

# Estudos de Acoplamento Spin-Órbita em Dinâmica do Sistema Solar

Luiz Augusto Guimarães Boldrin



LUIZ AUGUSTO GUIMARÃES BOLDRIN

# Estudos de Acoplamento Spin-Órbita em Dinâmica do Sistema Solar

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do  
Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual  
Paulista, como requisito parcial para a obtenção do  
título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter  
Co-orientador: Prof. Dr. Ernesto Viera Neto

Guaratinguetá

2015

B687e Boldrin, Luiz Augusto Guimarães  
Estudos de acoplamento spin-órbita em dinâmica do sistema solar /  
Luiz Augusto Guimarães Boldrin - Guaratinguetá : [s.n.], 2015  
90 f. : il.  
Bibliografia: f. 75-78

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de  
Engenharia de Guaratinguetá, 2015.

Orientador: Prof. Dr. Othon Cabo Winter

Coorientador: Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto

1. Satélites -- Orbitas 2. Movimento rotacional 3. Asteroides --  
Orbitas I. Título

CDU 629.783(043)

*LUIZ AUGUSTO GUIMARÃES BOLDRIN*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

**BANCA EXAMINADORA:**



**Prof. Dr. OTHON CABO WINTER**  
Orientador / UNESP/FEG



**Prof. Dr. RAFAEL SFAIR DE OLIVEIRA**  
UNESP/FEG



**Prof. Dr. TADASHI YOKOYAMA**  
UNESP/RIO CLARO



**Prof. Dr. NELSON CALLEGARI JUNIOR**  
UNESP/RIO CLARO



**Prof. Dr. RODENY DA SILVA GOMES**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOÍAS

Julho de 2015

# Dados Curriculares

LUIZ AUGUSTO GUIMARÃES BOLDRIN

NASCIMENTO 03.08.1984 - GUARULHOS / SP

FILIAÇÃO Luiz Cezar Soares Boldrin  
Neusa Maria Guimarães Boldrin

## FORMAÇÃO

2004 - 2009 Bacharelado em Física  
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá

2009 - 2011 Mestrado em Física  
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá

2011 - 2015 Doutorado em Física  
FEG/UNESP - Universidade Estadual Paulista, Campus de Guaratinguetá

*Dedico esse trabalho aos meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço a todos que estiveram comigo e fizeram parte desse grande período da minha vida. Em especial:

Ao meu orientador, Dr. Othon Cabo Winter, por todos esses anos de orientação.

Ao meu co-orientador, Dr. Ernesto Vieira Neto, que, além da co-orientação, desenvolveu a ferramenta computacional inicial na qual pude implementar os modelos utilizados neste trabalho.

Ao Dr. Daniel J. Scheeres, que me orientou durante meu período de estágio no exterior.

Ao Dr. Rodney Gomes, que vem colaborando conosco no estudo da origem da obliquidade de Urano.

Aos meus colegas de pós-graduação e à todos os professores do *Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia*.

Aos meus irmãos e meus pais, em destaque ao meu irmão Luis Cesar S. Boldrin Junior, que sempre me incentivou em momentos de desânimo.

À Fernanda Lopes Sá porque sem ela tudo seria muito mais difícil.

Aos meus amigos de banda que me proporcionaram “a cachaça” do final de semana.

Ao Marcelo Wendling por ter me ajudado nas figuras ilustrativas da tese.

Ao Dr. Helton Gaspar pela ajuda em todo o trabalho.

À Capes, pelo apoio financeiro que tornou possível a realização desse trabalho.

*Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes.*

*In a dark place we find ourselves, and a little  
more knowledge lights our way.  
(Mestre Yoda)*

BOLDRIN, L. A. G. **Estudos de Acoplamento Spin-Órbita em Dinâmica do Sistema Solar**. 2015. 111 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## Resumo

Realizamos dois diferentes estudos envolvendo o acoplamento spin-órbita. Um deles foi sobre a origem da obliquidade de Urano, que ainda permanece desconhecida. Algumas teorias de formação foram publicadas nas últimas décadas, sendo que as duas mais citadas: por meio de uma colisão (Urano sofreu uma grande colisão tangencial); e por meio de um efeito ressonante entre a rotação de Urano e um satélite. Focamos nosso estudo no modelo de ressonância. Baseado num artigo de Boué & Laskar (2010), no qual os autores estudam a origem da obliquidade de Urano por meio de uma ressonância que só ocorre na presença de um satélite de grande porte (Satélite X). Fizemos um estudo numérico do problema em questão. Utilizando órbitas já integradas do Modelo de Nice, estudamos a possibilidade de obter a atual obliquidade de Urano devido a perturbações dos planetas gigantes, Sol e o Satélite X. Nossos resultados mostram que o Satélite X ocasiona crescimento na obliquidade de Urano, podendo assim ser o responsável pela atual configuração do eixo de rotação de Urano, onde esse crescimento da obliquidade ocorre somente para determinadas configurações de semi-eixo maior e massa do Satélite X, sendo máximo quando o ângulo ressonante ( $\Omega - \phi$ ) (longitude do equador de Urano menos a longitude do nodo ascendente do Satélite X) é zero e mínima quando é 180 graus. Porém, assim como no estudo anterior, só foi possível reproduzir a atual obliquidade de Urano com Satélite X com massas excessivamente grandes, da ordem de 0,01 da massa de Urano. As simulações mostraram também que o Satélite X causa instabilidade no sistema de satélites internos desestabilizando-os a ponto de extingui-los. Outro estudo realizado foi sobre a origem de sistemas binários de asteroides por meio de ruptura rotacional. O processo de fissão rotacional de asteroides foi estudado teoricamente por Scheeres (2007) e numericamente Jacobson & Scheeres (2011) com modelos simplificados restritos ao movimento planar. No entanto, a configuração física observada em binários de contato nos leva a concluir que a maioria deles não estão em uma configuração planar e, portanto, não seriam restritos ao movimento planar, uma vez que sofreram fissão rotacional. Isso motivou um estudo mais geral não planar sobre a evolução do fenômeno de criação de binários por fissão. Usando um modelo de dois elipsoides, fizemos simulações levando em conta as interações gravitacionais desse sistema após o rompimento, sem qualquer tipo de mecanismo de dissipação de energia. Simulamos 90 diferentes inclinações iniciais do equador  $\theta_0$  (obliquidade) do corpo secundário para 14 diferentes razões de massa ( $q$ ). Após o rompimento, os sistemas binários começam com uma dinâmica caótica instáveis, como é previsto a partir da teoria. Iniciando o sistema numa configuração não plana, muda a configuração dinâmica do sistema, inicializando-o com maior energia, permitindo ocorrer fenômenos não encontrados no caso planar, como por exemplo o re-impacto. Isso levou a diferenças em relação ao

estudo anterior planar, com colisões e ruptura secundária ocorrendo para todos os razões de massa escolhidas. Colisões ocorrem somente em casos com  $\theta_0 > 40^\circ$ , assemelhando-se com o mecanismo Lidov-Kozai. Foram estudados 1260 casos, dos quais  $\approx 16\%$  resultam em ruptura secundária e  $\approx 22\%$  resultam em colisões. Em Jacobson & Scheeres (2011), binários estáveis via ruptura secundária são formados unicamente nos casos com  $q < 0,20$ . Os nossos resultados mostram que é possível obter um binário estável via ruptura rotacional para casos de  $q > 0,20$ , porém o sistema tem de começar com uma configuração não planar.

**Palavras-chave:** Urano, obliquidade, satélites, asteroides binários, ruptura rotacional.

BOLDRIN, L. A. G. **Spin-orbit coupling studies in the Solar System Dynamics.** 2015. 111 f. Tese (Doutorado em Física) - Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2015.

## Abstract

We conducted two different studies about the spin-orbit coupling. One of them was about the origin of Uranus obliquity, that still remains unknown. Some theories of formations have been published in the last decades, the two most cited is: by collision (Uranus suffered a great tangential collision) and by a resonance between Uranus rotation and a satellite. We focused our study on the resonance model. Based on article of Boué & Laskar (2010), in which the authors study the origin of Uranus obliquity by a resonance that occurs only in the presence of a large satellite (Satellite X). We did a numerical study of this problem. Using orbits previously integrated by Nice Model, we studied the possibility of obtaining the current Uranus obliquity due to disturbances of the giant planets, the Sun and the Satellite X. Our results show that the Satellite X causes growth in Uranus obliquity and so may be the responsible for the current configuration of the Uranus rotation axis. And this growth of obliquity occurs only for certain configurations of semi-major axis and mass of the Satellite X, and maximum when the resonant angle ( $\Omega - \phi$ ) (Uranus's equator longitude less the longitude of the ascending node of the Satellite X) is zero and minimal when it is 180 degrees. However, as in the previous study, it was only possible to reproduce the current Uranus obliquity with Satellite X with excessively large masses, about 0.01 mass of Uranus. The simulations also showed that Satellite X causes instability in the satellite with internal orbits until extinguishing them. Another study was about the origin of binary asteroid systems through rotational fission. The process of rotational fission of asteroids has been studied theoretically Scheeres (2007) and numerically Jacobson & Scheeres (2011) with simplified models restricted to planar motion. However, the observed physical configuration of contact binaries leads one to conclude that most of them are not in a planar configuration and hence would not be restricted to planar motion once they undergo rotational fission. This motivated a more general non-planar study about the evolution of binaries created by fission phenomenon. Using a two-ellipsoid model, we made simulations taking into account gravitational interactions of this system after the disruption without any kind of energy dissipation mechanism. We simulated 90 different initial inclinations of the equator (obliquity)  $\theta_0$  of the secondary body for 14 different mass ratios ( $q$ ). After the disruption, the binary systems start with a unstable chaotic dynamics, as is predicted from theory. Starting the system in a non-planar configuration change the dynamic configuration of the system, initializing it with greater energy, allowing occur phenomena not found in the planar case, for example re-impact. This led to differences from the previous planar study, with collisions and secondary spin fission occurring for all mass ratios chosen. Collisions occur only in cases with  $\theta_0 \geq 40^\circ$ , and resemble the Lidov-Kozai mechanism. Out of 1260 studied cases, we found  $\approx 16\%$  result in secondary disruption and  $\approx 22\%$  result in collisions. In Jacobson & Scheeres

(2011) stable binaries only formed in cases with  $q < 0.20$ . Our results show that it is possible obtain a stable binary with the same mechanisms for cases of  $q > 0.20$ , but the system has to start in a non-planar configuration.

**Keywords:** Uranus, obliquity, satellites, binary asteroid, rotational fission .

# Lista de Figuras

2.1	Foto Itokawa . . . . .	22
2.2	Figura ilustrativa do cenário de fissão . . . . .	22
2.3	A energia total e o módulo do momento angular total em função de $\theta_0$ . . . . .	23
2.4	Figura ilustrativa do modelo completo de dois corpos . . . . .	25
2.5	Geometria das condições iniciais. . . . .	28
2.6	Exemplo da dinâmica complexa do sistema. . . . .	29
2.7	Comportamento da velocidade angular em encontros próximos. . . . .	30
2.8	Comportamento caótico do sistema. . . . .	31
2.9	Estados finais e extremos $q = 0,01$ . . . . .	34
2.10	Estados finais e extremos $q = 0,15$ . . . . .	35
2.11	Estados finais e extremos $q = 0,25$ . . . . .	36
2.12	Gráficos de $\langle t_v \rangle$ em função de $q$ . . . . .	37
2.13	Gráficos de $\langle T_{min} \rangle$ e $\langle V_\infty \rangle$ em função de $q$ . . . . .	38
2.14	Gráficos de $I_f$ , $T_{min}$ e $t_v$ em função de $q$ para $\theta_0 = 0,0001, 30, 60$ e $90$ graus. . . . .	39
3.1	Figura dos resultados de Boué & Laskar (2010) . . . . .	42
3.2	Figura ilustrativa do modelo de N-corpos . . . . .	45
3.3	Evolução temporal da inclinação orbital durante o tombo forçado . . . . .	48
3.4	Gráfico de $r_e \times t_T$ . . . . .	49
3.5	Movimento de rotação de Urano: Integração direta com todos os corpos . . . . .	51
3.6	Movimento de rotação de Urano: Integração direta sem os planetas . . . . .	51
3.7	Movimento de rotação de Urano: Integração direta sem o Satélite X . . . . .	52
3.8	Evolução orbital dos planetas via Modelo de Nice . . . . .	55
3.9	Evolução orbital do Satélite X. Semi-eixo maior inicial igual à $30R_U$ . . . . .	56
3.10	Evolução orbital do Satélite X. Semi-eixo maior inicial igual à $40R_U$ . . . . .	57
3.11	Evolução orbital do Satélite X. Semi-eixo maior inicial igual à $50R_U$ . . . . .	58
3.12	Evolução orbital do Satélite X. Semi-eixo maior inicial igual à $60R_U$ . . . . .	59
3.13	Evolução temporal de $(\Omega - \phi)$ e $\theta$ de Urano: Caso $a_1, M_4$ . . . . .	59
3.14	Evolução temporal de $(\Omega - \phi)$ e $\theta$ de Urano: Caso $a_2, M_4$ . . . . .	60
3.15	Evolução temporal de $(\Omega - \phi)$ e $\theta$ de Urano: Caso $a_4, M_1$ . . . . .	61
3.16	Evolução orbital do Satélite X. Estudo longitude média. Caso: $a_4, m_1$ . . . . .	63
3.17	Evolução orbital do Satélite X. Estudo longitude média. Caso: $a_4, m_2$ . . . . .	64
3.18	Evolução orbital do Satélite X. Estudo longitude média. Caso: $a_4, m_3$ . . . . .	65
3.19	Evolução orbital do Satélite X. Estudo longitude média. Caso: $a_4, m_4$ . . . . .	66
3.20	Evolução temporal de $(\Omega - \phi)$ e $\theta$ de Urano: Caso $a_4, M_2$ e $\lambda = 180^\circ$ . . . . .	66
3.21	Evolução orbital de Oberon. Casos que os satélites sobrevivem. . . . .	68

3.22	Evolução orbital do Satélite X para os casos com e sem Oberon. . . . .	69
3.23	Evolução orbital dos Satélites X e dos 5 satélites naturais . . . . .	70
3.24	Evolução do sistema durante encontros próximos com Júpiter . . . . .	72
A.1	Figura ilustrativa para o desenvolvimento das equações de movimento 1 . . .	81
A.2	Figura ilustrativa para o desenvolvimento das equações de movimento 2 . . .	84

# Lista de Tabelas

2.1	Tabela com as porcentagem de colisão e ruptura secundária para cada $q$ . . .	37
3.1	Condições iniciais de Urano. . . . .	47
3.2	Condições iniciais: estudo integração direta . . . . .	50
3.3	Condições iniciais dos satélites naturais . . . . .	67
3.4	Condições iniciais dos Satélites X . . . . .	70

# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>14</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>15</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>18</b>
<b>2 Formação de asteroides duplos por meio de ruptura rotacional</b>	<b>20</b>
2.1 Introdução . . . . .	20
2.1.1 Cenário de fissão . . . . .	21
2.2 Modelo Utilizado . . . . .	23
2.2.1 Problema completo de dois corpos . . . . .	23
2.2.2 Condições iniciais . . . . .	27
2.2.3 Conservação da energia e do momento angular . . . . .	28
2.3 Resultados . . . . .	28
2.3.1 Evolução temporal . . . . .	28
2.3.2 Estados finais e extremos . . . . .	32
2.4 Conclusões . . . . .	40
<b>3 Origem da obliquidade de Urano</b>	<b>41</b>
3.1 Introdução . . . . .	41
3.1.1 Modelo de Nice . . . . .	43
3.2 Modelos Utilizados . . . . .	43
3.2.1 Problema de N-Corpos com o corpo central elipsoidal . . . . .	44
3.2.2 Modelo de tombo forçado . . . . .	45
3.3 Resultados . . . . .	47
3.3.1 Estudo preliminar . . . . .	47
3.3.2 Variação da obliquidade via ressonância com Satélite X . . . . .	50
Integração simples . . . . .	50
Via Modelo de Nice . . . . .	53
a- Dependência da massa e semi-eixo maior inicial do Satélite X: . . . . .	53
b- Sensibilidade da longitude média inicial do Satélite X: . . . . .	62
c- Satélite X mais Oberon: . . . . .	67
d- Satélites naturais e alguns Satélites X: . . . . .	70
e-Efeito de encontros próximos com Júpiter: . . . . .	71
3.4 Conclusões . . . . .	73

<b>Apêndice</b>	<b>79</b>
<b>A Desenvolvimento das Equações de Movimento</b>	<b>80</b>
A.1 Problema completo de dois corpos . . . . .	80
A.2 Problema de N-Corpos com o corpo central elipsoidal . . . . .	84
A.3 Movimento rotacional: Torque devido à n-corpos . . . . .	86
<b>B Momento angular e energia total</b>	<b>89</b>
B.1 Energia . . . . .	89
B.2 Momento angular . . . . .	90

# Capítulo 1

## Introdução

O movimento rotacional<sup>1</sup> do corpo central acoplado com o movimento orbital dos corpos orbitantes durante muito tempo não foi foco de estudos devido sua tamanha complexidade. As primeiras tentativas para descrever sistemas dessa forma foram feitas por Brouwer (1959) e Kozai (1960). Um trabalho de destaque foi realizado por Goldreich (1965) ao estudar o movimento orbital dos satélites de Marte. Nesse estudo, foi levado em conta a evolução orbital dos satélites Phobos e Deimos em torno de Marte com movimento de precessão. Grandes trabalhos envolvendo o estudo sobre o movimento rotacional dos corpos do Sistema Solar foram publicados nas últimas décadas. Entre eles, destacam-se o trabalho realizado por Laskar et al. (1993), que mostra efeito estabilizante que a Lua tem no movimento de nutação (analisado através da variação da obliquidade<sup>2</sup>) da Terra de modo a proporcionar pequenas variações da temperatura terrestre e, conseqüentemente, condições para o desenvolvimento de vida humana no planeta e o trabalho de Lissauer et al. (2012) que posteriormente contestou os resultados de Laskar et al. (1993) mostrando que a não necessidade da Lua para a baixa amplitude no movimento de nutação da Terra. Outro trabalho famoso foi desenvolvido por Wisdom et al. (1984), no qual é mostrado o comportamento caótico no movimento de atitude de Hyperion. Porém, esse e outros trabalhos foram sempre modelados de forma aproximada e sem levar em conta a perturbação mútua entre o satélite e o bojo do corpo central. Essa perturbação mútua para sistemas com pequenas razões de massa tem que ser levada em consideração. Explicando o acoplamento spin-órbita de uma forma mais minuciosa,

---

<sup>1</sup>definindo movimento rotacional (ou somente movimento de rotação) como sendo o movimento completo de um corpo rígido, composto pela rotação (spin), nutação e precessão. Frequentemente chamado de movimento de atitude do corpo.

<sup>2</sup>a obliquidade é definida como sendo o ângulo entre plano de equador e o plano da órbita do corpo, onde o plano de equador é definido como o plano perpendicular ao eixo de rotação. Porém, neste trabalho trataremos a obliquidade como sendo o ângulo entre o plano do equador do corpo e o plano de referência inercial, onde o equador é o plano  $xy$  do sistema dos eixos principais de inércia. Em alguns momentos chamaremos a obliquidade também de inclinação do equador.

considerando em princípio somente dois corpos (um central e outro satélite), esse problema trata a dinâmica orbital do satélite perturbado pelo corpo central não esférico com movimento rotacional, juntamente com a dinâmica rotacional desse corpo central. Assim, esses dois movimentos funcionam de forma acoplada havendo interação mútua entre eles, conservando a energia e o momento angular total do sistema. No entanto, obter soluções analíticas para esses problemas mais realísticos não é trivial. Entretanto, com o avanço tecnológico, criaram-se ferramentas computacionais que possibilitam estudos numérico desses problemas de maior complexidade. Mais recentemente, um modelo desse problema, somente integrado numericamente, foi desenvolvido por Boué & Laskar (2006) no qual possibilitou os autores a publicação de um estudo sobre a origem da obliquidade de Urano perturbado por um satélite de grande porte (Boué & Laskar 2010).

Com o intuito de dar continuidade aos nossos estudos sobre o sistema triplo de asteroide 87 Sylvia (Winter et al. 2009), desenvolvemos uma ferramenta computacional para estudar sistemas de N-corpos orbitando um corpo de forma elipsoidal com movimento de atitude perturbado por esses N-corpos. Esse programa foi utilizado para estudar o movimento orbital de satélites de sistemas triplos de asteroides acoplado com o movimento rotacional do corpo central. Os sistemas triplos estudados foram o 87 Sylvia e o 45 Eugenia (Boldrin 2011).

Apresentaremos nesta tese dois trabalhos que são continuidade de nossos estudos envolvendo acoplamento spin-órbita em problemas de dinâmica do Sistema Solar. Um trabalho é sobre a origem da obliquidade de Urano e outro sobre a formação de asteroides duplos por meio de ruptura rotacional.

## Capítulo 2

# Formação de asteroides duplos por meio de ruptura rotacional

### 2.1 Introdução

O estudo de asteroides múltiplos é uma grande chave para o conhecimento do passado do Sistema Solar, uma vez os mesmos são remanescentes da formação planetária. Desde a descoberta do primeiro sistema binário Dactyl e (243) Ida (Chapman et al. 1995), muitos estudos têm sido feitos para entender a dinâmica e origem de tais sistemas múltiplos. Analisando a estrutura de asteroides tipo *rubble pile* (tipo de asteroide formado por uma coleção de pedras de diferentes tamanhos fracamente ligadas por força gravitacional), foi proposto um modelo de criação por meio de quebra por aumento da taxa de rotação do asteroide, ou seja, o asteroide do tipo *rubble pile* se quebra em casos que a força centrífuga se torna maior que a força de contato entre os corpos. Esse fenômeno de quebra nós chamamos de ruptura rotacional. Um modo de ocorrer esse aumento é quando o corpo possui encontros próximos com os planetas. No entanto, encontros próximos com os planetas provaram não ser suficiente para a criação da população atual de sistemas binários (Margot et al. 2002, Walsh & Richardson 2008). Outro modo é o aumento da velocidade de rotação devido a reemissão do calor absorvido pela incidência da luz solar, conhecido como o efeito YORP (Yarkovsky-O'Keefe Radzievskii-Paddack). Alguns trabalhos têm sido feitos a fim de estudar o efeito YORP em asteroide tipo *rubble pile* (Merline et al. 2002, Scheeres 2002, Bottke et al. 2002, Walsh & Richardson 2006). Usando um modelo com um elipsoide e uma esfera, em um caso planar, Scheeres (2007) estudou limites de fissão (limite de rotação para ocorrer fissão) e a estabilidade deste tipo de sistema para diferentes condições iniciais. Depois disso, o mesmo autor estudou estabilidade do binário formado por fissão usando um modelo planar de dois elipsoides (Scheeres 2009). Caso planar é quando os corpos possuem inclinação orbital

igual a zero e os bojos, eixos de maior dimensão do elipsoide, coincidem com o plano orbital. Pravec et al. (2010) fez um estudo bastante completo sobre a formação de pares de asteroides através da fissão por rotação. Jacobson & Scheeres (2011) estudaram criação de binários por fissão rotacional analisando a formação de vários tipos de sistemas NEA (*Near Earth Asteroid*: asteroides com órbitas próximas da Terra, com semi-eixos maiores menores que 1,3UA) incluindo: binários duplamente síncronos, binários de alta excentricidade, sistemas triplos e binários de contato. Os autores estudaram a dinâmica logo após a quebra. Usando um modelo de dois elipsoides, levando em conta interação gravitacional (incluindo o Sol) e dissipação por marés, eles analisaram a dinâmica de criação de binários estáveis, para o caso planar, para diferentes razões de massa do sistema. Observando esses trabalhos anteriores e percebendo que em todos os casos só foram levados em conta casos planares, nós decidimos fazer um trabalho semelhante ao Jacobson & Scheeres (2011) em configurações mais naturalmente prováveis, ou seja, em casos não-planares levando em conta o movimento de rotação de cada corpo e comparar com os resultados obtidos por Jacobson & Scheeres (2011).

Após o rompimento, o sistema binário se inicia com dinâmica (rotacional e orbital) instável (Scheeres 2009). Para estabilizar o sistema, é necessário que a energia diminua. Assim, se a velocidade de rotação de um dos membros do binário aumentar por interações dinâmicas (acoplamento spin órbita) e a velocidade de rotação se tornar maior do que o velocidade de rotação limite (ou menor que o período de spin limite, que chamamos de período de ruptura  $T_r$ ), uma segunda fissão (fissão secundária) pode ocorrer. O sistema triplo criado após a segunda fissão também é instável, mas o escape de um dos membros altera a energia do sistema e pode estabilizar o sistema binário. Obviamente, as colisões também podem diminuir a energia. Assim, o objetivo principal deste presente trabalho é estudar a criação de um binário via fissão secundária e re-impacto, analisando a percentagem que ocorre cada caso.

O modelo matemático utilizado para a realização desse estudo será apresentado na seção 2.1 e os resultados na seção 3.1.

### 2.1.1 Cenário de fissão

Asteroides do tipo *Rubble pile* são constituídos por um aglomerado de pedras com tamanhos diferentes que se uniram sob a influência da gravidade. Um binário de contato é composto por dois corpos principais encostado um sobre o outro. Um asteroide pode ser tanto uma pilha de escombros, tanto um binário de contato. Um excelente exemplo de asteroide de contato é o asteroide 25143 Itokawa (figura 2.1).

A velocidade de rotação de um asteroide pode ser aumentada pelo efeito YORP até atingir o seu limite de fissão de modo que uma quebra ocorra, criando assim um asteroide binário. A

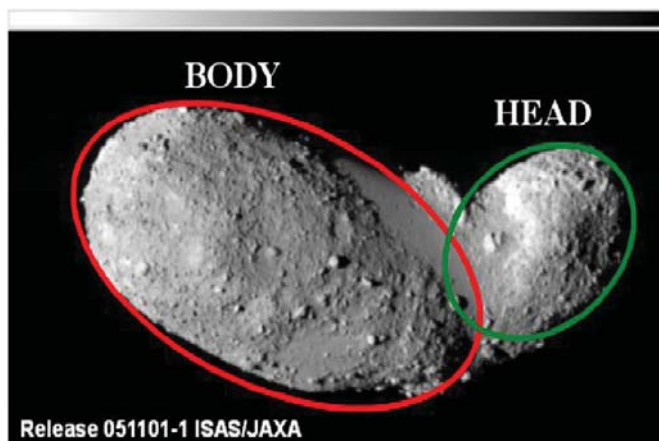


Figura 2.1: Foto do asteroide Itokawa extraída do artigo de Scheeres (2007). Podemos observar que Itokawa é predominantemente composto por dois corpos maiores, classificado como asteroide de contato, com densidade  $2,9g/cm^3$ .

