dx^i dx^j \quad (2.96)$$

pois

$$d\bar{x}^i = dx^i + \delta(dx^i) = dx^i + \partial_k \xi^i \underbrace{dx^k \delta t}_{O(2)} \cong dx^i \quad (2.97)$$

logo

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &\cong \bar{g}_{ij} dx^i dx^j \cong \varphi + \delta\varphi = g_{ij} dx^i dx^j + h_{ij} dx^i dx^j \delta t \Rightarrow \\ \bar{g}_{ij} &\cong g_{ij} + h_{ij} \delta t \end{aligned} \quad (2.98)$$

onde substituímos acima as expressões de φ e $\delta\varphi$, sendo

$$\delta\varphi = h_{ij} dx^i dx^j \delta t \quad (2.99)$$

Ademais é possível determinar uma outra expressão para h_{ij} , se notarmos que

$$\begin{aligned} g_{ik} \xi^k_{||j} &= g_{ik} \left[\partial_j \xi^k + \left\{ \begin{matrix} k \\ rj \end{matrix} \right\} \xi^r \right] = g_{ik} \partial_j \xi^k + [rj, i] \xi^r \Rightarrow \\ g_{ik} \partial_j \xi^k &= g_{ik} \xi^k_{||j} - [rj, i] \xi^r \end{aligned} \quad (2.100)$$

e, analogamente,

$$g_{jk} \partial_i \xi^k = g_{jk} \xi^k_{||i} - [ri, j] \xi^r \quad (2.101)$$

Substituindo as equações acima na expressão para h_{ij} e lembrando que

$$\partial_r g_{ij} = [ri, j] + [rj, i], \quad (2.102)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{jk} \partial_i \xi^k \Rightarrow \\ \Rightarrow h_{ij} &= \xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \xi^k_{||j} - [rj, i] \xi^r + g_{jk} \xi^k_{||i} - [ri, j] \xi^r = \\ &= \xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \xi^k_{||j} + g_{jk} \xi^k_{||i} - \xi^r \partial_r g_{ij} \Rightarrow \\ h_{ij} &= g_{ik} \xi^k_{||j} + g_{jk} \xi^k_{||i} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Entretanto, para que a transformação dada por ξ mantenha a métrica invariante, i.e., $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$, é necessário que a variação do elemento de linha seja nula, ou $\delta\varphi = 0$, o que implica $h_{ij} = 0$, portanto

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{jk} \partial_i \xi^k = 0 \quad (2.104)$$

que é a equação (A) contida na memória de Bianchi [1].

Por outro lado, reescrevendo a equação acima na forma das derivadas covariantes da métrica:

$$g_{ik} \xi^k_{||j} + g_{jk} \xi^k_{||i} = 0 \quad (2.105)$$

ou, como $g_{ik||j} = 0$:

$$(g_{ik} \xi^k)_{||j} + (g_{jk} \xi^k)_{||i} = 0 \Rightarrow$$

$$\xi_{i||j} + \xi_{j||i} = 0 \quad (2.106)$$

que é chamada de forma covariante da *equação de Killing*, sendo a maneira moderna de expressar a equação (2.104).

2.2.2 Solução das Equações de Killing para a Métrica Euclidiana

Como ilustração do processo de resolução das equações de Killing, vamos examinar o caso euclidiano em três dimensões. O artigo de Davis e Katzin [12] serviu como referência a essa seção, embora aqui determinemos as soluções em detalhes.

A métrica euclidiana é descrita por:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.107)$$

ou

$$g_{ij} = \delta_{ij} \quad (2.108)$$

Vamos partir da expressão obtida por Bianchi em seu trabalho, equivalente à equação de Killing, i.e.,

$$\xi^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j \xi^k + g_{kj} \partial_i \xi^k = 0 \quad (2.109)$$

Utilizando essa equação para a métrica euclidiana, obtém-se

$$\delta_{ik} \partial_j \xi^k + \delta_{kj} \partial_i \xi^k = 0 \Rightarrow \partial_j \xi^i + \partial_i \xi^j = 0 \quad (2.110)$$

A equação precedente desdobra-se em dois casos:

$$\begin{cases} (1) \ i = j \Rightarrow \xi^i_{||i} = 0 \\ (2) \ i \neq j \Rightarrow \xi^j_{||ii} = 0 \end{cases} \quad (2.111)$$

No segundo caso

$$\partial_j \xi^i + \partial_i \xi^j = 0 \Rightarrow \partial_{ji} \xi^i + \partial_{ii} \xi^j = 0 \Rightarrow \partial_{ii} \xi^j = 0 \quad (2.112)$$

Da primeira equação obtém-se:

$$\xi^i_{|i} = 0 \Rightarrow \xi^i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \xi^i(x^j, x^k) \quad (2.113)$$

onde o símbolo $\left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ABC \end{smallmatrix} \right|$ representa a distintividade entre os três índices A, B, C (os quais podem assumir os valores 1, 2 ou 3), ou seja,

$$\left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ABC \end{smallmatrix} \right| = \begin{cases} 1, & \text{se } A \neq B \neq C \neq A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.114)$$

isto sintetiza, através da expressão (2.113), a notação para:

$$\begin{cases} \xi^1 = \xi^1(x^2, x^3) \\ \xi^2 = \xi^2(x^1, x^3) \\ \xi^3 = \xi^3(x^1, x^2) \end{cases} \quad (2.115)$$

A segunda equação conduz a:

$$\partial_{ii}\xi^j = 0 \Rightarrow \partial_i \left[\left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \partial_i \xi^j(x^k, x^i) \right] = 0 \quad (2.116)$$

o que indica que a função

$$\omega^j_i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \partial_i \xi^j(x^k, x^i) \quad (2.117)$$

não deve depender de x^i , logo,

$$\omega^j_i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \omega^j_i(x^k) \quad (2.118)$$

Podemos escrever então:

$$\omega^1_2 = \omega^1_2(x^3), \quad \omega^2_3 = \omega^2_3(x^1), \quad \omega^3_1 = \omega^3_1(x^2) \quad (2.119)$$

$$\omega^2_1 = \omega^2_1(x^3), \quad \omega^3_2 = \omega^3_2(x^1), \quad \omega^1_3 = \omega^1_3(x^2) \quad (2.120)$$

Por outro lado sabemos que

$$\omega^j_i = \partial_i \xi^j = -\partial_j \xi^i = -\omega^i_j \quad (2.121)$$

ou seja, ω^i_j é anti-simétrico.

Portanto

$$\xi^1_{|2} = \omega^1_2(x^3) = -\xi^2_{|1} = -\omega^2_1(x^3), \quad (2.122)$$

$$\xi^2_{|3} = \omega^2_3 (x^1) = -\xi^3_{|2} = -\omega^3_2 (x^1), \quad (2.123)$$

$$\xi^1_{|3} = \omega^1_3 (x^2) = -\xi^3_{|1} = -\omega^3_1 (x^2) \quad (2.124)$$

Além disso, como ω^i_j é anti-simétrico, os elementos diagonais são nulos, ou seja,

$$\omega^i_k = -\omega^k_i \Rightarrow \omega^i_i = 0 \quad (2.125)$$

ou, mais sinteticamente,

$$\xi^i_{|j} = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \omega^i_j (x^k) = - \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \omega^j_i (x^k) \quad (2.126)$$

Daí, integrando as equações acima,

$$\begin{cases} \xi^i_{|j} = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \omega^i_j (x^k) \\ \xi^i_{|k} = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \omega^i_k (x^j) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi^i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \{ \omega^i_j (x^k) x^j + \phi^i_j (x^k) + k^i \} \\ \xi^i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \{ \omega^i_k (x^j) x^k + \phi^i_k (x^j) + k^i \} \end{cases}$$

onde k^i são constantes e as funções ϕ^i_j não podem depender de x^i pois

$$\xi^i_{|i} = 0 \Rightarrow \xi^i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \xi^i (x^j, x^k) \quad \text{e} \quad \phi^i_{j|i} = 0 \Rightarrow \phi^i_j = \phi^i_j (x^k) \quad (2.127)$$

Portanto, igualando as expressões obtidas para ξ^i :

$$\omega^i_j (x^k) x^j + \phi^i_j (x^k) + k^i = \omega^i_k (x^j) x^k + \phi^i_k (x^j) + k^i \quad (2.128)$$

onde estamos considerando os índices i, j e k todos distintos entre si; logo:

$$\phi^i_j (x^k) = \omega^i_k (x^j) x^k \quad \text{e} \quad \phi^i_k (x^j) = \omega^i_j (x^k) x^j \quad (2.129)$$

o que significa que

$$\omega^i_k = \text{const} \quad (2.130)$$

Então

$$\phi^i_j (x^k) = \omega^i_k x^k \quad (2.131)$$

ou, em expressões abertas:

$$\begin{cases} \phi^1_2 = \omega^1_3 x^3, & \phi^2_1 = \omega^2_3 x^3 \\ \phi^1_3 = \omega^1_2 x^2, & \phi^3_1 = \omega^3_2 x^2, \\ \phi^2_3 = \omega^2_1 x^1, & \phi^3_2 = \omega^3_1 x^1 \end{cases} \quad (2.132)$$

Substituindo esse resultado na equação para ξ^i :

$$\xi^i = \left| \begin{smallmatrix} 123 \\ ijk \end{smallmatrix} \right| \{ \omega^i_k x^k + \omega^i_j x^j + k^i \} = \sum_{k \neq i} \omega^i_k x^k + k^i \quad (2.133)$$

Logo, podemos escrever as soluções do seguinte modo:

$$\begin{cases} \xi^1 = \omega^1_2 x^2 + \omega^1_3 x^3 + k^1 \\ \xi^2 = \omega^2_1 x^1 + \omega^2_3 x^3 + k^2 \\ \xi^3 = \omega^3_1 x^1 + \omega^3_2 x^2 + k^3 \end{cases} \quad (2.134)$$

Definindo os vetores duais aos tensores anti-simétricos ω^i_j :

$$\omega^i_j = \sum_k \epsilon^i_{jk} \omega^k \quad (2.135)$$

temos:

$$\begin{cases} \omega^1 = \omega^2_3 = -\omega^3_2 \\ \omega^2 = \omega^3_1 = -\omega^1_3 \\ \omega^3 = \omega^1_2 = -\omega^2_1 \end{cases} \quad (2.136)$$

que assume a forma matricial:

$$(\omega^i_j) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1_2 & \omega^1_3 \\ -\omega^1_2 & 0 & \omega^2_3 \\ -\omega^1_3 & -\omega^2_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega^3 & -\omega^2 \\ -\omega^3 & 0 & \omega^1 \\ \omega^2 & -\omega^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.137)$$

e as soluções podem ser reescritas como:

$$\begin{cases} \xi^1 = \omega^3 x^2 - \omega^2 x^3 + k^1 \\ \xi^2 = \omega^1 x^3 - \omega^3 x^1 + k^2 \\ \xi^3 = \omega^2 x^1 - \omega^1 x^2 + k^3 \end{cases} \quad (2.138)$$

ou, genericamente:

$$\xi^i = -\epsilon^i_{jk} \omega^j x^k + k^i \quad (2.139)$$

Os geradores são definidos por

$$X_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i \quad (2.140)$$

Os seis vetores de Killing se obtém tomando sucessivamente um dos parâmetros ω^i ou k^i igual a 1, deixando nulos os demais, assim, assumindo a grandeza

$$\Omega_\alpha = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, k^1, k^2, k^3) , \quad (2.141)$$

podemos dizer que $\Omega_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$ gera X_1 , enquanto que, por exemplo, $\Omega_4 = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$ gera X_4 e, genericamente, Ω_α gera X_α .

Desse modo, se adotarmos para os vetores de Killing a notação

$$\xi_\alpha = (\xi_\alpha^1, \xi_\alpha^2, \xi_\alpha^3) , \quad (2.142)$$

obteremos a tabela a seguir:

α	Ω_α	ξ_α	X_α	
1	(1, 0, 0, 0, 0, 0)	(0 , x^3 , $-x^2$)	$x^3 \partial_2 - x^2 \partial_3$	
2	(0, 1, 0, 0, 0, 0)	($-x^3$, 0 , x^1)	$x^1 \partial_3 - x^3 \partial_1$	
3	(0, 0, 1, 0, 0, 0)	(x^2 , $-x^1$, 0)	$x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2$	(2.143)
4	(0, 0, 0, 1, 0, 0)	(1 , 0 , 0)	∂_1	
5	(0, 0, 0, 0, 1, 0)	(0 , 1 , 0)	∂_2	
6	(0, 0, 0, 0, 0, 1)	(0 , 0 , 1)	∂_3	

Com isso, determinamos os seis geradores do grupo de simetrias do espaço euclidiano. Os três primeiros representam as simetrias de rotação em torno dos eixos x^1 , x^2 e x^3 , respectivamente, enquanto os três últimos correspondem a translações nesses eixos. Esse resultado ilustra a resolução das equações de Killing para o caso tridimensional da métrica euclidiana, a mais simples possível.

2.3 Determinação dos Espaços Homogêneos

A definição de espaço homogêneo pressupõe alguns conceitos, comentados brevemente a seguir.

2.3.1 Álgebras de Lie

Uma álgebra é um espaço vetorial munido duma operação binária interna, isto é, dado o espaço vetorial K :

$$A, B \in K \Rightarrow (A, B) \rightarrow A * B \equiv C \in K \quad (2.144)$$

Numa álgebra de Lie essa operação binária é definida pela relação de comutação entre os elementos da álgebra, i.e.,

$$A * B \equiv [A, B] := AB - BA \quad (2.145)$$

que apresenta a propriedade de anti-comutatividade e satisfaz a Identidade de Jacobi, ou seja:

1. $A * B = -B * A$
2. $(A * B) * C + (C * A) * B + (B * C) * A = 0$

Os elementos da base $\{A_i\}$ tais que $[A_i, A_j] = C_{ij}^k A_k$, são chamados geradores da álgebra e os coeficientes C_{ij}^k , de constantes de estrutura da álgebra.

Os elementos do grupo de Lie correspondente a uma dada álgebra são obtidos dos geradores infinitesimais dessa álgebra por exponenciação. Assim, dada um álgebra, por exemplo, $g\ell(N, \mathbb{R})$, obtém-se daí o grupo $GL(N, \mathbb{R})$, indicado simbolicamente por $GL(N, \mathbb{R}) = e^{g\ell(N, \mathbb{R})}$.

2.3.2 Grupo de Isometrias duma Variedade

Seja M uma variedade com métrica invariante sob a ação de um grupo G de isometrias. Essas isometrias são obtidas dos vetores de Killing, que são os geradores de G , por exponenciação. As constantes de estrutura dessa álgebra são definidas pelos comutadores dos seus geradores.

