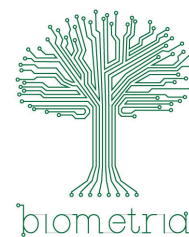




Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”  
Instituto de Biociências – Câmpus de Botucatu  
Programa de Pós-graduação em Biometria



# **Modelagem da variação temporal da temperatura e precipitação em estações climatológicas do estado de São Paulo**

Victória Marchetti

Botucatu  
2025

Victória Marchetti

# **Modelagem da variação temporal da temperatura e precipitação em estações climatológicas do estado de São Paulo**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Programa de Pós-graduação em Biometria da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Biometria.

**Orientador:** Prof. Dr. José Silvio Govone

Botucatu  
2025

Marchetti, Victória

Modelagem da variação temporal da temperatura e precipitação em estações climatológicas do estado de São Paulo/ Victória Marchetti. – Botucatu, 2025.

100 p. : il. (colors; grafs; tabs).

Orientador: Prof. Dr. José Silvio Govone

Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Instituto de Biociências – Câmpus de Botucatu.

Programa de Pós-graduação em Biometria.

1. Séries Temporais. 2. Mudanças climáticas. I. Govone, José Silvio.

II. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. III. Título

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Modelagem da Variação Temporal da Temperatura e Precipitação em Estações Climatológicas do Estado de São Paulo

**AUTORA:** VICTÓRIA MARCHETTI

**ORIENTADOR:** JOSÉ SILVIO GOVONE

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Mestra em Biometria, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOSÉ SILVIO GOVONE (Participação Presencial)

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP Rio Claro

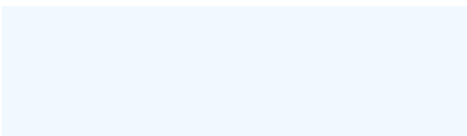
Profa. Dra. SELENE MARIA COELHO LOIBEL (Participação Virtual)

Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP Rio Claro

Profa. Dra. LICIANA VAZ DE ARRUDA SILVEIRA (Participação Presencial)

Departamento de Biodiversidade e Bioestatística / Instituto de Biociências - UNESP Botucatu

Botucatu, 19 de dezembro de 2025.



**Willian Gabriel Miranda**

**Assistente Administrativo II da Seção Técnica de Pós-Graduação  
Instituto de Biociências de Botucatu**

*Dedico este trabalho à todos que acreditaram e confiaram no meu potencial. E a todos os pesquisadores que dedicaram e dedicam suas vidas para entender melhor nosso planeta e torná-lo mais compreensível e a ciência mais acessível.*

# Agradecimentos

À minha família e amigos, pelo apoio incondicional. Em especial aos meus pais, Silvana Margaret de Godoy Marchetti e Antônio Aparecido Marchetti, por sempre acreditarem e incentivarem meus estudos; aos amigos da Biometria, Abrantes João Afonso Mussafo, Thiago Moraes Rizzieri e Fernando Andrade, pelo apoio e ajuda durante o curso; e aos meus melhores amigos, Maria Luiza Penetto e Matheus dos Anjos Pereira, pelo incentivo nos momentos mais desafiadores.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Silvio Govone, cuja orientação, incentivo e paciência foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Aos meus colegas de departamento, pelas trocas intelectuais, e aos funcionários técnico-administrativos, que facilitaram o acesso e o trabalho durante os estudos.

Por fim, à CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento que tornou o estudo e minha qualificação possível.

*"All models are wrong, but some are useful."*

*George E. P. Box*

# Resumo

Os impactos das mudanças climáticas são significativos tanto para o meio ambiente quanto para a saúde pública. Este projeto visa analisar e modelar séries temporais de temperatura e precipitação a partir de dados de estações climatológicas selecionadas no Estado de São Paulo, abrangendo o período de 1970 à 2023. A pesquisa busca investigar possíveis ocorrências de mudanças climáticas e identificar tendências nos padrões meteorológicos por meio de análise gráfica e modelos como o ARIMA e SARIMA. Esta análise é importante para compreender o fenômeno das mudanças climáticas e suas implicações na natureza e na sociedade, facilitando o desenvolvimento de estratégias de adaptação na região estudada.

**Palavras-chave:** Modelos Autorregressivos, Modelos de Séries Temporais, Mudanças Climáticas, Previsões.



# Abstract

The impacts of climate change are significant for both the environment and public health. This project aims to analyze and model time series of temperature and precipitation data from selected weather stations in the State of São Paulo, covering the period from 1970 to 2023. The research investigates potential climate change occurrences and identifies trends in meteorological patterns through graphical analysis and models such as ARIMA and SARIMA. This analysis is important for understanding the phenomenon of climate change and its implications for nature and society, facilitating the development of adaptation strategies in the studied region.

**Keywords:** Autorregressive Models, Climate Changes, Forecasting, Time Series Models.

# Lista de figuras

|                                                                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 – Valores de uma série temporal com predição com limites de 50%. Fonte: (BOX et al., 2016) . . . . .                                                                  | 16 |
| Figura 2 – Mapa dos postos da DAEE e INMET . . . . .                                                                                                                           | 24 |
| Figura 3 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses. . . . .                                               | 26 |
| Figura 4 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados do INMET. . . . .                                                  | 27 |
| Figura 5 – Correlogramas da precipitação total mensal (INMET). . . . .                                                                                                         | 28 |
| Figura 6 – Decomposição STL da precipitação total mensal (INMET). . . . .                                                                                                      | 28 |
| Figura 7 – Modelos ajustados de precipitação mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                                      | 29 |
| Figura 8 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses separados. . . . .                                     | 29 |
| Figura 9 – Correlogramas da Precipitação total mensal para cada mês (INMET). . . . .                                                                                           | 30 |
| Figura 10 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                          | 31 |
| Figura 11 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                            | 31 |
| Figura 12 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                            | 32 |
| Figura 13 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                          | 32 |
| Figura 14 – Distribuição temporal da Precipitação Total Mensal (mm) em São Paulo (INMET) para cada estação do ano. . . . .                                                     | 33 |
| Figura 15 – Correlograma da Precipitação total mensal para cada estação do ano (INMET). . . . .                                                                                | 34 |
| Figura 16 – Modelos ajustados de precipitação mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                            | 35 |
| Figura 17 – Modelos ajustados de precipitação mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                           | 36 |
| Figura 18 – Modelos ajustados de precipitação mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                          | 36 |
| Figura 19 – Modelos ajustados de precipitação mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                        | 37 |
| Figura 20 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1). . . . . | 37 |

|                                                                                                                                                                                      |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 21 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Janeiro (INMET) com o modelo ARIMA(1, 1, 1).              | 38 |
| Figura 22 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).                | 38 |
| Figura 23 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).                | 39 |
| Figura 24 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).              | 39 |
| Figura 25 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Verão (INMET) com o modelo SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 3).      | 40 |
| Figura 26 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Outono (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 4).     | 40 |
| Figura 27 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Inverno (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2).    | 40 |
| Figura 28 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total na Primavera (INMET) com o modelo SARIMA(3, 0, 2)(0, 1, 1).  | 41 |
| Figura 29 – Distribuição temporal das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (°C) em São Paulo, de 1980 a 2023. Dados obtidos do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). | 42 |
| Figura 30 – (a), (c) e (d) box-plot; (b), (d) e (f) tendência das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (INMET).                                                            | 43 |
| Figura 31 – Correlogramas das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (INMET).                                                                                                | 44 |
| Figura 32 – Decomposição STL das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (INMET).                                                                                             | 45 |
| Figura 33 – Modelos ajustados da temperatura mínima mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.                                             | 46 |
| Figura 34 – Modelos ajustados da temperatura média mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.                                              | 47 |
| Figura 35 – Modelos ajustados de temperatura máxima mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.                                             | 48 |
| Figura 36 – Distribuição temporal da Temperatura Mínima em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.                                                                        | 48 |
| Figura 37 – Distribuição temporal da Temperatura Média em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.                                                                         | 49 |
| Figura 38 – Distribuição temporal da Temperatura Máxima em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.                                                                        | 50 |
| Figura 39 – Correlogramas para os dados de Temperatura Mínima (INMET).                                                                                                               | 50 |

|                                                                                                                                                      |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 40 – Correlogramas para os dados de Temperatura Média (INMET). . . . .                                                                        | 51 |
| Figura 41 – Correlogramas para os dados de Temperatura Máxima (INMET). . . . .                                                                       | 51 |
| Figura 42 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . . | 52 |
| Figura 43 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .   | 53 |
| Figura 44 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .   | 53 |
| Figura 45 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . . | 54 |
| Figura 46 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .  | 55 |
| Figura 47 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .    | 55 |
| Figura 48 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .    | 56 |
| Figura 49 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .  | 56 |
| Figura 50 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . . | 57 |
| Figura 51 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .   | 58 |
| Figura 52 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .   | 58 |
| Figura 53 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . . | 59 |
| Figura 54 – Distribuição temporal da Temperatura Mínima Média Mensal em São Paulo (INMET) para cada estação do ano. . . . .                          | 60 |
| Figura 55 – Distribuição temporal da Temperatura Média Mensal em São Paulo (INMET) para cada estação do ano. . . . .                                 | 60 |
| Figura 56 – Distribuição temporal da Temperatura Máxima Média Mensal em São Paulo (INMET) para cada estação do ano. . . . .                          | 61 |
| Figura 57 – Correlogramas da Temperatura Mínima Média Mensal para cada estação do ano (INMET). . . . .                                               | 63 |
| Figura 58 – Correlogramas da Temperatura Média Mensal para cada estação do ano (INMET). . . . .                                                      | 63 |
| Figura 59 – Correlogramas da Temperatura Máxima Média Mensal para cada estação do ano (INMET). . . . .                                               | 64 |

|                                                                                                                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 60 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                       | 65 |
| Figura 61 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                      | 65 |
| Figura 62 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                     | 66 |
| Figura 63 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                   | 66 |
| Figura 64 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                        | 67 |
| Figura 65 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                       | 68 |
| Figura 66 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                      | 68 |
| Figura 67 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                    | 69 |
| Figura 68 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                       | 70 |
| Figura 69 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                      | 70 |
| Figura 70 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                     | 71 |
| Figura 71 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET. . . . .                   | 71 |
| Figura 72 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2). . . . .  | 72 |
| Figura 73 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2). . . . .   | 72 |
| Figura 74 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1). . . . .   | 73 |
| Figura 75 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Janeiro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . . | 73 |
| Figura 76 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 1). . . . .   | 74 |
| Figura 77 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(5, 1, 0). . . . .   | 74 |

|                                                                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 78 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 2). . . . .             | 74 |
| Figura 79 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Janeiro (INMET) com o modelo MA(4). . . . .                       | 75 |
| Figura 80 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .                | 75 |
| Figura 81 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .                | 75 |
| Figura 82 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .              | 76 |
| Figura 83 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Janeiro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .             | 76 |
| Figura 84 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .               | 76 |
| Figura 85 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .               | 77 |
| Figura 86 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1). . . . .             | 77 |
| Figura 87 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Verão (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3). . . . .               | 78 |
| Figura 88 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Outono (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3). . . . .              | 78 |
| Figura 89 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Inverno (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3). . . . .             | 78 |
| Figura 90 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Primavera (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0). . . . . | 79 |
| Figura 91 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Verão (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 3)(2, 0, 3). . . . .      | 79 |

|                                                                                                                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 92 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Outono (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 0). . . . .                            | 80 |
| Figura 93 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Inverno (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3). . . . .                                     | 80 |
| Figura 94 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Primavera (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3). . . . .                                   | 80 |
| Figura 95 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Verão (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3). . . . .                                      | 81 |
| Figura 96 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Outono (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3). . . . .                                     | 81 |
| Figura 97 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Inverno (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3). . . . .                                    | 82 |
| Figura 98 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Primavera (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 4). . . . .                                  | 82 |
| Figura 99 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - Água Branca), de 1980 a 2023. . . . .                                                                                     | 82 |
| Figura 100 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - Água Branca. . . . .                                                                       | 83 |
| Figura 101 – Correlogramas da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Água Branca. . . . .                                                                                                               | 84 |
| Figura 102 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Água Branca. . . . .                                                                                                            | 84 |
| Figura 103 – Modelos ajustados de precipitação total mensal (DAEE - Água Branca) sobrepostos à série original: (a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2), (b) SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 2) e (c) SARIMA(0, 0, 4)(0, 1, 0) . . . . . | 85 |
| Figura 104 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - Santo Amaro), de 1980 a 2023. . . . .                                                                                    | 85 |
| Figura 105 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - Santo Amaro. . . . .                                                                       | 86 |
| Figura 106 – Correlogramas da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Santo Amaro. . . . .                                                                                                               | 87 |



|                                                                                                                                                                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 107 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Santo Amaro. . . . .                                                                                                            | 87 |
| Figura 108 – Modelos ajustados de precipitação total mensal (DAEE - Santo Amaro) sobrepostos à série original: (a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1), (b) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) e (c) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) . . . . . | 88 |
| Figura 109 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - IAG), de 1980 a 2023. . . . .                                                                                            | 88 |
| Figura 110 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - IAG. . . . .                                                                               | 89 |
| Figura 111 – (a) ACF e (b) PACF da precipitação total mensal para os dados da DAEE - IAG.                                                                                                                          | 90 |
| Figura 112 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - IAG.                                                                                                                            | 90 |
| Figura 113 – Modelos ajustados sobrepostos à série original: (a) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1), (b) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) e (c) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) . . . . .                                                   | 91 |
| Figura 114 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - Monte Belo), de 1980 a 2023. . . . .                                                                                     | 91 |
| Figura 115 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - Monte Belo. . . . .                                                                        | 92 |
| Figura 116 – (a) Gráficos de ACF e (b) PACF da precipitação total mensal para os dados da DAEE. . . . .                                                                                                            | 93 |
| Figura 117 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Monte Belo. . . . .                                                                                                             | 93 |
| Figura 118 – Modelos ajustados sobrepostos à série original: (a) SARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1), (b) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) e (c) SARIMA(1, 0, 0)(1, 1, 1) . . . . .                                                   | 94 |
| Figura 119 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Água Branca (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2). . . . .                      | 94 |
| Figura 120 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Santo Amaro (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2). . . . .                      | 95 |
| Figura 121 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Observatório IAG (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2). . . . .                 | 95 |
| Figura 122 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Monte Belo (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2). . . . .                       | 96 |



# Lista de tabelas

|                                                                                                                                             |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . .                                 | 27 |
| Tabela 2 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                            | 28 |
| Tabela 3 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                    | 30 |
| Tabela 4 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . .        | 33 |
| Tabela 5 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                | 35 |
| Tabela 6 – Estatísticas descritivas das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (°C) no período de 1980 a 2023 (INMET). . . . .      | 42 |
| Tabela 7 – Modelos ajustados para a temperatura mínima mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                            | 45 |
| Tabela 8 – Modelos ajustados para a temperatura média mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                             | 46 |
| Tabela 9 – Modelos ajustados para a temperatura máxima mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                            | 47 |
| Tabela 10 – Estatísticas descritivas da Temperatura Mínima Média (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . .                                 | 49 |
| Tabela 11 – Estatísticas descritivas da Temperatura Média (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . .                                        | 49 |
| Tabela 12 – Estatísticas descritivas da Temperatura Máxima Média (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . .                                 | 50 |
| Tabela 13 – Modelos ajustados para a Temperatura Mínima Média por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                    | 52 |
| Tabela 14 – Modelos ajustados para a Temperatura Média por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                           | 54 |
| Tabela 15 – Modelos ajustados para a Temperatura Máxima Média por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                    | 57 |
| Tabela 16 – Estatísticas descritivas da Temperatura Mínima Média Mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . . | 61 |
| Tabela 17 – Estatísticas descritivas da Temperatura Média Mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . .        | 62 |
| Tabela 18 – Estatísticas descritivas da Temperatura Máxima Média Mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023. . . . . | 62 |

|                                                                                                                                               |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 19 – Modelos ajustados para a Temperatura Mínima Média por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                  | 64 |
| Tabela 20 – Modelos ajustados para a Temperatura Média por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                         | 67 |
| Tabela 21 – Modelos ajustados para a Temperatura Máxima Média por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                  | 69 |
| Tabela 22 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - Água Branca. . . . . | 83 |
| Tabela 23 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE - Água Branca) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                | 84 |
| Tabela 24 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - Santo Amaro. . . . . | 86 |
| Tabela 25 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE - Santo Amaro) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                | 87 |
| Tabela 26 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - IAG. . . . .         | 89 |
| Tabela 27 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE- Observatório IAG) e seus respectivos valores de AIC. . . . .            | 90 |
| Tabela 28 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - Monte Belo. . . . .  | 92 |
| Tabela 29 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE - Monte Belo) e seus respectivos valores de AIC. . . . .                 | 93 |

# Lista de abreviaturas e siglas

|      |                                                          |
|------|----------------------------------------------------------|
| AIC  | Critério de Informação de Akaike                         |
| ACF  | Função de Autocorrelação                                 |
| PACF | Função de Autocorrelação Parcial                         |
| STL  | Decomposição Sazonal e de Tendências usando <i>Loess</i> |
| CV   | Coeficiente de Variação                                  |
| Q1   | Primeiro Quartil                                         |
| Q3   | Terceiro Quartil                                         |

# Sumário

|                |                                                                     |           |
|----------------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>       | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                   | <b>1</b>  |
| <b>1.1</b>     | <b>Problemática das mudanças climáticas</b>                         | <b>1</b>  |
| <b>1.1.1</b>   | <b>Séries Temporais e mudanças climáticas</b>                       | <b>2</b>  |
| <b>1.2</b>     | <b>Objetivo</b>                                                     | <b>2</b>  |
| <b>2</b>       | <b>REVISÃO LITERÁRIA</b>                                            | <b>3</b>  |
| <b>2.1</b>     | <b>Fundamentos de Séries Temporais</b>                              | <b>3</b>  |
| <b>2.1.1</b>   | <b>Séries Temporais</b>                                             | <b>3</b>  |
| <b>2.1.2</b>   | <b>Estacionariedade</b>                                             | <b>4</b>  |
| <b>2.2</b>     | <b>Transformações e Suavização</b>                                  | <b>4</b>  |
| <b>2.2.1</b>   | <b>Médias Móveis</b>                                                | <b>5</b>  |
| <b>2.2.2</b>   | <b>Diferenciação</b>                                                | <b>6</b>  |
| <b>2.3</b>     | <b>Decomposição</b>                                                 | <b>7</b>  |
| <b>2.3.1</b>   | <b>Decomposição Clássica</b>                                        | <b>7</b>  |
| <b>2.3.2</b>   | <b>Decomposição STL</b>                                             | <b>8</b>  |
| <b>2.4</b>     | <b>Correlação</b>                                                   | <b>8</b>  |
| <b>2.4.1</b>   | <b>Ruído Branco</b>                                                 | <b>9</b>  |
| <b>2.4.2</b>   | <b>Autocorrelação</b>                                               | <b>9</b>  |
| <b>2.4.3</b>   | <b>Autocorrelação parcial</b>                                       | <b>10</b> |
| <b>2.4.4</b>   | <b>Correlograma</b>                                                 | <b>10</b> |
| <b>2.5</b>     | <b>Modelagem de Séries Temporais</b>                                | <b>12</b> |
| <b>2.5.1</b>   | <b>Modelos Autorregressivos</b>                                     | <b>12</b> |
| <b>2.5.2</b>   | <b>Modelos de Média Móvel</b>                                       | <b>12</b> |
| <b>2.5.3</b>   | <b>Modelos ARMA</b>                                                 | <b>12</b> |
| <b>2.5.4</b>   | <b>Modelos ARIMA</b>                                                | <b>13</b> |
| <b>2.5.5</b>   | <b>Modelos SARIMA</b>                                               | <b>14</b> |
| <b>2.5.6</b>   | <b>Critério de Informação de Akaike (AIC)</b>                       | <b>14</b> |
| <b>2.6</b>     | <b>Previsão</b>                                                     | <b>15</b> |
| <b>2.6.1</b>   | <b>Validação dos Modelos</b>                                        | <b>16</b> |
| <b>2.6.1.1</b> | <b>Métricas de Desempenho</b>                                       | <b>16</b> |
| <b>2.6.2</b>   | <b>Previsão de Séries Temporais Estacionárias</b>                   | <b>17</b> |
| <b>2.6.2.1</b> | <b>Previsão de Processos AR</b>                                     | <b>17</b> |
| <b>2.6.2.2</b> | <b>Previsão de Processos MA</b>                                     | <b>18</b> |
| <b>2.6.2.3</b> | <b>Previsão de Processos ARMA</b>                                   | <b>19</b> |
| <b>2.6.3</b>   | <b>Previsão de Séries Temporais com Tendência e/ou Sazonalidade</b> | <b>20</b> |

|         |                                                                           |           |
|---------|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.6.3.1 | Previsão de Processos ARIMA . . . . .                                     | 20        |
| 2.6.3.2 | Previsão de Processos SARIMA . . . . .                                    | 21        |
|         | <b>3 MATERIAIS E MÉTODOS . . . . .</b>                                    | <b>22</b> |
| 3.1     | Material . . . . .                                                        | 22        |
| 3.1.1   | Dados do Departamento de Águas e Energia Elétrica (DAEE) . . . . .        | 22        |
| 3.1.1.1 | Água Branca . . . . .                                                     | 22        |
| 3.1.1.2 | Santo Amaro . . . . .                                                     | 23        |
| 3.1.1.3 | Observatório IAG . . . . .                                                | 23        |
| 3.1.1.4 | Monte Belo . . . . .                                                      | 23        |
| 3.1.2   | Dados do INMET . . . . .                                                  | 23        |
| 3.2     | Métodos . . . . .                                                         | 24        |
| 3.2.1   | Ferramentas Computacionais . . . . .                                      | 25        |
|         | <b>4 RESULTADOS . . . . .</b>                                             | <b>26</b> |
| 4.1     | Dados de Precipitação Total Mensais da INMET (1970-2023) . . . . .        | 26        |
| 4.1.1   | Dados de Precipitação Total Mensais - Para 4 meses . . . . .              | 26        |
| 4.1.1.1 | Análise Descritiva para os 4 meses juntos . . . . .                       | 27        |
| 4.1.1.2 | Análise da Série Temporal para os 4 meses juntos . . . . .                | 27        |
| 4.1.1.3 | Modelagem para os 4 meses juntos . . . . .                                | 27        |
| 4.1.1.4 | Análise Descritiva para os 4 meses separados . . . . .                    | 28        |
| 4.1.1.5 | Análise da Série Temporal para os 4 meses separados . . . . .             | 29        |
| 4.1.1.6 | Modelagem para os 4 meses separados . . . . .                             | 30        |
| 4.1.2   | Dados de Precipitação Total Mensais - Para os 12 meses . . . . .          | 33        |
| 4.1.2.1 | Análise Descritiva para os 12 meses . . . . .                             | 33        |
| 4.1.2.2 | Análise da Série Temporal para os 12 meses . . . . .                      | 34        |
| 4.1.2.3 | Modelagem para os 12 meses . . . . .                                      | 34        |
| 4.1.3   | Previsão da Precipitação Total Mensal . . . . .                           | 37        |
| 4.1.3.1 | Previsão da Precipitação Total Mensal para os 4 meses juntos . . . . .    | 37        |
| 4.1.3.2 | Previsão da Precipitação Total Mensal para os 4 meses separados . . . . . | 38        |
| 4.1.3.3 | Previsão da Precipitação Total Mensal para os 12 meses . . . . .          | 39        |
| 4.2     | Dados de Temperaturas Mensais da INMET (1970-2023) . . . . .              | 42        |
| 4.2.1   | Dados de Temperatura Mensais - Para 4 meses . . . . .                     | 42        |
| 4.2.1.1 | Análise Descritiva para os 4 meses juntos . . . . .                       | 42        |
| 4.2.1.2 | Análise da Série Temporal . . . . .                                       | 43        |
| 4.2.1.3 | Modelagem . . . . .                                                       | 45        |
| 4.2.1.4 | Análise Descritiva para os 4 meses separados . . . . .                    | 48        |
| 4.2.1.5 | Análise da Série Temporal para os 4 meses separados . . . . .             | 50        |
| 4.2.1.6 | Modelagem para os 4 meses separados . . . . .                             | 51        |
| 4.2.2   | Dados de Temperatura Mensais - Para os 12 meses . . . . .                 | 59        |

|         |                                                                            |    |
|---------|----------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.2.2.1 | Análise Descritiva das Temperaturas Mensais para os 12 meses . . . . .     | 61 |
| 4.2.2.2 | Análise da Série Temporal das Temperatura Mensais para os 12 meses . . . . | 62 |
| 4.2.2.3 | Modelagem das Temperatura Mensais para os 12 meses . . . . .               | 64 |
| 4.2.3   | Previsão da Temperatura Mensal . . . . .                                   | 72 |
| 4.2.3.1 | Previsão da Temperatura Mensal para os 4 meses juntos . . . . .            | 72 |
| 4.2.3.2 | Previsão da Temperatura Mensal para os 4 meses separados . . . . .         | 73 |
| 4.2.3.3 | Previsão da Temperatura Mensal para os 12 meses . . . . .                  | 77 |
| 4.3     | Dados da DAEE (1970-2023) . . . . .                                        | 82 |
| 4.3.1   | Dados de Precipitação Mensais - Água Branca . . . . .                      | 82 |
| 4.3.1.1 | Análise Descritiva . . . . .                                               | 83 |
| 4.3.1.2 | Análise da Série Temporal . . . . .                                        | 83 |
| 4.3.1.3 | Modelagem . . . . .                                                        | 84 |
| 4.3.2   | Dados de Precipitação Mensais - Santo Amaro . . . . .                      | 85 |
| 4.3.2.1 | Análise Descritiva . . . . .                                               | 86 |
| 4.3.2.2 | Análise da Série Temporal . . . . .                                        | 86 |
| 4.3.2.3 | Modelagem . . . . .                                                        | 87 |
| 4.3.3   | Dados de Precipitação Mensais - Observatório IAG . . . . .                 | 88 |
| 4.3.3.1 | Análise Descritiva . . . . .                                               | 89 |
| 4.3.3.2 | Análise da Série Temporal . . . . .                                        | 89 |
| 4.3.3.3 | Modelagem . . . . .                                                        | 90 |
| 4.3.4   | Dados de Precipitação Mensais - Monte Belo . . . . .                       | 91 |
| 4.3.4.1 | Análise Descritiva . . . . .                                               | 92 |
| 4.3.4.2 | Análise da Série Temporal . . . . .                                        | 92 |
| 4.3.4.3 | Modelagem . . . . .                                                        | 93 |
| 4.3.5   | Previsão para os dados da DAEE . . . . .                                   | 94 |
| 5       | CONCLUSÕES . . . . .                                                       | 97 |
|         | Referências . . . . .                                                      | 99 |

# 1 Introdução

## 1.1 Problemática das mudanças climáticas

As mudanças climáticas representam uma questão de extrema relevância e urgência para o equilíbrio ambiental, econômico e social do planeta. Estamos passando por mudanças bruscas e eventos extremos, como inundações e ondas de calor, que, conforme os anos passam, estão se tornando mais frequentes e preocupantes, impactando diretamente a saúde pública, a agricultura e os recursos hídricos.

O Sexto Relatório de Avaliação (AR6) do Painel Intergovernamental sobre Mudanças Climáticas (IPCC, 2023) alerta sobre as graves consequências dessas mudanças. Esse cenário é corroborado por estudos de atribuição que investigam como a mudança climática afeta eventos climáticos extremos, como o de Faranda et al. (2022), que demonstrou como as mudanças climáticas alteraram significativamente eventos extremos específicos na Europa e na América do Norte, incluindo a Tempestade Filomena e o Furacão Ida, ao comparar condições climáticas atuais com dados históricos.

Entre os fenômenos climáticos de urgência, estão a temperatura e a precipitação. Segundo Tabari (2020), a intensificação de eventos extremos de precipitação e inundações, devido ao aquecimento global, representa desafios para a sustentabilidade ambiental.

Além dos impactos físicos imediatos, as mudanças climáticas também afetam a biodiversidade, como no estudo Mies et al. (2025), que alerta para a degradação acelerada dos corais no Atlântico Sudoeste, com alta mortalidade em áreas costeiras protegidas. Ao passo que Piao et al. (2019) demonstra que as mudanças climáticas na temperatura e na precipitação alteram significativamente a fenologia vegetal, modificando os ciclos de crescimento e impactando ecossistemas, sendo necessário adotar estratégias adaptativas para manter a sustentabilidade.

A compreensão dos padrões climáticos passados e futuros torna-se essencial para a formulação de políticas públicas sustentáveis e eficazes. Neste contexto, temos o protocolo de Kyoto, assinado em 1997, que entrou em vigor em 16 de fevereiro de 2005 (Kyoto Protocol, 1997); esta é uma alteração da Convenção-Quadro das Nações Unidas sobre as Alterações Climáticas.

### 1.1.1 Séries Temporais e mudanças climáticas

Entender o passado para prever o futuro é um meio que ajuda na tomada de decisão, como, por exemplo, na elaboração de novas políticas de preservação da natureza ou em planos de melhoria na redução do desperdício em empresas. Pela análise da série temporal, é possível observar as principais características dos dados, além da variação. As aplicações são diversas e, com o atual avanço computacional, torna-se mais fácil e rentável a sua utilização.

Um meio de ajudar regionalmente na solução das mudanças climáticas é realizar uma análise detalhada da variabilidade temporal da temperatura e da precipitação no Estado de São Paulo, por meio de modelos de séries temporais. Especificamente, os modelos ARIMA (*AutoRegressive Integrated Moving Average*) e SARIMA (*Seasonal ARIMA*) apresentam eficácia comprovada na modelagem de dados climáticos. A escolha desses modelos é justificada pela capacidade de capturar a estrutura temporal dos dados, identificando padrões, tendências e ciclos, fornecendo, assim, *insights* valiosos sobre o comportamento climático regional.

Uma série temporal é o conjunto de observações ordenadas no tempo, caracterizadas pela dependência serial, em que cada observação depende do tempo, com ou sem espaçamento regular (MORETTIN; TOLOI, 2018). Alguns exemplos são: valores diários da temperatura de uma cidade, o índice da Bolsa de Valores em uma região específica ou a quantidade mensal de chuva em uma cidade.

Ao trabalhar com séries temporais, observamos a tendência e a variação da sazonalidade, que podem ser modeladas ao longo do tempo. Além disso, conforme estabelecido na geostatística pela Lei de Tobler: “coisas próximas tendem a ter características mais semelhantes e correlacionadas do que objetos espacialmente mais distantes” (TOBLER, 1970), observações próximas frequentemente exibem correlação significativa.

## 1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo geral investigar modelos de séries temporais, em particular, os modelos ARIMA e SARIMA, aplicados a dados climáticos de precipitação e temperatura no Estado de São Paulo, visando identificar tendências, padrões sazonais e evidências de mudanças climáticas na região.

Dentre os objetivos específicos, o trabalho busca responder às seguintes perguntas:

- Quais são as mudanças de temperatura e precipitação ao longo dos anos em cada estação do ano?
- Os possíveis padrões de mudança são problemáticos? Eles estão de acordo com o previsto em trabalhos da literatura? Se não, quais são as possíveis implicações disso?



## 2 Revisão Literária

### 2.1 Fundamentos de Séries Temporais

#### 2.1.1 Séries Temporais

Um processo estocástico de tempo discreto, ou simplesmente um modelo de séries temporais, é utilizado em diversas áreas do conhecimento que necessitam de previsões sobre o futuro. A previsibilidade depende de alguns fatores, como o entendimento sobre as variáveis que a influenciam, o volume de informações disponíveis e a consistência de seus padrões ao longo do tempo, para evidenciar o quanto o passado pode, de fato, prever o futuro.

Se, de fato, os dados observados  $y_t$  formam uma série temporal, podemos usar um modelo de série temporal:

$$\{y_t\}_{t=1}^n = \{y_1, \dots, y_n\}, \quad (2.1)$$

em que  $y_t$  são as variáveis observadas ao longo do tempo.

O processo de modelagem inicia-se com a preparação dos dados, que envolve a seleção da série, a identificação de valores faltantes, o tratamento e outras operações de pré-processamento que sejam necessárias.

Começamos a análise exploratória com a visualização dos dados por meio de um gráfico ao longo do tempo, que permite a visualização do comportamento dos dados, possibilitando avaliar padrões, valores extremos (*outliers*) e mudanças visíveis ao longo do tempo. Alguns elementos comuns em séries temporais são:

- Tendência: Quando a variável apresenta um aumento ou um decaimento ao longo do período;
- Sazonalidade: Padrões periódicos de repetição em intervalos fixos;
- Ciclos: Flutuações não periódicas de longo prazo.;
- Erro aleatório: Movimentos irregulares e sem causa conhecida;
- Frequência: Define o intervalo de tempo que separa uma observação da outra.

### 2.1.2 Estacionariedade

Um conceito fundamental na análise e modelagem de séries temporais é a estacionariedade. Um processo estocástico  $\{y_t\}$  é dito estritamente estacionário se, para quaisquer instantes de tempo  $t_1, \dots, t_n$  e para qualquer deslocamento  $m$ , a distribuição conjunta  $(y_{t_1}, \dots, y_{t_n})$  for igual à de  $(y_{t_1+m}, \dots, y_{t_n+m})$ ; ou seja, um processo é considerado estacionário quando suas propriedades estatísticas não dependem do momento em que a série é observada.

Na prática, a estacionariedade pode ser avaliada inicialmente por gráficos de dispersão e, formalmente, por meio de testes estatísticos, como o teste de *Dickey-Fuller* Aumentado (ADF) (SAID; DICKEY, 1984). O teste ADF verifica a presença de raízes unitárias no processo, testando as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \text{a série possui uma raiz unitária – não estacionária} \\ H_1: \text{a série não possui uma raiz unitária – estacionária} \end{cases} \quad (2.2)$$

que, ao nível de significância  $\alpha$ , se valor- $p$  for maior que  $\alpha$ , não se rejeita  $H_0$ , indicando que o processo é não estacionário.

O teste ADF é baseado na estimativa do seguinte modelo de regressão:

$$\Delta y_t = \nu + \beta t + \gamma y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \delta_i \Delta y_{t-i} + e_t, \quad (2.3)$$

no qual  $\Delta$  é o operador de diferença,  $\nu$  é uma constante,  $\beta_t$  é o coeficiente de tendência,  $\gamma$  é o coeficiente de interesse associado à defasagem,  $p$  é o número de defasagens,  $\delta_i$  são os coeficientes das diferenças defasadas e  $e_t$  é o erro aleatório.

Com a estatística do teste:

$$\text{ADF}_{\text{test}} = \frac{\hat{\gamma}_l}{\text{SE}(\hat{\gamma}_l)}, \quad (2.4)$$

em que  $\hat{\gamma}$  é a estimativa do coeficiente  $\gamma$ , e  $\text{SE}(\hat{\gamma})$  é o erro padrão da estimativa dos mínimos quadrados do coeficiente  $\gamma$  do modelo de regressão.

Se uma série não for estritamente estacionária, mas apresentar média e variância constantes no tempo, e a autocovariância depender apenas dos tempos defasados (e não do tempo absoluto), então a série é chamada de estacionária de segunda ordem (ou com estacionariedade fraca).

## 2.2 Transformações e Suavização

A análise dos dados brutos de uma série temporal é, frequentemente, de difícil compreensão devido à presença de resíduos, tendências e sazonalidades, sendo necessário utilizar transformações matemáticas nos dados para simplificá-los.

As transformações buscam alterar a escala ou a dinâmica da série, com o objetivo de estabilizá-la e facilitar a modelagem. Entre as técnicas disponíveis na literatura, destacam-se a diferenciação – para remoção de tendências e sazonalidades – e o logaritmo — que estabiliza a variância.

Já os procedimentos de suavização têm como objetivo a redução do ruído e da tendência; são baseados em médias locais. Geralmente, usam-se pontos antes e depois da sua estimativa suavizada, o que acaba retirando alguns pontos no início e no final da série original. Os mais usados são a média móvel e a decomposição STL (*Seasonal and Trend decomposition using Loess*).

### 2.2.1 Médias Móveis

O método de médias móveis é um processo de suavização utilizado para estimar a tendência subjacente de uma série temporal e reduzir flutuações (ruído). A técnica consiste em calcular, para cada instante  $t$ , a média de um número específico de observações da série temporal ao redor de cada valor da série (observações vizinhas), com exceção dos primeiros e últimos valores. Este conjunto de observações tem ordem  $m = 2k + 1$ , em que  $k$  é o número de observações utilizadas; mas, como consequência, as primeiras e últimas  $k$  observações não podem ser suavizadas.

A estimativa da tendência  $\hat{T}_t$  no instante  $t$  é dada por:

$$\hat{T}_t = \frac{1}{m} \sum_{j=-k}^k y_{t+j}, \quad (2.5)$$

isto é, a estimativa da tendência no momento  $t$  é obtida pela média dos valores da série temporal de  $k$  períodos de  $t$ .

Como observações próximas no tempo tendem a ter valores próximos, a média também elimina parte da aleatoriedade dos dados (ruído), deixando o componente  $T_t$  suavizado. Entretanto, ao utilizar o método das médias móveis, (BOX et al., 2016) afirmam que a autocorrelação é introduzida nos resíduos do modelo.

Para avaliar a tendenciosidade em uma série temporal, pode-se utilizar o teste não paramétrico de *Mann-Kendall* (KENDALL, 1975), que avalia estatisticamente se há uma tendência monotônica ascendente ou decrescente na variável de interesse ao longo do tempo  $t$ . Isto é, ele verifica se os valores da série tendem a aumentar ou diminuir.

A estatística  $S$  do teste é calculada da seguinte forma:

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \text{sng}(y_j - y_i), \quad (2.6)$$

no qual  $n$  é o número de observações e  $\text{sng}(y_j - y_i)$  é a função sinal, definida por:

$$\text{sng}(y_j - y_i) = \begin{cases} +1, & \text{se } y_j - y_i > 0 \\ 0, & \text{se } y_j - y_i = 0, \\ -1, & \text{se } y_j - y_i < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

Valores positivos indicam uma tendência de crescimento, enquanto valores negativos indicam uma tendência de diminuição.

Para amostras com  $n \geq 10$ , a variância de  $S$  é calculada por:

$$\text{Var}(S) = \frac{1}{18} \left[ n(n-1)(2n+5) - \sum_{p=1}^g t_p(t_p-1)(2t_p+5) \right] \quad (2.8)$$

em que  $g$  é o número de grupos de valores empatados (repetidos) na série,  $t_p$  é o número de observações no  $p$ -ésimo grupo de empates.

A estatística do teste de *Mann-Kendall* é obtida por:

$$Z_{\text{MK}} = \begin{cases} \frac{S-1}{\sqrt{\text{Var}(S)}}, & \text{se } S > 0 \\ 0, & \text{se } S = 0, \\ \frac{S+1}{\sqrt{\text{Var}(S)}}, & \text{se } S < 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

um valor positivo de  $Z_{\text{MK}}$  indica uma tendência crescente, enquanto um valor negativo indica uma tendência decrescente.

O teste avalia as hipóteses:

$$\begin{cases} H_0: \text{não há tendência monotônica na série de dados} \\ H_1: \text{há tendência monotônica na série de dados} \end{cases} \quad (2.10)$$

Para um nível de significância  $\alpha$ , se o valor- $p$  for menor que  $\alpha$ , então rejeitamos  $H_0$ ; ou seja, há evidências de que existe uma tendência significativa na série.

### 2.2.2 Diferenciação

A diferenciação é um procedimento que visa remover tendências e efeitos sazonais e, assim, obter uma série com média constante ao longo do tempo, tornando a série estacionária em torno de uma média constante.

Operacionalmente, a diferenciação de primeira ordem é definida como a diferença entre observações consecutivas:

$$y'_t = y_t - y_{t-1}, \quad (2.11)$$

assim, ao reorganizar o modelo da série original a partir da expressão anterior, obtém-se:

$$y_t = y_{t-1} + e_t, \quad (2.12)$$

em que  $\varepsilon_t$  é um termo de erro aleatório.

Caso a primeira diferenciação não seja suficiente para tornar a série estacionária, pode-se aplicar o procedimento novamente. Esta operação, conhecida como diferenciação de segunda ordem, é definida por:

$$y_t'' = y_t' - y_{t-1}' = y_t - 2y_{t-1} + y_{t-2}. \quad (2.13)$$

Este procedimento pode ser repetido quantas vezes forem necessárias, ressaltando-se, contudo, que cada diferenciação reduz o tamanho da série em uma observação. Assim, se a série com  $T$  observações, que foi diferenciada  $d$  vezes, terá  $T - d$  observações. O ideal é utilizar a menor ordem de diferenciação possível para preservar a interpretabilidade do modelo.