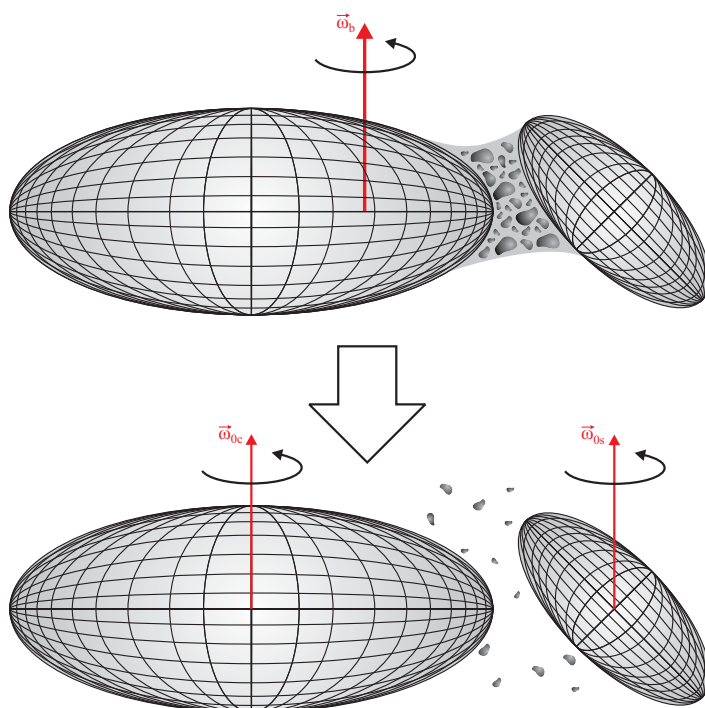


Figura 2.2: Figura para ilustrar o cenário de fissão. O binário de contato quando adquire velocidade de rotação maior que a velocidade limite de fissão ocorre a quebra e um sistema binário é formado.

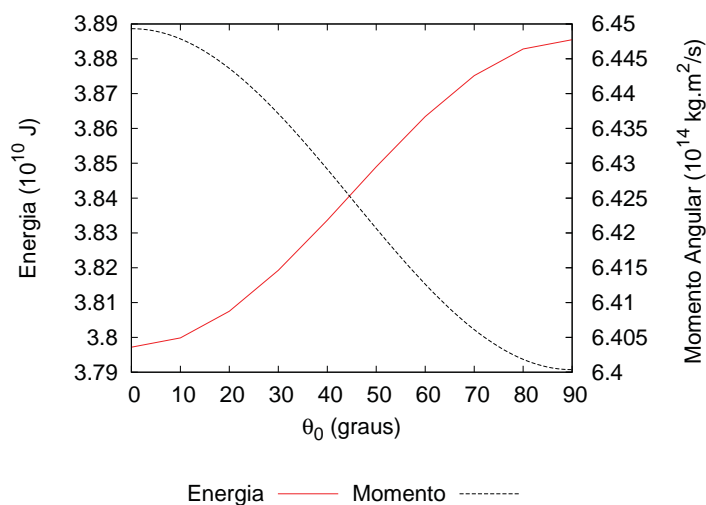


Figura 2.3: A energia total e o módulo do momento angular total do sistema em função obliquidade inicial  $\theta_0$  para um . Note que a energia é maior e o momento angular é menor para maiores valores de  $\theta_0$ . As condições iniciais: corpo central com dimensões ( $a_{(c)} = 1\text{km}$ ,  $b_{(c)} = 0,7\text{km}$ ,  $c_{(c)} = 0,65\text{km}$ ); densidade ( $d = 2,0\text{g/cm}^3$ ); razão de massa ( $q = 0,1$ ); período de rotação inicial  $T = 5,3586\text{h}$ .

figura 2.2 ilustra isso com um modelo de dois elipsoides encostado um no outro com diferentes orientações tais que, após a ruptura os corpos têm obliquidades iniciais diferentes de zero. Estes cenários diferentes iniciam os sistema com diferentes energias e momentos angulares. A energia é maior e o momento (em módulo) é menor para obliquidades maiores ( $\theta$ ), resultando em um comportamento diferente na dinâmica translacional (orbital) e rotacional, vide figura 2.3.

## 2.2 Modelo Utilizado

Para este estudo utilizamos o modelo completo de dois corpos, no qual foi integrado numericamente usando o método Bulirsch-Stoer (Press et al. 2007). O modelo está apresentado abaixo e o desenvolvimento das equações do movimento estão apresentadas no Apêndice.

### 2.2.1 Problema completo de dois corpos

Ao estudar a formação de binários por ruptura rotacional estamos interessados na evolução orbital e rotacional (problema completo) de duas grandes partes de um asteroide logo após sua ruptura. Consideramos apenas as interações gravitacionais entre os corpos e adotamos um modelo do problema completo de dois elipsoides com densidade uniforme. Não levamos

em conta efeitos não-gravitacionais como YORP, BYORP e dissipação por maré. A figura 2.4 mostra um esquema do modelo com os sistemas de referência.

O problema completo de dois corpos consiste em estudar os movimentos orbital e rotacional de forma acoplada, de dois corpos de forma elipsoidal. A equação do movimento de translação desses dois corpos pode ser expressa utilizando o potencial gravitacional expandido até à segunda ordem em termos de harmônicos esféricos  $C_{20}$  (achatamento) e  $C_{22}$  (elipticidade). Assim, com o sistema de coordenadas centrado no centro de massa de um dos corpos (corpo central), a equação tem a forma (Beutler 2005):

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \mu T_{(c)}^T \vec{\nabla}' U_2^{(c)} + \mu T_{(s)}^T \vec{\nabla}' U_2^{(s)} \quad (2.1)$$

onde  $\mu = k^2 (m_c + m_s)$ ,  $\vec{r}$  é o vetor posição,  $\vec{\nabla}$  é o gradiente da função,  $m_i$  são as massas dos corpos,  $k^2$  é a constante gravitacional,  $T_{(i)}$  é a matriz de rotação entre não girante do corpo  $(x, y, z)$  e o sistema dos eixos principais de inércia (SEPI) sistema  $(x', y', z')$ , ou seja  $(')$  significa que as coordenadas estão com respeito ao SEPI.  $U_2^{(i)}$  é o potencial gravitacional, onde  $i = c$  para o corpo central e  $s$  para corpo secundário. O sistema não girante centralizado no corpo central também é chamado de pseudo-inercial (SPsI), pois não se encontra no baricentro do sistema, mas não possui rotação, assim ele é inercial se tratando do movimento de rotação, portanto podemos estudar a rotação do corpo neste referencial.

O potencial gravitacional  $U_2^{(i)}$  é dado por:

$$U_2^{(i)} = \frac{R_{(i)}^2}{r^3} \left[ \frac{C_{20}^{(i)}}{2} \left( \frac{3z'^2}{r^2} - 1 \right) + 3C_{22}^{(i)} \left( \frac{x'^2 - y'^2}{r^2} \right) \right]. \quad (2.2)$$

Considerando a densidade constante e homogênea para os dois corpos, podemos obter os coeficientes gravitacionais  $C_{20}^{(i)}$  e  $C_{22}^{(i)}$  usando as dimensões do elipsoide  $(a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)})$

$$C_{20}^{(i)} = -\frac{1}{5R_{(i)}^2} \left[ c_{(i)}^2 - \frac{(a_{(i)}^2 + b_{(i)}^2)}{2} \right], \quad C_{22}^{(i)} = \frac{1}{20R_{(i)}^2} (a_{(i)}^2 - b_{(i)}^2), \quad (2.3)$$

onde  $R_{(i)}$  é o raio equatorial médio do elipsoide.

A matriz do rotação  $T_{(i)}$  usada é escrita da forma:

$$T = \begin{pmatrix} \eta_1^2 - \eta_2^2 - \eta_3^2 + \eta_4^2 & 2(\eta_1\eta_2 + \eta_3\eta_4) & 2(\eta_1\eta_3 - \eta_2\eta_4) \\ 2(\eta_2\eta_1 - \eta_3\eta_4) & -\eta_1^2 + \eta_2^2 - \eta_3^2 + \eta_4^2 & 2(\eta_2\eta_3 + \eta_1\eta_4) \\ 2(\eta_3\eta_1 + \eta_2\eta_4) & 2(\eta_3\eta_2 - \eta_1\eta_4) & -\eta_1^2 - \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

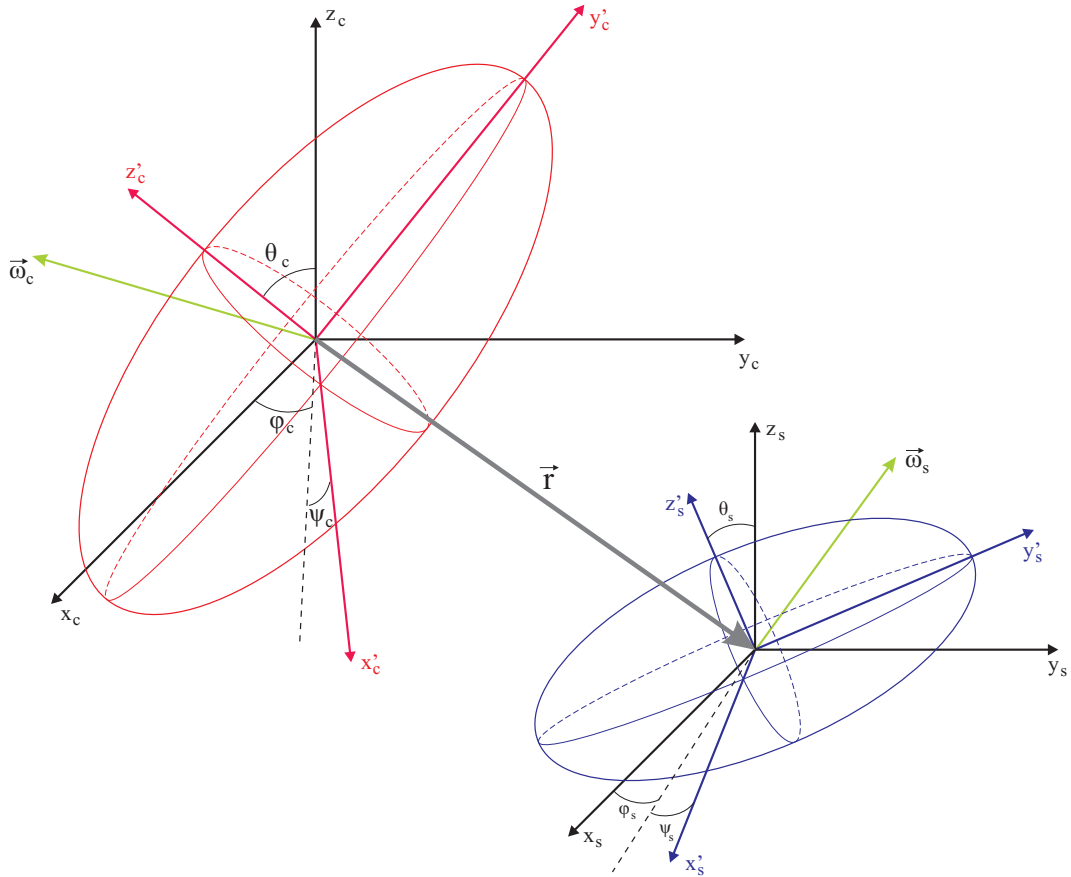


Figura 2.4: Figura ilustrativa do modelo usado para estudar a dinâmica completa (rotacional e orbital) de dois elipsoides. Os elipsoides vermelho e azul representam o corpo central e o corpo secundário, respectivamente. Os sub-índices  $c$  e  $s$  indicam que as grandezas estão em relação ao corpo central e secundário, respectivamente, e, ( $'$ ) (linha) significa que as coordenadas estão no sistema dos eixos principais de inércia (SEPI). O sistema na cor preta é o sistema inercial (SI). É importante ressaltar que estes sistemas não são exatamente sistemas inerciais, porque eles não estão no baricentro do sistema. Este tipo de sistema é frequentemente chamado na literatura de sistema pseudo-inercial, porque não é inercial se tratando do movimento de translação, mas pode ser considerado inercial no movimento rotacional. Sendo assim, podemos utilizar estes sistemas para estudar o movimento de rotação usando a variação temporal dos ângulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ). O vetor  $\vec{\omega}$  é o vetor velocidade angular do corpo.

onde  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  são os quatérnios.

Para estudar o movimento de rotação, usamos as equações de Euler com torque gravitacional devido à um outro corpo (Beutler 2005),

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ \gamma_2 \omega'_z \omega'_x \\ \gamma_3 \omega'_x \omega'_y \end{pmatrix} = \frac{3k^2 m_d}{r_d^5} \begin{pmatrix} \gamma_1 y'_d z'_d \\ \gamma_2 z'_d x'_d \\ \gamma_3 x'_d y'_d \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

onde  $m_d$  é a massa do corpo perturbador,  $r_d$  é o módulo do vetor posição do corpo perturbador,  $(x'_d, y'_d, z'_d)$  as coordenadas do corpo perturbador,  $\gamma_1 = (C - B)/a$ ,  $\gamma_2 = (A - C)/B$ ,  $\gamma_3 = (B - A)/C$ ; e A, B e C são os momentos principais de inércia do corpo, e  $\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z$  são as componentes da velocidade angular.

Como estamos interessados no movimento de atitude do corpo, precisamos da variação temporal dos ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , que são os ângulos que relacionam o SEPI do corpo em relação ao SPsI, vide figura 2.4. Há uma relação direta entre as componentes da velocidade angular e a variação temporal dos ângulos de Euler, porém essa relação possui singularidades (termos  $\text{cosec } \theta = \frac{1}{\text{sen } \theta}$ ), vide equação abaixo:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cotg \theta \text{sen } \phi & \cos \phi \cotg \theta & 1 \\ \cos \phi & \text{sen } \phi & 0 \\ \text{cosec } \theta \text{sen } \phi & -\cos \phi \text{cosec } \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Para evitar essas singularidades, decidimos trabalhar com os quatérnios e, a partir deles, obter ângulos de Euler. A equação da variação temporal dos quatérnios em função das componentes da velocidade angular é escrita no forma (Wertz 1978):

$$\dot{\eta}_1 = \frac{1}{2} (\eta_4 \omega'_x - \eta_3 \omega'_y + \eta_2 \omega'_z), \quad (2.7)$$

$$\dot{\eta}_2 = \frac{1}{2} (\eta_4 \omega'_y - \eta_1 \omega'_z + \eta_3 \omega'_x), \quad (2.8)$$

$$\dot{\eta}_3 = \frac{1}{2} (\eta_4 \omega'_z - \eta_2 \omega'_x + \eta_1 \omega'_y), \quad (2.9)$$

$$\dot{\eta}_4 = -\frac{1}{2} (\eta_1 \omega'_x + \eta_2 \omega'_y + \eta_3 \omega'_z). \quad (2.10)$$

Note que as equações do movimento de rotação (equações 2.5 - 2.10) são apenas para um corpo, portanto precisamos de dois conjuntos de equações, um para cada corpo.

Seguem abaixo as equações que relacionam os ângulos de Euler  $(\phi, \theta, \psi)$ , sequência 3-1-3,

e os quatérnios  $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  (Wertz 1978).

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \theta \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctg \left( \frac{\eta_1 \eta_3 + \eta_4 \eta_2}{\eta_4 \eta_1 - \eta_2 \eta_3} \right) \\ 2 \arctg \left( \sqrt{\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{\eta_4^2 + \eta_3^2}} \right) \\ \arctg \left( \frac{\eta_1 \eta_3 - \eta_4 \eta_2}{\eta_4 \eta_1 + \eta_2 \eta_3} \right) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi + \psi}{2} \right) \\ \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \cos \left( \frac{\phi - \psi}{2} \right) \\ \text{sen} \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\phi - \psi}{2} \right) \\ \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\phi + \psi}{2} \right) \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Condições iniciais

Observando as equações do movimento, notamos que são necessários muitos parâmetros iniciais para executar as simulações. Os parâmetros são: posição inicial e velocidade do corpo secundário  $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$ , velocidade de rotação  $(\omega'_x, \omega'_y, \omega'_z)$ , dimensões, massa, orientação inicial (ângulos de Euler) de cada corpo. Fixamos as dimensões do corpo central  $(a_{(c)} = 1\text{km}, b_{(c)} = 0,7\text{km}, c_{(c)} = 0,65\text{km})$  e a densidade  $(d = 2,0\text{g/cm}^3)$ , considerados bons valores comparados com trabalhos anteriores (Jacobson & Scheeres 2011, Pravec et al. 2010). Foram utilizadas 14 diferentes valores de razão de massa  $(q \equiv m_s/m_c)$ :  $q_1 = 0,01$ ;  $q_2 = 0,05$ ;  $q_3 = 0,1$ ;  $q_4 = 0,15$ ;  $q_5 = 0,16$ ;  $q_6 = 0,17$ ;  $q_7 = 0,18$ ;  $q_8 = 0,19$ ;  $q_9 = 0,20$ ;  $q_{10} = 0,21$ ;  $q_{11} = 0,22$ ;  $q_{12} = 0,23$ ;  $q_{13} = 0,24$  e  $q_{14} = 0,25$ . Para as dimensões do corpo secundário, usamos as relações  $a_{(s)} = q^{1/3}a_{(c)}$ ,  $b_{(s)} = q^{1/3}b_{(c)}$  e  $c_{(s)} = q^{1/3}c_{(c)}$ . A velocidade de rotação que usamos é  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ , onde  $\omega_0$  é a taxa de rotação na configuração de equilíbrio que obtemos pela relação (Scheeres 2009):

$$\omega_0 = \left[ \frac{\mu}{r^3} \left[ 1 + \frac{3}{2r^2} \left[ \frac{1}{m_{(c)}} \text{Tr}(\bar{I}_{(c)}) + \frac{1}{m_{(s)}} \text{Tr}(\bar{I}_{(s)}) - 3(A_{(c)} + A_{(s)}) \right] \right] \right]^{1/3}, \quad (2.13)$$

onde  $\bar{I}_{(i)}$  é o tensor de inércia do corpo, e  $\text{Tr}$  é o traço da matriz. Finalmente, a velocidade de rotação no SEPI é  $\vec{\omega}'_i = T_i \vec{\omega}$ . A posição inicial do corpo secundário é  $\vec{r} = (r_0, 0, 0)$  onde  $r_0 = (a_{(c)} + a_{(s)} + 1 \times 10^{-5})\text{km}$  (1cm de distância entre as superfícies no caso planar, vide figura 2.5), e a velocidade inicial é de  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ . Para cada razão de massa foram consideradas 90 diferentes valores da inclinação do equador  $(\theta_0)$  para o corpo  $\theta_{(s)} = 0, 1, 2, 3 \dots, 90$  graus, vide figura 2.5.

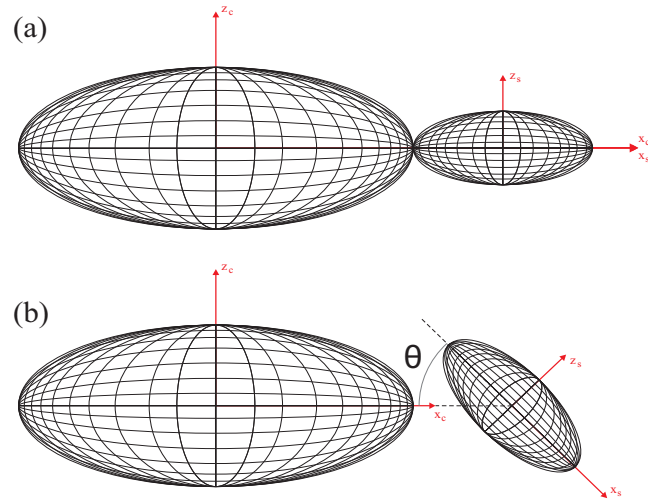


Figura 2.5: Geometria das condições iniciais. A figura (a) mostra o caso planar,  $\theta_0 = 0$  (Jacobson & Scheeres 2011) e figura (b) mostra o caso não planar  $\theta_0 \neq 0$ .

### 2.2.3 Conservação da energia e do momento angular

Sabendo que a energia total e o momento angular total do sistema têm que ser conservado e, a fim de ter a certeza da validade de nossas simulações, nós fizemos alguns testes calculando a energia e momento angular total do sistema. Os resultados mostraram que as quantidades são conservadas com erro relativo da ordem de  $\approx 10^{-11}$  para a energia e  $\approx 10^{-12}$  para o momento angular.

## 2.3 Resultados

### 2.3.1 Evolução temporal

Para mostrar como é o comportamento dinâmico dos casos que estudamos fizemos algumas figuras mostrando a evolução dinâmica de um exemplo de nossas simulações. A figura 2.6 mostra a evolução temporal do caso com razão de massa igual a 0,1 e obliquidade inicial do corpo secundário igual a  $45^\circ$ . Note que a variação irregular e abrupta dos elementos orbitais e dos ângulos de Euler mostram a complexidade da dinâmica orbital e rotacional do sistema. Esta complexidade ocorre porque a órbita inicial começa numa configuração de equilíbrio instável (Scheeres 2007) e o movimento de rotação é também uma configuração instável, pois a direção da velocidade de rotação não coincide com o eixo de maior momento de inércia. Esta configuração inicial ocorre porque a direção inicial da velocidade de rotação é sempre no mesmo sentido da velocidade de rotação antes da ruptura (ver figura 2.2).

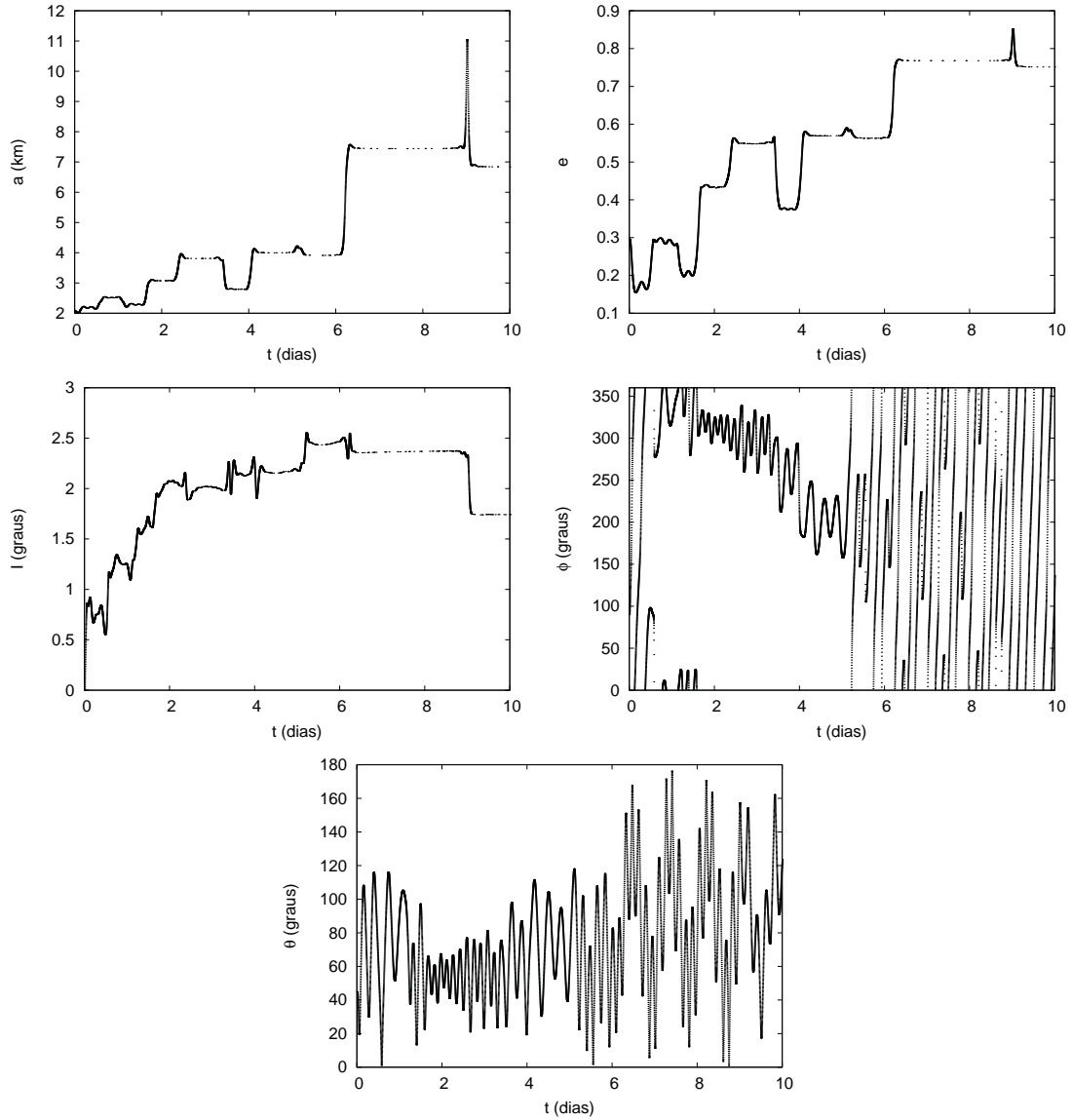


Figura 2.6: Elementos orbitais  $a$ ,  $e$  e  $I$ , e os ângulos de Euler  $\theta$  (ângulo de nutação) e  $\phi$  (ângulo de precessão) do corpo secundário em função do tempo em um período 10 dias. A obliquidade inicial é  $\theta = 45^\circ$  e a razão em massa é  $q = 0,1$ . Analisando os elementos orbitais e os ângulos de Euler, podemos concluir movimento orbital e rotacional (nutação e precessão) mostram um comportamento complexo.

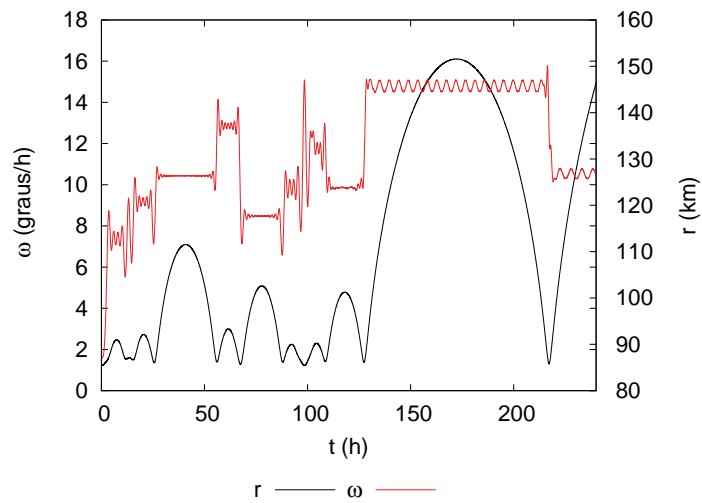


Figura 2.7: O módulo da velocidade de rotação ( $\omega$ ) e o módulo do vetor posição em função do tempo. Note as mudanças de velocidade de rotação abruptas quando ocorre o encontro próximo (valor mínimo de  $r$ ).

Também fizemos um gráfico para mostrar o comportamento da velocidade de rotação do corpo secundário durante encontros próximos com o corpo central (figura 2.7). Note que a velocidade de rotação muda abruptamente quando a distância é mínima. A velocidade de rotação pode aumentar ou diminuir dependendo da orientação relativa dos corpos durante o encontro (Scheeres et al. 2000).

A evolução dinâmica do sistema é completamente caótica. Assim, uma pequena diferença na condição inicial causa um evolução dinâmica totalmente diferente. A figura 2.8 mostra a elevada sensibilidade do sistema para a inclinação inicial do equador do corpo secundário. Esta figura ainda mostra a evolução do semi-eixo maior de dois casos com uma pequena diferença de  $0,01^\circ$  nos valores iniciais de  $\theta$ . Note que os dois comportamentos divergem fortemente depois de apenas alguns dias.

