

Fabiana Magda Garcia Papani

**Cohomologia de Grupos, Dualidade e
Aplicações ao Estudo do Invariante Algébrico
 $E(G, S, M)$**



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Campus de São José do Rio Preto

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Cohomologia de Grupos, Dualidade e Aplicações ao Estudo do Invariante Algébrico $E(G, S, M)$

Fabiana Magda Garcia Papani

Orientadora: Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática - IBILCE - UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências Matemáticas - Área de concentração: Matemática.

Outubro - 1997

São José do Rio Preto - SP



756/98



Agradecimentos

Ao concluir este trabalho agradeço:

- À professora Maria Gorete Carreira Andrade, sem a qual este trabalho não se realizaria, pela liberdade de trabalho concedida, pelos muitos conhecimentos transmitidos, por solucionar minhas dúvidas com clareza, transmitindo assim muita segurança e sobretudo pela paciência e dedicação durante sua orientação amiga.
- À professora Ermínia de Lourdes Campello Fanti pela disponibilidade com que participou de algumas discussões.
- A todos os professores do Departamento de Matemática do IBILCE, pela formação e incentivo. Em especial à Professora Teresa Tochiko Udo que através do seu trabalho como tutora do grupo PET, despertou em mim o gosto pela aprendizagem científica.
- Ao Professor João Peres Vieira pelas sugestões apresentadas.
- A todos os amigos da Pós -Graduação pelo convívio. Em especial à amiga Daniela pelas inúmeras horas de discussões interessantes.
- Aos meus Pais, minha eterna gratidão, pela vida, pelo amor e pela ajuda e incentivo em tudo que busquei realizar.
- Ao meu esposo Carlos pelo apoio, confiança, incentivo, carinho e por compreender minha ausência nas horas de estudo.
- À minha tia Maria Helena e minha avó Helena pela acolhida e pelo amor de mãe.
- Ao meu irmão Tiago e aos meus primos Pedro, Maryna e Matheus pelos momentos de alegria e descontração.
- À Vânia pelo trabalho de digitação.
- À Capes e à Fapesp pelo apoio financeiro.
- A todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.
- A Deus por tudo.



Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo da teoria de homologia e cohomologia (absoluta e relativa) de grupos e suas relações com esta teoria para espaços topológicos. Além disso, estudamos aplicações do invariante $E(G, S, M)$ (definido em [3]), onde (G, S) é um par grupo e M é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo, às teorias de grupos e pares de dualidade e decomposição de grupos, nos casos particulares $M = \mathbb{Z}_2$ e $M = \mathbb{Z}_2G$.

Abstract

In this work we study the Homology and Cohomology of groups (absolute and relative) and its relations with the theory of topological spaces. Furthermore, we apply the invariant $E(G, S, M)$ (as defined in [3]), where, (G, S) is a group pair and M is a $\mathbb{Z}_2G$ -module, to the group and duality pairs and groups splittings theories, in the particular cases $M = \mathbb{Z}_2$ and $M = \mathbb{Z}_2G$.

A meus pais,
Carlos e Tiago
dedico.

Resumo

Neste trabalho fizemos um estudo da teoria de homologia e cohomologia (absoluta e relativa) de grupos e suas relações com esta teoria para espaços topológicos. Além disso, estudamos aplicações do invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$ (definido em [3]), onde $(G, \mathcal{S})$ é um par grupo e M é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo, às teorias de grupos e pares de dualidade e decomposição de grupos, nos casos particulares $M = \mathbb{Z}_2$ e $M = \mathbb{Z}_2G$.

Abstract

In this work we study the Homology and Cohomology of groups (absolute and relative) and its relations with the theory of topological spaces. Furthermore, we apply the invariant $E(G, \mathcal{S}, M)$ (as defined in [3]), where $(G, \mathcal{S})$ is a group pair and M is a $\mathbb{Z}_2G$ -module, to the group and duality pairs and groups splittings theories, in the particular cases $M = \mathbb{Z}_2$ and $M = \mathbb{Z}_2G$.