Para séries com efeito sazonal, pode-se realizar uma diferenciação sazonal, calculando a diferença entre observações do mesmo período sazonal. A diferenciação sazonal de primeira ordem é dada por:

$$y_t' = y_t - y_{t-m}, \quad (2.14)$$

no qual  $m$  é o comprimento dos períodos. Chamadas de diferenças com defasagem  $m$ . O modelo correspondente pode ser expresso por:

$$y_t = y_{t-m} + e_t. \quad (2.15)$$

Analogamente à diferenciação não sazonal, é possível diferenciar sazonalmente quantas vezes forem necessárias, mas é preferível que o número de diferenciações sazonais seja o menor possível.

Em casos mais complexos nos quais a série exibe tanto tendência quanto sazonalidade, aplicam-se ambos os tipos de diferenciação. Nesses casos, a ordem com a qual se fazem as diferenciações não muda o resultado; ou seja, pode-se fazer primeiro a diferenciação não sazonal e, depois, a diferenciação sazonal, e vice-versa.

## 2.3 Decomposição

A decomposição de uma série temporal é uma técnica exploratória que pode ser útil para visualizar melhor cada padrão da série temporal. Um modelo de decomposição assume que a série  $Y_t$  pode ser expressa como uma combinação de componentes; geralmente, divide-se a série temporal em uma soma ou multiplicação de sua tendência ( $T_t$ ), efeito sazonal ( $S_t$ ) e erro aleatório ( $e_t$ ). Vale observar que a componente ciclo, quando presente, aparece juntamente com a tendência na decomposição.

### 2.3.1 Decomposição Clássica

A decomposição clássica estrutura a série temporal por meio de dois modelos de decomposição: o aditivo e o multiplicativo. A escolha de qual usar depende de cada série, e a

identificação é feita observando o gráfico da série.

- Decomposição aditiva: a série é decomposta como a soma dos componentes:

$$Y_t = T_t + S_t + e_t. \quad (2.16)$$

- Decomposição multiplicativa: a série é decomposta como o produto dos componentes:

$$Y_t = T_t \times S_t \times e_t. \quad (2.17)$$

A decomposição aditiva é apropriada se a dispersão em torno da tendência, ou flutuações sazonais, não varia com o nível da série temporal; se não for o caso, uma alternativa é transformar os dados para usar a decomposição aditiva. Por exemplo, na transformação logarítmica, quando aplicada na decomposição multiplicativa, é equivalente à aditiva:

$$\begin{aligned} Y_t = T_t \times S_t \times e_t &\Rightarrow \log(Y_t) = \log(T_t \times S_t \times e_t) \\ &\Rightarrow \log(Y_t) = \log(T_t) + \log(S_t) + \log(e_t). \end{aligned} \quad (2.18)$$

### 2.3.2 Decomposição STL

A decomposição STL (*Seasonal and Trend Decomposition using Loess*) (CLEVELAND et al., 1990) é um método versátil e mais robusto do que a decomposição clássica. Algumas vantagens são: a taxa de mudança do componente sazonal pode ser controlada; a suavidade da tendência pode ser controlada, enquanto que, na clássica, isso não era possível, o que podia deixar a série temporal muito suavizada. pode se especificar a decomposição de maneira que *outliers* não afetem as estimativas da tendência e sazonalidade. Porém, ele apresenta recursos apenas para decomposições aditivas; assim, para aplicar o método STL em uma série que exhibe um padrão multiplicativo, aplica-se uma transformação, como a logarítmica, e depois a decomposição STL.

O método STL usa uma técnica de regressão ponderada localmente conhecida como *loess* (*Local Regression Scatterplot Smoothing*). A regressão é chamada de local porque utiliza apenas um número relativamente pequeno de pontos de cada lado do ponto em que a estimativa suavizada é necessária. A ponderação reduz a influência de pontos periféricos e é um exemplo de regressão robusta.

É importante ressaltar que procedimentos de suavização, como a média móvel centrada e *loess*, não requerem um modelo predeterminado, mas não produzem uma fórmula que possa ser extrapolada para fornecer previsões. Portanto, o STL é uma ferramenta de análise e decomposição, e não diretamente de predição.

## 2.4 Correlação

Seja  $Y_t$  uma série temporal estacionária em termos de média e variância; as observações podem ser correlacionadas. Chamamos de modelo estacionário de segunda ordem (ou estacionário

fraco) se a correlação entre as variáveis depende apenas do número de passos  $k$  (defasagem/lag) de tempo que as separa.

### 2.4.1 Ruído Branco

O resíduo de uma série temporal é a diferença entre o valor observado e o valor predito pelo modelo no tempo  $t$ :

$$\hat{e}_t = y_t - \hat{y}_t \quad (2.19)$$

A sequência desses resíduos no tempo forma uma série temporal de resíduos  $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_n$ .

Uma série temporal  $\{\varepsilon_t | t = 1, 2, \dots, n\}$  é dita ruído branco se as variáveis  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  forem independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.) com média zero e variância  $\sigma^2$ . Ou seja, todas as variáveis têm a mesma variância e a autocovariância é zero. Se, além disso, elas seguirem uma distribuição normal ( $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ ), a série é chamada de ruído branco gaussiano.

Se um modelo tiver considerado toda a correlação serial nos dados, a série residual será não correlacionada, ou seja, um ruído branco, e seu correlograma não apresentará nenhum padrão. Geralmente, isso indica que a série foi modelada corretamente.

### 2.4.2 Autocorrelação

Quando calculamos a correlação de uma variável estacionária no tempo consigo mesma em momentos diferentes, chamamos isso de autocorrelação. Para uma série temporal estacionária, definimos uma função de autocovariância no lag  $k$  como:

$$\gamma_k = \text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = E[(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})], \quad (2.20)$$

em que  $\gamma_k$  não depende de  $t$ , pois a série é estacionária.

A função de autocorrelação no lag  $k$  (ACF) é definida por:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\sigma^2}, \quad (2.21)$$

que é adimensional (variando de  $-1$  à  $1$ ) e, por definição,  $\rho_0 = 1$ .

As autocorrelações podem ser estimadas a partir de uma série temporal por meio de seus equivalentes amostrais. A autocovariância amostral é

$$c_k = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}), \quad (2.22)$$

no lag 0 ( $c_0$ ), a variância é calculada com um denominador  $n$  e um denominador  $n$  é utilizado ao calcular  $c_k$ ; isso garante que todas as autocorrelações da amostra fiquem entre  $-1$  e  $1$ . quanto mais próximo de  $-1$ , maior a correlação negativa; quanto mais próximo de  $1$ , maior a correlação positiva; e se for 0, não há correlação.

Já a autocorrelação amostral é definida como:

$$r_k = \frac{c_k}{c_0}. \quad (2.23)$$

O teste estatístico de *Ljung-Box/Box-Pierce* (LJUNG; BOX, 1978) é usado para testar se a autocorrelação em uma série é significativamente diferente de zero.

A estatística do teste:

$$Q = n(n+2) \sum_{k=1}^m \frac{r_k^2}{n-k}, \quad (2.24)$$

em que  $r_k$  é a autocorrelação amostral no lag  $k$ . Suas hipóteses são:

$$\begin{cases} H_0: \text{ O lag não tem autocorrelação significativa, } \rho(k) = 0 \\ H_1: \text{ O lag tem autocorrelação significativa, } \rho(k) \neq 0 \end{cases}. \quad (2.25)$$

Sob  $H_0$ , a estatística  $Q$  segue aproximadamente uma distribuição qui-quadrado com  $m$  graus de liberdade ( $Q \sim \chi_m^2$ ). Para um nível de significância  $\alpha$ , rejeita-se  $H_0$  se o valor- $p$  for menor que  $\alpha$ , indicando que temos evidências de que a série apresenta autocorrelação significativa e, portanto, não se comporta como um ruído branco.

### 2.4.3 Autocorrelação parcial

Segundo Morettin e Tolo (2018), uma correlação parcial no lag  $k$  é a correlação direta entre uma variável e seus valores defasados, após remover os efeitos de passos de tempo intermediários. Enquanto a correlação simples indica o quanto duas variáveis mudam juntas, a correlação parcial considera a influência potencial de outras variáveis que podem estar afetando a relação, eliminando a variabilidade compartilhada com as variáveis de controle.

A função de autocorrelação parcial (PACF) aplica este conceito a séries temporais, medindo a correlação direta entre uma observação  $y_t$  e seus valores passados  $y_{t-k}$ , desconsiderando a influência das defasagens intermediárias  $y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-k-1}$ . Assim, o primeiro lag coincide com o da ACF e possui os mesmos valores do intervalo de confiança da ACF. A aplicação prática é importante, principalmente, para ajustes de modelos por meio do gráfico da PACF.

O cálculo do PACF é por meio do Algoritmo *Durbin-Levison*, para calcular a função teórica:

$$\psi_{k|Y} = \frac{\gamma_k - \sum_{i=1}^{k-1} \psi_{i|Y} \gamma_{k-i}}{1 - \sum_{i=1}^{k-1} \psi_{i|Y} \gamma_i}, \quad (2.26)$$

no qual  $\psi_{k|Y}$  é a autocorrelação parcial no lag  $k$  e  $\gamma_k$  a autocovariância no lag  $k$ .

### 2.4.4 Correlograma

O correlograma é a representação gráfica da ACF; é uma ferramenta visual fundamental para a análise de séries temporais. O gráfico representa os coeficientes de autocorrelações amostrais  $r_k$  em função da defasagem  $k$ .



No correlograma, o eixo horizontal  $x$  representa os *lags*  $k$ , cuja unidade é o intervalo da amostra, o eixo vertical  $y$  representa o valor da autocorrelação amostral  $r_k$  para cada *lag* e é adimensional, variando de  $-1$  à  $1$ .

Para avaliar a significância das autocorrelações, são traçadas no gráfico linhas de referência que delimitam o intervalo de confiança. Sob a hipótese nula de que a série é um ruído branco, a distribuição amostral de  $r_k$  é aproximadamente normal, com média  $-1/n$  e variância  $1/n$ . Assim, as linhas pontilhadas no correlograma são desenhadas em (COWPERTWAIT; METCALFE, 2009):

$$-\frac{1}{n} \pm \frac{2}{\sqrt{n}}, \quad (2.27)$$

e indicam o intervalo de confiança de 95%. As autocorrelações que estão dentro desta faixa não apresentam correlação significativa, enquanto as que excedem os limites sugerem autocorrelações significativas no *lag* correspondente.

É importante notar que, sob a hipótese de ruído branco, espera-se que 5% dos  $r_k$  possam ultrapassar aleatoriamente esses limites, mesmo na ausência de autocorrelação real; assim, caso apresente alguns picos isolados e esparsos, isso pode não ser conclusivo. Entretanto, se mais de 5% excederem os limites, ou se houver um padrão claro, há evidências contra a hipótese de ruído branco.

Vale ressaltar que, como os  $r_k$  são correlacionados entre si, se um  $r_k$  é significativo, é provável que os vizinhos ( $r_{k-1}, r_{k+1}$ ) também apareçam como significativos.

A interpretação do correlograma deve considerar o contexto da série:

- Séries com tendência: Apresentam autocorrelações altas e decaem lentamente para zero à medida que o *lag*  $k$  aumenta.
- Séries com efeito sazonal: Exibem picos cíclicos significativos nos *lags* correspondentes ao período sazonal e seus múltiplos.
- Séries estacionárias: As autocorrelações decaem rapidamente, exponencialmente ou com oscilações até zero.
- Ruído branco: Não apresenta nenhum padrão claro, e todas ou quase todas as autocorrelações estão dentro dos limites do intervalo de confiança.

A autocorrelação no *lag* zero, denotada por  $r_0$ , é, por definição, sempre igual a 1, pois representa a correlação de uma variável consigo mesma no mesmo instante de tempo. Esse ponto serve como referência ao comparar os valores das outras autocorrelações em relação ao máximo teórico de 1.

## 2.5 Modelagem de Séries Temporais

### 2.5.1 Modelos Autorregressivos

Um processo autorregressivo de ordem  $p$ , denotado por  $AR(p)$ , descreve uma série temporal  $\{y_t\}$ , na qual está linearmente relacionada com seus  $p$  valores defasados, além de um termo de erro aleatório (ruído branco). A forma geral do modelo é:

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \varphi_2 y_{t-2} + \cdots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (2.28)$$

em que  $c$  é uma constante,  $y_{t-n}$ ,  $n = 1, \dots, p$  são os valores defasados,  $\{\varepsilon_t\}$  é ruído branco e  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  são os parâmetros autorregressivos, com  $\varphi_p \neq 0$ .

O modelo é uma regressão de  $y_t$  em termos passados da mesma série; justificando o uso do termo “autorregressivo”.

Os parâmetros do modelo podem ser estimados minimizando a soma dos erros quadrados, ou pela técnica de máxima verossimilhança.

A estacionariedade de um processo  $AR(p)$  está intrinsecamente ligada às raízes de sua equação característica. Com a condição de estacionariedade: um processo  $AR(p)$  é estacionário se, e somente se, todas as raízes da equação característica estão fora do círculo unitário. Esta condição garante que o efeito do  $\varepsilon_t$  sobre futuros valores diminua com o tempo.

### 2.5.2 Modelos de Média Móvel

Um processo de média móvel de ordem  $q$ , denotado por  $MA(q)$ , descreve uma série temporal  $\{y_t\}$ , na qual é uma combinação linear do termo de ruído branco atual e dos  $q$  termos de ruído branco passados. A forma geral do modelo é definida por:

$$y_t = \mu + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad (2.29)$$

em que  $\mu$  é a média do processo,  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, q$  são os parâmetros do modelo e  $\varepsilon_t, \dots, \varepsilon_{t-q}$  são os termos de erro (ruído branco).

Diferentemente dos modelos  $AR(p)$ , todo processo  $MA(q)$  finito é estacionário por construção, já que é uma combinação linear de variáveis de ruído branco que, por si só, são estacionárias.

Podemos escrever qualquer modelo  $AR(p)$  estacionário como um  $MA(\infty)$ . O contrário é válido sob algumas restrições, e o modelo  $MA$  é chamado de invertível. Assim, poderíamos escrever qualquer  $MA(q)$  como um processo  $AR(\infty)$ .

### 2.5.3 Modelos ARMA

Os modelos autorregressivos de média móvel (ARMA) são uma combinação linear das características dos modelos autorregressivos (AR) e de média móvel (MA) em uma única

estrutura, oferecendo maior flexibilidade e parcimônia para capturar a dinâmica de dependência temporal dos dados.

Um processo  $\{y_t\}$  segue um modelo ARMA de ordem  $(p, q)$ , denotado  $\text{ARMA}(p, q)$ , quando satisfaz a equação:

$$y_t = c + \varphi_1 y_{t-1} + \cdots + \varphi_p y_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.30)$$

na qual temos a soma dos modelos AR e MA.

É possível notar que o modelo  $\text{AR}(p)$  é um caso especial do ARMA quando  $q = 0$  e do modelo  $\text{MA}(q)$  quando  $p = 0$ .

Um modelo ARMA, muitas vezes, pode oferecer um ajuste tão bom quanto ou melhor do que os modelos  $\text{AR}(p)$  e  $\text{MA}(q)$  puros, além de requerer, frequentemente, menos parâmetros.

## 2.5.4 Modelos ARIMA

Os modelos autorregressivos integrados de média móvel (ARIMA) representam uma extensão muito útil dos modelos ARMA para lidar com séries temporais não estacionárias que exibem tendências. Enquanto técnicas não exploradas neste trabalho, como a suavização exponencial, visam à descrição da tendência e do efeito sazonal, os modelos ARIMA visam descrever a autocorrelação dos dados.

Um modelo ARIMA é definido por três parâmetros de ordem:  $(p, d, q)$ , denotado por  $\text{ARIMA}(p, d, q)$ , no qual  $p$  é a ordem da parte autorregressiva,  $d$  é o grau de diferenciação e  $q$  é a ordem da parte de média móvel. O modelo é descrito pela equação:

$$y'_t = m + \alpha_1 y'_{t-1} + \cdots + \alpha_p y'_{t-p} + \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \beta_q \varepsilon_{t-q} + \varepsilon_t, \quad (2.31)$$

em que  $y'_t = \Delta^d y_t$  é a série diferenciada  $d$  vezes. Apropria-se das mesmas condições vistas para estacionaridade no modelo ARMA.

Encontrar os valores apropriados para  $p$ ,  $d$  e  $q$  não é simples, e existem algumas maneiras de fazer isso; os gráficos de autocorrelação (ACF) e de autocorrelação parcial (PACF) ajudam a escolher bons valores para  $p$  e  $q$ .

- Se o gráfico do ACF decai exponencialmente ou tem um padrão senoidal, provavelmente  $q = 0$ . Se, além disso, a PACF tem um pico (*lag* alto) e os próximos não são significativos, temos um possível valor para  $p$ .
- Se a PACF decai exponencialmente ou tem um padrão senoidal, provavelmente  $p = 0$ . Se, além disso, houver um pico no ACF seguido de *lags* não significativos, temos um possível valor para  $q$ .

- Quando a série é não estacionária, o valor  $d$  é escolhido como a menor ordem de diferenciação necessária para tornar a série estacionária. Uma série em que  $d = 0$  é equivalente a um modelo ARMA( $p, q$ ).

Após escolher possíveis valores para  $p$ ,  $d$  e  $q$ , ajustamos o modelo ARIMA( $p, d, q$ ), permitindo, assim, a estimativa dos parâmetros do modelo, normalmente por métodos de máxima verossimilhança ou mínimos quadrados condicionais.

### 2.5.5 Modelos SARIMA

Os modelos autorregressivos integrados de média móvel sazonais (SARIMA) constituem uma extensão dos modelos ARIMA para lidar com séries temporais que exibem padrões de sazonalidade, além de possíveis tendências e autocorrelações de curto prazo.

Um modelo SARIMA é definido por dois conjuntos de ordens, um não sazonal e um sazonal; denotado como ARIMA( $p, d, q$ )( $P, D, Q$ ) $_m$ , no qual a primeira parte corresponde às ordens não sazonais (ARIMA( $p, d, q$ )) e a segunda parte às ordens sazonais (equivalentes às do ARIMA, mas com efeito sazonal, denotado por letras maiúsculas), em que  $m$  é o período sazonal. Pode também ser escrito simplesmente como SARIMA( $p, d, q$ )( $P, D, Q$ ). Pode ser expresso por:

$$Y'_t = m + \sum_{i=1}^p \varphi_i Y'_{t-i} + \sum_{i=1}^P \phi_i Y'_{t-s-i} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^P \varphi_i \phi_j Y'_{t-i-s-j} + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{t-i} + \sum_{i=1}^Q \eta_i \varepsilon_{t-s-i} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^Q \theta_i \eta_j \varepsilon_{t-i-s-j} + \varepsilon_t, \quad (2.32)$$

em que  $Y'_t = \Delta^d \Delta_s^D y_t$  é a série diferenciada,  $p, q$  são as ordens não sazonais,  $P, Q$  as ordens sazonais, e os somatórios duplos representam as interações entre os componentes sazonais e não sazonais que aparecem quando  $p > 0$  e  $P > 0$  ou  $q > 0$  e  $Q > 0$ .

A identificação das ordens sazonais segue uma lógica análoga à dos componentes regulares. Por exemplo, um pico no *lag*  $n$  sem outros picos relevantes no gráfico ACF e um decaimento exponencial nos *lags* sazonais do gráfico PACF (ou seja, nos *lags*  $n, 2n, 3n, \dots$ ), teríamos evidências para ser do tipo  $Q = 1$  e  $m = n$ . Ou ainda, se aparecer um pico no *lag*  $n$  do PACF e um decaimento exponencial nos *lags* sazonais do ACF, talvez  $P = 1$  e  $m = n$ .

### 2.5.6 Critério de Informação de Akaike (AIC)

O critério de Informação de Akaike (AIC) (AKAIKE, 1974) é um dos métodos mais utilizados para a seleção de modelos estatísticos. O critério utiliza a estimativa de máxima verossimilhança e o número de parâmetros para determinar o valor da informação relativa do modelo.

Definido por:

$$AIC = 2k - 2\ln(L), \quad (2.33)$$

em que  $k$  o número total de variáveis independentes utilizadas e  $L$  é a probabilidade de que o modelo tenha produzido os valores observados.

Após criar vários modelos possíveis, o AIC pode ser usado para compará-los: pontuações mais baixas são melhores. O AIC penaliza modelos com muitos parâmetros; portanto, caso dois modelos expliquem a mesma quantidade de variação, o modelo com o menor número de parâmetros será o de melhor ajuste.

## 2.6 Previsão

Um dos principais objetivos da análise de Séries Temporais é a previsão, que visa entender como os dados se comportarão no futuro

Nem sempre uma previsão é confiável; isso deve ser estudado, uma vez que nas previsões existem limitações e alguns fatores podem prejudicar a confiabilidade da previsão. A quantidade de dados históricos é uma parte importante para a confiança da previsão, pois, como se baseia em dados passados, quanto menos dados estiverem disponíveis para construir o modelo, menor será a precisão da previsão desse modelo. Além disso, dados extremos (*outliers*) e até mesmo a qualidade da coleta desses dados podem comprometer a previsão. Contudo, é possível contornar esses pontos; basta uma boa análise e modelagem dos dados antes da previsão.

Outro fator importante para a qualidade da previsão é o período que pretendemos prever (horizonte de previsão), visto que, quanto mais longo o período de previsão, menor a precisão. Dessa forma, previsões mais confiáveis geralmente são obtidas para horizontes mais curtos.

Existem diversos métodos para previsões, escolhidos com base nas características dos dados, na análise e na modelagem. Por exemplo, para séries estacionárias, são comuns os modelos AR, MA e ARMA, enquanto séries que exibem tendência e/ou sazonalidade podem utilizar os modelos ARIMA e SARIMA.

Depois da análise e seleção dos modelos que melhor se ajustam a série, parte-se para a previsão. Nesta parte, são utilizados os modelos ajustados para prever valores futuros com base nas observações passadas.

É essencial quantificar a incerteza associada à previsão por meio de intervalos de previsão (ou limites de probabilidade). Estes intervalos, calculados para probabilidades como 50% e 95%, definem uma faixa em que o valor real da série tem a probabilidade de ocorrer. Por exemplo, a Figura 1 ilustra previsões com limites de 50%, permitindo avaliar os riscos das decisões baseadas nessas previsões.

O intervalo de previsão de nível  $(1 - \alpha)\%$  para um horizonte  $h$ , no qual  $Y_{n+h}|Y_1, \dots, Y_n$  segue uma distribuição normal com média  $\hat{Y}_{n+h}$  e variância  $V_{n+h}$ . O intervalo é:

$$\hat{Y}_{n+h} \pm z_{\alpha/2} \times \sqrt{V_{n+h}}, \quad (2.34)$$

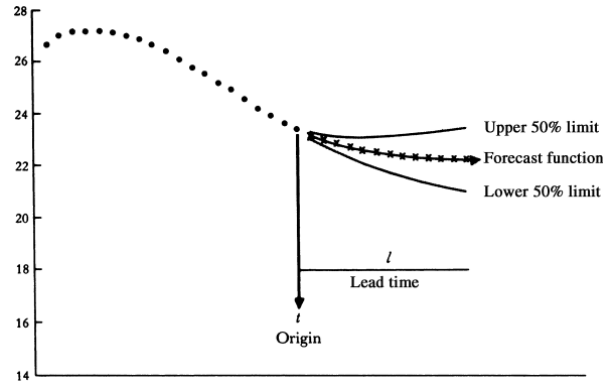


Figura 1 – Valores de uma série temporal com previsão com limites de 50%. Fonte: (BOX et al., 2016)

no qual  $V_{n+h} = \text{Var}(Y_{n+h}|Y_1, \dots, Y_n)$  e  $z_{\alpha/2}$  é o quantil da distribuição normal com probabilidade de  $\alpha/2$  em cada cauda, obtido a partir da tabela da normal.

Procederemos considerando que o modelo já é conhecido para, então, desenvolver o processo de previsão. Ressaltando, no entanto, que erros na estimação dos parâmetros podem afetar significativamente as previsões, especialmente quando a série temporal é curta.

## 2.6.1 Validação dos Modelos

Antes da previsão, é necessário validar a qualidade do modelo. É uma prática comum dividir os dados em dois conjuntos: um de treinamento e um de validação (HYNDMAN; KHAN-DAKAR, 2008). O conjunto de treinamento contém a parte inicial da série, e o conjunto de teste contém as observações mais recentes, que são mantidas fora do processo de modelagem.

Ao prever valores para o período do conjunto de teste, cujos valores reais são conhecidos, podemos avaliar a performance do modelo em dados não observados durante o treinamento. Esta abordagem ajuda a selecionar o ajuste mais adequado e a ter uma noção mais clara de sua acurácia preditiva.

O procedimento de validação resume-se a dividir o conjunto de dados em dois subconjuntos: treinamento  $(y_1, \dots, y_m)$  e teste  $(y_{m+1}, \dots, y_n)$ ; em seguida, ajusta-se o modelo aos dados de treinamento, faz-se a previsão e avalia-se a precisão do modelo por meio das métricas de avaliação. Por fim, plota-se o gráfico dos dados previstos pelo modelo em comparação com os dados reais para uma comparação visual.

### 2.6.1.1 Métricas de Desempenho

As métricas de desempenho mais utilizadas para avaliar a capacidade preditiva do modelo são:

- Erro Absoluto Médio (MAE): Mede a magnitude média dos erros entre os valores previstos

e os observados. Sua fórmula é dada por:

$$\text{MAE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|, \quad (2.35)$$

em que  $y_i$  é o valor observado,  $\hat{y}_i$  é o valor previsto e  $n$  é o número total de observações no conjunto de teste.

- Raiz do erro Quadrático Médio (RMSE): Quantifica o erro de previsão do modelo, sendo mais sensível à *outliers*. Dada por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}. \quad (2.36)$$

- Erro Percentual Absoluto Médio (MAPE): É a precisão da previsão expressa como uma porcentagem, facilitando a interpretação. Dada por:

$$\text{MAPE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \times 100\%. \quad (2.37)$$

## 2.6.2 Previsão de Séries Temporais Estacionárias

Dada uma série temporal estacionária  $Y_t$ , o objetivo de uma previsão é encontrar uma combinação linear das observações passadas  $\{Y_n, \dots, Y_1\}$  dos dados que preveja  $Y_{n+h}$  com o menor erro quadrático médio (EQM), sendo  $n$  o último valor da série e  $h > 0$  o horizonte de previsão.

A previsão com menor erro quadrático médio (EQM) é uma maneira de determinar o desvio médio entre o que é simulado e o que é observado. Sob as condições de regularidade, a previsão de mínimo erro quadrático médio é a esperança condicional, dada por:

$$\hat{Y}_{n+h|n} = E[Y_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n], \quad (2.38)$$

no qual  $n$  é o número de observações e  $h$  é o número de passos à frente para os quais se deseja prever.

### 2.6.2.1 Previsão de Processos AR

Para exemplificar o procedimento de previsão, vamos considerar inicialmente um processo AR(1)

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (2.39)$$

no qual  $\varepsilon_t$  é um ruído branco. Podemos prever o próximo passo ( $h = 1$ ) da série usando apenas a observação atual:

$$\hat{Y}_{n+1|n} = E[Y_{n+1} \mid Y_1, \dots, Y_n] = \varphi_1 y_n. \quad (2.40)$$

Para  $h > 1$  temos:

$$\hat{Y}_{n+h|n} = (\varphi_1)^h y_n. \quad (2.41)$$

Em um processo AR(1) estacionário, temos  $|\varphi_1| < 1$ . Portanto, à medida que aumentamos o horizonte de previsão  $h$ , o fator  $(\varphi_1)^h$  decai exponencialmente para zero, convergindo para a média do processo e tornando as previsões para horizontes muito longos menos informativas.

Generalizando para um processo AR( $p$ ), para  $h = 1$ ,

$$\hat{Y}_{n+1|n} = \varphi_1 y_n + \varphi_2 y_{n-2} + \cdots + \varphi_p y_{n-p}. \quad (2.42)$$

Para AR( $p$ ) com  $h > 1$ :

$$\hat{Y}_{n+h|n} = \varphi_1 \hat{Y}_{n+h-1|n} + \varphi_2 \hat{Y}_{n+h-2|n} + \cdots + \varphi_p \hat{Y}_{n+h-p|n}, \quad (2.43)$$

para  $n < t < n + p$ , em que  $t$  é o último valor da série e  $n$  é o valor atual.

A incerteza de uma previsão pode ser quantificada por meio do intervalo de predição. Um intervalo de nível  $(1 - \alpha)$  (por exemplo, para 80% ou 95%) é derivado da variância condicional  $\text{Var}(Y_{n+h} | Y_1, \dots, Y_n)$ . Para um processo AR(1) com ruído branco, o intervalo de predição para um horizonte  $h = 1$  é dado por:

$$\hat{Y}_{n+1} \pm z_{\alpha/2} \times \sigma_\varepsilon, \quad (2.44)$$

em que  $\hat{Y}_{n+1} = \varphi_1 Y_n$  é a previsão pontual,  $\sigma_\varepsilon$  é o desvio padrão do ruído branco,  $z_{\alpha/2}$  é o valor crítico que deixa uma probabilidade  $\alpha/2$  na cauda da distribuição normal unitária. Seguindo a mesma lógica, para  $h > 1$  a incerteza se acumula; temos:

$$\hat{Y}_{n+h} \pm z_{\alpha/2} \left( 1 + \sum_{j=1}^{h-1} \varphi_1^{2j} \right)^{1/2} \sigma_\varepsilon. \quad (2.45)$$

Esses limites são construídos de modo que, ao se condicionar à informação disponível até o tempo  $n$ , a probabilidade de o valor real  $(x_{t+h})$  estar contido no intervalo é  $(1 - \alpha)$ :

$$\Pr(\hat{Y}_{n+h}^L < Y_{n+h} < \hat{Y}_{n+h}^U | Y_1, \dots, Y_n) \approx 1 - \alpha. \quad (2.46)$$

### 2.6.2.2 Previsão de Processos MA

Inicialmente, para um processo MA(1):

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}, \quad (2.47)$$

no qual  $\varepsilon_t$  é um ruído branco.

Para previsões com horizonte  $h = 1$ :

$$\hat{Y}_{n+1|n} = E[\varepsilon_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] + \theta_1 E[\varepsilon_n | Y_1, \dots, Y_n], \quad (2.48)$$

em que  $E[\varepsilon_{n+1} | Y_1, \dots, Y_n] = 0$  e  $E[\varepsilon_n | Y_1, \dots, Y_n]$  geralmente são diferentes de zero, pois  $\varepsilon_n$  é uma componente inerente da observação mais recente.



Para  $h \geq 2$ :

$$\begin{aligned}\hat{Y}_{n+h|n} &= E[Y_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n] \\ &= E[\varepsilon_{n+h} + \theta_1 \varepsilon_{n+h-1} \mid Y_1, \dots, Y_n] \\ &= E[\varepsilon_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n] + \theta_1 E[\varepsilon_{n+h-1} \mid Y_1, \dots, Y_n] = 0,\end{aligned}\tag{2.49}$$

será igual à zero, pois os choques futuros  $\varepsilon_{n+h}$  e  $\varepsilon_{n+h-1}$  são independentes dos valores observados passados  $\{Y_1, \dots, Y_n\}$  e têm esperança zero.

Generalizando o procedimento para um processo MA( $q$ ):

$$Y_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \varepsilon_{t-q},\tag{2.50}$$

as previsões são dadas por:

$$\hat{Y}_{n+h|n} = \begin{cases} \sum_{j=h}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{n+h-j}, & \text{para } h = 1, 2, \dots, q, \\ 0, & \text{para } h > q. \end{cases}\tag{2.51}$$

Portanto, para horizontes  $h > q$ , a previsão reduz-se a média incondicional do processo (zero, na ausência de constante). Consequentemente, não faz sentido efetuar previsões maiores que a ordem  $q$  do processo de média móvel, visto que as previsões de prazos mais longos se tornam triviais.

### 2.6.2.3 Previsão de Processos ARMA

Para a previsão com um modelo ARMA( $p, q$ ), combinam-se os procedimentos de predição dos processos AR( $p$ ) e MA( $q$ ). A equação geral de previsão é dada por:

$$\hat{Y}_{n+h|n} = \sum_{i=1}^p \varphi_i E[Y_{n+h-i} \mid Y_1, \dots, Y_n] + \sum_{j=1}^q \theta_j E[\varepsilon_{n+h-j} \mid Y_1, \dots, Y_n],\tag{2.52}$$

na qual as esperanças condicionais são calculadas da seguinte forma:

- Para  $h \leq 0$ : Os valores observados são dados por:

$$E[Y_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n] = Y_{n+h}$$

e os resíduos estimados:

$$E[\varepsilon_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n] = \hat{\varepsilon}_{n+h};$$

- Para  $h > 0$ : Os valores previstos são dados por:

$$E[Y_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n] = \hat{Y}_{n+h|n}$$

e os choques futuros:

$$E[\varepsilon_{n+h} \mid Y_1, \dots, Y_n] = 0.$$

Assim, a previsão torna-se recursiva. Para  $h = 1$ :

$$\hat{Y}_{n+1|n} = \sum_{i=1}^p \varphi_i Y_{n+1-i} + \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{n+1-j}, \quad (2.53)$$

no qual todos os termos são conhecidos (valores observados e resíduos estimados). Para  $h > 1$ :

$$\hat{Y}_{n+h|n} = \sum_{i=1}^p \varphi_i \hat{Y}_{n+h-i|n} + \sum_{j=h}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{n+h-j}, \quad (2.54)$$

em que  $\hat{Y}_{n+k|n} = Y_{n+k}$  para  $k \leq 0$ , e a soma sobre  $j$  vai apenas até  $\min(h-1, q)$ , pois choques futuros ( $\varepsilon_{n+k}$  com  $k > 0$ ) têm esperança zero.

### 2.6.3 Previsão de Séries Temporais com Tendência e/ou Sazonalidade

Para modelar séries temporais com tendência e/ou sazonalidade, utilizamos os modelos  $\text{ARIMA}(p, d, q)$  e  $\text{SARIMA}(p, d, q)(P, D, Q)_s$ . A previsão nestes modelos baseia-se na mesma ideia do  $\text{ARMA}(p, q)$ , aplicada às séries diferenciadas.

#### 2.6.3.1 Previsão de Processos ARIMA

Para um processo  $\text{ARIMA}(p, d, q)$ , a previsão é baseada na representação do modelo diferenciado. Denotando a série original  $\{Y_t\}$  diferenciada  $d$  vezes por  $\{Z_t\}$ , temos que  $Z_t$  segue um processo  $\text{ARMA}(p, q)$ :

$$Z_t = \varphi_1 Z_{t-1} + \cdots + \varphi_p Z_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad (2.55)$$

no qual  $\varepsilon_t$  é um ruído branco.

Para um horizonte  $h \geq 1$ , a previsão de  $Z_{n+h}$  é dada por:

$$\hat{Z}_{n+h|n} = \sum_{i=1}^p \varphi_i \hat{Z}_{n+h-i|n} + \sum_{j=1}^q \theta_j \hat{\varepsilon}_{n+h-j}, \quad (2.56)$$

com as seguintes convenções:

- Para  $k \leq 0$ :  $\hat{Z}_{n+k|n} = Z_{n+k}$  (valores já observados) e  $\hat{\varepsilon}_{n+k}$  são os resíduos estimados do modelo;
- Para  $k > 0$ :  $\hat{\varepsilon}_{n+k} = 0$ , pois choques futuros não são previsíveis.

A previsão de  $Y_{n+h}$  é obtida revertendo o processo de diferenciação. A relação geral é:

$$\hat{Y}_{n+h|n} = \sum_{i=1}^d c_i \hat{Y}_{n+h-i|n} + \hat{Z}_{n+h|n}, \quad (2.57)$$

no qual os coeficientes  $c_i$  dependem da ordem de diferenciação  $d$ .

Os casos mais comuns são 1 ou 2 diferenciações:

- Para  $d = 1$ :

$$\hat{Y}_{n+h|n} = \hat{Y}_{n+h-1|n} + \hat{Z}_{n+h|n}; \quad (2.58)$$

- Para  $d = 2$ :

$$\hat{Y}_{n+h|n} = 2\hat{Y}_{n+h-1|n} - \hat{Y}_{n+h-2|n} + \hat{Z}_{n+h|n}. \quad (2.59)$$

### 2.6.3.2 Previsão de Processos SARIMA

A previsão para modelos SARIMA( $p, d, q$ )( $P, D, Q$ )<sub>s</sub> é uma extensão do procedimento ARIMA, incorporando a estrutura sazonal. Seja  $W_t$  a série obtida após  $d$  diferenciações simples e  $D$  diferenciações sazonais à série original.

A previsão para  $h = 1$ :

$$\begin{aligned} \hat{W}_{n+1|n} = m + \sum_{i=1}^p \varphi_i W_{n+1-i} + \sum_{i=1}^P \phi_i W_{n+1-s.i} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^P \varphi_i \phi_j W_{n+1-i-s.j} + \\ + \sum_{i=1}^q \theta_i \varepsilon_{n+1-i} + \sum_{i=1}^Q \eta_i \varepsilon_{n+1-s.i} + \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^Q \theta_i \eta_j \varepsilon_{n+1-i-s.j} + \varepsilon_t, \end{aligned} \quad (2.60)$$

em que todos os termos  $W_{n+1-k}$  e  $\varepsilon_{n+1-k}$  com  $k \geq 1$  são valores passados conhecidos.

Para  $h > 1$ , seguindo os métodos apresentados nas previsões com AR e MA, temos

$$\begin{aligned} \hat{W}_{n+h|n} = m + \sum_{i=1}^p \varphi_i \left[ \mathbb{I}_{h-i \leq 0} \cdot W_{n+h-i} + \mathbb{I}_{h-i > 0} \cdot \hat{W}_{n+h-i|n} \right] \\ + \sum_{i=1}^P \phi_i \left[ \mathbb{I}_{h-s.i \leq 0} \cdot W_{n+h-s.i} + \mathbb{I}_{h-s.i > 0} \cdot \hat{W}_{n+h-s.i|n} \right] \\ - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^P \varphi_i \phi_j \left[ \mathbb{I}_{h-i-s.j \leq 0} \cdot W_{n+h-i-s.j} + \mathbb{I}_{h-i-s.j > 0} \cdot \hat{W}_{n+h-i-s.j|n} \right] \\ + \sum_{i=1}^{\min(q, h-1)} \theta_i \varepsilon_{n+h-i} + \sum_{i=1}^{[(h-1)/s]} \eta_i \varepsilon_{n+h-s.i} + \sum_{j=1}^q \sum_{j=1}^{[(h-1-i)/s]} \theta_i \eta_j \varepsilon_{n+h-i-s.j}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

em que  $\mathbb{I}$  é a função indicadora, que vale 1 se a condição for verdadeira e zero caso contrário.

Após prever a série diferenciada, basta aplicarmos a integração para obter as previsões da série original  $Y_t$ .

## 3 Materiais e métodos

### 3.1 Material

O estudo focou em dados de precipitação e temperatura que foram coletados por meio das estações climatológicas disponíveis no Estado de São Paulo. A base de dados foi selecionada através de longas séries temporais de dados, dos anos de 1970 à 2023.

Visando uma melhor visualização dos padrões temporais, as observações foram analisadas considerando a totalidade dos 12 meses do ano e, também, para complementar a análise, estratificadas em 4 meses representativos, um para cada estação do ano, sendo eles: janeiro (verão), abril (outono), julho (inverno) e outubro (primavera).

#### 3.1.1 Dados do Departamento de Águas e Energia Elétrica (DAEE)

Os dados foram retirados do portal do [Departamento de Águas e Energia Elétrica \(DAEE\)](#) (2024); eles referem-se à chuva em milímetros. Os postos de observação escolhidos foram aqueles que apresentavam a maioria dos dados nos anos selecionados, ou seja, com poucas interrupções nas coletas; a opção foi escolher os mais robustos: Água Branca (AB), Santo Amaro (SA), Observatório IAG (OIAG) e Monte Belo (MB). O mapa das localizações das estações é apresentado na Figura 2.