Sendo $\{A_i\}_{i=1, \dots, n}$ uma base da álgebra de Lie, suas constantes de estrutura são definidas por:

$$[A_i, A_j] = C_{ij}^k A_k \quad (2.146)$$

Como o comutador satisfaz a identidade de Jacobi.

$$[[A_i, A_j], A_k] + [[A_j, A_k], A_i] + [[A_k, A_i], A_j] = 0 \quad (2.147)$$

verifica-se que as constantes de estrutura satisfazem a relação:

$$C_{ij}^r C_{rk}^s + C_{jk}^r C_{ri}^s + C_{ki}^r C_{rj}^s = 0 \quad (2.148)$$

e, reciprocamente, quaisquer C_{ij}^r anti-simétricos em i, j satisfazendo (2.148) constituem constantes de estrutura de algum grupo de Lie. A equação acima pode ser escrita sinteticamente como

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk}^{upq} C_{up}^r C_{rq}^s = 0 \quad (2.149)$$

Dado o isomorfismo entre o grupo de isometrias da variedade M e algum grupo abstrato G , o comutador da álgebra de Lie definido em (2.146) é então substituído pelo comutador dos vetores de Killing X_i do grupo de isometrias [5, p.105], os quais devem obedecer portanto:

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \quad (2.150)$$

2.3.3 Duais das Constantes de Estrutura

Introduz-se, por conveniência matemática, a grandeza de dois índices C^{sk} , através duma transformação dual:

$$C_{ij}^k = \epsilon_{ijs} C^{sk} \quad (2.151)$$

Então, da relação de comutação (2.150):

$$\epsilon^{ijs} [X_i, X_j] = \epsilon^{ijs} C_{ij}^k X_k = \epsilon^{ijs} \epsilon_{ijr} C^{rk} X_k = 2 \delta_r^s C^{rk} X_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon^{ijs} (X_i X_j - X_j X_i) = 2 \epsilon^{ijs} X_i X_j = 2 \delta_r^s C^{rk} X_k \Rightarrow$$

$$\epsilon^{ijs} X_i X_j = C^{sk} X_k \quad (2.152)$$

Essa é a forma assumida pelas relações de comutação (2.150) em termos de C^{sk} .

A anti-simetria da constante de estrutura se reflete nas novas constantes. De (2.149) tiramos:

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk}^{upq} C_{up}^r C_{rq}^s = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{rgh} \epsilon^{upq} \epsilon_{upv} C^{hs} C^{vr} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{rgh} (2 \delta_v^q) C^{hs} C^{vr} = 0 \Rightarrow \overbrace{\epsilon_{ijk}}^{\text{inocuo}} \epsilon_{rgh} C^{hs} C^{qr} = 0 \quad (2.153)$$

Portanto podemos reescrever (2.149) na forma:

$$\epsilon_{ijl} C^{\ell k} C^{ji} = 0 \quad (2.154)$$

2.3.4 Geração duma Base Invariante

Seja G um grupo de isometrias com vetores de Killing X_i e constantes de estrutura C_{jk}^i , i.e.,

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k \quad (2.155)$$

Se pudermos definir uma base $\{E_i\}$ cujos elementos sejam invariantes sob a ação do grupo G , essa base é chamada de *base invariante*. Assim sendo, a derivada de Lie de cada elemento E_i com relação a todo vetor de Killing X_k deve ser nula, i.e.,

$$\mathcal{L}_{X_i} E_j = [X_i, E_j] = 0 \quad (2.156)$$

A utilização de uma base invariante é a maneira mais simples de descrever uma variedade M com um grupo de isometrias G .

Para construir essa base invariante $\{E_i\}$ precisamos determinar suas componentes com respeito aos vetores de Killing X_i , as quais em geral não são constantes. A condição (2.156) requer a resolução de um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, cujas condições iniciais devem ser estabelecidas, isto é, $E_j(P_0) = E_{j0}$. A escolha mais natural é a que corresponde às coordenadas canônicas [9, p.547], que se obtêm ao tomarmos os valores iniciais idênticos aos vetores de Killing, i.e.,

$$E_j(P_0) = X_j(P_0) \quad (2.157)$$

Escrevendo a relação entre X_i e E_j , através duma grandeza u_j^k que também varia de ponto a ponto, temos:

$$E_j = u_j^k X_k \quad (2.158)$$

Com isso, a condição inicial (2.157) fornece:

$$E_j(P_0) = u_j^k(P_0) X_k(P_0) = X_j(P_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_j^k(P_0) = \delta_j^k \quad (2.159)$$

Abrindo a expressão (2.156) através de (2.158) obtemos:

$$[X_i, u_j^k X_k] = X_i (u_j^k) X_k + u_j^k [X_i, X_k] = 0 \Rightarrow$$

$$X_i (u_j^s) X_s = -u_j^k C_{ik}^s X_s \quad (2.160)$$

Usando agora a condição (2.159) chega-se a:

$$X_i (u_j^s) (P_0) = -C_{ij}^s \quad (2.161)$$

Se escrevermos uma relação de comutação para os E_j :

$$[E_i, E_j] = D_{ij}^k E_k \quad (2.162)$$

e abrirmos essa expressão usando (2.158) podemos então determinar explicitamente as constantes de estrutura D_{ij}^k em função dos C_{ij}^k :

$$\begin{aligned} [E_i, E_j] &= [u_i^r X_r, u_j^s X_s] = u_i^r X_r (u_j^s) - u_j^s X_s (u_i^r) + u_i^r u_j^s [X_r, X_s] = \\ &= u_i^r X_r (u_j^s) X_s - u_j^s X_s (u_i^r) X_r + u_i^r u_j^s C_{rs}^k X_k \end{aligned}$$

Mas (2.162) implica:

$$D_{ij}^s u_s^k = u_i^r X_r (u_j^k) - u_j^s X_s (u_i^k) + u_i^r u_j^s C_{rs}^k \quad (2.163)$$

Utilizando as condições (2.161) e (2.159), válidas para o ponto inicial P_0 :

$$D_{ij}^k = -\delta_i^r C_{rj}^k + \delta_j^s C_{si}^k + \delta_i^r \delta_j^s C_{rs}^k \quad (2.164)$$

e, finalmente,

$$D_{ij}^k = -C_{ij}^k \quad (2.165)$$

ou seja, determinamos que, dadas as condições iniciais escolhidas, obtém-se:

$$[E_i, E_j] = -C_{ij}^k E_k \quad (2.166)$$

Vale notar que os vetores invariantes $\mathbf{E}_A$ e as 1-formas θ^A são casos particulares das tríadas $\mathbf{e}_{(A)}$ e das triadas de formas $\mathbf{e}^{(A)}$, respectivamente, definidas na seção 2.1.2 e 2.1.7 [eq. (2.29)].

Para uma base invariante descrita por

$$\mathbf{E}_{(A)} \equiv e_{(A)}^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \quad (2.167)$$

temos

$$\mathbf{E}_{(A)} \mathbf{E}_{(B)} = e^\alpha_{(A)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^\gamma_{(B)} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \quad (2.168)$$

de onde, dado o comutador

$$[\mathbf{E}_{(A)}, \mathbf{E}_{(B)}] = \mathbf{E}_{(A)} \mathbf{E}_{(B)} - \mathbf{E}_{(B)} \mathbf{E}_{(A)} \quad (2.169)$$

verifica-se:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{(A)}, \mathbf{E}_{(B)}] &= e^\alpha_{(A)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} e^\gamma_{(B)} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} - e^\gamma_{(B)} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} e^\alpha_{(A)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \\ &= e^\alpha_{(A)} e^\gamma_{(B) |\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} + e^\alpha_{(A)} e^\gamma_{(B)} \frac{\partial}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - e^\gamma_{(B)} e^\alpha_{(A) |\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - e^\gamma_{(B)} e^\alpha_{(A)} \frac{\partial}{\partial x^\gamma \partial x^\alpha} = \\ &= e^\alpha_{(A)} e^\gamma_{(B) |\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} - e^\gamma_{(B)} e^\alpha_{(A) |\gamma} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

Redenominando os índices mudos no último termo do 2º membro da equação acima:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_{(A)}, \mathbf{E}_{(B)}] &= e^\alpha_{(A)} e^\gamma_{(B) |\alpha} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} - e^\beta_{(B)} e^\gamma_{(A) |\beta} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} = \\ &= \left(e^\alpha_{(A)} e^\gamma_{(B) |\alpha} - e^\beta_{(B)} e^\gamma_{(A) |\beta} \right) \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \end{aligned} \quad (2.170)$$

Podemos então escrever:

$$[\mathbf{E}_{(A)}, \mathbf{E}_{(B)}] = C^C_{AB} \mathbf{E}_{(C)} \quad (2.171)$$

ou

$$[\mathbf{E}_{(A)}, \mathbf{E}_{(B)}] = C^C_{AB} e^\gamma_{(C)} \frac{\partial}{\partial x^\gamma} \quad (2.172)$$

sendo a constante de estrutura determinada pela expressão:

$$C^C_{AB} e^\gamma_{(C)} = \left(e^\alpha_{(A)} e^\gamma_{(B) |\alpha} - e^\beta_{(B)} e^\gamma_{(A) |\beta} \right) \quad (2.173)$$

2.3.5 Homogeneidade

Algumas definições são introduzidas a seguir:

- Uma variedade M é dita *invariante* sob a ação dum grupo de Lie G se existe um conjunto de vetores de Killing X_i satisfazendo a condição (2.150) [5, p.102].

- Uma variedade M é dita *homogênea com relação a um grupo* G se, $\forall p, q \in M \Rightarrow \exists g \in G \mid q = gp$ [13]. Nesse caso, diz-se que G *atua transitivamente* sobre a variedade M .
- Se o elemento g acima for único, o grupo é dito *simplesmente transitivo*.
- Uma variedade riemaniana M é *homogênea* se é homogênea com relação a seu grupo de isometrias [13].

Em outros termos, a variedade M é homogênea se existe um grupo G transitivo em M .

Considerando por exemplo o grupo completo de isometrias de E^2 , que é o grupo $G_3(E^2)$ com geradores $\{\partial_x, \partial_y, x\partial_y - y\partial_x\}$, vê-se que ele é transitivo sobre E^2 , pois todos os pontos de E^2 são cobertos pela ação do grupo G_3 , mas não é simplesmente transitivo porque pode-se ir de um ponto a outro através de elementos diferentes. O sub-grupo T^2 gerado por $\{\partial_x, \partial_y\}$, no entanto, é simplesmente transitivo pois, dados $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2) \in E^2$, $b = Ta$, onde T é a única translação gerada por $(b_1 - a_1)\partial_x + (b_2 - a_2)\partial_y$.

Num sentido mais restrito, se for possível, num dado espaço, realizar transformações que deixem a métrica invariante, esse espaço é denominado *homogêneo* com relação a um grupo G de isometrias.

Assim a transformação:

$$d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x_1, x_2, x_3) dx^\alpha dx^\beta \longrightarrow d\ell^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x'_1, x'_2, x'_3) dx^{\alpha'} dx^{\beta'} \quad (2.174)$$

é uma operação desse tipo.

No espaço euclidiano a homogeneidade pode ser expressa pela invariança da métrica sob translações, sendo cada translação determinada por 3 parâmetros. Essas transformações deixam invariante o deslocamento infinitesimal (dx, dy, dz) , pois as translações são descritas por $x^i \rightarrow x^{i'} = x^i + c^i$, onde c^i é uma constante para cada direção escolhida e, então, $dx^i \rightarrow dx^{i'} = dx^i$.

No caso mais geral de espaços homogêneos não-euclidianos, as transformações de seus grupos de movimento deixam invariantes *três formas diferenciais lineares independentes*. Dada uma *tríada* de vetores $\{e_{(A)}\}$, conforme descrito na seção 2.1.2, pode-se representar essas 1-formas pela base recíproca $\{e^{(A)}\}$:

$$\theta^{(A)} = e^{(A)}_\alpha dx^\alpha \quad (2.175)$$

Desse modo, constrói-se uma métrica espacial invariante sob o dado grupo de movimentos, de acordo com o exposto na seção 2.1.7 (eq. 2.32):

$$d\ell^2 = \eta_{AB} (e_\alpha^{(A)} dx^\alpha) (e_\beta^{(B)} dx^\beta) = \eta_{AB} e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} dx^\alpha dx^\beta \quad (2.176)$$

ou

$$d\ell^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \Leftrightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{AB} e_\alpha^{(A)} e_\beta^{(B)} \quad (2.177)$$

Como foi mencionado naquela seção, a matriz simétrica η_{AB} pode, no caso geral, assumir forma não-diagonal, quando a escolha mais conveniente dos vetores de base, pelas propriedades de simetria do espaço, levar a isso. Em aplicações físicas, a matriz $g_{\alpha\beta}$ pode apresentar dependência temporal. Do ponto de vista espacial, $\eta_{AB} = \text{const}$; em Cosmologia, entretanto, $\eta_{AB} = \eta_{AB}(t)$.

2.3.6 Invariança das 1-Formas $\theta^{(A)}$ e Constantes de Estrutura

Nesta seção tomamos como referência a exposição de Landau-Lifshitz [8].

Dada a homogeneidade de um espaço não-euclidiano qualquer, temos:

$$\theta^{(A)}(x) = \theta^{(A)}(x') \Rightarrow e_\alpha^{(A)}(x) dx^\alpha = e_\alpha^{(A)}(x') dx^{\alpha'} \quad (2.178)$$

Efetuando o produto por $e^\beta_{(A)}(x')$ em ambos os lados da equação acima:

$$e^\beta_{(A)}(x') e_\alpha^{(A)}(x) dx^\alpha = e^\beta_{(A)}(x') e_\alpha^{(A)}(x') dx^{\alpha'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^\beta_{(A)}(x') e_\alpha^{(A)}(x) dx^\alpha = \delta^\beta_\alpha dx^{\alpha'} \Rightarrow dx^{\beta'} = e^\beta_{(A)}(x') e_\alpha^{(A)}(x) dx^\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = e^\beta_{(A)}(x') e_\alpha^{(A)}(x) dx^\alpha \Rightarrow$$

$$\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} = e^\beta_{(A)}(x') e_\alpha^{(A)}(x) \quad (2.179)$$

Uma condição de integrabilidade da equação acima é expressa pelo teorema de Schwarz, que se verifica para funções $x^{\beta'}(x^\mu)$ de classe C^2 pelo menos:

$$\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} \quad (2.180)$$

Assim, calculando-se as derivadas da equação (2.179), encontra-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} = \frac{\partial e^\beta_{(A)}(x')}{\partial x^\lambda} e_\alpha^{(A)}(x) + e^\beta_{(A)}(x') \frac{\partial e_\alpha^{(A)}(x)}{\partial x^\lambda} \\ \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} = \frac{\partial e^\beta_{(A)}(x')}{\partial x^\alpha} e_\lambda^{(A)}(x) + e^\beta_{(A)}(x') \frac{\partial e_\lambda^{(A)}(x)}{\partial x^\alpha} \end{array} \right. \quad (2.181)$$

Então:

$$\frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\alpha \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 x^{\beta'}}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^\alpha} e_{\lambda}^{(A)}(x) + e_{(A)}^{\beta}(x') \frac{\partial e_{\lambda}^{(A)}(x)}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^\lambda} e_{\alpha}^{(A)}(x) - e_{(A)}^{\beta}(x') \frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}(x)}{\partial x^\lambda} = 0$$

o que conduz à seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^\alpha} e_{\lambda}^{(A)}(x) - \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^\lambda} e_{\alpha}^{(A)}(x) = \\ & = e_{(A)}^{\beta}(x') \left[\frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}(x)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial e_{\lambda}^{(A)}(x)}{\partial x^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2.182)$$