Conteúdo

1	Preliminares	1
1.1	Módulos Projetivos e RG-Módulos	1
1.2	Resoluções Livres e Projetivas	5
1.3	Resoluções e Complexos de Cadeia Homotopicamente Equivalentes	17
1.4	Coinvariantes	20
1.5	Módulos Induzidos e Coinduzidos	22
2	(Co)Homologia de Grupos - Produtos Livres Amalgamados e Extensões HNN	29
2.1	A Definição de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$	29
2.2	Interpretação Topológica para $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$	37
2.3	Os Grupos $H_1(G; M)$ e $H^1(G; M)$	42
2.4	H_* e H^* como Funtores do Módulo Coeficiente e como Funtores de Duas Variáveis	45
2.5	A Homologia de Produtos Livres Amalgamados e Extensões HNN	47
3	(Co)Homologia Relativa de Grupos e Dualidade	60
3.1	A Definição de $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$	60
3.2	(Co)Homologia Relativa como Funtor de Duas Variáveis	63
3.3	Interpretação Topológica da (Co)Homologia Relativa	71
3.4	Grupos e Pares de Dualidade	77
4	Os Invariantes $E'(G, S)$ e $\overline{E}(G, S)$	89
4.1	O Invariante $E(G, S, M)$	89
4.2	O Invariante $E'(G, S)$	92
4.3	O Invariante $\overline{E}(G, S)$	96

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar a teoria de homologia e cohomologia absoluta e relativa de grupos, suas relações com esta teoria para espaços topológicos e através destas teorias estudar o invariante algébrico $E(G, S, M)$ onde G é um grupo, $S = \{S_i; i \in I\}$ é uma família de subgrupos de índice infinito em G e M é um $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo, nos casos $M = \mathbb{Z}_2$ e $M = \mathbb{Z}_2 G$, isto é, estudar os invariantes $E(G, S, \mathbb{Z}_2)$ e $E(G, S, \mathbb{Z}_2 G)$ aqui denotados por $E'(G, S)$ e $\overline{E}(G, S)$ respectivamente. Além disso estudaremos aplicações destes dois invariantes no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade e no caso em que G se decompõe sobre certos subgrupos.

O invariante algébrico $E(G, S, M)$ foi definido por Andrade e Fanti em [1] da seguinte forma:

$$E(G, S, M) = 1 + \dim \ker ((res_i)_{i \in I}),$$

onde $res_i : H^*(G; M) \rightarrow H^*(S_i; M)$ é a aplicação induzida, no nível 1 de cohomologia, das inclusões $i : S_i \rightarrow G$.

Em [1], Andrade e Fanti se dedicaram ao caso em que $S = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$ obtendo vários resultados e aplicações do invariante $E(G, S, \mathbb{Z}_2(G/S))$ denotado por $E(G, S)$, à teoria de grupos e pares de dualidade.

Para cada $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo específico M podemos tentar obter novos resultados e aplicações. Os casos $M = \mathbb{Z}_2 G$ e $M = \mathbb{Z}_2$, que enfocaremos neste trabalho, foram considerados em [3] e nossos estudos nestes casos foram baseados nesta referência.

A seguir relataremos sucintamente o objeto de estudo em cada capítulo.

No Capítulo 1 recordaremos no Parágrafo 1.1 alguns resultados sobre módulos projetivos, que serão úteis no decorrer deste trabalho e introduziremos o conceito de RG -módulos, onde R é um anel comutativo com unidade e G é um grupo denotado multiplicativamente.

Em 1.2 definiremos R -resoluções projetivas de M e faremos alguns exemplos de RG -resoluções projetivas de R , entre elas a resolução padrão que utilizaremos em 2.3, e veremos como obter resoluções livres de R sobre RG via topologia, a saber, através de CW -complexos X cujo o recobrimento universal é contrátil. Um espaço deste tipo é chamado $K(G, 1)$ -complexo, onde $G = \pi_1(X)$; que serão importantes no Capítulo 2.