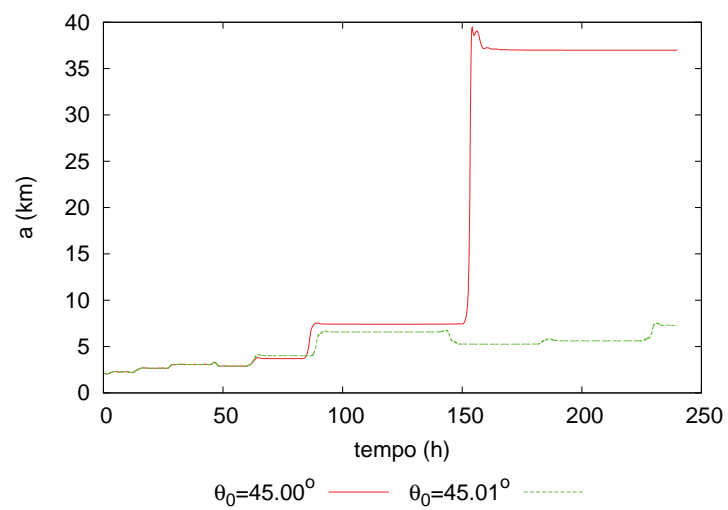


Figura 2.8: Evolução temporal do semi-eixo maior de dois valores iniciais diferentes de obliquidade ( $\theta_0 = 45,00^\circ$  (vermelho) e  $\theta_0 = 45,01^\circ$  (verde)). Observe que a figura ilustra claramente o comportamento caótico do sistema no qual os semi-eixos maior de cada caso divergem fortemente após alguns dias.

### 2.3.2 Estados finais e extremos

Nesta seção vamos analisar os estados finais e extremos de nossas simulações. Estados finais são os estados após o corpo secundário sofrer escape ou no momento da colisão e os estados extremos são os valores mínimos ou máximos de uma variável durante a simulação. Com estes valores podemos obter informações importantes sobre o sistema, tais como a possibilidade de criação de um sistema triplo.

Para mostrar exemplos dos resultados que podemos obter, fizemos algumas figuras dos estados extremos e finais para 3 diferentes razões de massa  $q = 0,01$  (valor baixo),  $q = 0,15$  (valor médio) e  $q = 0,25$  (valor grande), para os 90 valores diferentes de  $\theta_0$ . As figuras 2.9, 2.10 e 2.11 apresentam a energia, a velocidade no infinito ( $V_\infty$ ) para os casos de escape, o estado final do período de rotação ( $T_f$ ), o tempo de vida ( $t_v$ ), estado final da inclinação orbital ( $I_f$ ) e período mínimo de rotação durante a simulação ( $T_{min}$ ) para  $q = 0,01$ ,  $q = 0,15$  e  $q = 0,25$ , respectivamente. Foi colocado nos gráficos de  $T_f$  e  $T_{min}$  duas retas que indicam o período de rotação inicial ( $T(t = 0)$ ) e o período de rotação necessário para ocorrer a segunda ruptura ( $T_r$ ). Assim, os casos com  $T_{min} < T_r$  indicam que a ruptura secundária ocorre.

Podemos fazer algumas conclusões gerais em algumas variáveis comparando esses três diferentes sistemas. As variáveis  $t_v$ ,  $T_f$ , e  $T_{min}$  são diretamente proporcional à razão de massa do sistema, em outras palavras, elas são maiores para valores maiores de  $q$ . Para melhor compreender o comportamento geral de nossos resultados, fizemos gráficos da média de algumas destas variáveis com os seus respectivos desvios-padrão, vide figuras 2.12 e 2.13. Nestas figuras é claro ver que o  $\langle T_{Min} \rangle$ ,  $\langle t_l \rangle$  e  $\langle I_f \rangle$  são diretamente proporcionais, e,  $\langle V_\infty \rangle$  é inversamente proporcional à razão entre a massa  $q$ . Isso significa que os casos com grandes razões de massa tendem a ter uma vida mais longa, maior inclinação final e menos casos de ruptura secundária do que os casos com baixa de razão de massa. É importante citar que esse comportamento geral concorda com o estudo planar de Jacobson & Scheeres (2011).

Para entender como a evolução do sistema depende da inclinação inicial do equador  $\theta_0$ , nós escolhemos quatro valores diferentes de  $\theta_0$ : dois valores extremos (0,0001 e 90 graus) e dois médios (valores de 30 e 60 graus). Em seguida fizemos simulações utilizando um maior número de razões de massa  $q$ , mostrado na Figura 2.14. Obviamente, como dito anteriormente, estes sistemas são caóticos, por isso não podemos tirar conclusões fortes relacionando a dinâmica do sistema com suas condições iniciais. No entanto, podemos concluir que  $I_f$  tende a ser maior nos valores médios de  $\theta_0$  (azul e linhas verdes) que pode ser explicado devido ao troca de momento angular de rotação e momento angular orbital. Nós também podemos concluir comportamentos semelhantes em  $T_{Min}$  para todo valor de  $\theta_0$ . Se pensarmos no comportamento médio, casos com  $\theta_0 = 60^\circ$  tende a ter uma vida mais longa do que os outros

casos.

As colisões e as fissões secundárias são de extrema importância para o nosso trabalho, uma vez que os fenômenos que podem levar o sistema inicialmente instável se tornar um binário estável. Começando com os casos de colisões podemos dizer que os resultados concordam com os estudos anteriores (Scheeres 2009), já que não obtivemos colisões em casos planares ( $\theta_0 = 0$ ). Por outro lado, há colisões e ruptura secundária para todas as outras razões de massa escolhidas. As figuras 2.9, 2.10 e 2.11 mostram uma característica interessante: colisões ocorrem somente em casos com  $\theta_0 \geq 50^\circ$  (na verdade, nós observamos em colisão casos com  $\theta_0 = 40^\circ$  para  $q = 0,17$ ). Este fenômeno se assemelha ao mecanismo de Lidov-Kozai (Kozai 1962, Lidov 1962), merecendo um estudo futuro mais cauteloso. Calculamos a frequência de casos que produziram colisões e ruptura secundária e relatamos esses resultados na tabela 2.1. Note na tabela 2.1 que, embora tenha pequenas oscilações em grandes valores de  $q$ , podemos concluir que o comportamento geral da porcentagem de colisão é diretamente proporcional e ruptura secundária é inversamente proporcional à razão de massa  $q$ . Essa pequena oscilação no comportamento geral é claramente observado em  $q = 0,18$  e  $q = 0,21$ , no qual podem ser entendidas devido ao comportamento caótico do sistema. Casos de colisão, como foi dito antes, não ocorrem em casos planares, mas em casos não-planares pelo menos 4,4% das simulações terminou em colisão. O caso  $q = 0,20$ , por exemplo, tem 32,2% ocorrem colisão, ou seja, quase um terço de colisões.

Um importante resultado encontrado foi que obtivemos ruptura secundária em casos com  $q > 0,20$ . Jacobson & Scheeres (2011) não encontraram ruptura secundária em casos de  $q > 0,20$ , e sua conclusão foi que esses sistemas só podem se tornar um binário estável através de efeito BYORP ou efeito dissipativo por marés, entretanto nossos resultados mostraram que para o caso não planar isso não é verdade. Em outras palavras, é possível obter binários estáveis para  $q > 0,20$  através de um processo dinâmico (ruptura secundária ou colisão), mas com baixa probabilidade. Isso significa que o sistema com grande razão entre as massas pode se tornar um binário estável somente por processo dinâmico, em alguns casos na configuração inicial não planar.

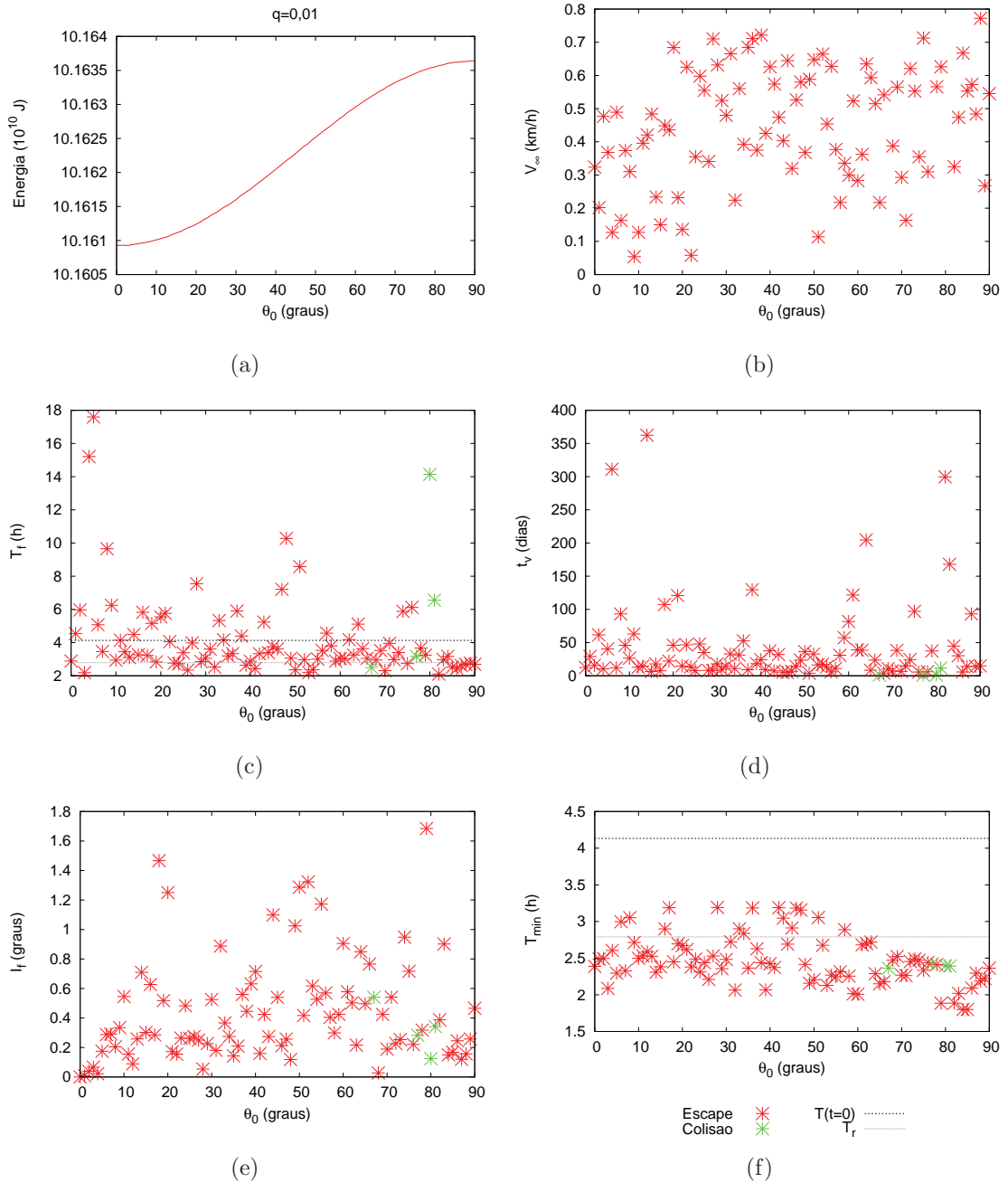


Figura 2.9: Os estados finais e extremos do corpo secundário em função da obliquidade inicial ( $\theta_0$ ) para o caso com razão de massa  $q = 0,01$ . Apresentamos nesta figura a energia total, a velocidade no infinito ( $V_\infty$ ) para os casos de escape, o período de rotação final ( $T_f$ ), o tempo de vida ( $t_v$ ), inclinação orbital final ( $I_f$ ) e o valor mínimo do período de rotação durante a simulação ( $T_{min}$ ). Onde em vermelho são os casos que ocorrem escape e em verde são os casos que ocorrem colisão. Há duas linhas onde uma delas indica o valor do período de spin inicial ( $T(t = 0)$ ) e o outro é o período limite para que ocorra fissão do segundo corpo (chamado de período limite de ruptura  $T_r$ ), assim, casos em que  $T_{min}$  possuem valores abaixo da  $T_r$  ocorrem ruptura secundária. Neste caso ( $q = 0,01$ ) 83% ocorrem ruptura secundária.

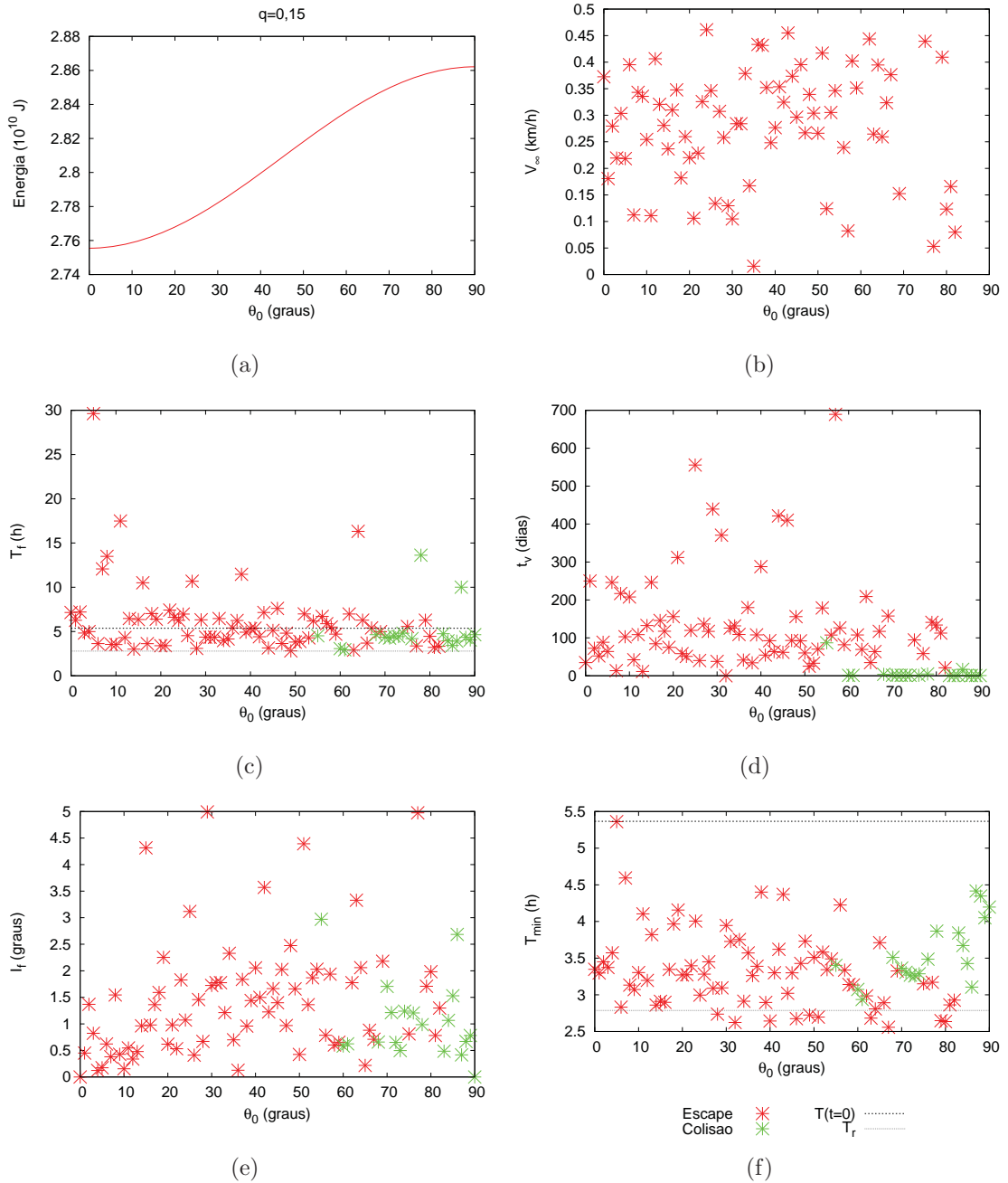


Figura 2.10: Os estados finais e extremos do corpo secundário em função da obliquidade inicial ( $\theta_0$ ) para o caso com razão de massa  $q = 0,15$ . Apresentamos nesta figura a energia total, a velocidade no infinito ( $V_\infty$ ) para os casos de escape, o período de rotação final ( $T_f$ ), o tempo de vida ( $t_v$ ), inclinação orbital final ( $I_f$ ) e o valor mínimo do período de rotação durante a simulação ( $T_{min}$ ). Onde em vermelho são os casos que ocorrem escape e em verde são os casos que ocorrem colisão. Há duas linhas onde uma delas indica o valor do período de spin inicial ( $T(t = 0)$ ) e o outro é o período limite para que ocorra fissão do segundo corpo (chamado de período limite de ruptura  $T_r$ ), assim, casos em que  $T_{min}$  possuem valores abaixo da  $T_r$  ocorrem ruptura secundária. Neste caso ( $q = 0,15$ ) 11,1% ocorrem ruptura secundária.

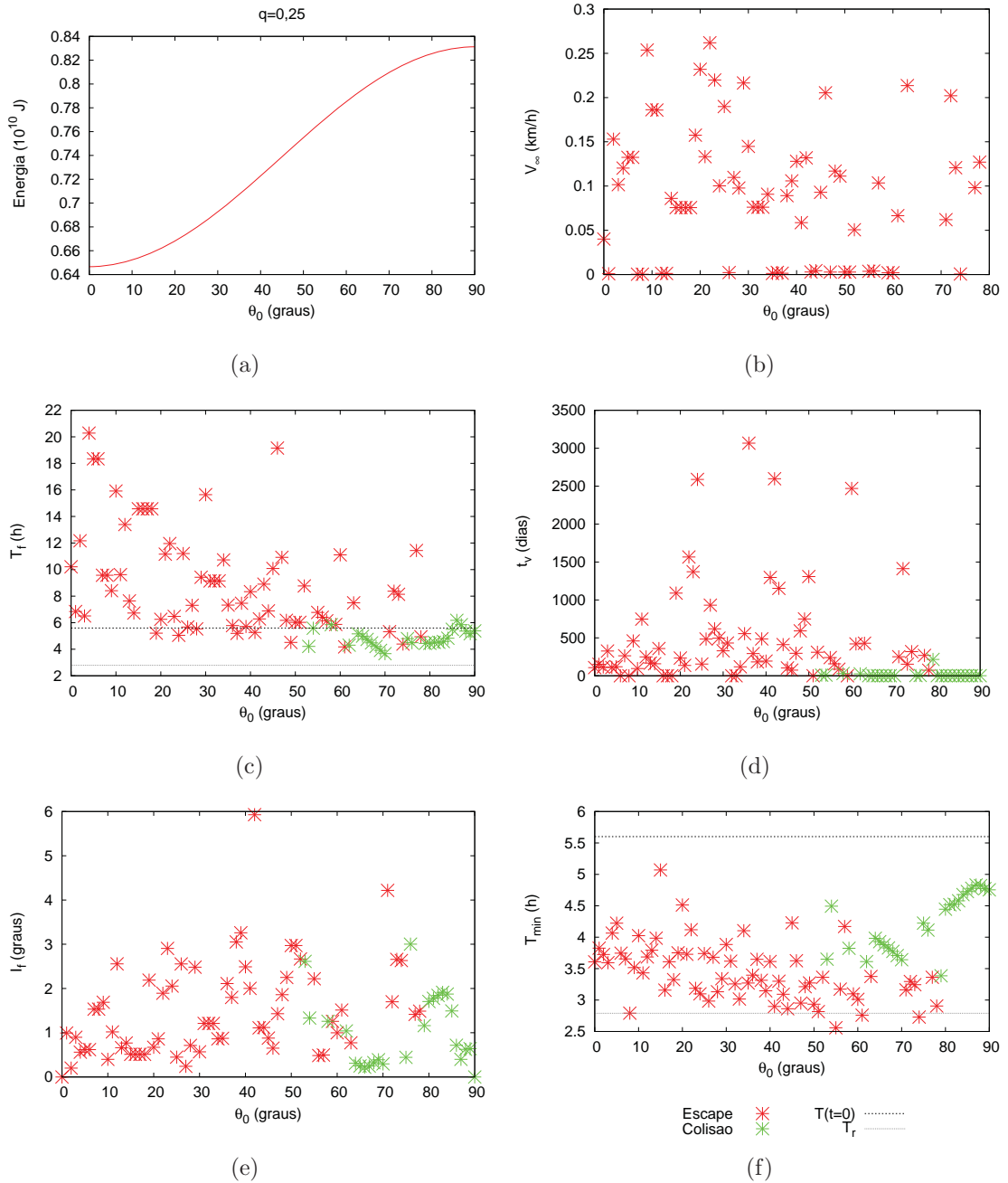


Figura 2.11: Os estados finais e extremos do corpo secundário em função da obliquidade inicial ( $\theta_0$ ) para o caso com razão de massa  $q = 0,25$ . Apresentamos nesta figura a energia total, a velocidade no infinito ( $V_\infty$ ) para os casos de escape, o período de rotação final ( $T_f$ ), o tempo de vida ( $t_v$ ), inclinação orbital final ( $I_f$ ) e o valor mínimo do período de rotação durante a simulação ( $T_{min}$ ). Onde em vermelho são os casos que ocorrem escape e em verde são os casos que ocorrem colisão. Há duas linhas onde uma delas indica o valor do período de spin inicial ( $T(t = 0)$ ) e o outro é o período limite para que ocorra fissão do segundo corpo (chamado de período limite de ruptura  $T_r$ ), assim, casos em que  $T_{min}$  possuem valores abaixo da  $T_r$  ocorrem ruptura secundária. Neste caso ( $q = 0,15$ ) 4,4% ocorrem ruptura secundária.

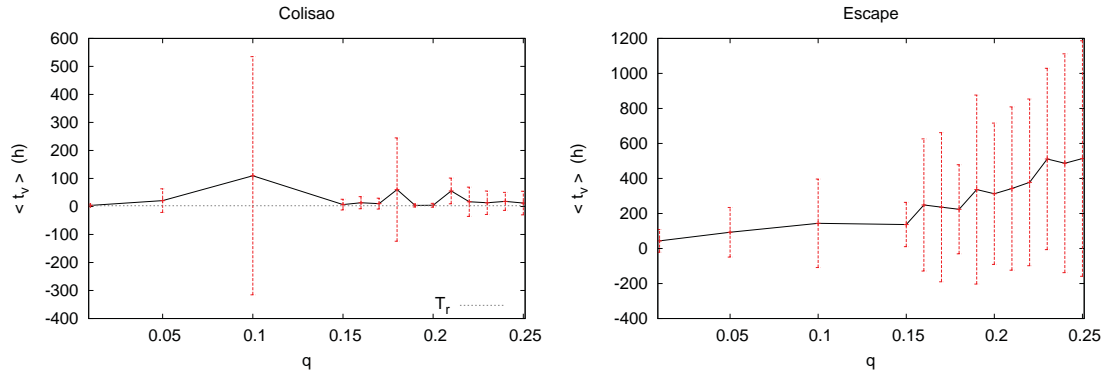


Figura 2.12: A média do tempo de vida ( $\langle t_v \rangle$ ) em função da razão de massa  $q$ . Os pontos são a média dos 90 valores de obliquidade inicial com seu respectivo desvio-padrão (barra vermelha). À direita são os casos de escape e à esquerda os casos de colisão.

$q$	Ruptura secundária	Colisão
0,01	83,0%	4,4%
0,05	44,4%	13,3%
0,10	25,5%	21,1%
0,15	11,1%	21,1%
0,16	8,8%	24,4%
0,17	5,5%	28,8%
0,18	11,1%	22,2%
0,19	5,5%	23,3%
0,20	4,4%	32,2%
0,21	14,4%	4,4%
0,22	5,5%	25,5%
0,23	2,2%	27,7%
0,24	4,4%	28,8%
0,25	4,4%	27,7%

Tabela 2.1: Tabela com a porcentagem de colisão e os casos de ruptura secundária para cada razão de massa  $q$ . Esta porcentagem é de 90 diferentes obliquidades inicial  $\theta_0$ .

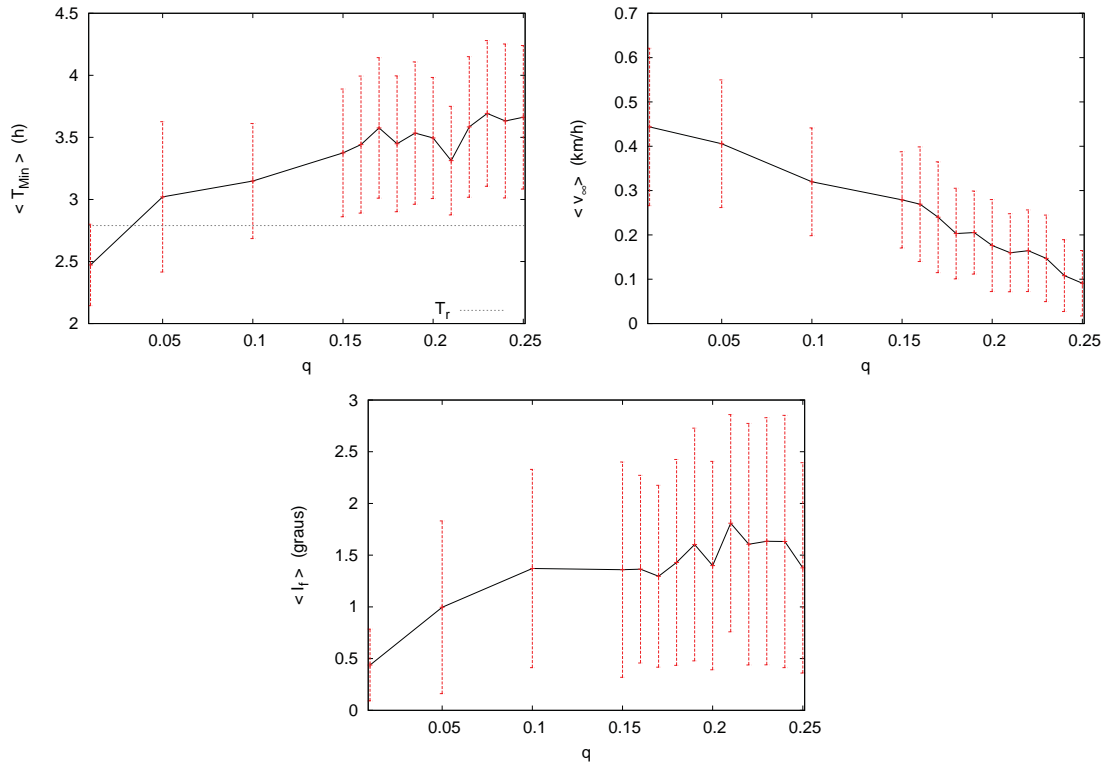


Figura 2.13: As médias de período mínimo de rotação ( $\langle T_{min} \rangle$ ), velocidade no infinito ( $\langle V_{\infty} \rangle$ ) e estado final da inclinação orbital ( $\langle I_f \rangle$ ) em função da razão de massa  $q$ . Os pontos são a média dos 90 valores de obliquidade iniciais com seu respectivo desvio-padrão (barra vermelha).