Entretanto podemos efetuar a transformação

$$\frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \quad (2.183)$$

ao lado da relação (2.179), o que fornece a seguinte expressão a ser inserida na equação que obtivemos anteriormente:

$$\frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(B)}^{\nu}(x') e_{\alpha}^{(B)}(x) \quad (2.184)$$

resultando portanto:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(B)}^{\nu}(x') e_{\alpha}^{(B)}(x) e_{\lambda}^{(A)}(x) - \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(B)}^{\nu}(x') e_{\lambda}^{(B)}(x) e_{\alpha}^{(A)}(x) = \\ & = e_{(A)}^{\beta}(x') \left[\frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}(x)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial e_{\lambda}^{(A)}(x)}{\partial x^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2.185)$$

Mas, redeterminando os índices A e B no 2º termo do 1º membro, obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(B)}^{\nu}(x') e_{\alpha}^{(B)}(x) e_{\lambda}^{(A)}(x) - \frac{\partial e_{(B)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(A)}^{\nu}(x') e_{\lambda}^{(A)}(x) e_{\alpha}^{(B)}(x) = \\ & = \left[\frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(B)}^{\nu}(x') - \frac{\partial e_{(B)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(A)}^{\nu}(x') \right] e_{\alpha}^{(B)}(x) e_{\lambda}^{(A)}(x) = \\ & = e_{(A)}^{\beta}(x') \left[\frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}(x)}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial e_{\lambda}^{(A)}(x)}{\partial x^\alpha} \right] \end{aligned} \quad (2.186)$$

Efetuada agora o produto por

$$e_{(D)}^{\lambda}(x) e_{(C)}^{\alpha}(x) e_{\beta}^{(E)}(x')$$

em ambos os lados da equação acima e usando as reduções

$$e_{\alpha}^{(B)}(x) e_{\lambda}^{(A)}(x) e_{(D)}^{\lambda}(x) e_{(C)}^{\alpha}(x) = \delta_D^A \delta_C^B \text{ e } e_{\beta}^{(E)}(x') e_{(A)}^{\beta}(x') = \delta_A^E,$$

no 1º e 2º membros, respectivamente, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial e_{(A)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(B)}^{\nu}(x') - \frac{\partial e_{(B)}^{\beta}(x')}{\partial x^{\nu'}} e_{(A)}^{\nu}(x') \right] \delta_D^A \delta_C^B e_{\beta}^{(E)}(x') = \\ & = \delta_A^E e_{(D)}^{\lambda}(x) e_{(C)}^{\alpha}(x) \left[\frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}(x)}{\partial x^{\lambda}} - \frac{\partial e_{\lambda}^{(A)}(x)}{\partial x^{\alpha}} \right] \end{aligned} \quad (2.187)$$

Nesse resultado as coordenadas em x e x' foram separadas, estando cada uma de um lado da igualdade. Porém, como essas coordenadas x e x' são arbitrárias, os dois membros da equação devem se reduzir a constantes, i.e., $f(x') = g(x) \Rightarrow f(x') = g(x) = \text{const}$, o que fornece, para um mesmo ponto arbitrário do espaço:

$$\left(\frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial e_{\beta}^{(A)}}{\partial x^{\alpha}} \right) e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} = C_{BC}^A \quad (2.188)$$

Esses coeficientes C_{BC}^A são as *constantes de estrutura* do grupo.

2.3.7 Relação com os Coeficientes de Rotação de Ricci

Multiplicando ambos os membros da equação (2.188) por $e_{(A)}^{\gamma}$ e lembrando que

$$\frac{\partial (e_{\alpha}^{(A)} e_{(A)}^{\gamma})}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial (\delta_{\alpha}^{\gamma})}{\partial x^{\mu}} = 0 \Rightarrow \frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}}{\partial x^{\mu}} e_{(A)}^{\gamma} = -e_{\alpha}^{(A)} \frac{\partial e_{(A)}^{\gamma}}{\partial x^{\mu}} \quad (2.189)$$

podemos reescrever:

$$\begin{aligned} C_{BC}^A e_{(A)}^{\gamma} &= \left(\frac{\partial e_{\alpha}^{(A)}}{\partial x^{\beta}} e_{(A)}^{\gamma} - \frac{\partial e_{\beta}^{(A)}}{\partial x^{\alpha}} e_{(A)}^{\gamma} \right) e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} = \\ &= \left(-e_{\alpha}^{(A)} \frac{\partial e_{(A)}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} + e_{\beta}^{(A)} \frac{\partial e_{(A)}^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right) e_{(B)}^{\alpha} e_{(C)}^{\beta} = \\ &= \left(-\delta_B^A \frac{\partial e_{(A)}^{\gamma}}{\partial x^{\beta}} e_{(C)}^{\beta} + \delta_C^A e_{(B)}^{\alpha} \frac{\partial e_{(A)}^{\gamma}}{\partial x^{\alpha}} \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C^A_{BC} e^\gamma_{(A)} = \left(e^\alpha_{(B)} \frac{\partial e^\gamma_{(C)}}{\partial x^\alpha} - e^\beta_{(C)} \frac{\partial e^\gamma_{(B)}}{\partial x^\beta} \right) \quad (2.190)$$

Aliado a isso está o fato de estarmos lidando com espaços riemannianos, nos quais as conexões são simétricas nos índices covariantes, o que permite escrever

$$\frac{\partial e^\gamma_{(C)}}{\partial x^\alpha} = e^\gamma_{(C) \parallel \alpha} = e^\gamma_{(C) \parallel \alpha} \quad (2.191)$$

onde $e^\gamma_{(C) \parallel \alpha}$ denota a derivada covariante. Logo, usando essa relação e multiplicando a equação (2.190) por $e_\gamma^{(E)}$:

$$C^E_{BC} = e^\gamma_{(C) \parallel \alpha} e_\gamma^{(E)} e^\alpha_{(B)} - e^\gamma_{(B) \parallel \beta} e_\gamma^{(E)} e^\beta_{(C)} \quad (2.192)$$

ou, de outra forma, utilizando as relações:

$$e^\gamma_{(C) \parallel \alpha} e_\gamma^{(E)} = -e_\gamma^{(E) \parallel \alpha} e^\gamma_{(C)} \quad \text{e} \quad -e^\gamma_{(B) \parallel \beta} e_\gamma^{(E)} = e_\gamma^{(E) \parallel \beta} e^\gamma_{(B)} \quad (2.193)$$

reescreve-se:

$$C^E_{BC} = -e_\gamma^{(E) \parallel \alpha} e^\gamma_{(C)} e^\alpha_{(B)} + e_\gamma^{(E) \parallel \beta} e^\gamma_{(B)} e^\beta_{(C)} \Rightarrow$$

$$C^E_{BC} = -\gamma^E_{BC} + \gamma^E_{CB} \quad (2.194)$$

onde os γ^A_{BC} são justamente os *coeficientes de rotação de Ricci* (cf. [7]).

Do resultado acima e da equação (2.45) tiramos:

$$d\theta^A = \frac{1}{2} (\gamma^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C + \gamma^A_{CB} \theta^C \wedge \theta^B) = \frac{1}{2} (\gamma^A_{BC} - \gamma^A_{CB}) \theta^B \wedge \theta^C$$

ou

$$d\theta^A = -\frac{1}{2} C^A_{BC} \theta^B \wedge \theta^C \quad (2.195)$$

2.3.8 Forma Vetorial de C^{AB}

A partir da equação (2.188) podemos derivar uma expressão que relaciona os vetores da base recíproca com as quantidades C^{AB} numa forma vetorial [8]:

$$-\partial_{[\alpha} e^\alpha_{(A)} e^\beta_{(B)} = C^C_{AB} \Rightarrow$$

$$C^C_{AB} = \partial_{[\beta} e^\alpha_{(A)} e^\nu_{(B)} \delta^\alpha_\mu \delta^\mu_\nu = \epsilon^{\lambda\omega}_{\beta\alpha} \partial_\lambda e^\alpha_{(A)} e^\mu_{(B)} \delta^\mu_\nu \delta^\alpha_\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= -\epsilon_{\mu\nu}^{\lambda\omega} \partial_\lambda e_\omega^{(C)} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = -(\delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\omega - \delta_\mu^\omega \delta_\nu^\lambda) \partial_\lambda e_\omega^{(C)} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = \quad (2.196) \\
&= -\epsilon_{\mu\nu\gamma}^{\lambda\omega\gamma} \partial_\lambda e_\omega^{(C)} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = -\epsilon^{\lambda\omega\gamma} \partial_\lambda e_\omega^{(C)} \epsilon_{\mu\nu\gamma} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = \\
&= -\epsilon^{\lambda\omega\gamma} \partial_\lambda e_\omega^{(C)} \delta_\gamma^\eta \epsilon_{\mu\nu\eta} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = -\epsilon^{\lambda\omega\gamma} \partial_\lambda e_\omega^{(C)} \left(e_{(L)}^\eta e_{(L)}^\gamma \right) \epsilon_{\mu\nu\eta} e^\mu_{(A)} e^\nu_{(B)} = \\
&= \underbrace{-\epsilon^{\lambda\omega\gamma} \partial_\lambda e_\omega^{(C)} e_{(L)}^\gamma}_{-(\nabla \times \mathbf{e}^{(C)}) \cdot \mathbf{e}^{(L)}} \cdot \underbrace{\epsilon_{\mu\nu\eta} e_{(A)}^\mu e_{(B)}^\nu e_{(L)}^\eta}_{\epsilon_{ABL} \frac{1}{V}} \Rightarrow \\
&\Rightarrow C_{AB}^C = -\epsilon_{ABL} \frac{1}{V} \mathbf{e}^{(L)} \cdot (\nabla \times \mathbf{e}^{(C)}) \Rightarrow \\
C^{AB} &= \frac{1}{2} \epsilon^{CDA} C_{CD}^B = \frac{1}{2} \epsilon^{CDA} \left[-\epsilon_{CDL} \frac{1}{V} \mathbf{e}^{(L)} \cdot (\nabla \times \mathbf{e}^{(B)}) \right] = \\
&= \frac{1}{2} 2 \delta_L^A \left[-\frac{1}{V} \mathbf{e}^{(L)} \cdot (\nabla \times \mathbf{e}^{(B)}) \right] \Rightarrow \\
C^{AB} &= -\frac{1}{V} \mathbf{e}^{(A)} \cdot (\nabla \times \mathbf{e}^{(B)}) \quad (2.197)
\end{aligned}$$

Um aspecto importante que deve ser ressaltado é o fato de que a escolha dos vetores da tríada não é única, podendo estar sujeita a qualquer transformação linear com coeficientes constantes, i.e.,

$$\mathbf{e}_{(A)} = K_A^B \mathbf{e}_{(B)} \quad (2.198)$$

o que evidentemente se reflete na forma obtida para os geradores X_A . Contudo, no que diz respeito a tais transformações, as quantidades η_{AB} e C^{AB} comportam-se como tensores.

2.4 Método de Behr

Como vimos anteriormente, os vetores de Killing satisfazem a relação (2.150):

$$[X_A, X_B] = C_{AB}^C X_C \quad (2.199)$$

As constantes C^{AB} duais às suas constantes de estrutura são dadas então, de acordo com (2.151), por

$$C^{AB} = \frac{1}{2} \epsilon^{CDA} C_{CD}^B \quad (2.200)$$

e geralmente não apresentam propriedades de simetria ou anti-simetria em A, B .

2.4.1 Determinação dos conjuntos com constantes de estrutura não-equivalentes:

Este método foi concebido por Behr, em 1962, e consiste em fracionar C^{AB} em duas partes, explorando suas propriedades tensoriais. Embora C^{AB} seja um tensor assimétrico, podemos representá-lo como a soma de um tensor simétrico n^{AB} com um outro, de caráter anti-simétrico. Este último pode ser expresso em termos de seu vetor dual, então:

$$C^{AB} := n^{AB} + \epsilon^{ABC} a_C \quad (2.201)$$

Substituindo a expressão anterior na equação (2.154):

$$\begin{aligned} \epsilon_{BCD} (n^{CD} + \epsilon^{CDE} a_E) (n^{BA} + \epsilon^{BAH} a_H) &= 0 \Rightarrow \\ \epsilon_{BCD} (n^{CD} n^{BA} + n^{CD} \epsilon^{BAH} a_H + n^{BA} \epsilon^{CDE} a_E + \epsilon^{CDE} \epsilon^{BAH} a_E a_H) &= 0 \Rightarrow \\ \underbrace{\epsilon_{BCD} n^{CD}}_0 n^{BA} + \underbrace{\epsilon_{CD}^{AH} n^{CD}}_0 a_H + 2 \delta_B^E n^{BA} a_E + 2 \delta_B^E \underbrace{\epsilon^{BAH} a_E a_H}_0 &= 0 \Rightarrow \\ n^{AB} a_B = 0 \Rightarrow \boxed{Na = 0} \end{aligned} \quad (2.202)$$

A equação

$$M v = \lambda v \quad (2.203)$$

fornece três auto-valores λ' , λ'' e λ''' aos quais correspondem três auto-vetores v' , v'' e v''' com 3 componentes cada. A matriz M diagonalizada é portanto:

$$\Lambda(M) = \begin{pmatrix} \lambda' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'' & 0 \\ 0 & 0 & \lambda''' \end{pmatrix} \quad (2.204)$$

Se supusermos a matriz M hermitiana e a expressarmos na base de seus auto-valores $\{v'_i\}$ teremos:

$$M v'_j = \lambda_j v'_j \Rightarrow \quad (2.205)$$

$$\langle v'_i | M v'_j \rangle = M'_{ij} = \langle v'_i | \lambda_j v'_j \rangle = \lambda_j \langle v'_i | v'_j \rangle = \lambda_j \delta_{ij} \quad (2.206)$$

i.e.,

$$M' = \Lambda(M) \quad (2.207)$$

Se elegermos agora o auto-valor nulo $\bar{\lambda} = 0$, com seu correspondente auto-vetor $\bar{v}$, escrevemos:

$$\Lambda(M) \bar{v} = 0 \quad (2.208)$$

correspondente à equação $M v = 0$ que tem a mesma forma da equação (2.202).

Contudo, N é matriz hermitiana, dado que é real e, por construção, simétrica. Logo, seus auto-vetores são ortogonais. Podemos então, sem perda de generalidade, escolher o auto-vetor correspondente ao auto-valor nulo como:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.209)$$

Dessa maneira, a equação (2.202) pode ser reescrita como:

$$\Lambda(N) \bar{a} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow n_1 a = 0 \quad (2.210)$$

onde n_1 , n_2 e n_3 são seus auto-valores.