##### 3.1.1.1 Água Branca

- PREFIXO: E3-003
- NOME DO POSTO: AGUA BRANCA
- MUNICÍPIO: SÃO PAULO
- CURSO D'ÁGUA: TIETE,R
- LATITUDE: 23°30'57"
- LONGITUDE: 46°40'51"

### 3.1.1.2 Santo Amaro

- PREFIXO: E3-006
- NOME DO POSTO: SANTO AMARO
- MUNICÍPIO: SÃO PAULO
- CURSO D'ÁGUA: PINHEIROS,R
- LATITUDE: 23°38'24"
- LONGITUDE: 46°41'33"

### 3.1.1.3 Observatório IAG

- PREFIXO: E3-035
- NOME DO POSTO: OBSERVATORIO IAG
- MUNICÍPIO: SÃO PAULO
- CURSO D'ÁGUA: TAMANDUATEL,R
- LATITUDE: 23°39'04"
- LONGITUDE: 46°37'21"

### 3.1.1.4 Monte Belo

- PREFIXO: E3-091
- NOME DO POSTO: MONTE BELO
- MUNICÍPIO: SÃO PAULO
- CURSO D'ÁGUA: TIETE,R
- LATITUDE: 23°30'36"
- LONGITUDE: 46°22'58"

## 3.1.2 Dados do INMET

Os dados foram retirados do [Instituto Nacional de Meteorologia \(INMET\)](#) (2024); referem-se à precipitação em milímetros e à temperatura em graus Celsius.

- Estação: 83781

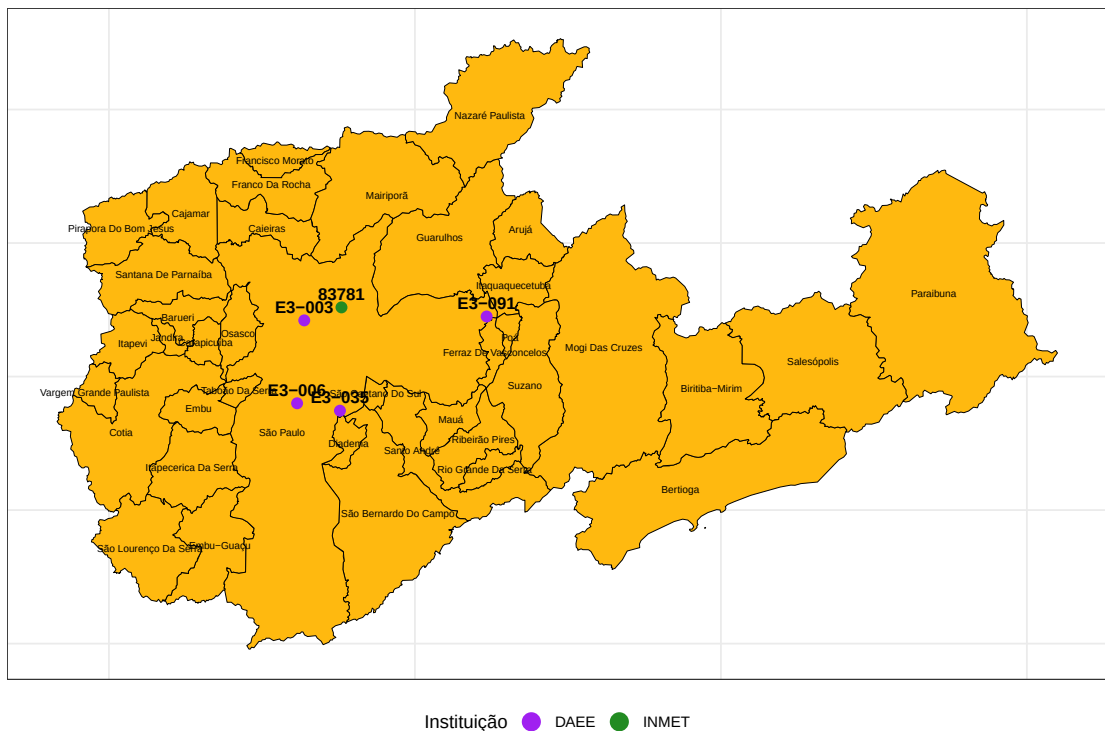


Figura 2 – Mapa dos postos da DAEE e INMET

- NOME DO POSTO: SÃO PAULO (MIR.de SANTANA)
- LATITUDE: -23.49638888
- LONGITUDE: -46.61999999
- Altitude: 785.16m

## 3.2 Métodos

Inicialmente, realizou-se o pré-processamento dos dados e a análise em relação aos meses escolhidos e aos valores faltantes, nos quais os dados foram filtrados e tratados quanto aos dados ausentes, sendo realizada a imputação pela média móvel da estação. Para analisar o comportamento dos dados, foram feitos gráficos temporais da série ao longo do tempo.

Na sequência, foi feita uma análise descritiva com:

- Estatísticas descritivas: média, mediana, desvio padrão e assimetria, além de gráficos como o qqplot e o box-plot;
- Decomposição e suavização: clássica (aditiva ou multiplicativa) e SST;

- Testes estatísticos: Teste de estacionariedade de *Dickey-Fuller* Aumentado (para a estacionariedade), Teste de *Mann-Kendall* (para a tendência) e Teste de *Ljung-Box* (para a autocorrelação residual).

Por fim, a escolha de um modelo com base na análise estatística realizada (principalmente pelos correlogramas), como o ARIMA e o SARIMA. Escolheram-se os melhores modelos para, então, compará-los por meio do AIC.

### 3.2.1 Ferramentas Computacionais

Para a realização das análises e modelagem das séries temporais, foi utilizado o *software* de licença aberta R (R Core Team, 2025), com as seguintes bibliotecas:

- `dplyr` (WICKHAM et al., 2023): Utilizado para manipulação e transformação de dados, permitindo operações de filtragem, seleção, agrupamento e sumarização de dados.
- `lubridate` (GROLEMUND; WICKHAM, 2011): Empregado para a manipulação robusta de datas e horários, facilitando a análise temporal.
- `forecast` (HYNDMAN et al., 2025): Utilizado para modelagem e previsão de séries temporais. Em especial, a função `nsdiffs`, que utiliza testes de raiz unitária para determinar o número de diferenciações necessárias para que a série temporal  $\{Y_t : t \in \mathcal{T}\}$  se torne estacionária.
- `tseries` (TRAPLETTI; HORNIK, 2024): Aplicado na análise exploratória de séries temporais, oferecendo testes de estacionariedade e ferramentas para a análise de séries temporais.
- `trend` (POHLERT, 2023): Utilizado para a aplicação de testes não paramétricos de tendência, incluindo testes de mudança de ponto e análise de homogeneidade em séries temporais ambientais.
- `Kendall` (MCLEOD, 2022): Especificamente empregado para a implementação do teste de Mann-Kendall, permitindo a detecção de tendências monotônicas em séries temporais com dados não paramétricos.
- `ggplot2` (WICKHAM et al., 2025): Utilizado para a criação de visualizações de dados por meio de gráficos personalizáveis.

## 4 Resultados

### 4.1 Dados de Precipitação Total Mensais da INMET (1970-2023)

#### 4.1.1 Dados de Precipitação Total Mensais - Para 4 meses

Os dados brutos de precipitação, apresentados na Figura 3, não mostram tendência, mas mostra sazonalidade aparente.

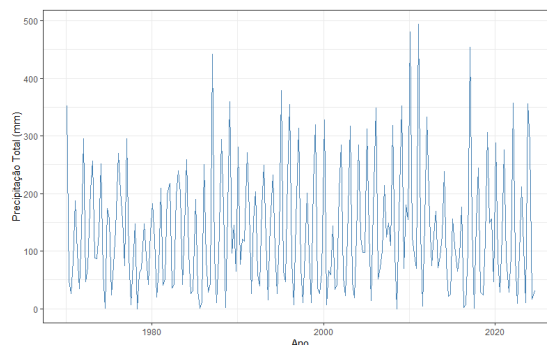


Figura 3 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.

A partir da Figura 4a, observa-se que o inverno apresenta a menor precipitação do ano; já o verão apresenta a maior precipitação, chegando a quase 500 mm no total, com grande amplitude. Por outro lado, tanto o outono quanto a primavera são períodos de transição entre as estações, apresentando níveis de precipitação intermediários. Além de tudo, repara-se um efeito sazonal e, também, a presença de *outliers*, principalmente no verão, indicando períodos atípicos de chuvas.

Na Figura 4b, o verão apresenta uma tendência de crescimento; enquanto os demais não apresentam. Pelo teste de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, constata-se que não há tendência relevante nos dados. Além disso, o inverno apresenta maior variabilidade, pois seus pontos estão mais esparsos, o que indica que alguns anos podem ser mais chuvosos do que os outros.



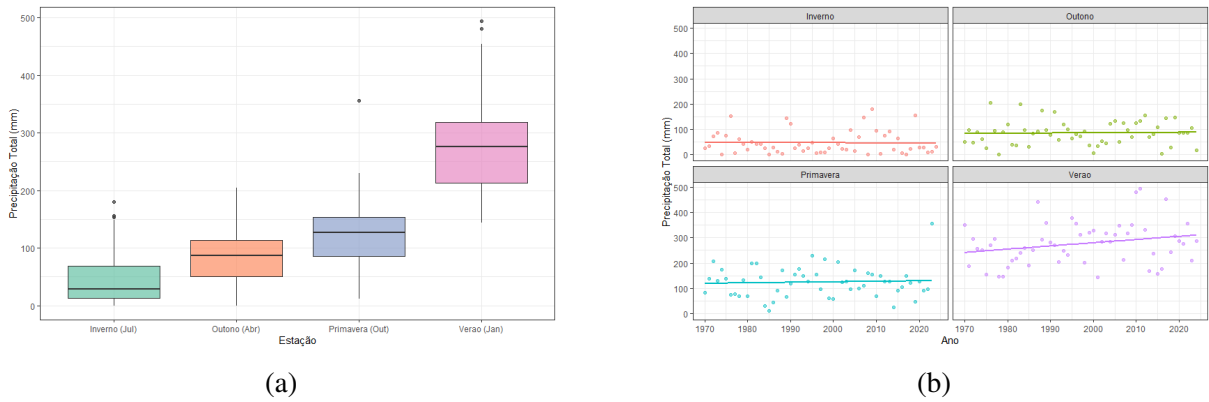


Figura 4 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados do INMET.

#### 4.1.1.1 Análise Descritiva para os 4 meses juntos

Os valores apresentados na Tabela 1 evidenciam que a maioria dos meses apresenta precipitação relativamente baixa, mas há algumas observações de chuvas extremas, fazendo com que a cauda direita da distribuição seja longa. A alta variabilidade e a assimetria positiva sugerem um alto risco de eventos pluviométricos extremos (como enxurradas e inundações).

Tabela 1 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Variável     | Média  | Mediana | Q1    | Q3     | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|--------------|--------|---------|-------|--------|---------------|------|------------|
| Precipitação | 133.15 | 104.10  | 48.15 | 188.80 | 106.19        | 0.80 | 1.01       |

#### 4.1.1.2 Análise da Série Temporal para os 4 meses juntos

A série temporal dada pela Equação (2.1) é ajustada para a frequência de 4 meses. O ACF (Figura 5a) apresenta um decaimento oscilatório e lento, o que mostra que há efeitos sazonais, com picos a cada dois *lags*; assim, temos evidências de que  $Q = 2$ , mas não apresenta nenhum corte claro em  $q$ . O PACF (Figura 5b) também apresenta um padrão oscilatório, mas decai rapidamente; além disso, vê-se picos a cada aproximadamente 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ .

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que o processo é estacionário; logo, não precisa de transformações.

Podemos verificar pela decomposição da série pelo método STL (Figura 6) que não há uma tendência visível, mas uma sazonalidade aparente.

#### 4.1.1.3 Modelagem para os 4 meses juntos

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os que apresentaram melhor

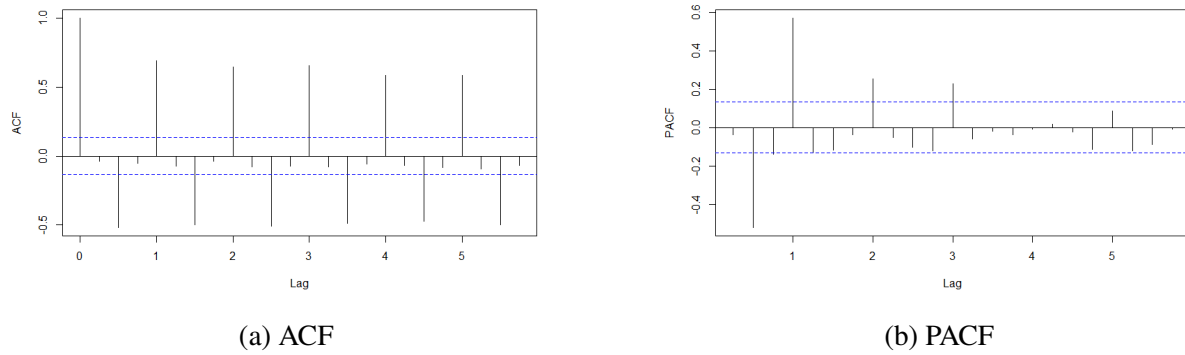


Figura 5 – Correlogramas da precipitação total mensal (INMET).

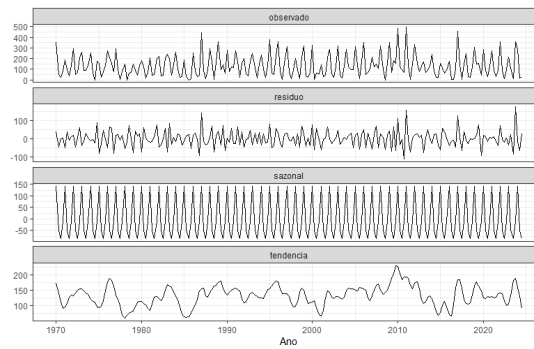


Figura 6 – Decomposição STL da precipitação total mensal (INMET).

desempenho e parcimônia foram os modelos SARIMA, os quais estão listados na Tabela 2.

Tabela 2 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC     |
|--------------------------|---------|
| SARIMA(1, 0, 0)(1, 1, 2) | 2394.11 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 2) | 2394.95 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 2395.01 |

Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 7. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) (Figura 7c).

#### 4.1.1.4 Análise Descritiva para os 4 meses separados

Os dados brutos de precipitação para cada estação separada, apresentados na Figura 8, não evidenciaram uma tendência, mas possíveis sazonalidades, o que não difere da análise dos 4 meses juntos.

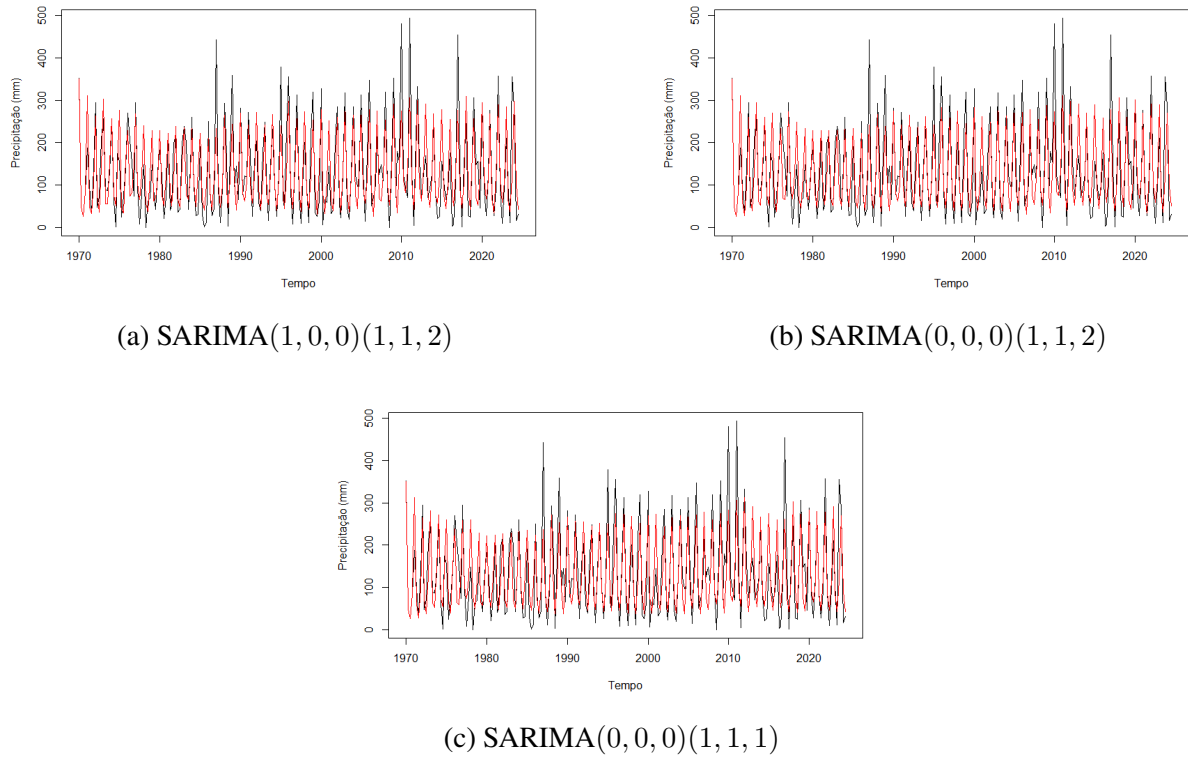


Figura 7 – Modelos ajustados de precipitação mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

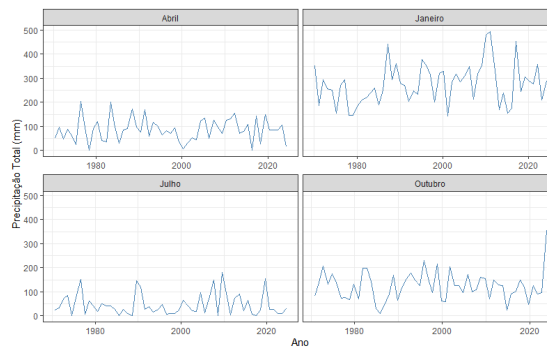


Figura 8 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses separados.

#### 4.1.1.5 Análise da Série Temporal para os 4 meses separados

A série temporal é ajustada para a frequência de 1 mês. Tanto os ACFs (Figura 9a) quanto os PACFs (Figura 9b) apresentam um decaimento oscilatório, o que mostra que há efeitos sazonais; não há nenhum *lag* significativo. Assim, não temos evidências para valores de  $Q$ ,  $q$ ,  $P$  ou  $p$ .

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

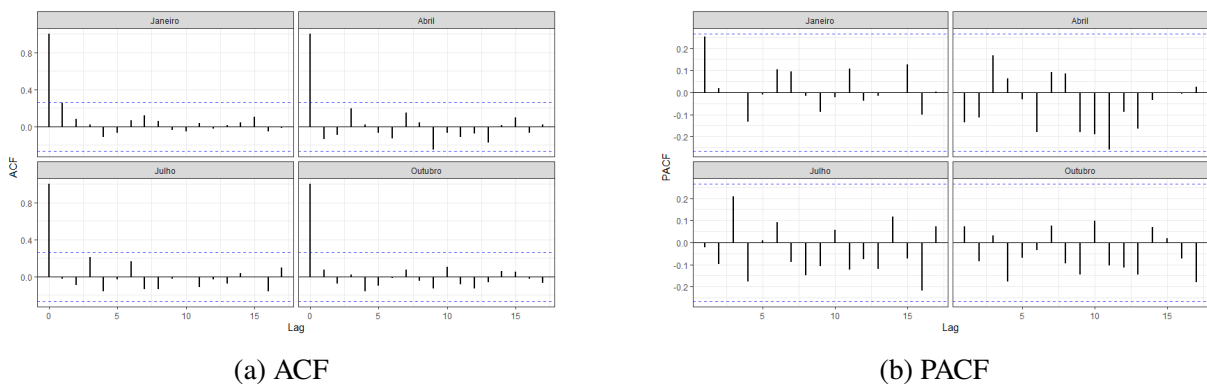


Figura 9 – Correlogramas da Precipitação total mensal para cada mês (INMET).

#### 4.1.1.6 Modelagem para os 4 meses separados

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os que apresentaram melhor desempenho e parcimônia foram listados na Tabela 3.

Para Janeiro, os modelos ajustaram-se bem à série original, conforme mostrado na Figura 10. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o ARIMA(1, 1, 1) (Figura 10b).

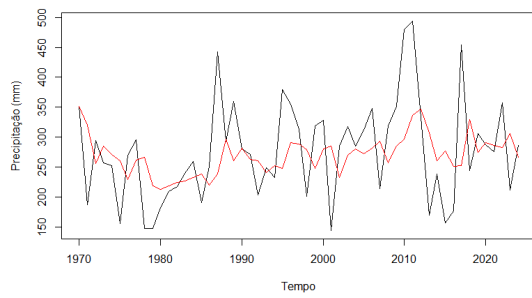
Para Abril, temos os modelos ajustados à série original pela Figura 11. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o ARIMA(0, 1, 1) (Figura 11a).

Para Julho, temos os modelos ajustados à série original pela Figura 12. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o ARIMA(0, 1, 1) (Figura 12a).

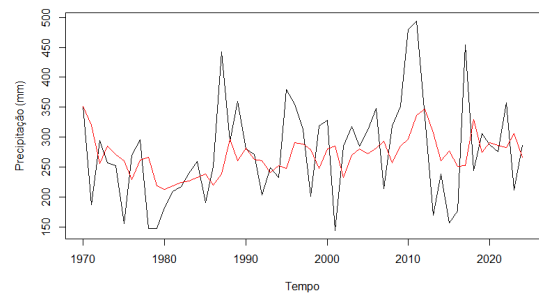
Para Outubro, temos os modelos ajustados à série original pela Figura 13. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o ARIMA(0, 1, 1) (Figura 13a).

Tabela 3 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

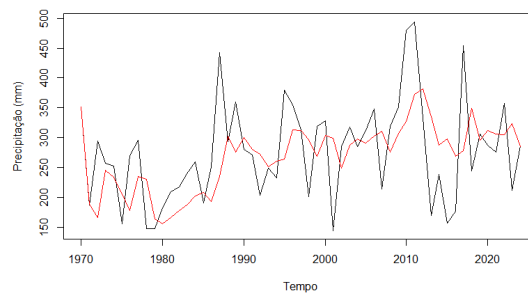
| Modelo                   | AIC    | Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|--------------------------|--------|
| <b>Janeiro</b>           |        | <b>Julho</b>             |        |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 636.23 | ARIMA(0, 1, 1)           | 573.34 |
| ARIMA(1, 1, 1)           | 636.23 | SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) | 573.34 |
| SARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 1) | 635.07 | SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 575.34 |
| <b>Abril</b>             |        | <b>Outubro</b>           |        |
| ARIMA(0, 1, 1)           | 578.14 | ARIMA(0, 1, 1)           | 592.60 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 579.33 | SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) | 592.60 |
| ARIMA(1, 1, 1)           | 579.33 | ARIMA(1, 1, 1)           | 594.00 |



(a) SARIMA(0,0,0)(1,1,1)

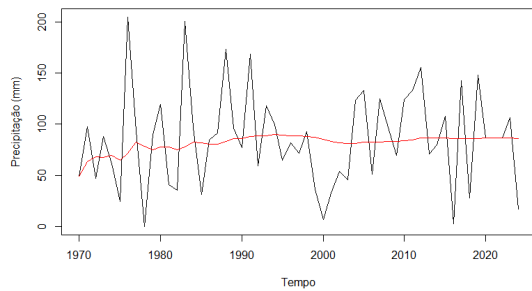


(b) ARIMA(1,1,1)

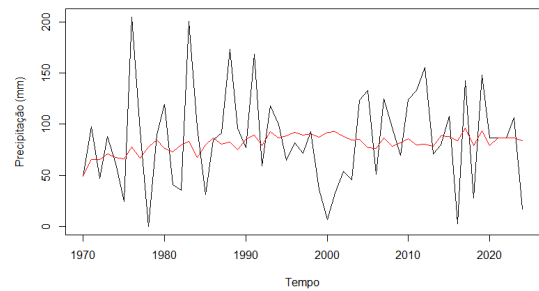


(c) SARIMA(0,1,1)(1,1,1)

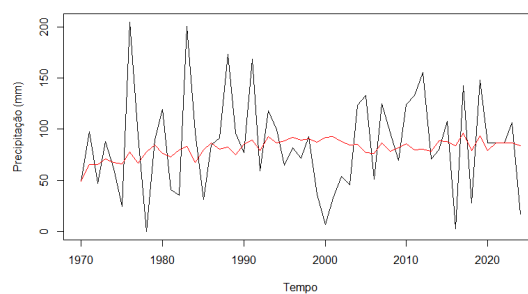
Figura 10 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0,1,1)

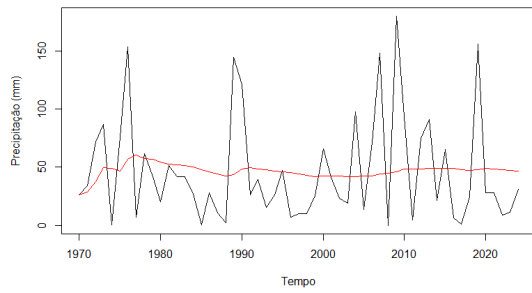


(b) SARIMA(0,0,0)(1,1,1)

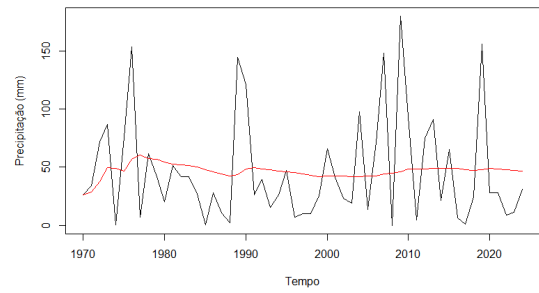


(c) ARIMA(1,1,1)

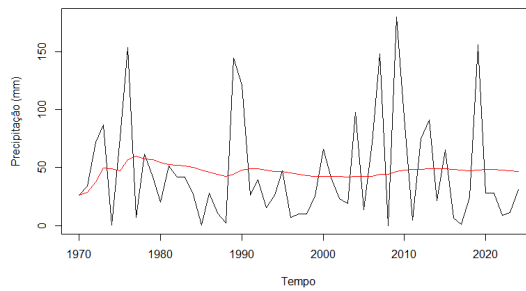
Figura 11 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0, 1, 1)

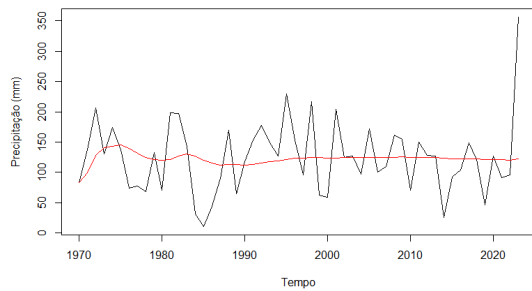


(b) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1)

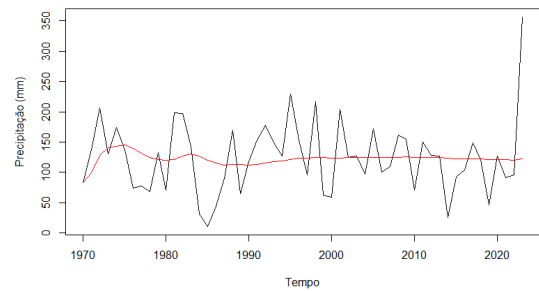


(c) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1)

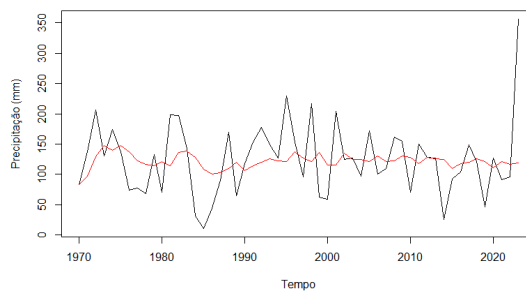
Figura 12 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0, 1, 1)



(b) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1)



(c) ARIMA(1, 1, 1)

Figura 13 – Modelos ajustados de precipitação mensal em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

### 4.1.2 Dados de Precipitação Total Mensais - Para os 12 meses

Os dados brutos de precipitação para cada estação do ano, apresentados na Figura 14, possibilitam observar uma tendência crescente, principalmente no verão e no outono, além da sazonalidade aparente em todas as estações.

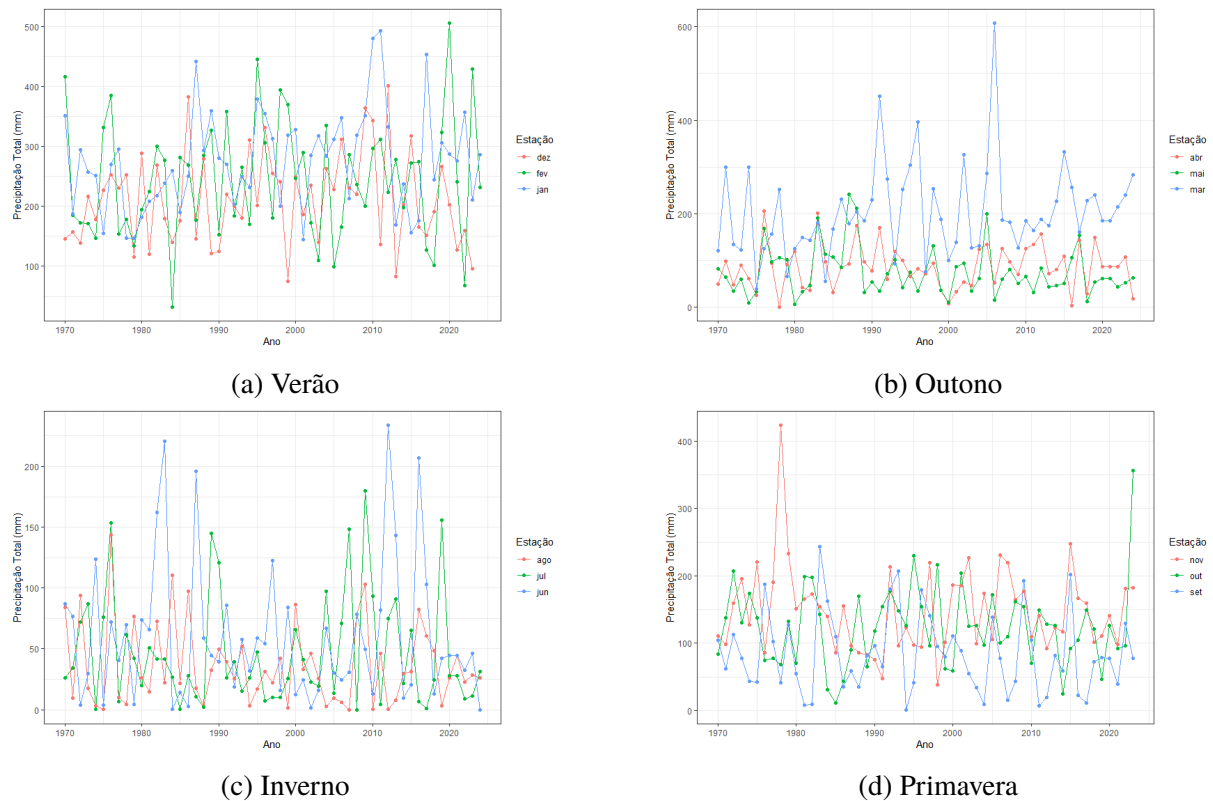


Figura 14 – Distribuição temporal da Precipitação Total Mensal (mm) em São Paulo (INMET) para cada estação do ano.

#### 4.1.2.1 Análise Descritiva para os 12 meses

Pelas estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 4, com exceção do verão, todos os períodos apresentam alta variabilidade e assimetria positiva. O inverno e o outono são os períodos de maior variabilidade e forte assimetria positiva, o que indica que existem muitos eventos extremos.

Tabela 4 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Estação   | Média  | Mediana | Q1     | Q3     | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|-----------|--------|---------|--------|--------|---------------|------|------------|
| Verão     | 244.58 | 204.10  | 177.20 | 301.78 | 90.70         | 0.37 | 0.41       |
| Outono    | 121.11 | 96.60   | 54.00  | 169.00 | 91.45         | 0.76 | 1.68       |
| Inverno   | 47.49  | 31.6    | 13.70  | 71.00  | 47.22         | 0.99 | 1.62       |
| Primavera | 118.80 | 109.85  | 77.63  | 161.03 | 66.21         | 0.56 | 0.88       |

Pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, apenas o verão apresenta uma tendência relevante nos dados.

#### 4.1.2.2 Análise da Série Temporal para os 12 meses

Para a frequência de 3 meses para cada estação do ano. Todos os ACFs (Figura 15a) apresentaram um decaimento oscilatório, o que mostra que existem efeitos sazonais. Para o outono, apresenta picos a cada 1 *lag*, o que pode indicar que  $Q = 1$ . Para a primavera, apresenta cortes nos *lags* 3 e 4, indicando que  $q$  pode ser 3 ou 4. As demais estações não apresentam um corte claro.

O PACF (Figura 15) também apresenta um padrão oscilatório. Para o outono, vemos picos a cada aproximadamente 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ . Para a primavera, apresenta cortes nos *lags* 3 e 4, indicando que  $p$  pode ser 3 ou 4. As demais estações não apresentam um corte claro.

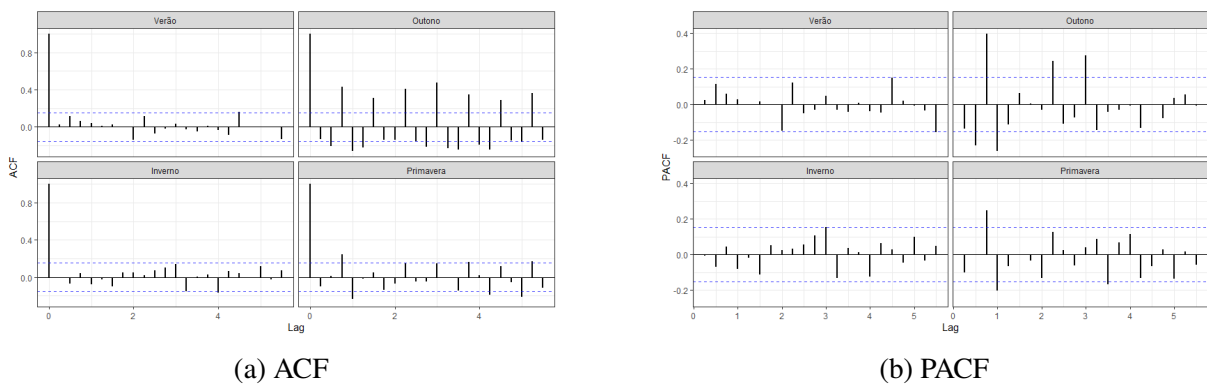


Figura 15 – Correlograma da Precipitação total mensal para cada estação do ano (INMET).

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que todos são estacionários; logo, não precisam de transformações.

#### 4.1.2.3 Modelagem para os 12 meses

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os que apresentaram melhor desempenho e parcimônia foram os modelos listados na Tabela 5.

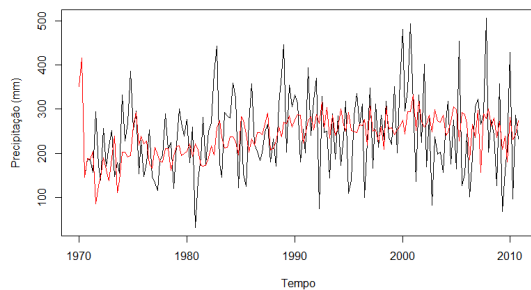
Para o verão, os modelos ajustaram-se bem à série original, conforme mostrado na Figura 16. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 3) (Figura 16a).

Para o Outono, os modelos ajustaram-se bem à série original, conforme mostrado na Figura 17. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 4) (Figura 17a).

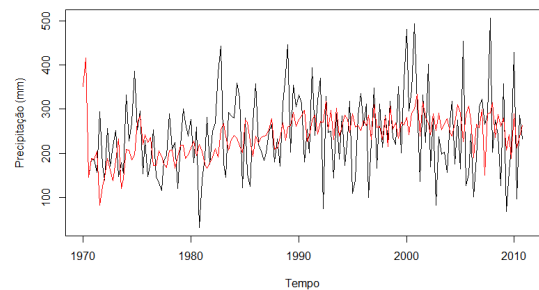


Tabela 5 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

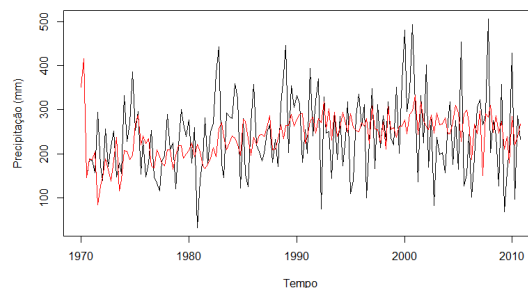
| Modelo                   | AIC     | Modelo                   | AIC     |
|--------------------------|---------|--------------------------|---------|
| <b>Verão</b>             |         | <b>Inverno</b>           |         |
| SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 3) | 1907.16 | SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2) | 1717.44 |
| SARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 3) | 1908.40 | SARIMA(0, 0, 0)(4, 1, 1) | 1717.93 |
| SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 4) | 1908.79 | SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 4) | 1718.16 |
| <b>Outono</b>            |         | <b>Primavera</b>         |         |
| SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 4) | 1844.81 | SARIMA(3, 1, 4)(0, 1, 1) | 1772.00 |
| SARIMA(2, 1, 3)(1, 1, 1) | 1844.96 | SARIMA(3, 0, 2)(0, 1, 1) | 1773.85 |
| SARIMA(3, 1, 3)(1, 1, 1) | 1846.18 | SARIMA(3, 0, 2)(0, 1, 2) | 1774.12 |



(a) SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 3)



(b) SARIMA(0, 1, 1)(1, 1, 3)

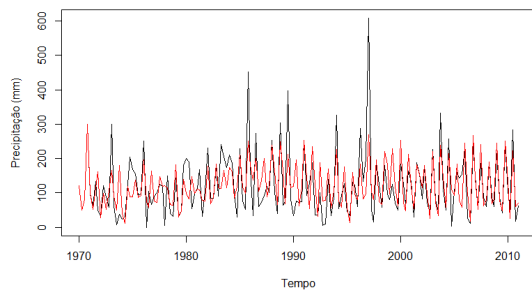


(c) SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 4)

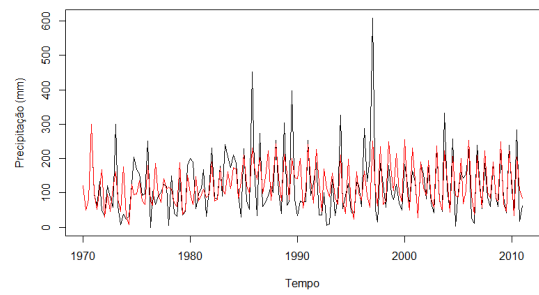
Figura 16 – Modelos ajustados de precipitação mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

Para o Inverno, os modelos ajustaram-se bem à série original, conforme mostrado na Figura 18. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2) (Figura 18a).

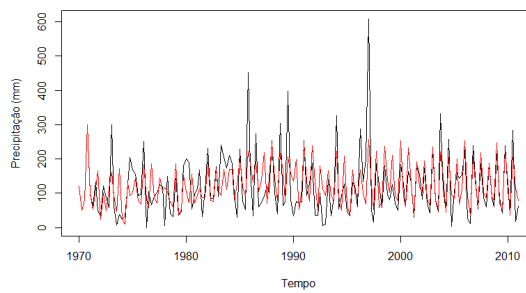
Para a Primavera, os modelos ajustaram-se bem à série original, conforme mostrado na Figura 19. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido foi o SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2) (Figura 19c).