No Parágrafo 1.3 veremos que as várias resoluções projetivas de um R -módulo M são todas homotopicamente equivalentes, faremos uma breve recordação de funtores e demonstraremos o importante

resultado: "Se $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ são resoluções projetivas de M e T é um funtor aditivo então TF e TF' são homotopicamente equivalentes", que garante que os grupos de (co)homologia $H^*(G; M)$ e $H_*(G; M)$ são bem definidos.

No Parágrafo 1.4 introduziremos o conceito de funtor coinvariante, que será útil em 2.1.

Em 1.5 estudaremos os módulos induzidos e coinduzidos, módulos estes muito importantes em todo este trabalho principalmente na relação, dada pelo isomorfismo de Shapiro, da (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia de um subgrupo S de G , na obtenção de resultados sobre grupos e pares de dualidade e no estudo dos invariantes $E'(G, S)$ e $\overline{E}(G, S)$.

No Capítulo 2, estudaremos a (co)homologia absoluta de um grupo G .

Em 2.1 definiremos os grupos de (co)homologia de um grupo com coeficientes em um RG -módulo M , a saber:

$$H_*(G; M) = H_* \left(F \bigotimes_{RG} M \right) \text{ e } H^*(G; M) = H^*(\text{Hom}_{RG}(F, M))$$

onde $\varepsilon : F \rightarrow R$ é uma RG -resolução projetiva de R . Faremos alguns exemplos e aplicações tais como: "Se G é um grupo cíclico finito não trivial então $\mathbb{Z}$ não admite resolução projetiva de comprimento finito sobre $\mathbb{Z}G$ ".

No Parágrafo 2.2 daremos uma interpretação topológica para $H^*(G; M)$ e $H_*(G; M)$ no caso em que M é um RG -módulo trivial, isto é,

$$H^*(G; M) = H^*(K(G, 1); M) \text{ e } H_*(G; M) = H_*(K(G, 1); M).$$

Esta interpretação é importante pois nos permite calcular a (co)homologia de um grupo G através da (co)homologia do espaço (CW -complexo) $K(G, 1)$.

Em 2.3 estudaremos os grupos $H_1(G; M)$ e $H^1(G; M)$ que têm interpretações especiais, a saber:

"Se M é um RG -módulo trivial então $H_1(G; M) \simeq G_{ab} \bigotimes_{\mathbb{Z}} M$ e $H^1(G; M) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(G_{ab}, M)$ " onde G_{ab} denota o grupo G abelianizado.

No Parágrafo 2.4 observaremos que $H^*(G; -)$ e $H_*(G; -)$ são funtores covariantes e veremos $H^*(-; -)$ e $H_*(-; -)$ como funtores de duas variáveis.

Encerrando o Capítulo 2, faremos, no Parágrafo 2.5, um breve estudo da teoria de decomposição de grupos, isto é, estudaremos G que se decompõe sobre um subgrupo S na forma $G = G_1 *_S G_2$ (produto livre amalgamado) ou $G = G_1 *_S \sigma$ (extensão HNN). Também veremos como se comporta a (co)homologia de grupos deste tipo através das seqüências de Mayer-Vietoris.

No Capítulo 3 veremos o conceito de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $\mathcal{S} = \{S_i; i \in I\}$ de subgrupos de G .

Em 3.1 veremos a definição de $H_*(G, \mathcal{S}; M)$ e $H^*(G, \mathcal{S}; M)$, devida a Bieri-Eckmann [5] e também a definição equivalente de cohomologia relativa $H^*(G, \mathcal{S}; M)$ devida a Ribes [16].

No Parágrafo 3.2 estudaremos a funtorialidade da (co)homologia relativa e obteremos seqüências exatas longas em (co)homologia para o par $(G, \mathcal{S})$.

Assim como para a (co)homologia absoluta de grupos, veremos em 3.3 uma interpretação topológica para a (co)homologia relativa de grupos, a saber: "Se M é um RG -módulo trivial então:

$$H_*(G, \mathcal{S}; M) \simeq H_*(K((G, \mathcal{S}), 1); M) \text{ e } H^*(G, \mathcal{S}; M) \simeq H^*(K((G, \mathcal{S}), 1); M)$$

onde $K((G, \mathcal{S}), 1)$ denota um par de CW -complexos (X, Y) , onde $X = K(G, 1)$ e Y é um subcomplexo cujas componentes conexas são $K(S_i, 1)_{i \in I}$, chamado par Eilenberg-MacLane". Através desta interpretação topológica podemos calcular a (co)homologia relativa de grupos usando a (co)homologia de espaços.

