



IFT

Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista

16

DISSERTAÇÃO-MESTRADO

IFT-D.M. 04/90

ESTUDOS NUMÉRICOS DO MODELO DE
EINSTEIN-DE SITTER COM PERTURBAÇÕES

KWOK SAU FA

Orientador

HELIO V. FAGUNDES



Novembro 1990

STUDIOS

STUDIOS

Dedico
À família Talarico

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Professor Helio V. Fagundes pela orientação, aos colegas do IFT pelas amizades e à Capes pelo apoio financeiro.

ABSTRACT

We study an inhomogeneous model based on Einstein-de Sitter's (EdS). We add perturbative effects to the EdS metric, so in the limit in which the perturbations vanish, we regain the standard results. We study the variation of the density of energy as related to the correspondent parameter of the perturbation, and determine the redshift in this new model, getting a shift term in relation to the EdS model.

RESUMO

Construímos um modelo não homogêneo partindo do modelo de Einstein-de Sitter (EdS). Acrescentamos termos perturbativos à métrica EdS, de modo que, no limite de perturbação nula, o modelo 'background' será recuperado. Estudamos a variação da densidade de energia em relação ao parâmetro de perturbação correspondente. Calculamos o redshift deste novo modelo e obtivemos um termo de desvio em relação ao modelo EdS.

ÍNDICE

I - INTRODUÇÃO	1
II - MODELO DE EINSTEIN-DE SITTER (EdS)	3
III - MODELO NÃO HOMOGÊNEO	5
III.I - Estudos Preliminares	5
III.II - Modelo Não Homogêneo	17
III.II.I - Redshift	21
III.III - Conclusão	23
Apêndices	
A - Equações de Einstein	25
B - Método das Diferenças Finitas	29
C - Geodésicas	42
Referências	44

I - INTRODUÇÃO

Na época em que Einstein formulou a sua teoria geral da relatividade(1916), a maior parte dos físicos acreditavam que o universo era estático, entre eles estava o próprio Einstein, o qual era fortemente influenciado pelos antigos pensadores, que o levaram a introduzir um parâmetro novo nas suas equações de campo para que pudesse construir tal modelo.

Em 1929, Hubble (veja Rees, Ruffini e Wheeler 1974) descobriu através de observações astronômicas, que as galáxias se afastavam umas das outras, de modo que quanto maior a distância entre elas, maior a velocidade de ‘fuga’ dessas galáxias. Também, em 1965 Wilson e Penzias (veja também Rees, Ruffini e Wheeler 1974) descobriram uma radiação remanescente de aproximadamente 3°K , hoje chamada radiação cósmica de fundo, que vinha de todas as direções do espaço. Essas duas provas forneciam um forte indício de que o universo teve um início e estava em contínua expansão, o que contrariava o universo previsto por Einstein.

Em 1922, A.A.Friedman construiu um modelo que é conhecido como ‘Modelo Cosmológico Isotrópico’. Esse modelo é baseado na hipótese de uma distribuição homogênea e isotrópica de matéria no espaço, mas a sua propriedade fundamental é o caráter não estacionário (veja Landau e Lifshitz 1980); justamente essa propriedade dá a explicação sobre o fenômeno de ‘fuga’ das galáxias verificado através de observações astronômicas. Desde a descoberta da radiação de fundo os cosmologistas adotaram esse modelo como modelo padrão do universo.

Com o avanço da tecnologia, as medidas astronômicas atuais podem ser feitas com muito mais precisão, e as observações nos mostram um quadro muito diferente daquela da década de 50. Naquela época, acreditava-se que o universo era homogêneo numa escala de alguns megaparsecs. Atualmente, a descoberta de uma intrincada rede de filamentos e vazios aparentes em aglomerados de galáxias luminosas (de Lapparent, Geller e Huchra, 1986), e a possibilidade de movimentos globais de matéria relativos ao fluxo de Hubble (veja Dressler 1987), têm provocado alguns desafios sobre a consideração da isotropia e

da homogeneidade em larga escala do universo (veja Barrow 1989). Por outro lado, o desenvolvimento da física de altas energias junto com a astrofísica levou à idéia de que o universo é preenchido em sua maior parte pela chamada matéria escura, na medida em que a contribuição de matéria ordinária (massas oriundas de prótons e nêutrons); para a densidade de massa total, é de apenas 20% a 30% (veja Lawrence 1986 e Primack 1987). Neste contexto, o quadro geral do universo é modificado completamente. Se a matéria escura for bastante homogênea, a distribuição de matéria visível, ainda que irregular em grande escala, não passará de perturbações menores na distribuição total da massa, e o fluxo de Hubble permanecerá isotrópico, exceto pela presença de fortes irregularidades luminosas (Barrow 1989).

Como podemos observar, a cosmologia ainda está passando por uma fase de modificações. Até agora não temos um quadro definido sobre a distribuição de matéria no universo, nem sabemos como classificá-la; conseqüentemente, não temos condições de dizer se o modelo de Friedman é adequado ou não para descrever o universo em larga escala. Em pequena escala temos irregularidades locais, que não são descritas adequadamente pelo modelo de Friedman. Mesmo que o universo seja homogêneo em larga escala, esse modelo terá apenas caráter aproximado. Portanto para descrever o universo como um todo, precisamos de um modelo mais geral, no sentido de que possamos incluir essas irregularidades locais, descartando, se for necessário a hipótese de homogeneidade.

O modelo que apresentamos neste trabalho é baseado sobre o de Einstein-de Sitter. Nosso trabalho começa com uma pequena revisão (Seção II), deste modelo, mostrando seus resultados mais importantes. No início da seção III, apresentamos alguns modelos não-homogêneos, baseados sobre o de Einstein-de Sitter, que servirá como modelo 'background'. A partir daí, colocamos termos de perturbação na métrica 'background', e estudamos seus efeitos, tais como: os desvios de 'redshift' e das trajetórias geodésicas de raios luminosos. Focalizamos, também nossa atenção, no estudo das equações de Einstein. Na parte final da seção III, apresentamos o modelo não-homogêneo que será o modelo definitivo desta dissertação.

II - MODELO DE EINSTEIN-DE SITTER (EdS)

Nesta seção comentamos os aspectos mais importantes do modelo EdS, pois vamos usá-lo a partir da próxima seção para construir o nosso modelo não-homogêneo.

O modelo EdS é baseado no Princípio Cosmológico, segundo o qual o universo é considerado espacialmente homogêneo. Esse modelo possui uma seção espacial chata, conforme veremos a seguir. A métrica deste modelo é dada por

$$ds^2 = dt^2 - b^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (1)$$

fazendo $c=1$.

Para cada instante t dado, o fator $b(t)$ é constante e pode ser absorvido com uma simples transformação de coordenadas de forma que as novas coordenadas espaciais da métrica (1) se reduzem às coordenadas cartesianas usuais (veja Landau e Lifshitz 1980, cuja escolha de índices adotamos: índices latinos 0 a 3 e índices gregos 1 a 3).

A função $b(t)$ é determinada através das equações de Einstein, usando o sistema comóvel ($u^\alpha = 0, u^0 = 1$). No caso $p=0$, obtemos

$$\varepsilon b^3 = \text{cte} \quad , \quad b = \text{cte} t^{2/3}, \quad (2)$$

e no caso $p = \varepsilon/3$, temos

$$\varepsilon b^4 = \text{cte} \quad , \quad b = \text{cte} t^{1/2}, \quad (3)$$

onde p é a pressão e ε é a densidade de energia.

Como podemos observar, através das equações (2) e (3), a métrica (1) possui um ponto singular ($t=0$): $b(t)$ se anula e ε vai a infinito.

No caso da ausência de matéria ($\varepsilon = 0$) obtemos simplesmente um espaço-tempo Galileano, ou seja, $b=\text{cte}$.

Para traçar as linhas geodésicas dos raios de luz do modelo EdS apelamos para o princípio variacional. Usando os cálculos do Apêndice C, obtemos as seguintes equações geodésicas,

$$\dot{x} = A_1/b^2, \quad (4)$$

$$\dot{y} = A_2/b^2, \quad (5)$$

$$\dot{z} = A_3/b^2, \quad (6)$$

onde A_1, A_2, A_3 são constantes de integração e o ponto denota derivada em relação ao parâmetro q .

A quarta equação extraímos da métrica (1) colocando $ds^2 = 0$,

$$\dot{t} = b(t)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (7)$$

Para facilitar a análise, tomamos as trajetórias dos raios de luz no plano $z=0$, e usamos as equações (4) e (5) para obter $\frac{dy}{dx} = \text{cte}$, portanto

$$y = Ax + B, \quad (8)$$

onde A e B são constantes.

Concluimos, pois, que as linhas geodésicas no universo EdS são todas retas.

O ‘redshift’ do universo EdS é dado por

$$z = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} - 1 = \frac{b(t_0)}{b(t_e)} - 1. \quad (9)$$

III - MODELO NÃO HOMOGÊNEO

Muitas soluções das equações de Einstein já foram encontradas, mas poucas delas possuem aplicações em cosmologia, dentre os quais, destacam-se os modelos isotrópicos de Friedman que usam, a hipótese de homogeneidade e o fato observacional de isotropia do universo. Tais argumentos possuem caráter aproximado, i.e., valem somente em grande escala. Em pequena escala, como é o caso do nosso sistema solar, a inomogeneidade é bastante alta; mesmo na escala da nossa galáxia, a inomogeneidade permanece grande. Entretanto, nestas últimas décadas, a descoberta de algumas estruturas, tais como redes de filamentos aparentes e vazios em aglomerados de galáxias luminosas, e também conhecimento de movimentos peculiares do grupo local, relativo ao fluxo de Hubble, colocaram em dúvida a isotropia e a homogeneidade do universo (Barrow 1989 e Dressler 1987).

Antes de desenvolver o nosso modelo não-homogêneo, faremos alguns estudos nos quais usaremos o modelo EdS como modelo ‘background’. Esses estudos têm por objetivo mostrar algumas dificuldades que podem tornar um modelo fisicamente desinteressante. Com base neles, nosso modelo não-homogêneo será construído a partir de uma métrica cujas funções dependem das componentes t e x . As equações de Einstein serão, então, resolvidas como um tradicional problema de Cauchy (veja Apêndice A). O modelo ‘background’ fará o papel de modelo base, i.e., termos perturbativos serão acrescentados à métrica EdS, de modo que, no limite de perturbação nula, o modelo ‘background’ será recuperado.

III.I - Estudos Preliminares

Começamos com um modelo onde a métrica é dada da seguinte forma,

$$ds^2 = dt^2 - t^{4/3}(1 + \alpha \sin(kx))^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (10)$$

fazendo $\alpha = \text{cte}$, $t_0 = 1$ e $k = \frac{2\pi}{L}$, $L = \text{raio observável} = 3ct_0 = 3$.

Nesta métrica (10), vemos que para $\alpha = 0$ temos exatamente a métrica do modelo EdS; cf. equações (1) e (2).

Para obter as componentes do tensor de energia-impulso nós usamos os cálculos do

Apêndice A e substituímos as componentes da métrica (10), para obter, com $G = \text{constante de Newton} = 1$,

$$8\pi T_0^0 = \frac{4}{3t^2} + k^2 t^{-4/3} \left[\frac{\alpha \text{sen}(kx)(2 + \alpha \text{sen}(kx)) + \alpha^2}{(1 + \alpha \text{sen}(kx))^4} \right], \quad (11)$$

$$8\pi T_1^1 = -t^{-4/3} \frac{\alpha^2 k^2 \cos^2(kx)}{(1 + \alpha \text{sen}(kx))^4}, \quad (12)$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = t^{-4/3} \frac{k^2}{(1 + \alpha \text{sen}(kx))^3} \left[\frac{\alpha^2 \cos^2(kx)}{(1 + \alpha \text{sen}(kx))} + \alpha \text{sen}(kx) \right]. \quad (13)$$

Para interpretar $T^{\mu\nu}$ no caso de um fluido sem pressão ($p = 0$) teríamos de achar solução ε , (u^0, u^α) para as equações

$$\begin{aligned} T^{00} &= \varepsilon(u^0)^2, \\ T^{11} &= \varepsilon(u^1)^2, \\ T^{22} &= \varepsilon(u^2)^2, \\ T^{33} &= \varepsilon(u^3)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Neste caso, as soluções destas equações tornam extremamente difíceis de serem resolvidas. Além disso, não tentamos achar a solução deste modelo, porque não valia a pena, tratando-se apenas de problema artificial para ilustrar a variação do α e $\delta\varepsilon$. Como podemos observar através da figura 1, $\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}}{\varepsilon_{\min}}$ é muito maior que o valor de α correspondente.