(a) SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 4)

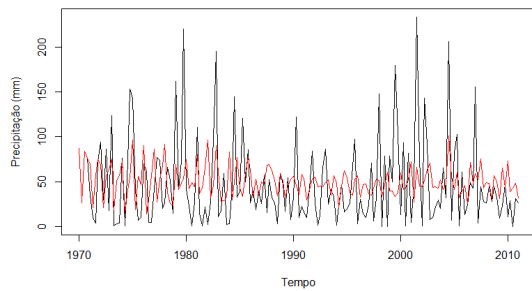


(b) SARIMA(2, 1, 3)(1, 1, 1)

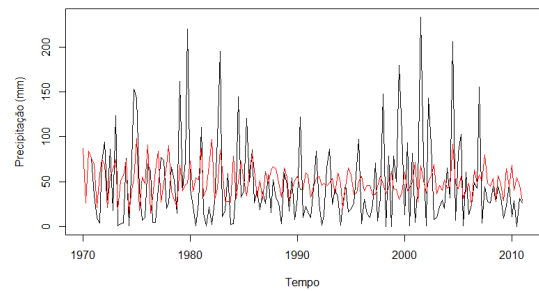


(c) SARIMA(3, 1, 3)(1, 1, 1)

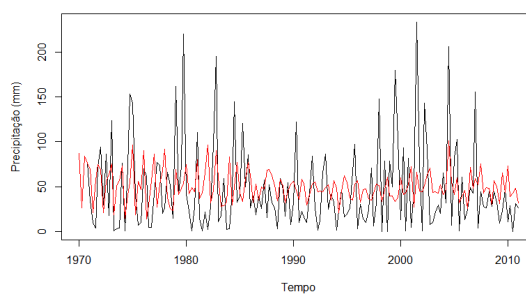
Figura 17 – Modelos ajustados de precipitação mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2)



(b) SARIMA(0, 0, 0)(4, 1, 1)



(c) SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 4)

Figura 18 – Modelos ajustados de precipitação mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

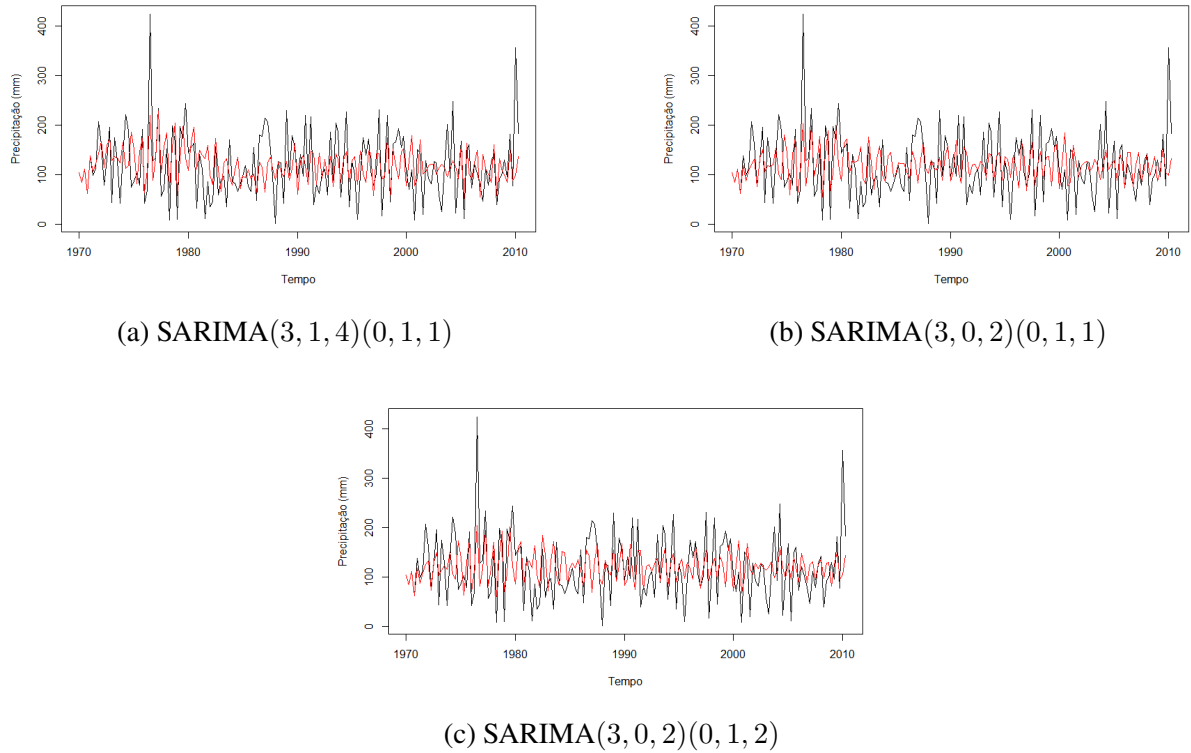


Figura 19 – Modelos ajustados de precipitação mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

### 4.1.3 Previsão da Precipitação Total Mensal

#### 4.1.3.1 Previsão da Precipitação Total Mensal para os 4 meses juntos

Para validar o modelo SARIMA, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figura 20a). Dentre os três modelos testados, o SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) apresentou os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

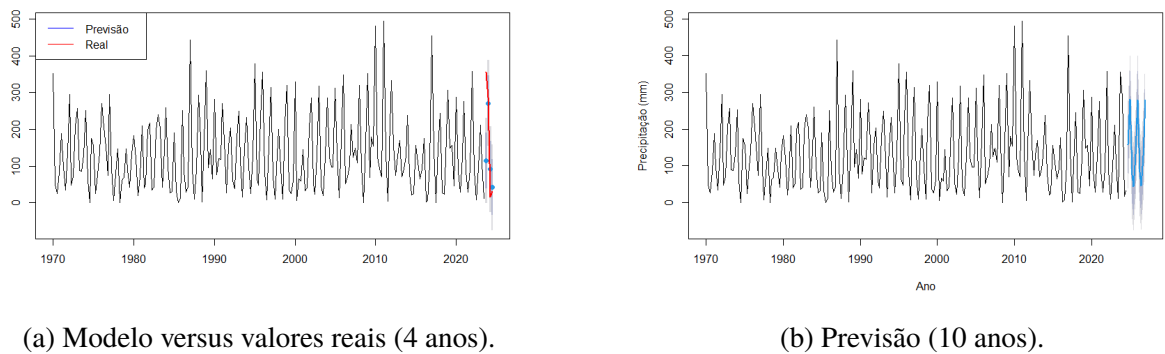


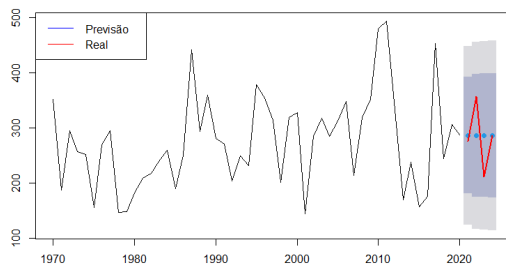
Figura 20 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1).

A previsão do modelo SARIMA para um horizonte de 10 anos demonstra adequação ao comportamento histórico das séries (Figura 20b). As faixas azuis, que representam os intervalos de predição de 95%, expandem-se gradualmente conforme aumenta o horizonte preditivo.

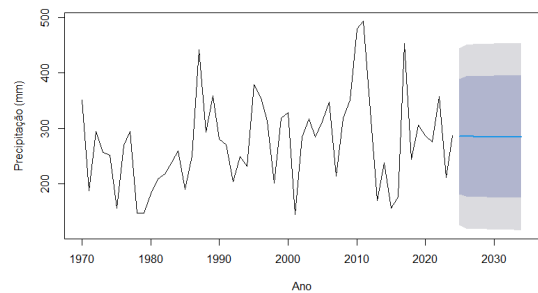
#### 4.1.3.2 Previsão da Precipitação Total Mensal para os 4 meses separados

Para validar os modelos ARIMA, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 21a, 22a, 23a e 24a). Dentre os três modelos testados, os modelos ARIMA(1, 1, 1) para janeiro e ARIMA(0, 1, 1) para abril, julho e outubro, respectivamente, foram os que apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que não se adéquam bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 21b, 22b, 23b e 24b). Observa-se que o modelo ARIMA apresenta resultados muito próximos à média da série.

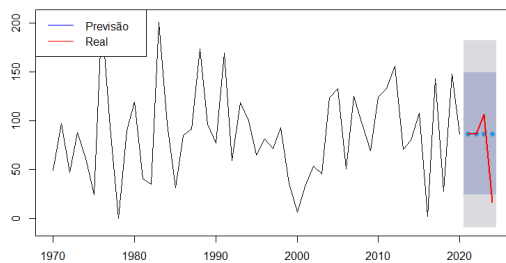


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

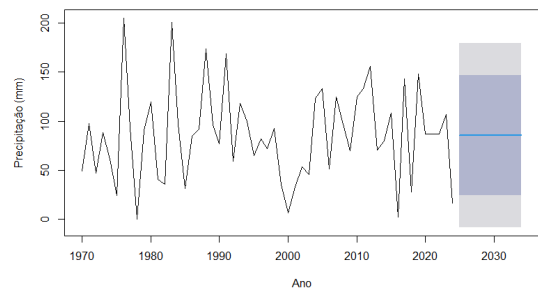


(b) Previsão (10 anos).

Figura 21 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Janeiro (INMET) com o modelo ARIMA(1, 1, 1).

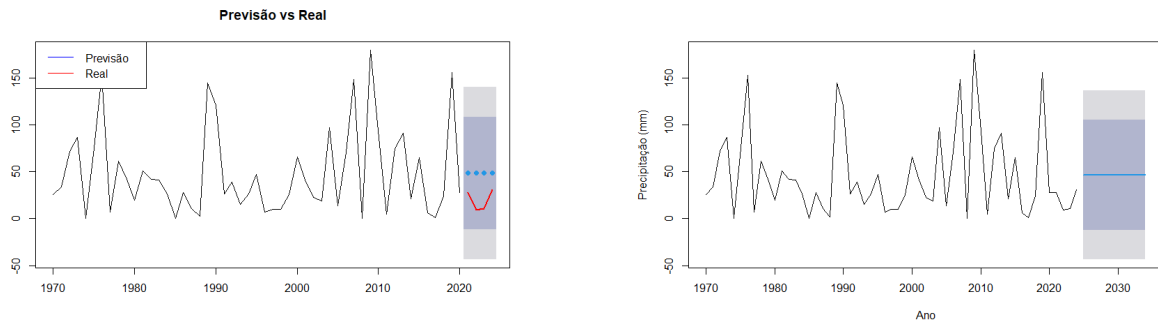


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



(b) Previsão (10 anos).

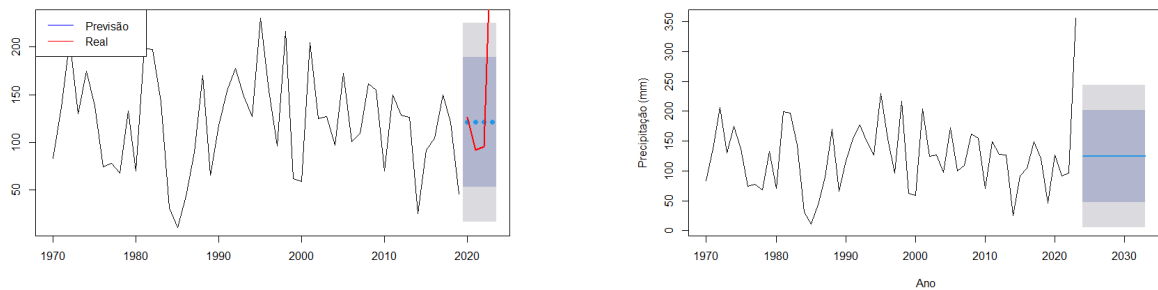
Figura 22 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

(b) Previsão (10 anos).

Figura 23 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

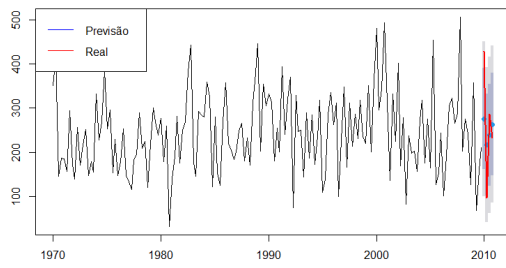
(b) Previsão (10 anos).

Figura 24 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

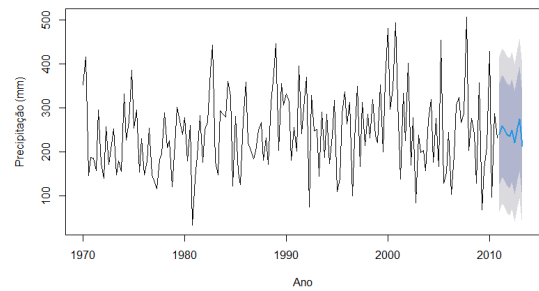
#### 4.1.3.3 Previsão da Precipitação Total Mensal para os 12 meses

Para validar os modelos SARIMA, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 25a, 26a, 27a e 28a). Dentre os três modelos testados, os modelos SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 3), SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 4), SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2) e SARIMA(3, 0, 2)(0, 1, 1) para o verão, outono, inverno e primavera, respectivamente, foram os que apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

Ao comparar as previsões para um horizonte de 10 anos, demonstram que não se adequam muito bem ao comportamento histórico das séries, apresentando intervalos de predição muito altos, com exceção da previsão para o outono, que se adequou melhor (Figuras 25b, 26b, 27b e 28b).

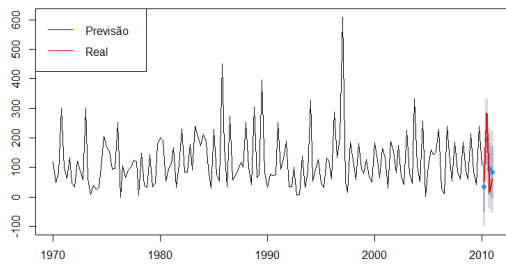


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

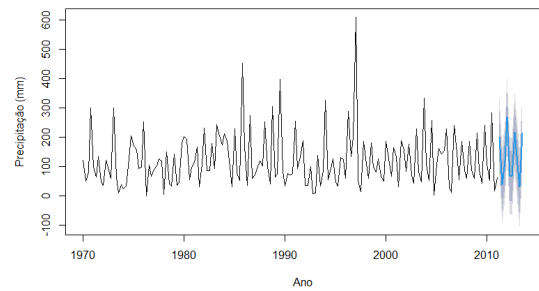


(b) Previsão (10 anos).

Figura 25 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Verão (INMET) com o modelo SARIMA(0, 1, 1)(0, 1, 3).

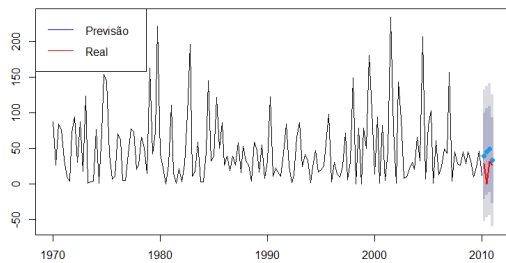


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

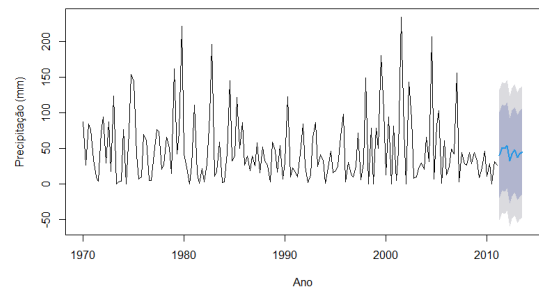


(b) Previsão (10 anos).

Figura 26 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Outono (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 3)(2, 1, 4).

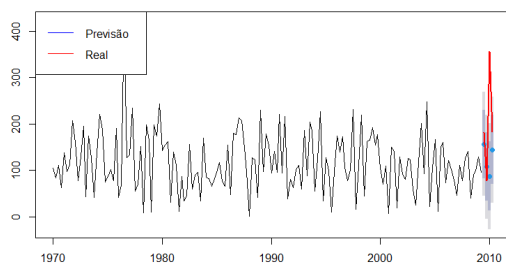


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

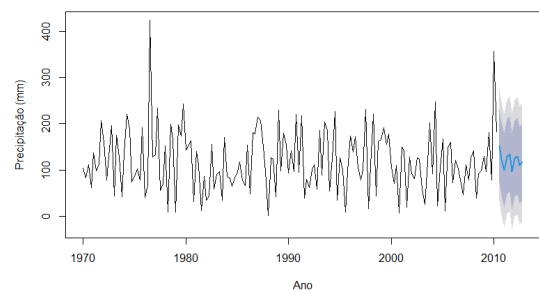


(b) Previsão (10 anos).

Figura 27 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Inverno (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(3, 1, 2).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



(b) Previsão (10 anos).

Figura 28 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total na Primavera (INMET) com o modelo SARIMA(3, 0, 2)(0, 1, 1).

## 4.2 Dados de Temperaturas Mensais da INMET (1970-2023)

### 4.2.1 Dados de Temperatura Mensais - Para 4 meses

Os dados brutos são vistos na Figura 29 e todos aparentam uma tendência crescente, com sazonalidade aparente.

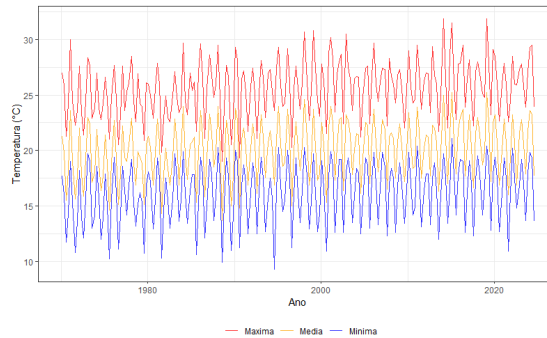


Figura 29 – Distribuição temporal das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (°C) em São Paulo, de 1980 a 2023. Dados obtidos do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET).

Pelas Figuras 30a, 30c e 30e, nota-se sazonalidade e, também, a presença de *outliers*, indicando períodos atípicos de temperatura. A maior variabilidade aparece na primavera e no verão da temperatura máxima quando comparada às demais temperaturas.

As Figuras 30b, 30d e 30f mostram tendências aparentes de crescimento, nas quais o verão apresenta um aquecimento mais moderado em relação às outras estações. Vemos alguns dados esparsos em alguns deles, o que indica anos específicos mais frios ou mais quentes. Essa tendência é comprovada pelo teste de tendência de *Mann-Kendall*, ao nível de significância de 5%, que indicou que há uma tendência relevante nos dados.

#### 4.2.1.1 Análise Descritiva para os 4 meses juntos

Os valores apresentados na Tabela 6, na maioria dos meses, têm pouca variabilidade. A assimetria negativa em todas as distribuições indica que é mais comum ter meses mais quentes do que a média, mas que, eventualmente, ocorrem eventos frios significativos que puxam a média para baixo.

Tabela 6 – Estatísticas descritivas das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (°C) no período de 1980 a 2023 (INMET).

| Variável           | Média | Mediana | Q1    | Q2    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|--------------------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Temperatura Máxima | 25.68 | 26.0    | 14.20 | 18.30 | 2.53          | 0.10 | -0.14      |
| Temperatura Média  | 20.08 | 20.4    | 17.95 | 22.00 | 2.52          | 0.13 | -0.30      |
| Temperatura Mínima | 16.23 | 16.6    | 23.90 | 27.40 | 2.69          | 0.17 | -0.45      |



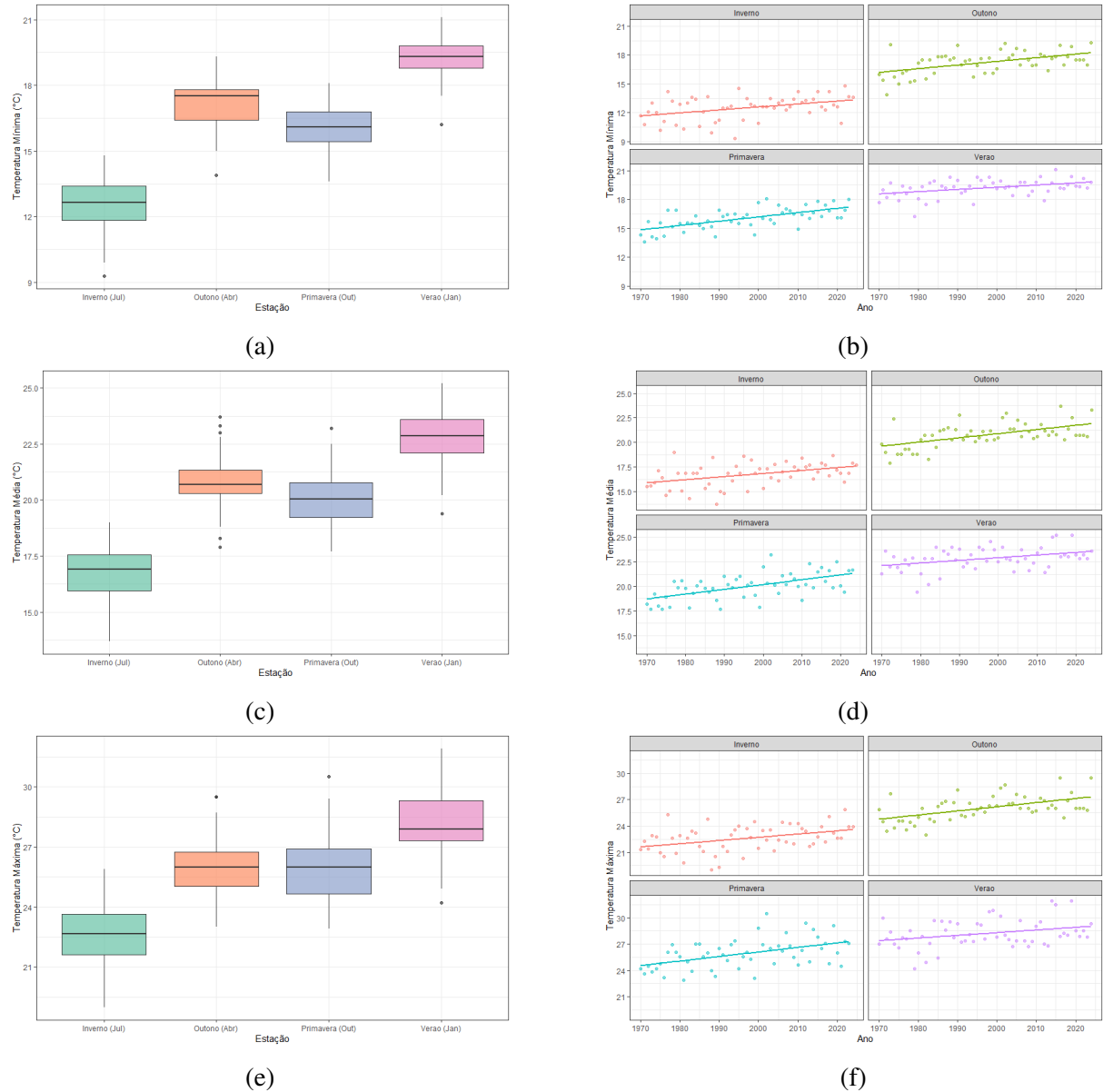


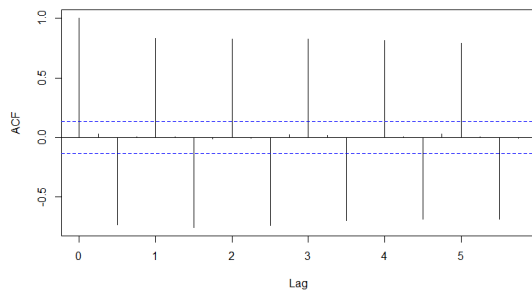
Figura 30 – (a), (c) e (d) box-plot; (b), (d) e (f) tendência das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (INMET).

#### 4.2.1.2 Análise da Série Temporal

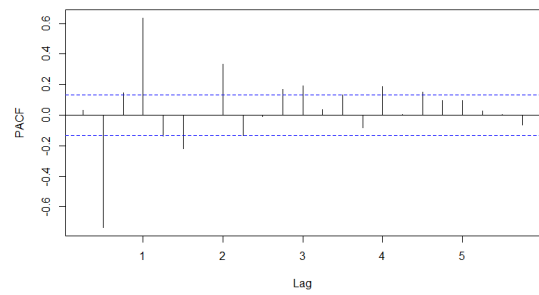
A série temporal é ajustada para a frequência de 4 meses. Os ACFs (Figuras 31a, 31c e 31e) para todos os casos apresentam um decaimento oscilatório e lento, evidenciando a existência de efeitos sazonais, com picos a cada dois *lags*; assim, temos evidências de que  $Q = 2$ , mas não apresentam nenhum corte claro em  $q$ . Os PACFs (Figuras 31b, 31d e 31f) também apresentam um padrão oscilatório, mas decaem rapidamente, não apresentam corte claro para  $p$  e vemos picos de 2 em 2 *lags*, o que pode indicar que  $P = 2$ .

O teste de estacionariedade ADF ao nível de significância de 5% indicou que as séries são estacionárias, o que indica que não precisam de transformações.

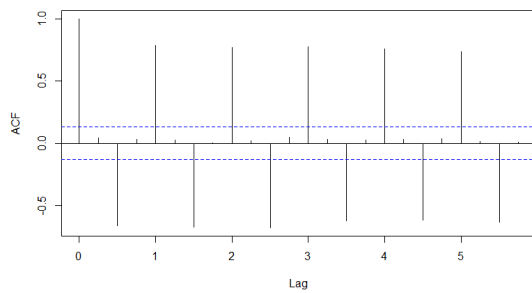
As decomposições das séries pelo método STL (Figuras 32a, 32b e 32c) mostram tendên-



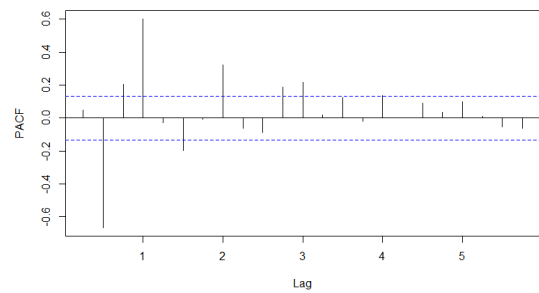
(a) ACF da temperatura mínima



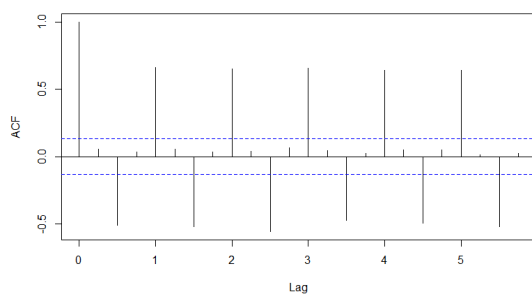
(b) PACF da temperatura mínima



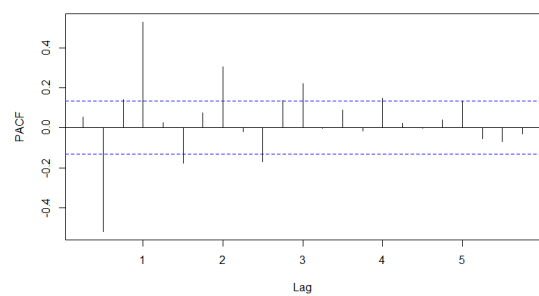
(c) ACF da temperatura média



(d) PACF da temperatura média



(e) ACF da temperatura máxima



(f) PACF da temperatura máxima

Figura 31 – Correlogramas das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (INMET).

cia e sazonalidade aparente.

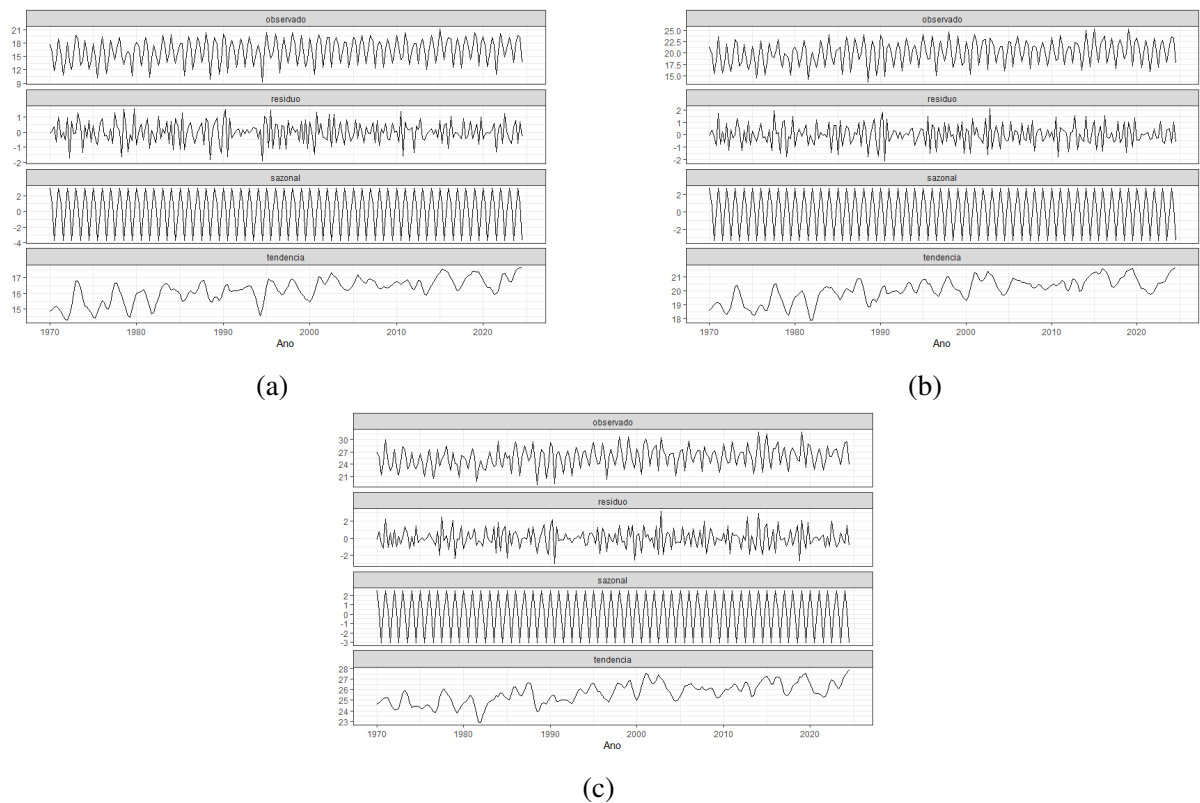


Figura 32 – Decomposição STL das temperaturas mínimas, médias e máximas mensais (INMET).

#### 4.2.1.3 Modelagem

A partir da análise da série temporal, podemos ajustar os modelos que foram escolhidos pelo AIC, observando se os resíduos são ruído branco.

Para a temperatura mínima, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os modelos que apresentaram melhor performance e parcimônia foram os modelos SARIMA listados na Tabela 7.

Tabela 7 – Modelos ajustados para a temperatura mínima mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 622.16 |
| SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 2) | 622.55 |
| SARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 2) | 622.85 |

Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 33. Levando em conta a parcimônia, o modelo escolhido, com o menor número de parâmetros e AIC baixo, é o SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) (Figura 33a).

Para a temperatura média, após ajustar diferentes especificações de modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os que apresentaram melhor

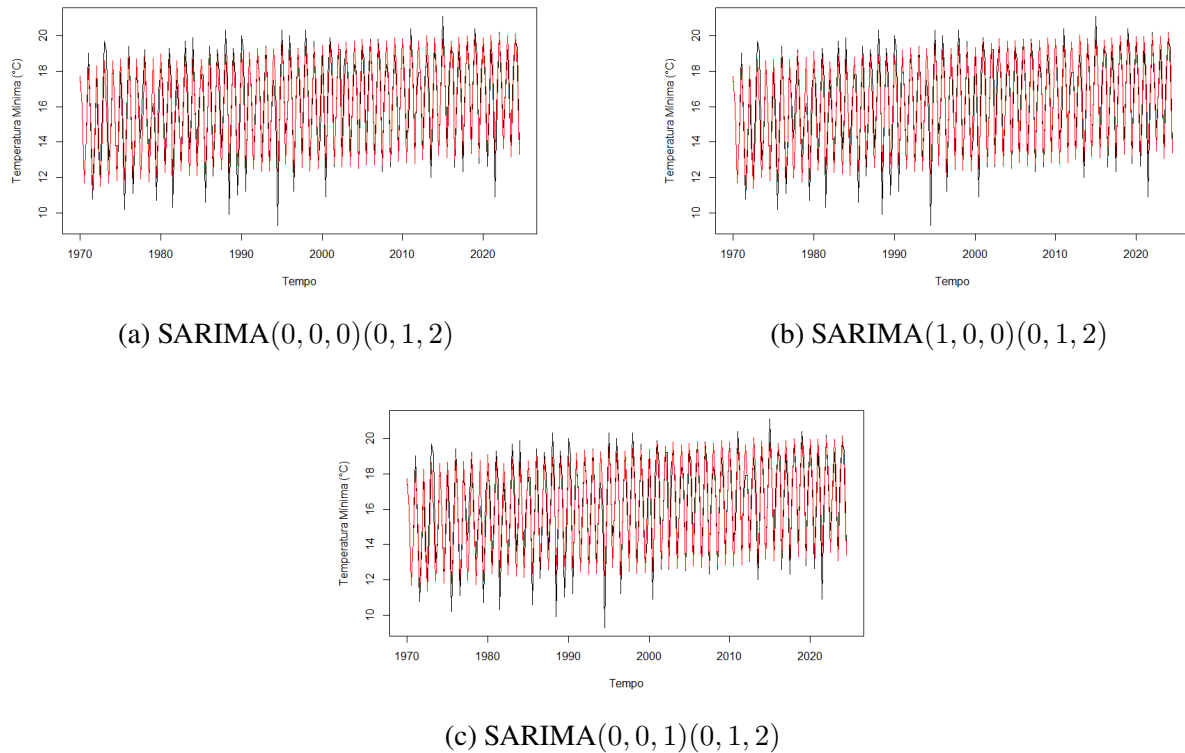


Figura 33 – Modelos ajustados da temperatura mínima mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

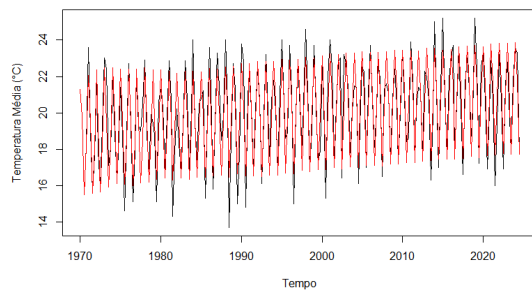
desempenho e parcimônia foram os modelos SARIMA, que estão listados na Tabela 8.

Tabela 8 – Modelos ajustados para a temperatura média mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

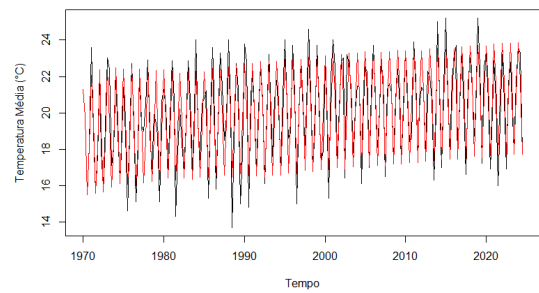
| Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 666.74 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 666.79 |
| SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) | 666.95 |

Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 34. Levando em conta a parcimônia, o modelo escolhido, com o menor número de parâmetros e AIC baixo, é o SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) (Figura 34a).

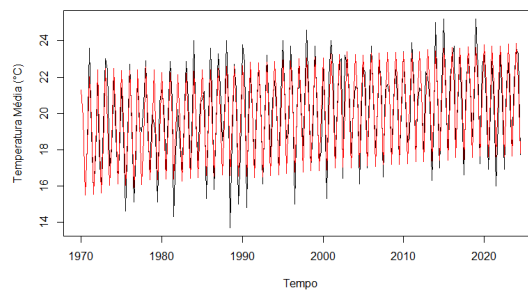
Para a temperatura máxima, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os que apresentaram a melhor performance e parcimônia foram os modelos SARIMA, que estão listados na Tabela 9.



(a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2)



(b) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1)



(c) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1)

Figura 34 – Modelos ajustados da temperatura média mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

Tabela 9 – Modelos ajustados para a temperatura máxima mensal (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) | 779.68 |
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 781.48 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 781.49 |

Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 35. levando em conta a parcimônia, o modelo escolhido, com o menor número de parâmetros e AIC baixo, é o SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) (Figura 35a).

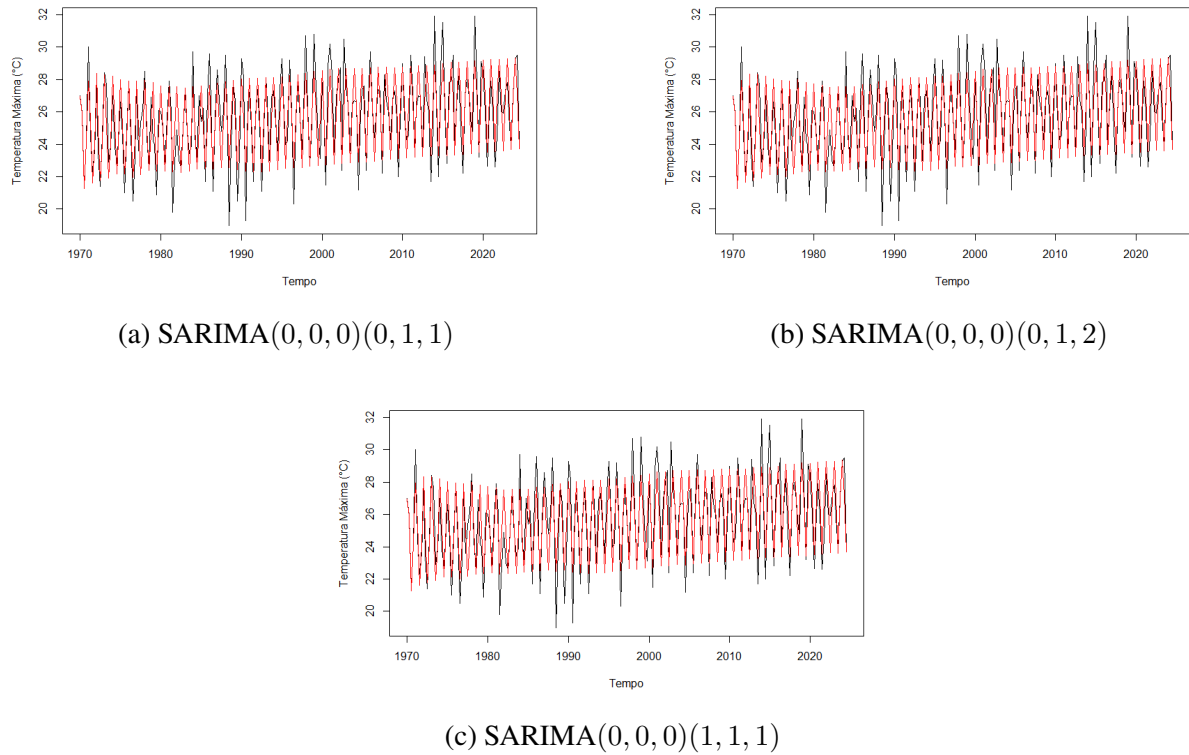


Figura 35 – Modelos ajustados de temperatura máxima mensal (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

#### 4.2.1.4 Análise Descritiva para os 4 meses separados

Os dados brutos da temperatura mínima são apresentados na Figura 36 e todos aparentam uma tendência crescente, com sazonalidade aparente.

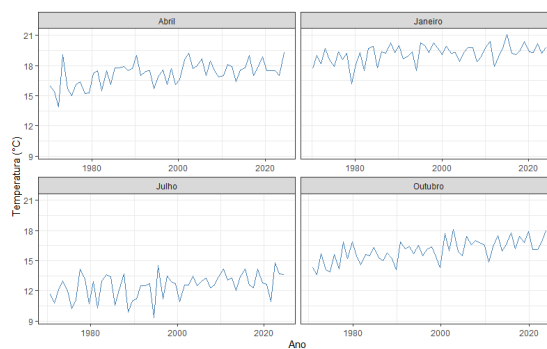


Figura 36 – Distribuição temporal da Temperatura Mínima em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.

Para a temperatura mínima, as estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 10 mostram que todos os 4 meses apresentam assimetria negativa. Janeiro e julho apresentam forte assimetria negativa, sugerindo a ocorrência de temperaturas mínimas atípicas mais quentes. A baixa variabilidade indica que as temperaturas mínimas nos 4 meses são estáveis.

Tabela 10 – Estatísticas descritivas da Temperatura Mínima Média (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Mês     | Média | Mediana | Q1    | Q3    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|---------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Janeiro | 19.18 | 19.3    | 18.80 | 19.80 | 0.90          | 0.05 | -0.78      |
| Abril   | 17.21 | 17.5    | 16.40 | 17.80 | 1.18          | 0.07 | -0.41      |
| Julho   | 12.49 | 12.65   | 11.85 | 13.40 | 1.26          | 0.10 | -0.51      |
| Outubro | 16.02 | 16.10   | 15.43 | 16.80 | 1.12          | 0.07 | -0.18      |

Os dados brutos da temperatura média são apresentados na Figura 37 e todos apresentam uma tendência crescente, com sazonalidade aparente.