Finalizando o Capítulo 3, estudaremos em 3.4, os importantes conceitos, entre outros, de grupos e pares de dualidade, suas interpretações topológicas e exemplos via topologia.

No Capítulo 4 estudaremos o invariante algébrico $E(G, \mathcal{S}; M)$.

Em 4.1, veremos a definição deste invariante e suas propriedades principais.

No Parágrafo 4.2, nos deteremos ao caso em que M é o $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo trivial $\mathbb{Z}_2$. Veremos a relação de $E'(G, \mathcal{S}) = E(G, \mathcal{S}; \mathbb{Z}_2)$ com as teorias de decomposição de grupos e pares de dualidade. Entre outros resultados veremos que "Se $(G, \mathcal{S} = \{S_i, i = 1, \dots, r\})$ é um par de dualidade de Poincaré, com $[G : S_i] = \infty$ e G finitamente apresentado, então $E'(G, \mathcal{S}) = 2 - r + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$ " e um resultado que fornece uma condição necessária para que um grupo G se decomponha sobre um subgrupo S .

Finalmente em 4.3, estudaremos o invariante $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = E(G, \mathcal{S}, \mathbb{Z}_2 G)$, que também tem relação com as teorias de decomposição de grupos e grupos e pares de dualidade. Entre outros resultados, veremos que $\overline{E}(G, \mathcal{S})$ fornece uma condição necessária para que $(G, \mathcal{S})$ seja um par de dualidade, isto é: "Se $(G, \mathcal{S})$ é um par de dualidade de dimensão n ($n > 1$), então $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = 1$ ".

Nos Capítulos 1 à 3, R denotará um anel comutativo com unidade, mas estaremos interessados nos casos em que $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$ e especificaremos cada um destes casos quando se fizer necessário. No Capítulo 4 trabalharemos com $R = \mathbb{Z}_2$ pois estaremos interessados em ver os grupos de (co)homologia como $\mathbb{Z}_2$ -espaços vetoriais e assim poder usar o conceito de dimensão.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Módulos Projetivos e RG-Módulos

Neste parágrafo recordaremos alguns resultados sobre módulos projetivos e introduziremos o conceito de RG-módulos, onde G é um grupo.

Definição 1.1.1 Um módulo P é chamado R -projetivo se existe solução para todo problema de aplicação do tipo abaixo, onde $M' \rightarrow M \rightarrow M''$ é uma seqüência exata de R -módulos.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \swarrow \psi & \downarrow \varphi & \searrow & 0 \\ M' & \xrightarrow{i} & M & \xrightarrow{j} & M'' \end{array}$$

Uma solução para este problema consiste de uma aplicação $\psi : P \rightarrow M'$ tal que $i \circ \psi = \varphi$.

Lema 1.1.1 Todo módulo livre é projetivo.

Demonstração: [7], 1.7.2

Lema 1.1.2 As seguintes condições para um R -módulo são equivalentes:

- (i) P é projetivo
- (ii) Toda seqüência exata $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow 0$ cinde.
- (iii) P é somando direto de um módulo livre.

Demonstração: [7], 1.8.2



Exemplo 1.1.1 Sejam R um anel e $e \in R$ um elemento idempotente, isto é, $e^2 = e$. Então o ideal à esquerda Re é R -projetivo.

De fato, seja $\pi : R \rightarrow Re$ dada por $\pi(r) = re$.

Dado $r \in R$, temos que $r - re = a \in \ker \pi$ pois, $\pi(r - re) = re - re^2 = re - re = 0$.

Portanto $r = a + re$ onde $a \in \ker \pi$ e $re \in Re$.