Analisaremos a seguir as equações geodésicas para o raio de luz, neste modelo. Do princípio variacional (veja Apêndice C), temos

$$\ddot{x} = \frac{\alpha k \cos(kx)(\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \dot{x}^2)}{(1 + \alpha \text{sen}(kx))} - \frac{4\dot{t}\dot{x}}{3t}, \quad (15)$$

$$\dot{y} = \frac{l}{(t)^{4/3}(1 + \alpha \text{sen}(kx))^2}, \quad (16)$$

$$\dot{z} = \frac{h}{(t)^{4/3}(1 + \alpha \text{sen}(kx))^2}, \quad (17)$$

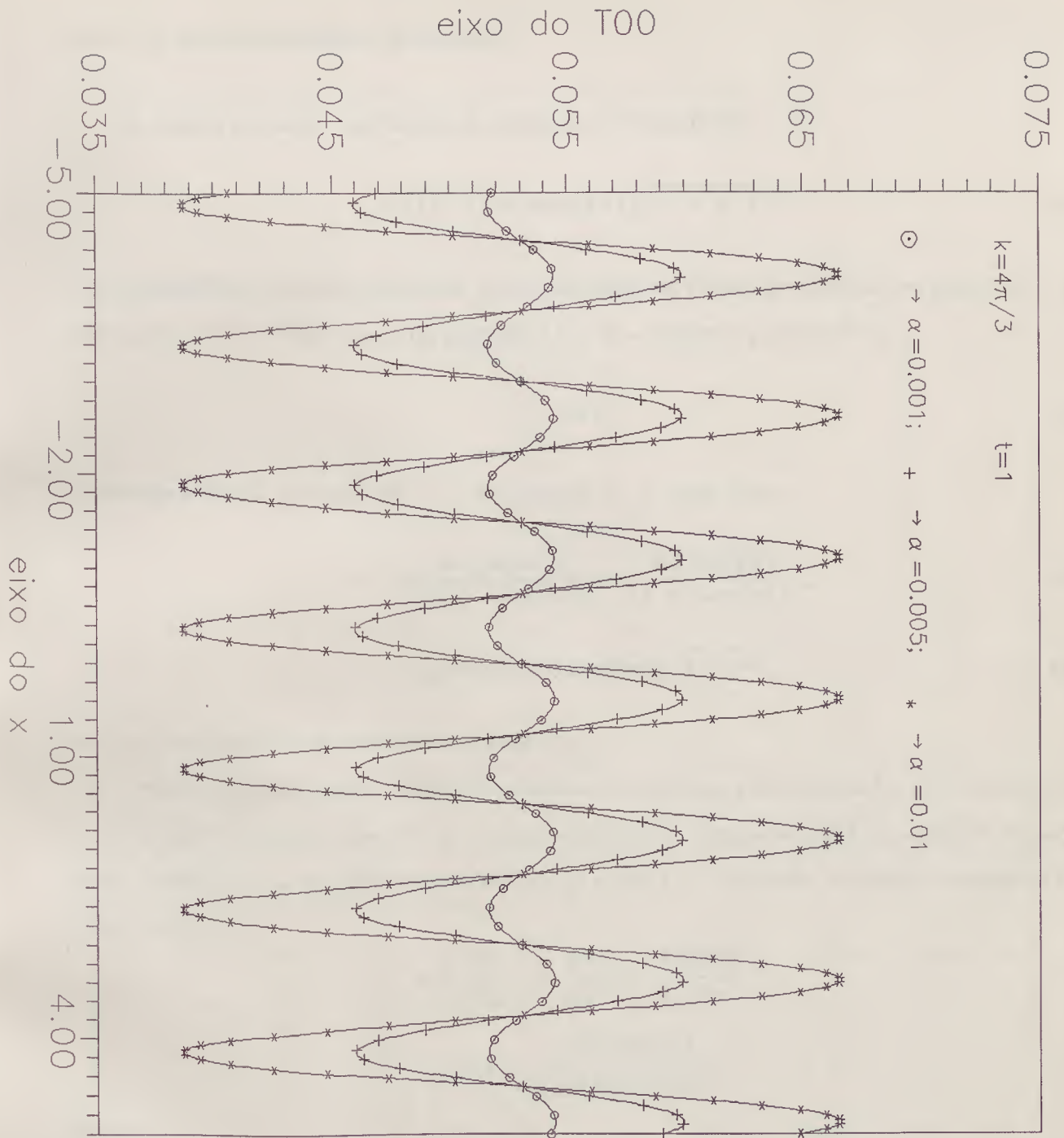


Figura 1. Variação da densidade de energia com a coordenada x , no caso da equação (11).

Notar que $\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon}$ vale 0,0532 para $\alpha = 0,001$, 0,3040 para $\alpha = 0,005$, 0,7227 para $\alpha = 0,01$

onde l , h são constantes de integração.

A quarta equação, extraímos da métrica, colocando $ds^2 = 0$,

$$\dot{t} = (t)^{2/3}(1 + \alpha \sin(kx))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (18)$$

Para simplificar o nosso problema vamos analisar as linhas geodésicas no plano $(x - y)$, colocando $\dot{z} = 0$. Neste caso, da equação (17) nós obtemos para todo q ,

$$h = 0. \quad (19)$$

Colocamos ainda as variáveis x e t em função de y , para obter

$$x'' = \frac{\alpha k \cos(kx)x'^2}{(1 + \alpha \sin(kx))} + \frac{\alpha k \cos(kx)}{(1 + \alpha \sin(kx))}, \quad (20)$$

$$t' = t^{2/3}(1 + \alpha \sin(kx))\sqrt{1 + x'^2}, \quad (21)$$

onde o traço denota derivada em relação a y .

Vemos que as equações (20) e (21) formam um sistema semi-acoplado, sem o parâmetro q ; a equação (20) não depende da equação (21), mas a equação (21) depende da equação (20). Para obter as trajetórias geodésicas no plano $(x - y)$ basta resolver a equação (20). Chamamos,

$$v = \frac{dx}{dy} \longrightarrow \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{2} \frac{d(v^2)}{dx},$$

$$f(x) = \frac{2\alpha k \cos(kx)}{(1 + \alpha \sin(kx))}.$$

Então,

$$\frac{d(v^2 + 1)}{dx} = f(x)(v^2 + 1). \quad (22)$$

A solução desta equação é dada por

$$v^2 = A(1 + \alpha \sin(kx))^2 - 1, \quad (23)$$

onde $A = \text{cte}$.

A partir daqui utilizaremos o método de Runge-Kutta de 4^a ordem (veja Apêndice C). Mas antes de resolver nosso sistema faremos as seguintes transformações, de forma que as variáveis x e y se tornem adimensionais:

$$X = kx; Y = ky. \quad (24)$$

Colocamos ainda as seguintes condições: $Y|_{X=0} = 0$,

$$k = \frac{2\pi}{L}; \frac{dY}{dX}|_{X=0} = \text{tg}(\omega),$$

onde $L = 0,5 \times \text{raio observável} = 1.5$.

Neste caso, da equação (23), temos

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\text{sen}(\omega)}{\sqrt{(1 + \alpha \text{sen}(X))^2 - \text{sen}^2(\omega)}}. \quad (25)$$

Como podemos observar, a equação (25) não é bem comportada em toda parte; ela diverge para $\omega = \frac{\pi}{2}$, e para ω próximo a $\frac{\pi}{2}$ o valor de α deve ser bastante reduzido para que a raiz permaneça real em todo o eixo- x .

Vimos que neste modelo aparece uma série de problemas que torna desinteressante a sua aplicação em cosmologia; mas para fins ilustrativos vamos mostrar a seguir algumas trajetórias geodésicas com $\alpha = 0,01$, $-\pi \leq X \leq \pi$, pois o espaço cósmico é fechado ou periódico na direção do eixo- x (veja figura 2.).

O próximo modelo que iremos estudar é uma extensão do modelo anterior, pois acrescentaremos um fator a mais à métrica. Esta é dada da seguinte forma

$$ds^2 = dt^2 - b^2(t, x, y)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (26)$$

onde $b(t, x, y) = t^{2/3}(1 + \alpha \text{sen}(kx))(1 + \beta \text{sen}(ky))$.

Usando novamente os cálculos do Apêndice A, e substituindo as componentes da métrica da equação (26), obtemos as seguintes relações para componentes do tensor de energia-impulso

$$8\pi T_0^0 = \frac{4}{3t^2} + \frac{k^2}{b^2} \left[\frac{\alpha \text{sen}(kx)(2 + \alpha \text{sen}(kx)) + \alpha^2}{(1 + \alpha \text{sen}(kx))^2} + \frac{\beta \text{sen}(ky)(2 + \beta \text{sen}(ky)) + \beta^2}{(1 + \beta \text{sen}(ky))^2} \right], \quad (27)$$

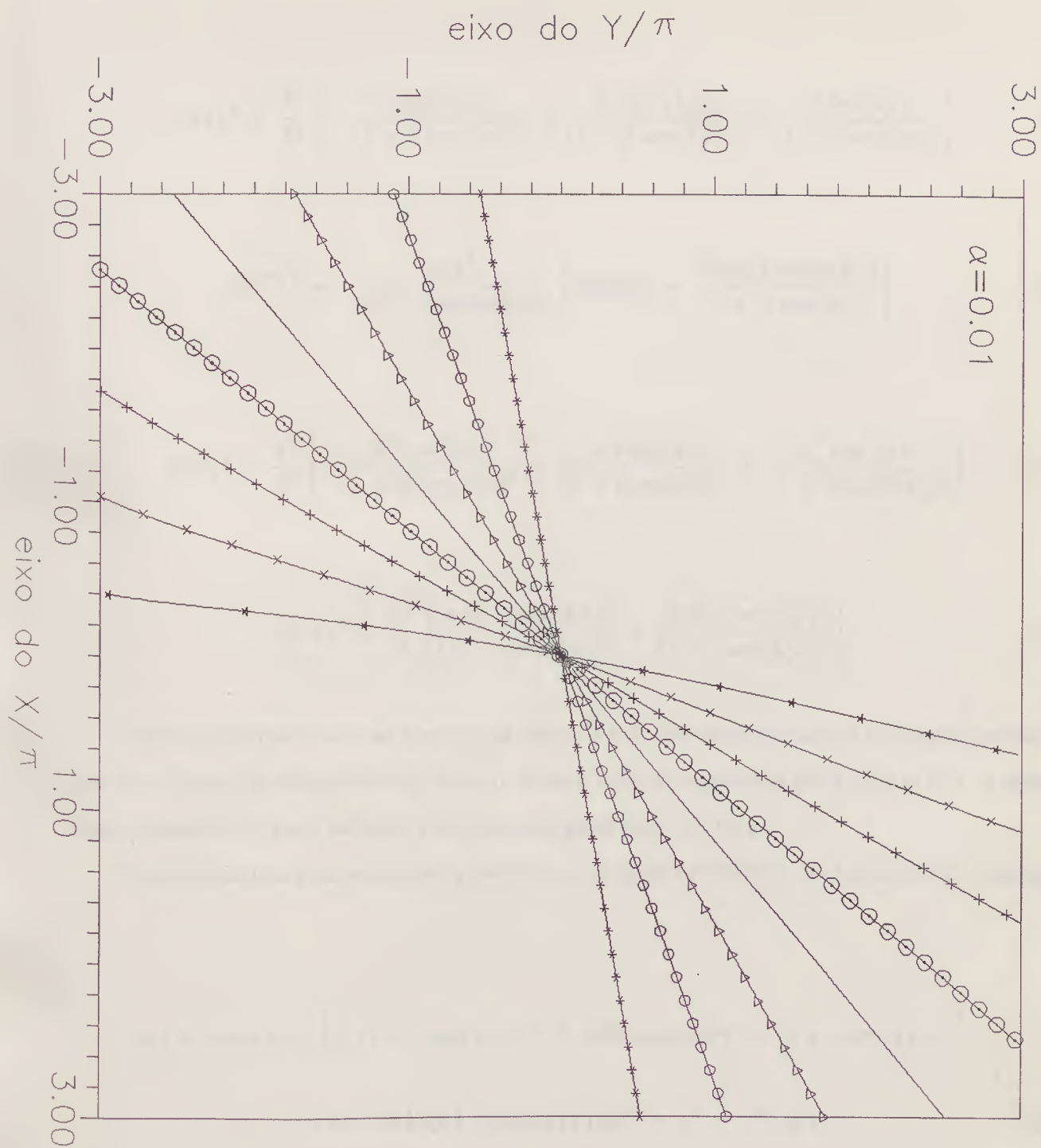


Figura 2. Trajetórias geodésicas de raios luminosos, como solução da equação (25).