Por outro lado, das equações (2.150) e (2.151) vem:

$$[X_A, X_B] = \epsilon_{ABD} C^{DC} X_C \quad (2.211)$$

Substituindo acima a relação:

$$C^{AB} = n_{(A} \delta^{AB} + \epsilon^{ABC} a_C \quad (2.212)$$

ou, em forma matricial,

$$C = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & a \\ 0 & -a & n_3 \end{pmatrix} \quad (2.213)$$

chegamos a

$$\begin{aligned} [X_A, X_B] &= \epsilon_{ABD} (n_{(D} \delta^{DC} + \epsilon^{DCE} a_E) X_C = \\ &= (\epsilon_{ABC} n_{(C} + \epsilon_{AB}^C a_E) X_C \Rightarrow \end{aligned}$$

$$[X_A, X_B] = [\epsilon_{ABC} n_{(C} + (\delta_A^C a_B - \delta_B^C a_A)] X_C \quad (2.214)$$

As constantes de estrutura podem então ser escritas:

$$C_{AB}^C = \epsilon_{ABD} n^{DC} + (\delta_A^C a_B - \delta_B^C a_A) \quad (2.215)$$

Escrevendo explicitamente as relações de comutação acima, utilizando a escolha (2.209) chegamos a:

$$[X_1, X_2] = -a X_2 + n_3 X_3$$

$$[X_2, X_3] = n_1 X_1 \quad (2.216)$$

$$[X_3, X_1] = n_2 X_2 + a X_3$$

Com isso é possível classificar os espaços homogêneos do grupo G_3 pelo método de Behr e compará-los com a classificação efetuada por Bianchi.

As constantes de estrutura C_{jk}^i estarão relacionadas com o vetor $\vec{n}$ e o parâmetro a da seguinte maneira:

$$\begin{cases} C_{23}^1 = n_1, & C_{31}^2 = n_2, & C_{12}^3 = n_3 \\ C_{12}^2 = -C_{31}^3 = -a \end{cases} \quad (2.217)$$

A condição essencial para a construção da tabela de Behr é que o parâmetro a e a componente n_1 não podem ser simultaneamente iguais a 1, a fim de satisfazer a condição (2.210). Dessa maneira, construímos todas as possibilidades para as componentes do vetor $\vec{n}$ e o parâmetro a , lembrando que, para um dado valor de a , tomar $\vec{n} = (1, 0, 0)$ ou $\vec{n} = (0, 1, 0)$, por exemplo, apresenta total semelhança, exceto pelo fato de uma mudança de base. Tendo isso em vista, constrói-se uma tabela que deve fornecer todos os espaços homogêneos de três dimensões e que, portanto, possuem uma equivalência com os espaços G_3 de Bianchi.

Capítulo 3

ESPAÇOS DE BIANCHI E KANTOWSKI-SACHS

3.1 Classificação dos Espaços G_3 Transitivos

3.1.1 Definição

Seja M uma variedade 3-dimensional homogênea com respeito a um grupo G de Bianchi. A métrica riemanniana mais geral, invariante sob a ação induzida por G e suportada por M tem a forma:

$$d\ell^2 = \gamma_{ab} \omega^a \omega^b \quad (3.1)$$

sendo $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$ coeficientes constantes compatíveis com a métrica riemanniana. Então G é um grupo de isometrias do espaço homogêneo M , chamado de *Espaço de Bianchi* [3].

Chama-se *Métrica Standard* ou *Padrão* $d\lambda^2$ de um dado tipo de Bianchi à expressão para $\gamma_{ab} = \delta_{ab}$, (it cf. Fagundes [3]), ou seja.

$$d\lambda^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 + (\omega^3)^2 \quad (3.2)$$

Além dos espaços de Bianchi, inserimos o de Kantowski-Sachs, cujo grupo completo de isometrias é um G_4 , que não contém um subgrupo G_3 transitivo.

3.1.2 Relação de Comutação dos Tipos de Bianchi

No trabalho original de Bianchi [1], verifica-se a seguinte classificação por ele adotada:

BI:

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = 0$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

BII:

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = 0$$

$$[X_2, X_3] = X_1$$

BIII:

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_1$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

BIV:

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_1$$

$$[X_2, X_3] = X_1 + X_2$$

BV:

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_1$$

$$[X_2, X_3] = X_2$$

BVI (h):

$$(0 \leq h \leq 1)$$

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_1$$

$$[X_2, X_3] = h X_2$$

BVII (h):

$$(0 \leq h < 2)$$

$$[X_1, X_2] = 0$$

$$[X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_2, X_3] = -X_1 + h X_2$$

BVIII:

$$[X_1, X_2] = X_1$$

$$[X_1, X_3] = 2X_2$$

$$[X_2, X_3] = X_3$$

BIX:

$$[X_1, X_2] = X_3$$

$$[X_1, X_3] = -X_2$$

$$[X_2, X_3] = X_1$$

3.2 Correspondência Bianchi-Behr

Aqui estabelece-se a correspondência entre a classificação de Bianchi e a obtida pelo método de Behr. No quadro seguinte, a classificação de Bianchi, o vetor $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ com o parâmetro a , denotados $\{\vec{n}, a\}$, e as constantes de estrutura não-nulas obtidas diretamente da tabela de Behr (2.216), pelas relações (2.217).

<i>BI</i>	$\{(0, 0, 0), 0\}$	$C^i_{jk} = 0$
<i>BII</i>	$\{(1, 0, 0), 0\}$	$C^1_{23} = 1$
<i>BIII</i>	$\{(0, 1, -1), 1\}$	$\begin{cases} C^2_{12} = C^3_{12} = -1 \\ C^2_{31} = C^3_{31} = 1 \end{cases}$
<i>BIV</i>	$\{(0, 0, 1), 1\}$	$\begin{cases} C^2_{12} = -1 \\ C^3_{12} = C^3_{31} = 1 \end{cases}$
<i>BV</i>	$\{(0, 0, 0), 1\}$	$\begin{cases} C^2_{12} = -1 \\ C^3_{31} = 1 \end{cases}$
<i>BVI(h)</i>	$\{(0, 1, -1), h\}$	$\begin{cases} C^2_{12} = -C^3_{31} = -h \\ C^3_{12} = -C^2_{31} = -1 \end{cases}$
<i>BVII(h)</i>	$\{(0, 1, 1), h\}$	$\begin{cases} C^2_{12} = -C^3_{31} = h \\ C^3_{12} = C^2_{31} = 1 \end{cases}$
<i>BVIII</i>	$\{(1, 1, -1), 0\}$	$\begin{cases} C^1_{23} = C^2_{31} = 1 \\ C^3_{12} = -1 \end{cases}$
<i>BIX</i>	$\{(1, 1, 1), 0\}$	$\begin{cases} C^1_{23} = C^2_{31} = 1 \\ C^3_{12} = 1 \end{cases}$

3.3 Descrição do Método de Determinação dos Espaços de Bianchi

3.3.1 Determinação dos Vetores de Killing

As equações diferenciais parciais obtidas das relações de comutação podem ser resolvidas para determinar-se os vetores de Killing. Sua resolução geralmente não é trivial e exige algumas considerações genéricas importantes, baseadas numa boa dose de intuição matemática.

Sejam as relações de comutação

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k \quad (3.3)$$

Podemos escrever:

$$X_i = \xi_i^r \partial_r \quad (3.4)$$

Então

$$[\xi_i^r \partial_r, \xi_j^s \partial_s] = C^k_{ij} \xi_k^r \partial_r \quad (3.5)$$

o que implica:

$$\xi_i^s \partial_s \xi_j^r - \xi_j^s \partial_s \xi_i^r = C^k_{ij} \xi_k^r \quad (3.6)$$

Partiremos sempre das condições iniciais de que os geradores, tomados na origem, tenham a direção das curvas coordenadas:

$$X_i(0) = \partial_i \quad (3.7)$$

Como as trajetórias dos geradores infinitesimais são distintas, assumiremos o critério algumas vezes usado por Bianchi em seu trabalho de referência [1], de adotar de antemão alguns deles nas direções das curvas coordenadas. i.e.,

$$X_A = \xi_A(x^i) \partial_A \quad (3.8)$$

para um dado índice A fixo. Todavia fizemos, adicionalmente, a simplificação de adotar a forma mais reduzida possível $X_A = \partial_A$ e $X_B = \partial_B$, para dois índices fixos A e B , quando a relação de comutação entre eles for nula, i.e., $[X_A, X_B] = 0$. O critério é o da tentativa, o qual, mostrando-se ineficiente, exige suposição mais geral. Essa condição, no entanto, tende a funcionar devido a um certo grau de liberdade nas equações que deixam certos parâmetros indeterminados, garantindo uma relativa liberdade de escolha. Quando não há comutadores nulos num determinado espaço, o critério não funciona e assumimos então apenas um único gerador nessa forma.

No seu trabalho [1] Bianchi chega às métricas através da resolução da equação de Killing na forma:

$$\xi_a^r \partial_r g_{ik} + g_{ir} \partial_k \xi_a^r + g_{rk} \partial_i \xi_a^r = 0 \quad (3.9)$$

O índice a não é usado por ele, subentendendo-se que se tratam de equações diversas, uma para cada gerador X_a . Além disso, sua notação é um pouco confusa, pois alterna de ξ_i para ξ e η , deixando a cargo do leitor o entendimento dessa ambigüidade. Aliado a esse fator, vem o da não distinção entre índices covariantes e contravariantes e a grande diferença de notação da época, o que torna a leitura bastante árdua.

3.3.2 Determinação da Base Invariante

Partindo da equação (2.156), uma vez obtidos os vetores de Killing, podemos achar os elementos da base invariante, tendo em conta as condições iniciais:

$$E_i(0) = \partial_i \quad (3.10)$$

Escrevendo-se

$$E_i = a_i^r \partial_r \quad (3.11)$$

e usando (3.4) verifica-se:

$$[\xi_i^r \partial_r, a_j^s \partial_s] = 0 \quad (3.12)$$

Logo

$$\xi_i^s (\partial_s a_j^r) - a_j^s (\partial_s \xi_i^r) = 0 \quad (3.13)$$

No caso dos geradores assumidos $X_A = \partial_A$, as equações simplificam-se:

$$(\partial_A a_j^r) = 0 \quad (3.14)$$

Resolvendo essas equações com as condições iniciais (3.10), determinam-se as funções $a_j^r(x^i)$ e, conseqüentemente, os elementos da base invariante.

3.3.3 Determinação das 1-Formas duais à Base Invariante

As 1-formas denotadas aqui por ω^i atuam sobre os elementos da base invariante de forma dual, ou seja.

$$\omega^i(E_j) = \delta^i_j \quad (3.15)$$

Se escrevermos

$$\omega^i = b^i_k dx^k \quad (3.16)$$

chega-se a

$$\omega^i(E_j) = b^i_k dx^k(a_j^r \partial_r) = b^i_k a_j^r \delta^k_r = \delta^i_j \quad (3.17)$$

ou

$$b^i_k a_j^k = \delta^i_j \quad (3.18)$$

Assim, ao se estabelecer os coeficientes b^i_k , que podem ser funções da posição, determinam-se as 1-formas duais.

3.4 Cálculos

Embora tenham sido feitos os cálculos para todos os tipos de espaços homogêneos do grupo G_3 , só exporemos aqui alguns casos, com a finalidade de ilustrar o método utilizado.

A partir da relação obtida pelo método de Behr, o primeiro passo consiste em relacionar cada um dos espaços homogêneos dessa tabela com a classificação efetuada por Bianchi em [1]. Algumas mudanças de base são eventualmente necessárias para levar a termo tal correspondência.

Em seguida, para conseguir a mesma forma adotada no outro trabalho de referência [3], também efetuamos ligeiras modificações, simples mudanças de base, quando necessário, como nos tipos BIV e $BVII(h)$ por exemplo.

A seguir encontram-se os cálculos explícitos para os espaços do tipo BII e $BVII(h)$.

3.4.1 BII

Vetores de Killing

A tabela de Behr fornece:

$$[X_1, X_2] = [X_1, X_3] = 0, \quad [X_2, X_3] = X_1 \quad (3.19)$$

De acordo com o que expusemos anteriormente, partimos da forma assumida para:

$$X_1 = \partial_1 \text{ e } X_2 = \partial_2 \quad (3.20)$$

que satisfazem imediatamente $[X_1, X_2] = 0$. Por outro lado:

$$[X_1, X_3] = 0 \Rightarrow [\partial_1, \xi_3^r \partial_r] = 0 \quad (3.21)$$

ou

$$\partial_1 \xi_3^r = 0 \quad (3.22)$$

Da relação $[X_2, X_3] = X_1$ tiramos:

$$[\partial_2, \xi_3^r \partial_r] = \partial_1 \quad (3.23)$$

ou

$$\partial_2 \xi_3^1 = 1, \quad \partial_2 \xi_3^2 = 0, \quad \partial_2 \xi_3^3 = 0 \quad (3.24)$$

Das equações (3.22) e (3.24) deduz-se que

$$\xi_3^1 = x^2 + \varphi(x^3) \quad (3.25)$$

e

$$\xi_3^2 = \xi_3^2(x^3), \quad \xi_3^3 = \xi_3^3(x^3) \quad (3.26)$$

onde φ , ξ_3^2 e ξ_3^3 são funções não-determinadas de x^3 .

Usando-se as condições iniciais (3.7), escreve-se:

$$X_3(0) = \partial_3 \Rightarrow \varphi(0) \partial_1 + \xi_3^2(0) \partial_2 + \xi_3^3(0) \partial_3 = \partial_3 \quad (3.27)$$

Verifica-se que a adoção

$$\varphi(x^3) = \xi_3^2(x^3) = \text{const} = 0, \quad \xi_3^3(x^3) = \text{const} = 1 \quad (3.28)$$

satisfaz as equações e portanto constitui um conjunto de soluções possíveis. Se reescrevermos os vetores de Killing com as formas determinadas acima, teremos:

$$X_1 = \partial_1, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = x^2 \partial_1 + \partial_3 \quad (3.29)$$

que é uma possível solução para os vetores de Killing, embora, evidentemente, não seja a única.