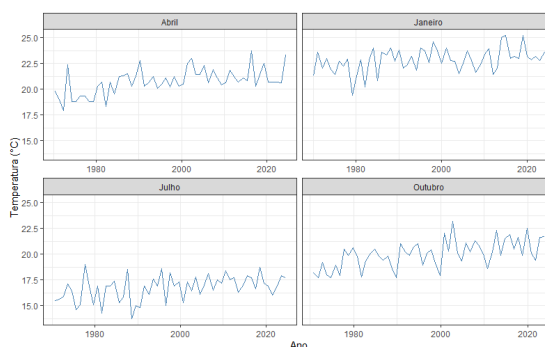


Figura 37 – Distribuição temporal da Temperatura Média em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.

Para a temperatura média, as estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 11 mostram que todos os meses têm baixa variabilidade e assimetria, com abril e outubro apresentando uma distribuição quase simétrica.

Tabela 11 – Estatísticas descritivas da Temperatura Média (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Mês     | Média | Mediana | Q1    | Q3    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|---------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Janeiro | 22.82 | 22.85   | 22.10 | 23.60 | 1.15          | 0.05 | -0.38      |
| Abril   | 20.76 | 20.70   | 20.30 | 21.35 | 1.24          | 0.06 | 0.02       |
| Julho   | 16.72 | 16.90   | 15.95 | 17.55 | 1.20          | 0.07 | -0.38      |
| Outubro | 20.01 | 20.05   | 19.23 | 20.78 | 1.33          | 0.07 | 0.05       |

Os dados brutos da temperatura máxima são apresentados na Figura 38 e todos apresentam uma tendência crescente, com sazonalidade aparente.

Para a temperatura máxima, as estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 12 mostram que todos os 4 meses apresentam baixa variabilidade e assimetrias moderadas. Outubro apresenta uma maior assimetria positiva, indicando que existem temperaturas atipicamente baixas.



Figura 38 – Distribuição temporal da Temperatura Máxima em São Paulo (INMET), de 1980 a 2023 para os 4 meses.

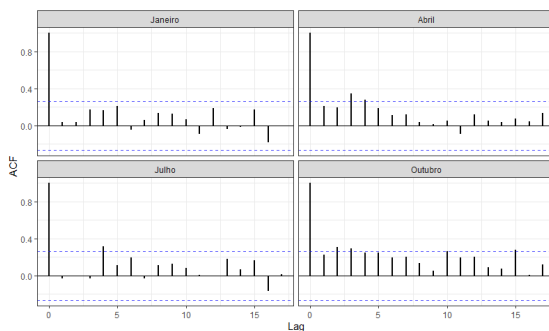
Tabela 12 – Estatísticas descritivas da Temperatura Máxima Média (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Mês     | Média | Mediana | Q1    | Q3    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|---------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Janeiro | 28.19 | 27.90   | 27.30 | 29.30 | 1.59          | 0.06 | 0.23       |
| Abril   | 26.04 | 26.00   | 25.05 | 26.75 | 1.42          | 0.06 | 0.25       |
| Julho   | 22.60 | 22.65   | 21.60 | 23.65 | 1.51          | 0.07 | -0.21      |
| Outubro | 25.91 | 26.00   | 24.65 | 26.90 | 1.71          | 0.07 | 0.40       |

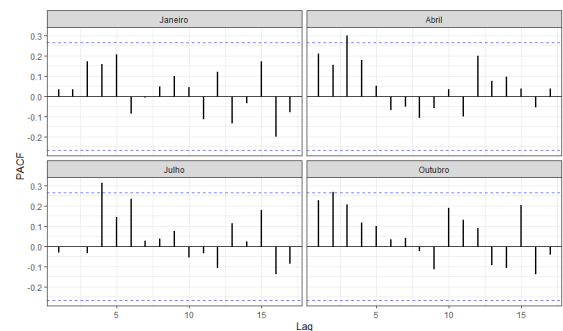
#### 4.2.1.5 Análise da Série Temporal para os 4 meses separados

Para a temperatura mínima, a série temporal é ajustada para a frequência de 1 mês. Os ACFs (Figura 39a) apresentam um padrão oscilatório, sem corte claro para janeiro, com cortes nos lags 3 e 4 para abril, 4 para julho e 2 e 3 para outubro.

Para os PACFs (Figura 39b), apresentam um padrão oscilatório; não há nenhum corte para janeiro e outubro, com cortes nos lags 3 para abril e 4 para julho.



(a) ACF



(b) PACF

Figura 39 – Correlogramas para os dados de Temperatura Mínima (INMET).

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

Para a temperatura média, a série temporal é ajustada para a frequência de 1 mês. Para os



ACFs (Figura 40a), apresentam um padrão oscilatório, sem corte claro para janeiro e outubro, com cortes nos *lags* 3 e 4 para abril e 4 para julho.

para os PACFs (Figura 40b), apresentam um padrão oscilatório; não há nenhum corte para janeiro e outubro, com cortes nos *lags* 3 para abril e 4 para julho.

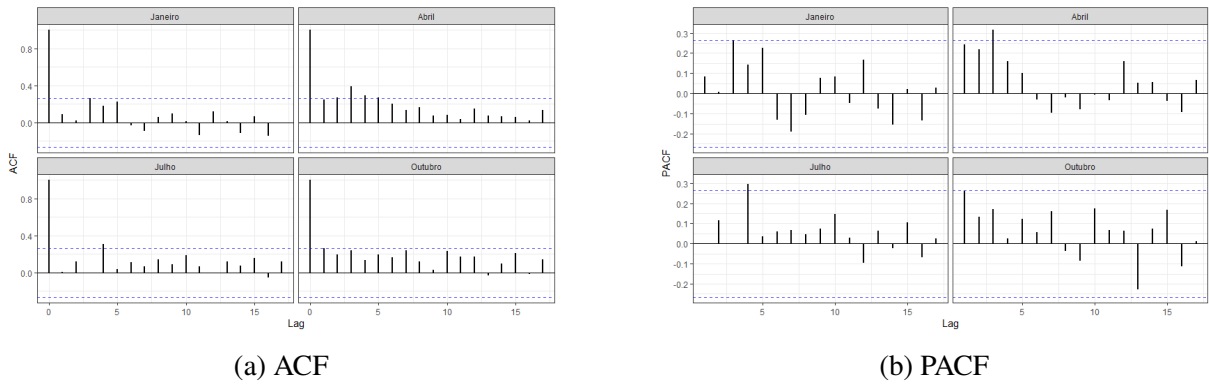


Figura 40 – Correlogramas para os dados de Temperatura Média (INMET).

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

Para a temperatura máxima, a série temporal é ajustada para a frequência de 1 mês. Para os ACFs (Figura 41a) apresentam um padrão oscilatório, sem corte claro para janeiro, julho e outubro e com cortes nos *lags* 3 e 5 para abril.

Para os PACFs (Figura 41b), apresentam um padrão oscilatório; não há nenhum corte para janeiro, julho e outubro e com um corte no *lag* 3 para abril.

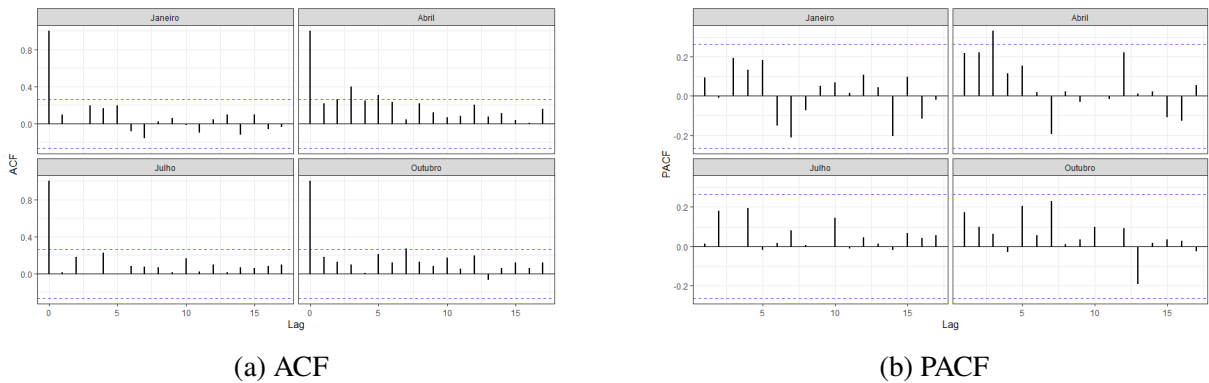


Figura 41 – Correlogramas para os dados de Temperatura Máxima (INMET).

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

#### 4.2.1.6 Modelagem para os 4 meses separados

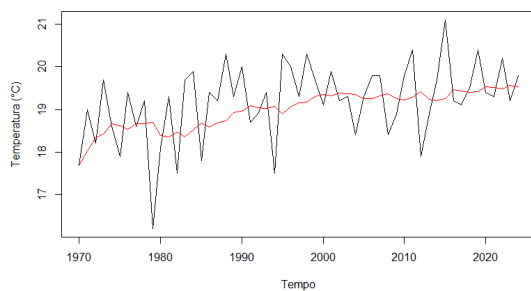
Para a temperatura mínima, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os que apresentaram a melhor

performance e parcimônia estão listados na Tabela 13.

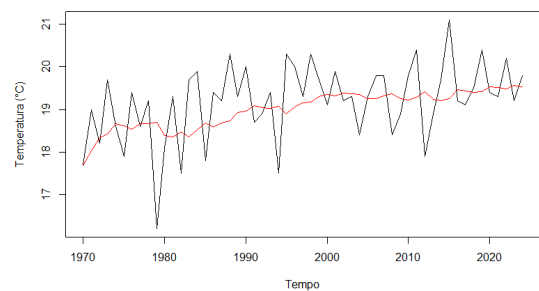
Tabela 13 – Modelos ajustados para a Temperatura Mínima Média por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    | Modelo         | AIC    |
|--------------------------|--------|----------------|--------|
| <b>Janeiro</b>           |        | <b>Julho</b>   |        |
| ARIMA(0, 1, 1)           | 143.98 | ARIMA(5, 1, 0) | 180.22 |
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) | 143.98 | ARIMA(0, 1, 4) | 181.51 |
| ARIMA(1, 1, 1)           | 145.24 | ARIMA(4, 1, 0) | 183.97 |
| <b>Abril</b>             |        | <b>Outubro</b> |        |
| ARIMA(2, 1, 1)           | 166.85 | ARIMA(2, 1, 2) | 150.86 |
| ARIMA(3, 1, 0)           | 167.11 | ARIMA(0, 1, 1) | 151.73 |
| ARIMA(0, 1, 4)           | 167.85 | ARIMA(1, 1, 1) | 151.98 |

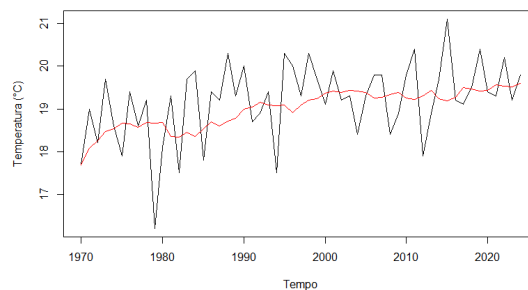
Podemos verificar os ajustes dos modelos às séries originais, conforme mostrado nas Figuras 42, 43, 44 e 45. Prezando pela parcimônia, os modelos escolhidos foram ARIMA(0, 1, 1) (Figura 42a) para janeiro, ARIMA(2, 1, 1) (Figura 43a) para abril, ARIMA(5, 1, 0) (Figura 44a) para julho e ARIMA(2, 1, 2) (Figura 45a) para outubro.



(a) ARIMA(0, 1, 1)

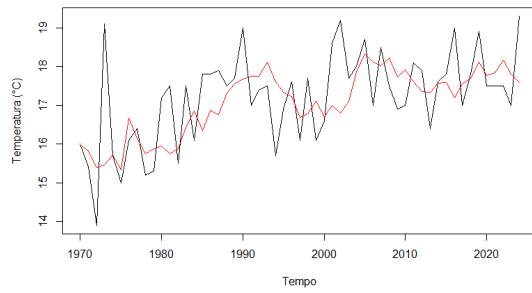


(b) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1)

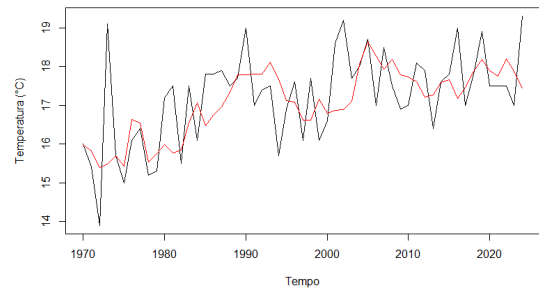


(c) ARIMA(1, 1, 1)

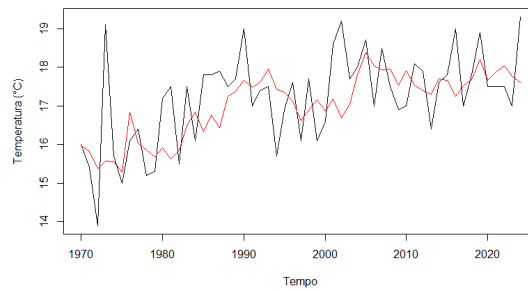
Figura 42 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(2, 1, 1)

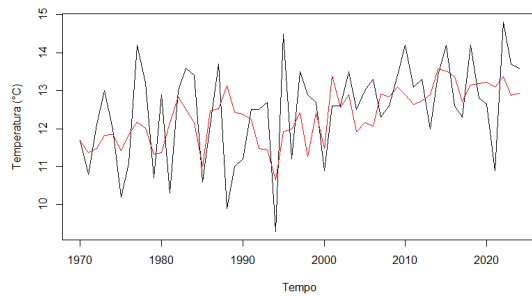


(b) ARIMA(3, 1, 0)

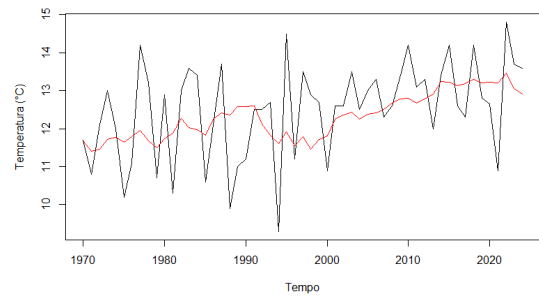


(c) ARIMA(0, 1, 4)

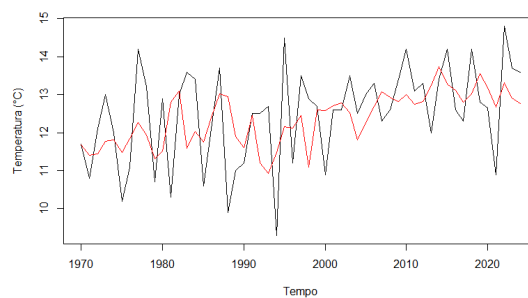
Figura 43 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(5, 1, 0)



(b) ARIMA(0, 1, 4)



(c) ARIMA(4, 1, 0)

Figura 44 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

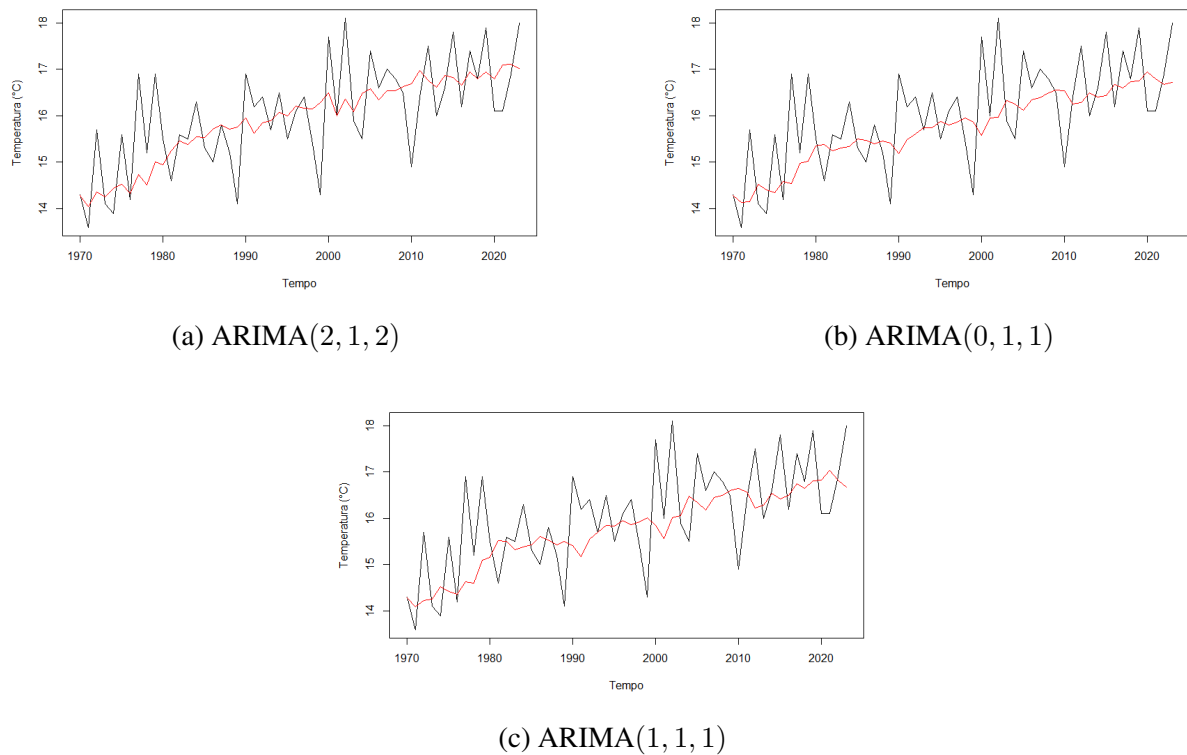


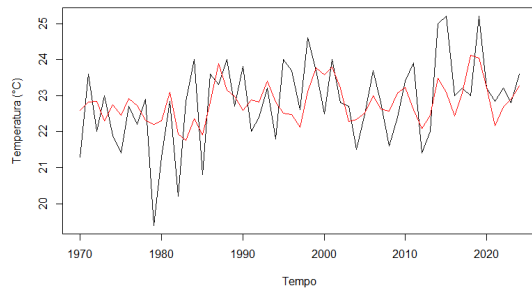
Figura 45 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

Para a temperatura média, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os que apresentaram melhor desempenho e parcimônia estão listados na Tabela 14.

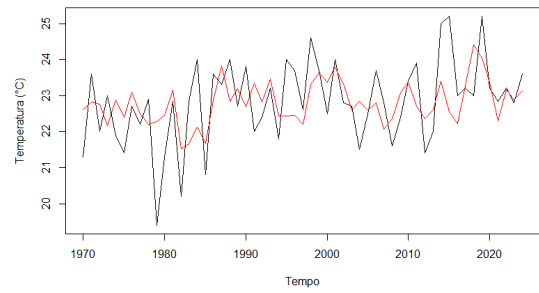
Tabela 14 – Modelos ajustados para a Temperatura Média por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo         | AIC    | Modelo         | AIC    |
|----------------|--------|----------------|--------|
| <b>Janeiro</b> |        | <b>Julho</b>   |        |
| ARMA(2, 3)     | 171.52 | ARIMA(0, 1, 1) | 175.7  |
| ARMA(1, 3)     | 171.85 | ARIMA(1, 1, 1) | 176.38 |
| MA(4)          | 172.09 | ARIMA(1, 1, 2) | 176.82 |
| <b>Abril</b>   |        | <b>Outubro</b> |        |
| ARIMA(0, 1, 1) | 168.34 | ARIMA(0, 1, 1) | 174.39 |
| ARIMA(0, 1, 2) | 168.84 | ARIMA(0, 1, 2) | 176.36 |
| ARIMA(1, 1, 1) | 169.26 | ARIMA(1, 1, 1) | 176.36 |

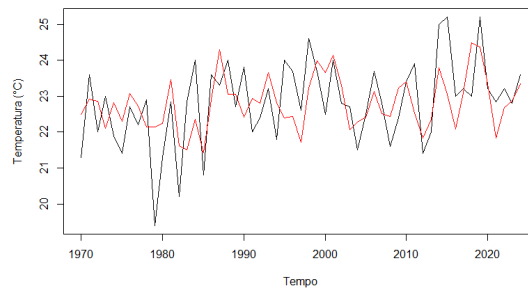
Podemos verificar os ajustes às séries originais nas Figuras 46, 47, 48 e 49. Prezando pela parcimônia, os modelos escolhidos foram os MA(4) (Figura 46c) para janeiro e ARIMA(0, 1, 1) (Figuras 47a, 48a e 49a) para abril, julho e outubro.



(a) ARMA(2,3)

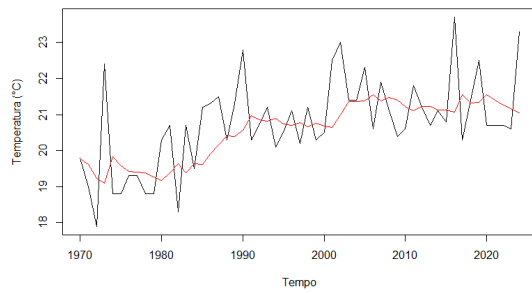


(b) ARMA(1,3)

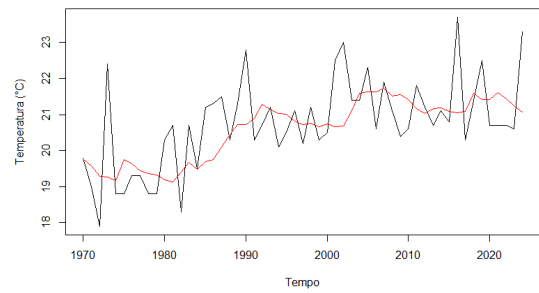


(c) MA(4)

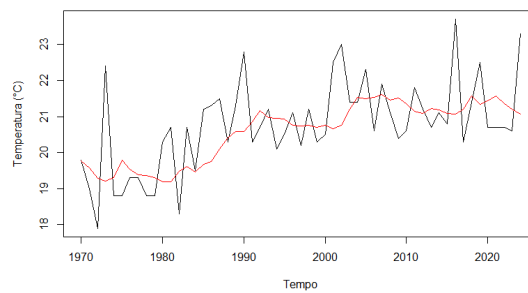
Figura 46 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0,1,1)

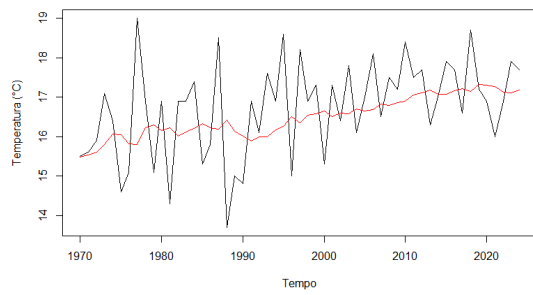


(b) ARIMA(0,1,2)

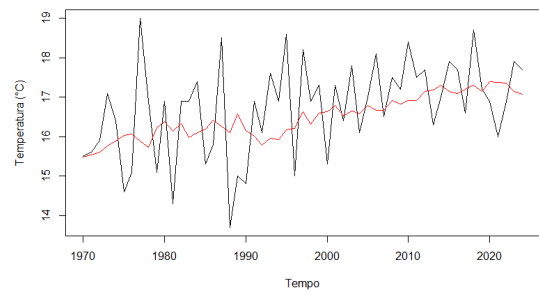


(c) ARIMA(1,1,1)

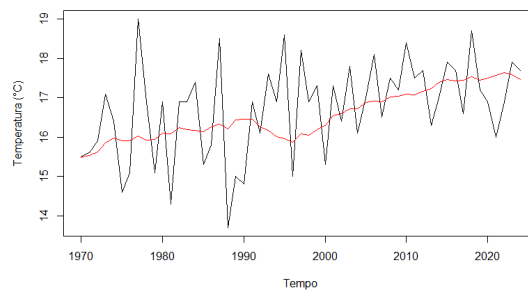
Figura 47 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0, 1, 1)

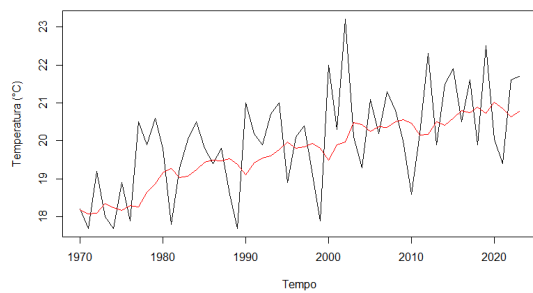


(b) ARIMA(1, 1, 1)

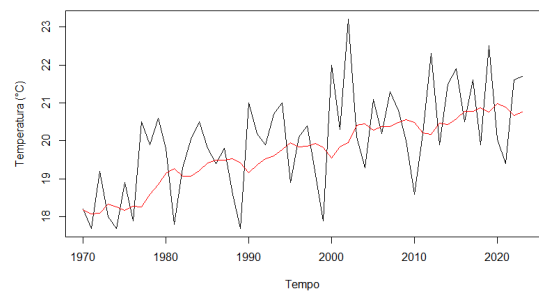


(c) ARIMA(1, 1, 2)

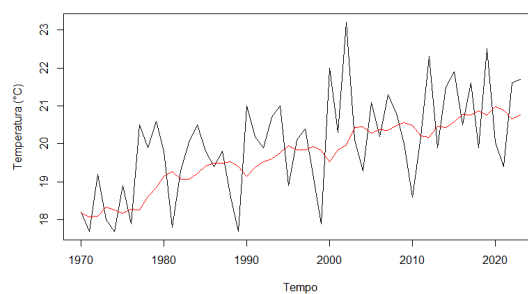
Figura 48 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0, 1, 1)



(b) ARIMA(0, 1, 2)



(c) ARIMA(1, 1, 1)

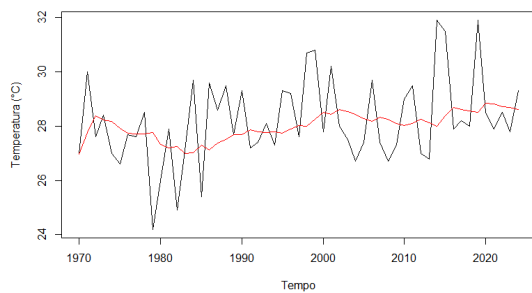
Figura 49 – Modelos ajustados da Temperatura Média em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

Para a temperatura máxima, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os que apresentaram melhor desempenho e parcimônia estão listados na Tabela 15.

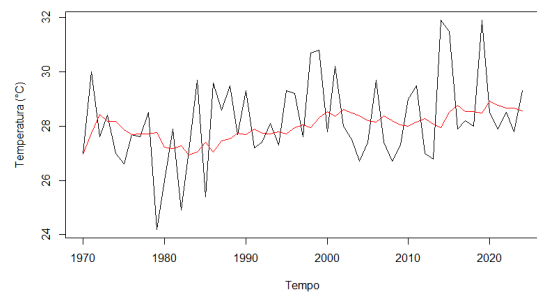
Tabela 15 – Modelos ajustados para a Temperatura Máxima Média por mês (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    | Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|--------------------------|--------|
| <b>Janeiro</b>           |        | <b>Julho</b>             |        |
| ARIMA(0, 1, 1)           | 208.44 | ARIMA(0, 1, 1)           | 200.61 |
| ARIMA(0, 1, 2)           | 210.39 | ARIMA(1, 1, 1)           | 201.59 |
| SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) | 210.4  | SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) | 201.59 |
| <b>Abril</b>             |        | <b>Outubro</b>           |        |
| ARIMA(0, 1, 1)           | 184.56 | ARIMA(0, 1, 1)           | 206.6  |
| ARIMA(0, 1, 2)           | 185.16 | ARIMA(2, 1, 2)           | 208.35 |
| ARIMA(1, 1, 1)           | 185.48 | SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) | 208.59 |

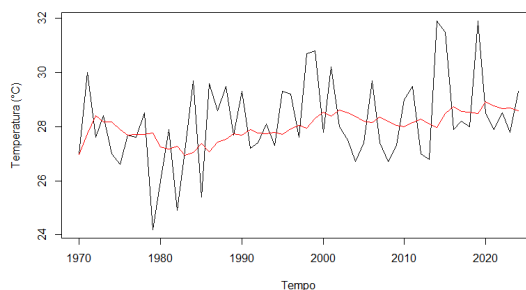
Podemos verificar os ajustes às séries originais, conforme mostrado nas Figuras 50, 51, 52 e 53. Prezando pela parcimônia, o modelo escolhido para todos foi o ARIMA(0, 1, 1) (Figuras 50a, 51a, 52a e 53a).



(a) ARIMA(0, 1, 1)

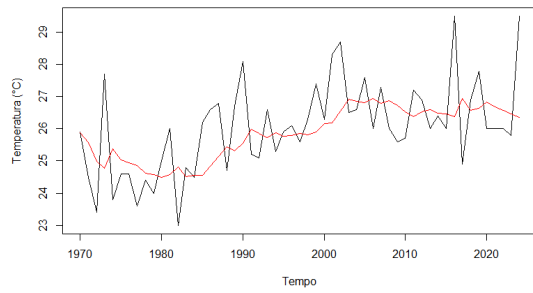


(b) ARIMA(0, 1, 2)

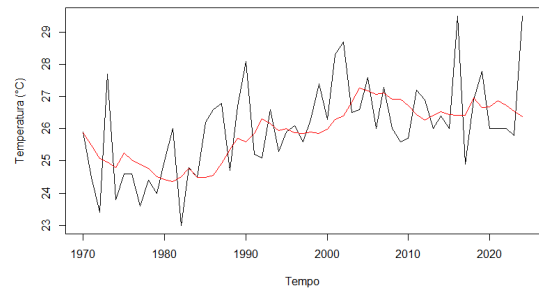


(c) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1)

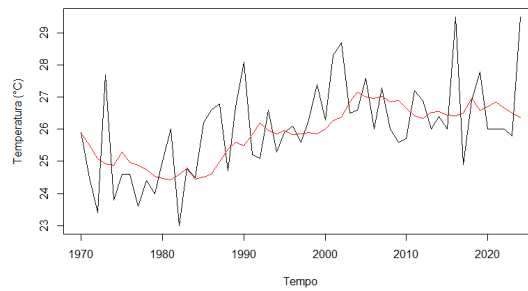
Figura 50 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Janeiro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0, 1, 1)

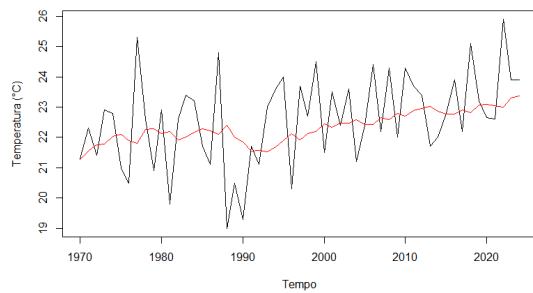


(b) ARIMA(0, 1, 2)

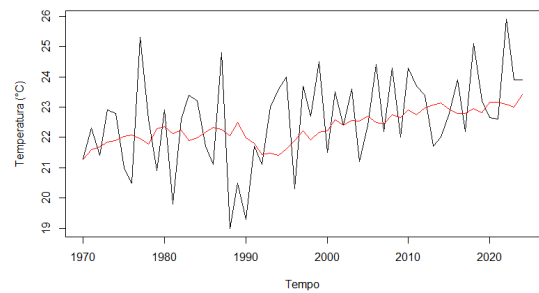


(c) ARIMA(1, 1, 1)

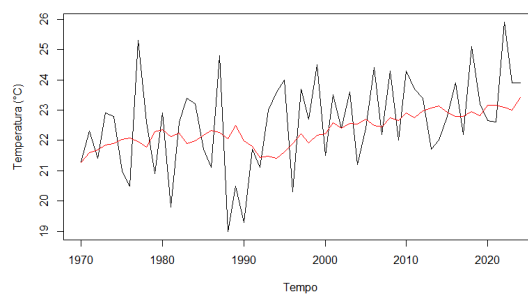
Figura 51 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Abril (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(0, 1, 1)



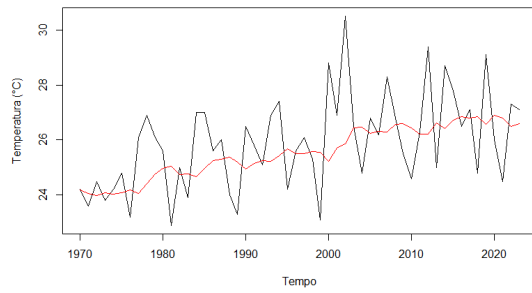
(b) ARIMA(1, 1, 1)



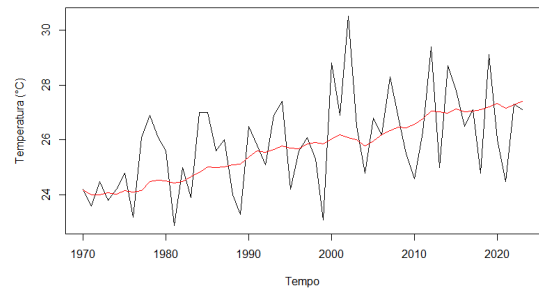
(c) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1)

Figura 52 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Julho (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

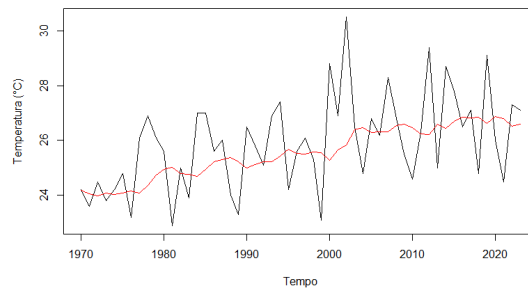




(a) ARIMA(0, 1, 1)



(b) ARIMA(2, 1, 2)

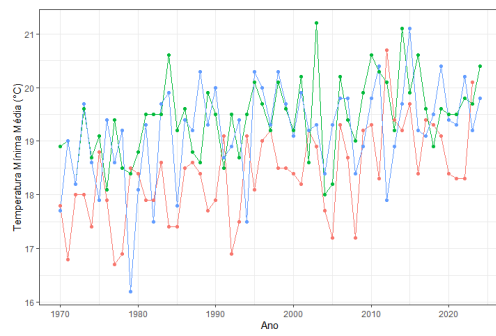


(c) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1)

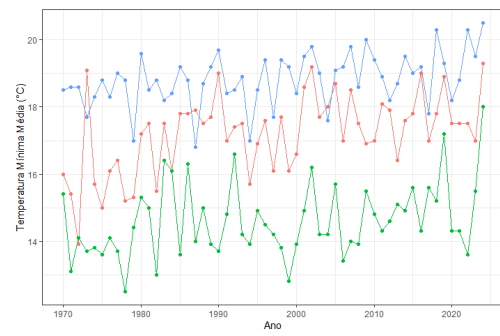
Figura 53 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima em Outubro (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

#### 4.2.2 Dados de Temperatura Mensais - Para os 12 meses

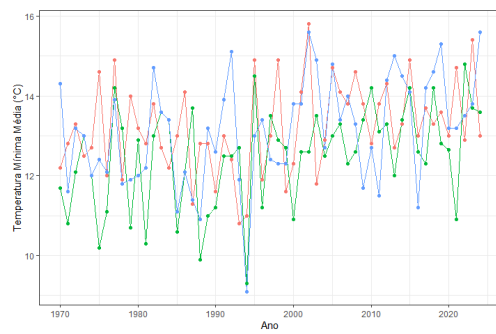
Os dados brutos da Temperatura Mensal para cada estação do ano, apresentados nas Figuras 54, 55 e 56; mostram uma possível tendência crescente e sazonalidade em todas as estações.



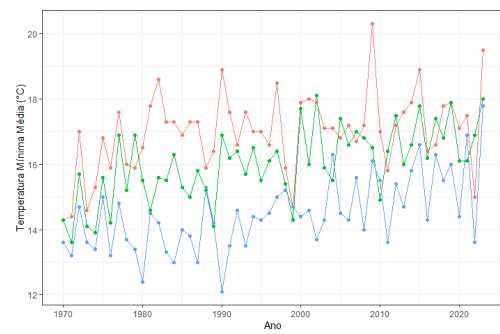
(a) Verão



(b) Outono

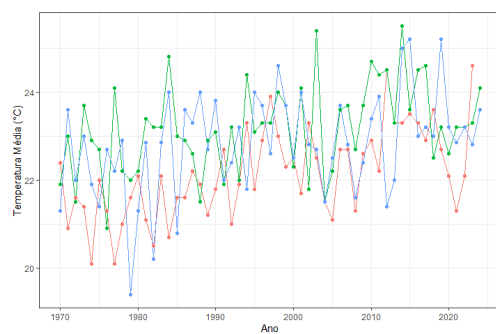


(c) Inverno

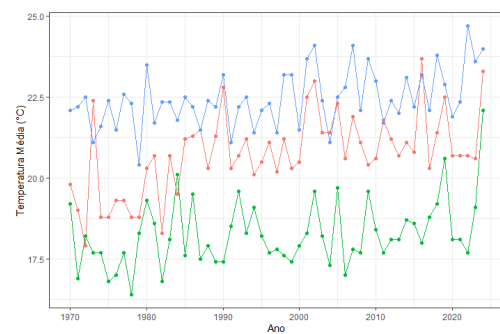


(d) Primavera

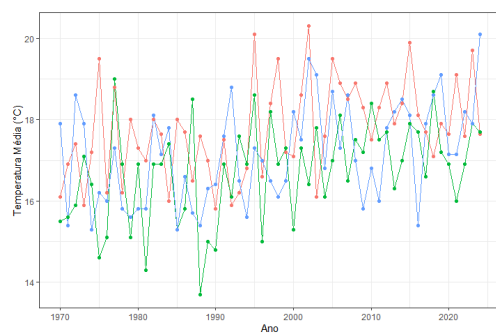
Figura 54 – Distribuição temporal da Temperatura Mínima Média Mensal em São Paulo (INMET) para cada estação do ano.



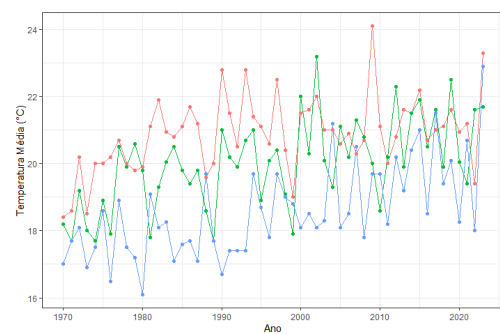
(a) Verão



(b) Outono



(c) Inverno



(d) Primavera

Figura 55 – Distribuição temporal da Temperatura Média Mensal em São Paulo (INMET) para cada estação do ano.

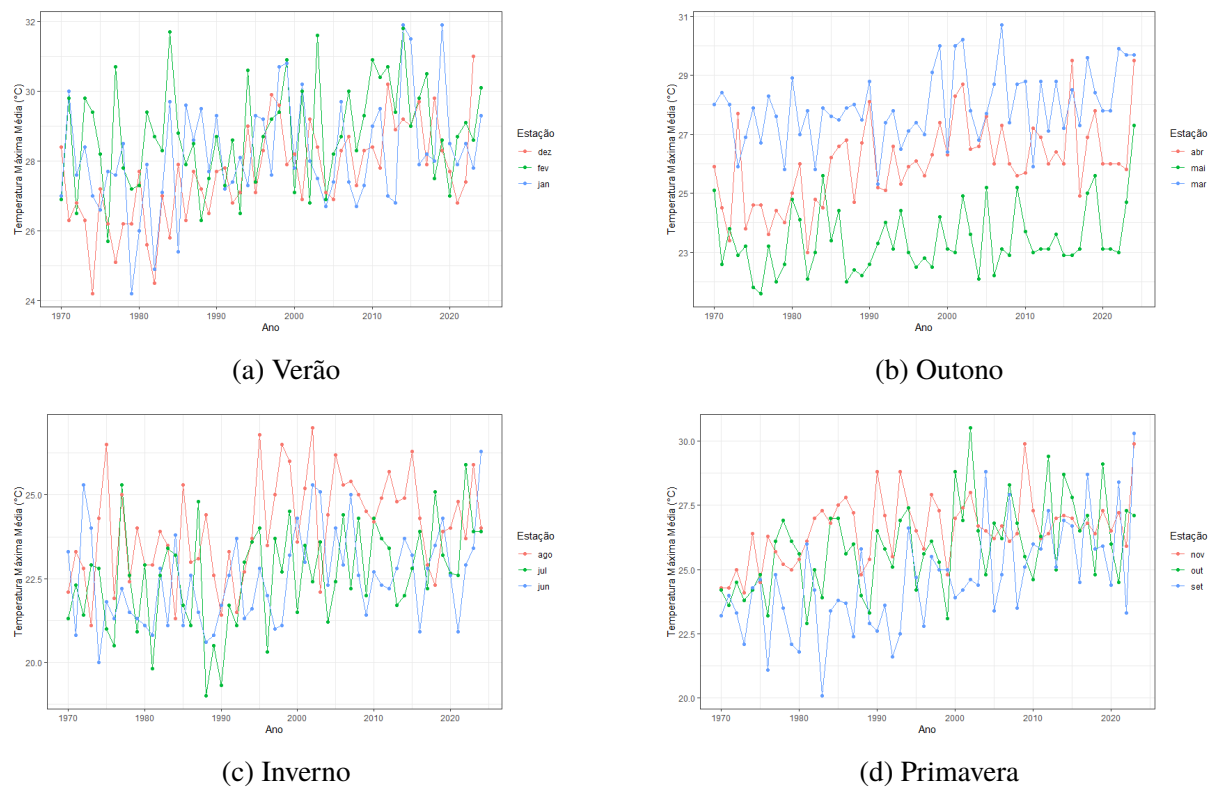


Figura 56 – Distribuição temporal da Temperatura Máxima Média Mensal em São Paulo (INMET) para cada estação do ano.