$$8\pi T_1^1 = \frac{k^2}{b^2} \left[-\frac{\alpha^2 \cos^2(kx)}{(1 + \alpha \sin(kx))^2} + \frac{\beta^2 \cos^2(ky)}{(1 + \beta \sin(ky))} + \frac{\beta \sin(ky)}{(1 + \beta \sin(ky))} \right], \quad (28)$$

$$8\pi T_1^2 = -\frac{\alpha k^2}{b^2(1 + \alpha \sin(kx))} \left[\sin(kx) + \frac{\beta \cos(kx) \cos(ky)}{(1 + \beta \sin(ky))} \right], \quad (29)$$

$$8\pi T_2^2 = \frac{k^2}{b^2} \left[-\frac{\beta^2 \cos^2(ky)}{(1 + \beta \sin(ky))^2} + \frac{\alpha \sin(kx)}{(1 + \alpha \sin(kx))} + \frac{\alpha^2 \cos^2(kx)}{(1 + \alpha \sin(kx))^2} \right], \quad (30)$$

$$8\pi T_3^3 = \frac{k^2}{b^2} \left[\frac{\alpha(\alpha + \sin(kx))}{(1 + \alpha \sin(kx))^2} + \frac{\beta(\beta + \sin(ky))}{(1 + \beta \sin(ky))^2} \right]. \quad (31)$$

Como podemos observar através da figura 3 e 4, este modelo possui o mesmo problema que o primeiro. A densidade de energia possui valores negativos para $\alpha, \beta = 0, 1$, a menos que reduzimos os seus valores, por exemplo para $\alpha, \beta = 0, 01$.

Vamos analisar suas equações geodésicas. Usando os cálculos do Apêndice C, obtemos,

$$(1 + \alpha \sin(kx)) \left[\frac{4}{3t} (1 + \beta \sin(ky)) \dot{t} \dot{x} + 2\beta k \cos(ky) \dot{x} \dot{y} + (1 + \beta \sin(ky)) \ddot{x} \right] + \\ + \alpha k \cos(kx) (1 + \beta \sin(ky)) (\dot{x}^2 - \dot{y}^2 - \dot{z}^2) = 0, \quad (32)$$

$$(1 + \beta \sin(ky)) \left[\frac{4}{3t} (1 + \alpha \sin(kx)) \dot{t} \dot{y} + 2\alpha k \cos(kx) \dot{x} \dot{y} + (1 + \alpha \sin(kx)) \ddot{y} \right] + \\ + \beta k \cos(ky) (1 + \alpha \sin(kx)) (\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - \dot{x}^2) = 0, \quad (33)$$

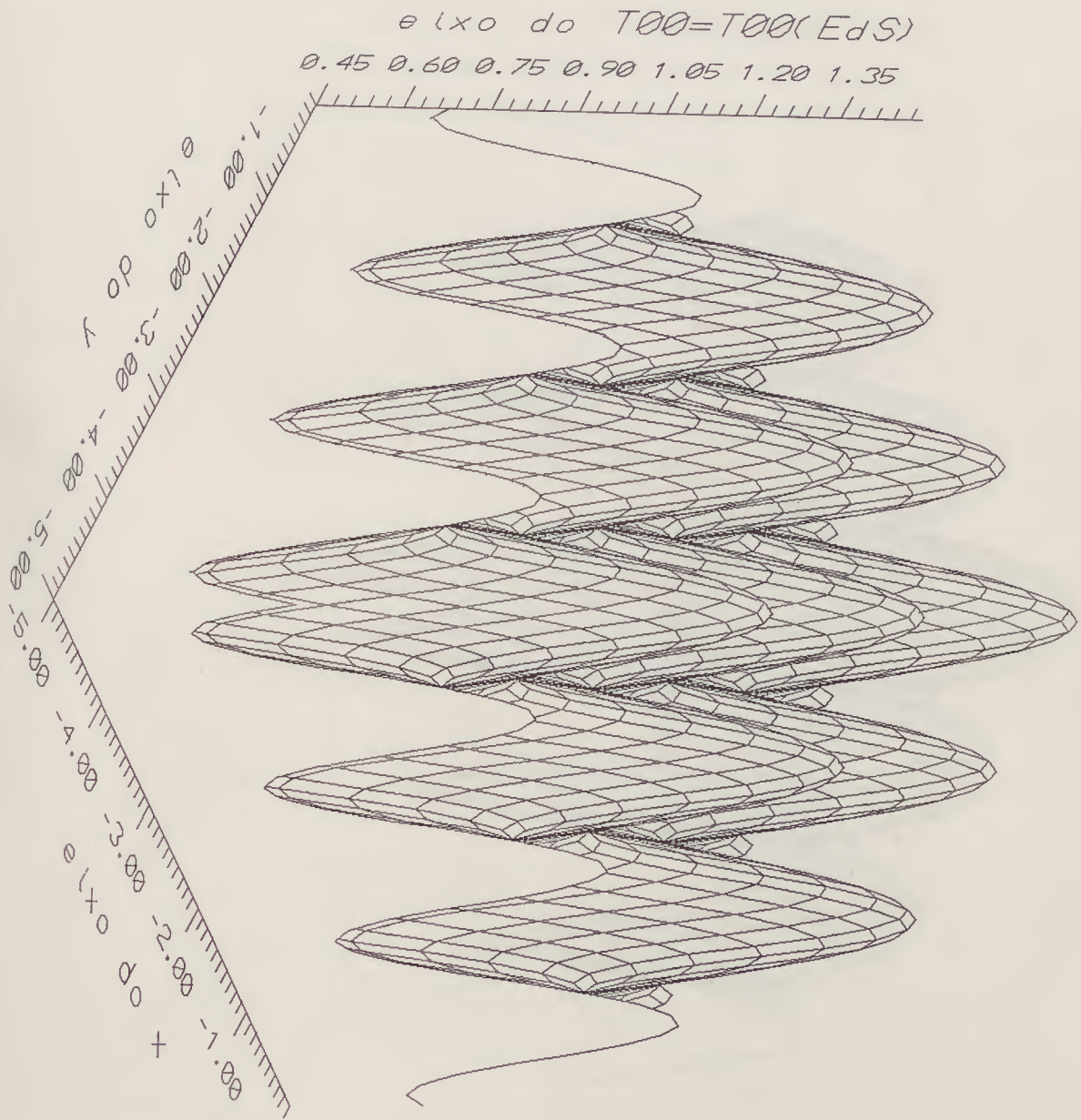


Figura 3. Variação da densidade de energia no caso da equação (27) ($\alpha, \beta = 0,01$; $k = \frac{4\pi}{3}$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$; $y_0 = \frac{\pi}{3}$). Notar que $\delta\epsilon/\epsilon$ é bem maior que α, β .

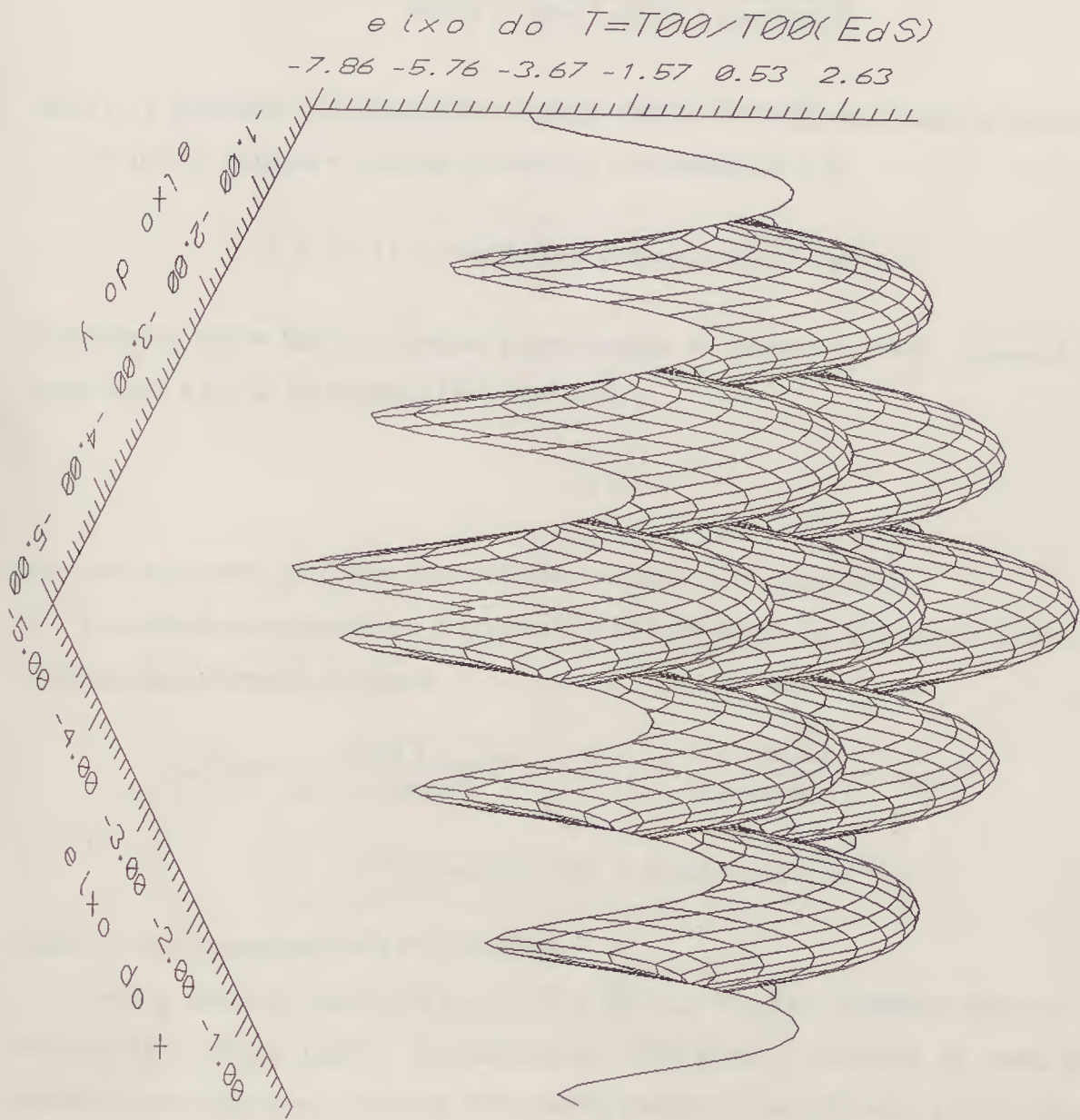


Figura 4. Variação da densidade de energia no caso da equação (27) ($\alpha, \beta = 0, 1; k = \frac{4\pi}{3}; x_0 = \frac{\pi}{4}; y_0 = \frac{\pi}{3}$).

$$\dot{z} = \frac{l}{t^{4/3}(1 + \alpha \text{sen}(kx))^2(1 + \beta \text{sen}(ky))^2}, \quad (34)$$

onde l é a constante de integração, e o ponto denota derivada em relação ao parâmetro q .

A quarta equação extraímos da métrica colocando $ds^2 = 0$,

$$\dot{t} = t^{2/3}(1 + \alpha \text{sen}(kx))(1 + \beta \text{sen}(ky))\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (35)$$

Novamente, vamos fazer as mesmas simplificações do primeiro modelo, colocando $\dot{z} = 0$, para obter, a partir da equação (34) para todo q ,

$$l = 0, \quad (36)$$

de modo que nosso problema fique restrito ao plano $(x - y)$ espacial.

Colocando as variáveis t e X (onde $X = kx$) em função de Y (onde $Y = ky$), e após algumas simplificações, obtemos

$$X'' = -\frac{\beta \cos(Y)}{(1 + \beta \text{sen}(Y))}X'(1 + X'^2) + \frac{\alpha \cos(X)}{(1 + \alpha \text{sen}(X))}(1 + X'^2), \quad (37)$$

$$t' = t^{2/3}(1 + \alpha \text{sen}(X))(1 + \beta \text{sen}(Y))\sqrt{1 + X'^2}, \quad (38)$$

onde o traço denota derivada em relação a Y .