Base Invariante

Da relação

$$\mathcal{L}_{X_i} E_j = [X_i, E_j] = 0 \quad (3.30)$$

tira-se

$$[\partial_s, E_j] = 0, \quad (s = 1, 2) \quad (3.31)$$

e

$$[x^2 \partial_1 + \partial_3, a_j^r \partial_r] = 0 \quad (3.32)$$

o que fornece as equações:

$$\partial_1 a_j^r = 0, \quad \partial_2 a_j^r = 0 \Rightarrow a_j^r = a_j^r(x^3) \quad (3.33)$$

e

$$\partial_3 a_j^1 - a_j^2 = 0, \quad \partial_3 a_j^2 = 0, \quad \partial_3 a_j^3 = 0 \quad (3.34)$$

e daí,

$$a_j^2 = \text{const} = k_{j2}, \quad a_j^3 = \text{const} = k_{j3} \quad (3.35)$$

o que implica

$$\partial_3 a_j^1 = a_j^2 = \text{const} = k_{j2} \quad (3.36)$$

ou

$$a_j^1 = k_{j2} x^3 + c_j \quad (3.37)$$

Assim, os vetores da base invariante podem ser escritos:

$$E_i = k_{j2} (x^3 \partial_1 + \partial_2) + c_j \partial_1 + k_{j3} \partial_3 \quad (3.38)$$

Das condições iniciais $E_i(0) = \partial_i$ saem:

$$k_{12} = k_{13} = 0, \quad c_1 = 1 \quad (3.39)$$

$$k_{22} = 1, \quad k_{23} = c_2 = 0 \quad (3.40)$$

$$k_{32} = c_3 = 0, \quad k_{33} = 1 \quad (3.41)$$

Logo, os vetores da base invariante são:

$$E_1 = \partial_1, \quad E_2 = x^3 \partial_1 + \partial_2, \quad E_3 = \partial_3 \quad (3.42)$$

1-Formas Duais

Partindo da equação (3.16) os coeficientes das 1-formas devem obedecer a relação (3.18):

$$b^i_k a_j^k = \delta^i_j \quad (3.43)$$

onde as componentes dos vetores da base invariante são:

$$(a_1^k) = (1, 0, 0), \quad (a_2^k) = (x^3, 1, 0), \quad (a_3^k) = (0, 0, 1)$$

Assim,

$$b^i_k a_1^k = \delta^i_1 \Rightarrow \quad b^1_1 = 1, \quad b^2_1 = b^3_1 = 0,$$

$$b^i_k a_3^k = \delta^i_3 \Rightarrow \quad b^3_3 = 1, \quad b^1_3 = b^2_3 = 0,$$

e

$$b^i_k a_2^k = \delta^i_2 \Rightarrow \quad b^i_1 x^3 + b^i_2 = \delta^i_2 \quad (3.44)$$

ou

$$b^1_1 x^3 = -b^1_2, \quad b^3_1 x^3 = -b^3_2, \quad b^2_1 x^3 + b^2_2 = 1$$

Substituindo acima os valores encontrados para b^1_1 , b^2_1 e b^3_1 , determinam-se os restantes:

$$b^1_2 = -x^3, \quad b^3_2 = 0, \quad b^2_2 = 1 \quad (3.45)$$

Portanto as 1-formas duais à base invariante para o espaço do tipo BII são:

$$\omega^1 = dx^1 - x^3 dx^2, \quad \omega^2 = dx^2, \quad \omega^3 = dx^3 \quad (3.46)$$

3.4.2 BVII(h)

A tabela de Behr fornece:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= -hX_2 + X_3 \\ [X_1, X_3] &= -X_2 - hX_3 \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$[X_2, X_3] = 0$$

Vamos efetuar a seguinte mudança:

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow -X_1 \\ X_2 &\rightarrow -X_2 \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$X_3 \rightarrow X_3$$

o que nos permite reescrever a formulação equivalente:

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= hX_2 + X_3 \\ [X_1, X_3] &= -X_2 + hX_3 \\ [X_2, X_3] &= 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

Vetores de Killing

Assumindo-se

$$X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3 \quad (3.50)$$

as equações diferenciais obtidas das relações de comutação são as seguintes:

$$\partial_2 \xi_1^1 = 0, \quad \partial_2 \xi_1^2 = -h, \quad \partial_2 \xi_1^3 = -1 \quad (3.51)$$

$$\partial_3 \xi_1^1 = 0, \quad \partial_3 \xi_1^2 = 1, \quad \partial_3 \xi_1^3 = -h \quad (3.52)$$

Resolvendo-se essas equações chega-se a:

$$\begin{aligned} \xi_1^1 &= \xi_1^1(x^1) \\ \xi_1^2 &= -hx^2 + x^3 + \varphi_2(x^1) \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\xi_1^3 = -x^2 - hx^3 + \varphi_3(x^1)$$

Dadas as condições iniciais para X_i , elegem-se:

$$\xi_1^1(x^1) = \text{const} = 1, \quad \varphi_2(x^1) = \varphi_3(x^1) = \text{const} = 0 \quad (3.54)$$

o que conduz aos vetores de Killing:

$$X_1 = \partial_1 - (hx^2 - x^3) \partial_2 - (x^2 + hx^3) \partial_3, \quad X_2 = \partial_2, \quad X_3 = \partial_3 \quad (3.55)$$

Base Invariante

As relações $[X_i, E_j] = 0$ conduzem às seguintes equações diferenciais:

$$\partial_2 a_j^r = 0, \quad \partial_3 a_j^r = 0 \Rightarrow a_j^r = a_j^r(x^1) \quad (3.56)$$

e

$$\partial_1 a_j^1 = 0 \Rightarrow a_j^1 = \text{const} = c_j \quad (3.57)$$

fornecendo também:

$$\partial_1 a_j^2 + h a_j^2 - a_j^3 = 0, \quad \partial_1 a_j^3 + h a_j^3 + a_j^2 = 0 \quad (3.58)$$

que implicam

$$\begin{cases} \partial_1 (e^{hx} a_j^2) = e^{hx} a_j^3 \\ \partial_1 (e^{hx} a_j^3) = -e^{hx} a_j^2 \end{cases} \quad (3.59)$$

onde $a_j^2 = a_j^2(x)$. Chamando

$$e^{hx} a_j^2 = u_j(x). \quad (3.60)$$

podemos reescrever o sistema com uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2 u_j(x)}{dx^2} = -u_j(x) \quad (3.61)$$

que tem como resultado

$$u_j(x) = A_j \cos x + B_j \sin x \quad (3.62)$$

Daí,

$$\frac{du_j(x)}{dx} = e^{hx} a_j^3 \Rightarrow \begin{cases} a_j^2(x) = e^{-hx} (A_j \cos x + B_j \sin x) \\ a_j^3(x) = e^{-hx} (B_j \cos x - A_j \sin x) \end{cases} \quad (3.63)$$

Conseqüentemente, os vetores da base invariante serão da forma:

$$E_j = c_j \partial_1 + e^{-hx} (A_j \cos x + B_j \sin x) \partial_2 + e^{-hx} (B_j \cos x - A_j \sin x) \partial_3 \quad (3.64)$$

Finalmente, as condições iniciais para E_j fornecem:

$$c_1 = 1, \quad A_1 = B_1 = 0 \quad (3.65)$$

$$A_2 = 1, \quad c_2 = B_2 = 0 \quad (3.66)$$

$$B_3 = 1, \quad c_3 = A_3 = 0 \quad (3.67)$$

o que leva aos vetores:

$$\begin{aligned} E_1 &= \partial_1 \\ E_2 &= e^{-hx} (\cos x \partial_2 - \sin x \partial_3) \\ E_3 &= e^{-hx} (\sin x \partial_2 + \cos x \partial_3) \end{aligned} \quad (3.68)$$

1-Formas duais

Tendo-se determinado os a_i^j :

$$\begin{aligned} (a_1^k) &= (1, 0, 0) \\ (a_2^k) &= (0, e^{-hx} \cos x, -e^{-hx} \sin x) \\ (a_3^k) &= (0, e^{-hx} \sin x, e^{-hx} \cos x) \end{aligned} \quad (3.69)$$

e usando a relação

$$b^i_k a_j^k = \delta^i_j \quad (3.70)$$

obtem-se os b'^k :

$$\begin{aligned} (b_1^k) &= (1, 0, 0) \\ (b_2^k) &= (0, e^{hx} \cos x, -e^{hx} \sin x) \\ (b_3^k) &= (0, e^{hx} \sin x, e^{hx} \cos x) \end{aligned} \quad (3.71)$$

o que nos permite escrever as 1-formas buscadas:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dx^1 \\ \omega^2 &= e^{hx} (\cos x dx^2 - \sin x dx^3) \\ \omega^3 &= e^{hx} (\sin x dx^2 + \cos x dx^3) \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.4.3 Comentários sobre o cálculo de outros tipos

Tecemos agora breves comentários sobre peculiaridades dos outros tipos de espaços homogêneos:

BI

O tipo BI padrão é o de mais simples resolução, sendo equivalente ao espaço euclidiano.

BIII

O tipo *BIII* pode ser obtido como caso particular de *BVI*(h), com $h = 1$. Na parametrização original usada por Bianchi em seu trabalho, a equivalência deveria se dar com o tipo *BVI*(0), porém, devido a fatores de cálculo, o parâmetro h era limitado ao intervalo $(0, 1)$, e os valores extremos não eram considerados, daí a diferente classificação entre os dois tipos. Para efeitos práticos, porém, é válida a equivalência $BIII \equiv BVI(1)$.

BIV

A tabela de Behr fornece:

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] &= -X_2 + X_3 \\ [X_1, X_3] &= -X_3 \\ [X_2, X_3] &= 0\end{aligned}\tag{3.73}$$

Efetuamos a seguinte mudança:

$$\begin{aligned}X_1 &\rightarrow -X_1 \\ X_2 &\rightarrow X_2 \\ X_3 &\rightarrow -X_3\end{aligned}\tag{3.74}$$

o que permite reecrevar a formulação equivalente:

$$\begin{aligned}[X_1, X_2] &= X_2 + X_3 \\ [X_1, X_3] &= X_3 \\ [X_2, X_3] &= 0\end{aligned}\tag{3.75}$$

A partir daí, o restante dos cálculos para *BIV* segue o processo normal.

Para os outros tipos de espaços não efetuamos nenhuma mudança de base e os cálculos se resumem ao procedimento ilustrado acima, embora com dificuldade crescente nos tipos *BVIII* e *BIX*.

3.5 Tabela de Formas nos Espaços de Bianchi Padrão

Os resultados obtidos através do procedimento descrito na seção anterior aparecem listados a seguir. Respectivamente, as constantes de estrutura não-nulas C^i_{jk} , os vetores de Killing X_i , os da base invariante E_j e as 1-formas duais ω^1 :

BI :

$$C^i_{jk} = 0$$

$$X_1 = \partial_x \qquad E_1 = \partial_x \qquad \omega^1 = dx$$

$$X_2 = \partial_y \qquad E_2 = \partial_y \qquad \omega^2 = dy$$

$$X_3 = \partial_z \qquad E_3 = \partial_z \qquad \omega^3 = dz$$

BII :

$$C^1_{23} = 1 = -C^1_{23}$$

$$X_1 = \partial_x \qquad E_1 = \partial_x \qquad \omega^1 = dx - z dy$$

$$X_2 = \partial_y \qquad E_2 = z \partial_x + \partial_y \qquad \omega^2 = dy$$

$$X_3 = y \partial_x + \partial_z \qquad E_3 = \partial_z \qquad \omega^3 = dz$$

BIII :

$$C^2_{12} = -1 = -C^2_{21} \qquad C^3_{12} = -1 = -C^3_{21}$$

$$C^2_{13} = -1 = -C^2_{31} \qquad C^3_{13} = -1 = -C^3_{31}$$

$$X_1 = \partial_x + (y + z) \partial_y + (y + z) \partial_z$$

$$X_2 = \partial_y$$

$$X_3 = \partial_z$$

$$E_1 = \partial_x$$

$$\omega^1 = dx$$

$$E_2 = \partial_y$$

$$\omega^2 = dy$$

$$E_3 = e^{2x} \partial_z$$

$$\omega^3 = e^{-2x} dz$$

BIV :

$$C^2_{12} = -1 = -C^2_{21}$$

$$C^3_{13} = 1 = -C^3_{31}$$

$$C^3_{12} = 1 = -C^3_{21}$$

$$X_1 = \partial_x - y \partial_y - (y + z) \partial_z$$

$$X_2 = \partial_y$$

$$X_3 = \partial_z$$

$$E_1 = \partial_x$$

$$\omega^1 = dx$$

$$E_2 = e^{-x} (\partial_y - x \partial_z)$$

$$\omega^2 = e^x dy$$

$$E_3 = e^{-x} \partial_z$$

$$\omega^3 = e^x (x dy + dz)$$

$BV :$

$$C^2_{12} = 1 = -C^2_{21}$$

$$C^3_{13} = 1 = -C^3_{31}$$

$$X_1 = \partial_x + y \partial_y + z \partial_z$$

$$X_2 = \partial_y$$

$$X_3 = \partial_z$$

$$E_1 = \partial_x$$

$$\omega^1 = dx$$

$$E_2 = e^x \partial_y$$

$$\omega^2 = e^{-x} dy$$

$$E_3 = e^x \partial_z$$

$$\omega^3 = e^{-x} dz$$

$BVI(h) :$

$(0 \leq h \leq 1)$

$$C^2_{12} = -h = -C^2_{21}$$

$$C^3_{12} = -1 = -C^3_{21}$$

$$C^2_{13} = -1 = -C^2_{31}$$

$$C^3_{13} = -h = -C^3_{31}$$

$$X_1 = \partial_x + (hy + z) \partial_y + (y + hz) \partial_z$$

$$X_2 = \partial_y$$

$$X_3 = \partial_z$$

$$E_1 = \partial_x$$

$$\omega^1 = dx$$

$$E_2 = e^{(h-1)x} \partial_y$$

$$\omega^2 = e^{-(h-1)x} dy$$

$$E_3 = e^{(h+1)x} \partial_z$$

$$\omega^3 = e^{-(h+1)x} dz$$

BVII (h) :

($0 \leq h \leq 1$)

$$C_{12}^2 = h = -C_{21}^2$$

$$C_{12}^3 = 1 = -C_{21}^3$$

$$C_{13}^2 = -1 = -C_{31}^2$$

$$C_{13}^3 = h = -C_{31}^3$$

$$X_1 = \partial_x - (hy - z) \partial_y - (y + hz) \partial_z$$

$$X_2 = \partial_y$$

$$X_3 = \partial_z$$

$$E_1 = \partial_x$$

$$\omega^1 = dx$$

$$E_2 = e^{-hx} (\cos x \partial_y - \sin x \partial_z)$$

$$\omega^2 = e^{hx} (\cos x dy - \sin x dz)$$

$$E_3 = e^{-hx} (\sin x \partial_y + \cos x \partial_z)$$

$$\omega^3 = e^{hx} (\sin x dy + \cos x dz)$$

BVIII :

$$C_{23}^1 = 1 = -C_{32}^1$$

$$C_{31}^2 = 1 = -C_{13}^2$$

$$C_{12}^3 = -1 = -C_{21}^3$$

$$X_1 = \partial_x$$

$$X_2 = -\tanh y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \operatorname{sech} y \sin x \partial_z$$

$$X_3 = -\tanh y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \operatorname{sech} y \cos x \partial_z$$

$$E_1 = \operatorname{sech} y \cos z \partial_x - \sin z \partial_y - \tanh y \cos z \partial_z$$

$$E_2 = \operatorname{sech} y \sin z \partial_x + \cos z \partial_y - \tanh y \sin z \partial_z$$

$$E_3 = \partial_z$$

$$\omega^1 = \cosh y \cos z \, dx - \sin z \, dy$$

$$\omega^2 = \cosh y \sin z \, dx + \cos z \, dy$$

$$\omega^3 = \sinh y \, dx + dz$$

BIX :

$$C^1_{23} = 1 = -C^1_{32} \qquad C^2_{31} = 1 = -C^2_{13}$$

$$C^3_{12} = 1 = -C^3_{21}$$

$$X_1 = \partial_x$$

$$X_2 = \tan y \sin x \partial_x + \cos x \partial_y + \sec y \sin x \partial_z$$

$$X_3 = \tan y \cos x \partial_x - \sin x \partial_y + \sec y \cos x \partial_z$$

$$E_1 = \sec y \cos z \partial_x - \sin z \partial_y + \tan y \cos z \partial_z$$

$$E_2 = \sec y \sin z \partial_x + \cos z \partial_y + \tan y \sin z \partial_z$$

$$E_3 = \partial_z$$

$$\omega^1 = \cos y \cos z \, dx - \sin z \, dy$$

$$\omega^2 = \cos y \sin z \, dx + \cos z \, dy$$

$$\omega^3 = -\sin y \, dx + dz$$

Capítulo 4

GEOMETRIA DOS ESPAÇOS DE BIANCHI PADRÃO

4.1 Transição às Geometrias Não-euclidianas

Riemann mostrou que a geometria não-euclidiana resultante da hipótese de Saccheri para ângulos obtusos pode ser realizada numa superfície esférica S^2 , homeomorfa ao plano não-euclidiano daquela geometria. Já Beltrami demonstrou a equivalência entre a geometria de Lobatchewsky, correspondente à hipótese de Saccheri para ângulos agudos, e sua realização local sobre a pseudo-esfera, uma superfície de curvatura constante negativa.