Agora $\ker \pi \cap Re = \{0\}$ pois, $x \in \ker \pi \cap Re \Rightarrow \pi(x) = 0$ $x = re \Rightarrow xe = 0$ e $x = re \Rightarrow re^2 = 0 \Rightarrow re = 0 \Rightarrow x = 0$.

Portanto $R = \ker \pi \oplus Re$.

Como R é R -livre temos, pelo Lema 1.1.2 (iii), que Re é R -projetivo.

Exemplo 1.1.2 (Exemplos de módulos projetivos que não são livres).

a) Sejam $R = \mathbb{Z}_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$ e $e = \bar{3}$.

Temos $\bar{3}^2 = \bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{9} = \bar{3}$ e portanto $\bar{3}$ é idempotente.

Logo, pelo exemplo anterior, $\mathbb{Z}_6\bar{3} = \{\bar{0}, \bar{3}\}$ é $\mathbb{Z}_6$ -projetivo. Agora se $\mathbb{Z}_6\bar{3}$ fosse $\mathbb{Z}_6$ -livre $\mathbb{Z}_6\bar{3} = \bigoplus \mathbb{Z}_6 \Rightarrow \mathbb{Z}_6\bar{3}$ teria no mínimo 6 elementos.

Portanto $\mathbb{Z}_6\bar{3}$ não é $\mathbb{Z}_6$ -livre.

b) Considere $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$. Pelo Lema 1.1.2 (iii) $\mathbb{Z}_2$ é $\mathbb{Z}_6$ -projetivo. Mas $\mathbb{Z}_2$ não é $\mathbb{Z}_6$ -livre pelo mesmo motivo do item anterior.

Definição 1.1.2 Um R -módulo M é chamado R -plano se para qualquer seqüência exata curta de R -módulos $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ a seqüência

$$0 \rightarrow A \otimes_R M \rightarrow B \otimes_R M \rightarrow C \otimes_R M \rightarrow 0 \text{ é exata.}$$

Lema 1.1.3 Todo módulo projetivo é plano.

Demonstração: [14], 1.9 exercício 9E. ■

Definição 1.1.3 Sejam R um anel comutativo com unidade 1 e G um grupo denotado multiplicativamente. Seja RG o R -módulo livre gerado pelos elementos de G . Daí um elemento de G é expresso

unicamente na forma $\sum_{g \in G} \alpha_g g$, onde $\alpha_g \in R$ e $\alpha_g = 0$ para quase todo g .

Em RG definimos a multiplicação

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} \beta_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \alpha_g \beta_h gh$$

e a soma

$$\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g \right) + \left(\sum_{g \in G} \beta_g g \right) = \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g$$

que fazem de RG um anel comutativo com unidade $1e$, onde e é o elemento neutro de G , chamado anel grupo de G sobre R .

Observação 1.1.1 Neste trabalho estaremos interessados em trabalhar com RG -módulos, nos casos $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$ e sempre que necessário especificaremos o anel a ser utilizado.

Para melhor caracterizarmos RG -módulos necessitaremos do conceito de ação de um grupo em um conjunto.

Sejam G um grupo e X um conjunto não vazio. Uma ação (à esquerda) de G em X é uma aplicação $\phi : G \times X \rightarrow X$, $(g, x) \mapsto \phi(g, x) = gx$ satisfazendo, para todo $x \in X$, as condições:

- a) $ex = x$ (e : elemento neutro de G).
- b) $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$, $\forall g_1, g_2 \in G$.

Equivalentemente, uma ação de G em X é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Bij}(X)$ dado por $\varphi(g) = \varphi_g$ tal que $\varphi_g(x) = gx$ onde $\text{Bij}(X) = \{f : X \rightarrow X; f \text{ é uma bijeção}\}$ é um grupo com a operação de composição.

Para simplificarmos a notação, escreveremos $g : X \rightarrow X$ em lugar de $\varphi_g : X \rightarrow X$.

Se X tiver estrutura de grupo (aditivo) e quisermos preservar esta estrutura através da G -ação, exigiremos que a aplicação $g : X \rightarrow X$ seja um homomorfismo de grupos, isto é, que ϕ satisfaça a condição adicional:

- c) $g(x_1 + x_2) = gx_1 + gx_2$, $\forall g \in G$ e $x_1, x_2 \in X$.