Dada a condição iniciais $X|_{Y=0} = 0$ e $\frac{dX}{dY}|_{Y=0} = \text{tg}(\omega)$, podemos observar que a equação (37) diverge quando ω aproxima $\frac{\pi}{2}$. Mas graças à simetria da nossa métrica podemos contornar esse problema. Para tanto, colocamos as variáveis t e Y em função de X , para obter o segundo par de equações geodésicas através de (32), (33) e (34),

$$Y^{**} = \frac{\beta \cos(Y)}{(1 + \beta \text{sen}(Y))}(1 + Y^{*2}) - \frac{\alpha \cos(X)}{(1 + \alpha \text{sen}(X))}Y^*(1 + Y^{*2}), \quad (39)$$

$$t^* = t^{2/3}(1 + \alpha \text{sen}(X))(1 + \beta \text{sen}(Y))\sqrt{1 + Y^{*2}}, \quad (40)$$

onde $*$ denota derivada em relação a X .

Estes pares de equações permitem-nos mapear qualquer trajetória geodésica no plano $(x - y)$ sem que haja nenhum tipo de divergência em qualquer ponto do eixo do x .

Para traçar as linhas geodésicas deste modelo usamos as mesmas transformações de coordenadas e as mesmas condições iniciais do primeiro modelo, colocando $\alpha, \beta = 0, 1$. É claro que para $\beta = 0$ os valores obtidos neste modelo devem coincidir com aqueles obtidos no modelo anterior.

Conforme o que discutimos anteriormente, a equação (37) diverge para uma certa região do domínio de ω . Para cobrir todo o plano $(X - Y)$, precisamos das equações (37) e (39). Portanto, na região em comum a ambos os domínios, as trajetórias da equação (39) devem coincidir com as trajetórias da equação (37). Na figura 5, a região em questão mostrada com as trajetórias marcadas com asteriscos. Essas trajetórias estão superpostas, mostrando que elas coincidem.

As trajetórias neste modelo possuem desvios em relação ao modelo EdS. Isso se deve aos seus termos perturbativos. As trajetórias são simétricas em relação à bissetriz dos eixos X e Y , e são do tipo oscilatório.

E quanto ao ‘redshift’ desse modelo? Haverá algum desvio em relação ao modelo padrão ? Veremos que não.

Para calcular o ‘redshift’ do nosso modelo, partiremos da métrica (26), colocando $ds^2 = 0$, donde segue que

$$0 = dt^2 - b^2(t, x, y)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (41)$$

Vamos supor que uma galáxia localizada no plano $z = 0$, no ponto (x_e, y_e) , emita um pulso de luz no instante t_e . Essa onda viajará no espaço durante um certo intervalo de tempo até nos atingir, digamos em $t_0 = 1$. Neste caso, da equação (41) obtemos

$$\int_{t_e}^1 t^{-2/3} dt = \int_0^{x_e} F(x, y, \frac{dy}{dx}) dx, \quad (42)$$

onde $F(x, y, \frac{dy}{dx}) = (1 + \alpha \text{sen}(kx))(1 + \beta \text{sen}(ky)) \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

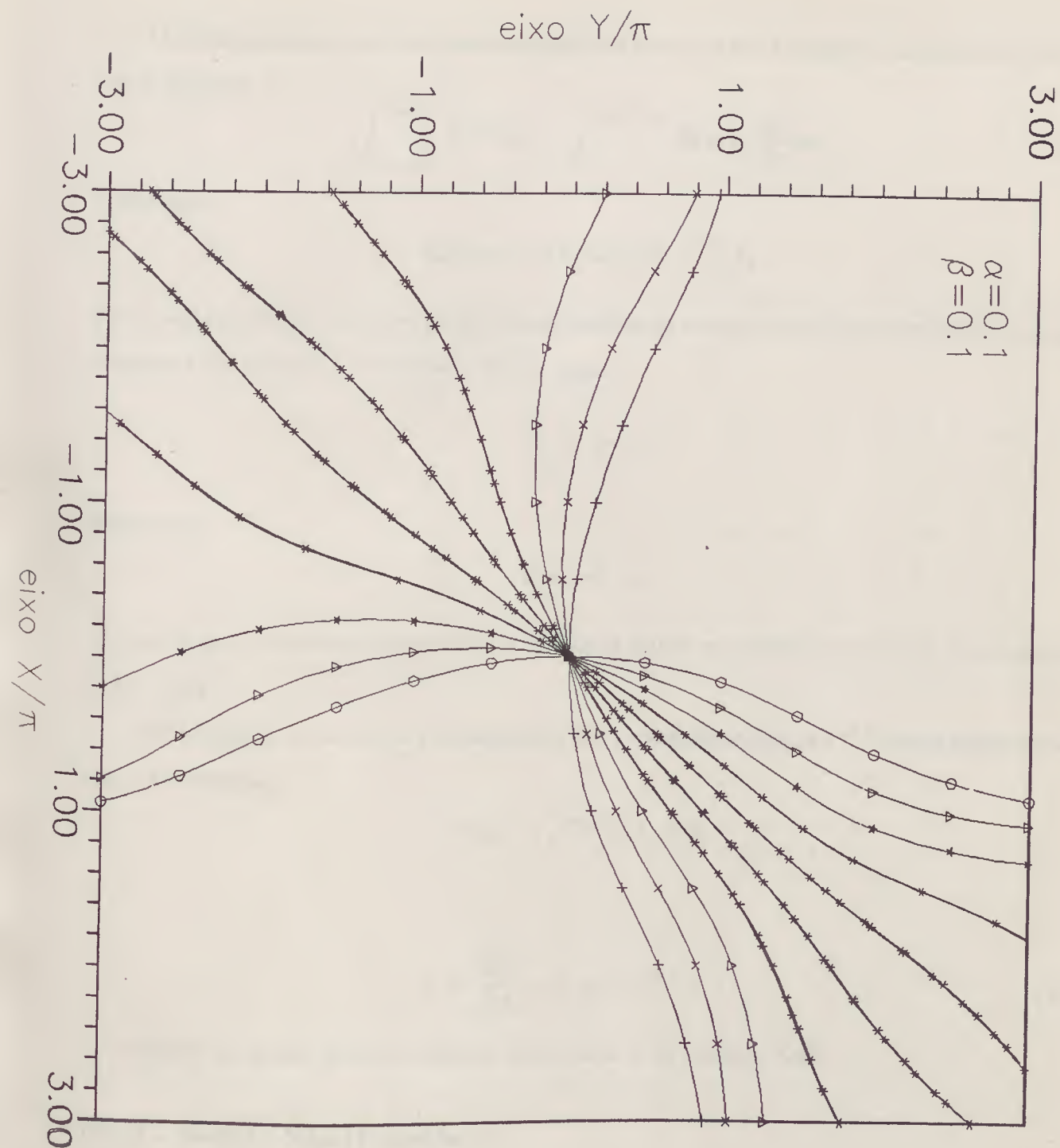


figura 5 - Trajetórias geodésicas de raios luminosos, como soluções das equações (32) e (33).

O próximo pulso emitido da mesma galáxia em $(t_e + \Delta t_e)$ chegará a nós em $(t_0 + \Delta t_0)$, segue daí que

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{1 + \Delta t_0} t^{-2/3} dt = \int_0^{x_e + \Delta x_e} F(x, y, \frac{dy}{dx}) dx. \quad (43)$$

Entretanto,

$$\Delta x_e \sim v_e \Delta t_e = v_e \frac{\lambda_e}{c} = \frac{v_e}{c} \lambda_e.$$

Para o estágio atual do universo, podemos considerar que as velocidades das galáxias sejam pequenas em relação à velocidade da luz, logo

$$\frac{v_e}{c} \lambda_e \ll \lambda_e.$$

Segue que

$$\Delta x_e \ll \lambda_e,$$

de modo que suporemos desprezível a diferença entre os segundos membros das equações (42) e (43).

Subtraindo a equação (42) da equação (43) e considerando que $t^{-2/3}$ varia muito pouco em Δt , obtemos

$$\Delta t_0 - t_e^{-2/3} \Delta t_e = 0,$$

$$z = \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} - 1 = t_e^{-2/3} - 1. \quad (44)$$

O ‘redshift’ do nosso modelo coincide então com o do modelo EdS.

III.II - Modelo Não-Homogêneo

Vimos que os dois modelos anteriores não possuem interesse físico. Não obstante, eles podem servir como guias para que possamos chegar a um modelo mais conclusivo e mais realístico. Após algumas análises obtivemos a seguinte métrica,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t, x)dx^2 - b^2(t, x)(dy^2 + dz^2). \quad (45)$$

Com algumas tentativas de escolher os parâmetros mais adequados, concluimos que, a nossa métrica assumirá a seguinte forma

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau, x)dx^2 - b^2(\tau, x)(dy^2 + dz^2), \quad (46)$$

onde deslocamos o início do tempo para a época atual e o medimos no sentido do passado, usando a transformação de coordenadas $\tau = 1 - t$. Isso será visto com mais clareza após a introdução da nossa condição inicial.

Para obtermos o nosso modelo, resolvemos as equações de Einstein. O sistema de referência que escolhemos é do tipo comóvel. Além disto, fazemos a hipótese simplificadora que toda a matéria está em repouso neste sistema: ($u^0 = 1, u^\alpha = 0$) e consideramos a equação de estado $p = 0$ (essa escolha é bastante razoável para o estágio atual do universo, desde que a contribuição da radiação e de neutrinos sem massa para densidade de massa-energia na época presente é muito menor que a matéria não relativística, de forma que p é negligenciável; veja Primack 1987). Usando os cálculos do Apêndice A, obtemos as seguintes equações:

$$8\pi T_0^0 = -\frac{2b''}{a^2b} + \frac{2\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{2a'b'}{a^3b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{b'^2}{a^2b^2} = 8\pi\varepsilon, \quad (47)$$

$$8\pi T_0^1 = \frac{2\dot{b}'}{a^2b} - \frac{2\dot{a}b'}{a^3b} = 0, \quad (48)$$

$$8\pi T_1^1 = \frac{2\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{b'^2}{a^2b^2} = 0, \quad (49)$$

$$8\pi T_2^2 = 8\pi T_3^3 = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{b''}{a^2b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{a'b'}{a^3b} = 0, \quad (50)$$

onde o ponto denota derivada em relação a τ e o traço denota derivada em relação a x .

Como podemos observar, apenas as equações (49) e (50) possuem derivadas de segunda ordem em relação a τ , as quais fornecem a evolução temporal do sistema, ao passo que as equações (47) e (48) representam os vínculos como dados iniciais do problema de Cauchy, conforme discutimos no Apêndice A.

Essas equações (49) e (50) não são fáceis de serem resolvidas analiticamente, portanto vamos resolvê-las numericamente.

Para resolver essas equações numericamente, fornecemos as seguintes condições ‘iniciais’ (na realidade são condições finais, pois $\tau = 0$ é a época atual):

$$a(0, X) = 1 + \gamma \text{sen}(X - X_0); \dot{a}(0, X) = -\frac{2}{3}(1 + \gamma \text{sen}(X - X_0)), \quad (51)$$

$$b(0, X) = 1 + \gamma \text{sen}(X - X_0); \dot{b}(0, X) = -\frac{2}{3}(1 + \gamma \text{sen}(X - X_0)), \quad (52)$$

colocando $X = kx$, $\gamma = 10^{-4}$, $X_0 = \frac{\pi}{5}$, $k = \frac{2\pi}{L}$, $L = 3ct_0f$, e $f = 0.05 = L/\text{raio do horizonte}$.

Essas condições iniciais são tomadas a partir do modelo EdS. Como podemos observar, para $\gamma = 0$ temos exatamente os valores do modelo padrão.