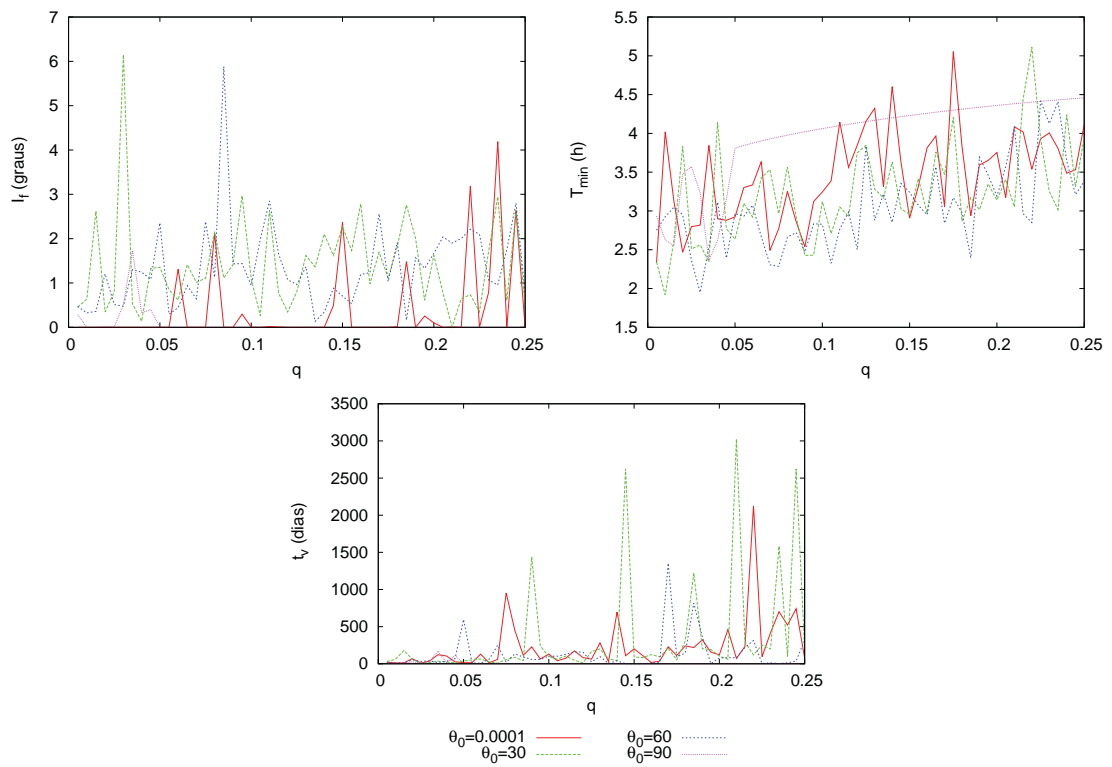


Figura 2.14: O estado final da inclinação orbital ( $I_f$ , período de rotação mínimo ( $T_{min}$ ) e vida ( $t_v$ ) em função da razão de massa  $q$  para 4 diferentes obliquidades iniciais ( $\theta_0 = 0,0001$ , 30, 60 e 90 graus ).

## 2.4 Conclusões

Foi estudado a origem de sistemas duplos de asteroides em configurações iniciais antes não estudadas, consideradas mais prováveis de se encontrar. Estudamos várias configurações iniciais de inclinação do equador e razão de massa com o intuito de tentar obter casos em que ocorram ruptura secundária e re-impacto. Fizemos simulações para o total de 1260 condições iniciais diferentes e obtivemos ruptura secundária em 16,43% dos casos e colisões em 21,82% dos casos. Assim, uma parte significativa dos resultados é candidata a se tornar um sistema binário estável.

O estudo do problema utilizando um conjunto mais realista das condições iniciais nos possibilitou observar casos antes não observados. Jacobson & Scheeres (2011) separam seus resultados em dois regimes: um de elevada razão de massa ( $q > 0,2$ ) e um de baixa razão de massa ( $q < 0,2$ ); e concluíram que no regime de elevada razão de massa não ocorre fissão secundária, de modo que o sistema só pode se tornar um binário estável por um caminho evolutivo diferente. No entanto, nossos resultados mostram que é possível ocorrer fissão secundária em alguns poucos casos ( $\approx 4\%$ ) para elevada razão de massa, porém o sistema têm que se iniciar numa configuração não planar.

É importante citar que os gráficos dos valores médios possui comportamento similar ao encontrado nos estudos anteriores. A figura 2.13, juntamente com a tabela 2.1, mostram que o número de ruptura secundária, assim como a velocidade de escape ( $V_\infty$ ), decrescem, tendendo assim a desaparecer para um determinado valor de razão de massa.

Este resultado tem considerável relevância se formos comparar com resultados anteriores apresentados por Pravec et al. (2010) e mais recentemente por Scheeres et al. (2015). Pravec et al. (2010) mostraram um valor limite de  $q \approx 0,2$  encontrado para asteroides binários, como previsto pela teoria. Estudos mais recentes têm mostrado alguns corpos com razão de massa além desse limite. Assim, levando em conta estes estudos, podemos concluir que a maioria dos binários candidatos a serem fruto de uma ruptura rotacional tendem de ter possuído uma configuração mais próxima da planar.

Para trabalhos futuros pretendemos analisar a dependência dos parâmetros iniciais do corpo central (dimensões, densidade e direção da velocidade de rotação) sobre os resultados e estudar o possível mecanismo Lidov-Kozai nos casos de colisão.

# Capítulo 3

## Origem da obliquidade de Urano

### 3.1 Introdução

A origem da grande obliquidade de Urano,  $97,8^\circ$ , permanece indefinida. O primeiro cenário proposto para explicar esta configuração foi uma grande colisão tangencial com outro protoplaneta durante sua formação (Korycansky et al. 1990, Slattery 1992). O modelo de formação por colisão foi muito criticado porque uma colisão causaria a variação muito rápida do eixo de rotação, de modo que impossibilitaria o plano orbital dos satélites de acompanhar o plano do equador, não coincidindo assim com a atual configuração planar dos satélites naturais do sistema. Alguns estudos foram feitos para melhor compreender e justificar o modelo de colisão (Brunini 1995, Parisi & Brunini 1997). Morbidelli et al. (2012) propõem solucionar o problema da existência de satélites prógrados equatoriais no cenário de colisão, por meio de um sistema com Urano composto por um disco de proto-satélites. Morbidelli et al. (2012) afirmam também a necessidade de Urano ter sofrido, no mínimo, duas colisões. Kubo-Oka & Nakazawa (1995) estudaram a origem da obliquidade de Urano através de evolução de maré devida as órbitas de satélites, porém seus resultados exigiram satélites muito massivos (da ordem de 1,2% da massa de Urano). Mais recentemente, Izidoro et al. (2015) propuseram que as peculiares obliquidades de Urano e Netuno são assinaturas de seus processos de formação. Eles propõem que a acreção desses planetas foi dominada por colisões entre grandes embriões planetários numa época onde o disco gasoso protoplanetário ainda estava presente, anteriormente a formação dos satélites naturais. Uma outra proposta para explicar a origem da obliquidade foi que ela cresceu devida a uma ressonância entre as taxa de variação do nodo orbital (longitude do nodo ascendente) de Urano e a taxa de variação da precessão do eixo de rotação (spin) do mesmo, que só ocorre se Urano possuir um satélite de grande porte (nomeado Satélite X), da ordem de 1% da massa de Urano (Boué & Laskar 2010). Boué & Laskar (2010) afirmam também que, além de possuir este grande satélite,

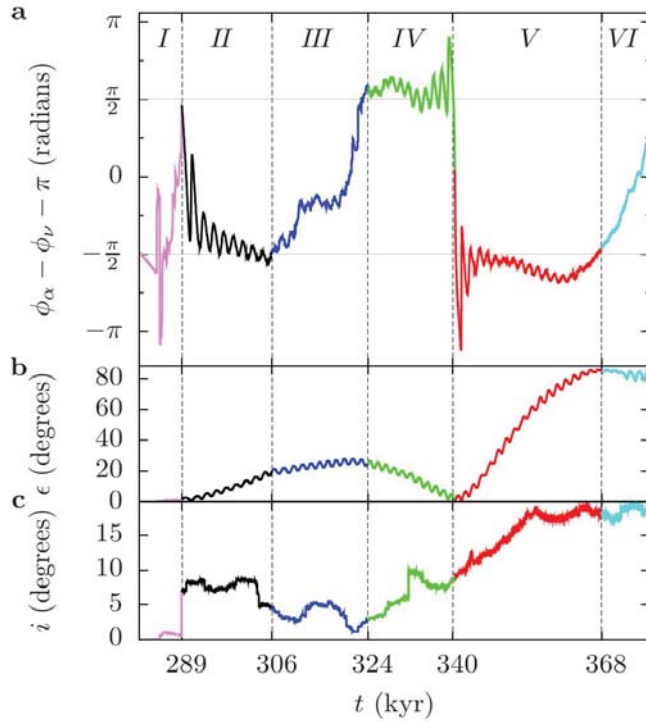


Figura 3.1: Figura extraída do artigo de Boué & Laskar (2010). A figura apresenta três gráficos (a), (b) e (c), que são o ângulo ressonante ( $\phi_\alpha - \phi_\nu - \pi$ ), a obliquidade ( $\epsilon$ ) e inclinação de Urano em função do tempo, respectivamente.  $\phi_\alpha$  é ângulo (ambos medidos positivamente) entre o eixo de referência e a projeção do eixo de rotação do spin e ( $\phi_\nu$ ) é o ângulo entre eixo de referência e a projeção do vetor perpendicular ao plano orbital de Urano. Ambas as projeções são no plano de referência inercial  $xy$ . Podemos observar que além da alta inclinação orbital, é necessário que o ângulo ressonante ( $\phi_\alpha - \phi_\nu - \pi$ ) possua valores próximos de  $(\pi/2)$  para que ocorra o aumento da obliquidade, vide sub-divisões II (em preto), III (em azul) e V (vermelho).

Urano teve que ter alta inclinação durante este período, vide figura 3.1. Boué & Laskar (2010) estudam o crescimento da obliquidade utilizando a evolução orbital de Urano durante o Modelo de Nice. Apesar dos resultados satisfatórios, é pouco aceitável que Urano tenha tido um satélite com essa ordem de grandeza e, se existiu, sua presença perturbaria fortemente os outros satélites a ponto de desestabilizá-los.

Realizamos nosso estudo da origem da obliquidade de Urano inspirado no trabalho de Boué & Laskar (2010), de modo a tentar reproduzir a atual obliquidade por meio de perturbações de seus satélites e dos planetas durante o Modelo de Nice.

### 3.1.1 Modelo de Nice

Em 2005, foram publicados três artigos sobre a formação do Sistema Solar, propondo explicar a origem da configuração do Sistema Solar por meio de interação entre os planetas gigantes (Júpiter, Saturno, Netuno e Urano) e um disco de planetesimais (Gomes et al. 2005, Tsiganis et al. 2005, Morbidelli et al. 2005). Através deste modelo, para determinadas condições iniciais dos planetas e do disco, os autores conseguiram reproduzir grande parte da atual configuração do Sistema Solar com sucesso. Em homenagem aos pesquisadores que neste momento estavam trabalhando no *Observatoire de la Côte d'Azur*, localizado na cidade de Nice, na França, o modelo foi batizado de Modelo de Nice e atualmente é o modelo que melhor explica a atual configuração do Sistema Solar. É importante ressaltar que apesar das condições finais reproduzirem bem a atual configuração do Sistema Solar, a evolução dinâmica dos planetas durante o modelo é extremamente complexa, havendo abruptas variações de semi-eixo maior, excentricidade e inclinação orbital para os planetas gigantes, em especial para os planetas de gelo (Urano e Netuno).

Com o passar dos anos, surgiram modificações do Modelo de Nice. Morbidelli et al. (2007) e Brasser et al. (2009) criaram uma segunda versão na qual, por meio de condições iniciais diferentes, ocorre grande quantidade de encontros próximos entre um dos planetas de gelo e Júpiter. Essa segunda versão também é conhecida como *Jumping-Jupiter*. Posteriormente, Walsh et al. (2011) publicou um trabalho estudando a origem do Sistema Solar durante o período anterior ao Modelo de Nice, no qual o Sistema Solar ainda possuía um disco de gás. Também conhecido como modelo *Grand Tack*, os autores conseguem reproduzir as condições iniciais usadas no trabalho de Morbidelli et al. (2007) e conseguem explicar um pouco da atual configuração do Sistema Solar interior (Marte e cinturão principal de asteroides). Mais recentemente foram publicados dois trabalhos propondo a formação do Sistema Solar com 5 ou 6 planetas gigantes (Nesvorný 2011, Nesvorný & Morbidelli 2012).

As órbitas dos planetas utilizadas no nosso trabalho são provenientes do Modelo de Nice “tradicional” (Gomes et al. 2005, Tsiganis et al. 2005, Morbidelli et al. 2005).

## 3.2 Modelos Utilizados

Utilizamos dois diferentes modelos para estudar a origem da obliquidade de Urano, no qual pelo menos um dos corpos possui dinâmica rotacional e translacional acoplada.

Os modelos são: 1) um modelo no qual  $N = n + 1$  corpos interagem gravitacionalmente, onde o referencial é centrado em um dos corpos denominado corpo central. Este corpo central é o único que possui forma não pontual (elipsoide) e movimento rotacional, sofrendo assim torques dos demais corpos que o orbitam. Incluímos também mais quatro corpos com órbitas

já integradas perturbando o sistema. Em nosso estudo específico, o corpo central é Urano e incluímos também perturbações dos planetas gigantes (Netuno, Júpiter e Saturno) e o Sol, que possuem órbitas integradas previamente utilizando o Modelo de Nice; 2) nomeado de “tombo” forçado, onde tombo significa o eixo de rotação se deslocar angularmente de 0 à 90 graus, este modelo tem como objetivo estudar  $n$  corpos que interagem somente com um corpo central. O corpo central possui forma elipsoidal com movimento de rotação controlada.

As desenvolvimento das equações do movimento estão apresentadas no Apêndice.

Utilizamos o método Bulirsch-Stoer (Press et al. 2007) para integrar as equações do movimento do modelo 1) e utilizamos o método de Gauss-Radau (Everhart 1985) para as equações do movimento do modelo 2) no qual não foram integradas as equações do movimento de rotação em nosso estudo preliminar da origem da obliquidade de Urano.

Apresentaremos separadamente os dois modelos nos tópicos a seguir.

### 3.2.1 Problema de N-Corpos com o corpo central elipsoidal

Modelo utilizado para estudar a origem da obliquidade de Urano. Este modelo leva em conta atrações gravitacionais de  $n$ -corpos pontuais e um corpo de forma elipsoidal (corpo central). É levado em conta também as perturbações dos planetas com órbitas determinadas anteriormente através de simulação do Modelo de Nice. As equações de movimento de um corpo ( $i$ ) perturbado por  $n$ -corpos pontuais ( $j$ ), mais a perturbação de quatro corpos com órbitas já definidas, onde o referencial está centrado no corpo central de forma elipsoidal, é escrita da forma (Beutler 2005, Marchis et al. 2010):

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i = & -k^2 (m_0 + m_i) \left( \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - T^T \vec{\nabla}' U_2^{(i)} \right) - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \frac{\vec{r}_i}{r_j^3} - T^T \vec{\nabla}' U_2^{(j)} \right) \\ & - k^2 \sum_{p=1}^4 m_p \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_p}{|\vec{r}_i - \vec{r}_p|^3} + \frac{\vec{r}_p}{r_p^3} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde  $m_p$  é massa e  $\vec{r}_p$  é o vetor posição dos quatro corpos (Sol, Netuno, Saturno e Júpiter) com órbitas determinadas anteriormente. Assim como no modelo anterior, o potencial  $U_2$  é dado pela equação 2.2 e  $T$  é a matriz de rotação dada pela equação 2.4.

A equação de Euler para movimento de rotação do corpo central é similar a equação 2.5, porém os toques são devidos à  $(n + 4)$  corpos ( $n$  corpos, Sol, Júpiter, Saturno e Netuno).

Assim, a equação é escrita da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ \gamma_2 \omega'_z \omega'_x \\ \gamma_3 \omega'_x \omega'_y \end{pmatrix} = 3k^2 \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_j^5} \begin{pmatrix} \gamma_1 y'_j z'_j \\ \gamma_2 z'_j x'_j \\ \gamma_3 x'_j y'_j \end{pmatrix} + 3k^2 \sum_{p=1}^4 \frac{m_p}{r_p^5} \begin{pmatrix} \gamma_1 y'_p z'_p \\ \gamma_2 z'_p x'_p \\ \gamma_3 x'_p y'_p \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Por fim, obtemos, analogamente ao modelo anterior, os ângulos de Euler por meio do quatérnios dados pelas equações 2.7 - 2.10.

A figura 3.2 mostra uma ilustração do modelo (sem levar em conta os corpos com órbitas já integradas).

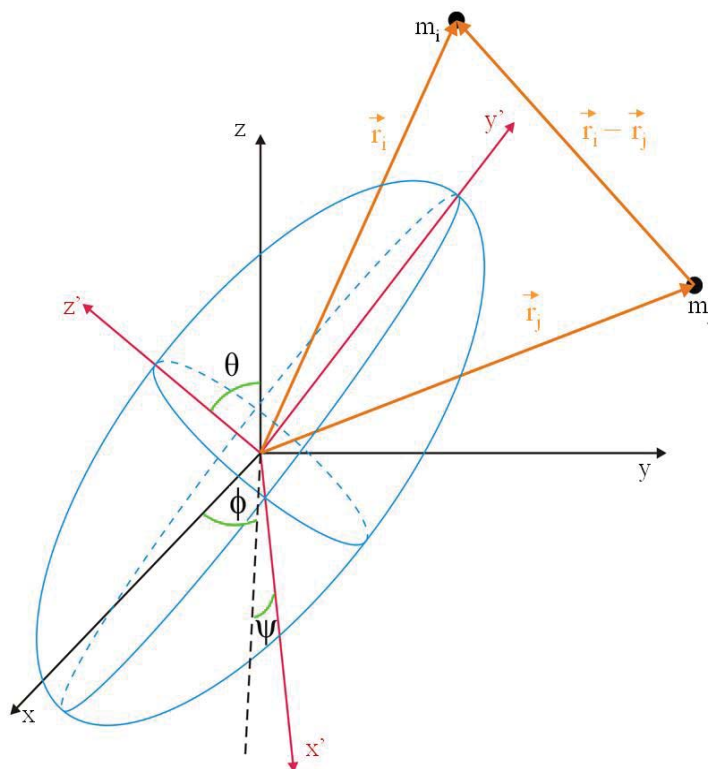


Figura 3.2: Figura ilustrativa do modelo do problema de N-corpos, considerando um corpo central elipsoidal com movimento de atitude. O sistema vermelho é o SEPI do corpo central ( $x', y', z'$ ) e o sistema preto ( $x, y, z$ ) é o SI. Note que os dois sistemas estão relacionados através dos ângulos de Euler ( $\phi, \theta, \psi$ ).

### 3.2.2 Modelo de tombo forçado

Modelo utilizado no estudo preliminar da origem da obliquidade de Urano. Utilizamos este modelo para analisar o acompanhamento do plano orbital dos satélites durante a variação

da obliquidade de Urano. A variação da obliquidade foi feita de forma forçada por meio da variação controlada dos ângulos de Euler dada pelas equações:

$$\psi(t) = \frac{2\pi}{T_s}t, \quad (3.3)$$

$$\phi(t) = \frac{2\pi}{T_p}t, \quad (3.4)$$

onde o  $T_p$  é o período de precessão que é dado em função dos eixos principais de inércia  $A$  e  $C$ , do período orbital  $T_{orb}$ , do período de rotação (spin)  $T_s$  e de  $\theta$  (Goldreich 1965):

$$T_p = \frac{2T_{orb}^2 C}{3T_s(C - A)} \sec \theta. \quad (3.5)$$

Para o ângulo  $\theta$ , foram usados dois tipos de comportamento, nomeados de linear e amortecido. Em outras palavras, escolhermos dois tipos de tombos: um linear, que o corpo tomba com velocidade constante e para instantaneamente; e outro amortecido, que o corpo desacelera até atingir sua posição final ( $\theta_f$ ). As equações para os dois casos estão abaixo:

$$\theta(t) = \theta_0 + \frac{2\pi}{T_t}t, \quad \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}t + \frac{\ddot{\theta}}{2}t^2. \quad (3.6)$$

As condições iniciais de  $\theta$  foram determinadas para um dado tempo de tombo ( $T_t$ ) e obliquidade inicial ( $\theta_0$ ) e final ( $\theta_f$ ).

Para o cálculo do movimento orbital nós utilizamos um modelo simples de 2 corpos, sendo um corpo pontual orbitando outro de forma de elipsoide com movimento de atitude dado pela variação temporal dos ângulos de Euler conforme as equações 3.3, 3.4 e 3.5. Por simplicidade nós simulamos o sistema com  $n$ -partículas, ou seja, a simulação ocorre para todos os corpos ao mesmo tempo, porém cada corpo só interage com o corpo central. A equação do movimento de uma partícula  $i$  pode ser escrita da forma:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -k^2 (m_0 + m_i) \left( \frac{\vec{r}_i}{r_i^3} - T^T \vec{\nabla}' U_2^{(i)} \right), \quad (3.7)$$

onde o potencial  $U_2$  é dado pela equação 2.2. Como as equações de movimento de atitude não são integradas, nós não trabalhamos com quatérnios, assim, a matriz de rotação (seqüência 3-1-3: rotação do eixo  $z(3)$  de  $\phi$ ; rotação do eixo  $x(1)$  de  $\theta$  e rotação do eixo  $z(3)$  de  $\psi$ ) usada

é dada em função dos ângulos de Euler escrita na forma:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & \cos \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

### 3.3 Resultados

Nosso estudo sobre a origem da obliquidade de Urano está separada em duas partes. A primeira parte, nomeado de estudo preliminar, é sobre os primeiros resultados obtidos envolvendo análises de alguns parâmetros do problema em questão. A segunda parte envolve a ressonância do acoplamento spin-órbita entre Urano e um satélite de grande porte (Satélite X).

A tabela 3.1 mostra as condições iniciais de Urano utilizadas em todos os estudos.

Massa ( $M_U$ )	Raio equatorial ( $R_U$ )	$C_{22}$	$C_{20}$	Período de rotação
$1,478 \times 10^{19}$ kg	26200km	0	$-3343,0 \times 10^{-6}$	17,24 h

Tabela 3.1: Condições iniciais de Urano (Murray & Dermott 1999), onde  $C_{20}$  e  $C_{22}$  são os coeficientes de achatamento e elipticidade, respectivamente.

#### 3.3.1 Estudo preliminar

Partindo do argumento da impossibilidade de Urano, após a colisão, possuir satélites com orbitas equatoriais no modelo de colisão, iniciamos nossos estudos sobre a origem da obliquidade de Urano focando exatamente nesse problema, analisando o quão rápido o eixo de rotação pode tombar mantendo seus satélites em órbitas equatoriais. Para isso, realizamos um estudo fazendo Urano tombar forçadamente com diferentes tempos de tombo observando qual seria o semi-eixo maior limite que o satélite pode ter, ou seja, qual seria a maior distância que o satélite poderia ter de modo que seu plano orbital acompanhe o plano do equador do corpo central, isso para diferentes tempo de tombo.

O modelo utilizado neste estudo está apresentado na seção 2.3.

Realizamos este estudo por meio de simulações de Urano tombando forçadamente com um disco de partículas, igualmente espaçadas, com semi-eixos maior entre  $5,0 \times 10^5$ km e  $7,0 \times 10^5$ km, com órbitas equatoriais e circulares. Definimos o raio orbital estável ( $r_e$ ) como sendo raio orbital cujo o corpo possui inclinação máxima (ou final) de 5 graus. Utilizamos o número suficiente de partículas para a obtenção do  $r_e$ . Escolhemos 6 diferentes tempos de

tombo ( $t_T$ ) para a realização de nosso estudo:  $t_T = 1$  ano,  $t_T = 10$  anos,  $t_T = 100$  anos,  $t_T = 1$  mil anos,  $t_T = 10$  mil anos e  $t_T = 50$  mil anos. Fizemos o mesmo estudo para os dois tipos de tombo e concluímos que o valor máximo da inclinação do corpo durante o tombo linear é aproximadamente igual ao valor final da inclinação do corpo para o caso amortecido (ver figura 3.3). Os resultados deste estudo estão apresentados por meio de um gráfico do raio estável em função do tempo de tombo juntamente com a melhor curva ( $r_e(t_T)$ ) extraída dos resultados, vide figura 3.4. Como já era esperado, quanto mais distante o corpo estiver do corpo central, mais lento tem que ser o tombo para que o plano da órbita do mesmo acompanhe o plano do equador do corpo central. É claro observar que  $r_e$  respeita uma lei de potência em relação à  $t_T$ . A equação 3.9 é a equação da curva média encontrada. O coeficiente de correlação encontrado à 0,97. Portanto, para que o sistema atual de satélites naturais de Urano fosse exatamente nesta configuração antes do tombo, a equação obtida nos fornece que o tempo de tombo teria que ser no mínimo 33067,6 anos, tendo como base o satélite natural mais externo Oberon, com semi-eixo maior de 583520km ( $22.84R_U$ ).

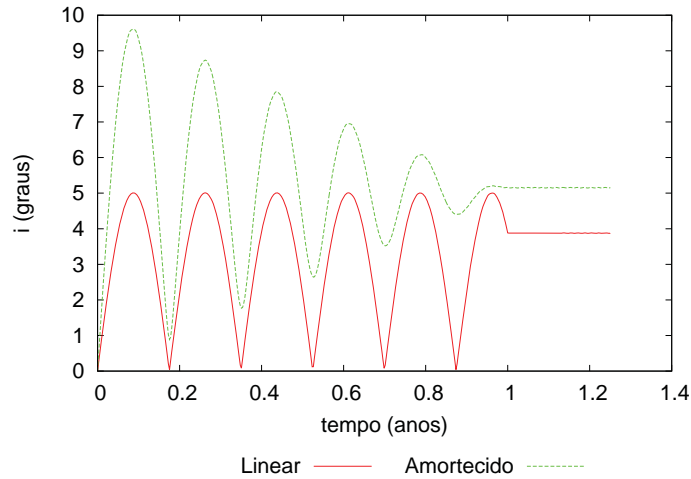


Figura 3.3: Inclinação orbital em função do tempo, para um tempo de tombo de um ano. Perceba que o pico da oscilação do caso linear é aproximadamente igual ao valor final do caso amortecido. Tomando como referência para o caso linear o valor máximo e como referência para o caso amortecido o valor final, o resultado dos dois são aproximadamente iguais. O coeficiente de correlação encontrado à 0,97

$$r_e(t_T) = 29962,9 \times t_T^{0,285322} \quad (3.9)$$

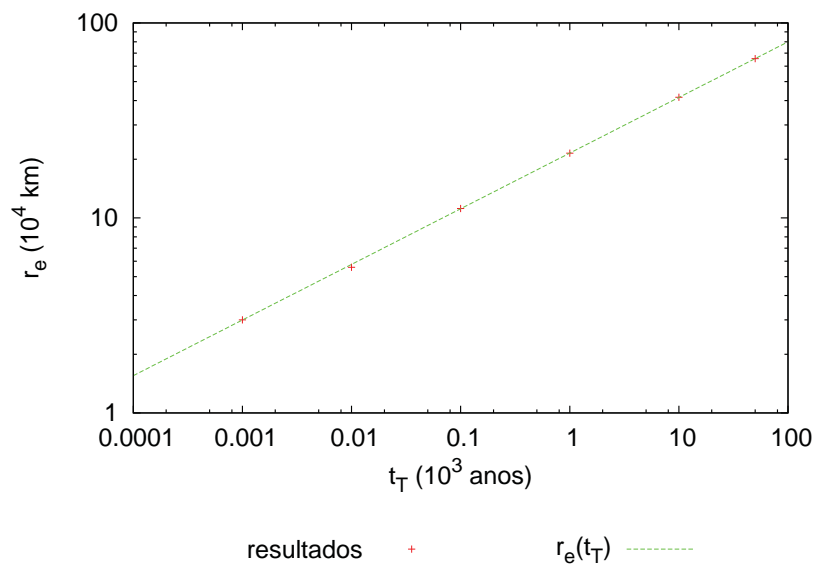


Figura 3.4:  $r_e \times t_T$  em escala dilog. Os pontos vermelhos representam os resultados obtidos das simulações e em verde está a melhor curva obtida dos resultados.