#### 4.2.2.1 Análise Descritiva das Temperaturas Mensais para os 12 meses

Para a temperatura mínima, as estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 16 mostram que todas as estações do ano apresentam baixa variabilidade e baixa assimetria negativa, com exceção da primavera, cuja assimetria é próxima de zero.

Tabela 16 – Estatísticas descritivas da Temperatura Mínima Média Mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Estação   | Média | Mediana | Q1    | Q3    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|-----------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Verão     | 19.01 | 19.20   | 18.40 | 19.60 | 0.94          | 0.05 | -0.32      |
| Outono    | 16.88 | 17.50   | 15.10 | 18.60 | 2.22          | 0.12 | -0.30      |
| Inverno   | 12.94 | 13.00   | 12.10 | 13.80 | 1.30          | 0.10 | -0.27      |
| Primavera | 15.83 | 15.90   | 14.53 | 17.00 | 1.55          | 0.10 | 0.01       |

Pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, todas as estações apresentam uma tendência significativa nos dados.

Para a temperatura média, as estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 17 mostram que todas as estações do ano possuem baixa variabilidade e assimetrias próximas de zero. Isso indica pouca influência de valores extremos; isto é, temperaturas mais estáveis.

Tabela 17 – Estatísticas descritivas da Temperatura Média Mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Estação   | Média | Mediana | Q1    | Q3    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|-----------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Verão     | 22.72 | 22.80   | 21.90 | 23.40 | 1.14          | 0.05 | -0.06      |
| Outono    | 20.49 | 20.70   | 18.60 | 22.20 | 2.02          | 0.10 | -0.14      |
| Inverno   | 17.21 | 17.20   | 16.20 | 18.00 | 1.27          | 0.07 | 0.01       |
| Primavera | 19.83 | 20.00   | 18.50 | 21.00 | 1.60          | 0.08 | -0.04      |

Pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, todas as estações apresentam uma tendência significativa nos dados.

Para a temperatura máxima, as estatísticas descritivas apresentadas na Tabela 18 mostram que todas as estações do ano apresentam baixa variabilidade e baixas assimetrias positivas, com exceção da primavera, cuja assimetria é negativa, mas também próxima de zero.

Tabela 18 – Estatísticas descritivas da Temperatura Máxima Média Mensal para cada estação do ano (INMET) no período de 1980 a 2023.

| Estação   | Média | Mediana | Q1    | Q3    | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|-----------|-------|---------|-------|-------|---------------|------|------------|
| Verão     | 28.20 | 28.05   | 27.10 | 29.30 | 1.56          | 0.06 | 0.13       |
| Outono    | 25.79 | 26.00   | 23.70 | 27.60 | 2.24          | 0.09 | 0.01       |
| Inverno   | 23.05 | 22.90   | 21.80 | 24.00 | 1.62          | 0.07 | 0.15       |
| Primavera | 25.68 | 25.80   | 24.40 | 26.98 | 1.88          | 0.07 | -0.07      |

Pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, todas as estações apresentam uma tendência significativa nos dados.

#### 4.2.2.2 Análise da Série Temporal das Temperatura Mensais para os 12 meses

Para a temperatura mínima, com frequência de 3 meses para cada estação do ano. Todos os ACFs (Figura 57a) apresentam um decaimento oscilatório, o que mostra que existem efeitos sazonais. Para o verão, apresenta picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar que  $Q = 3$ . Para o outono, apresenta picos a cada 1 *lag*, o que pode indicar que  $Q = 1$ . Para a primavera, apresenta picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar que  $Q = 3$ . Nenhuma das estações apresenta um corte claro para  $q$ .

O PACF (Figura 57b) também apresenta um padrão oscilatório. Para o verão, apresenta picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar que  $P = 3$ . Para o outono, apresenta picos a cada 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ . Para a primavera, apresenta picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar que  $P = 3$ . Nenhuma das estações apresenta um corte claro para  $p$ .

Para a temperatura média com frequência de 3 meses para cada estação do ano. Todos os ACFs (Figura 58a) apresentam um decaimento oscilatório, o que mostra que existem efeitos sazonais. Para o verão inverno e primavera, apresentam picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar

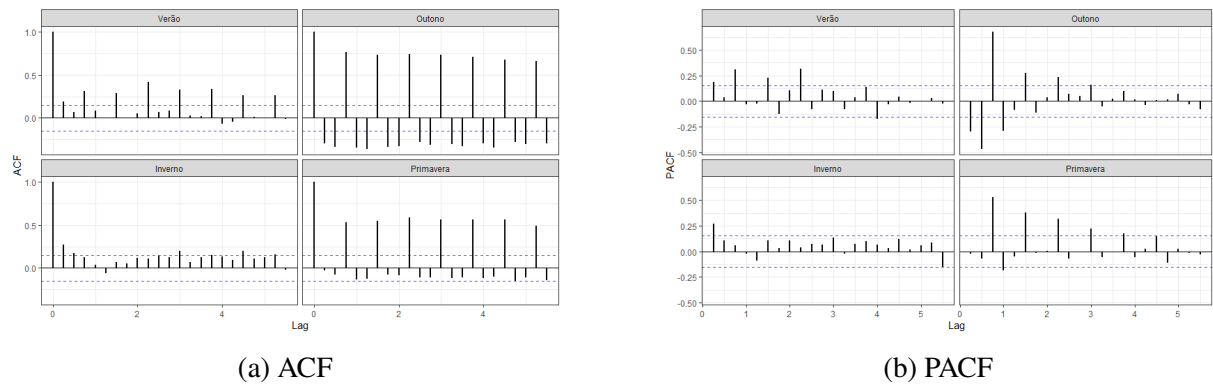


Figura 57 – Correlogramas da Temperatura Mínima Média Mensal para cada estação do ano (INMET).

que  $Q = 3$ . Para o outono, apresenta picos a cada 1 *lag*, o que pode indicar que  $Q = 1$ . Nenhuma das estações apresenta um corte claro para  $q$ .

O PACF (Figura 58b) também apresenta um padrão oscilatório. Para o verão e para a primavera, apresentam picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar que  $P = 3$ . Para o outono, apresenta picos a cada 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ . Nenhuma das estações apresenta um corte claro para  $p$ .

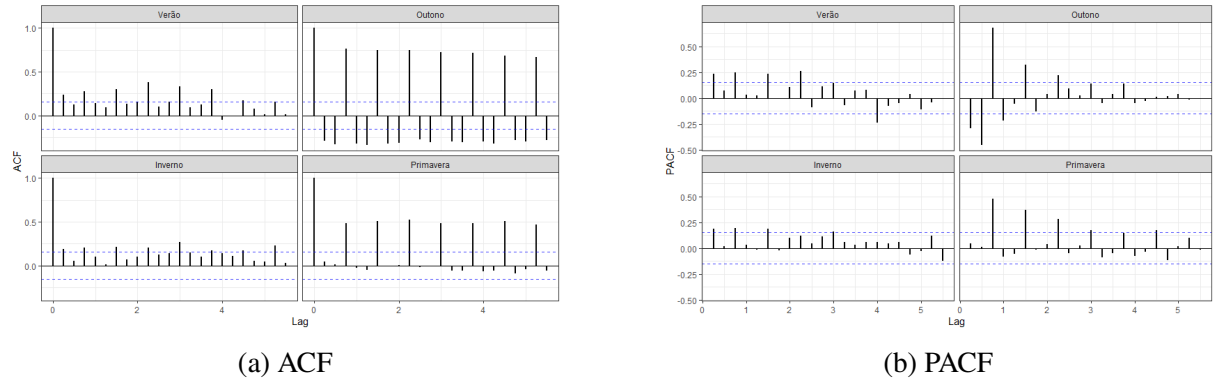


Figura 58 – Correlogramas da Temperatura Média Mensal para cada estação do ano (INMET).

Para a temperatura máxima, com frequência de 3 meses para cada estação do ano. Todos os ACFs (Figura 59a) apresentam um decaimento oscilatório, o que mostra que existem efeitos sazonais. Para o verão inverno e primavera, apresentam picos a cada 3 *lags*, o que pode indicar que  $Q = 3$ . Para o outono apresenta picos a cada 1 ou 3 *lags*, o que pode indicar que  $Q = 1$  ou  $Q = 3$ . Nenhuma das estações apresenta um corte claro para  $q$ .

O PACF (Figura 59b) também apresenta um padrão oscilatório. Todos apresentam picos a cada 1, 2 ou 3 *lags*, o que pode indicar que  $P = 1$ ,  $P = 2$  ou  $P = 3$ . Nenhuma das estações apresenta um corte claro para  $p$ .

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que todos são estacionários; logo, não precisam de transformações.

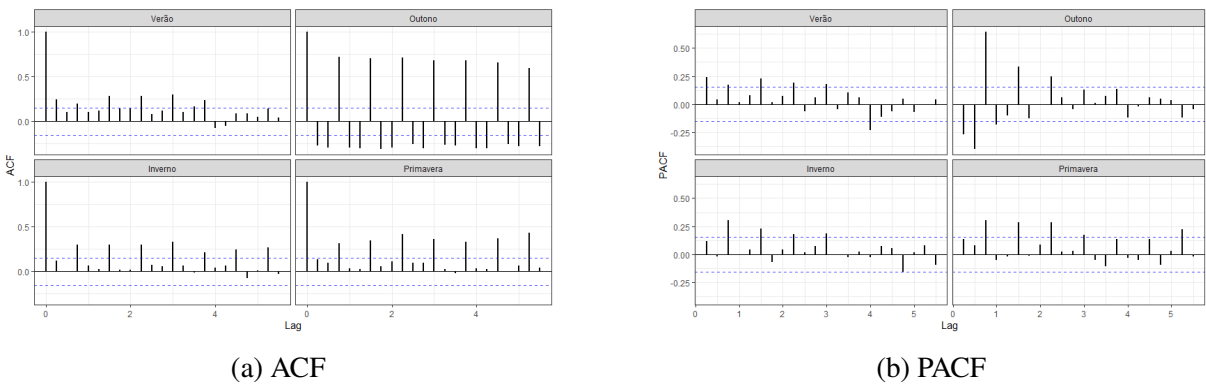


Figura 59 – Correlogramas da Temperatura Máxima Média Mensal para cada estação do ano (INMET).

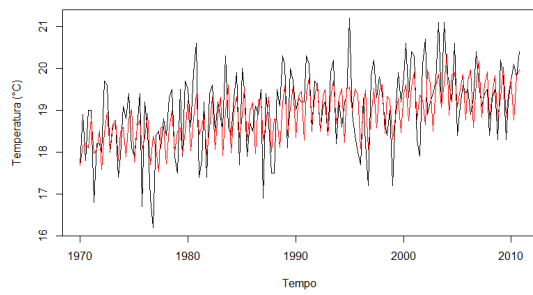
4.2.2.3 Modelagem das Temperatura Mensais para os 12 meses

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os modelos que apresentaram melhor desempenho e parcimônia foram os listados na Tabela 19.

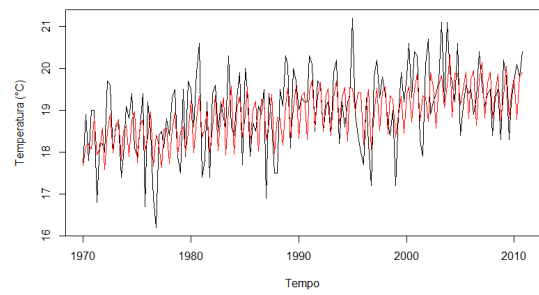
Tabela 19 – Modelos ajustados para a Temperatura Mínima Média por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    | Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|--------------------------|--------|
| <b>Verão</b>             |        | <b>Inverno</b>           |        |
| ARIMA(3, 1, 3)           | 386.61 | ARIMA(2, 1, 3)           | 535.71 |
| ARIMA(2, 1, 4)           | 386.85 | ARIMA(1, 1, 1)           | 536.5  |
| SARIMA(3, 1, 3)(3, 0, 0) | 389.14 | SARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 0) | 537.85 |
| <b>Outono</b>            |        | <b>Primavera</b>         |        |
| ARIMA(3, 1, 3)           | 474.1  | SARIMA(3, 1, 4)(1, 0, 0) | 480.86 |
| ARIMA(2, 1, 4)           | 474.42 | SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0) | 482.76 |
| SARIMA(3, 1, 3)(0, 0, 3) | 478.03 | SARIMA(2, 1, 3)(0, 0, 1) | 482.95 |

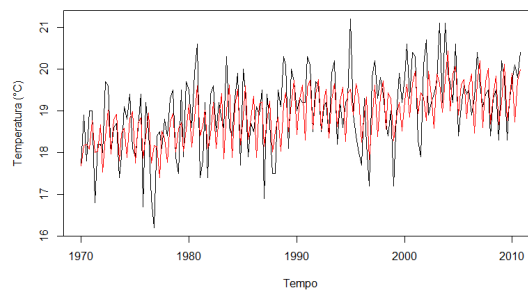
Podemos verificar os ajustes às séries originais, conforme mostrado nas Figuras 60, 61, 62 e 63. Prezando pela parcimônia, os modelos escolhidos foram ARIMA(3, 1, 3) (Figuras 60a e 61a) para o verão e outono, ARIMA(2, 1, 3) (Figura 62a) para o inverno e SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0) (Figura 63b) para a primavera.



(a) ARIMA(3, 1, 3)

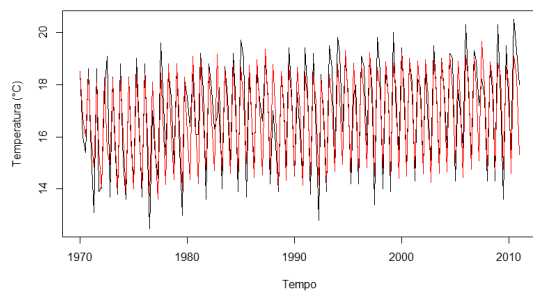


(b) ARIMA(2, 1, 4)

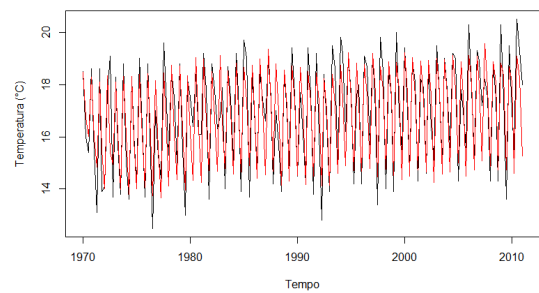


(c) SARIMA(3, 1, 3)(3, 0, 0)

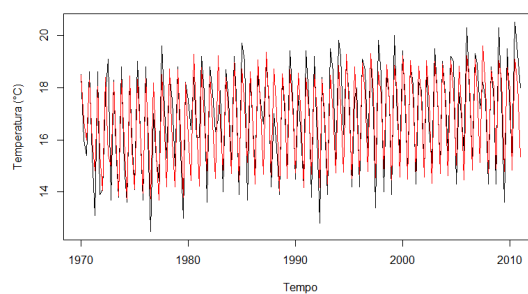
Figura 60 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(3, 1, 3)

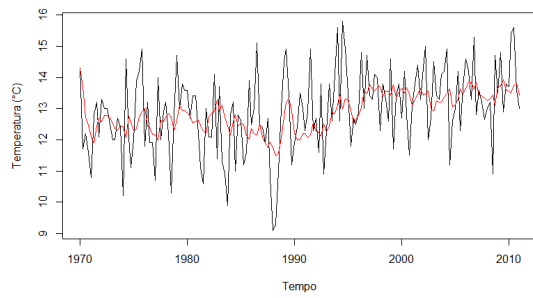


(b) ARIMA(2, 1, 4)

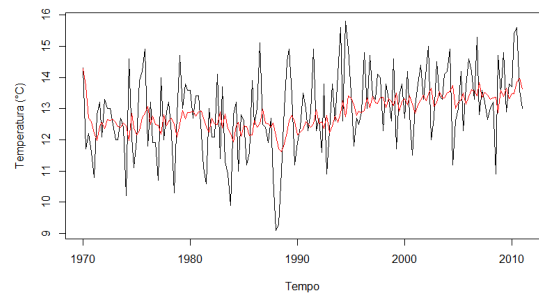


(c) SARIMA(3, 1, 3)(0, 0, 3)

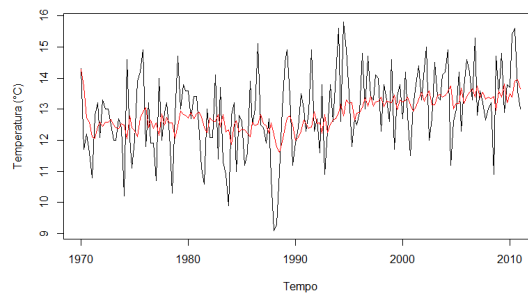
Figura 61 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(2, 1, 3)

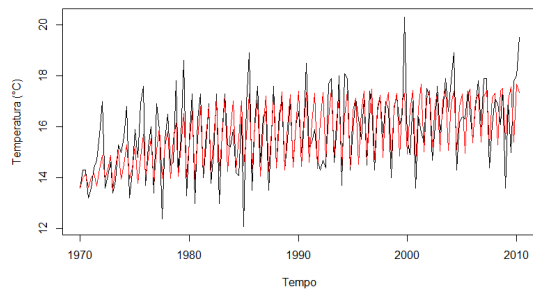


(b) ARIMA(1, 1, 1)

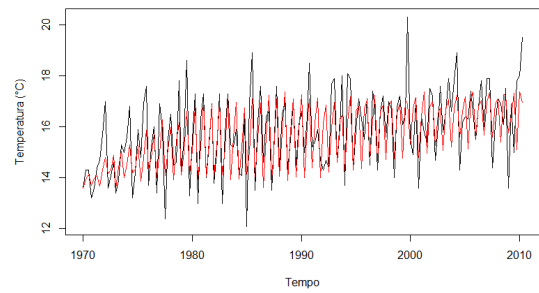


(c) SARIMA(1, 1, 1)(1, 0, 0)

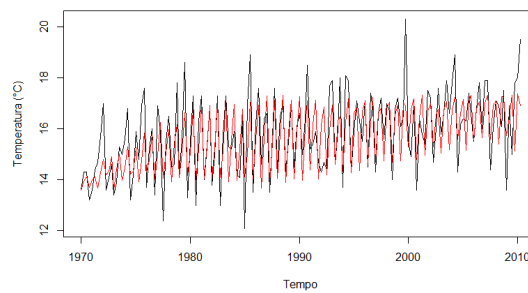
Figura 62 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) SARIMA(3, 1, 4)(1, 0, 0)



(b) SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0)



(c) SARIMA(2, 1, 3)(0, 0, 1)

Figura 63 – Modelos ajustados da Temperatura Mínima Mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

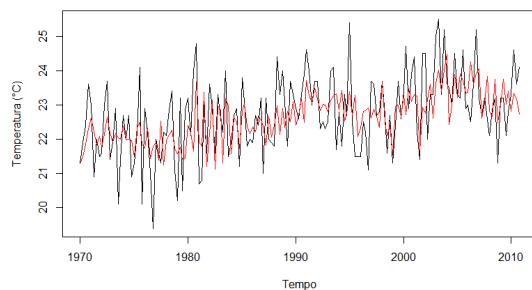


Para a temperatura média, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os que apresentaram melhor desempenho e parcimônia foram os modelos listados na Tabela 20.

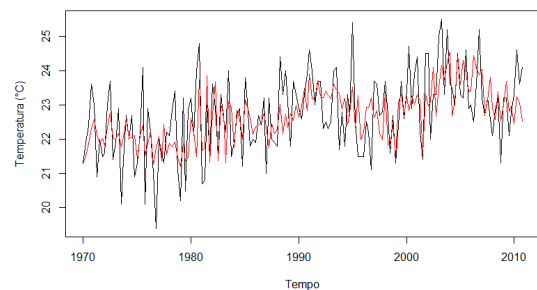
Tabela 20 – Modelos ajustados para a Temperatura Média por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    | Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|--------------------------|--------|
| <b>Verão</b>             |        | <b>Inverno</b>           |        |
| SARIMA(2, 1, 4)(2, 0, 3) | 463.03 | ARIMA(2, 1, 3)           | 519.89 |
| SARIMA(2, 1, 4)(3, 0, 2) | 463.31 | ARIMA(4, 1, 4)           | 520.37 |
| SARIMA(2, 1, 3)(2, 0, 3) | 464.48 | SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0) | 521.83 |
| <b>Outono</b>            |        | <b>Primavera</b>         |        |
| SARIMA(4, 0, 3)(0, 1, 1) | 479.71 | SARIMA(2, 1, 3)(0, 1, 1) | 508.90 |
| SARIMA(3, 1, 3)(1, 0, 0) | 480.19 | SARIMA(2, 1, 3)(1, 1, 1) | 509.58 |
| SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 0) | 480.20 | ARIMA(2, 1, 3)           | 510.31 |

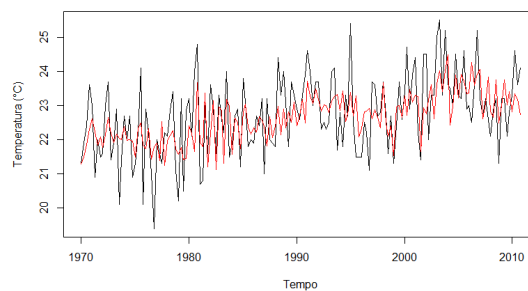
Podemos verificar os ajustes às séries originais, conforme mostrado nas Figuras 64, 65, 66 e 67. Prezando pela parcimônia, os modelos escolhidos foram SARIMA(2, 1, 3)(2, 0, 3) (Figura 64c) para o verão, SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 0) (Figura 65c) para o outono e ARIMA(2, 1, 3) (Figuras 66a e 67c) para o inverno e primavera.



(a) SARIMA(2, 1, 4)(2, 0, 3)

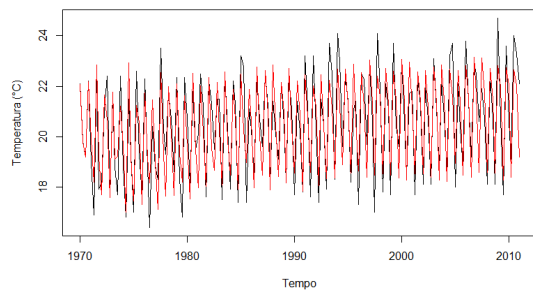


(b) SARIMA(2, 1, 4)(3, 0, 2)

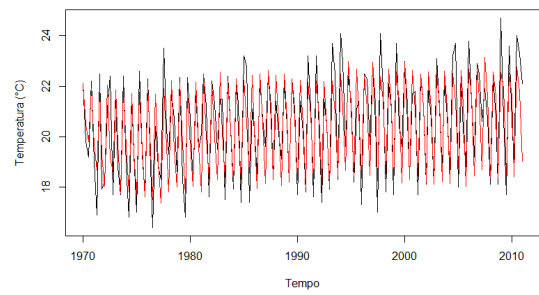


(c) SARIMA(2, 1, 3)(2, 0, 3)

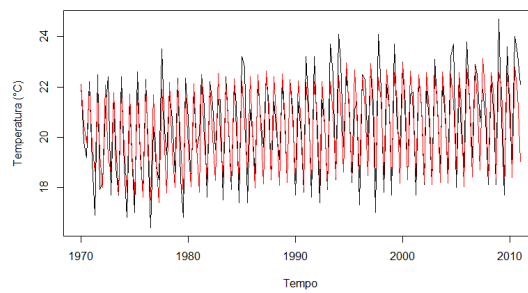
Figura 64 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) SARIMA(4, 0, 3)(0, 1, 1)

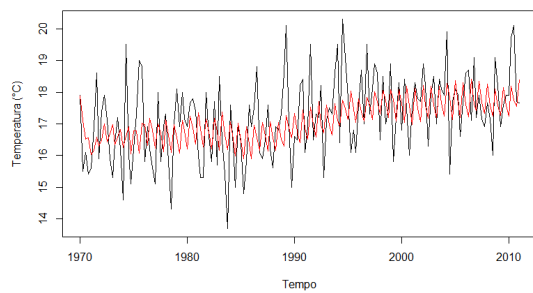


(b) SARIMA(3, 1, 3)(1, 0, 0)

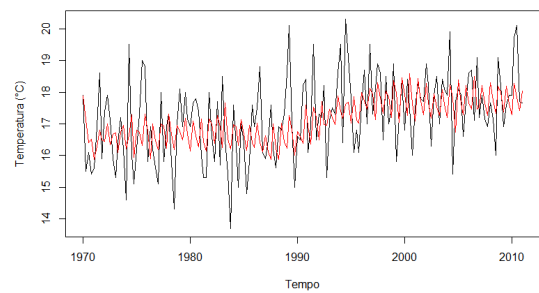


(c) SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 0)

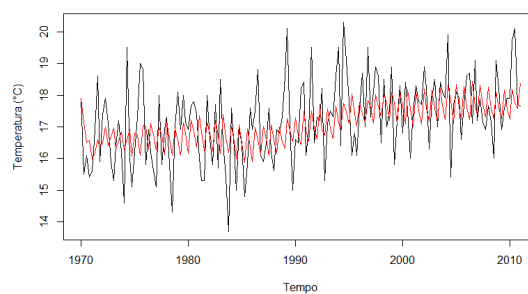
Figura 65 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(2, 1, 3)



(b) ARIMA(4, 1, 4)



(c) SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0)

Figura 66 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

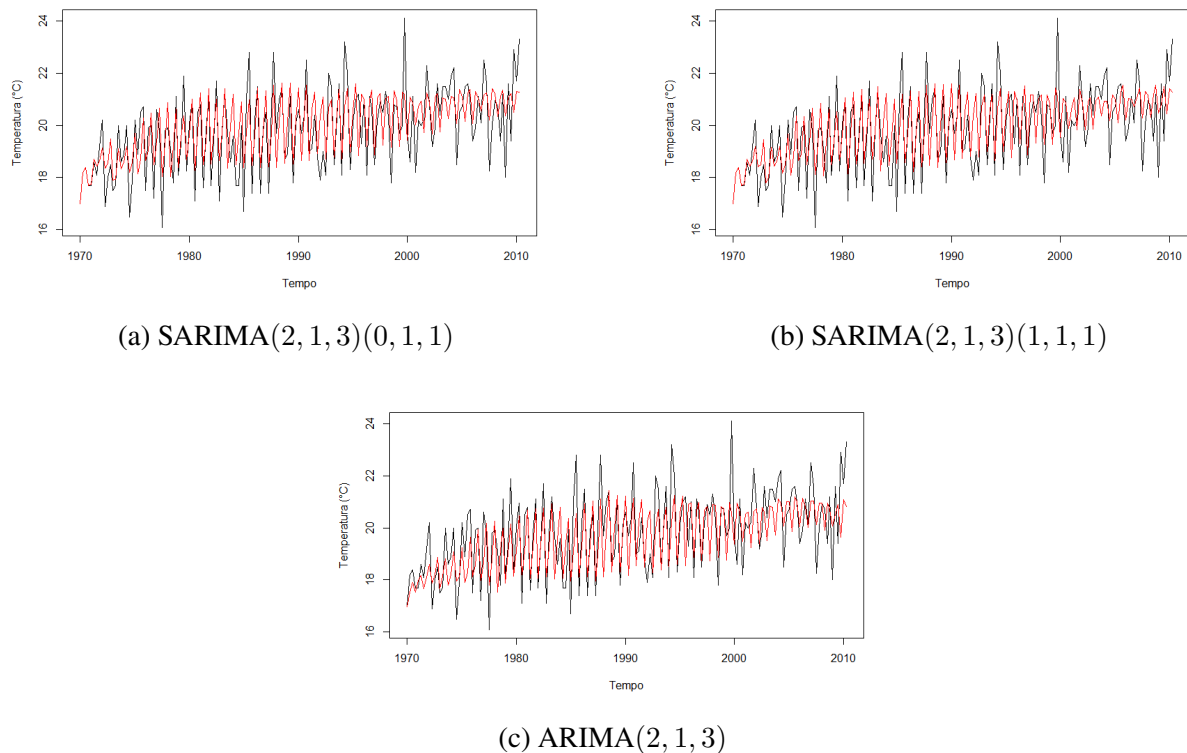


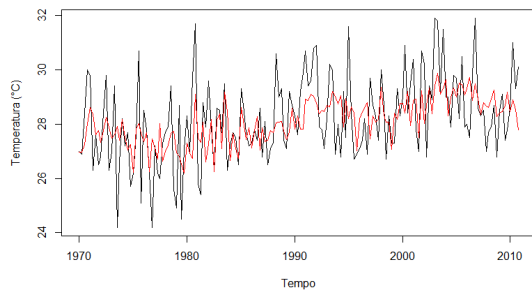
Figura 67 – Modelos ajustados da Temperatura Média Mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

Para a temperatura máxima, após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, comparando seus AIC e resíduos, os modelos que apresentaram melhor desempenho e parcimônia foram os listados na Tabela 21.

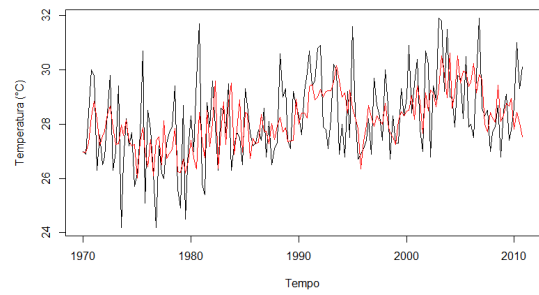
Tabela 21 – Modelos ajustados para a Temperatura Máxima Média por estação (INMET) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC    | Modelo                   | AIC    |
|--------------------------|--------|--------------------------|--------|
| <b>Verão</b>             |        | <b>Inverno</b>           |        |
| SARIMA(2, 1, 3)(4, 0, 0) | 584.30 | ARIMA(2, 1, 3)           | 590.32 |
| SARIMA(1, 1, 4)(2, 0, 2) | 584.95 | ARIMA(2, 1, 4)           | 591.28 |
| ARIMA(3, 1, 3)           | 585.43 | ARIMA(3, 1, 3)           | 591.49 |
| <b>Outono</b>            |        | <b>Primavera</b>         |        |
| ARIMA(3, 1, 3)           | 539.95 | SARIMA(3, 1, 4)(1, 0, 0) | 602.10 |
| ARIMA(4, 1, 3)           | 541.80 | SARIMA(3, 1, 4)(0, 0, 1) | 602.52 |
| SARIMA(3, 1, 3)(0, 0, 1) | 541.94 | ARIMA(3, 1, 4)           | 602.84 |

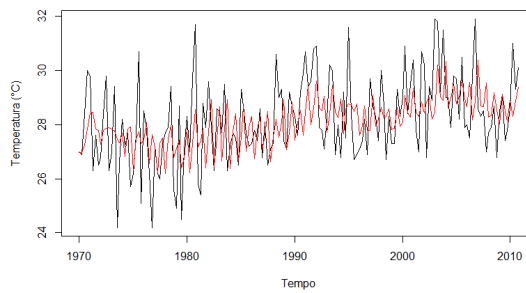
Podemos verificar os ajustes às séries originais, conforme mostrado nas Figuras 68, 69, 70 e 71. Prezando pela parcimônia, os modelos escolhidos foram ARIMA(3, 1, 3) (Figura 68c e 69a) para o verão e outono, ARIMA(2, 1, 3) (Figura 70a) para o inverno e ARIMA(3, 1, 4) (Figura 71c) para a primavera.



(a) SARIMA(2, 1, 3)(4, 0, 0)

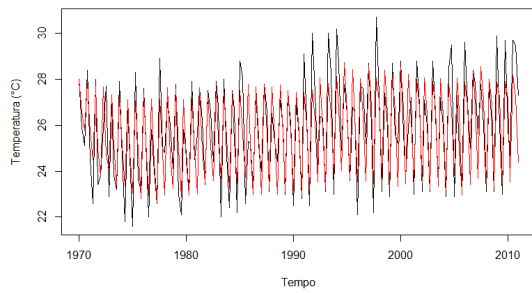


(b) SARIMA(1, 1, 4)(2, 0, 2)

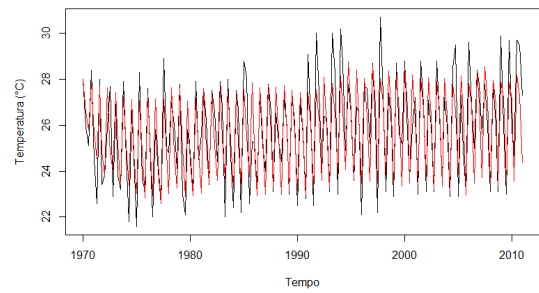


(c) ARIMA(3, 1, 3)

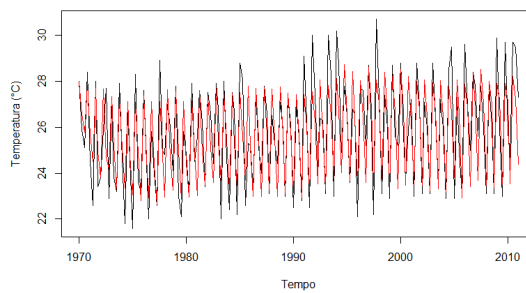
Figura 68 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal no Verão (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(3, 1, 3)

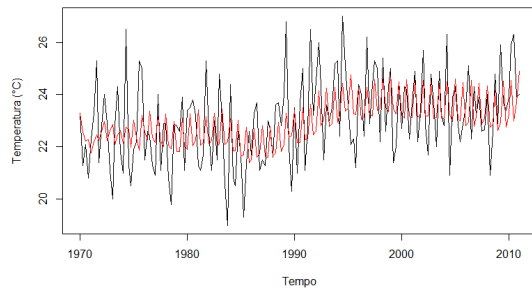


(b) ARIMA(4, 1, 3)

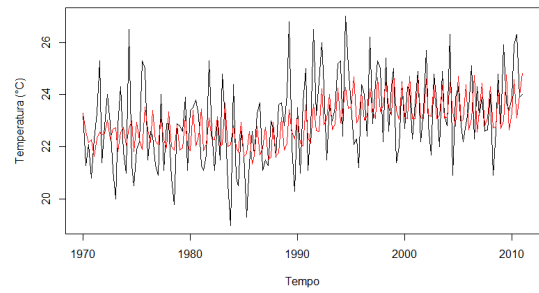


(c) SARIMA(3, 1, 3)(0, 0, 1)

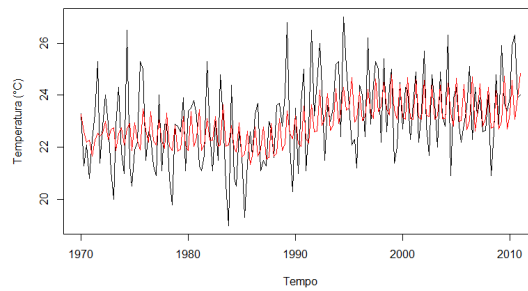
Figura 69 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal no outono (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) ARIMA(2, 1, 3)

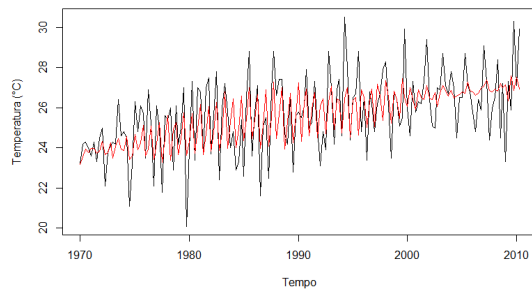


(b) ARIMA(2, 1, 4)

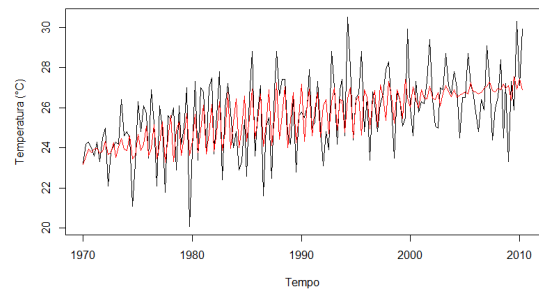


(c) ARIMA(3, 1, 3)

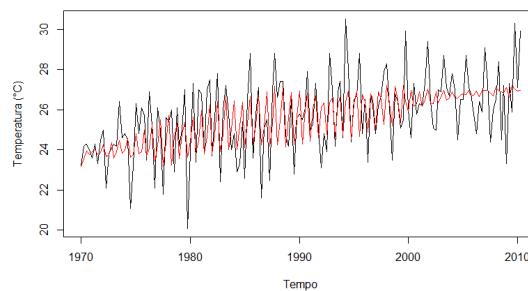
Figura 70 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal no inverno (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.



(a) SARIMA(3, 1, 4)(1, 0, 0)



(b) SARIMA(3, 1, 4)(0, 0, 1)



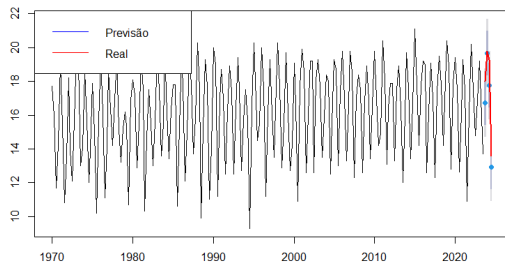
(c) ARIMA(3, 1, 4)

Figura 71 – Modelos ajustados da Temperatura Máxima Mensal na primavera (em vermelho) sobrepostos à série original (em preto) para os dados da INMET.

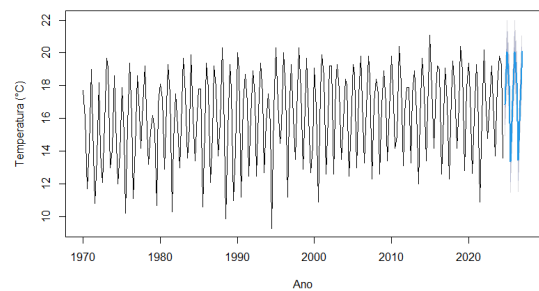
## 4.2.3 Previsão da Temperatura Mensal

### 4.2.3.1 Previsão da Temperatura Mensal para os 4 meses juntos

Para validar os modelos, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 72a, 73a e 74a). Dentre os três modelos testados para cada um, os modelos SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2), SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) e SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) para as temperaturas mínima, média e máxima, respectivamente, apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.



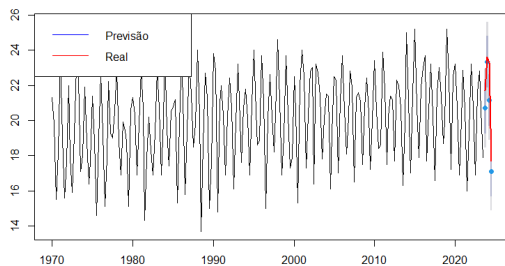
(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



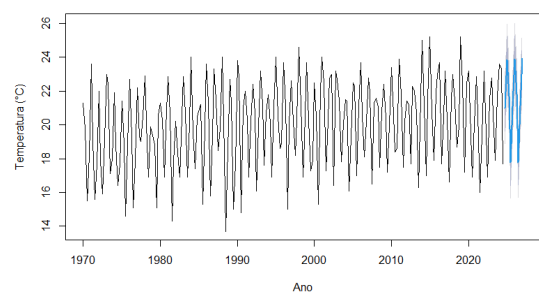
(b) Previsão (10 anos).

Figura 72 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2).

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram a adequação aos comportamentos históricos das séries (Figuras 72b, 73b e 74b). As faixas azuis, que representam os intervalos de predição de 95%, expandem-se gradualmente conforme aumenta o horizonte preditivo.