Usamos também a condição de periodicidade em $a(\tau, X + 2\pi) = a(\tau, X)$, $b(\tau, X + 2\pi) = b(\tau, X)$, de forma que o espaço cósmico seja fechado na direção do eixo do x . O cálculo foi feito em um microcomputador IBM PS/2. Subdividimos os valores de x e τ em 500 intervalos. O processo que utilizamos para realizar esses cálculos é fornecido no Apêndice B. A precisão do resultado é da ordem de 10^{-5} e alguns dos valores são mostrados na Tabela II e III do mesmo apêndice. Os valores de $a_{rel}(\tau, x) = \frac{a(\tau, X)}{a_{EdS}(\tau)}$ e $b_{rel}(\tau, x) = \frac{b(\tau, X)}{b_{EdS}(\tau)}$ foram ajustados a partir da série de Fourier, usando o processo de integração por trapézio (veja Sadosky, 1962). Os resultados obtidos para os primeiros termos da série foram bastante satisfatórios. Portanto os outros termos foram desprezados. A série em questão, é dada por

$$a_{rel}(\tau, X) = \frac{a(\tau, X)}{a_{EdS}(\tau)} \cong (1 + \alpha(\tau) \text{sen}(X - X_0)), \quad (53)$$

$$b_{rel}(\tau, X) = \frac{b(\tau, X)}{b_{EdS}(\tau)} \cong (1 + \beta \text{sen}(X - X_0)), \quad (54)$$

onde β é praticamente constante ($\beta = 10^{-4}$), e

$$\alpha(\tau) = 0,0001 - 0,0888\tau^2 - 0,0829\tau^3 - 0,1751\tau^4. \quad (55)$$

Obtivemos o valor de $\alpha(\tau)$ até $\tau = 0,2$ (veja Tabela I) usando o método de mínimos quadrados (Nielsen, 1956). Para obter valores até $\tau = 0,5$ é necessário usar um polinômio de grau maior. Como a nossa análise não exige tal precisão, segue que a relação (55) é mais do que suficiente. Além disso, nosso estudo é qualitativo.

Para verificar os resultados que obtivemos, usamos novamente as aproximações dadas no início do Apêndice B e calculamos os valores das derivadas de primeira ordem e de segunda ordem de $a(\tau, x)$ e $b(\tau, x)$ em relação a τ e a x , usando os valores obtidos de $a(\tau, x)$ e de $b(\tau, x)$. Em seguida, substituímos nosso resultado nas equações (49) e (50), verificando que as mesmas são satisfeitas dentro dos limites de erros dos nossos resultados anteriores.

Lembramos que nossos resultados são aproximados. Neste caso, as relações (53), (54) e (55) não são exatas. Como podemos observar, se tomarmos β igual a uma constante, as equações (48), (49) e (50) não se verificam.

Para obter o valor de ϵ , usamos a equação (A.4) e a equação (47). Essas relações permitem-nos comparar os resultados de ϵ através da substituição dos valores obtidos de $a(\tau, x)$ e de $b(\tau, x)$, e de suas respectivas derivadas em relação a τ e a x . Substituindo as relações (A.9), do Apêndice A, na equação da conservação de energia

$$T^{i0}_{;i} = 0, \quad (56)$$

temos

$$T^{i0}_{;i} = \dot{\epsilon} + \epsilon \left(\frac{\dot{a}}{a} + 2\frac{\dot{b}}{b} \right) = 0, \quad (57)$$

onde o ponto denota derivada em relação a τ .

Integrando a equação acima, obtemos

$$\epsilon = \frac{F(x)}{ab^2}. \quad (58)$$

Substituímos as condições iniciais (51) e (52) na equação (47), para obter

$$\epsilon = \frac{1}{8\pi} \left[2\alpha k^2 \text{sen}(X - X_0) + \frac{4}{3}(1 + \alpha \text{sen}(X - X_0))^3 + \frac{\alpha^2 k^2 \cos^2(X - X_0)}{(1 + \alpha \text{sen}(X - X_0))} \right] \frac{1}{ab^2}. \quad (59)$$

Os resultados são mostrados na Tabela III e IV, onde identificamos o ϵ da equação (59) por E00 e o ϵ da equação (47) por T00.

Vemos que para $\alpha = 0$ obtemos através das relações (53) e (54), $a = b = t^{2/3}$. Substituindo estas relações na equação (59), para obter $1/6\pi t^2 = \varepsilon_{EdS}$; cf. Landau e Lifshitz 1980, §113).

III.II.I - Redshift

Nossa informação mais importante, sobre a evolução do cosmo, vem da observação do desvio de frequência da luz emitida por fontes distantes. Para calcular o ‘redshift’ neste modelo usamos o mesmo procedimento anterior, partindo da métrica (45) e colocando $ds^2 = 0$, o que fornece

$$0 = d\tau^2 - a^2(\tau, x)dx^2 - b^2(\tau, x)(dy^2 + dz^2) \quad (60).$$

Usando as mesmas suposições do modelo anterior, temos

$$\begin{aligned} \int_{t_e + \Delta t_e}^{1 + \Delta t_0} t^{-2/3} dt - \int_{t_e}^1 t^{-2/3} dt &= \int_0^{x_e} \left[a_{rel}^2(x, \tau - \Delta\tau) + b_{rel}^2(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx + \\ &- \int_0^{x_e} \left[a_{rel}^2(\tau, x) + b_{rel}^2(x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} dx. \end{aligned} \quad (61)$$

O sinal menos que aparece na frente do $\Delta\tau$ é devido à orientação da coordenada temporal: $\tau - \Delta\tau$ é mais recente que τ .

Tomando a aproximação de ordem zero como uma linha reta no espaço comóvel $y = x \operatorname{tg}(\omega)$, $z = 0$, e substituindo as equações (53) e (54), desprezando termos de segunda ordem de α e de β , obtemos

$$\begin{aligned} \Delta t_0 - t_e^{-2/3} \Delta t_e &= \int_0^{x_e} [1 + 2\alpha(\tau - \Delta\tau)\operatorname{sen}(x - x_0) + (1 + 2\beta\operatorname{sen}(x - x_0))\operatorname{tg}^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} dx + \\ &- \int_0^{x_e} [1 + 2\alpha(\tau)\operatorname{sen}(x - x_0) + (1 + 2\beta\operatorname{sen}(x - x_0))\operatorname{tg}^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} dx, \\ &= \frac{1}{\cos(\omega)} \int_0^{x_e} [1 + 2\alpha(\tau - \Delta\tau)\operatorname{sen}(x - x_0)\cos^2(\omega) + 2\beta\operatorname{sen}(x - x_0)\operatorname{sen}^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} dx + \\ &- \frac{1}{\cos(\omega)} \int_0^{x_e} [1 + 2\alpha(\tau)\operatorname{sen}(x - x_0)\cos^2(\omega) + 2\beta\operatorname{sen}(x - x_0)\operatorname{sen}^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} dx. \end{aligned}$$

Expandindo o integrando em série de Newton com dois termos, obtemos

$$\Delta t_0 - t_e^{-2/3} \Delta t_e = \int_0^{x_e} [\alpha(\tau - \Delta\tau) \text{sen}(x - x_0) \cos(\omega) - \alpha(\tau) \text{sen}(x - x_0) \cos(\omega)] dx .$$

Expandindo $\alpha(\tau - \Delta\tau)$ em série de Taylor até primeira ordem de $\Delta\tau$, segue daí que

$$\Delta t_0 - t_e^{-2/3} \Delta t_e = -\cos(\omega) \int_0^{x_e} \dot{\alpha}[\tau(x)] \Delta \tau(x) \text{sen}(qx - \frac{\pi}{5}) dx . \quad (62)$$

A trajetória do raio de luz de uma fonte distante até o observador O do modelo EdS é dado por

$$\int_t^1 (t')^{-2/3} dt' = \int_0^{x(\tau)} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx'}\right)^2} dx' .$$

As trajetórias geodésicas no modelo EdS são todas retas, e identificamos por $y = x \text{tg}(\omega)$.

Substituindo na equação acima, obtemos

$$x(\tau) = 3 \left[1 - (1 - \tau)^{1/3} \right] \cos(\omega) .$$

Expandindo $(1 - \tau)^{1/3}$ em série até a primeira ordem de τ , temos

$$x(\tau) = \tau \cos(\omega) . \quad (63)$$

Considerando que a variação de $\Delta\tau$ muito pequena durante o trajeto da fonte à observador, podemos aproximar $\Delta\tau(x)$ por Δt_e , ou seja

$$\Delta\tau(x) \sim \Delta t_e . \quad (64)$$

Substituindo as relações (55), (63), (64) e $\langle \text{sen}(qx - \frac{\pi}{5}) \rangle \sim \frac{1}{2}$ na equação (62), para obter

$$\Delta t_0 - t_e^{-2/3} \Delta t_e \cong \frac{0,1 \Delta t_e \cos^2(\omega)}{2} (1 - t_e)^2 . \quad (65)$$

Entretanto, $t_e = (1 + Z_{EdS})^{-3/2} \cong 1 - \frac{3}{2} Z_{EdS}$. Segue daí que

$$Z \cong Z_{EdS} + 0,1 \cos^2(\omega) Z_{EdS}^2 . \quad (66)$$

Vemos então que o ‘redshift’ deste modelo possui um desvio em relação ao ‘redshift’ do modelo EdS. Atribuímos esse desvio ao efeito da gravidade peculiar (veja Yahil, 1988). Para Z pequeno, esse termo é desprezível.

Como nossos resultados são aproximados e os parâmetros em que os baseamos são arbitrários, não forneceremos nenhum tipo de interpretação geométrica a esse desvio. Mas, notamos uma coisa interessante neste modelo em relação aos modelos anteriores: o termo de desvio do ‘redshift’ só aparece quando existe dependência temporal nos termos perturbativos; nos modelos anteriores, os termos de perturbações ($\alpha \sin(kx)$, $\alpha = \text{cte}$) não dependiam de t , de modo que a integral da parte espacial não variava, ou melhor, a variação do δx_e era desprezível. Quando subtraímos as integrais das cristas de ondas esses termos se cancelavam (veja equações (42) e (43)).

III.III - Conclusão

Os resultados que obtivemos no nosso modelo não-homogêneo apresentaram alguns aspectos interessantes:

1) - As flutuações espaciais de $a(\tau, x)$ crescem de 0,01% em $\tau = 0$ a 4,67% em $\tau = 0,5$ (o valor de $a(\tau, x)$ é dado pela equação (53)). No mesmo período, $\delta\epsilon/\epsilon = (\epsilon_{\max} - \epsilon_{\min})/\epsilon_{\min}$ vai de 0,714 a 0,883 (o valor de ϵ é dado pela equação (47)). Esses números concordam com o resultado qualitativo do artigo de Barrow (1989).

2) - Obtivemos um desvio no ‘redshift’ em relação ao modelo EdS, e atribuímos isso a um efeito da gravidade peculiar.

3) - As rotinas computacionais para calcular as equações de Einstein não foram tão difíceis de serem realizadas, e isso nos desperta interesse em construir modelos mais elaborados usando o mesmo procedimento.

Em relação à pesquisa atual, sobre o movimento em larga escala, Silk (1989) apontou que um erro sistemático na estimativa da razão massa-luminosidade poderia induzir a um erro na distância inferida r e, conseqüentemente, na velocidade peculiar $v_{pec} = v_{obs} - H_0 r$. Além disso, quando a distribuição da matéria no universo é não-homogênea, nosso resultado do item 2 pode também contribuir com desvios desta fórmula, na medida dessa velocidade

peculiar, se o efeito do potencial peculiar não for incluído.

E por fim, gostaríamos de frisar que o nosso trabalho não é exatamente buscar um modelo definitivo para descrever o universo. Uma das nossas primeiras preocupações é estudar a variação da densidade de energia ϵ em relação a variação do parâmetro de perturbação α . Dos nossos resultados, conseguimos obter uma variação grande na densidade de energia ϵ em relação ao α correspondente, conforme mostrado na figura 1. Isso quer dizer que podemos obter um modelo altamente não homogêneo com parâmetro de perturbação α pequeno.

Outro ponto importante deste trabalho é a construção do nosso modelo não homogêneo partindo de um modelo padrão. Isso permite-nos fazer comparações com os resultados conhecidos.

Apêndice A

Equações de Einstein

As equações de Einstein são dadas por

$$R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R = 8\pi T_{ik}, \quad (A.1)$$

onde R_{ik} é o tensor de Ricci simétrico e T_{ik} é o tensor de energia e impulso, também simétrico pelas transposições dos seus índices.