### 3.3.2 Variação da obliquidade via ressonância com Satélite X

Subdividimos este estudo em algumas partes. Primeiramente estudamos o sistema por integração simples (simples no sentido de não utilizar o Modelo de Nice) observando a evolução temporal de um sistema composto pelos planetas gigantes, Sol e o Satélite X em condições iniciais ditas ideais para o aumento da obliquidade de Urano (Boué & Laskar 2010). Posteriormente, já utilizando o Modelo de Nice com todos os planetas e Sol, simulamos os sistema considerando somente o Satélite X, posteriormente o Satélite X e Oberon, e por fim um sistema com todos os satélites naturais de Urano mais alguns outros satélites hipotéticos.

#### Integração simples

Como apresentado, estudos anteriores mostraram que se Urano possuiu em algum momento de sua vida grande inclinação orbital e um satélite de grande porte com determinada configuração de semi-eixo maior e massa, seu movimento de rotação pode entrar em uma determinada ressonância com o movimento orbital e vir adquirir altos valores de obliquidade reproduzindo assim a atual configuração do sistema (Boué & Laskar 2010). Partindo deste argumento, iniciamos nosso estudo fazendo simulações utilizando essas condições iniciais adequadas de modo a tentar reproduzir a atual configuração rotacional de Urano. As condições iniciais usadas estão apresentadas na tabela 3.2.

	Massa (kg)	$a$	$e$	$i(^{\circ})$	$\Omega(^{\circ})$	$\omega(^{\circ})$	$f(^{\circ})$
Satélite X	$86,8323 \times 10^{22}$	$1,31 \times 10^6$ km	0	0	0	0	0
Sol	$1,98 \times 10^{30}$	15 UA	0,5	17	0	180	0
Júpiter*	$1,89 \times 10^{27}$	5,2 UA	0,05	0,05	0	0	0
Netuno*	$102,43 \times 10^{24}$	25 UA	0,05	1	0	0	0
Saturno*	$568,46 \times 10^{24}$	9,3 UA	0,06	1,5	0	0	0

Tabela 3.2: Condições iniciais utilizadas para simulação. (\*Sol é o corpo central)

Utilizando estas condições iniciais, fizemos este estudo em três etapas: 1<sup>a</sup>) Simulamos o sistema com todos os corpos (sistema completo); 2<sup>a</sup>) simulamos somente o Satélite X e o Sol e 3<sup>a</sup>) simulamos o sistema com todos os corpos com exceção do Satélite X.

Nossos resultados mostraram que utilizando as condições iniciais apropriadas é possível obter a configuração atual da obliquidade somente levando em consideração perturbações dos gigantes gasosos e o Satélite X. A figuras 3.5 mostra o movimento rotacional de Urano considerando todos os corpos na simulação, onde pode-se observar a inclinação do equador obtendo o valor próximo de 90 graus. Outro resultado importante foi a não obtenção da alta obliquidade sem considerar os planetas nas simulações. A figura 3.6 mostra a evolução temporal da posição do eixo de rotação de Urano, para o caso sem os planetas, onde a

inclinação do equador de Urano possui comportamento oscilatório com valor máximo de 40 graus. Simulamos também com todos os planetas sem o Satélite X e, como já era esperado, os resultados mostram que não há grande aumento da inclinação do equador de Urano sem o mesmo possuir um satélite de grande porte ao seu redor (ver figura 3.7).

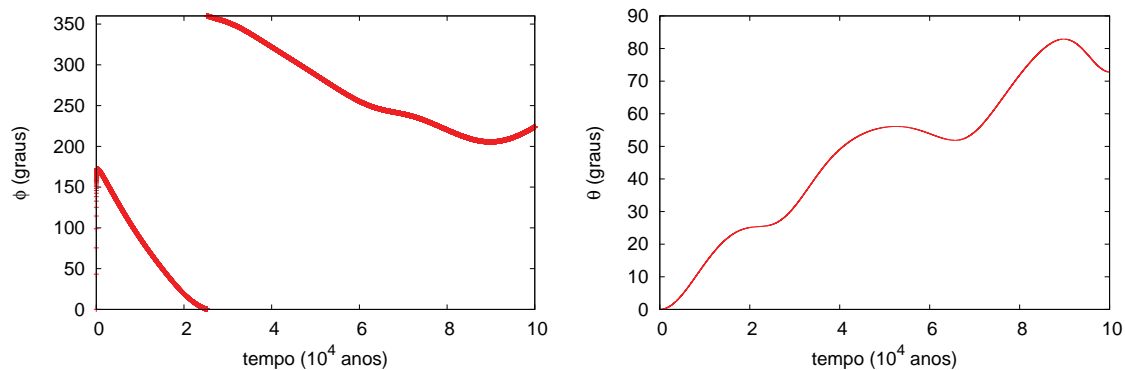


Figura 3.5: Evolução temporal dos ângulos de Euler  $\theta$  (inclinação do equador) e  $\phi$  (do nó do equador) de Urano para o caso completo (Urano, Satélite X, Sol, Júpiter, Saturno e Netuno).

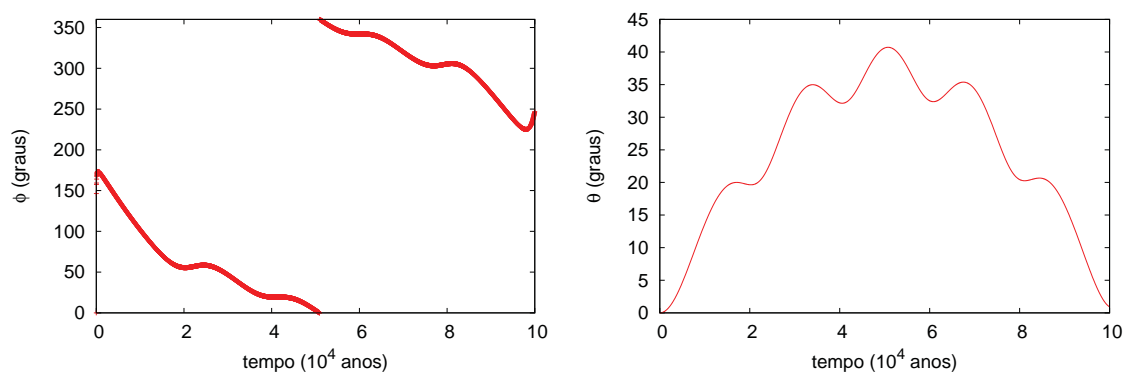


Figura 3.6: Evolução temporal dos ângulos de Euler  $\theta$  (inclinação do equador) e  $\phi$  (do nó do equador) de Urano para o caso considerando somente Urano, Satélite X e Sol.

Apesar das conclusões satisfatórias deste tópico, algumas perguntas ainda devem ser respondidas. Uma delas é como Urano pode obteve alta inclinação orbital durante sua vida. Outra seria a não existência do Satélite X nos dias de hoje. Tentaremos resolver essas e outras perguntas no próximo tópico, no qual adotaremos os planetas com órbitas provenientes do Modelo de Nice.

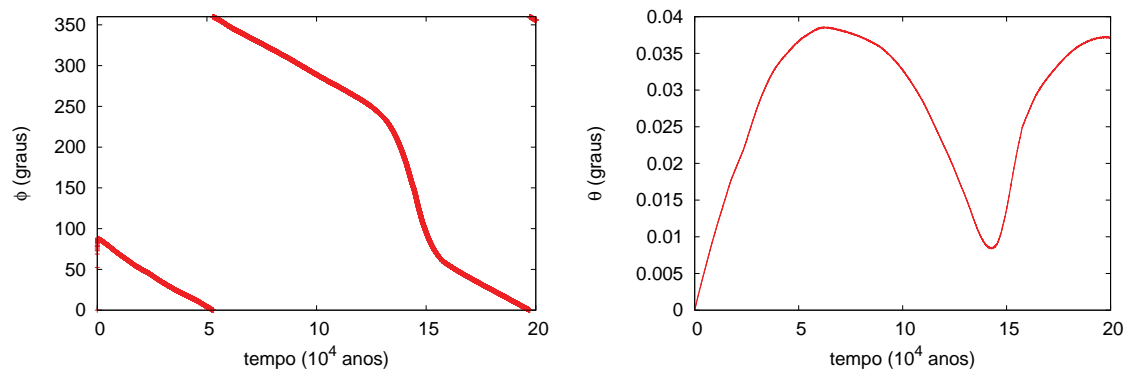


Figura 3.7: Evolução temporal dos ângulos de Euler  $\theta$  (inclinação do equador) e  $\phi$  (do nó do equador) de Urano para o caso sem o Satélite X.

## Via Modelo de Nice

O objetivo deste tópico é tentar reproduzir a atual obliquidade de Urano via Modelo de Nice. Fizemos este estudo focando na dependência das condições iniciais para que ocorra o fenômeno. As primeiras condições iniciais para análise foram o semi-eixo maior e a massa do Satélite X, pois estas foram ditas importantes no trabalho de Boué & Laskar (2010). Posteriormente analisamos a dependência dos resultados em função da posição orbital (longitude média) do Satélite X. Por fim, estudamos a influência e a dinâmica de mais satélites no problema.

A evolução orbital dos planetas adotada provenientes de uma simulação do Modelo de Nice está apresentado na figura 3.8. Utilizamos simulações do modelo de Nice integradas previamente com passos de saída com intervalos de 100 anos. Entre cada ponto de saída foi interpolado funções lineares para as simulações. Em outras palavras, por exemplo, entre  $t_0 = 0$  anos e  $t_{100} = 100$  anos interpolamos um polinômio de primeiro grau para cada elemento orbital, com exceção da anomalia média que foi obtida pela equação  $M = n(t - \tau_m)$ , o onde  $n$  é o movimento médio e  $\tau$  é a média dos tempos de passagem pelo periélio de  $t_0$  e  $t_{100}$ , ou seja,  $\tau_m = (\tau(t_{100}) - \tau(t_0))/2$ .

**a- Dependência da massa e semi-eixo maior inicial do Satélite X:** Foram estudados 16 casos: 4 diferentes valores de massa e 4 diferentes valores semi-eixo maior do Satélite X, onde todos os casos o corpo possui órbita inicial plana ( $i = 0$ ), circular ( $e = 0$ ) e longitude do média  $\lambda = 0$ . As quatro massas utilizadas foram:  $m_1 = 1/100M_U$ ;  $m_2 = 1/150M_U$ ;  $m_3 = 1/200M_U$ ;  $m_4 = 1/1000M_U$ ; e os quatro semi-eixos foram:  $a_1 = 30R_U$ ;  $a_2 = 40R_U$ ;  $a_3 = 50R_U$ ;  $a_4 = 60R_U$ ; onde  $M_U$  e  $R_U$  são a massa e o raio equatorial de Urano (ver tabela 3.2), respectivamente.

Apresentamos os resultados através da evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X e a inclinação do equador de Urano que estão apresentados nas figuras 3.9, 3.10, 3.11 e 3.12. Observando os resultados, pode-se concluir que a massa e o semi-eixo maior inicial do Satélite X têm grande importância na dinâmica do sistema. Uma conclusão geral que tiramos é que a amplitude de oscilação da obliquidade de Urano é diretamente proporcional à massa do satélite (os resultados em vermelho nas figuras 3.9, 3.10, 3.11, 3.12). O semi-eixo maior inicial, mesmo tendo variações abruptas durante sua evolução, também influencia diretamente na variação da obliquidade de Urano. Pode-se também observar que a inclinação orbital do satélite tem ligação direta com a obliquidade do corpo central, fato este esperado pela troca de momento angular orbital e rotacional entre os dois corpos. Nessas primeiras simulações, somente o caso com maior massa ( $m_1$ ) conseguimos obter a atual configuração do eixo de rotação de Urano. A simulação é interrompida quando o módulo do

vetor posição do Satélite X em relação à Urano ultrapassa um Raio de Hill. Não se observa o semi-eixo maior do Satélite X crescendo antes do término da simulação porque o fenômeno de escape possivelmente ocorre entre as saídas de dados (o passo de saída usado foi de 20 anos). Dos casos com escape, o único que podemos afirmar a causa é o caso com massa  $m_1$ , pois o mesmo ocorre no momento que Urano “troca de órbita” com Netuno ( $t \approx 14 \times 10^5$  anos), vide figura 3.8. Por fim, conclui-se que o aumento da obliquidade só ocorre quando a longitude do nodo do satélite ( $\Omega$ ) entra em sincronismo com a longitude do equador de Urano ( $\phi$ ), como observado anteriormente no trabalho de Yokoyama et al. (2013). É claro observar essa importância quando comparamos as figuras 3.13, 3.14 e 3.15, de modo que a situação de crescimento da obliquidade só ocorre quando o ângulo ressonante ( $\Omega - \phi$ ) está próximo de zero. Fizemos esta mesma análise utilizando o ângulo ressonante citado Boué & Laskar (2010) porém não foi observado relação entre a libração deste ângulo com o aumento da obliquidade de Urano. Apesar de parecerem semelhantes, os ângulos ressonantes utilizado por Boué & Laskar (2010) ( $\phi_\alpha - \phi_\nu - \pi$ ) e por Yokoyama et al. (2013) ( $\Omega - \phi$ ) são diferentes.  $\phi_\alpha$  é ângulo entre o eixo de referência e a projeção do eixo de rotação do spin, ou seja, é um ângulo similar ao ângulo de Euler  $\phi$  (ângulo de precessão do eixo de rotação), e ( $\phi_\nu$ ) é o ângulo entre eixo de referência e a projeção do vetor perpendicular ao plano orbital de Urano que é similar à longitude do nodo ascendente de Urano. A diferença principal entre esses dois ângulos ressonantes é que o usado por Boué & Laskar (2010) está relacionado com o plano orbital de Urano ( $\phi_\nu \propto \Omega_U$ ) enquanto o usado por Yokoyama et al. (2013) está relacionado com o plano orbital do Satélite X ( $\Omega$ ).

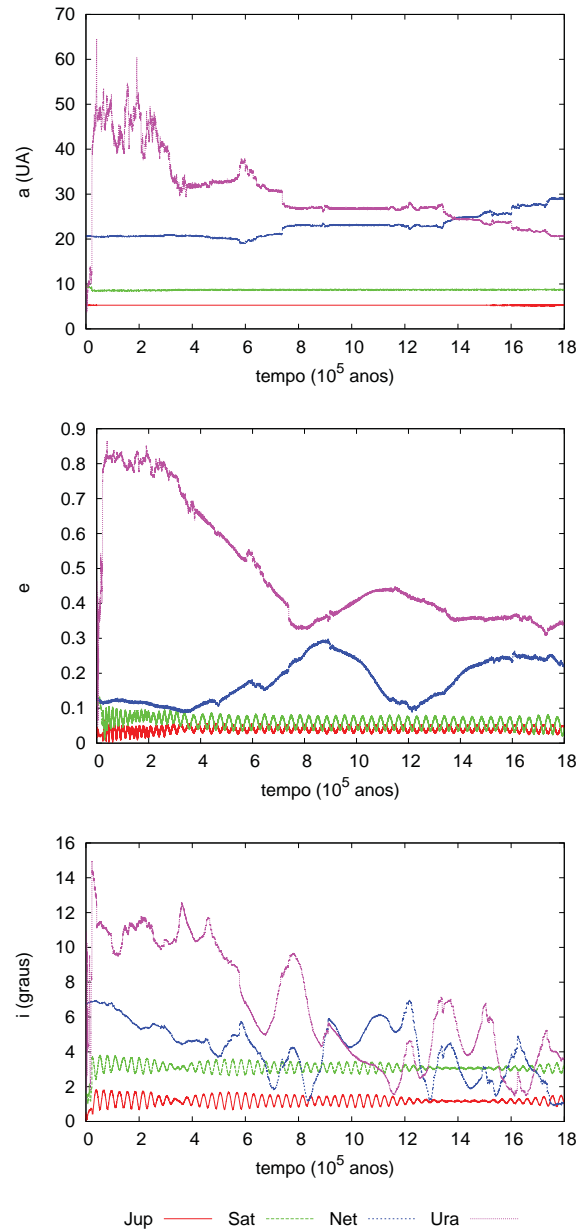


Figura 3.8: Evolução temporal dos elementos orbitais (semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$  e inclinação  $i$ ) dos planetas Júpiter, Saturno, Urano e Netuno, provenientes de uma simulação do Modelo de Nice.

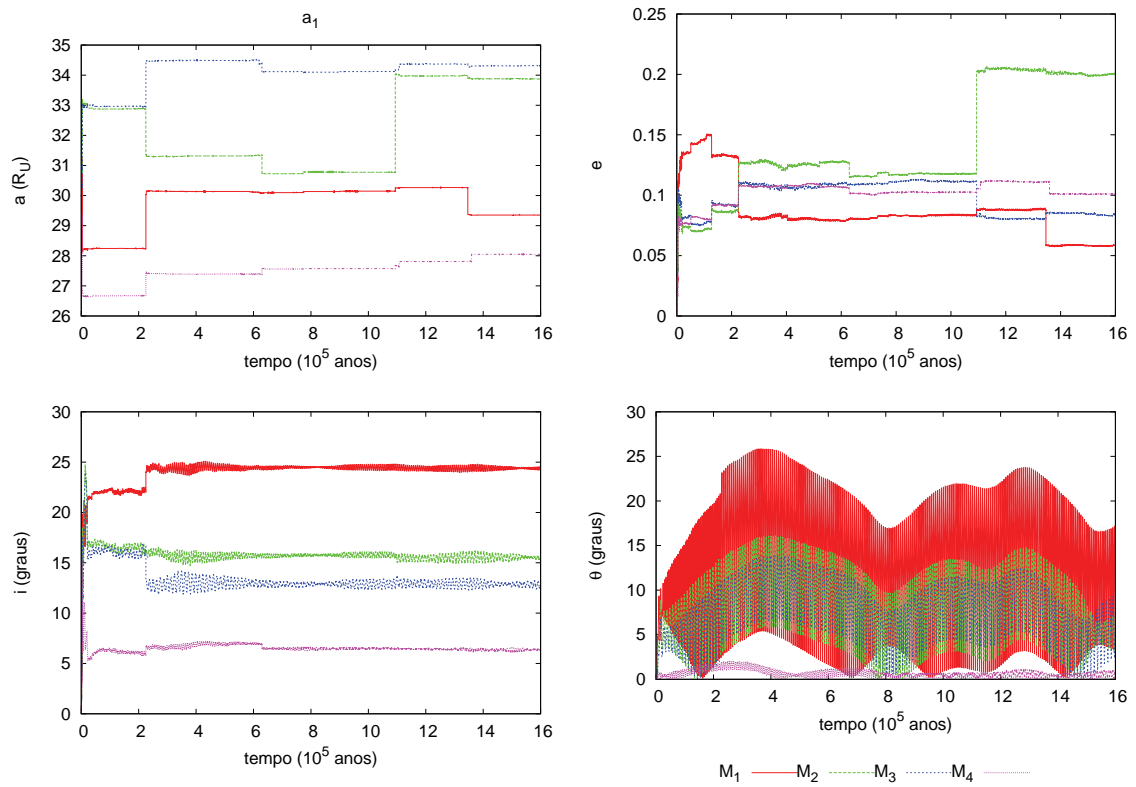


Figura 3.9: Evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X (semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$  e inclinação  $i$ ) e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_1 = 30R_U$  para 4 diferentes massas do Satélite X.

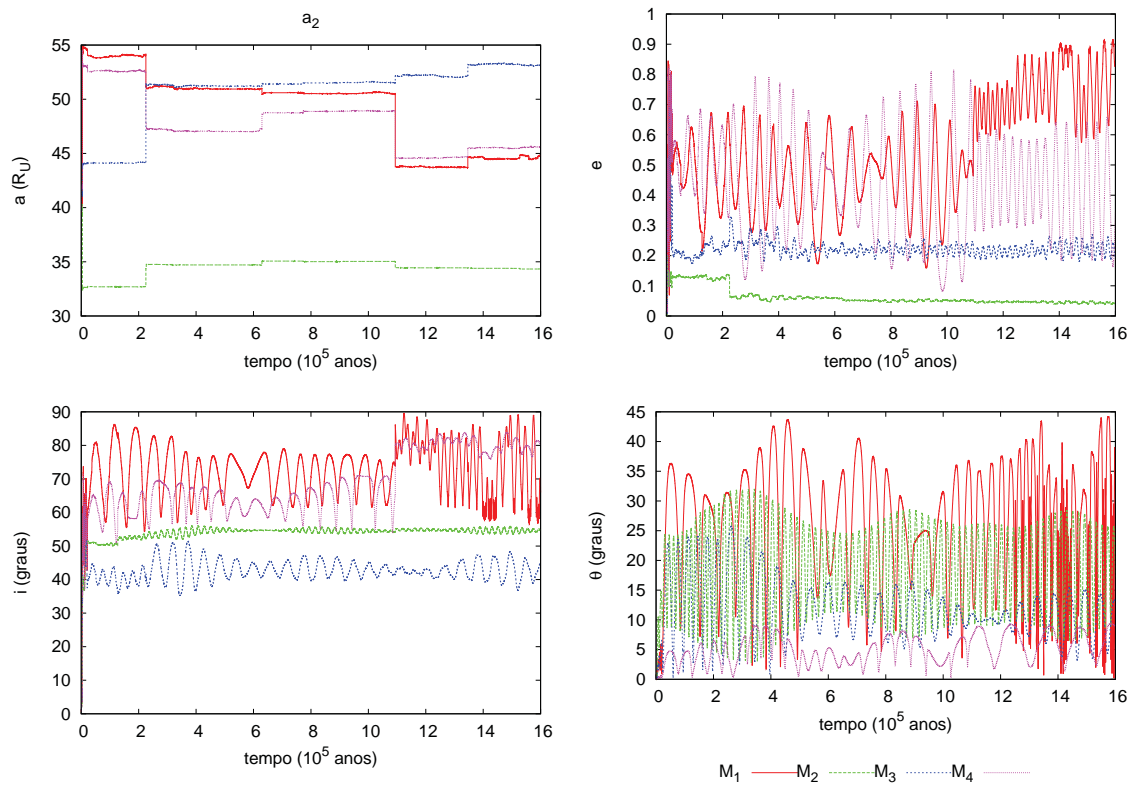


Figura 3.10: Evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X (semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$  e inclinação  $i$ ) e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_2 = 40R_U$  para 4 diferentes massas do Satélite X.

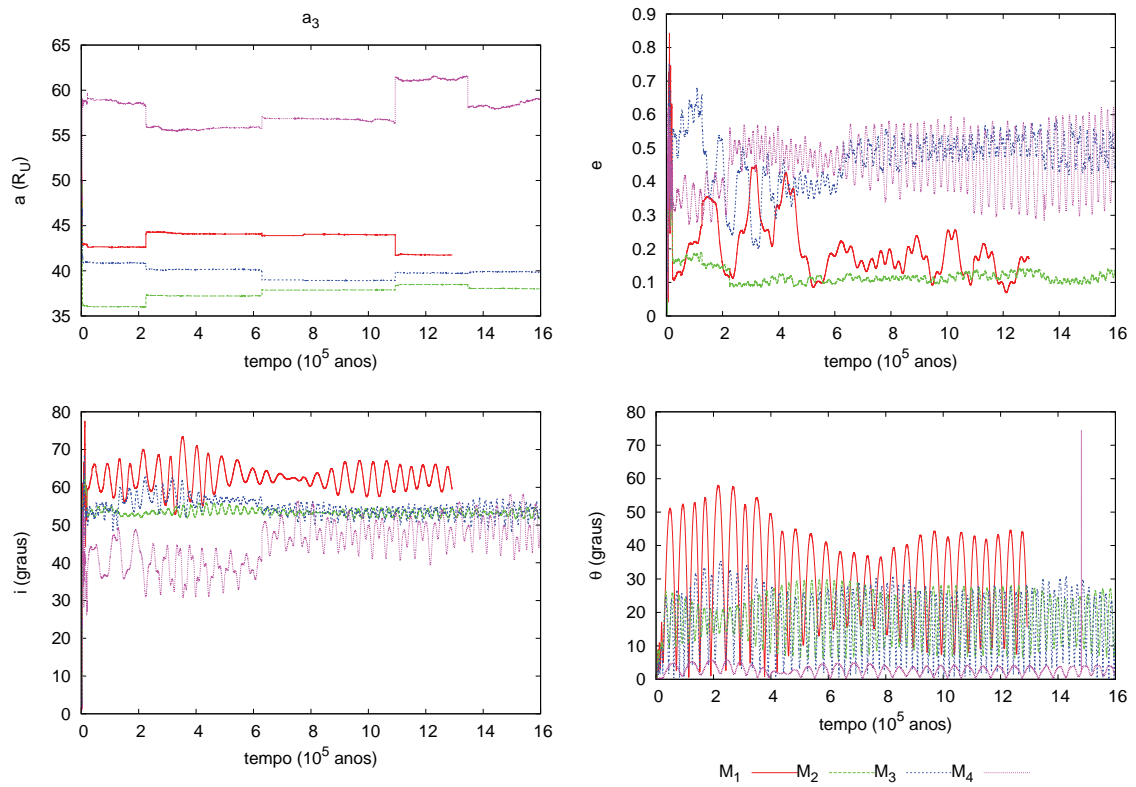


Figura 3.11: Evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X (semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$  e inclinação  $i$ ) e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_3 = 50R_U$  para 4 diferentes massas do Satélite X.

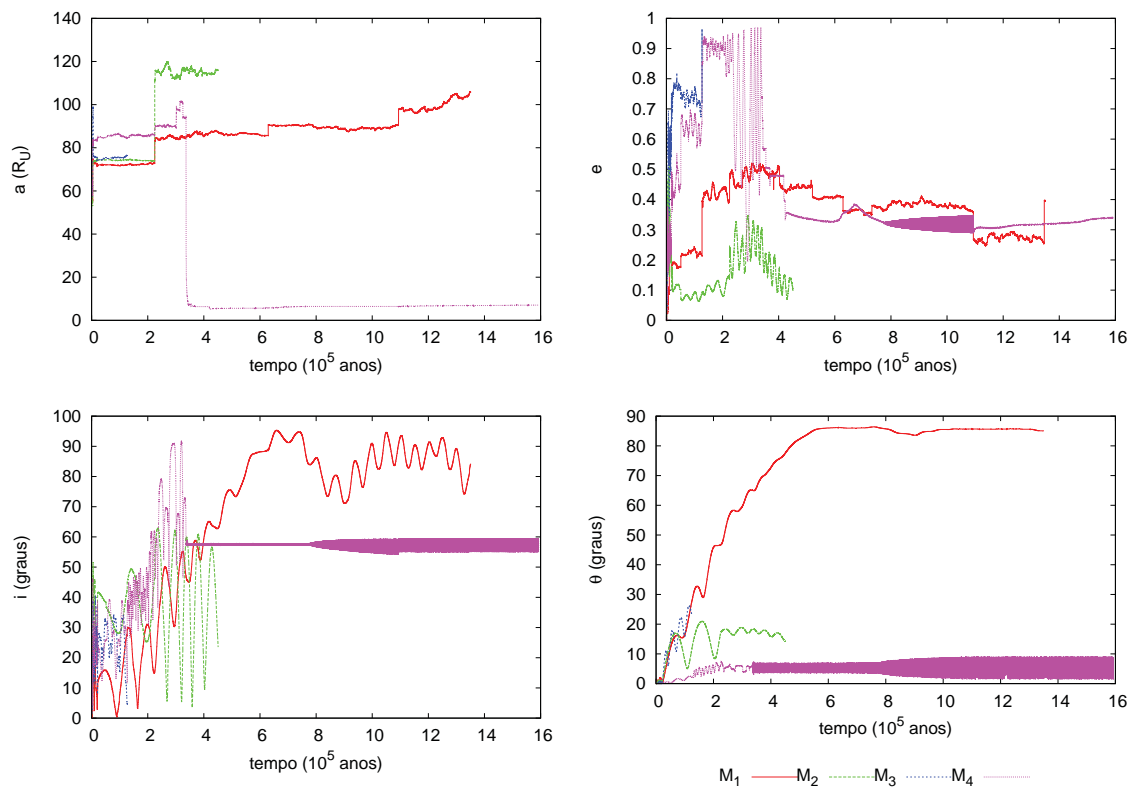


Figura 3.12: Evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X (semi-eixo maior  $a$ , excentricidade  $e$  e inclinação  $i$ ) e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_4 = 60R_U$  para 4 diferentes massas do Satélite X.