Os resultados obtidos para o caso esférico, porém, são válidos, após uma mudança de variáveis conveniente, também para a geometria hiperbólica.

O elemento de linha sobre S^2 é dado, em coordenadas esféricas, por:

$$d\ell^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.1)$$

Se considerarmos o sistema de coordenadas geodésicas polares (ρ, ϕ) em S^2 , verifica-se que as curvas coordenadas sobre a esfera são dadas por $\rho(\theta)$ e $\alpha(\phi)$, sendo:

$$\begin{cases} d\rho = R d\theta \\ d\alpha = R \sin \theta d\phi \end{cases} \quad (4.2)$$

onde $\rho(\theta)$ é a distância percorrida sobre a superfície esférica, desde a origem, que pode ser tomada no polo norte esférico, por exemplo, até o ponto considerado, em $\theta(P)$, o que corresponde a um segmento geodésico sobre um meridiano, enquanto $\alpha(\phi)$ é a curva gerada sobre a esfera pela sua intersecção com um plano que passa pelo ângulo $\theta = \theta(P)$, desde $\phi = 0$ até $\phi = \phi(P)$, sendo P , o ponto considerado. A curva $\alpha(\phi)$ corresponde portanto ao trecho de um paralelo sobre S^2 . Nessas

condições é possível expressar o elemento de linha sobre a esfera como:

$$d\ell^2 = d\rho^2 + R^2 \sin^2 \left(\frac{\rho}{R} \right) d\phi^2 \quad (4.3)$$

Se reescrevermos a expressão acima em termos de sua curvatura gaussiana, obtemos:

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \frac{1}{K} \sin^2 \left(\sqrt{K} \rho \right) d\phi^2 \quad (4.4)$$

Como a curvatura de Gauss em superfícies de curvatura constante é descrita por $K = \pm 1/R^2$, se tomarmos a transformação $R \rightarrow iR$, teremos $K \rightarrow -K$, o que equivale a uma passagem de curvatura constante positiva a uma constante negativa, isto é, estaremos expressando a curvatura de uma pseudo-esfera. Logo, seu elemento de linha, tomado positivo, pode ser escrito a partir da transformação citada atuando nas equações (4.3) e (4.4):

$$d\ell^2 = d\rho^2 + R^2 \sinh^2 \left(\frac{\rho}{R} \right) d\phi^2 \quad (4.5)$$

ou, agora com $K < 0$:

$$d\ell^2 = d\rho^2 + \frac{1}{-K} \sinh^2 \left(\sqrt{-K} \rho \right) d\phi^2 \quad (4.6)$$

Logo, expressando as geometrias dos planos euclidiano, esférico e hiperbólico por suas métricas, obteremos respectivamente (cf.[4], p.4):

1. Plano Euclidiano:

$$d\ell_E^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 \quad (4.7)$$

2. Plano Esférico:

$$d\ell_S^2 = d\rho^2 + \left(a \sin \frac{\rho}{a} \right)^2 d\phi^2 \quad (4.8)$$

3. Plano Hiperbólico:

$$d\ell_H^2 = d\rho^2 + \left(b \sinh \frac{\rho}{b} \right)^2 d\phi^2 \quad (4.9)$$

onde a e b são parâmetros de escala.

Estabelecida essa equivalência de representações, vamos definir as três bidireções principais (definidas a partir dos pares dos vetores $\mathbf{E}_A$ da base invariante) de cada tipo de espaço homogêneo e calcular suas curvaturas, para expressá-las graficamente. Para construir os gráficos referentes às curvaturas das três bidireções principais de cada espaço, partiremos do conjunto de equações (12.79) de *Coxeter*[6]:

$$\tan a = \tan c \cos B \quad (4.10)$$

considerando 'c' como a hipotenusa de um triângulo esférico e 'a' um cateto, estando o ponto B localizado na origem de um sistema local de coordenadas. Analogamente, para o caso hiperbólico. Dessa forma, de acordo com a figura, que retrata um triângulo hiperbólico, 'a' e 'c' são identificados com ρ_o/a e ρ/a , respectivamente, sendo B , o ângulo $\Delta\phi$:

Então:

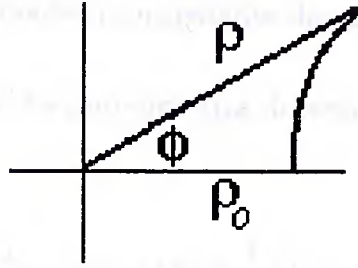
$$\tan(\rho/a) = \tan(\rho_o/a) \sec(\phi - \phi_o) \Rightarrow \quad (4.11)$$

$$\rho = a \arctan[\tan(\rho_o/a) \sec(\phi - \phi_o)] \quad (4.12)$$

[[4], eq.(3.2)] e, analogamente, para o caso hiperbólico, referente às equações (12.99) de *Coxeter* [6]):

$$\rho = b \operatorname{arctanh}[\tanh(\rho_o/b) \sec(\phi - \phi_o)] \quad (4.13)$$

[[4], eq.(3.1)].



4.2 Curvatura nos Espaços Padrão

4.2.1 Método de Cálculo

O método utilizado para o cálculo das curvaturas será o das Formas Diferenciais pelo formalismo de Cartan, conforme estabelecido na seção 2.1.

São duas as equações básicas usadas no processo de determinação das curvaturas principais, determinadas nas seções 2.1.9 e 2.1.11. respectivamente:

- $d\theta^A = -\omega_B^A \wedge \theta^B$ (1ª equação de estrutura de Cartan)

- $\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_C^A \wedge \omega_B^C$ (2ª equação de estrutura de Cartan)

Além dessas há uma terceira equação, estabelecida na sec. 2.1.11 [eq. (2.71)], que relaciona o tensor de curvatura de Riemann com a 2-forma Ω_B^A , ligando-se, portanto, à segunda equação de estrutura:

- $\Omega_B^A = \frac{1}{2} R_{BCD}^A \theta^C \wedge \theta^D$

A partir do tensor de curvatura de Riemann define-se a matriz de curvatura de Cartan pela fórmula:

- $K_{AB} = \frac{1}{4} \epsilon_A^{MN} \epsilon_B^{RS} R_{MNRS}$

Cabe ressaltar que os tensores de Riemann R_{ABCD} e R_{BCD}^A estão relacionados por:

$$R_{BCD}^A = \delta^{AE} R_{EBCD} \quad (4.14)$$

Devido a determinadas propriedades das grandezas acima. são possíveis algumas simplificações.

A primeira reside na anti-simetria do segundo par de índices do tensor de Riemann:

$$R_{BCD}^A = -R_{BDC}^A \Rightarrow \Omega_B^A = \frac{1}{2} (R_{BCD}^A - R_{BDC}^A) \theta^C \wedge \theta^D \Rightarrow \quad (4.15)$$

$$\Omega_B^A = \sum_{C < D} R_{BCD}^A \theta^C \wedge \theta^D \quad (4.16)$$

Pelo fato de estarmos trabalhando em três dimensões, uma vez eleito um elemento da matriz de curvatura de Cartan, ou seja, fixados dois índices A e B , só resta uma combinação possível para os índices dos símbolos alternantes ϵ_A^{MN} e ϵ_B^{RS} cujos resultados sejam não-nulos. Assim, basta considerarmos uma combinação cíclica dos

índices A, M, N e B, R, S , o que nos permite reescrever a equação sem a somatória e o fator de normalização. Vamos utilizar um símbolo, em substituição ao ϵ , que represente a permutação cíclica entre três índices A, B, C (os quais podem assumir os valores 1, 2 ou 3), pela notação $\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ ABC \end{smallmatrix} \rangle$ indicando que $\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ 123 \end{smallmatrix} \rangle = \langle \begin{smallmatrix} 123 \\ 231 \end{smallmatrix} \rangle = \langle \begin{smallmatrix} 123 \\ 312 \end{smallmatrix} \rangle = 1$, sendo nula qualquer outra combinação de A, B, C , ou seja:

$$\left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ ABC \end{smallmatrix} \right\rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } ABC \text{ for uma permutação cíclica de } 123 \\ 0, & \text{em outros casos} \end{cases}$$

Escrevemos então:

$$K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ AMN \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ BRS \end{smallmatrix} \right\rangle R_{MNR S} \quad (4.17)$$

Por exemplo,

$$K_{23} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ 2MN \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ 3RS \end{smallmatrix} \right\rangle R_{MNR S} = R_{3112} \quad (4.18)$$

Dessa maneira, não ocorre a repetição dos termos anti-simétricos, o que reduz o cálculo.

4.3 Cálculo das Curvaturas

Vamos calcular as curvaturas principais para as métricas denominadas *padrão* (*standard*) em [3], definidas em 3.1. Embora tenhamos efetuado os cálculos para todos os tipos G_3 , limitamo-nos aqui a mostrar apenas para $K-S$ e os tipos BI a BIV .

4.3.1 Kantowski-Sachs

Iniciando pela determinação das 1-formas:

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \\ \theta^2 = dy \\ \theta^3 = \sin y \, dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta^1 = 0 \\ d\theta^2 = 0 \\ d\theta^3 = \cos y \, dy \wedge dz \end{cases} \Rightarrow d\theta^3 = \theta^2 \cot y \wedge \theta^3$$

Usando a primeira equação de estrutura de Cartan:

$$\begin{cases} d\theta^1 = -\omega^1_2 \wedge \theta^2 - \omega^1_3 \wedge \theta^3 = 0 \\ d\theta^2 = -\omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_3 \wedge \theta^3 = 0 \\ d\theta^3 = -\omega^3_1 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2 = -\cot y \, \theta^3 \wedge \theta^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\omega^3_2 = \cot y \, \theta^3 = -\omega^2_3, \quad \omega^1_2 = 0 = -\omega^2_1, \quad \omega^1_3 = 0 = -\omega^3_1 \Rightarrow$$

$$d\omega^3_2 = d(\sin y \cot y \, dz) = d(\cos y \, dz) = -\sin y \, dy \wedge dz \Rightarrow$$

$$d\omega^3_2 = -\theta^2 \wedge \theta^3 = \theta^3 \wedge \theta^2 \quad (4.19)$$

Relacionando com a segunda equação de estrutura:

$$\omega^A_C \wedge \omega^C_B = 0 \quad \forall \omega^A_B \Rightarrow \Omega^A_B = d\omega^A_B \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Omega^2_3 &= d\omega^2_3 = \theta^2 \wedge \theta^3 = -\theta^3 \wedge \theta^2 = \frac{1}{2} (\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^3 \wedge \theta^2) = \\ &= \frac{1}{2} R^2_{323} \theta^2 \wedge \theta^3 + \frac{1}{2} R^2_{332} \theta^3 \wedge \theta^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R^2_{323} = -R^2_{332} = 1 \quad (4.20)$$

E, utilizando-se a expressão para a curvatura de Cartan, obtém-se:

$$K_{11} = R_{2323} = 1, \quad K_{22} = R_{3131} = 0, \quad K_{33} = R_{1212} = 0 \quad (4.21)$$

que são as curvaturas principais, identificadas por $K_i = K_{ii}$ (n.s.)

Portanto:

$$\boxed{K_1 = 1, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0} \quad (4.22)$$

4.3.2 Tipo BI

Os resultados para o espaço do tipo BI padrão são imediatos, visto que suas 1-formas implicam:

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \\ \theta^2 = dy \\ \theta^3 = dz \end{cases} \Rightarrow d\theta^1 = d\theta^2 = d\theta^3 = 0 \Rightarrow \begin{aligned} \omega^A_B = 0 & \Rightarrow d\omega^A_B = 0 \Rightarrow \Omega^A_B = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

o que significa que o tensor de Riemann é identicamente nulo e portanto todas as curvaturas são nulas, i.e..

$$\boxed{K_1 = K_2 = K_3 = 0} \quad (4.24)$$

Logo, o tipo BI corresponde ao espaço euclidiano comum.

4.3.3 Tipo BII

As 1-formas do espaço do tipo BII são:

$$\begin{cases} \theta^1 = dx - z dy \\ \theta^2 = dy \\ \theta^3 = dz \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta^1 = -dz \wedge dy \\ d\theta^2 = 0 \\ d\theta^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow d\theta^1 = -\theta^3 \wedge \theta^2 = \theta^2 \wedge \theta^3$$

Anti-simetrizando a equação acima, escrevemos:

$$d\theta^1 = \frac{1}{2} (\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^3 \wedge \theta^2) \quad (4.25)$$

Esse processo de anti-simetrização é fundamental para a identificação correta das formas ω^A_B .