Pela simetria destes tensores obtemos de (A.1) apenas dez equações independentes. Além dessa simetria temos ainda uma outra relação que vem da identidade de Bianchi. A identidade de Bianchi é dada por:

$$R^n{}_{ikl;m} + R^n{}_{imk;l} + R^n{}_{ilm;k} = 0. \quad (A.2)$$

Contraindo os índices ik e ln , temos

$$\begin{aligned} R^l{}_{m;l} - \frac{\partial R}{\partial x^m} &= 0, \\ \left(R^l{}_m - \frac{1}{2}\delta^l{}_m R \right)_{;l} &= 0. \end{aligned} \quad (A.3)$$

Aplicando derivada covariante em ambos os lados da equação (A.1) e comparando com a relação (A.3), obtemos

$$T^k{}_{i;k} = 0. \quad (A.4)$$

Devido à relação (A.3), podemos observar que nem todas as equações diferenciais fornecidas por (A.1) possuem derivadas de segunda ordem em relação ao tempo. Para visualizar isso, vamos escrever a identidade (A.3) da seguinte forma:

$$(R^0{}_i - \frac{1}{2}\delta^0{}_i R)_{;0} = -(R^\alpha{}_i - \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_i R)_{;\alpha}. \quad (A.5)$$

As derivadas em relação a t , de ordem mais alta, que figuram no segundo termo desta igualdade, são as derivadas segundas. Sendo (A.5) uma identidade, segue que seu primeiro

termo também deve, conseqüentemente, conter derivadas com respeito ao tempo, de ordem não superior a dois. Entretanto, o lado esquerdo desta identidade já possui uma derivada explícita em relação a t . Portanto, as expressões $(R_i^0 - \frac{1}{2}\delta_i^0 R)$ não podem conter derivadas em relação a t de ordem superior a um (veja Landau 1980). Deste modo, considerando as equações de Einstein como um sistema quasi-linear de segunda ordem em t , nada podemos aprender sobre a evolução temporal, através dessas quatro equações

$$R_i^0 - \frac{1}{2}\delta_i^0 R = 8\pi T_i^0. \quad (A.6)$$

Elas devem ser impostas como vínculos sobre os valores iniciais de $g_{\mu\nu}$ e $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^0}$, enquanto as outras seis equações nos fornecem a dinâmica do sistema. Este tipo de problema pode ser resolvido como o tradicional problema de valores iniciais de Cauchy (veja Weinberg 1972). Neste caso as dez equações de Einstein, as equações de conservação de energia e momento (A.4) e a equação de estado da matéria formam o conjunto de equações fundamentais da dinâmica da cosmologia.

A seguir, calculamos as componentes do tensor de Ricci para a seguinte métrica

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t, x, y, z)dx^2 - b^2(t, x, y, z)(dy^2 + dz^2). \quad (A.7)$$

Os símbolos de Christoffel são dados por

$$\Gamma_{kl}^i = \frac{1}{2}g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{ml}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m} \right). \quad (A.8)$$

Os Γ_{kl}^i não nulos, calculados para a métrica (A.7), são:

$$\Gamma_{11}^0 = a\partial_t a,$$

$$\Gamma_{22}^0 = \Gamma_{33}^0 = b\partial_t b,$$

$$\Gamma_{01}^1 = \frac{\partial_t a}{a},$$

$$\Gamma_{1\alpha}^1 = \frac{\partial_\alpha a}{a},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{33}^1 = -\frac{b\partial_x b}{a^2},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{02}^2 &= \Gamma_{03}^3 = \frac{\partial_t b}{b}, \\
\Gamma_{11}^2 &= -\frac{a\partial_y a}{b^2} \\
\Gamma_{\alpha 2}^2 &= \frac{\partial_\alpha b}{b}, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\frac{\partial_y b}{b}, \\
\Gamma_{11}^3 &= -\frac{a\partial_z a}{b^2}, \\
\Gamma_{\alpha 3}^3 &= \frac{\partial_\alpha a}{b}, \\
\Gamma_{22}^3 &= -\frac{\partial_z b}{b},
\end{aligned} \tag{A.9},$$

e seus simétricos, $\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i$. O tensor de Ricci é dado por

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l. \tag{A.10}$$

As componentes não nulas do tensor de Ricci, calculadas a partir dos símbolo de Christoffel (A.9), são:

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{\partial_{tt} a}{a} - \frac{2\partial_{tt} b}{b}, \\
R_{11} &= a\partial_{tt} a - \frac{2\partial_{xx} b}{b} - \frac{a\partial_{yy} a}{b^2} - \frac{a\partial_{zz} a}{b^2} + \frac{2a}{b}\partial_t a\partial_t b + \frac{2\partial_x a\partial_x b}{ab}, \\
R_{22} &= b\partial_{tt} b - \frac{b\partial_{xx} b}{a^2} - \frac{\partial_{yy} a}{a} - \frac{\partial_{yy} b}{b} - \frac{\partial_{zz} b}{b} + \frac{b\partial_x a\partial_x b}{a^3} + \frac{b\partial_t a\partial_t b}{a} + \\
&\quad + \frac{\partial_y a\partial_y b}{ab} + \frac{\partial_z a\partial_z b}{ab} + (\partial_t b)^2 - \left(\frac{\partial_x b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial_z b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\partial_y b}{b}\right)^2, \\
R_{33} &= b\partial_{tt} b - \frac{b\partial_{xx} b}{a^2} - \frac{\partial_{yy} b}{b} - \frac{\partial_{zz} a}{a} - \frac{\partial_{zz} b}{b} + \frac{b\partial_t a\partial_t b}{a} + \frac{b\partial_x a\partial_x b}{a^3} +
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial_y a \partial_y b}{ab} + \frac{\partial_z a \partial_z b}{ab} + (\partial_t b)^2 - \left(\frac{\partial_x b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial_y b}{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial_z b}{a}\right)^2,$$

$$R_{12} = -\frac{\partial_{yy} b}{b} + \frac{\partial_x b \partial_y a}{ab} + \frac{\partial_x b \partial_y b}{b^2},$$

$$R_{13} = -\frac{\partial_{xz} b}{b} + \frac{\partial_x b \partial_z b}{b^2} + \frac{\partial_x b \partial_z a}{ab},$$

$$R_{23} = -\frac{\partial_{yz} a}{a} + \frac{\partial_y a \partial_z b}{ab} + \frac{\partial_y b \partial_z a}{ab},$$

$$R_{01} = -\frac{2\partial_{tx} b}{b} + \frac{2\partial_t a \partial_x b}{ab},$$

$$R_{02} = -\frac{\partial_{ty} a}{a} - \frac{\partial_{ty} b}{b} + \frac{\partial_t b \partial_y b}{b^2} + \frac{\partial_t b \partial_y a}{ab},$$

$$R_{03} = -\frac{\partial_{tz} a}{a} - \frac{\partial_{tz} b}{b} + \frac{\partial_t b \partial_z b}{b^2} + \frac{\partial_t b \partial_z a}{ab},$$

com $R_{ij} = R_{ji}$.

Apêndice B

Método das diferenças finitas *

i) - Aproximações pelas diferenças-finitas para derivadas

Aqui, assumimos que u é uma função de uma variável, digamos x . Então, pelo teorema de Taylor, temos que

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) + \frac{1}{6}h^3u''' + \dots, \quad (B.1)$$

e

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{1}{2}h^2u''(x) - \frac{1}{6}h^3u''' + \dots. \quad (B.2)$$

Subtraímos a equação (B.1) da equação (B.2) e desprezamos os termos da ordem de h^3 , para obter

$$u'(x) = \left(\frac{du}{dx} \right)_{x=x} \cong \frac{1}{2h} [u(x+h) - u(x-h)], \quad (B.3)$$

com um erro da ordem de h^2 .

A adição das equações (B.1) e (B.2) fornece, com a precisão de h^2 , a seguinte relação:

$$u'' = \left(\frac{d^2u}{dx^2} \right)_{x=x} \cong \frac{1}{h^2} [u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)]. \quad (B.4)$$

Essas aproximações, (B.3) e (B.4), são conhecidas como aproximações pelas diferenças centrais.

ii) - Extensões para funções de duas variáveis

As extensões para funções de várias variáveis são bastante simples. No nosso caso, vamos apresentar apenas as aproximações de duas variáveis, para derivadas parciais de $u(x, t)$. Subdividimos o plano $(x-t)$ em conjuntos de retângulos iguais, de lados $\delta x = h$ e $\delta t = k$, e representamos as coordenadas (x, t) do ponto p da rede por: $x = ih$ e $t = jk$ (veja a figura 6), e $u(ih, jk) = u_{i,j}$.

Para derivadas parciais de primeira ordem, temos

* Adotamos basicamente os métodos de Smith (1978).

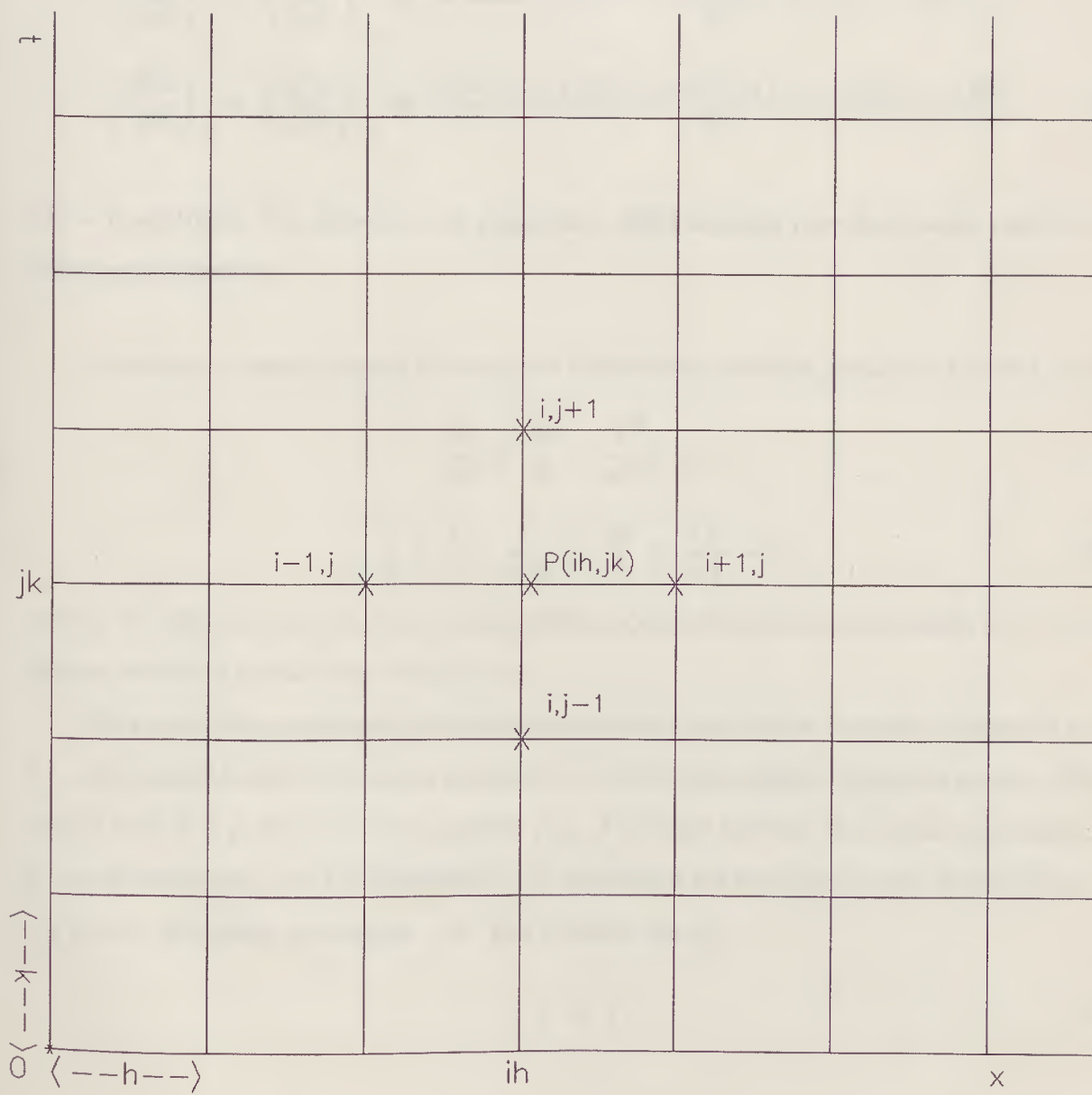


Figura 6.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad (B.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h}, \quad (B.6)$$

onde $i, j = 0, 1, 2, 3, \dots, n$.

Para derivadas parciais de segunda ordem, temos

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_p = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} \cong \frac{u[(i+1)h, jk] - 2u(ih, jk) + u[(i-1)h, jk]}{h^2}, \quad (B.7)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_p = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} \cong \frac{u[ih, (j+1)k] - 2u(ih, jk) + u[ih, (j-1)k]}{h^2}, \quad (B.8)$$

iii) - Resolução do sistema de equações diferenciais parciais pelo método das diferenças finitas

Considere o nosso sistema de equações diferenciais parciais, equações (49-50) do texto:

$$\frac{2\ddot{b}}{b} + \frac{\dot{b}^2}{b^2} - \frac{b'^2}{a^2 b^2} = 0, \quad (B.9)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} - \frac{b''}{a^2 b} + \frac{\dot{a}\dot{b}}{ab} + \frac{a'b'}{a^3 b} = 0, \quad (B.10)$$

onde $a = a(x, \tau)$, $b = b(x, \tau)$, o ponto denota derivada parcial em relação a τ e o traço denota derivada parcial em relação a x .