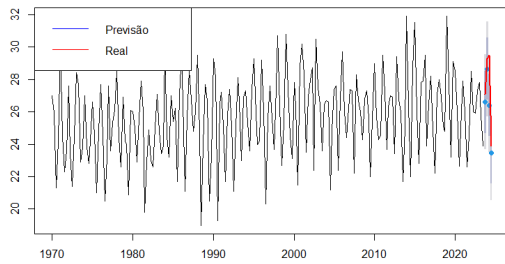


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

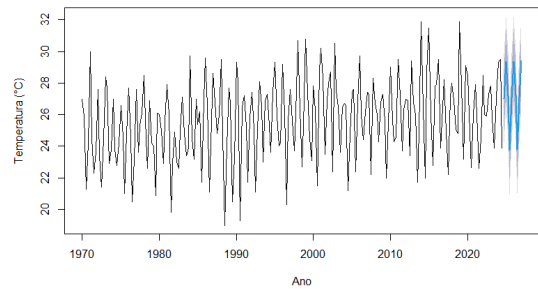


(b) Previsão (10 anos).

Figura 73 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



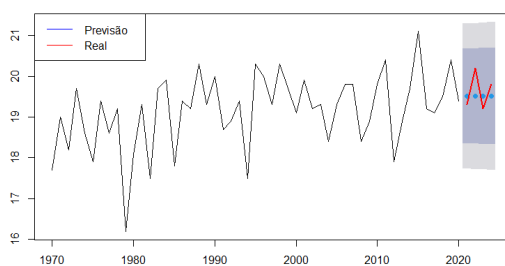
(b) Previsão (10 anos).

Figura 74 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média (INMET) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1).

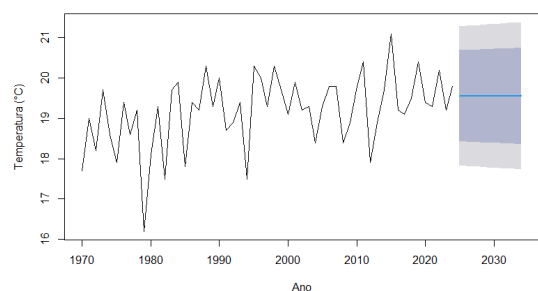
#### 4.2.3.2 Previsão da Temperatura Mensal para os 4 meses separados

Para a temperatura mínima, a validação dos modelos foi feita dividindo os dados em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 75a, 76a, 77a e 78a). Dentre os três modelos testados para cada um, os modelos ARIMA(0, 1, 1), ARIMA(2, 1, 1), ARIMA(5, 1, 0) e ARIMA(2, 1, 2) para janeiro, abril, julho e outubro, respectivamente, apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que a maioria não se adequou bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 75b, 76b e 78b), com exceção do modelo para julho, que se adequou melhor ao comportamento da série (Figura 77b). As previsões para janeiro, abril e outubro apresentam resultados próximos à média da série.

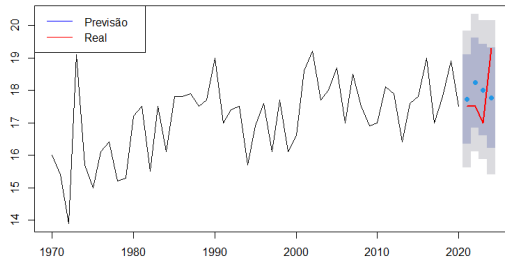


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

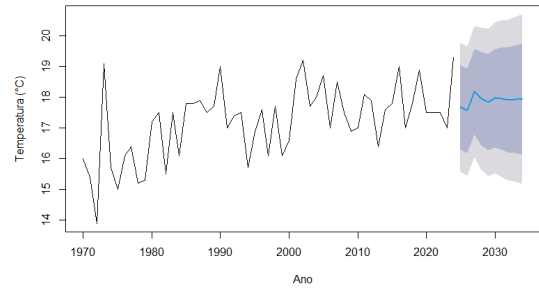


(b) Previsão (10 anos).

Figura 75 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Janeiro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

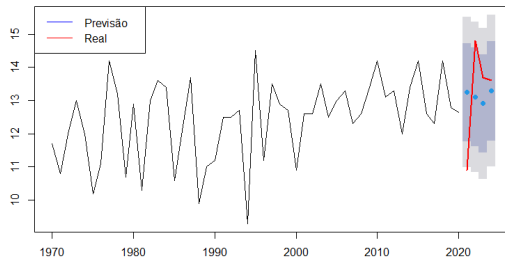


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

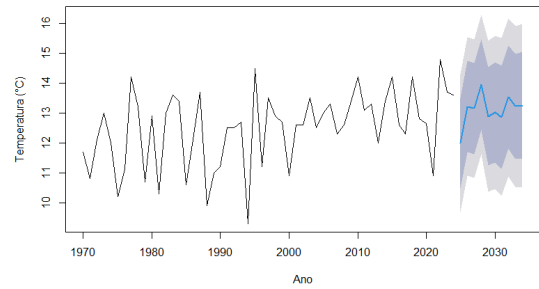


(b) Previsão (10 anos).

Figura 76 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 1).

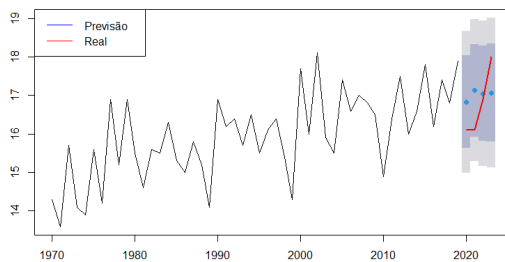


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

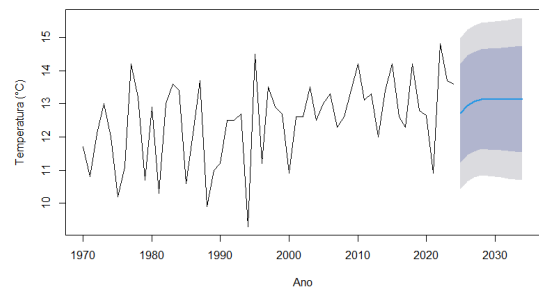


(b) Previsão (10 anos).

Figura 77 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(5, 1, 0).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



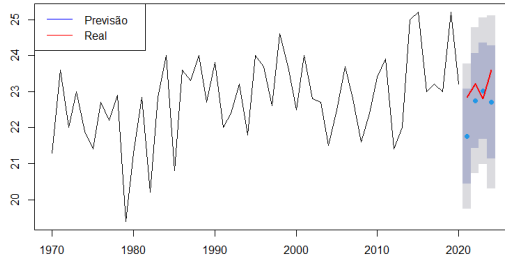
(b) Previsão (10 anos).

Figura 78 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 2).

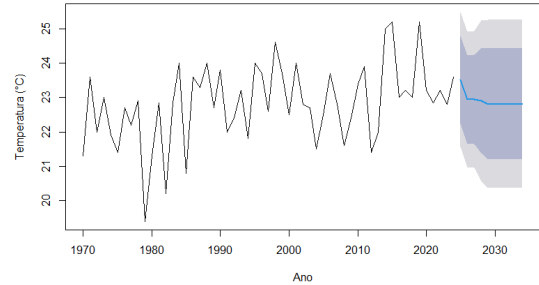
Para a temperatura média, a validação dos modelos foi feita dividindo os dados em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 79a, 80a, 81a e 82a). Dentre os três modelos testados para cada um, os modelos MA(4) para janeiro e ARIMA(0, 1, 1)



para abril, julho e outubro apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

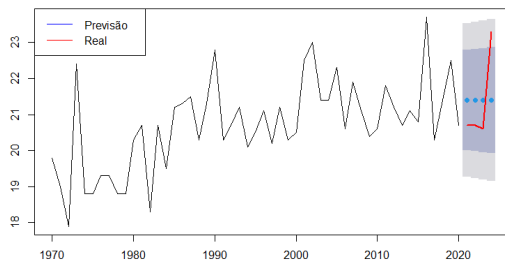


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

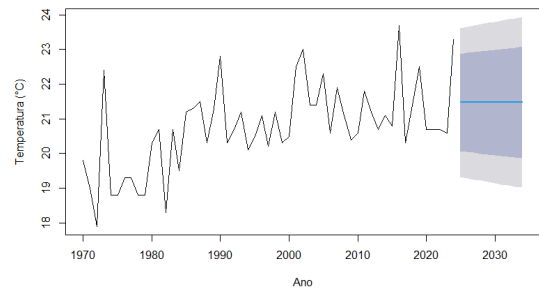


(b) Previsão (10 anos).

Figura 79 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Janeiro (INMET) com o modelo MA(4).



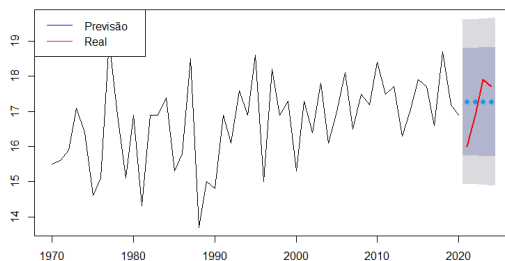
(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



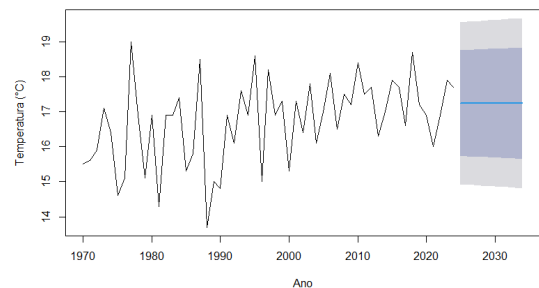
(b) Previsão (10 anos).

Figura 80 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que os modelos não se adequaram bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 79b, 80b, 81b e 82b). Observa-se que os modelos MA e ARIMA apresentam resultados muito próximos da média da série.

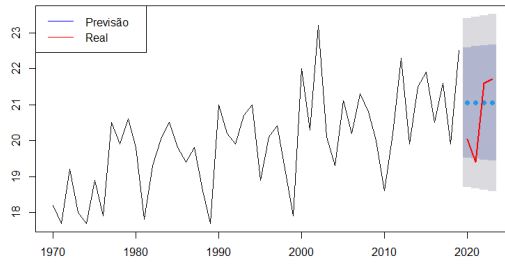


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

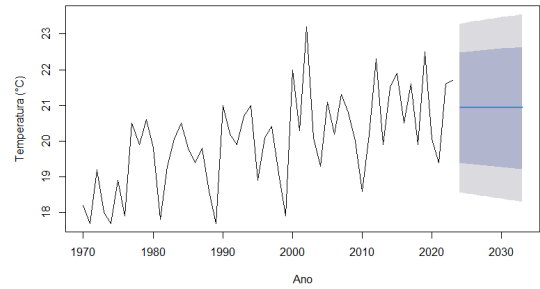


(b) Previsão (10 anos).

Figura 81 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

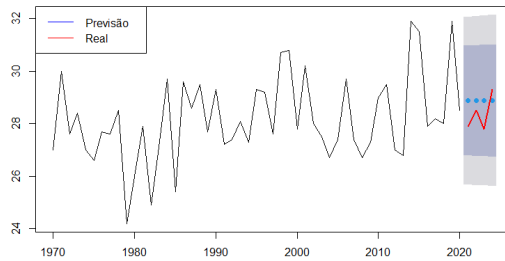


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

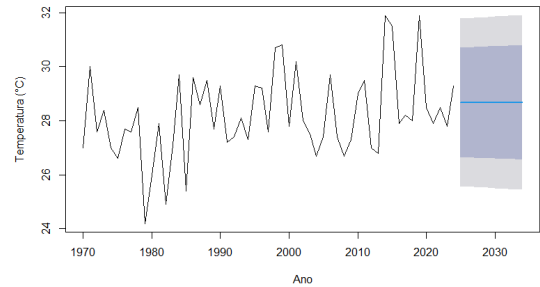


(b) Previsão (10 anos).

Figura 82 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).



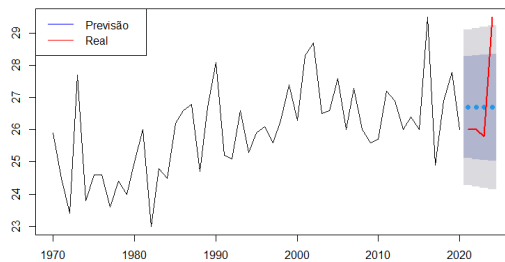
(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



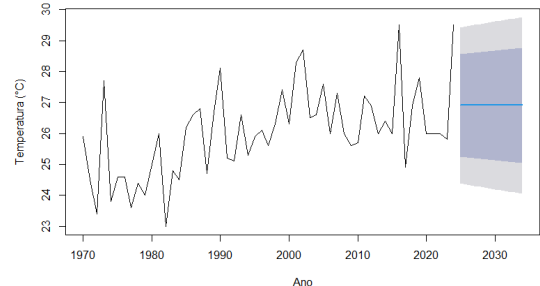
(b) Previsão (10 anos).

Figura 83 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Janeiro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

Para a temperatura máxima, a validação dos modelos foi feita dividindo os dados em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 83a, 84a, 85a e 86a). Dentre os três modelos testados, o modelo ARIMA(0, 1, 1) apresentou os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

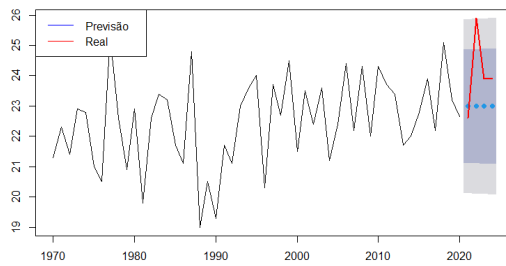


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

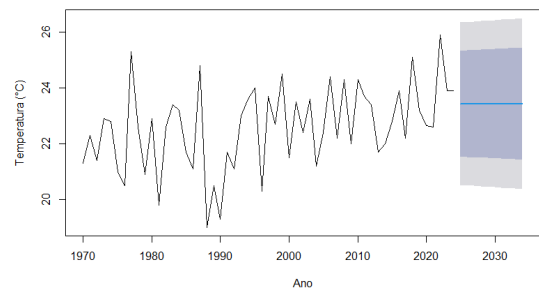


(b) Previsão (10 anos).

Figura 84 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Abril (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

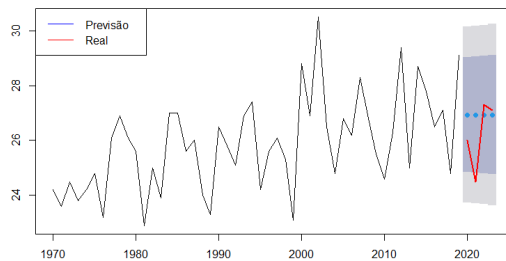


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

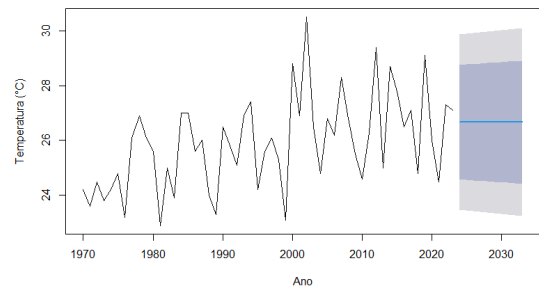


(b) Previsão (10 anos).

Figura 85 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Julho (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



(b) Previsão (10 anos).

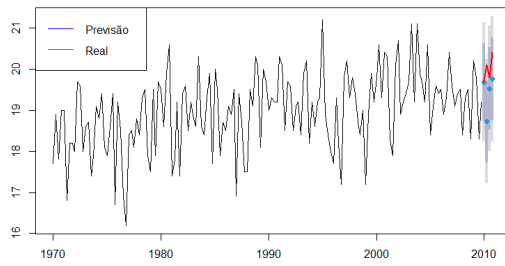
Figura 86 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Outubro (INMET) com o modelo ARIMA(0, 1, 1).

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que os modelos não se adequaram bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 83b, 84b, 85b e 86b). Observa-se que o modelo ARIMA apresenta resultados muito próximos da média da série.

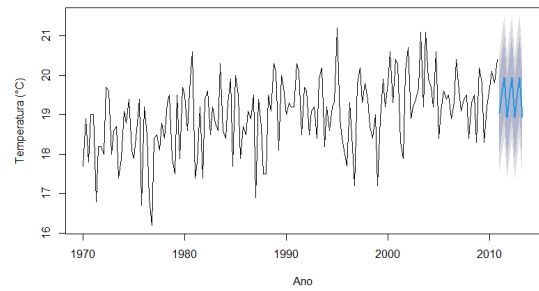
#### 4.2.3.3 Previsão da Temperatura Mensal para os 12 meses

Para a temperatura mínima, a validação dos modelos foi feita dividindo os dados em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 87a, 88a, 89a e 90a). Dentre os três modelos testados, os modelos ARIMA(3, 1, 3) para o verão e outono, ARIMA(2, 1, 3) para o inverno e SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0) para a primavera apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que os modelos se adequaram bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 87b, 88b e 90b), com exceção do inverno (Figura 89b). As faixas azuis, que representam os intervalos de predição de 95%, expandem-se gradualmente conforme aumenta o horizonte preditivo.

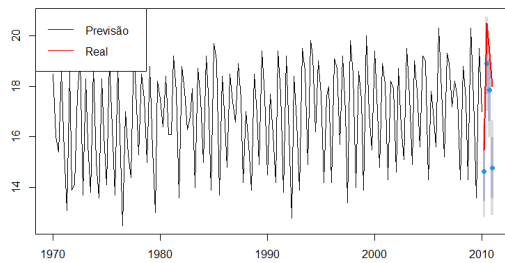


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

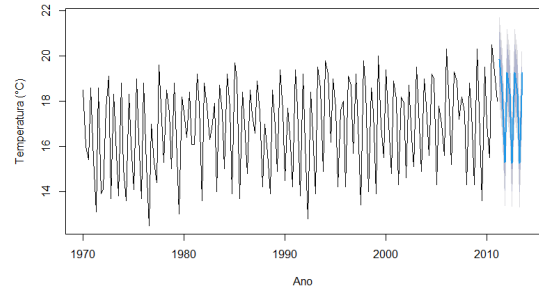


(b) Previsão (10 anos).

Figura 87 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Verão (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3).

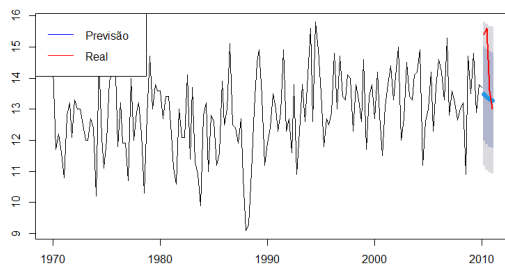


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

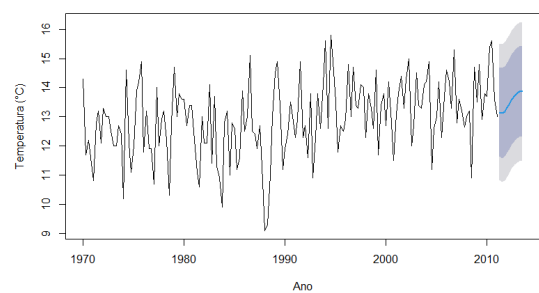


(b) Previsão (10 anos).

Figura 88 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Outono (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3).

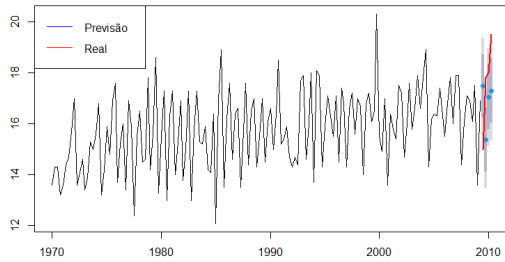


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

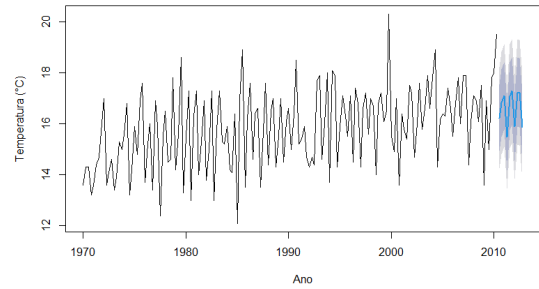


(b) Previsão (10 anos).

Figura 89 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Inverno (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3).

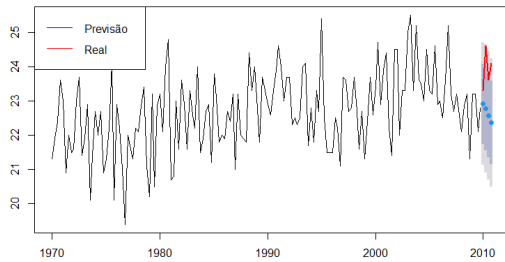


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

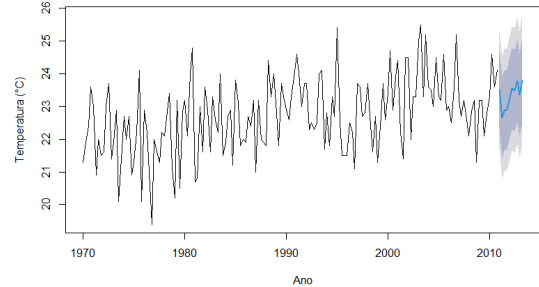


(b) Previsão (10 anos).

Figura 90 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Mínima em Primavera (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 3)(1, 0, 0).



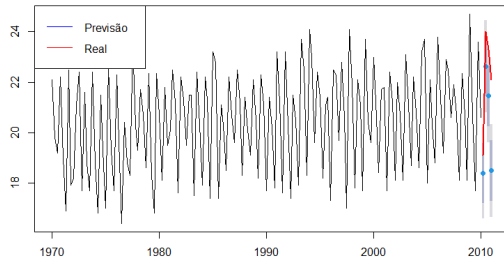
(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



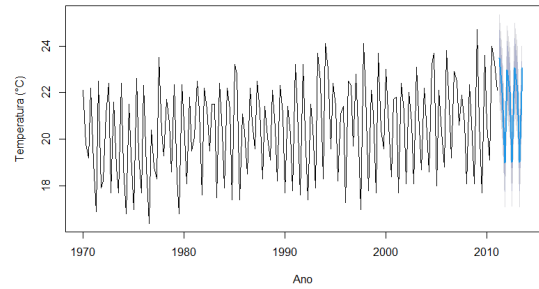
(b) Previsão (10 anos).

Figura 91 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Verão (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 3)(2, 0, 3).

Para a temperatura média, a validação dos modelos foi feita dividindo os dados em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 91a, 92a, 93a e 94a). Dentre os três modelos testados, os modelos SARIMA(2, 1, 3)(2, 0, 3) para o verão, SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 0) para o outono e ARIMA(2, 1, 3) para o inverno e para a primavera apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

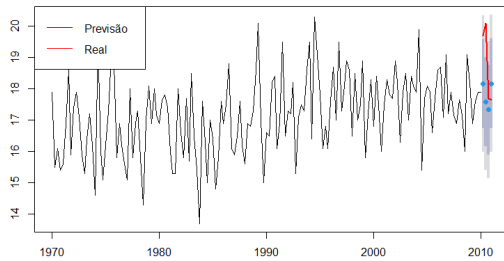


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

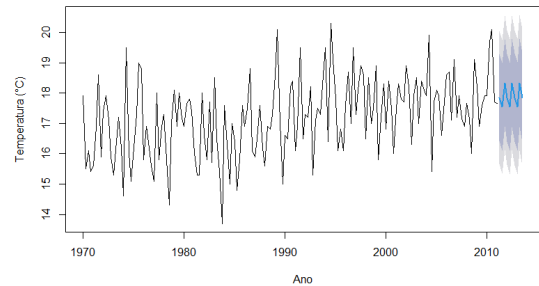


(b) Previsão (10 anos).

Figura 92 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Outono (INMET) com o modelo SARIMA(2, 1, 4)(1, 0, 0).

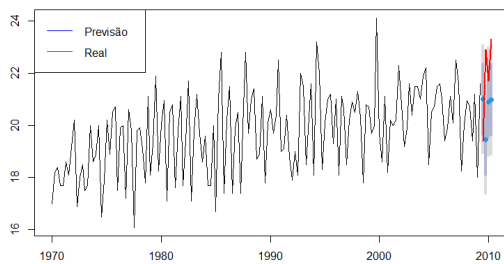


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

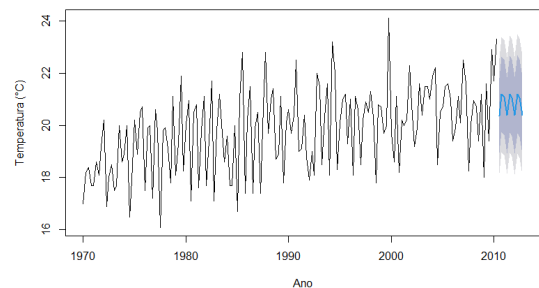


(b) Previsão (10 anos).

Figura 93 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Inverno (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



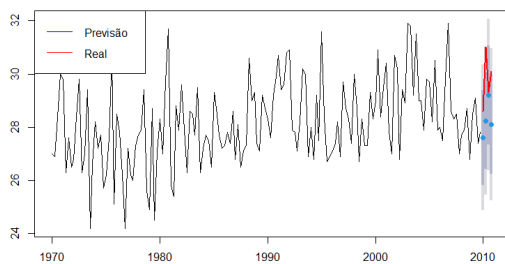
(b) Previsão (10 anos).

Figura 94 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Média em Primavera (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3).

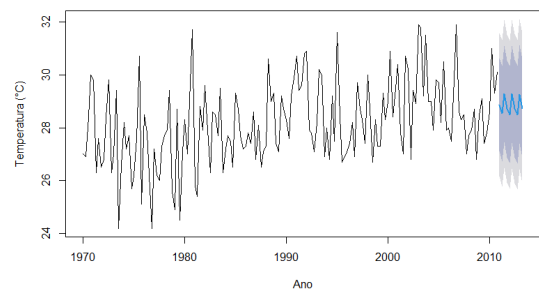
As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que a maioria dos modelos não se adequou bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 91b, 93b e 94b), com exceção do outono (Figura 92b), que parece apresentar uma previsão mais adequada ao comportamento da série.

Para a temperatura máxima, a validação dos modelos foi feita dividindo os dados em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 95a, 96a, 97a e 98a). Dentre os três modelos testados, os modelos ARIMA(3, 1, 3) para o verão e outono, ARIMA(2, 1, 3) para o inverno e ARIMA(3, 1, 4) para a primavera apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.

As previsões para um horizonte de 10 anos demonstram que a maioria dos modelos não se adequou bem ao comportamento histórico das séries (Figuras 95b, 97b e 98b), com exceção do outono (Figura 96b), que parece apresentar uma previsão mais adequada ao comportamento da série.

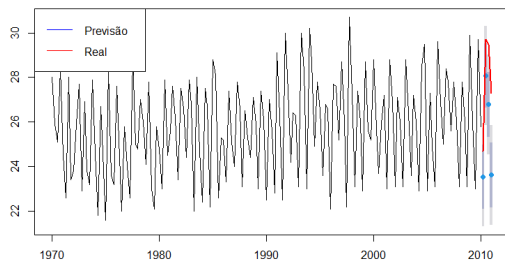


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

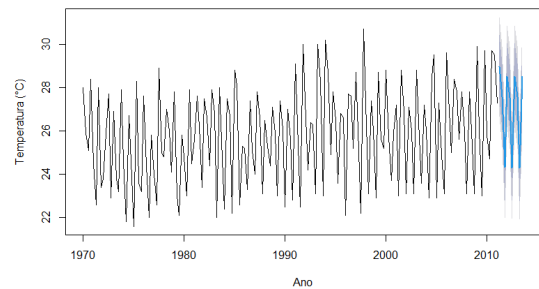


(b) Previsão (10 anos).

Figura 95 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Verão (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3).

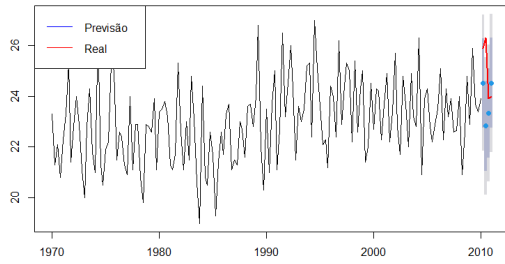


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

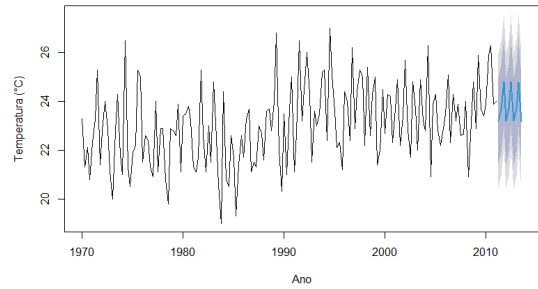


(b) Previsão (10 anos).

Figura 96 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Outono (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 3).

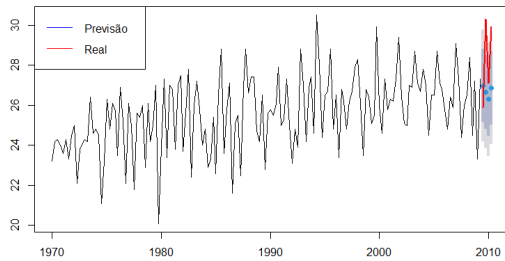


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

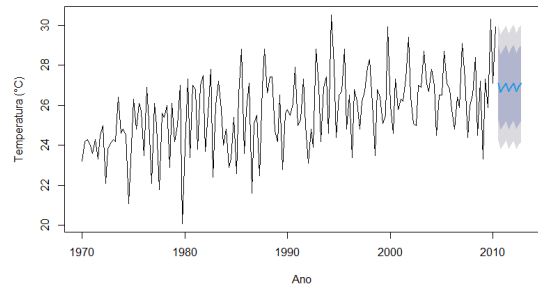


(b) Previsão (10 anos).

Figura 97 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Inverno (INMET) com o modelo ARIMA(2, 1, 3).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



(b) Previsão (10 anos).

Figura 98 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Temperatura Máxima em Primavera (INMET) com o modelo ARIMA(3, 1, 4).

## 4.3 Dados da DAEE (1970-2023)

### 4.3.1 Dados de Precipitação Mensais - Água Branca

Os dados brutos vistos na Figura 99 não mostram tendência visível, mas apresentam sazonalidade.

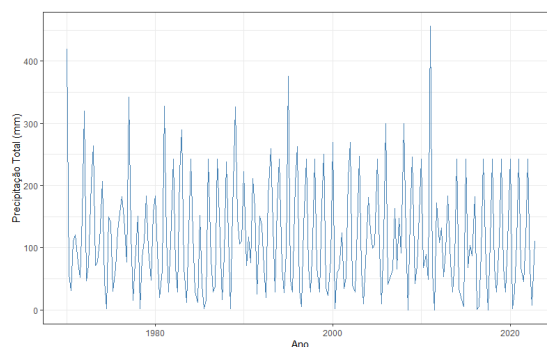


Figura 99 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - Água Branca), de 1980 a 2023.



A partir da Figura 100a, observa-se que o inverno apresenta a menor precipitação do ano; já o verão apresenta a maior precipitação, com grande amplitude e maior mediana. Por outro lado, tanto o outono quanto a primavera são períodos de transição entre as estações, apresentando medidas de precipitação intermediárias. Além de tudo, é possível reparar efeitos sazonais e também a presença de *outliers*, principalmente no verão, que pode indicar períodos atípicos de chuvas.

Na Figura 100b, não apresenta tendência, o que é validado pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, que indica que não há tendência relevante nos dados. Além disso, observa-se variabilidade, pois seus pontos estão esparsos, indicando que alguns anos podem ser mais chuvosos do que outros.

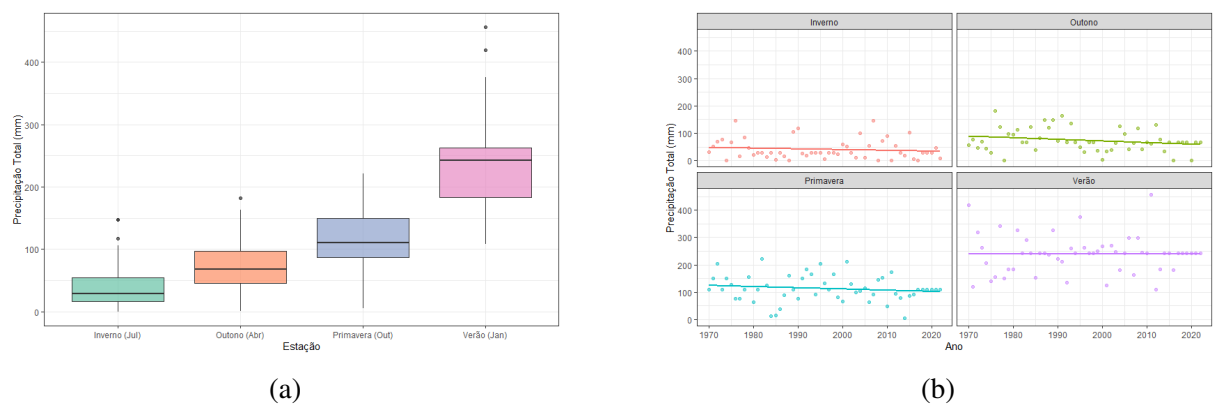


Figura 100 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - Água Branca.

#### 4.3.1.1 Análise Descritiva

Os valores apresentados na Tabela 22 mostram uma alta variabilidade e assimetria, indicando que alguns meses são extremamente chuvosos, enquanto outros apresentam pouca precipitação.

Tabela 22 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - Água Branca.

| Variável     | Média  | Mediana | Q1    | Q3     | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|--------------|--------|---------|-------|--------|---------------|------|------------|
| Precipitação | 116.75 | 96.95   | 46.00 | 163.40 | 90.72         | 0.78 | 0.96       |

#### 4.3.1.2 Análise da Série Temporal

A série temporal é ajustada para a frequência de 4 meses. O ACF (Figura 101a) apresenta um decaimento oscilatório e lento, o que mostra que há efeitos sazonais, com picos a cada dois *lags*; assim, temos evidências de que  $Q = 2$ , mas não apresenta nenhum corte claro em  $q$ . O PACF (Figura 101b) também apresenta um padrão oscilatório, mas decai rapidamente; além disso, vemos picos a cada, aproximadamente, 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ .

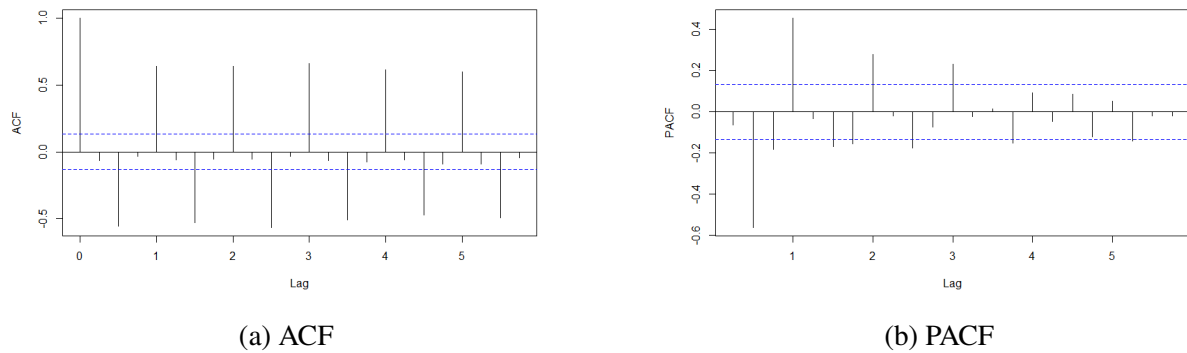


Figura 101 – Correlogramas da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Água Branca.

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

Verifica-se que na decomposição da série pelo método STL (Figura 102) não apresenta tendência, mas mostra uma sazonalidade aparente.

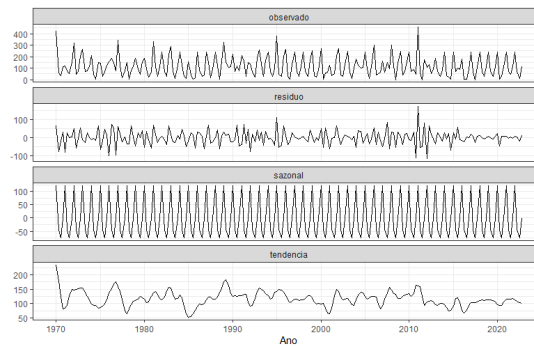


Figura 102 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Água Branca.

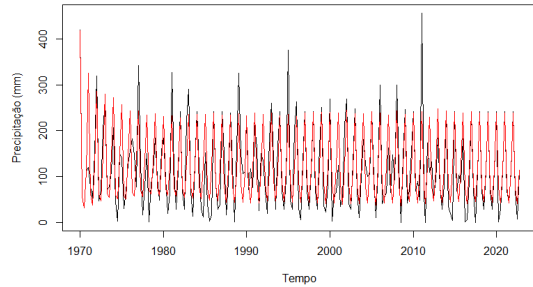
#### 4.3.1.3 Modelagem

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os que apresentaram melhor performance e parcimônia foram os SARIMA, os quais estão listados na Tabela 23.

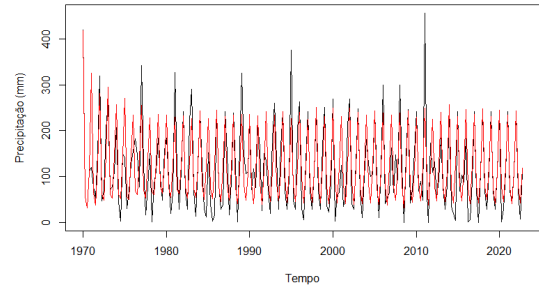
Tabela 23 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE - Água Branca) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC     |
|--------------------------|---------|
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 2246.00 |
| SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 2) | 2248.03 |
| SARIMA(0, 0, 4)(0, 1, 0) | 2248.93 |

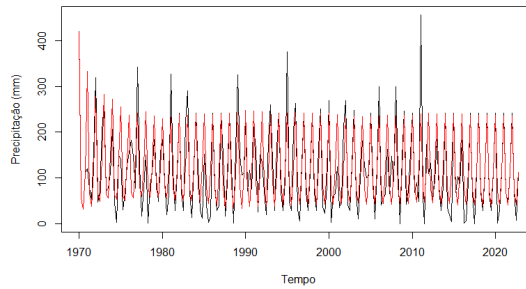
Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 103. Levando em conta a parcimônia, o modelo escolhido, com o menor número de parâmetros e AIC baixo, é o SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) (Figura 103a).



(a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2)



(b) SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 2)



(c) SARIMA(0, 0, 4)(0, 1, 0)

Figura 103 – Modelos ajustados de precipitação total mensal (DAEE - Água Branca) sobrepostos à série original: (a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2), (b) SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 2) e (c) SARIMA(0, 0, 4)(0, 1, 0)

### 4.3.2 Dados de Precipitação Mensais - Santo Amaro

Os dados brutos apresentados na Figura 104 não mostram uma tendência visível, mas apresentam sazonalidade.

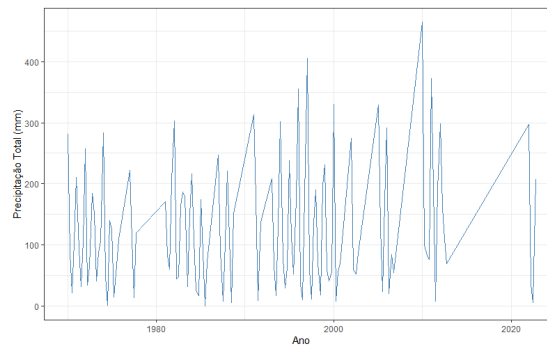


Figura 104 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - Santo Amaro), de 1980 a 2023.

A partir da Figura 105a, observa-se que o inverno apresenta a menor precipitação do ano; já o verão apresenta a maior precipitação, com grande amplitude e maior mediana. Por outro lado, tanto o outono quanto a primavera são períodos de transição entre as estações, apresentando medidas de precipitação intermediárias. Além de tudo, é possível observar um efeito sazonal e, também, a presença de *outliers* no verão, que podem indicar períodos atípicos de chuvas.

É possível verificar na Figura 105b que existe uma clara tendência de crescimento no verão; no entanto, nas demais estações, não parece apresentar tendência, o que podemos observar pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, que indica que não há tendência relevante nos dados. Além disso, apresentam certa variabilidade, pois seus pontos estão esparsos, o que indica que alguns anos podem ser mais chuvosos do que os outros.