Assim, uma ação de G em um grupo aditivo é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(X)$, onde $\text{Aut}(X)$ denota o grupo de automorfismos de X .

Agora, se X é um espaço topológico, é natural que queiramos que a G -ação preserve a estrutura topológica de X .



Para isso exigiremos que a aplicação $g : X \rightarrow X$ seja contínua, para todo $g \in G$.

Deste modo, uma ação de um grupo G em um espaço topológico X é um homomorfismo $\varphi : G \rightarrow \text{Homeo}(X)$ onde $\text{Homeo}(X)$ denota o grupo dos homeomorfismos de X .

Observe que neste caso, se considerarmos em G a topologia discreta, a ação $\phi : G \times X \rightarrow X$ é uma aplicação contínua.

Sempre que tivermos um grupo G atuando em um conjunto X chamaremos este conjunto de **G-conjunto**.

Dizemos que X é um **G-conjunto livre** se a ação de G em X é livre, isto é, $gx = x$ para algum $x \in X \Leftrightarrow g = e$.

Dizemos que X é um **G-conjunto trivial** se a ação de G em X é trivial, isto é, $gx = x, \forall x \in X$ e $\forall g \in G$.

Proposição 1.1.1: *Seja R um anel comutativo com unidade, G um grupo (multiplicativo) e A um conjunto não vazio. Então A é um RG -módulo (à esquerda) se, e somente se, A é um R -módulo munido com uma ação de G em A .*

Demonstração: Seja A um RG -módulo. Temos que A consiste de um grupo abeliano munido com um homomorfismo $\rho : RG \rightarrow \text{End}(A)$, onde $\text{End}(A)$ denota o anel dos homomorfismos de A .

Este homomorfismo ρ induz uma ação de G em A dada pela aplicação $\phi : G \times A \rightarrow A$ definida por $\phi(g, a) = ga = \rho(g)(a)$.

Além disso podemos definir um homomorfismo $\tilde{\rho} : R \rightarrow \text{End}(A)$ dado por $\tilde{\rho}(r) = \rho(re)$, onde e denota o elemento neutro de G . Com este homomorfismo $\tilde{\rho}$ fazemos de A um R -módulo.

Reciprocamente, dado um R -módulo A munido de uma ação $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(A)$, temos induzido um homomorfismo $\rho : RG \rightarrow \text{End}(A)$ dado por $\rho\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum \alpha_g \varphi(g)$.

Este homomorfismo, junto com a estrutura de grupo abeliano do R -módulo A , faz de A um RG -módulo, como queríamos. ■

Observação 1.1.2 a) *Seja $\varepsilon : RG \rightarrow R$ a aplicação aumentação usual definida por $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$ e*

$$\varepsilon\left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) = \sum_{g \in G} \alpha_g \varepsilon(g) = \sum_{g \in G} \alpha_g.$$

Se A é um RG -módulo trivial e $\alpha = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in RG$ então $\alpha m = \left(\sum_{g \in G} \alpha_g g\right) m = \sum_{g \in G} \alpha_g (gm) = \varepsilon(\alpha) m$.

b) Todo R -módulo M pode ser visto como um RG -módulo se considerarmos em M a G -ação trivial.

Em particular um anel R pode ser visto como um RG -módulo trivial.

Neste trabalho, a menos que se especifique o contrário, veremos R como RG -módulo trivial.

c) Para todo grupo G a única estrutura de $\mathbb{Z}_2$ como $\mathbb{Z}_2G$ -módulo é a de $\mathbb{Z}_2G$ -módulo trivial.

De fato, seja $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_2)$ um homomorfismo tal que $\varphi(g) = \varphi_g$.

Como $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2) = \{\text{id}\}$ temos que $\varphi_g = \text{id}_{\mathbb{Z}_2}, \forall g \in G$.

Portanto a única G -ação sobre $\mathbb{Z}_2$ é a trivial.