Para resolver esse sistema, isolamos as derivadas parciais de segunda ordem em relação a t , e em seguida subdividimos as equações em várias equações de primeira ordem. Chamamos $\dot{a} = f$, $\dot{b} = g$, $F = \dot{f}$ e $G = \dot{g}$, onde f, g, F, G não contêm derivadas com relação a τ . A seguir derivamos $\dot{g}$ e $\dot{f}$ em relação a τ e colocamos estas derivadas em função de a, b, f, g e suas derivadas em relação a x . Em resumo, temos

$$\dot{a} = f, \quad (B.11)$$

$$\dot{b} = g, \quad (B.12)$$

$$\dot{g} = \frac{1}{2b} \left(\frac{b'^2}{a^2} - g^2 \right) = G, \quad (B.13)$$

$$\dot{f} = F = \frac{1}{ab} \left(b'' - \frac{a'b'}{a} \right) - \frac{1}{b} (aG + gf), \quad (B.14)$$

$$\dot{G} = \frac{b'}{a^2b} \left(g' - \frac{b'f}{a} \right) - \frac{2g}{b} G = G1, \quad (B.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{F} = & -\frac{1}{a^2b} \left(f'b' + a'g' + \frac{ab'g'}{b} \right) + \frac{1}{ab} \left(g'' - \frac{2b''g}{b} - \frac{b''f}{a} \right) + \frac{3fg^2}{b^2} + \\ & + \frac{2a'b'}{a^2b} \left(\frac{f}{a} + \frac{g}{b} \right) + \frac{4ag}{b^2} G = F1. \end{aligned} \quad (B.16)$$

Como podemos observar, no lado esquerdo dessas equações temos apenas derivadas em relação a τ , e no lado direito temos funções a, b, f, g e suas derivadas em relação a x . Dessa forma, fica fácil calcular os valores de a e b ; basta expandí-las em série de Taylor, usando as aproximações dadas no começo deste apêndice. Para facilitar a visualização do processo, mostraremos, a seguir, o fluxograma contendo as principais passagens.

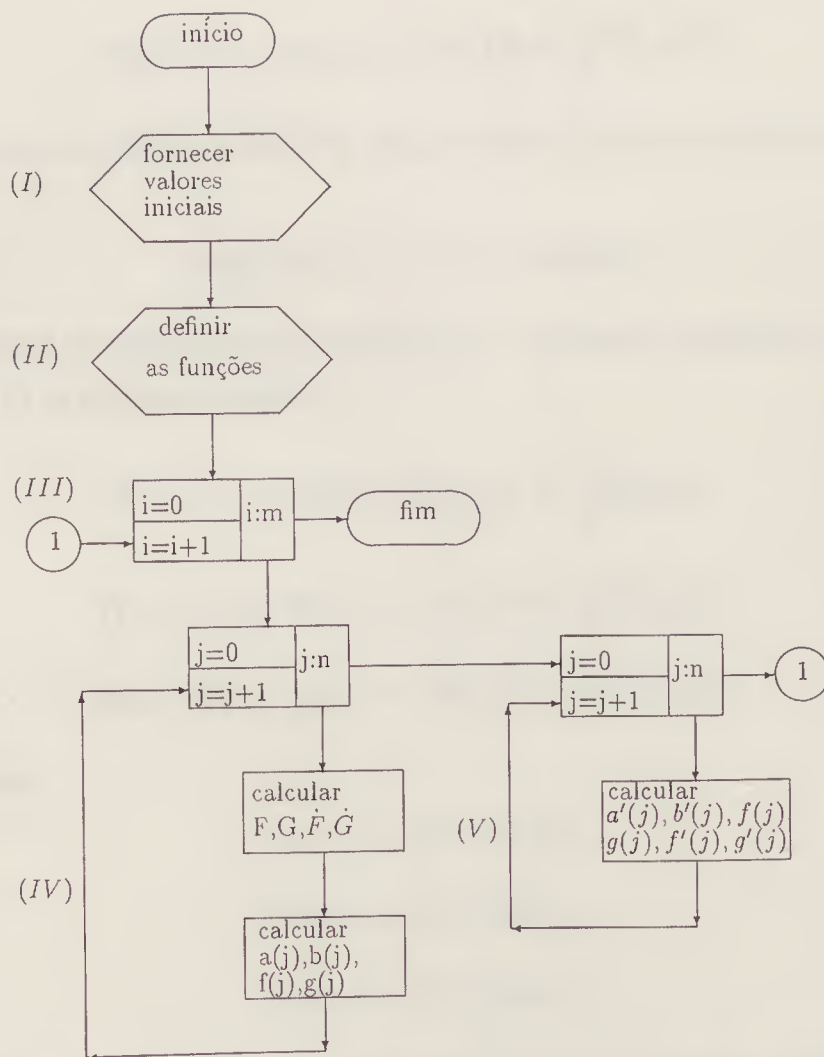
(I) - No primeiro passo, fornecemos os valores iniciais de $a(x, \tau)$ e $b(x, \tau)$ e suas respectivas derivadas em relação a τ e x , ou seja os valores iniciais de $a, b, f, g, a', b', f', g', b'', g''$.

(II) - Definir as funções $F, G, F1$ e $G1$.

(III) - Trocamos x por $X = kx$ (onde $-\pi \leq X \leq \pi$). Subdividimos o intervalo τ em m partes: $l = \delta\tau = 0,5/m$.

(IV) - Subdividimos o intervalo X em n partes: $h = \delta X = 2\pi/n$. Calculamos os valores de $F, G, \dot{F}, \dot{G}$ em cada um dos pontos da divisão. Em seguida, calculamos os valores de $a(i), b(i), f(i), g(i)$ através da expansão em série de Taylor, com três termos:

$$a(X, \tau + \delta\tau) \cong a(X, \tau) + \dot{a}(X, \tau)\delta\tau + \frac{1}{2}\ddot{a}(X, \tau)(\delta\tau)^2, \text{ etc..}$$



Fluxograma 1.

Indicamos as variáveis ($X = -\pi + ih$, $\tau = jl$) por (i, j) e $a(X, \tau)$ por $a(i, j)$, etc. Substituindo as equações (B.11 - B.16), para obter

$$a(i, j+1) = a(i, j) + f(i, j)l + \frac{1}{2}F(i, j)l^2.$$

Como o nosso espaço cósmico é fechado, temos ainda mais uma condição a fornecer, com $0 \leq i \leq m$,

$$a(pm + i, j) = a(i, j), \text{ pinteiro},$$

de modo que basta consideramos estes valores de i . Obtemos analogamente para $b(X, \tau)$, $f(X, \tau)$ e $g(X, \tau)$ as seguintes relações:

$$b(i, j+1) = b(i, j) + g(i, j)l + \frac{1}{2}G(i, j)l^2,$$

$$f(i, j+1) = f(i, j) + F(i, j)l + \frac{1}{2}F1(i, j)l^2,$$

$$g(i, j+1) = g(i, j) + G(i, j)l + \frac{1}{2}G1(i, j)l^2,$$

com as condições

$$b(pm + i, j) = b(i, j),$$

$$f(pm + i, j) = f(i, j),$$

$$g(pm + i, j) = g(i, j).$$

(V) - Uma vez calculados os valores de $a(i)$, $b(i)$, $f(i)$, $g(i)$ no passo (III), podemos facilmente calcular os valores de $a'(i)$, $b'(i)$, $f'(i)$, $g'(i)$, $b''(i)$, $g''(i)$, usando as aproximações pelas diferenças centrais dadas no início deste apêndice, e passar ao incremento seguinte de τ .

iv) - Verificação dos resultados

O nosso processo é auto-consistente. Os resultados que obtivemos são verificados diretamente nas equações (B.9) e (B.10), ou seja, substituímos os valores de $a(X, \tau)$, $b(X, \tau)$ e suas derivadas em relação a τ e X nas equações (B.9) e (B.10) usando as aproximações

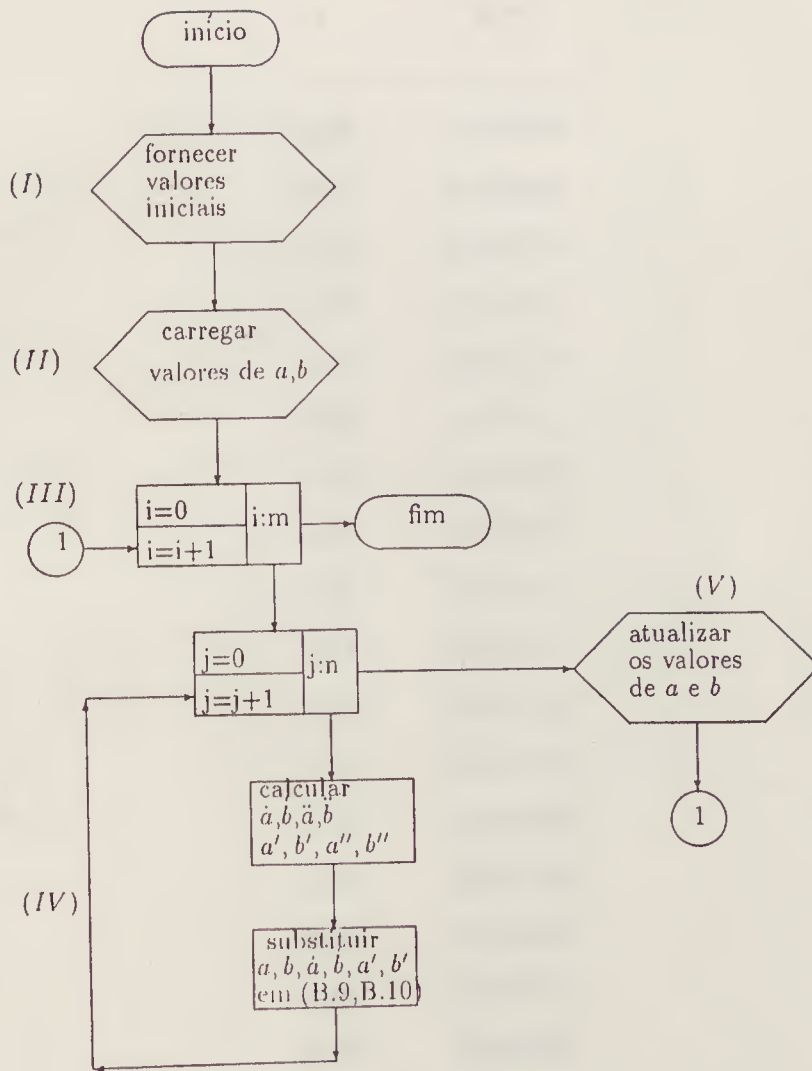
dadas no início deste apêndice. A verificação dos resultados foram feitos com $m = n = 100$, com precisão de 10^{-4} . A seguir mostraremos os passos do processo através do fluxograma 2.

(I) - Fornecemos os parâmetros iniciais do programa.

(II) - Calculamos os valores de $\dot{a}$, $\dot{b}$, $\ddot{a}$, $\ddot{b}$, a' , b' , a'' , b'' , usando as aproximações pelas diferenças centrais.

(III) - Substituímos os valores de $a(X, \tau)$, $b(X, \tau)$ e suas respectivas derivadas em relação a τ e X nas equações (B.9) e (B.10).

(IV) - Atualizamos os valores de $a(X, \tau)$ e $b(X, \tau)$.



Fluxograma 2.