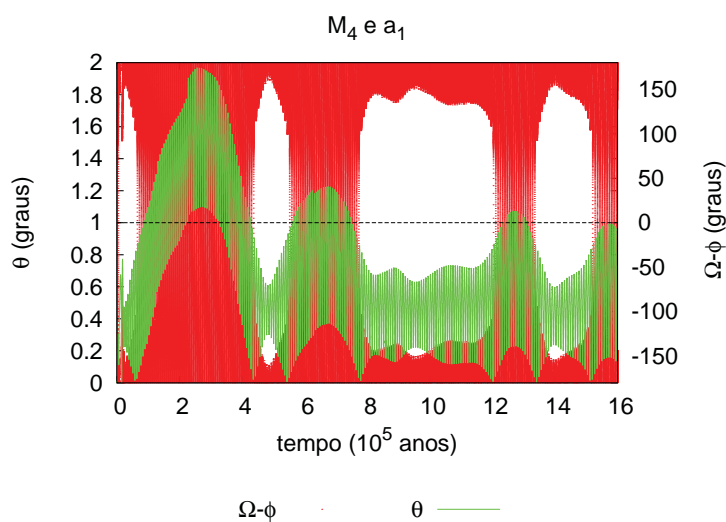


Figura 3.13: Evolução temporal do ângulo ressonante  $\Omega - \phi$  (em vermelho) e da inclinação do equador de Urano  $\theta$  (em verde) para o caso semi-eixo maior  $a_1$  e massa  $M_4$ .

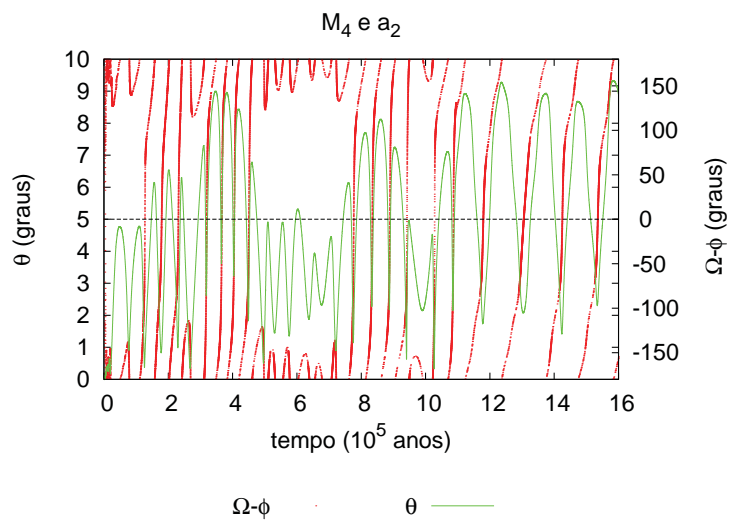


Figura 3.14: Evolução temporal do ângulo ressonante  $\Omega - \phi$  (em vermelho) e da inclinação do equador de Urano  $\theta$  (em verde) para o caso semi-eixo maior  $a_2$  e massa  $M_4$ .

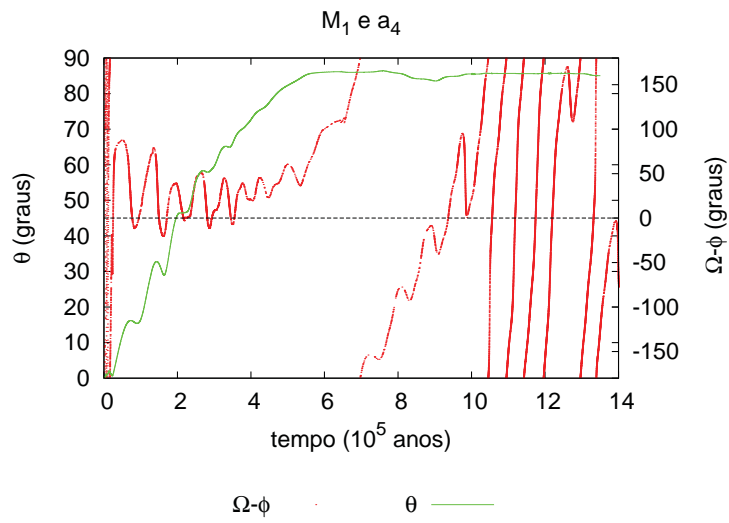


Figura 3.15: Evolução temporal do ângulo ressonante  $\Omega - \phi$  (em vermelho) e da inclinação do equador de Urano  $\theta$  (em verde) para o caso semi-eixo maior  $a_4$  e massa  $M_1$ .

Observando que o sistema é sensível as condições iniciais, resolvemos explorar outra condição inicial que até então mantivemos iguais em todas as simulações, a longitude média do Satélite X. Os resultados estão apresentados no próximo tópico.

**b- Sensibilidade da longitude média inicial do Satélite X:** Foram estudados no total 24 casos: O Satélite X com 4 diferentes massas ( $m_1 = 1/100M_U$ ;  $m_2 = 1/150M_U$ ;  $m_3 = 1/200M_U$ ;  $m_4 = 1/1000M_U$ ) e semi-eixo maior igual à  $a_4 = 60R_U$ . Para esses quatro casos foram feitas simulações para 6 diferentes valores iniciais da longitude média do Satélite X ( $\lambda = 0, 60, 120, 180, 240, 300$  graus). Os resultados estão apresentados nas figuras 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19, por meio da evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X e da inclinação do equador  $\theta$  de Urano. Os resultados mostram que a longitude média inicial possui grande influência nos resultados.

A figura 3.16 mostra os resultados de  $m_1$  e  $a_4$ , condição inicial que conseguimos reproduzir o valor atual de  $\theta$  no tópico anterior. Note que dos 6  $\lambda$ 's usados, somente 2,  $\lambda = 0^\circ$  (em preto) e  $\lambda = 60^\circ$  (em vermelho), foram obtido valores altos da obliquidade, assim, mesmo nas condições ditas ideais, há casos, a maioria deles, em que não foi possível reproduzir a atual obliquidade de Urano. E desses dois casos, só com  $\lambda = 0^\circ$  o Satélite X deixa de orbitar Urano após o crescimento da obliquidade, resultado ideal. Outro caso que conseguimos obter esse resultado foi com massa  $m_2$ . Note na figura 3.17 que o caso  $\lambda = 180^\circ$  (curva em azul escuro) que a obliquidade atinge o valor próximo de 90 graus e o Satélite X é ejetado em  $t \sim 11 \times 10^5$  anos. Os casos com massa de menor valor ( $m_3$  e  $m_4$ ) não mostraram eficiência no aumento da obliquidade (figuras 3.18 e 3.19). Plotamos também o gráfico do ângulo ressonante  $(\Omega - \phi)$  e  $\theta$  em função do tempo para o outro resultado ideal encontrado ( $a_4$ ,  $m_2$  e  $\lambda = 180^\circ$ ), apresentado na figura 3.20.

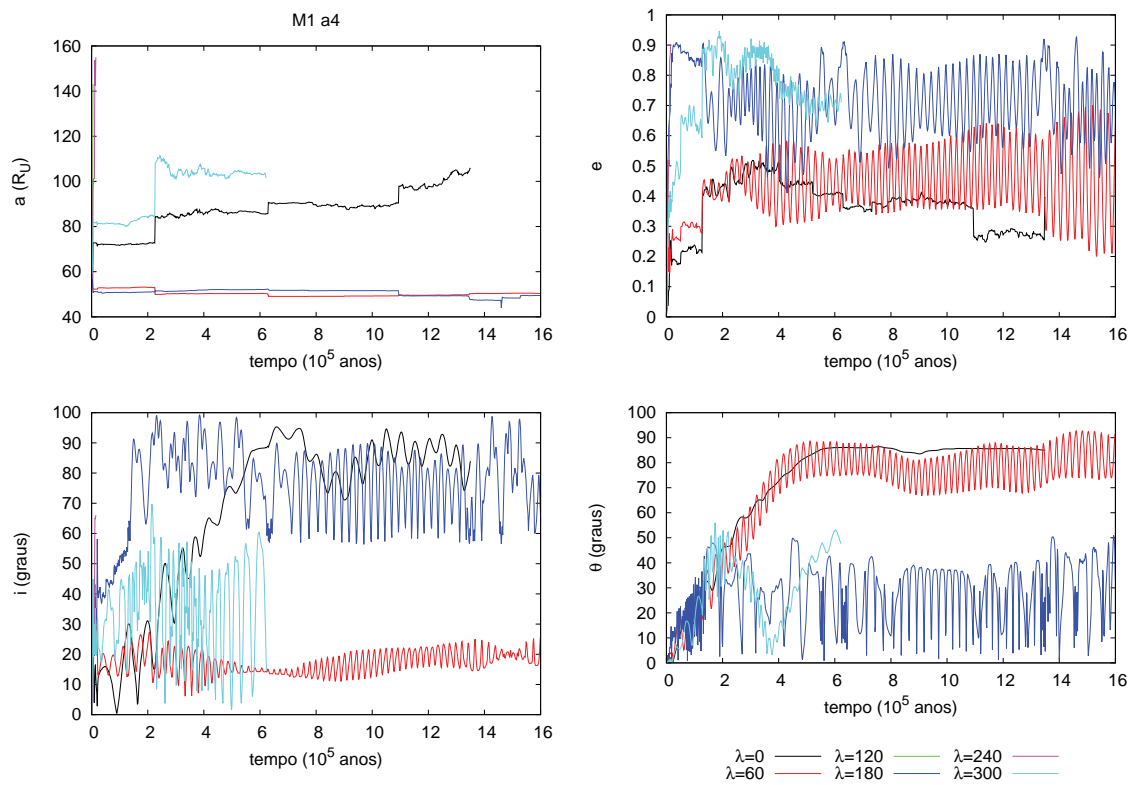


Figura 3.16: Figuras da evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_4$  e  $m_1$  para 6 diferentes valores inicial da longitude média do Satélite X.

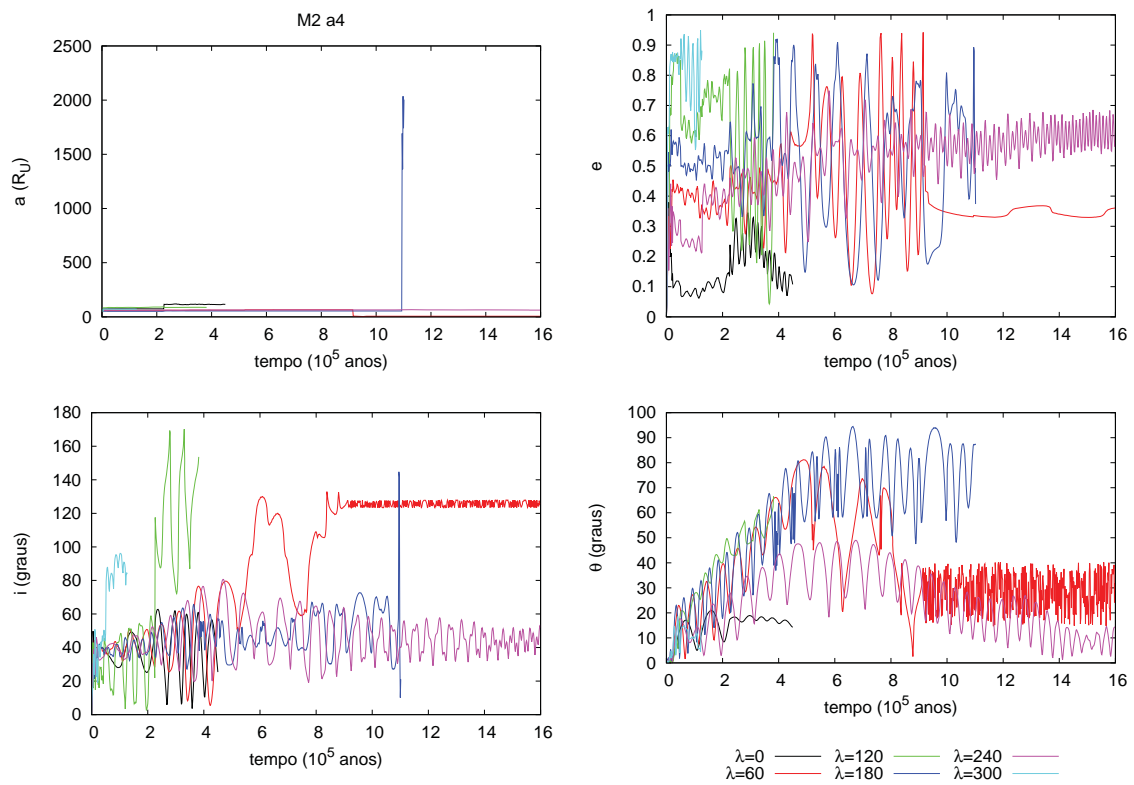


Figura 3.17: Figuras da evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_4$  e  $m_2$  para 6 diferentes valores inicial do longitude média do Satélite X.

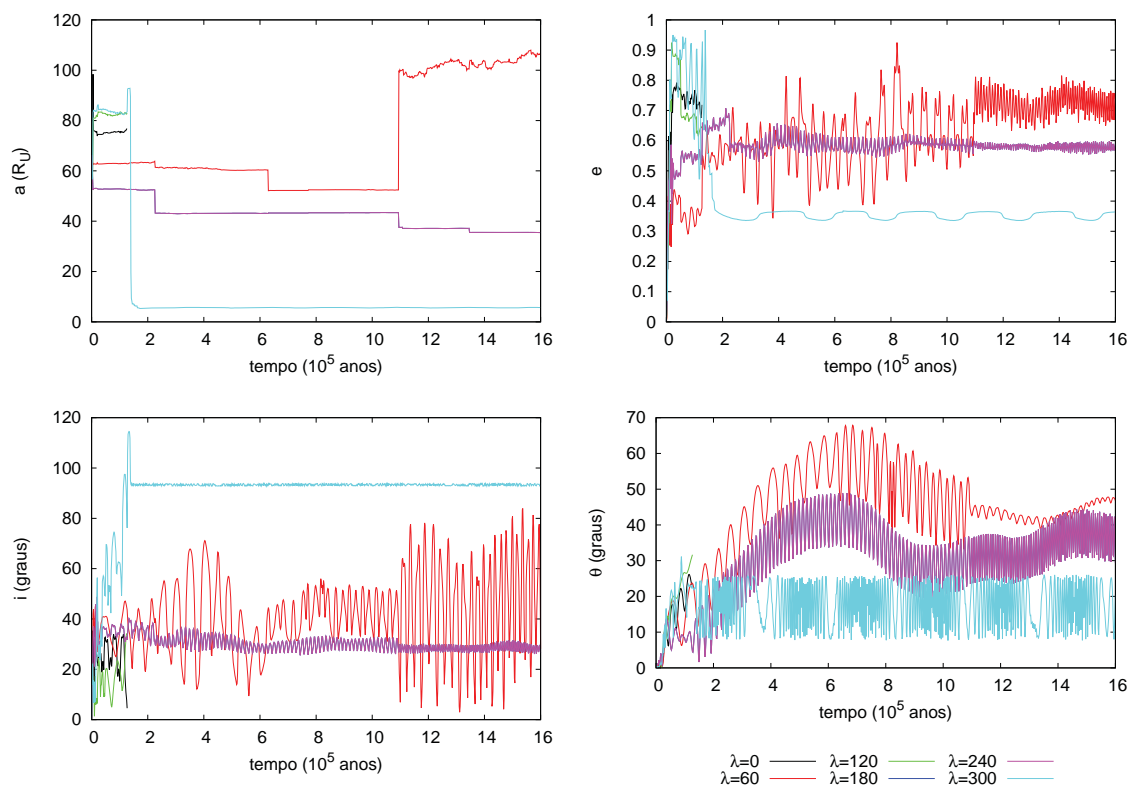


Figura 3.18: Figuras da evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_4$  e  $m_3$  para 6 diferentes valores inicial do longitude média do Satélite X.

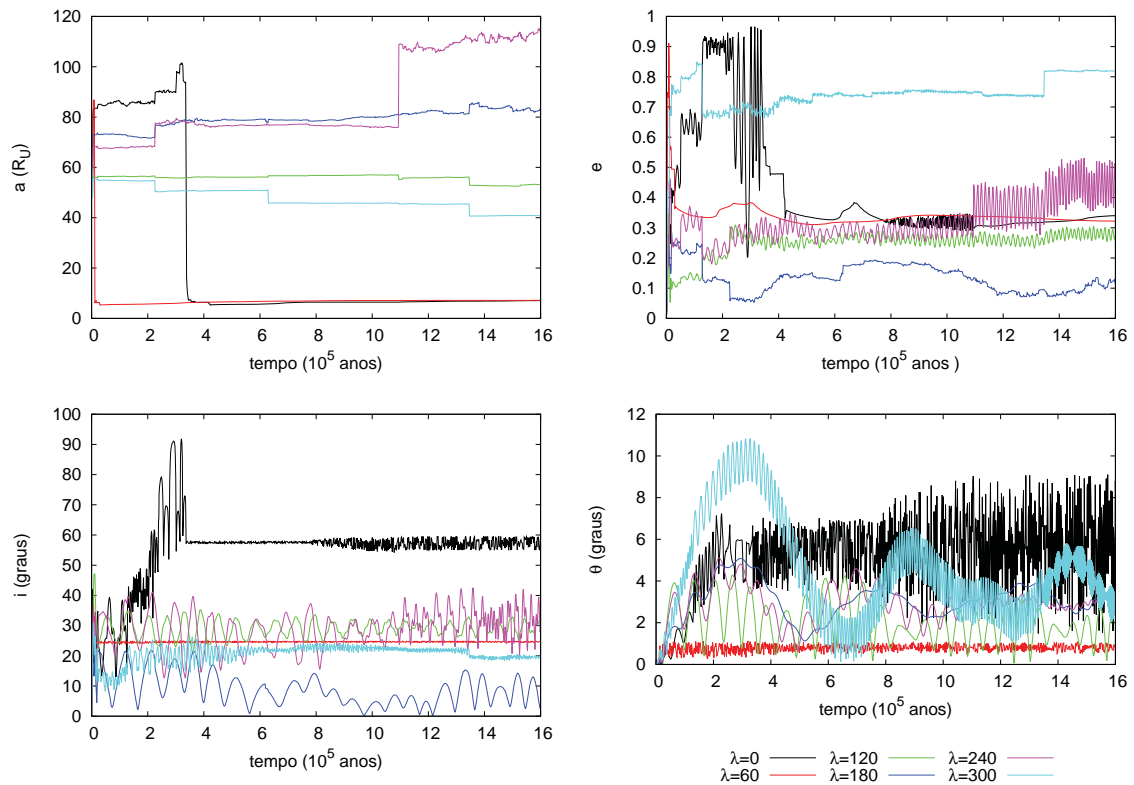


Figura 3.19: Figuras da mostram a evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) de simulações com semi-eixo maior  $a_4$  e  $m_4$  para 6 diferentes valores inicial do longitude média do Satélite X.

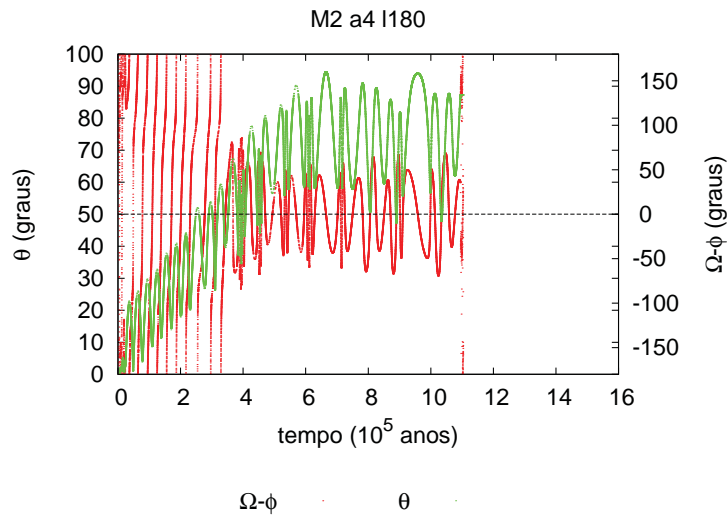


Figura 3.20: Figura da evolução temporal do ângulo ressonante ( $\Omega - \phi$ ) (em vermelho) e da inclinação do equador de Urano ( $\theta$ ) (em verde) do caso com semi-eixo maior  $a_4$ , massa  $M_2$  e longitude média inicial ( $\lambda$ ) 180 graus.

**c- Satélite X mais Oberon:** Um dos argumentos contrários ao modelo de origem da obliquidade via Satélite X é o fato do mesmo perturbar fortemente os satélites internos a ponto de desestabilizá-los. A fim de estudar este problema, resolvemos incluir Oberon na simulações. As condições iniciais de Oberon são semelhantes as atuais e estão apresentadas na tabela 3.3.

	Massa	$a$	$e$
Miranda	$7,90747 \times 10^{-7} M_U$	$4,95413 R_U$	0,000657723
Ariel	$1,62349 \times 10^{-5} M_U$	$72,9758 R_U$	0,000997302
Umbriel	$1,4063 \times 10^{-5} M_U$	$10,1525 R_U$	0,000769895
Titania	$4,2321 \times 10^{-5} M_U$	$16,6333 R_U$	0,000310916
Oberon	$3,61655 \times 10^{-5} M_U$	$22,2745 R_U$	0,000993576

Tabela 3.3: Condições iniciais dos satélites naturais de Urano utilizadas. Todos iniciam com orbitas planares ( $i = 0$ ). Note que Ariel não utilizamos o semi-eixo maior correspondente ao atual, porém acreditamos que está diferença não influencia as conclusões obtidas do nosso estudo.

Iniciamos nossas simulações utilizando a condição mais favorável pra crescimento da obliquidade,  $M_1$  e  $a_4$ , porém, em nenhum dos casos obtivemos sucesso, pois rapidamente Oberon foi ejetado do sistema devido à perturbação do Satélite X. Posteriormente, utilizando o mesmo semi-eixo maior inicial, simulamos para os outros valores de massa ( $M_2$ ,  $M_3$  e  $M_4$ ), entretanto em nenhum dos casos obtivemos sobrevivência de Oberon. Após a falta de sucesso destas primeiras simulações, resolvemos repetir a mesma estratégia anterior e ver como os resultados com Oberon se comportam para diferentes valores de longitude de pericentro inicial do Satélite X. Utilizamos o menor valor de massa a fim de minimizar sua perturbação. Plotamos todos os resultados deste último estudo nas figuras 3.21 e 3.22. Note que Oberon só sobreviveu em dois casos,  $\lambda = 120^\circ$  e  $\lambda = 240^\circ$ , no entanto as configurações de Oberon diferem muito da configuração atual e a obliquidade de Urano não cresce o suficiente. Portanto, podemos concluir que não é possível reproduzir a atual obliquidade de Urano e manter Oberon em órbita do mesmo. No entanto, ao observar a figura 3.22, notamos que a presença de Oberon proporciona um efeito de “*boost*” (amplificação) na amplitude da oscilação da obliquidade de Urano. Este resultado nos faz concluir que de certa forma a combinação de dois ou mais satélites podem amplificar a perturbação no eixo de rotação de Urano, de modo talvez seja possível obter a atual obliquidade de Urano com alguns satélites de menor massa. Partindo desses resultados, resolvemos fazer um estudo considerando mais satélite em torno de Urano que está apresentado no próximo tópico.

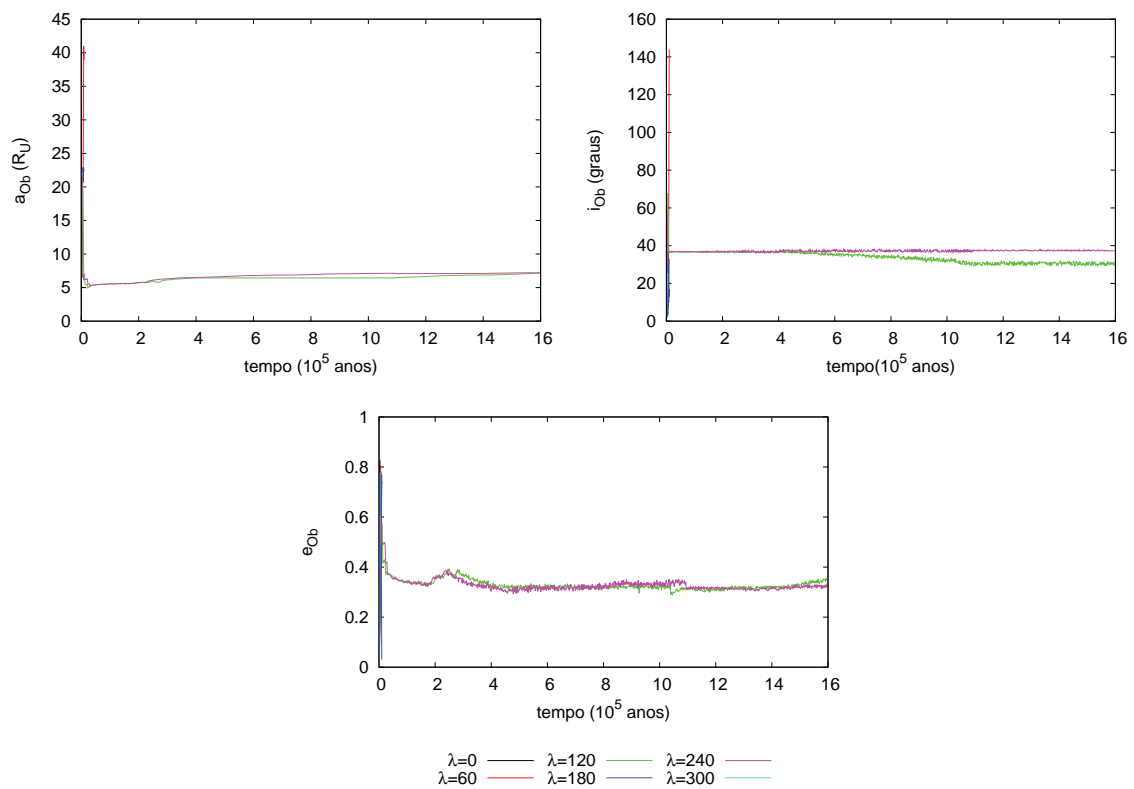


Figura 3.21: Os gráficos acima mostram a evolução temporal dos elementos orbitais de Oberon de simulações com semi-eixo maior e massa do Satélite X iguais a  $a_4$  e  $M_4$ , respectivamente. Dos 6 diferentes valores iniciais do longitude média inicial do Satélite X simulados, somente dois casos os satélites sobrevivem:  $\lambda = 120^\circ$  e  $\lambda = 240^\circ$ .