A 1ª equação de estrutura fornece:

$$\begin{cases} d\theta^1 = -\omega^1_2 \wedge \theta^2 - \omega^1_3 \wedge \theta^3 = \frac{1}{2}(\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^3 \wedge \theta^2) \\ d\theta^2 = -\omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_3 \wedge \theta^3 = 0 \\ d\theta^3 = -\omega^3_1 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

da primeira equação temos

$$\omega^1_2 = \frac{1}{2}\theta^3 = -\omega^2_1, \quad \omega^1_3 = -\frac{1}{2}\theta^2 = -\omega^3_1 \quad (4.26)$$

e, das outras duas,

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\theta^3 \wedge \theta^1 - \omega^2_3 \wedge \theta^3 = 0 \\ -\frac{1}{2}\theta^2 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2_3 \wedge \theta^3 = -\frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ -\omega^3_2 \wedge \theta^2 = -\frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega^2_3 = -\frac{1}{2}\theta^1 = -\omega^3_2 \quad (4.27)$$

Assim:

$$\begin{cases} d\omega^1_2 = \frac{1}{2}d\theta^3 = 0, & d\omega^1_3 = -\frac{1}{2}d\theta^2 = 0, \\ d\omega^2_3 = -\frac{1}{2}d\theta^1 = -\frac{1}{4}(\theta^2 \wedge \theta^3 - \theta^3 \wedge \theta^2) \end{cases} \quad (4.28)$$

Então, a segunda equação de estrutura fornece:

$$\Omega^1_2 = \omega^1_C \wedge \omega^C_2, \quad \Omega^1_3 = \omega^1_C \wedge \omega^C_3, \quad \Omega^2_3 = d\omega^2_3 + \omega^2_C \wedge \omega^C_3 \quad (4.29)$$

ou:

$$\begin{cases} \Omega^1_2 = \omega^1_3 \wedge \omega^3_2 = -\frac{1}{2}\theta^2 \wedge \frac{1}{2}\theta^1 = \frac{1}{4}\theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega^1_3 = \omega^1_2 \wedge \omega^2_3 = -\frac{1}{2}\theta^3 \wedge \frac{1}{2}\theta^1 = \frac{1}{4}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^2_3 = d\omega^2_3 + \omega^2_1 \wedge \omega^1_3 = d\omega^2_3 + \frac{1}{2}\theta^3 \wedge \frac{1}{2}\theta^2 = -\frac{1}{2}\theta^2 \wedge \theta^3 - \frac{1}{4}\theta^2 \wedge \theta^3 = -\frac{3}{4}\theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases}$$

Relacionando o resultado acima com a equação

$$\Omega^A_B = \sum_{C < D} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (4.30)$$

obtem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^1_2 = R^1_{212} \theta^1 \wedge \theta^2 = \frac{1}{4} \theta^1 \wedge \theta^2 \\ \Omega^1_3 = R^1_{313} \theta^1 \wedge \theta^3 = \frac{1}{4} \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^2_3 = R^2_{323} \theta^2 \wedge \theta^3 = -\frac{3}{4} \theta^2 \wedge \theta^3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R^1_{212} = \frac{1}{4} \\ R^1_{313} = \frac{1}{4} \\ R^2_{323} = -\frac{3}{4} \end{array} \right. \quad (4.31)$$

Lembrando que

$$R_{ABCD} = \delta_{AE} R^E_{BCD} \Rightarrow R_{ABCD} = R^A_{BCD} \quad (4.32)$$

$$\text{e } R_{EBCD} = R_{BEDC} \quad (4.33)$$

temos, portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{1212} = \frac{1}{4} \\ R_{1313} = R_{3131} = \frac{1}{4} \\ R_{2323} = -\frac{3}{4} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Se usarmos, então, a expressão da curvatura de Cartan na forma

$$K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ AMN \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ BRS \end{smallmatrix} \right\rangle R_{MNRs}, \quad (4.35)$$

podemos identificar:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A12 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B12 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{1212} \Rightarrow K_{33} = R_{1212} = \frac{1}{4} \\ K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A31 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B31 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{3131} \Rightarrow K_{22} = R_{3131} = \frac{1}{4} \\ K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A23 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B23 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{2323} \Rightarrow K_{11} = R_{2323} = -\frac{3}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{11} = K_1 = -\frac{3}{4} \\ K_{22} = K_2 = \frac{1}{4} \\ K_{33} = K_3 = \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

ou, finalmente:

$$\boxed{K_1 = -\frac{3}{4}, \quad K_2 = \frac{1}{4}, \quad K_3 = \frac{1}{4}} \quad (4.36)$$

4.3.4 Tipo BIII

Conforme já mencionado na seção 3.4.3, os resultados referentes ao espaço do tipo *BIII* podem ser obtidos como um caso particular de *BVI* (h), com $h = 1$, i.e., $BIII \equiv BVI(1)$.

4.3.5 Tipo BIV

O cálculo das curvaturas principais do tipo BIV é um pouco mais complicado que os demais, conforme será visto a seguir, por isso foi deixado para o fim.

As 1-formas do espaço do tipo BIV são:

$$\begin{cases} \theta^1 = dx \\ \theta^2 = e^x dy \\ \theta^3 = e^x (dz + x dy) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\theta^1 = 0 \\ d\theta^2 = e^x dx \wedge dy = \theta^1 \wedge \theta^2 \\ d\theta^3 = e^x dx \wedge dz + e^x (x+1) dx \wedge dy \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\theta^3 = dx \wedge e^x dy + dx \wedge e^x (dz + x dy) = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^1 \wedge \theta^3 \quad (4.37)$$

Utilizando então a 1a. equação de estrutura:

$$\begin{cases} d\theta^1 = -\omega^1_2 \wedge \theta^2 - \omega^1_3 \wedge \theta^3 = 0 \\ d\theta^2 = -\omega^2_1 \wedge \theta^1 - \omega^2_3 \wedge \theta^3 = \theta^1 \wedge \theta^2 = -\theta^2 \wedge \theta^1 \\ d\theta^3 = -\omega^3_1 \wedge \theta^1 - \omega^3_2 \wedge \theta^2 = -\theta^3 \wedge \theta^1 + \theta^1 \wedge \theta^2 \end{cases} \quad (4.38)$$

Da primeira equação tiramos:

$$\omega^1_2 \wedge \theta^2 = -\omega^1_3 \wedge \theta^3 \quad (4.39)$$

e, utilizando esse resultado na segunda:

$$\theta^2 \wedge \theta^1 - \omega^2_1 \wedge \theta^1 = \omega^2_3 \wedge \theta^3 \Rightarrow \omega^2_3 \wedge \theta^3 = (\omega^1_2 + \theta^2) \wedge \theta^1 \quad (4.40)$$

Deve-se notar que não é possível identificar prontamente as formas ω^1_2 e ω^1_3 . logo, devemos supô-las da forma mais geral possível para o caso. o que exclui θ^1 , já que esta não aparece em nenhum dos lados da equação para ω^1_2 e ω^1_3 :

$$\begin{cases} \omega^1_2 = a\theta^2 + a'\theta^3 \\ \omega^1_3 = b\theta^2 + b'\theta^3 \end{cases} \Rightarrow (a\theta^2 + a'\theta^3) \wedge \theta^2 = -(b\theta^2 + b'\theta^3) \wedge \theta^3 \Rightarrow$$

$$a'\theta^3 \wedge \theta^2 = -b\theta^2 \wedge \theta^3 \Rightarrow a' = b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega^1_2 = a\theta^2 + b\theta^3 \\ \omega^1_3 = b\theta^2 + c\theta^3 \end{cases} \quad (4.41)$$

Por outro lado, usando essas equações no resultado em $\omega^2_3 \wedge \theta^3$:

$$\omega^2_3 \wedge \theta^3 = (\omega^1_2 + \theta^2) \wedge \theta^1 = (a\theta^2 + a'\theta^3 + \theta^2) \wedge \theta^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_3^2 \wedge \theta^3 = [(a+1)\theta^2 + b\theta^3] \wedge \theta^1 \quad (4.42)$$

Supondo, então,

$$\omega_3^2 = \lambda\theta^1 + \mu\theta^3 \quad (4.43)$$

temos

$$(\lambda\theta^1 + \mu\theta^3) \wedge \theta^3 = [(a+1)\theta^2 + b\theta^3] \wedge \theta^1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda\theta^1 \wedge \theta^3 = (a+1)\theta^2 \wedge \theta^1 - b\theta^1 \wedge \theta^3 \Rightarrow$$

$$\lambda = -b \quad \text{e} \quad a = -1 \quad (4.44)$$

Assim

$$\begin{cases} \omega_2^1 = -\theta^2 + b\theta^3 \\ \omega_3^2 = -b\theta^1 + \mu\theta^3 \end{cases} \quad (4.45)$$

Porém, de $d\theta^3$:

$$-\omega_1^3 \wedge \theta^1 - \omega_2^3 \wedge \theta^2 = -\theta^3 \wedge \theta^1 + \theta^1 \wedge \theta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (b\theta^2 + c\theta^3) \wedge \theta^1 + (-b\theta^1 + \mu\theta^3) \wedge \theta^2 = -\theta^3 \wedge \theta^1 + \theta^1 \wedge \theta^2 \Rightarrow$$

$$-2b\theta^1 \wedge \theta^2 - \mu\theta^2 \wedge \theta^3 - c\theta^1 \wedge \theta^3 = \theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^1 \wedge \theta^3 \Rightarrow$$

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}; \quad \mu = 0; \quad c = -1 \quad (4.46)$$

e, finalmente, podemos determinar as formas:

$$\begin{cases} \omega_2^1 = -\theta^2 - \frac{1}{2}\theta^3 \\ \omega_3^1 = -\frac{1}{2}\theta^2 - \theta^3 \\ \omega_3^2 = \frac{1}{2}\theta^1 \end{cases} \quad (4.47)$$

Calculando a seguir os produtos $\omega_C^A \wedge \omega_B^C$:

$$\begin{cases} \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = (-\frac{1}{2}\theta^2 - \theta^3) \wedge (-\frac{1}{2}\theta^1) = -\frac{1}{4}\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \omega_2^1 \wedge \omega_3^2 = -(\theta^2 + \frac{1}{2}\theta^3) \wedge \frac{1}{2}\theta^1 = \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{4}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \omega_1^2 \wedge \omega_3^1 = -(\theta^2 + \frac{1}{2}\theta^3) \wedge (\frac{1}{2}\theta^2 + \theta^3) = (-1 + \frac{1}{4})\theta^2 \wedge \theta^3 = -\frac{3}{4}\theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases}$$

As diferenciais das formas ω^A_B são:

$$\begin{aligned} d\omega^1_2 &= -d\theta^2 - \frac{1}{2}d\theta^3 = -\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}(\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^1 \wedge \theta^3) = -\frac{3}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\omega^1_3 &= -\frac{1}{2}d\theta^2 - d\theta^3 = -\frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 - (\theta^1 \wedge \theta^2 + \theta^1 \wedge \theta^3) = -\frac{3}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3 \\ d\omega^2_3 &= \frac{1}{2}d\theta^1 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, a segunda equação de estrutura fornece:

$$\Omega^1_2 = d\omega^1_2 + \omega^1_C \wedge \omega^C_2, \quad \Omega^1_3 = d\omega^1_3 + \omega^1_C \wedge \omega^C_3, \quad \Omega^2_3 = \omega^2_C \wedge \omega^C_3 \quad (4.48)$$

ou:

$$\begin{cases} \Omega^1_2 = d\omega^1_2 + \omega^1_3 \wedge \omega^3_2 = -\frac{3}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^3 - \frac{1}{4}\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^1_3 = d\omega^1_3 + \omega^1_2 \wedge \omega^2_3 = -\frac{3}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3 + \frac{1}{2}\theta^1 \wedge \theta^2 + \frac{1}{4}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^2_3 = \omega^2_1 \wedge \omega^1_3 = -\frac{3}{4}\theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Omega^1_2 = -\frac{7}{4}\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^1_3 = -\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{3}{4}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^2_3 = -\frac{3}{4}\theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases} \quad (4.49)$$

Relacionando portanto o resultado acima obtido com a equação

$$\Omega^A_B = \sum_{C < D} R^A_{BCD} \theta^C \wedge \theta^D \quad (4.50)$$

obtem-se:

$$\begin{cases} \Omega^1_2 = R^1_{212} \theta^1 \wedge \theta^2 + R^1_{213} \theta^1 \wedge \theta^3 = -\frac{7}{4}\theta^1 \wedge \theta^2 - \theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^1_3 = R^1_{312} \theta^1 \wedge \theta^2 + R^1_{313} \theta^1 \wedge \theta^3 = -\theta^1 \wedge \theta^2 - \frac{3}{4}\theta^1 \wedge \theta^3 \\ \Omega^2_3 = R^2_{323} \theta^2 \wedge \theta^3 = -\frac{3}{4}\theta^2 \wedge \theta^3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R^1_{212} = -\frac{7}{4}, & R^1_{213} = -1 \\ R^1_{312} = -1, & R^1_{313} = -\frac{3}{4} \\ R^2_{323} = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (4.51)$$

Lembrando que

$$R_{ABCD} = \delta_{AE} R^E_{BCD} \Rightarrow R_{ABCD} = R^A_{BCD} \quad (4.52)$$

$$\text{e } R_{EBCD} = R_{BEDC} \quad (4.53)$$

chegamos a:

$$\begin{cases} R_{1212} = -\frac{7}{4}, & R_{1231} = 1 \\ R_{3112} = 1, & R_{3131} = -\frac{3}{4} \\ R_{2323} = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (4.54)$$

Se usarmos, então, a expressão da curvatura de Cartan na forma

$$K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ AMN \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ BRS \end{smallmatrix} \right\rangle R_{MNRs}, \quad (4.55)$$

podemos identificar:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A12 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B12 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{1212} \Rightarrow K_{33} = R_{1212} = -\frac{7}{4} \\ K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A31 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B31 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{3131} \Rightarrow K_{22} = R_{3131} = -\frac{3}{4} \\ K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A23 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B23 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{2323} \Rightarrow K_{11} = R_{2323} = -\frac{3}{4} \\ K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A12 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B31 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{1231} \Rightarrow K_{32} = R_{1231} = 1 \\ K_{AB} = \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ A31 \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle \begin{smallmatrix} 123 \\ B12 \end{smallmatrix} \right\rangle R_{3112} \Rightarrow K_{23} = R_{3112} = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K_{11} = -\frac{3}{4} \\ K_{22} = -\frac{3}{4} \\ K_{33} = -\frac{7}{4} \\ K_{23} = K_{32} = 1 \end{array} \right.$$

Conseqüentemente, a matriz de curvatura de Cartan será:

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

Aqui, diferentemente dos resultados anteriores, a matriz de curvatura de Cartan obtida não está em forma diagonal, logo será preciso diagonalizá-la.

Então, lembrando que as curvaturas principais são os auto-valores de K (cf. Cartan [16]) , resolvemos a equação:

$$\det (K - \lambda I) = 0 \quad (4.57)$$

obtendo:

$$\begin{vmatrix} -\frac{3}{4} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} - \lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (4.58)$$

$$\left(-\frac{3}{4} - \lambda\right) \left[\left(-\frac{3}{4} - \lambda\right) \left(-\frac{7}{4} - \lambda\right) - 1 \right] = 0 \Rightarrow \quad (4.59)$$

$$\begin{cases} \frac{3}{4} + \lambda = 0 \\ \left(\frac{3}{4} + \lambda\right) \left(\frac{7}{4} + \lambda\right) - 1 = 0 \end{cases} \quad (4.60)$$

Da primeira equação tira-se um dos valores de λ :

$$\lambda_1 = -\frac{3}{4} \quad (4.61)$$

A segunda se torna:

$$16\lambda^2 + 40\lambda + 5 = 0 \quad (4.62)$$

de onde saem os outros dois valores para λ :

$$\lambda_{2,3} = \frac{-5 \pm 2\sqrt{5}}{4} \quad (4.63)$$

Assim, a matriz de Cartan diagonalizada assume a seguinte forma:

$$K = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5+2\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-5-2\sqrt{5}}{4} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

i.e., $K_{ii} = K_i$ implica, finalmente:

$$\boxed{K_1 = -\frac{3}{4}, \quad K_2 = \frac{-5+2\sqrt{5}}{4}, \quad K_3 = \frac{-5-2\sqrt{5}}{4}} \quad (4.65)$$

4.3.6 Comentários Adicionais

De maneira análoga à demonstrada, foram calculadas as curvaturas para todos os espaços G_3 homogêneos e os resultados assim obtidos estão expostos na próxima seção.