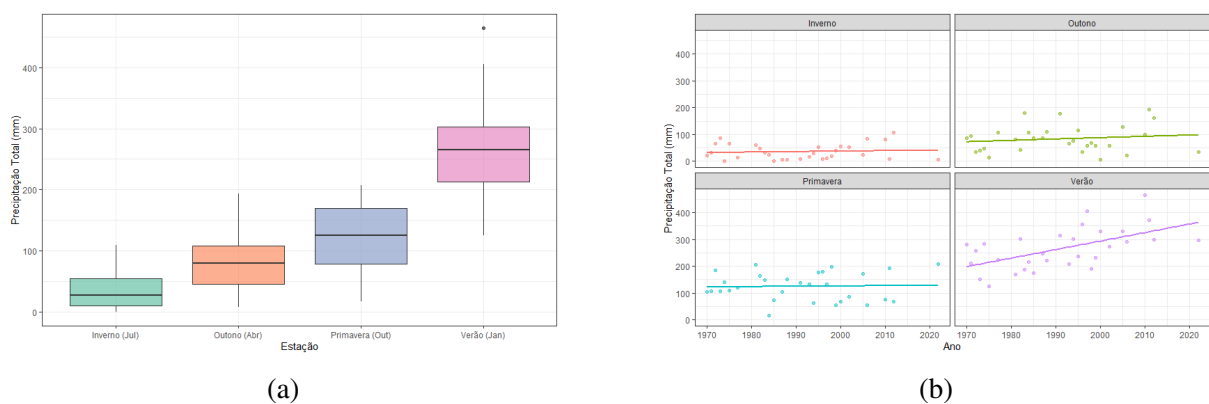


Figura 105 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - Santo Amaro.

#### 4.3.2.1 Análise Descritiva

Os valores apresentados na Tabela 24 mostram uma alta variabilidade e assimetria positiva, indicando que alguns meses são extremamente chuvosos, enquanto outros apresentam pouca precipitação.

Tabela 24 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - Santo Amaro.

| Variável     | Média  | Mediana | Q1    | Q3     | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|--------------|--------|---------|-------|--------|---------------|------|------------|
| Precipitação | 127.16 | 104.05  | 51.60 | 187.30 | 101.45        | 0.80 | 0.93       |

#### 4.3.2.2 Análise da Série Temporal

A série temporal é ajustada para a frequência de 4 meses. O ACF (Figura 106a) apresenta um decaimento oscilatório e lento, o que mostra que há efeitos sazonais, com picos a cada dois *lags*; assim, temos evidências de que  $Q = 2$ , mas não apresenta nenhum corte claro em  $q$ . O PACF (Figura 106b) também apresenta um padrão oscilatório, mas decai rapidamente; além disso, vemos picos a cada, aproximadamente, 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ .

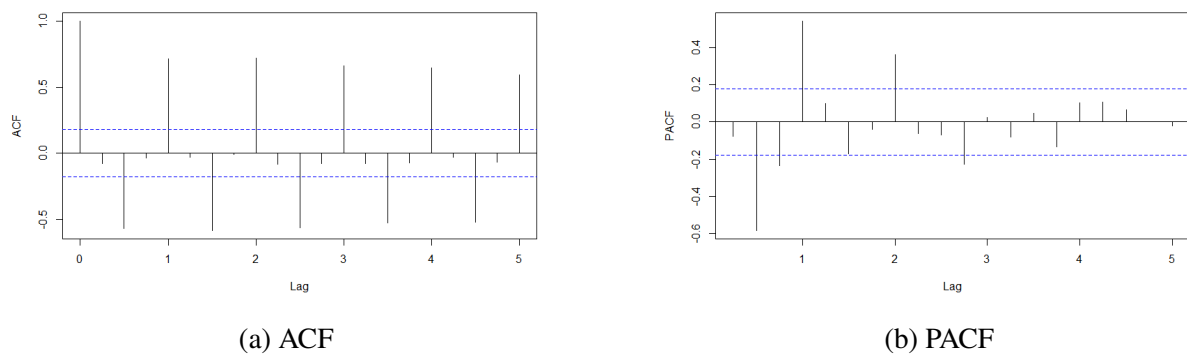


Figura 106 – Correlogramas da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Santo Amaro.

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

Verifica-se que na decomposição da série pelo método STL (Figura 107) não há tendência, mas uma sazonalidade aparente.

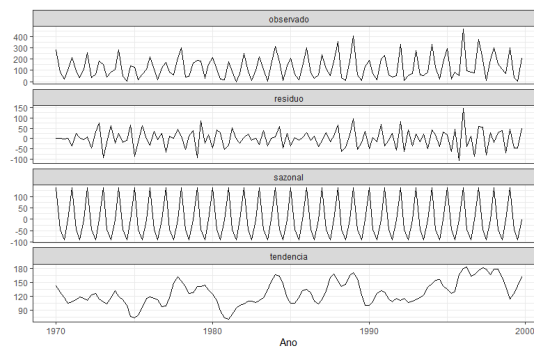


Figura 107 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Santo Amaro.

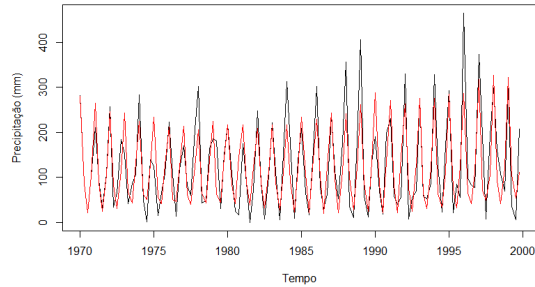
#### 4.3.2.3 Modelagem

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os que apresentaram melhor desempenho e parcimônia foram os modelos SARIMA, que estão listados na Tabela 25.

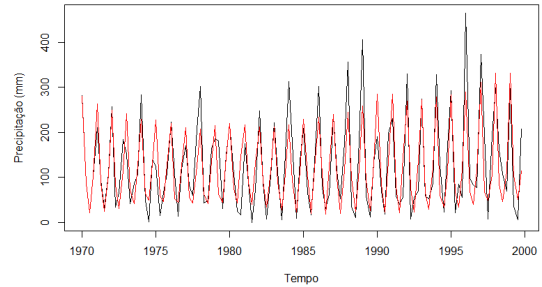
Tabela 25 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE - Santo Amaro) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC     |
|--------------------------|---------|
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) | 1264.40 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 1265.81 |
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 1265.85 |

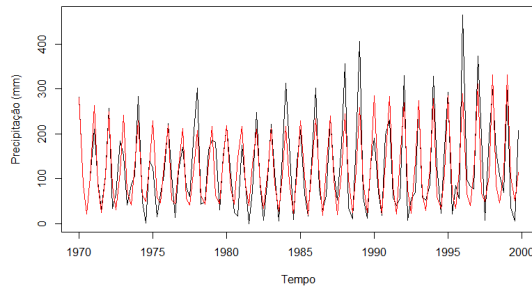
Podemos ver que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 108. Levando em conta a parcimônia, o modelo escolhido, com o menor número de parâmetros e AIC baixo, é o SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1) (Figura 108a).



(a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1)



(b) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1)



(c) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2)

Figura 108 – Modelos ajustados de precipitação total mensal (DAEE - Santo Amaro) sobrepostos à série original: (a) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1), (b) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) e (c) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2)

### 4.3.3 Dados de Precipitação Mensais - Observatório IAG

Os dados brutos apresentados na Figura 109 não mostram uma tendência visível, mas apresentam sazonalidade com alguns picos significativos de precipitação.

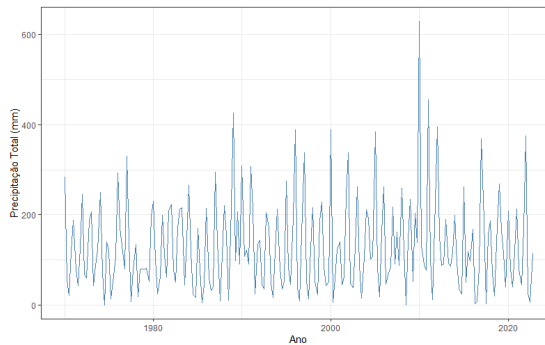


Figura 109 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - IAG), de 1980 a 2023.

A partir da Figura 110a, observa-se que o inverno apresenta a menor precipitação do ano; já o verão apresenta a maior precipitação com grande amplitude. Por outro lado, tanto o outono quanto a primavera são períodos de transição entre as estações, apresentando medidas de precipitação intermediárias. Além de tudo, é possível reparar um efeito sazonal e também a presença de *outliers*, principalmente no inverno, que podem indicar períodos atípicos de chuvas.

É possível verificar na Figura 110b que as estações, exceto pelo verão, não parecem apresentar tendência, o que podemos validar pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, que indica que não possui tendência relevante nos dados. Além disso, apresentam certa variabilidade, principalmente no verão, pois seus pontos estão esparsos, o que indica que alguns anos podem ser mais chuvosos do que outros ou que podem ocorrer eventos extremos.

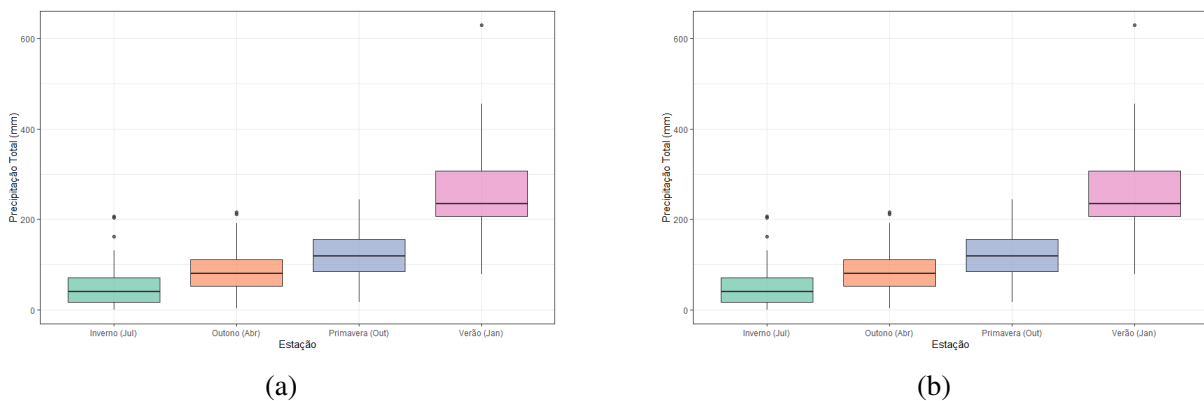


Figura 110 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - IAG.

#### 4.3.3.1 Análise Descritiva

Os valores apresentados na Tabela 26 mostram alta variabilidade e assimetria positiva, indicando que alguns meses são extremamente chuvosos, enquanto outros apresentam pouca precipitação.

Tabela 26 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - IAG.

| Variável     | Média  | Mediana | Q1    | Q3     | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|--------------|--------|---------|-------|--------|---------------|------|------------|
| Precipitação | 130.44 | 107.15  | 52.03 | 188.85 | 102.04        | 0.78 | 1.33       |

#### 4.3.3.2 Análise da Série Temporal

A série temporal é ajustada para a frequência de 4 meses. O ACF (Figura 111a) apresenta um decaimento oscilatório e lento, o que mostra que há efeitos sazonais, com picos a cada dois *lags*; assim, temos evidências de que  $Q = 2$ , mas não apresenta nenhum corte claro em  $q$ . O

PACF (Figura 111b) também apresenta um padrão oscilatório, mas decai rapidamente; além disso, vemos alguns picos a cada, aproximadamente, 2 lag, o que pode indicar que  $P = 2$ .

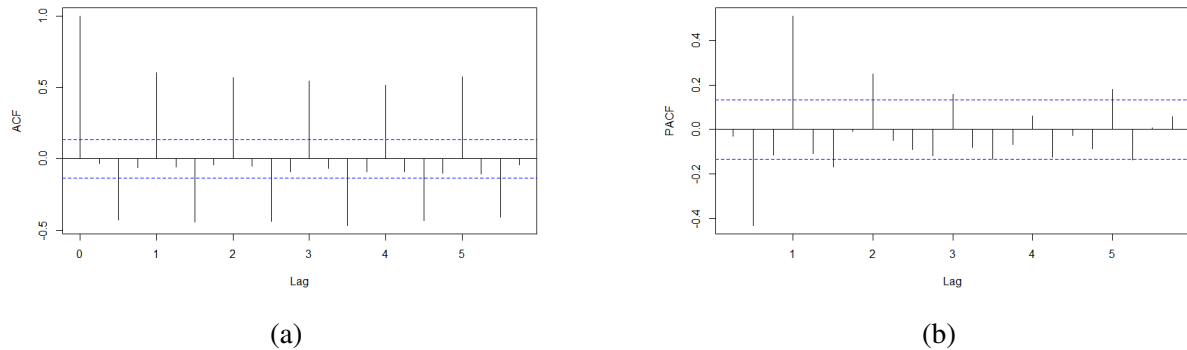


Figura 111 – (a) ACF e (b) PACF da precipitação total mensal para os dados da DAEE - IAG.

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

Pela Figura 112, verifica-se que na decomposição da série pelo método STL não apresenta tendência, mas mostra uma sazonalidade aparente.

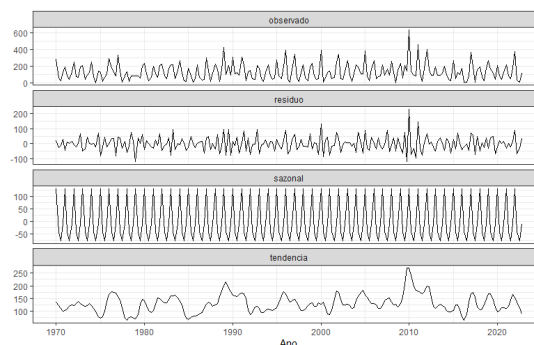


Figura 112 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - IAG.

#### 4.3.3.3 Modelagem

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os que apresentaram melhor performance e parcimônia foram os modelos SARIMA, que estão listados na Tabela 27.

Tabela 27 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE- Observatório IAG) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC     |
|--------------------------|---------|
| SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) | 2346.24 |
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 2346.75 |
| SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1) | 2346.75 |



Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 113. levando em conta a parcimônia, o modelo escolhido, com menor número de parâmetros e AIC baixo, seria o SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) (Figura 113a).

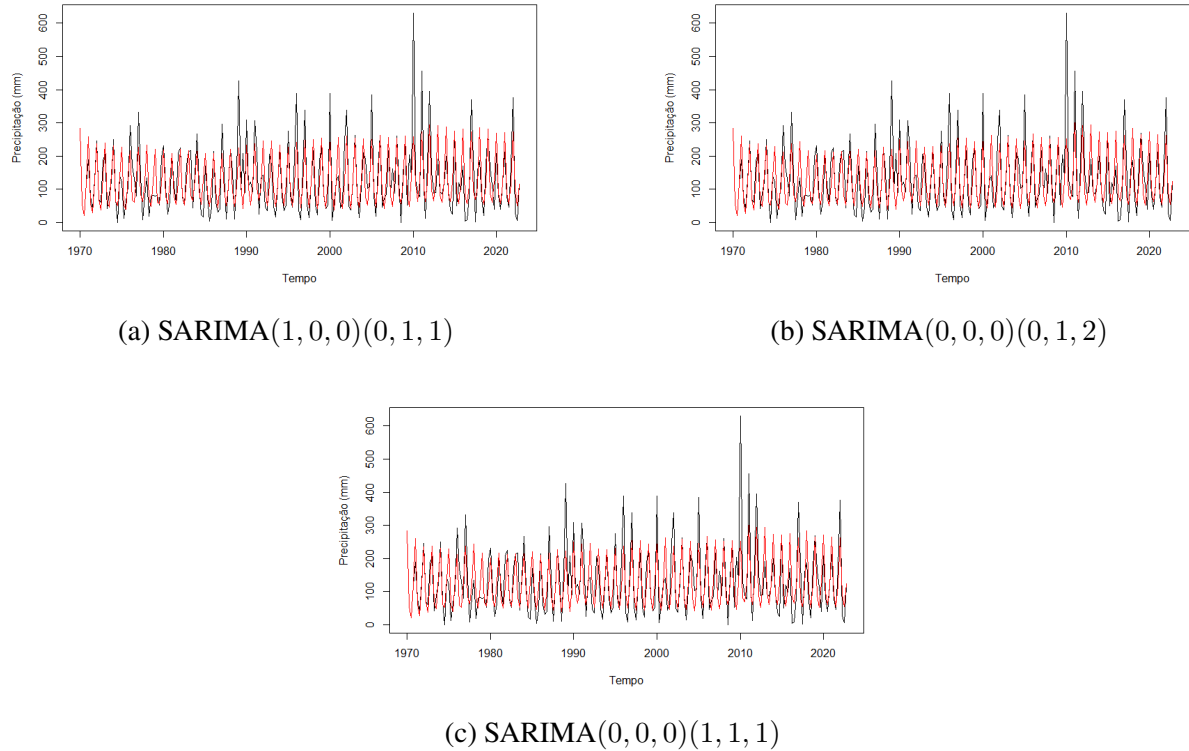


Figura 113 – Modelos ajustados sobrepostos à série original: (a) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1), (b) SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) e (c) SARIMA(0, 0, 0)(1, 1, 1)

#### 4.3.4 Dados de Precipitação Mensais - Monte Belo

Os dados brutos mostrados na Figura 114 não evidenciam tendência, mas mostram sazonalidade aparente.

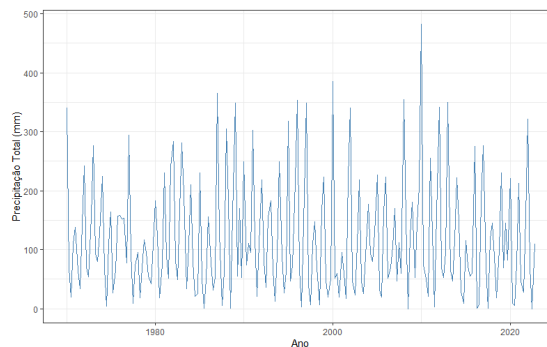


Figura 114 – Distribuição temporal da precipitação total mensal (mm) em São Paulo (DAEE - Monte Belo), de 1980 a 2023.

A partir da Figura 115a, observa-se que o inverno apresenta a menor precipitação do ano; já o verão apresenta a maior precipitação, com grande amplitude. Por outro lado, tanto o

outono quanto a primavera são períodos de transição entre as estações, apresentando medidas de precipitação intermediárias. Além de tudo, é possível observar um efeito sazonal e também a presença de *outliers* no inverno e no outono, que podem indicar períodos atípicos de chuvas.

É possível ver na Figura 115b que não parece haver tendência, o que podemos validar pelo teste de tendência de *Mann-Kendall* ao nível de significância de 5%, que indica que não há tendência relevante nos dados. Além disso, apresenta certa variabilidade (como no verão e na primavera), o que indica que alguns anos podem ser mais chuvosos do que os outros.

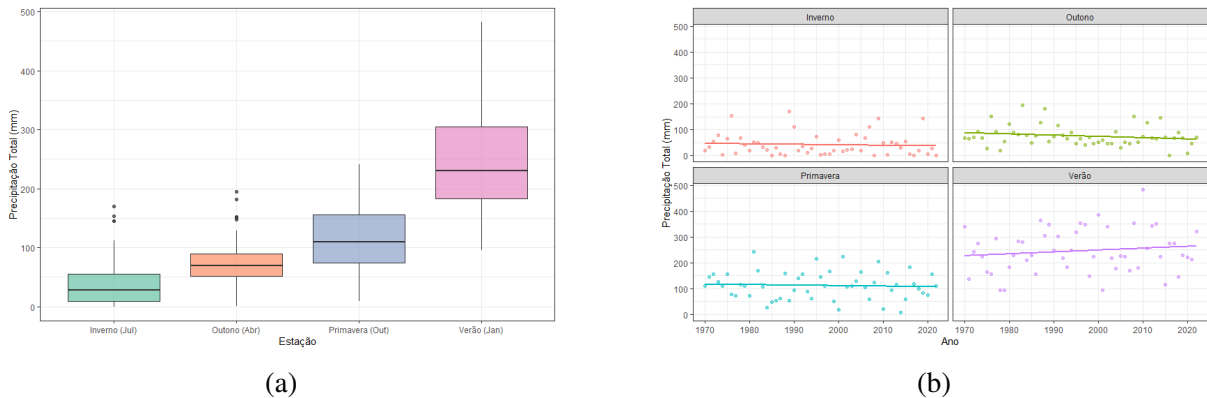


Figura 115 – (a) Box-plot e (b) tendência da precipitação total mensal para cada estação do ano para os dados da DAEE - Monte Belo.

#### 4.3.4.1 Análise Descritiva

Os valores apresentados na Tabela 28 mostram alta variabilidade e assimetria positiva, indicando que alguns meses são extremamente chuvosos, enquanto outros apresentam pouca precipitação.

Tabela 28 – Estatísticas descritivas da precipitação total mensal (mm) no período de 1980 a 2023 para os dados da DAEE - Monte Belo.

| Variável     | Média  | Mediana | Q1    | Q3     | Desvio Padrão | CV   | Assimetria |
|--------------|--------|---------|-------|--------|---------------|------|------------|
| Precipitação | 118.93 | 91.50   | 49.98 | 165.10 | 96.34         | 0.81 | 1.07       |

#### 4.3.4.2 Análise da Série Temporal

A série temporal é ajustada para a frequência de 4 meses. O gráfico do ACF (Figura 5a) apresenta um decaimento oscilatório e lento, o que mostra que há efeitos sazonais, com picos a cada dois *lags*; assim, temos evidências de que  $Q = 2$ , mas não apresenta nenhum corte claro em  $q$ . O gráfico de PACF (Figura 5b) também apresenta um padrão oscilatório, mas decai rapidamente; além disso, vemos picos a cada aproximadamente 1 *lag*, o que pode indicar que  $P = 1$ .

O teste de estacionariedade ADF, ao nível de significância de 5%, indicou que é estacionário; logo, não precisa de transformações.

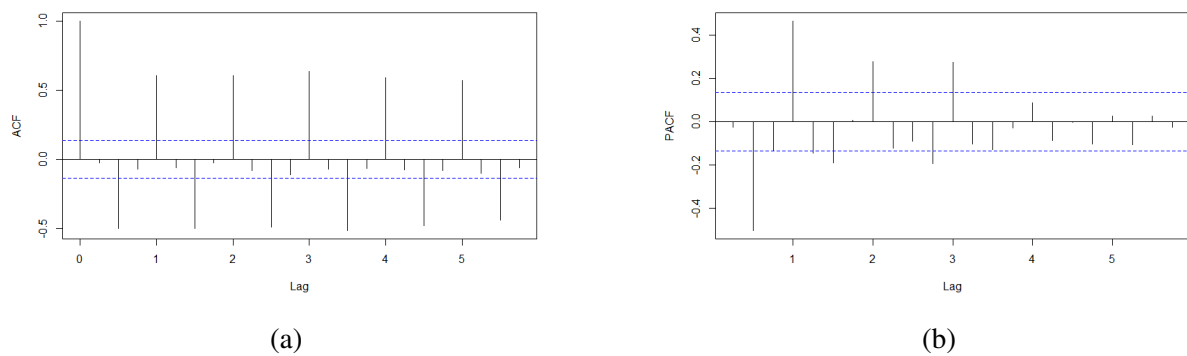


Figura 116 – (a) Gráficos de ACF e (b) PACF da precipitação total mensal para os dados da DAEE.

Pela Figura 117, verifica-se que na decomposição da série pelo método STL não há tendência, mas mostra sazonalidade aparente.

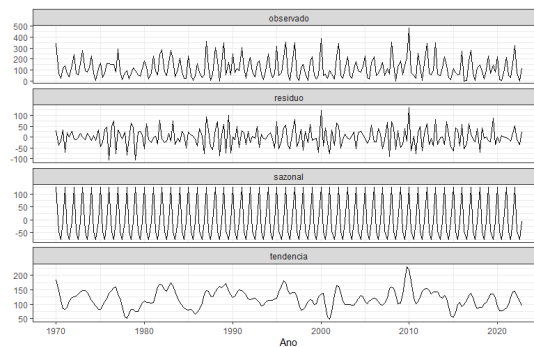


Figura 117 – Decomposição STL da precipitação total mensal para os dados da DAEE - Monte Belo.

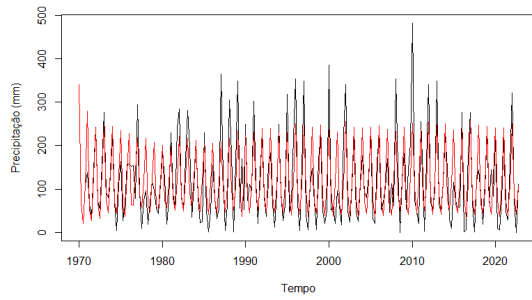
#### 4.3.4.3 Modelagem

Após ajustar diferentes especificações dos modelos AR, MA, ARMA, ARIMA e SARIMA, considerando os ajustes com resíduo branco e comparando seus AICs, os modelos que apresentaram melhor performance e parcimônia foram os SARIMA listados na Tabela 29.

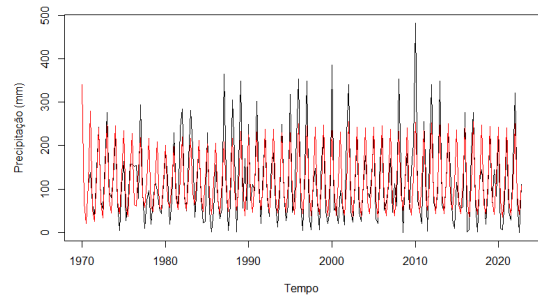
Tabela 29 – Modelos ajustados para a precipitação total mensal (DAEE - Monte Belo) e seus respectivos valores de AIC.

| Modelo                   | AIC     |
|--------------------------|---------|
| SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2) | 2246.00 |
| SARIMA(0, 0, 0)(2, 1, 2) | 2248.03 |
| SARIMA(0, 0, 4)(0, 1, 0) | 2248.93 |

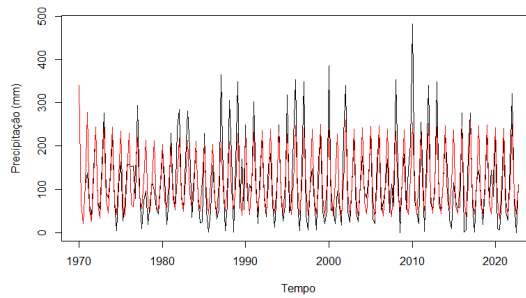
Podemos verificar que os modelos se ajustaram bem à série original, conforme mostrado na Figura 118, levando em conta a parcimônia. o modelo escolhido, com o menor número de parâmetros e AIC baixo, seria o SARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1) (Figura 118a).



(a) SARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1)



(b) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1)

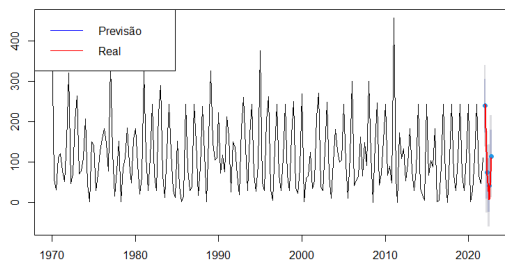


(c) SARIMA(1, 0, 0)(1, 1, 1)

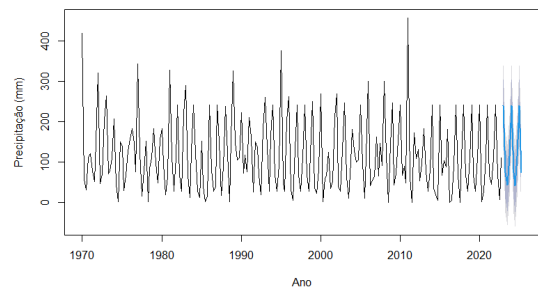
Figura 118 – Modelos ajustados sobrepostos à série original: (a) SARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1), (b) SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) e (c) SARIMA(1, 0, 0)(1, 1, 1)

### 4.3.5 Previsão para os dados da DAEE

Para validar os modelos escolhidos, os dados foram divididos em conjuntos de treinamento e validação com uma janela de 4 anos (Figuras 119a, 120a, 121a e 122a). Dentre os três modelos testados em cada um, os modelos SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2), SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 1), SARIMA(1, 0, 0)(0, 1, 1) e SARIMA(0, 0, 1)(0, 1, 1) para os dados da Água Branca, Santo Amaro, Observatório IAG e Monte Belo, respectivamente, apresentaram os menores valores de MAE, RMSE e MAPE, indicando melhor desempenho preditivo.



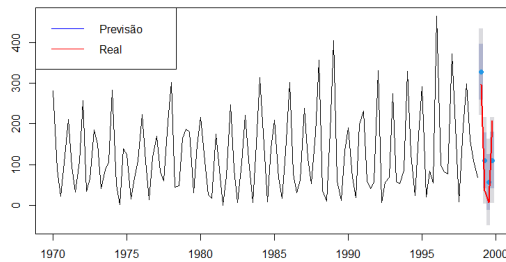
(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



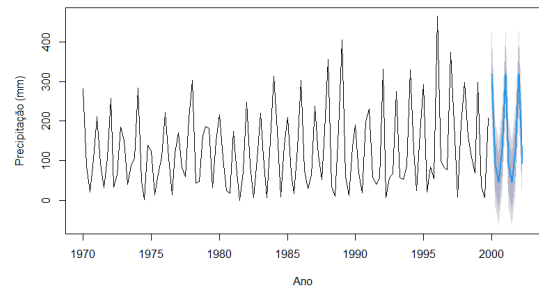
(b) Previsão (10 anos).

Figura 119 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Água Branca (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2).

As previsões dos modelos SARIMA para um horizonte de 10 anos demonstram adequação ao comportamento histórico das séries (Figuras 119b, 120b, 121b e 122b). As faixas azuis, que representam os intervalos de predição de 95%, expandem-se gradualmente conforme aumenta o horizonte preditivo.

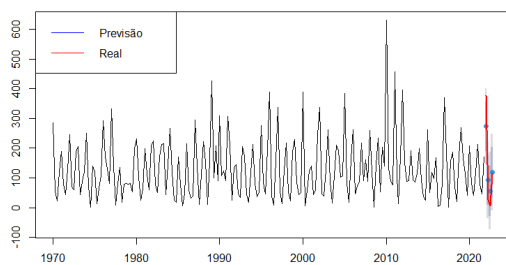


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

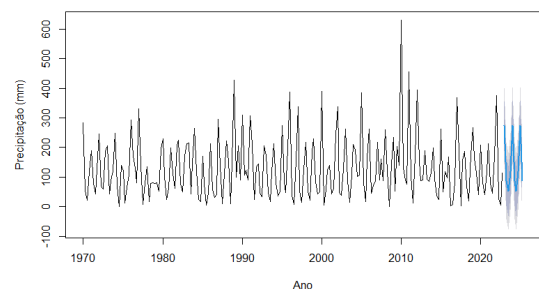


(b) Previsão (10 anos).

Figura 120 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Santo Amaro (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2).

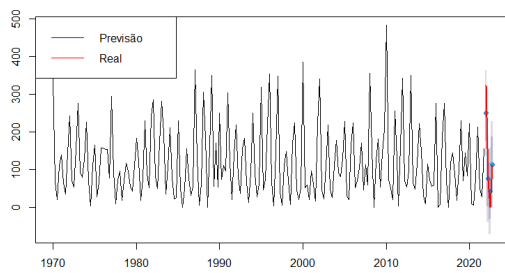


(a) Modelo versus valores reais (4 anos).

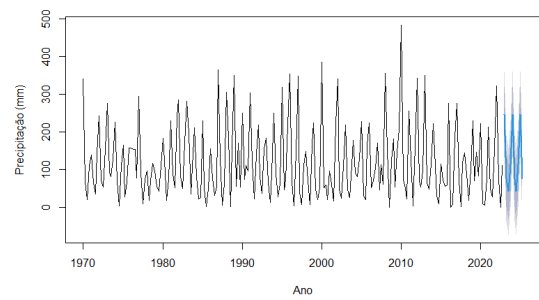


(b) Previsão (10 anos).

Figura 121 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total no Observatório IAG (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2).



(a) Modelo versus valores reais (4 anos).



(b) Previsão (10 anos).

Figura 122 – Comparação entre (a) modelo e valores reais de 4 anos e (b) previsão para 10 anos para a Precipitação Total em Monte Belo (DAEE) com o modelo SARIMA(0, 0, 0)(0, 1, 2).

## 5 Conclusões

Este trabalho analisou séries temporais de precipitação e temperatura para estações do Estado de São Paulo, empregando os modelos ARIMA e SARIMA no período de 1970 a 2023. Os principais resultados evidenciam que:

- A precipitação apresenta alta variabilidade e padrões sazonais bem definidos, mas sem uma tendência monotônica significativa nas séries analisadas;
- A temperatura exibe uma tendência de crescimento significativa ao longo dos anos, consistente com o cenário de aquecimento global e mudanças climáticas;
- Os modelos ARIMA e SARIMA se adequaram à parte dos dados, mas os modelos são limitados para séries com alta aleatoriedade.

Observou-se que os dados de precipitação não apresentam tendência significativa, mas estão se tornando progressivamente mais irregulares, com um aumento na frequência de eventos extremos, o que sugere um maior risco de secas e inundações. Esse comportamento é relatado em [Trenberth \(2011\)](#), que explica que o aumento da temperatura da terra potencializa o ciclo da água, amplificando os contrastes de precipitação. A componente aleatória domina a previsibilidade dessas séries, exigindo potencialmente modelos não lineares e que incorporem variáveis exógenas.

Por outro lado, os dados de temperatura revelam uma tendência ascendente consistente nas temperaturas mínimas, médias e máximas, além de serem mais estáveis. Este padrão configura um alerta climático para a região, com possíveis implicações para a agricultura, saúde pública e gestão de recursos hídricos.

A validação dos modelos ARIMA e SARIMA, embora estatisticamente adequada, muitas vezes não se adequou ao comportamento da série, seja pelo número de *outliers* ou pela sazonalidade; logo, a previsão não foi precisa, com intervalos de predição elevados.

As limitações do estudo incluem: (i) a presença de *outliers*, principalmente nas séries de precipitação, que dificultam a estimação de parâmetros; (ii) sazonalidades complexas que podem mascarar aspectos da série; e (iii) a não inclusão de variáveis explicativas, como, por exemplo, os índices oceânicos (*El Niño* e *La Niña*) ou o uso do solo. Para trabalhos futuros, recomenda-se abranger a análise para outras estações do Estado de São Paulo, incorporar técnicas de *machine learning* (como redes neurais e florestas aleatórias) e modelos mistos.

Em síntese, este estudo contribui para a compreensão das mudanças climáticas em regiões de São Paulo nas últimas cinco décadas, evidenciando a crescente variabilidade pluviométrica e o aquecimento regional. A análise de séries temporais de temperatura e precipitação mensal é fundamental para identificar tendências e variações, especialmente considerando que, como destacado por [Coumou e Rahmstorf \(2012\)](#), eventos como ondas de calor e extremos de precipitação apresentam evidências cada vez mais fortes de estarem ligados à influência antrópica no clima. Os resultados fornecem subsídios para a formulação de políticas públicas de adaptação climática e gestão de riscos ambientais no Estado de São Paulo.



# Referências

- AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 19, n. 6, p. 716–723, 1974. 14
- BOX, G. E. P. et al. *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. 5. ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016. ISBN 978-1-118-67502-1. viii, 5, 16
- CLEVELAND, R. B. et al. Stl: A seasonal-trend decomposition procedure based on loess. *Journal of Official Statistics*, Statistics Sweden (SCB), v. 6, n. 1, p. 3–73, 1990. 8
- COUMOU, D.; RAHMSTORF, S. A decade of weather extremes. *Nature Climate Change*, v. 2, n. 7, p. 491–496, 2012. 98
- COWPERTWAIT, P. P. S.; METCALFE, A. V. *Introductory Time Series with R*. New York: Springer, 2009. ISBN 978-0-387-88697-8. 11
- Departamento de Águas e Energia Elétrica (DAEE). *Banco de Dados Hidrológicos*. 2024. <<http://www.hidrologia.daece.sp.gov.br/>>. Acesso em: abr. 2024. 22
- FARANDA, D. et al. A climate-change attribution retrospective of some impactful weather extremes of 2021. *Weather and Climate Dynamics*, v. 3, p. 1311–1340, 2022. 1
- GROLEMUND, G.; WICKHAM, H. Dates and times made easy with lubridate. *Journal of Statistical Software*, v. 40, n. 3, p. 1–25, 2011. Disponível em: <<https://www.jstatsoft.org/v40/i03/>>. 25
- HYNDMAN, R. J. et al. *forecast: Forecasting Functions for Time Series and Linear Models*. [S.l.], 2025. R package version 8.24.0. Disponível em: <<https://pkg.robjhyndman.com/forecast/>>. 25
- HYNDMAN, R. J.; KHANDAKAR, Y. Automatic Time Series Forecasting: The forecast Package for R. *Journal of Statistical Software*, v. 27, p. 1–22, jul. 2008. ISSN 1548-7660. 16
- Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). *Banco de Dados Meteorológicos para Ensino e Pesquisa (BDMEP)*. Brasília, DF, 2024. Disponível em: <<https://bdmep.inmet.gov.br/>>. Acesso em: 10 abr. 2024. 23
- IPCC. *Summary for Policymakers*: In: Climate change 2023: Synthesis report. contribution of working groups i, ii and iii to the sixth assessment report of the intergovernmental panel on climate change. Geneva, Switzerland, 2023. 1–34 p. Acesso em: 10 mar. 2025. 1
- KENDALL, M. G. *Rank Correlation Methods*. 4. ed. London: Charles Griffin & Company, 1975. 5
- Kyoto Protocol. *Kyoto Protocol to the United Nations Framework Convention on Climate Change*. [S.l.], 1997. Acesso em: 10 mar. 2025. Disponível em: <<https://unfccc.int/process-and-meetings/the-kyoto-protocol/what-is-the-kyoto-protocol/kyoto-protocol-targets>>. 1
- LJUNG, G. M.; BOX, G. E. P. On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, v. 65, n. 2, p. 297–303, 1978. 10

- MCLEOD, A. *Kendall: Kendall Rank Correlation and Mann-Kendall Trend Test*. [S.l.], 2022. R package version 2.2.1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=Kendall>>. 25
- MIES, M. et al. Coral bleaching and mortality across a 24° latitudinal range in the southwestern atlantic during the fourth global bleaching event. *Coral Reefs*, 2025. 1
- MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de séries temporais: Modelos lineares univariados*. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2018. v. 1. ISBN 978-85-212-1352-9. 2, 10
- PIAO, S. et al. Plant phenology and global climate change: Current progresses and challenges. *Global Change Biology*, v. 25, n. 6, p. 1922–1940, 2019. Epub 2019 Apr 1. PMID: 30884039. 1
- POHLERT, T. *trend: Non-Parametric Trend Tests and Change-Point Detection*. [S.l.], 2023. R package version 1.1.6. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=trend>>. 25
- R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. Vienna, Austria, 2025. Acesso em: 10 mar. 2025. Disponível em: <<https://www.R-project.org/>>. 25
- SAID, S. E.; DICKEY, D. A. Testing for Unit Roots in Autoregressive-Moving Average Models of Unknown Order. *Biometrika*, [Oxford University Press, Biometrika Trust], v. 71, n. 3, p. 599–607, 1984. ISSN 0006-3444. 4
- TABARI, H. Climate change impact on flood and extreme precipitation increases with water availability. *Scientific Reports*, v. 10, p. 13768, 2020. 1
- TOBLER, W. R. A computer movie simulating urban growth in the detroit region. *Economic Geography*, v. 46, p. 234–240, 1970. 2
- TRAPLETTI, A.; HORNIK, K. *tseries: Time Series Analysis and Computational Finance*. [S.l.], 2024. R package version 0.10-58. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=tseries>>. 25
- TRENBERTH, K. E. Changes in precipitation with climate change. *Climate Research*, v. 47, p. 123–138, 2011. 97
- WICKHAM, H. et al. *ggplot2: Create Elegant Data Visualisations Using the Grammar of Graphics*. [S.l.], 2025. R package version 3.5.2. Disponível em: <<https://ggplot2.tidyverse.org>>. 25
- WICKHAM, H. et al. *dplyr: A Grammar of Data Manipulation*. [S.l.], 2023. R package version 1.1.4. Disponível em: <<https://dplyr.tidyverse.org>>. 25