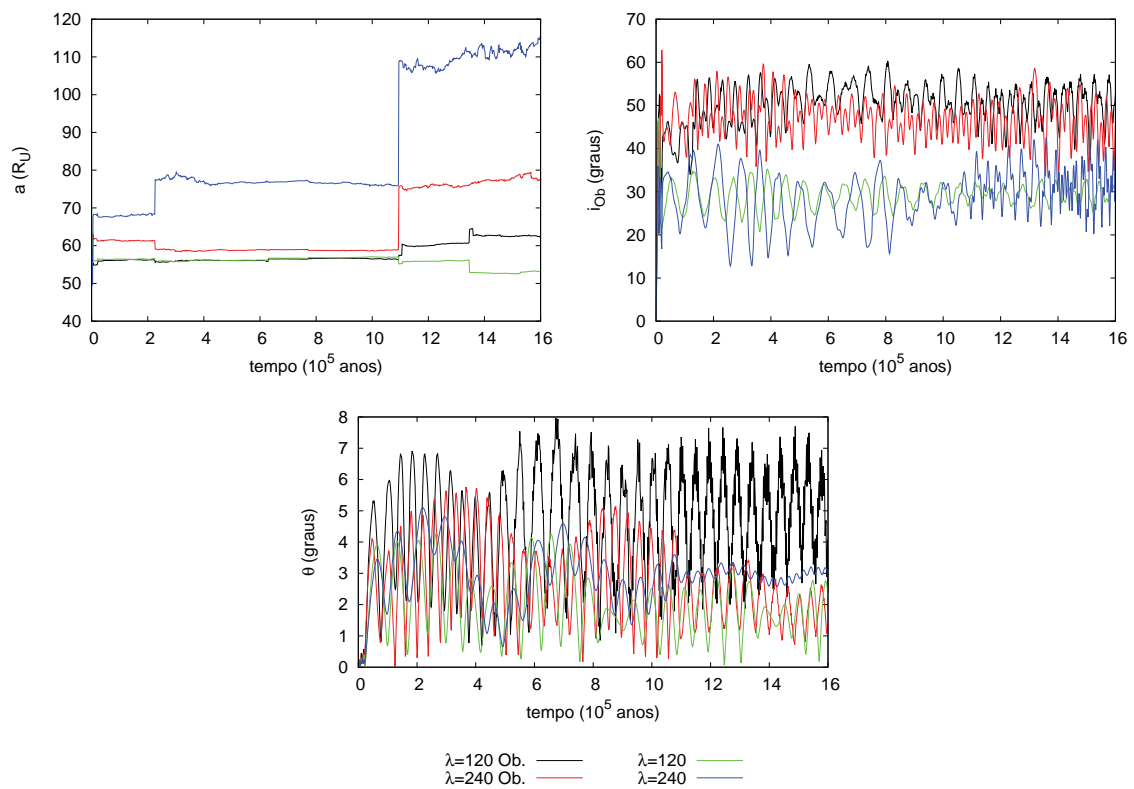


Figura 3.22: Os gráficos acima mostram a evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X de simulações com semi-eixo maior e massa do Satélite X iguais a  $a_4$  e  $M_4$ , respectivamente. Em vermelho e preto são os resultados com Oberon e em azul e verde os casos sem Oberon.

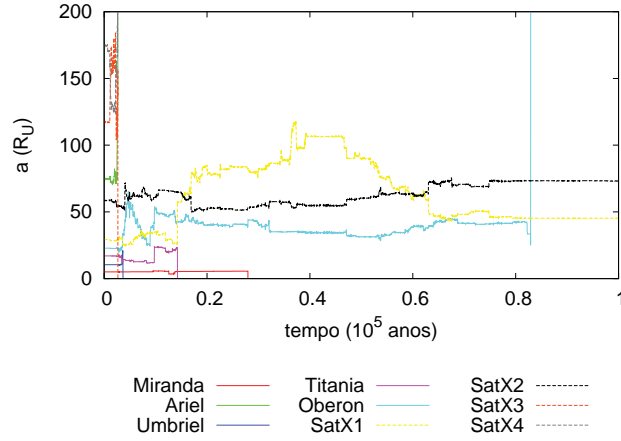


Figura 3.23: Gráfico dos semi-eixos maiores de todos os satélites em função do tempo. Note que somente os Satélite  $X_1$  (em amarelo) e Satélite  $X_2$  (em preto) sobrevivem durante 100 mil anos de integração.

**d- Satélites naturais e alguns Satélites X:** Como já dito anteriormente, o efeito de *boost* observado no estudo com Oberon nos instigou a realizar simulações com mais satélites na esperança de conseguir obter a atual obliquidade de Urano sem a necessidade de um corpo extremamente massivo. Decidimos por simular um sistema com os 5 satélites naturais (Miranda, Ariel, Umbriel, Titania e Oberon) e mais quatro Satélites X ( $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $X_4$ ). As condições iniciais usadas nesta simulação estão apresentadas nas tabelas 3.3 e 3.4.

Infelizmente, os resultados foram insatisfatórios, pois todos os satélites naturais foram ejetados dos sistema em menos de 100 mil anos de tempo de integração. A figura 3.23 mostra o semi-eixos maiores de todos os satélites em função do tempo, e, podemos notar que somente dois dos corpos sobrevivem, Satélite  $X_1$  (em amarelo) e Satélite  $X_2$  (em preto).

	Massa	$a$	$e$
$X_1$	$5,96693 \times 10^{-5} M_U$	28,5492 $R_U$	0,000725429
$X_2$	$1,19339 \times 10^{-4} M_U$	57,0984 $R_U$	0,000742293
$X_3$	$2,38677 \times 10^{-4} M_U$	114,197 $R_U$	0,000336387
$X_4$	$3,58016 \times 10^{-4} M_U$	171,0 $R_U$	0,000236387

Tabela 3.4: Condições iniciais dos Satélites X utilizadas. Todos iniciam com orbitas planas ( $i = 0$ ).

**e-Efeito de encontros próximos com Júpiter:** Apresentamos neste tópico um estudo sucinto da influência dos encontros próximos de Urano com Júpiter na dinâmica do Satélite X durante o Modelo de Nice. Essa influência está mostrada por meio da evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X, juntamente com a inclinação do equador e a distância radial entre Júpiter e Urano.

O Raio de Hill de Urano ( $R_H$ ) utilizado na figura 3.24 foi calculado por meio da equação (3.10) (Murray & Dermott 1999).

$$R_H = a(1 - e) \left( \frac{m_U}{3m_{Sol}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.10)$$

onde  $a$ ,  $e$  e  $m_U$  são respectivamente o semi-eixo maior, a excentricidade e a massa de Urano, e,  $m_{Sol}$  a massa do Sol.

A influência de Júpiter no movimento orbital do Satélite X está mostrada claramente na figura 3.24, na qual podemos observar variações no semi-eixo maior e excentricidade do Satélite X quando Júpiter tem encontro próximo com Urano ( $r_{Jupiter} < 0, 1UA$ ). A inclinação orbital do satélite e a inclinação do equador de Urano não sofrem influência direta de Júpiter, porém, como já visto anteriormente, o semi-eixo maior do Satélite X é um fator determinante para o aumento de  $\theta$ , portanto, Júpiter ao afetar o semi-eixo maior do Satélite X, afeta também, de forma indireta, a variação da obliquidade de Urano.

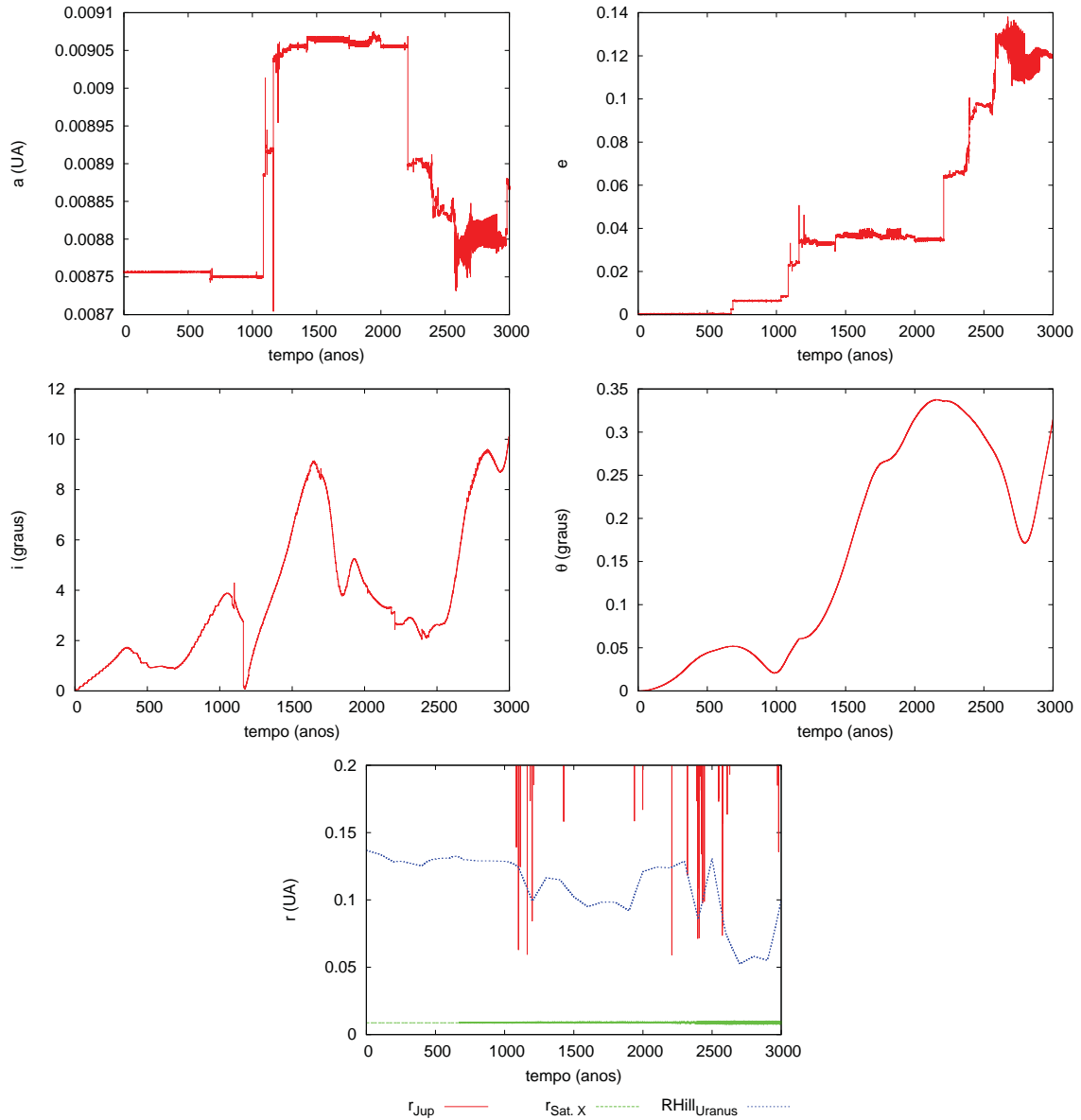


Figura 3.24: Os gráficos acima mostram a evolução temporal dos elementos orbitais do Satélite X, e o módulo do vetor posição de Júpiter em relação Urano (curva em do vermelho), o módulo do vetor posição entre Satélite X e Urano (em verde), e o Raio de Hill de Urano (em azul).

### 3.4 Conclusões

Em um estudo preliminar, considerando que Urano sofreu a variação de sua obliquidade de forma única, em uma espécie de tombo, concluimos que o plano orbital de seus satélites naturais só conseguiriam acompanhar o plano do equador se esse tombo durar um período maior que 33067,6 anos.

Baseado no trabalho de Boué & Laskar (2010), utilizando metodologia diferente, estudamos a origem da obliquidade de Urano via perturbação de um satélite de grande porte. Estudamos o sistema primeiramente utilizando integração direta, levando em conta as interações gravitacionais entre os planetas gigantes, o Sol e o Satélite X, onde todos causam torques no eixo de rotação de Urano. Utilizando condições iniciais ideais (Urano com alta inclinação orbital, Satélite X com semi-eixo maior igual à  $60R_U$  e massa igual à  $0,01M_U$ ), esse primeiro estudo se mostrou eficiente para a obtenção da grande obliquidade de Urano. Mostramos também que os planetas e, logicamente, o Satélite X são cruciais para a obtenção da variação da obliquidade.

Usando as órbitas integradas previamente do Modelo de Nice, o sistema se mostrou altamente caótico, possuindo grande sensibilidade às condições iniciais. Nossos resultados mostraram que o semi-eixo maior e massa têm grande influência nos resultados, concordando assim com o trabalho de Boué & Laskar (2010). No entanto, observamos a dependência dos resultados em relação a posição angular inicial do Satélite X (longitude média), não citado anteriormente. Possivelmente, o comportamento complexo do Satélite X e a dependência da longitude média do mesmo não foram observadas por Boué & Laskar (2010) pois a modelagem utilizada por eles não levam em conta termos de curto período (Boué & Laskar 2006). Outro fator importante foi que Boué & Laskar (2010) não utilizaram resultados do Modelo de Nice que ocorrem encontros próximos, entre Urano e outros planetas, com distâncias menores que  $50R_{Hil}$  de Urano.

Utilizando o Modelo de Nice, conseguimos obter da atual configuração da obliquidade de Urano para três específicas condições iniciais (CI) do Satélite X:

**CI-1:** Massa igual à  $(1/100)M_U$ , semi-eixo maior igual  $60R_U$  e longitude média igual à  $0^\circ$ ;

**CI-2:** Massa igual à  $(1/150)M_U$ , semi-eixo maior igual  $60R_U$  e longitude média igual à  $180^\circ$ ;

**CI-3:** Massa igual à  $(1/100)M_U$ , semi-eixo maior igual  $60R_U$  e longitude média igual à  $60^\circ$ .

Porém no caso **CI-3** o Satélite X sobrevive até o final da simulação, resultado não desejado já que Urano não possui atualmente este satélite.

É importante dizer que o ângulo ressonante ( $\Omega - \phi$ ), que mostrou estar relacionado com o crescimento da obliquidade, não é o mesmo ângulo citado por Boué & Laskar (2010). Essa ressonância apresentada em nossos resultados foi previamente estudada por Yokoyama et al. (2013).

Estudamos também o problema considerando os satélites naturais de Urano. Os resultados mostraram que não há sobrevivência dos satélites naturais na presença de um satélite externo de grande porte. Para alguns casos considerando somente o Satélite X e Oberon, Oberon sobreviveu até o final da simulação, porém sua configuração orbital final foi muito diferente da atual. Observamos também um efeito de *boost* na amplitude de oscilação da obliquidade proveniente do efeito combinado de Oberon e o Satélite X, efeito esse que abre a possibilidade de Urano ter adquirido a atual obliquidade por meio de um efeito combinado de vários satélites, não necessitando assim de um satélite de grande porte com massa da ordem de  $0,01M_U$ .

Fizemos uma simulação do sistema tentando encontrar o efeito combinado entre dois ou mais satélites. Utilizamos um sistema com 9 satélites (5 naturais e 4 hipotéticos). Os resultados foram negativos para as condições iniciais usadas. Em 100 mil anos a maioria dos satélites são ejetados de Urano, sobrando somente 2 hipotéticos.

Mesmo obtendo sucesso na reprodução da atual configuração do eixo de rotação Urano, a necessidade da existência de um satélite com massa da ordem de  $0,01M_U$  e a não sobrevivência dos satélites naturais fazem nossos resultados serem insuficientes para a solução do problema. Assim, podemos dizer como considerações finais que o problema da origem da obliquidade de Urano não é nada trivial e que, apesar de haver algumas propostas de solução (Morbidelli et al. 2012, Izidoro et al. 2015), ainda está em aberto.

Estudos futuros: Continuaremos focando no efeito *boost*, simulando o sistema com 2 ou mais satélites para diferentes condições iniciais; Buscaremos implementar algumas simplificações no modelo a fim de diminuir o “tempo de máquina” (tempo que leva para o computador realizar a simulação). O tempo de máquina estimado para a simulação com 9 satélites foi por volta de um ano, contando que todos os corpos sobrevivessem até o final da simulação; pretendemos utilizar diferentes trajetórias dos planetas via Modelo de Nice, de preferência com menos encontros próximos entre Urano e os planetas a fim de trabalhar um sistema de satélites menos perturbado; e, aplicaremos a mesma modelagem a fim de tentar explicar a origem da obliquidade de outros corpos do Sistema Solar.

# Bibliografia

- BEUTLER, G. *Methods of celestial mechanics. Vol. I: Physical, mathematical, and numerical principles.* 2005.
- BOLDRIN, L. A. G. *Efeitos de torques gravitacionais na dinâmica de asteróides múltiplos.* Master's thesis, Universidade Estadual Paulista-Unesp, Guaratinguetá-SP, 2011.
- BOTTKE, . W. F., JR., CELLINO, A., PAOLICCHI, P., & BINZEL, R. P. An overview of the asteroids: The asteroids iii perspective. *Asteroids III*, pages 3–15, 2002.
- BOUÉ, G. & LASKAR, J. Precession of a planet with a satellite. *Icarus*, 185:312–330, 2006.
- BOUÉ, G. & LASKAR, J. A collisionless scenario for uranus tilting. *ApJ*, 712:–44, 2010.
- BRASSER, R., MORBIDELLI, A., GOMES, R., TSIGANIS, K., & LEVISON, H. F. Constructing the secular architecture of the solar system ii: the terrestrial planets. *âp*, 507:1053–1065, 2009.
- BROUWER, D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag. *AJ*, 64:378, 1959.
- BRUNINI, A. A possible constraint to uranus' great collision. *Planet. Space Sci.*, 43:1019–1021, 1995.
- CHAPMAN, C. R., VEVERKA, J., THOMAS, P. C., KLAASEN, K., BELTON, M. J. S., HARCH, A., MCEWEN, A., JOHNSON, T. V., HELFENSTEIN, P., DAVIES, M. E., MERLINE, W. J., & DENK, T. Discovery and physical properties of dactyl, a satellite of asteroid 243 ida. *Nature*, 374:783–785, 1995.
- EVERHART, E. An efficient integrator that uses gauss-radau spacings. In A. Carusi & G. B. Valsecchi, editors, *Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution, Proceedings of IAU Colloq. 83, held in Rome, Italy, June 11-15, 1984. Edited by Andrea Carusi and Giovanni B. Valsecchi. Dordrecht: Reidel, Astrophysics and Space Science Library. Volume 115, 1985, p.185*, page 185. 1985.

- GOLDREICH, P. Inclination of satellite orbits about an oblate precessing planet. *AJ*, 70:5, 1965.
- GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. World student series. Addison-Wesley, Reading (Mass.), Menlo Park (Calif.), Amsterdam, 1980.
- GOMES, R., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K., & MORBIDELLI, A. Origin of the cataclysmic late heavy bombardment period of the terrestrial planets. *Nature*, 435:466–469, 2005.
- IZIDORO, A., MORBIDELLI, A., RAYMOND, S. N., HERSANT, F., & PIERENS, A. Accretion of uranus and neptune from inward-migrating planetary embryos blocked by jupiter and saturn. *ArXiv e-prints*, 2015.
- JACOBSON, S. A. & SCHEERES, D. J. Dynamics of rotationally fissioned asteroids: Source of observed small asteroid systems. *Icarus*, 214:161–178, 2011.
- KORYCANSKY, D. G., BODENHEIMER, P., CASSEN, P., & POLLACK, J. B. One-dimensional calculations of a large impact on uranus. *Icarus*, 84:528–541, 1990.
- KOZAI, Y. Effect of precession and nutation on the orbital elements of a close earth satellite. *AJ*, 65:621, 1960.
- KOZAI, Y. Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity. *AJ*, 67:591, 1962.
- KUBO-OKA, T. & NAKAZAWA, K. Gradual increase in the obliquity of uranus due to tidal interaction with a hypothetical retrograde satellite. *Icarus*, 114:21–32, 1995.
- LASKAR, J., JOUTEL, F., & ROBUTEL, P. Stabilization of the earth’s obliquity by the moon. *Nature*, 361:615–617, 1993.
- LEMONS, N. A. *Mecânica Analítica*. 2 edition, 2007.
- LIDOV, M. L. The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies. *Planet. Space Sci.*, 9:719–759, 1962.
- LISSAUER, J. J., BARNES, J. W., & CHAMBERS, J. E. Obliquity variations of a moonless earth. *Icarus*, 217:77–87, 2012.
- MARCHIS, F., LAINEY, V., DESCAMPS, P., BERTHIER, J., VAN DAM, M., DE PATER, I., MACOMBER, B., BAEK, M., LE MIGNANT, D., HAMMEL, H. B., SHOWALTER, M., & VACHIER, F. A dynamical solution of the triple asteroid system (45) eugenia. *Icarus*, 210:635–643, 2010.

- MARGOT, J. L., NOLAN, M. C., BENNER, L. A. M., OSTRO, S. J., JURGENS, R. F., GIORGINI, J. D., SLADE, M. A., & CAMPBELL, D. B. Binary asteroids in the near-earth object population. *Science*, 296:1445–1448, 2002.
- MERLINE, W. J., WEIDENSCHILLING, S. J., DURDA, D. D., MARGOT, J. L., PRAVEC, P., & STORRS, A. D. Asteroids do have satellites. *Asteroids III*, pages 289–312, 2002.
- MORBIDELLI, A., LEVISON, H. F., TSIGANIS, K., & GOMES, R. Chaotic capture of jupiter’s trojan asteroids in the early solar system. *Nature*, 435:462–465, 2005.
- MORBIDELLI, A., TSIGANIS, K., BATYGIN, K., CRIDA, A., & GOMES, R. Explaining why the uranian satellites have equatorial prograde orbits despite the large planetary obliquity. *Icarus*, 219:737–740, 2012.
- MORBIDELLI, A., TSIGANIS, K., CRIDA, A., LEVISON, H. F., & GOMES, R. Dynamics of the giant planets of the solar system in the gaseous protoplanetary disk and their relationship to the current orbital architecture. *AJ*, 134:1790–1798, 2007.
- MURRAY, C. D. & DERMOTT, S. F. *Solar system dynamics*. 1999.
- NESVORNÝ, D. Young solar system’s fifth giant planet? *ApJ*, 742:L22, 2011.
- NESVORNÝ, D. & MORBIDELLI, A. Statistical study of the early solar system’s instability with four, five, and six giant planets. *AJ*, 144:117, 2012.
- PARISI, M. G. & BRUNINI, A. Constraints to uranus’ great collision - ii. *Planet. Space Sci.*, 45:181–187, 1997.
- PRAVEC, P., VOKROUHLICKÝ, D., POLISHOOK, D., SCHEERES, D. J., HARRIS, A. W., GALÁD, A., VADUVESCU, O., POZO, F., BARR, A., LONGA, P., VACHIER, F., COLAS, F., & PRAY, D. P. Formation of asteroid pairs by rotational fission. *Nature*, 466:1085–1088, 2010.
- PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., & FLANNERY, B. P. *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 3 edition, 2007.
- SCHEERES, D. J. Stability of binary asteroids. *Icarus*, 159:271–283, 2002.
- SCHEERES, D. J. Rotational fission of contact binary asteroids. *Icarus*, 189:370–385, 2007.
- SCHEERES, D. J. Stability of the planar full 2-body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 104:103–128, 2009.

- SCHEERES, D. J., BRIT, D., CARRY, B., & HOLSAPPLE, K. A. Asteroid interiors and morphology. *Asteroids IV*, 2015.
- SCHEERES, D. J., OSTRO, S. J., WERNER, R. A., ASPHAUG, E., & HUDSON, R. S. Effects of gravitational interactions on asteroid spin states. *Icarus*, 147:106–118, 2000.
- SLATTERY, W. L. Giant impacts on a primitive uranus. *Icarus*, 99:167–174, 1992.
- TSIGANIS, K., GOMES, R., MORBIDELLI, A., & LEVISON, H. F. Origin of the orbital architecture of the giant planets of the solar system. *Nature*, 435:459–461, 2005.
- WALSH, K. J., MORBIDELLI, A., RAYMOND, S. N., O'BRIEN, D. P., & MANDELL, A. M. A low mass for mars from jupiter's early gas-driven migration. *Nature*, 475:206–209, 2011.
- WALSH, K. J. & RICHARDSON, D. C. Steady-state population of the nea binaries and yorp spinup models. In *AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts 38*, volume 38 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 582. 2006.
- WALSH, K. J. & RICHARDSON, D. C. A steady-state model of nea binaries formed by tidal disruption of gravitational aggregates. *Icarus*, 193:553–566, 2008.
- WERTZ, J. R., editor. *Spacecraft attitude determination and control*, volume 73 of *Astrophysics and Space Science Library*. 1978.
- WINTER, O. C., BOLDRIN, L. A. G., VIEIRA NETO, E., VIEIRA MARTINS, R., GIULIATTI WINTER, S. M., GOMES, R. S., MARCHIS, F., & DESCAMPS, P. On the stability of the satellites of asteroid 87 sylvia. *MNRAS*, 395:218–227, 2009.
- WISDOM, J., PEALE, S. J., & MIGNARD, F. The chaotic rotation of hyperion. *Icarus*, 58:137–152, 1984.
- YOKOYAMA, T., FROUARD, J. H., & DEIENNO, R. Effects of high inclined and eccentric disturbers on the dynamics of the equator of an axy-symmetric body. In *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, volume 44 of *AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting*, pages –203. 2013.

# Apêndice

# Apêndice A

## Desenvolvimento das Equações de Movimento

O objetivo deste apêndice é mostrar o desenvolvimento das equações de movimento utilizadas no trabalho que não são de comum conhecimento e que não possuem simples entendimento somente pela consulta da referência citada.

Utilizamos como principal referência para o desenvolvimento das equações de movimento o livro de Beutler (2005). Será apresentado neste capítulo o desenvolvimento das equações de movimento do: 1- problema completo de dois corpos; 2- problema de N-Corpos com o corpo central elipsoidal; e 3- equações de Euler com torque gravitacional devido à n-corpos.

### A.1 Problema completo de dois corpos

Partindo da segunda lei de Newton e da lei da gravitação universal, podemos escrever as equações de movimento de dois corpos de forma arbitrária, em um referencial inercial  $O$ , partindo da interação gravitacional entre o elemento de massa  $p$  do corpo central e o elemento de massa  $q$  do corpo secundário, desprezando as forças internas, da forma:

$$p\ddot{\vec{x}}_p = k^2 p \int_{V_s} \rho(\vec{x}_q) \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_q)}{|\vec{x}_p - \vec{x}_q|^3} dV_s, \quad (\text{A.1})$$

$$q\ddot{\vec{x}}_q = k^2 q \int_{V_c} \rho(\vec{x}_p) \frac{(\vec{x}_q - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_q - \vec{x}_p|^3} dV_c, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\vec{x}_p$  é o vetor posição do elemento de massa  $p$  do corpo central,  $\vec{x}_q$  é o vetor posição do elemento de massa  $q$  do corpo central,  $k^2$  é constante da gravitação universal,  $\rho$  é a densidade volumétrica de massa, o ponto  $O$  é um referencial inercial e  $V$  o volume. A figura A.1 ilustra o modelo.