4.4 Tabela das Métricas e Curvaturas

Lista do espaços de Bianchi padrão e o de Kantowski-Sachs com suas respectivas métricas e curvaturas principais:

TIPO	MÉTRICA	K_1	K_2	K_3
KS	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2 y \end{pmatrix}$	1	0	0
BI	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	0	0
BII	$\begin{pmatrix} 1 & -z & 0 \\ -z & 1+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
BIII	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{4x} \end{pmatrix}$	0	-4	0
BIV	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1+x^2)e^{2x} & xe^{2x} \\ 0 & xe^{2x} & e^{2x} \end{pmatrix}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{-5+2\sqrt{5}}{4}$	$\frac{-5-2\sqrt{5}}{4}$

TIPO	MÉTRICA	K_1	K_2	K_3
BV	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$	-1	-1	-1
BVI(h) ($0 \leq h \leq 1$)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2(h-1)x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2(h+1)x} \end{pmatrix}$	$1 - h^2$	$-(1 + h)^2$	$-(1 - h)^2$
BVII(h) ($0 \leq h \leq 1$)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2hx} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2hx} \end{pmatrix}$	$-h^2$	$-h^2$	$-h^2$
BVIII	$\begin{pmatrix} \cosh 2y & 0 & \sinh y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh y & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
BIX	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin y & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

4.5 Tabela Gráfica das Curvaturas Principais

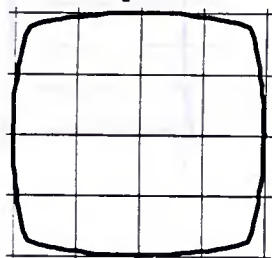
Para ilustrar essas curvaturas consideramos três superfícies geodésicas (que generalizam localmente o plano euclidiano para cada tipo KS ou Bianchi) correspondentes às três direções principais e, para cada uma dessas, fizemos um mapa geodésico de um quadrilátero regular usando a geometria correspondente à curvatura naquela superfície. As medidas de cada quadrilátero foram escolhidas de modo a manter as dimensões das figuras dentro de uma certa faixa de valores, a fim de as representarmos numa tabela.

Abaixo, as representações de quadriláteros geodésicos regulares em coordenadas geodésicas para cada seção principal dos modelos padrão estudados. O parâmetro d é a distância do centro a cada lado. O reticulado interno tem medida $d/2$.

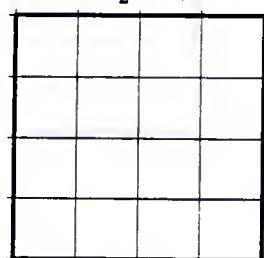
KS

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

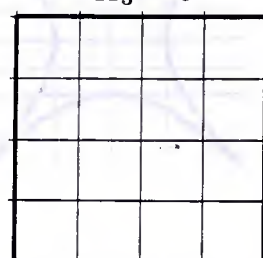
$$K_1 = 1$$



$$K_2 = 0$$



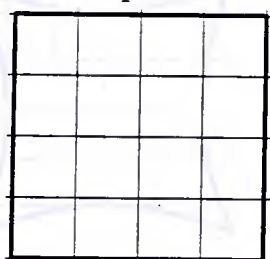
$$K_3 = 0$$



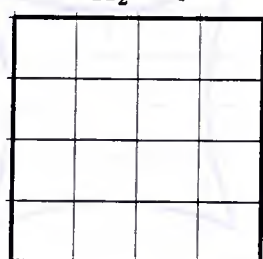
BI

$$d = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

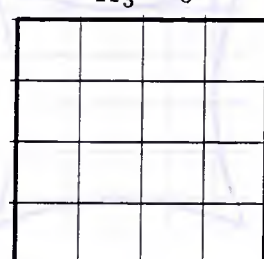
$$K_1 = 0$$



$$K_2 = 0$$



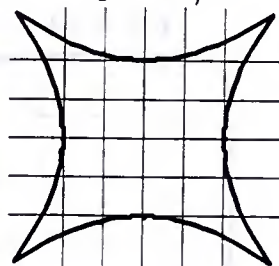
$$K_3 = 0$$



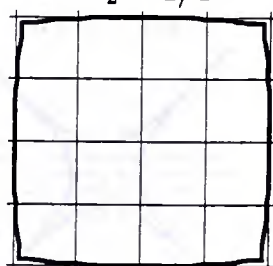
BII

$$d = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

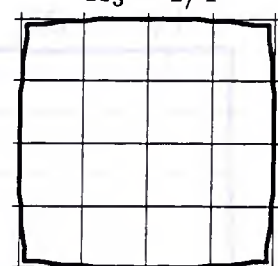
$$K_1 = -3/4$$



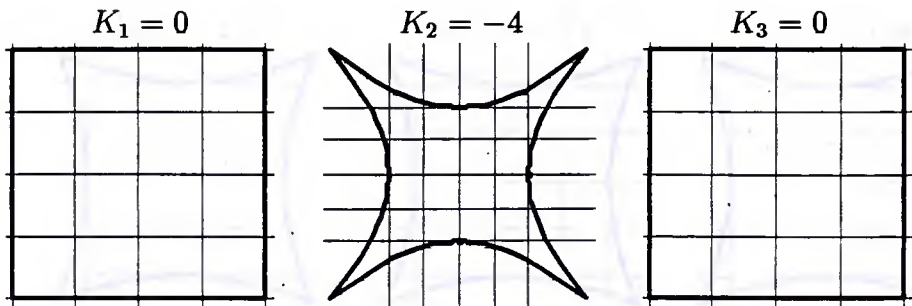
$$K_2 = 1/4$$



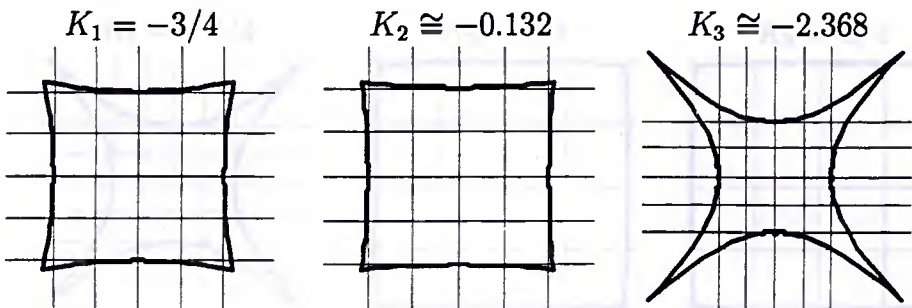
$$K_3 = 1/4$$



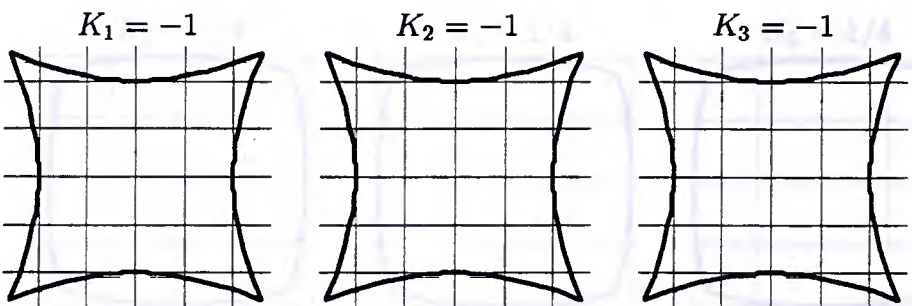
BIII
 $d = \frac{3\sqrt{2}}{10}$



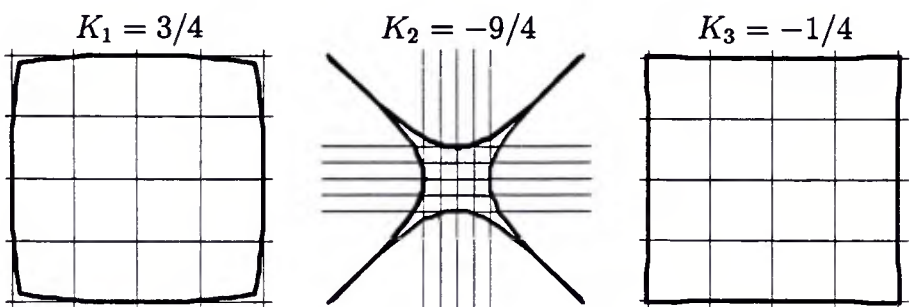
BIV
 $d = \frac{2\sqrt{2}}{5}$



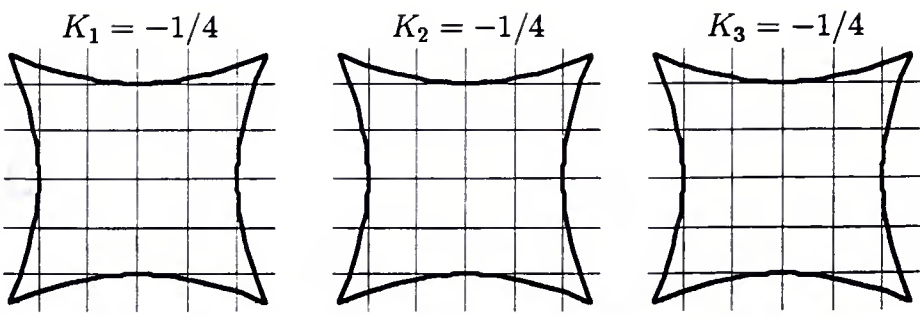
BV
 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$



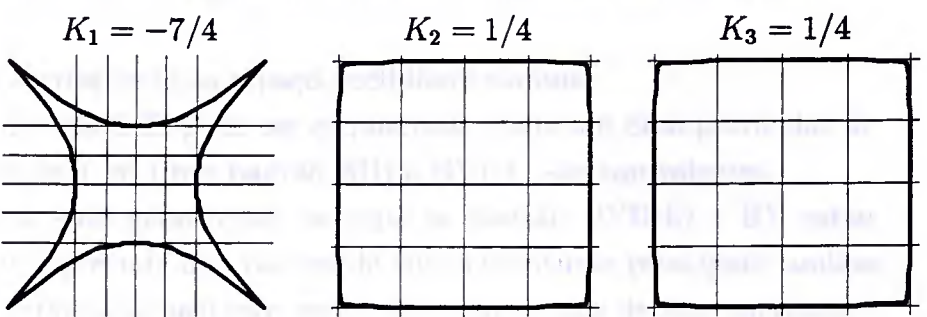
BVI($\frac{1}{2}$)
 $d = \frac{5\sqrt{2}}{12}$



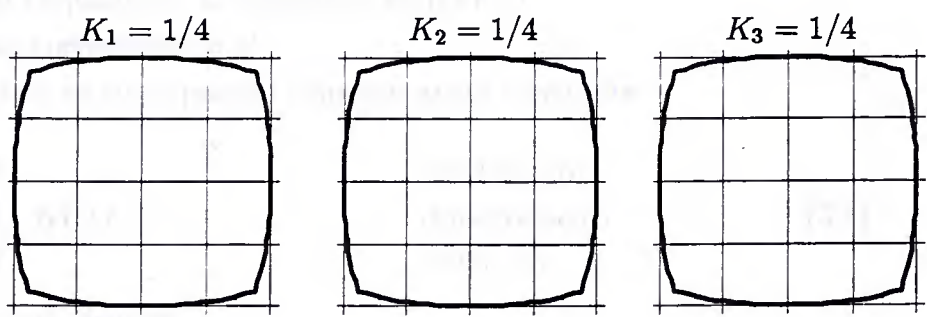
BVII($\frac{1}{2}$)
 $d = \sqrt{2}$



BVIII
 $d = \sqrt{\frac{3}{7}}$



BIX
 $d = \sqrt{2}$



Capítulo 5

CONCLUSÃO

Tivemos como objetivo analisar, em nível introdutório, as geometrias dos espaços homogêneos de três dimensões. Alguns resultados de interesse são comentados a seguir.

O tipo BI padrão corresponde ao espaço euclidiano comum.

O espaço padrão do tipo BIII pode ser enquadrado como um caso particular de BVI(h), com $h = 1$, ou seja, os tipos padrão BIII e BVI(1) são equivalentes.

No que se refere às suas geometrias, os espaços padrão BVII(h) e BV estão relacionados, o que se depreende dos valores de suas curvaturas principais; ambos são do tipo H^3 , com curvatura constante, sendo que, em termos de suas métricas e curvaturas principais, BV pode ser classificado como BVII(1).

Também o tipo BI enquadra-se na classificação BVII(0).

O tipo BIX padrão corresponde a S^3 .

Em suma, são quatro os tipos padrão com curvatura constante:

BI	(euclidiano)	
$BV, BVII(h)$	(hiperbólicos)	(5.1)
BIX	(esférico)	

e valem as seguintes equivalências:

$$\begin{aligned} BVI(1) &\equiv BIII \\ BVII(0) &\equiv BI \\ BVII(1) &\equiv BV \end{aligned} \tag{5.2}$$

No entanto, essas considerações só valem para os chamados espaços padrões, ou seja, o caso particular $\delta_{ab} \omega^a \omega^b$ da métrica geral $\gamma_{ab} \omega^a \omega^b$ (cf. Fagundes [3]). No caso geral existe apenas a equivalência $BIII \equiv BVI(1)$.

Referências

- [1] L. Bianchi, *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono un gruppo continuo di movimenti* em “Memorie di Matematica e di Fisica della Societa Italiana delle Scienze”, serie III, Tomo XI, 267-352, 1898.
- [2] L. Bianchi, *Lezioni sulla teoria dei gruppi continui finite di trasformazioni*, 198-199, 550-557, 1918 [Versão Inglesa de Robert T. Jantzen, 1999].
- [3] H. V. Fagundes, *Closed Spaces in Cosmology* em General Relativity and Gravitation, 24-2, 199-217 (Plenum Publishing Corporation, 1992).
- [4] H. V. Fagundes, *The Intuition of Curved Space* (IFT-P 12/80 1980).
- [5] M. P. Ryan Jr. and L. C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, 1975).
- [6] H. S. M. Coxeter, *Non-Euclidean Geometry* (The University of Toronto Press, 1957).
- [7] I. Damião Soares, *O Cálculo de Formas Diferenciais e a Equação de Dirac em Espaços-Curvos* na II Escola de Cosmologia e Gravitação do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (Editor: M. Novello. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas. 1980).
- [8] L. Landau e E. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, Londres, 1971).
- [9] M. A. H. Maccallum, *Anisotropic and Inhomogeneous Relativistic cosmologies* em General Relativity: An Einstein Centenary Survey (Ed: Hawking & Israel, Cambridge University Press, 1979).
- [10] E. Kreyszig, *Introduction to Differential Geometry and Riemannian Geometry* (University of Toronto Press, 1975).
- [11] L. P. Eisenhart, *Riemannian Geometry* (Princeton University Press, 1949).

- [12] W. R. Davis and G. H. Katzin, *Mechanical Conservation Laws and the Physical Properties of Groups of Motions in Flat and Curved Space-Times* em American Journal of Physics, Vol.30 ,1962.
- [13] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).
- [14] Carl B. Boyer, *História da Matemática* (Ed. Edgard Blücher Ltda - São Paulo, 1996).
- [15] L. Gaarding, *Encontro com a Matemática* (Editora Universidade de Brasília, 1997).
- [16] E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann* (Gauthier-Villars, Paris, 1951).
- [17] C. G. Behr, F. B. Estabrook and H. D. Wahlquist, *Dyadic Analysis of Spatially Homogeneous World Models* em Journal of Mathematical Physics, 9, 497 (AIP Publishing Services, 1968).
- [18] <<http://homepage.villanova.edu/robert.jantzen/bianchi>>
- [19] <<http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history>>
- [20] <<http://geometryalgorithms.com/history.htm>>