TABELA I. FLUTUAÇÕES DE AMPLITUDES DE $a(\tau, x)$

τ	$\alpha(\tau)$
0,00	0,000100
0,01	0,000094
0,02	0,000070
0,03	0,000027
0,04	-0,000036
0,05	-0,000118
0,06	-0,000222
0,07	-0,000347
0,08	-0,000494
0,09	-0,000664
0,10	-0,000858
0,11	-0,001077
0,12	-0,001322
0,13	-0,001594
0,14	-0,001893
0,15	-0,002221
0,16	-0,002580
0,17	-0,002969
0,18	-0,003390
0,19	-0,003845
0,20	-0,004391

TABELA II. VALORES DE $a(\tau, x)$

X	$\tau = 0.0$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.4$	$\tau = 0.5$
$-\pi$	1,000059	0,931684	0,859550	0,782998	0,701131	0,612653
$-\frac{4\pi}{5}$	1,000000	0,932170	0,861773	0,788372	0,711376	0,629956
$-\frac{3\pi}{5}$	0,999941	0,932655	0,863998	0,793748	0,721625	0,647267
$-\frac{2\pi}{5}$	0,999905	0,932955	0,865373	0,797072	0,727962	0,657969
$-\frac{\pi}{5}$	0,999905	0,932955	0,865373	0,797072	0,727962	0,657969
0	0,999941	0,932655	0,863998	0,793748	0,721625	0,647267
$\frac{\pi}{5}$	1,000000	0,932170	0,861773	0,788372	0,711376	0,629956
$\frac{2\pi}{5}$	1,000059	0,931684	0,859550	0,782998	0,701131	0,612653
$\frac{3\pi}{5}$	1,000095	0,931384	0,858176	0,779678	0,694802	0,601962
$\frac{4\pi}{5}$	1,000095	0,931384	0,858176	0,779678	0,694802	0,601962
π	1,000059	0,931684	0,859550	0,782998	0,701131	0,612653

TABELA III. VALORES DE $b(\tau, x)$

X	$\tau = 0.0$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.4$	$\tau = 0.5$
$-\pi$	1,000059	0,932225	0,861825	0,788420	0,711421	0,629999
$-\frac{4\pi}{5}$	1,000000	0,932170	0,861774	0,788374	0,711380	0,629962
$-\frac{3\pi}{5}$	0,999941	0,932115	0,861723	0,788328	0,711337	0,629925
$-\frac{2\pi}{5}$	0,999905	0,932081	0,861692	0,788299	0,711311	0,629901
$-\frac{\pi}{5}$	0,999905	0,932081	0,861692	0,788299	0,711311	0,629901
0	0,999941	0,932115	0,861723	0,788328	0,711337	0,629925
$\frac{\pi}{5}$	1,000000	0,932170	0,861774	0,788374	0,711380	0,629962
$\frac{2\pi}{5}$	1,000059	0,932225	0,861825	0,788420	0,711421	0,629999
$\frac{3\pi}{5}$	1,000095	0,932258	0,861856	0,788449	0,711446	0,630021
$\frac{4\pi}{5}$	1,000095	0,932258	0,861856	0,788449	0,711446	0,630021
π	1,000059	0,932225	0,861825	0,788420	0,711421	0,629999

TABELA IV. VALORES DE E_{00} *

X	$\tau = 0.0$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.4$	$\tau = 0.5$
$-\pi$	0,061258	0,075671	0,095968	0,125881	0,172657	0,251967
$-\frac{4\pi}{5}$	0,053052	0,065497	0,082894	0,108270	0,147368	0,212210
$-\frac{3\pi}{5}$	0,044844	0,055330	0,069884	0,090892	0,122789	0,174568
$-\frac{2\pi}{5}$	0,039769	0,049051	0,061874	0,080267	0,107942	0,152289
$-\frac{\pi}{5}$	0,039769	0,049051	0,061874	0,080267	0,107942	0,152289
0	0,044844	0,055330	0,069884	0,090892	0,122789	0,174568
$\frac{\pi}{5}$	0,053052	0,065497	0,082894	0,108270	0,147368	0,212210
$\frac{2\pi}{5}$	0,061258	0,075671	0,095968	0,125881	0,172657	0,251967
$\frac{3\pi}{5}$	0,066327	0,081962	0,104081	0,136884	0,188656	0,277675
$\frac{4\pi}{5}$	0,066327	0,081962	0,104081	0,136884	0,188656	0,277675
π	0,061258	0,075671	0,095968	0,125881	0,172657	0,251967

* $E_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}R$.

TABELA V. VALORES DE T_{00} *

X	$\tau = 0.0$	$\tau = 0.1$	$\tau = 0.2$	$\tau = 0.3$	$\tau = 0.4$	$\tau = 0.5$
$-\pi$	0,061258	0,075670	0,095968	0,125881	0,172657	0,251966
$-\frac{4\pi}{5}$	0,053052	0,065497	0,082894	0,108270	0,147368	0,212210
$-\frac{3\pi}{5}$	0,044844	0,055331	0,069884	0,090893	0,122790	0,174568
$-\frac{2\pi}{5}$	0,039769	0,049051	0,061874	0,080268	0,107942	0,152289
$-\frac{\pi}{5}$	0,039769	0,049051	0,061874	0,080268	0,107942	0,152289
0	0,044844	0,055331	0,069884	0,090893	0,122790	0,174568
$\frac{\pi}{5}$	0,053052	0,065497	0,082894	0,108270	0,147368	0,212210
$\frac{2\pi}{5}$	0,061258	0,075670	0,095968	0,125881	0,172657	0,251966
$\frac{3\pi}{5}$	0,066327	0,081962	0,104080	0,136884	0,188655	0,277674
$\frac{4\pi}{5}$	0,066327	0,081962	0,104080	0,136884	0,188655	0,277674
π	0,061258	0,075670	0,095968	0,125881	0,172657	0,251966

* $T_{00} = 8\pi\epsilon$.

Apêndice C

i) - Geodésicas

As equações das geodésicas nulas, com parâmetro q , são

$$\frac{d^2 x^i}{dq^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{dq} \frac{dx^l}{dq} = 0. \quad (C.1)$$

O caminho de um raio de luz é caracterizado por $ds^2 = 0$. Deste modo, o parâmetro q deve diferir do parâmetro s .

Para a métrica (A.7), obtemos as seguintes equações geodésicas:

Variando x ;

$$\frac{d(a^2 \dot{x})}{dq} = a \frac{\partial a}{\partial x} \dot{x}^2 + b \frac{\partial b}{\partial x} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (C.2)$$

Variando y ;

$$\frac{d(b^2 \dot{y})}{dq} = a \frac{\partial a}{\partial y} \dot{x}^2 + b \frac{\partial b}{\partial y} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2). \quad (C.3)$$

Variando z ;

$$\frac{d(a^2 \dot{z})}{dq} = a \frac{\partial a}{\partial z} \dot{x}^2 + b \frac{\partial b}{\partial z} (\dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (C.4)$$

onde o ponto denota derivada em relação a q .

ii) - Resoluções de Equações Diferenciais Ordinárias pelo Método de Runge-Kutta

- Resolução da equação (25) do texto.

Dada a nossa equação (25) do texto

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\text{sen}(\omega)}{\sqrt{(1 + \alpha \text{sen}(X))^2 - \text{sen}^2(\omega)}}, \quad (C.5),$$

onde $X = kx$, $Y = ky$ e α é uma constante.

As condições iniciais são dadas por:

$$Y|_{X=0} = 0; \quad k = \frac{2\pi}{L}; \quad \frac{dY}{dX}|_{X=0} = \text{tg}(\omega).$$

A fórmula de Runge-Kutta (veja Sadosky 1962, pg. 299) para resolver a equação (C.5) é dada por:

$$Y_1 - Y_0 = \int_{X_0}^{X_1} f(X) dX = \frac{h}{6} [f(X_0) + 4f(X_0 + h/2) + f(X_0 + h)],$$

onde $f(X) = \frac{\text{sen}(\omega)}{\sqrt{(1+\alpha\text{sen}(X))^2 - \text{sen}^2(\omega)}}$.

- Resolução da equação (37) do texto.

Dada a equação (37) do texto

$$X'' = -\frac{\beta\cos(Y)}{(1+\beta\text{sen}(Y))}X' \left(1 + X'^2\right) + \frac{\alpha\cos(X)}{(1+\alpha\text{sen}(X))} \left(1 + X'^2\right), \quad (C.6)$$

onde $X = kx$, $Y = ky$, β e α são constantes.

As condições iniciais são dadas por:

$$X|_{Y=0} = 0; k = \frac{2\pi}{fR}; \frac{dX}{dY}|_{Y=0} = \text{tg}(\omega),$$

onde $f = 0,5$, $R = 3ct_0 = 3$.

Para resolver numericamente a equação (C.9), nós vamos subdividi-la em um sistema de equações de primeiro grau da seguinte forma:

$$X' = z,$$

$$z' = g(X, Y, z) = -\frac{\beta\cos(Y)}{(1+\beta\text{sen}(Y))}z(1+z^2) + \frac{\alpha\cos(X)}{(1+\alpha\text{sen}(X))}(1+z^2).$$

O método de Runge-Kutta (Sadosky 1962, pg. 301 e Collatz 1960, cap. II) para o sistema acima é dado por

$$k_1 = h z_\nu,$$

$$k_2 = h(z_\nu + l_1/2),$$

$$k_3 = h(z_\nu + l_2/2),$$

$$k_4 = h(z_\nu + l_3),$$

$$l_1 = hg(X_\nu, Y_\nu, z_\nu),$$

$$l_2 = hg(X_\nu + h/2, Y_\nu + k_1/2, z_\nu + l_1/2),$$

$$l_3 = hg(X_\nu + h/2, Y_\nu + k_2/2, z_\nu + l_2/2),$$

$$l_4 = hg(X_\nu + h, Y_\nu + k_3, z_\nu + l_3),$$

onde $h = \frac{\pi}{m}$. Com estes valores calculamos

$$X_{\nu+1} = X_\nu + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$z_{\nu+1} = z_\nu + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4).$$

Os resultados para alguns valores de ω são apresentados como gráficos na figura 2 do texto.

Referências:

- Adler, R. ; Bazin, M. ; Schiffer, M. 1965 *Introduction to General Relativity*
(McGRAW-HILL).
- Barrow, J. D. 1989, *Quart. J. Royal Astr. Soc.*, 30, 163.
- Collatz, L. 1960, *The Numerical Treatment of Differential Equations*, third edition
(Springer-Verlag).
- de Lapparent, V., Geller, M. J. and Huchra, J., 1986. *Astrophys. J. (Letters)*, 302, L1.
- Dressler, A. *Sci. American*, Sept. 1987, p. 38.
- Fagundes, H. V. and Kwok, S. F. 1990 *Numerical Study of a Perturbed Einstein-de Sitter
Cosmological Model (a ser publicado)*.
- Landau, L. and Lifshitz, E. 1980 *Teoria do Campo* (Editora Mir).
- Lawrence, M. K. *Sci. American*, Dec. 1986, p. 50.
- Nielsen, K. L. 1950 *Methods in Numerical Analysis* (The Macmillan Company).
- Primack, J. R. 1987, in *Proc. International School of Phys. Enrico Fermi, course XCII*,
ed. N. Cabibbo (Amsterdam: North-Holland), p. 137.
- Rees, M., Ruffini, R. and Wheeler, J. A., 1974, *Black Holes, Gravitational Waves and
Cosmology* (Gordon and Breach Science Publishers.)
- Sadosky, M. 1962 *Cálculo Numérico y Gráfico*, cuarta edición
(Ediciones Librería del Colegio).
- Silk, J. 1989, *Astrophys. J. (letters)*, 345, L1.
- Smith, G. D. 1978, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*,
2nd edition (Oxford: Clarendon Press).
- Weinberg, S. 1972 *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons).
- Yahil, A., 1988, in *Large Scale Motions in the Universe*, V. C. Rubin and G. V. Coyne
(Princeton: Princeton University Press), p. 219.

ERRATA

da dissertação de mestrado IFT-D.M.04/90, de Kwok Sau Fa.

Página 6, linha 12: onde está ‘ as soluções destas equações tornam-se extremamente difíceis de serem resolvidas. Além disto de problema artificial’, leia-se ‘ as equações (12) e (14) são inconsistentes, e poderíamos talvez resolver este problema com o auxílio de uma constante cosmológica. Mas não nos preocupamos com isto, tratando-se de problema artificial’.

Página 22, última linha: onde está ‘ $Z \cong Z_{EdS} + 0,1\cos^2(\omega)Z^2_{EdS}$ ’, leia-se ‘ $Z = Z_{EdS} + \delta Z$, onde $|\delta Z| \sim 0,1\cos^2(\omega)Z^2_{EdS}$ ’.

Página 33, passo (V): onde está ‘ $f(j), g(j)$ ’, leia-se ‘ $b''(j), g''(j)$ ’.

Página 36, passo (IV): onde está ‘ Substituir $a, b, \dot{a}, \dot{b}, a', b'$ em (B.9,B.10)’, leia-se ‘Substituir $a, b, \dot{a}, \dot{b}, a', b', \ddot{a}, \ddot{b}$ em (B.9,B.10)’.