Definição 1.1.4 Seja X um G -conjunto e $x \in X$. Definimos a G -órbita de x como o conjunto $G(x) = \{gx; g \in G\}$.

O seguinte resultado será útil nos parágrafos seguintes:

Proposição 1.1.2 Seja X um G -conjunto livre e seja E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X . Então RX (R -módulo livre gerado por X) é um RG -módulo livre com base E .

Demonstração: [7], 1.3.1. ■

1.2 Resoluções Livres e Projetivas

Definição 1.2.1 Seja R um anel (comutativo com unidade 1) e M um R -módulo. Uma resolução de M sobre R ou uma R -resolução de M é uma seqüência exata de R -módulos

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0.$$

A aplicação $\varepsilon: F_0 \rightarrow M$ é chamada aplicação aumentação. Se cada F_i é livre, dizemos que a resolução é livre. Se cada F_i é projetivo dizemos que a resolução é projetiva.

Notação: $\varepsilon: F \rightarrow M$ denotará uma resolução de M .

Lema 1.2.1 Dado um R -módulo M sempre podemos construir uma resolução livre de M sobre R .

Demonstração: Sabemos que todo R -módulo M é o quociente de um R -módulo livre ([14], 1.4.6).

Isto é, $M \simeq F_0/A_0$, onde F_0 é R -livre.

Seja $\varepsilon: F_0 \rightarrow F_0/A_0$, dada por $\varepsilon(x) = \bar{x}$, a projeção canônica.

Temos que $\ker \varepsilon$ é submódulo de F_0 e então $\ker \varepsilon = F_1/A_1$, onde F_1 é livre.

Seja $\delta_1: F_1 \rightarrow \ker \varepsilon = F_1/A_1$ a projeção. E procedendo sucessivamente desta maneira obtemos a seguinte R -resolução livre de $M: \dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\delta_2} F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$. ■

Exemplo 1.2.1 Se F é um R -módulo livre então $0 \rightarrow F \xrightarrow{id} F \rightarrow 0$ é uma R -resolução livre de F .

Exemplo 1.2.2 Seja M um R -módulo, onde R é um domínio de ideais principais. Temos que $M \simeq \frac{F_0}{F_1}$, onde F_0 é livre. Como R é domínio de ideais principais temos que qualquer submódulo de um R -módulo livre é livre ([14], 1.4 ex. 4G). Logo F_1 é livre, pois é submódulo de F_0 .

Assim temos que $0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{p} M \rightarrow 0$, onde $i: F_1 \rightarrow F_0$ é a inclusão e $p: F_0 \rightarrow M$ é a projeção, é uma R -resolução livre de M .

Resolução Padrão

Uma resolução projetiva de bastante importância no estudo de homologia e cohomologia de um grupo G é a resolução padrão.

Considere a sequência $\dots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_2 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow R \rightarrow 0$, onde cada F_n é o R -módulo livre gerado pelas $(n+1)$ -uplas $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ de elementos de G .

O operador bordo $\delta_n: F_n \rightarrow F_{n-1}$ é definido por

$$\delta_n(g_0, \dots, g_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i (g_0, \dots, \hat{g}_i, \dots, g_n)$$

nos geradores e estendidos por linearidade.

A aplicação aumentação $\varepsilon: F_0 \rightarrow R$ é definida por $\varepsilon(g_0) = 1, \forall g_0 \in G$, e estendida por linearidade.

Afirmção: O complexo $\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\delta_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ é exato.

De fato: Mostremos primeiramente que F é contrátil. Para isso vamos construir uma homotopia h entre id_F e 0 ([7], 1.0).

Defina $h_n: F_n \rightarrow F_{n+1}$ por:
$$\begin{cases} h_n(g_0, \dots, g_n) = (e, g_0, \dots, g_n) & \text{se } n \geq 0 \\ h_n(1) = (e) & \text{se } n = -1. \end{cases}$$

Claramente $\varepsilon \circ h_{-1} = id$

$$h_{-1} \circ \varepsilon + \delta_1 \circ h_0 = id$$

$$h_{n-1} \circ \delta_n + \delta_{n+1} \circ h_n = id.$$

Logo, temos que h é homotopia de cadeia e assim $id_{F_n} \sim 0$. Portanto F é contráctil. Mas, se um complexo C é contráctil então C é acíclico, isto é, $H_q(C) = 0, \forall q$ ([7], 1.0).