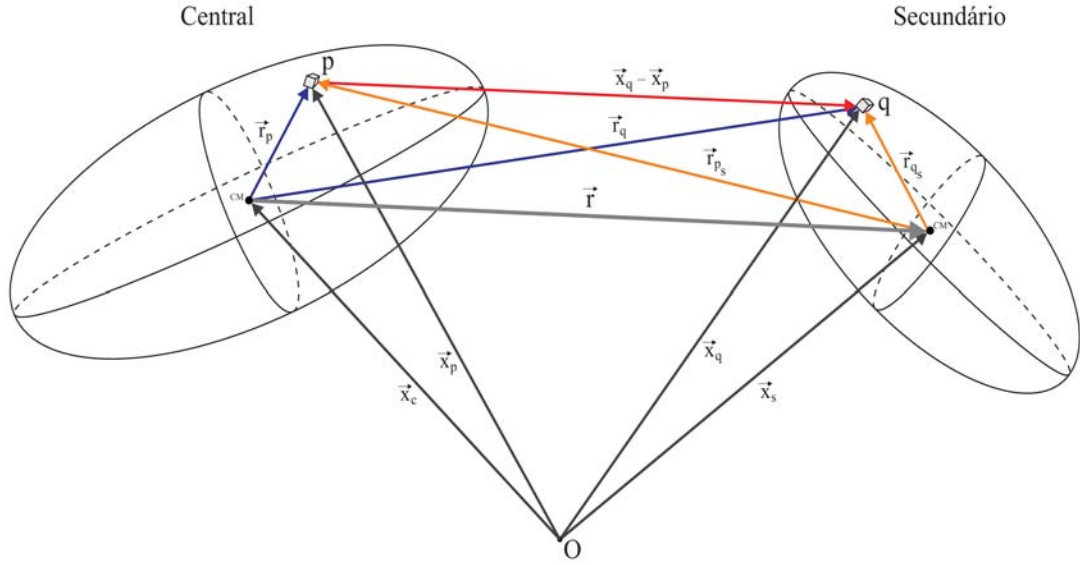


Figura A.1: Figura ilustrativa para o desenvolvimento das equações de movimento para o problema completo de 2 corpos. Onde  $O$  é o referencial inercial,  $p$  é um elemento de massa do corpo central e  $q$  o elemento de massa do corpo secundário

Observando a figura A.1, podemos escrever as relações:

$$\vec{x}_p = \vec{x}_c - \vec{r}_p, \quad \vec{x}_q = \vec{x}_s - \vec{r}_q. \quad (\text{A.3})$$

Substituindo nas equações A.1 e A.2, simplificando, e multiplicando e dividindo o lado direito da equação pelas massas dos dois corpos, obtemos as equações de movimento do centro de massa dos corpos, que fica escrita da forma:

$$\ddot{\vec{x}}_c = k^2 m_s \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_c} \int_{V_s} \frac{\rho(\vec{x}_q)}{m_s} \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_q)}{|\vec{x}_p - \vec{x}_q|^3} dV_s dV_c, \quad (\text{A.4})$$

$$\ddot{\vec{x}}_s = k^2 m_c \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_s} \int_{V_s} \frac{\rho(\vec{x}_q)}{m_c} \frac{(\vec{x}_q - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_q - \vec{x}_p|^3} dV_c dV_s. \quad (\text{A.5})$$

Agora, faremos uma translação no sistema de coordenadas do ponto inercial  $O$  do sistema para o centro de um dos corpos, denominado corpo central  $c$ . O vetor posição  $\vec{r}$  do corpo secundário em relação ao corpo central é dado pela relação:  $\vec{r} = \vec{x}_s - \vec{x}_c$  e, obviamente:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{x}}_s - \ddot{\vec{x}}_c. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo as equações A.4 e A.5 na equação acima, temos:

$$\ddot{\vec{r}} = +k^2 m_s \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_c} \int_{V_s} \frac{\rho(\vec{x}_q)}{m_s} \frac{(\vec{x}_q - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_q - \vec{x}_p|^3} dV_s dV_c + k^2 m_c \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_q)}{m_s} \int_{V_s} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_c} \frac{(\vec{x}_q - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_q - \vec{x}_p|^3} dV_c dV_s. \quad (\text{A.7})$$

Definido:

$$\rho_{p_r} \equiv \frac{\rho(\vec{x}_c)}{m_c}, \quad \rho_{q_r} \equiv \frac{\rho(\vec{x}_q)}{m_s}, \quad (\text{A.8})$$

e usando a relação:

$$\vec{x}_q - \vec{x}_p = \vec{r}_q - \vec{r}_p = \vec{r} + \vec{r}_{q_s} - \vec{r}_p, \quad (\text{A.9})$$

podemos escrever a equação A.7 como:

$$\ddot{\vec{r}} = -k^2 (m_s + m_s) \int_{V_c} \int_{V_s} \rho_{p_r} \rho_{q_r} \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_{q_s} - \vec{r})}{|\vec{r}_p - \vec{r}_{q_s} - \vec{r}|^3} dV_s dV_c. \quad (\text{A.10})$$

Podemos escrever a força como sendo o gradiente  $\vec{\nabla}$  de um potencial  $U$

$$\ddot{\vec{r}} = k^2 (m_s + m_s) \vec{\nabla} U, \quad (\text{A.11})$$

onde:

$$U = \int_{V_c} \int_{V_s} \frac{\rho_{p_r} \rho_{q_r}}{|\vec{r}_p - \vec{r}_{q_s} - \vec{r}|} dV_s dV_c. \quad (\text{A.12})$$

Definindo  $\vec{\Delta} = \vec{r}_p - \vec{r}_{q_s}$ , a equação fica da forma:

$$U = \int_{V_c} \int_{V_s} \frac{\rho_{p_r} \rho_{q_r}}{|\vec{\Delta} - \vec{r}|} dV_s dV_c, \quad (\text{A.13})$$

A equação da forma:

$$\frac{1}{|\vec{\Delta} - \vec{r}|}, \quad (\text{A.14})$$

para casos em que  $|\vec{\Delta}| \ll |\vec{r}|$ , pode ser escrita como:

$$\frac{1}{|\vec{\Delta} - \vec{r}|} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{r}\right)^n P_n \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{\Delta}}{r \Delta}\right), \quad (\text{A.15})$$

onde  $P_n$  são os polinômios de Legendre que podem ser obtidos pela formula de Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (\text{A.16})$$

Escrevendo a equação A.15 até  $n = 2$ , temos:

$$\frac{1}{|\vec{\Delta} - \vec{r}|} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot \vec{\Delta}}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{\Delta^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{\Delta})^2}{r^4} \right), \quad (\text{A.17})$$

substituindo a equação A.17 em A.13, temos:

$$U = \int_{V_c} \int_{V_s} \frac{\rho_{p_r} \rho_{q_r}}{r} \left( 1 + \frac{\vec{r} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_{q_s})}{r^2} - \frac{1}{2} \frac{|\vec{r}_p - \vec{r}_{q_s}|^2}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{[\vec{r} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_{q_s})]^2}{r^4} \right) dV_s dV_c, \quad (\text{A.18})$$

Aplicando a distributiva, e integrado e substituindo na equação A.11, nós obtemos o resultado final da equação de movimento do modelo completo de dois corpos dado por:

$$\ddot{\vec{r}} = k^2 (m_s + m_s) \left[ \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) + T_{(c)}^T \vec{\nabla}' U_2^{(c)} + T_{(s)}^T \vec{\nabla}' U_2^{(s)} \right] \quad (\text{A.19})$$

O potencial gravitacional  $U_2^{(i)}$  é dado por:

$$U_2^{(i)} = \frac{R_{(i)}^2}{r^3} \left[ \frac{C_{20}^{(i)}}{2} \left( \frac{3z'^2}{r^2} - 1 \right) + 3C_{22}^{(i)} \left( \frac{x'^2 - y'^2}{r^2} \right) \right]. \quad (\text{A.20})$$

Note que as integrais foram feitas no sistema fixo do corpo (sistema de eixos principais de inércia-SEPI), portanto é necessário uma rotação, no caso inversa, para levar do SEPI para o sistema não girante do corpo (sistema chamado de pseudo-inercial-SPsI, pois não se encontra no baricentro do sistema, mas não possui rotação, assim podemos estudar a rotação do corpo neste referencial). Lembrando e que as grandezas com  $(\cdot)$  estão representadas no SEPI. Assim,  $T$  é matriz de rotação que leva do sistema SPsI para o SEPI.

Analisando a equação de movimento do corpo secundário A.19 no referencial centrado no corpo central, da esquerda pra direita, os três termos dentro dos colchetes são, respectivamente: o termo principal, o termo devido ao achatamento do corpo central e o termo de correção por estarmos trabalhando no sistema não inercial centrado em um dos corpos. Em outras palavras, podemos dizer que o ultimo termo é o termo indireto devido à não esfericidade do corpo secundário agindo sobre ele mesmo, que só aparece por estarmos trabalhando com o sistema de referência centrado no corpo central.

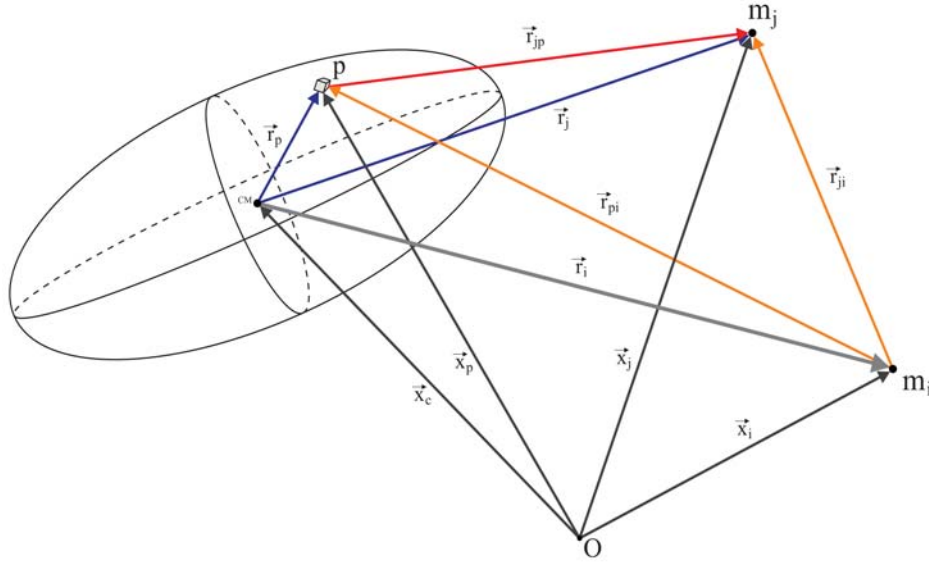


Figura A.2: Figura ilustrativa para o desenvolvimento das equações de movimento do problema de N-corpos. A figura mostra um corpo de forma elipsoidal  $c$  (central) e dois corpos pontuais  $i$  e  $j$  com seus respectivos vetores posição. Onde  $O$  é um referencial inercial,  $m_j$  é a massa do corpo  $j$ ,  $m_i$  é a massa do corpo  $i$  e  $p$  é o elemento de massa do corpo central  $c$ . Podemos observar nas figuras as relações:  $\vec{r}_{ji} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$  e  $\vec{r}_{pi} = \vec{r}_p - \vec{r}_i$ .

## A.2 Problema de N-Corpos com o corpo central elipsoidal

O objetivo deste tópico é desenvolver as equações de movimento de um corpo  $i$ , perturbado por  $(n - 1)$  corpos  $j$  e perturbado por um corpo  $c$  de forma elipsoidal com o sistema de referência centrado nele. A figura A.2 ilustra o problema.

Utilizando a segunda lei de Newton e a lei da gravitação universal, as equações de movimento do corpo  $i$ , em um referencial inercial  $O$ , interagindo gravitacionalmente com o elemento de massa  $p$  do corpo central  $c$  e com o corpo pontual  $j$ , pode ser escrita da forma:

$$m_i \ddot{\vec{x}}_i = k^2 m_i p \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_p - \vec{x}_i|^3} + k^2 m_i m_j \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}. \quad (\text{A.21})$$

Da mesma forma que o corpo  $i$ , as equações de movimento do elemento de massa  $p$  do corpo central  $c$  perturbado por  $i$  e  $j$  são escritas da forma:

$$p \ddot{\vec{x}}_p = -k^2 m_i p \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_p - \vec{x}_i|^3} + k^2 p m_j \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_p|^3}. \quad (\text{A.22})$$

Simplificando e escrevendo a equação de movimento do corpo central, as equações A.21 e A.22 ficam da forma:

$$\ddot{\vec{x}}_i = k^2 m_c \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_c} \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_p - \vec{x}_i|^3} dV_c + k^2 m_j \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3}, \quad (\text{A.23})$$

$$\ddot{\vec{x}}_c = k^2 m_i \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_c} \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_p|^3} dV_c + k^2 m_j \int_{V_c} \frac{\rho(\vec{x}_p)}{m_c} \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_p|^3} dV_c. \quad (\text{A.24})$$

Transladando o sistema de coordenadas para o centro do corpo central  $c$ , definimos:

$$\vec{r}_i = \vec{x}_i - \vec{x}_c, \quad \ddot{\vec{r}}_i = \ddot{\vec{x}}_i - \ddot{\vec{x}}_c. \quad (\text{A.25})$$

Utilizando a relação acima e a definição A.8, temos:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i &= k^2 m_c \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{x}_p - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_p - \vec{x}_i|^3} dV_c + k^2 m_j \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_i)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_i|^3} + \\ &- k^2 m_i \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{x}_i - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_i - \vec{x}_p|^3} dV_c - k^2 m_j \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{x}_j - \vec{x}_p)}{|\vec{x}_j - \vec{x}_p|^3} dV_c. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Observando a figura A.2, obtemos as relações:

$$\vec{x}_i - \vec{x}_j = \vec{r}_i - \vec{r}_j, \quad \vec{x}_i - \vec{x}_p = \vec{r}_i - \vec{r}_p, \quad \vec{x}_j - \vec{x}_p = \vec{r}_j - \vec{r}_p, \quad (\text{A.27})$$

assim temos:

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}}_i &= +k^2 m_c \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_i|^3} dV_c - k^2 m_j \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \\ &+ k^2 m_i \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_i|^3} dV_c - k^2 m_j \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_j|^3} dV_c. \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Após algumas manipulações algébricas, temos:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -k^2 (m_c + m_i) \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_p|^3} dV_c - k^2 m_j \left( \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} + \int_{V_c} \rho_{pr} \frac{(\vec{r}_j - \vec{r}_p)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_p|^3} dV_c \right). \quad (\text{A.29})$$

Assim como no caso do problema completo de dois corpos, pode-se escrever a equação acima como o gradiente de um potencial, portanto:

$$\ddot{\vec{r}}_i = k^2 (m_c + m_i) \vec{\nabla}_i \int_{V_c} \frac{\rho_{pr}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_p|} dV_c - k^2 m_j \left( \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - \vec{\nabla}_j \int_{V_c} \frac{\rho_{pr}}{|\vec{r}_j - \vec{r}_p|} dV_c \right). \quad (\text{A.30})$$

Novamente, de forma análoga ao capítulo anterior, considerando  $|\vec{r}_p| \ll |\vec{r}_i|$  e  $|\vec{r}_p| \ll |\vec{r}_j|$ , podemos utilizar a relação A.17 e integrar, obtendo a equação do movimento similar à A.19,

escrita da forma:

$$\ddot{\vec{r}}_i = k^2 (m_c + m_i) T_i^T \vec{\nabla}'_i U^{(i)} - k^2 m_j \left( \frac{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - T_j^T \vec{\nabla}'_j U^{(j)} \right), \quad (\text{A.31})$$

onde

$$U^{(i)} = U_1^{(i)} + U_2^{(i)} = \frac{1}{r_i} + U_2^{(i)}, \quad (\text{A.32})$$

e  $U_2^{(i)}$  é dada pela equação A.20.

A equação A.31 é a equação do movimento do corpo pontual  $i$  perturbado por outro corpo pontual  $j$  e um corpo de forma elipsoidal, com o sistema de coordenadas centrado no corpo central. Podemos generalizar para  $N$  corpos de forma simples, da forma:

$$\ddot{\vec{r}}_i = k^2 (m_c + m_i) \left( T^T \vec{\nabla}'_i U^{(i)} \right) - k^2 \sum_{j=1, j \neq i}^n m_j \left( \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - T^T \vec{\nabla}'_j U^{(j)} \right), \quad (\text{A.33})$$

onde podemos identificar no lado direito da igualdade, da esquerda pra direita, respectivamente, a perturbação devida ao corpo central, a perturbação direta devida ao corpo  $j$  e a perturbação indireta (termo de correção por estarmos trabalhando em um referencial não inercial).

### A.3 Movimento rotacional: Torque devido à n-corpos

Para demonstrar a equação utilizada em nossas simulações, partiremos da equação de Euler, com desenvolvimento simples e facilmente encontrado nos livros textos de mecânica clássica (Goldstein 1980, Lemos 2007), dada por:

$$\begin{pmatrix} A\dot{\omega}'_x \\ B\dot{\omega}'_y \\ C\dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (C - B)\omega'_y\omega'_z \\ (A - C)\omega'_z\omega'_x \\ (B - A)\omega'_x\omega'_y \end{pmatrix} = \vec{T} \quad (\text{A.34})$$

onde  $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  é o vetor velocidade angular;  $A$ ,  $B$ , e  $C$  são os momentos principais de inércia do corpo; e  $\vec{T}$  é o torque resultante agindo sobre o corpo. Lembrando que a equação de Euler é escrita no referencial girante do corpo (SEPI). O torque gravitacional devido à um corpo secundário  $s$ , sobre um corpo de forma arbitrária  $c$  pode ser escrito da forma:

$$\vec{T} = \int_{V_c} \vec{r}_p \times \left( -k^2 m_p \rho_p \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|^3} \right) dV_c \quad (\text{A.35})$$

Agora realizaremos algumas manipulações algébricas para chegarmos à uma forma mais

“amigável”, assim.

$$\begin{aligned}\vec{T} &= \int_{V_c} (\vec{r}_s + (\vec{r}_p - \vec{r}_s)) \times \left( -k^2 m_s \rho_p \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|^3} \right) dV_c, \\ \vec{T} &= \int_{V_c} \vec{r}_s \times \left( -k^2 m_s \rho_p \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|^3} \right) dV_c, \\ \vec{T} &= \int_{V_c} \left( k^2 m_s \rho_p \frac{(\vec{r}_p - \vec{r}_s)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|^3} \right) \times \vec{r}_s dV_c.\end{aligned}$$

Escrevendo a força como sendo o gradiente de um potencial, temos:

$$\vec{T} = k^2 m_s \int_{V_c} \vec{\nabla}_c' \left( \frac{\rho_p}{|\vec{r}_p - \vec{r}_s|} \right) \times \vec{r}_s dV_c. \quad (\text{A.36})$$

Assim como nos capítulos anteriores, para  $|\vec{r}_p| \ll |\vec{r}_s|$ , podemos escrever o potencial como:

$$\vec{T} = k^2 m_s \int_{V_c} \rho_p \vec{\nabla}_c' \left( \frac{1}{r_s} + \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{r}_p}{r_s^3} - \frac{1}{2} \frac{r_p^2}{r_s^3} + \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}_s \cdot \vec{r}_p)^2}{r_s^5} \right) \times \vec{r}_s dV_c. \quad (\text{A.37})$$

Observando a equação acima, podemos notar que o primeiro e o terceiro termo dentro do parênteses podem ser desprezados, pois o gradiente destes termos resultarão em vetores que cancelam no produto vetorial com  $\vec{r}_s$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_c' \left( \frac{1}{r_s} \right) \times \vec{r}_s &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla}_c' \left( -\frac{1}{2} \frac{r_p^2}{r_s^3} \right) \times \vec{r}_s &= \vec{0}.\end{aligned}$$

O segundo termo da equação A.37 também pode ser desconsiderado pois a integral referente a ele será zero pela condição do sistema de referência estar no centro de massa do corpo central  $c$ , ou seja:

$$\int_{V_c} \rho_p \vec{\nabla}_c' \left( \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{r}_p}{r_s^3} \right) \times \vec{r}_s dV_c = \vec{0}$$

Portanto, a equação A.37 fica da forma:

$$\vec{T} = k^2 m_s \int_{V_c} \rho_p \vec{\nabla}_c' \left( \frac{3}{2} \frac{(\vec{r}_s \cdot \vec{r}_p)^2}{r_s^5} \right) \times \vec{r}_s dV_c. \quad (\text{A.38})$$

Desenvolvendo a equação, temos:

$$\vec{T} = k^2 m_s \int_{V_c} \frac{3\rho_p}{r_s^5} (\vec{r}_s \cdot \vec{r}_p) \vec{r}_p \times \vec{r}_s dV_c. \quad (\text{A.39})$$

Resolvendo o produto vetorial, temos:

$$\vec{T} = k^2 m_s \int_{V_c} \frac{3\rho_p}{r_s^5} (\vec{r}_s \cdot \vec{r}_p) \begin{pmatrix} y'_p z'_s - z'_p y'_s \\ z'_p x'_s - z'_p x'_s \\ x'_p y'_s - y'_p x'_s \end{pmatrix} dV_c. \quad (\text{A.40})$$

Integrando cada um dos termos conseguimos obter a forma final do torque no corpo central de momentos principais de inércia  $A$ ,  $B$  e  $C$  devido à um corpo secundário  $s$  de vetor posição dado por  $\vec{r}_s = (x'_s, y'_s, z'_s)$ , dado por:

$$\vec{T} = \frac{3k^2 m_s}{r_s^5} \begin{pmatrix} (C - B)y'_s z'_s \\ (A - C)z'_s x'_s \\ (B - A)x'_s y'_s \end{pmatrix}. \quad (\text{A.41})$$

Substituindo na equação A.34, a equação fica da forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ \gamma_2 \omega'_z \omega'_x \\ \gamma_3 \omega'_x \omega'_y \end{pmatrix} = \frac{3k^2 m_s}{r_s^5} \begin{pmatrix} \gamma_1 y'_s z'_s \\ \gamma_2 z'_s x'_s \\ \gamma_3 x'_s y'_s \end{pmatrix}, \quad (\text{A.42})$$

onde  $\gamma_1 = (C - B)/A$ ,  $\gamma_2 = (A - C)/B$ ,  $\gamma_3 = (B - A)/C$ . A equação A.42 é a equação levando em consideração o torque de um corpo perturbador  $s$ . Para  $n$ -corpos perturbadores, basta somar os torques de  $n$ -corpos, assim podemos escrever a forma final da equação utilizada em nossas simulações:

$$\begin{pmatrix} \dot{\omega}'_x \\ \dot{\omega}'_y \\ \dot{\omega}'_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_1 \omega'_y \omega'_z \\ \gamma_2 \omega'_z \omega'_x \\ \gamma_3 \omega'_x \omega'_y \end{pmatrix} = 3k^2 \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_j^5} \begin{pmatrix} \gamma_1 y'_j z'_j \\ \gamma_2 z'_j x'_j \\ \gamma_3 x'_j y'_j \end{pmatrix}. \quad (\text{A.43})$$

# Apêndice B

## Momento angular e energia total

Apresentaremos neste capítulo as equações utilizadas para o cálculo da energia total e do momento angular total para o problema completo de dois corpos e o problema de N-corpos com o corpo central de forma elipsoidal com movimento de rotação. Obviamente os corpos considerados pontuais possuem forma esférica e movimento de rotação, no entanto, devido sua simetria, tanto o momento angular rotacional quanto a energia cinética de rotação não sofrem variações, assim, como nosso interesse é calcular a a variação destas grandezas, os mesmos não são computados.

### B.1 Energia

Para ambos os problemas, a energia cinética total é dada pela somatória da anergia cinética translacional (orbital) de todos os corpos mais a somatória da energia cinética rotacional de todos os corpos com forma não pontual. Assim, a energia cinética para o problema de completo de dois corpos é dada por:

$$K = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{(n+1)} m_i (\dot{\vec{x}}_i \cdot \dot{\vec{x}}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n'} \vec{\omega}_i \cdot (\bar{I}_i \vec{\omega}_i), \quad (\text{B.1})$$

onde  $n$  é o número total de corpos do sistema,  $n'$  o número total de corpos sem simetria esférica do sistema,  $\bar{I}$  é o tensor de inércia do corpo e  $\vec{x}$  o vetor posição do corpo no referencial inercial  $O$ , vide figura A.2.

Para o cálculo da energia potencial utilizamos dois diferentes modos, um modo usando a equação em função dos coeficientes gravitacionais  $C_{20}$  e  $C_{22}$ , e a outra, somente para o problema completo de dois corpos, utilizamos a equação da energia potencial em função dos momentos principais de inércia extraída do artigo de Scheeres (2009).

Para o problema de (n+1)-corpos, a energia potencial foi calculada utilizando a equação a seguir:

$$U_{Nc} = \frac{1}{2}k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} + k^2 \sum_{i=1}^n m_i m_c \left( \frac{1}{r_i} + U_2 \right). \quad (\text{B.2})$$

Um dos modos para o problema completo de dois corpos nós utilizamos uma equação similar à equação acima dado por:

$$U_{C2} = -\frac{k^2 m_c m_s}{r} - k^2 m_c m_s U_2^{(s)} - k^2 m_c m_s U_2^{(c)}, \quad (\text{B.3})$$

no entanto, decidimos comparar o valor da energia potencial calculada com a equação acima com a equação utilizada por Scheeres (2009), dada por:

$$U'_{C2} = -\frac{k^2 m_c m_s}{r} - \frac{k^2}{r^3} (m_c Tr \bar{I}_s + m_s Tr \bar{I}_c) + \frac{3k^2}{2r^5} \vec{r} \cdot (m_s T_c^T \bar{I}_c T_c + m_c T_s^T \bar{I}_s T_s) \cdot \vec{r} \quad (\text{B.4})$$

onde  $T$  é a matriz de rotação entre o SEPI e o sistema SPsI. Obviamente, o resultado obtido pela equação B.3 é o mesmo que o obtido pela equação B.4.

## B.2 Momento angular

O momento angular total é dado pela somatória do momento angular orbital de todos os corpos mais a somatória do momento angular rotacional dos corpos com sem simetria esférica. Para o problema completo de dois corpos a equação tem a forma:

$$\vec{M}_{2C} = \begin{pmatrix} A_c \omega'_{xc} \\ B_c \omega'_{yc} \\ C_c \omega'_{zc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_s \omega'_{xs} \\ B_s \omega'_{ys} \\ C_s \omega'_{zs} \end{pmatrix} + m_c (\vec{x}_c \times \dot{\vec{x}}_c) + m_s (\vec{x}_s \times \dot{\vec{x}}_s), \quad (\text{B.5})$$

e, analogamente ao caso anterior, o momento angular do sistema no problema de (n+1)-corpos é escrito da forma:

$$\vec{M}_{NC} = \begin{pmatrix} A_c \omega'_{xc} \\ B_c \omega'_{yc} \\ C_c \omega'_{zc} \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n+1} m_i (\vec{x}_i \times \dot{\vec{x}}_i). \quad (\text{B.6})$$

O momento angular total é dado por:

$$\vec{M} = \vec{M}_{NC} + \vec{M}_{2C}. \quad (\text{B.7})$$