Assim temos que F é acíclico e portanto o complexo é exato.

Considerando a G -ação em F_n definida por $g(g_0, g_1, \dots, g_n) = (gg_0, gg_1, \dots, gg_n)$ e $X_n = \{(g_0, \dots, g_n); g_i \in G, \forall i\}$, temos que X_n é um G -conjunto livre pois, $g(g_0, \dots, g_n) = (gg_0, \dots, gg_n) = (g_0, \dots, g_n) \Leftrightarrow g = e$.

Seja E um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n . Assim, pela proposição 1.1.2, $F_n = RX_n$ é um RG -módulo livre com base E .

Vamos considerar representantes especiais para as G -órbitas em X_n . Tomemos como representante da órbita de $(g_0, \dots, g_n)$ o elemento $(1, h_1, \dots, h_n)$ onde $h_i = g_0^{-1}g_i$. Este elemento pode ser escrito na forma $(1, t_1, t_1t_2, \dots, t_1t_2 \dots t_n)$ onde $t_n = h_{n-1}^{-1}h_n$.

Portanto como base para o RG -módulo livre F_n podemos tomar as $(n+1)$ -uplas da forma $(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$. E assim temos que $\dots \rightarrow F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ é uma resolução livre de R sobre RG chamada **resolução padrão**.

Vamos agora introduzir a notação bar.

Denotemos $(1, g_1, g_1g_2, \dots, g_1g_2 \dots g_n)$ por $[g_1 | g_2 | \dots | g_n]$ e assim temos que $\delta_n [g_1 | g_2 | \dots | g_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i [g_1 | \dots | g_n]$ onde

$$d_i [g_1 | \dots | g_n] = \begin{cases} g_1 [g_2 | \dots | g_n] & \text{se } i = 0 \\ [g_1 | \dots | g_{i-1} | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n] & \text{se } 0 < i < n \\ [g_1 | \dots | g_{n-1}] & \text{se } i = n \end{cases}$$

Observação 1.2.1 a) $F_0 = \langle [] \rangle$ onde $[] = 1$, com 1 denotando o elemento neutro de G .

b) $F_0 \simeq RG$.

De fato, defina $\phi : F_0 \rightarrow RG$ por $\phi(\alpha []) = \alpha$. Claramente ϕ é isomorfismo.

Resoluções de R sobre RG via topologia

Veremos agora como obter resoluções livres de R sobre RG através de um espaço topológico especial (chamado CW-complexo) no qual G atua. Para isto precisaremos rever e introduzir alguns conceitos.

Recordemos primeiramente o conceito de CW-complexo:

Definição 1.2.2 Um espaço de Hausdorff X é um CW-complexo se X possui uma coleção de subconjuntos fechados σ_j^q (onde q representa dimensão ($q = 0, 1, 2, \dots$) e j varia sobre um conjunto de índices J_q) e uma família de subespaços fechados $X^0 \subset X^1 \subset \dots \subset X^q \subset \dots$ com $X^q = \bigcup \sigma_j^q$ (por definição $X^{-1} = \emptyset$) e $f_j^q = \sigma_j^q \cap X^{q-1}$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$p \leq q$$

$$j \in J_p$$

$$1) \quad \sigma_i^p - f_i^p \text{ encontra } \sigma_j^q - f_j^q \text{ somente quando } p = q \text{ e } i = j.$$

$$2) \quad X = \bigcup_q X^q.$$

3) Para cada σ_j^q , existe uma aplicação $\phi_j^q: D^q \rightarrow X^q$ (onde D^q é o disco de dimensão q) que leva S^{q-1} (esfera de dimensão $q-1$) sobre f_j^q e aplica $D^q - S^{q-1}$ homeomorficamente sobre $\sigma_j^q - f_j^q$.

(Observação: S^{-1} é o conjunto vazio.)

$$4) \quad f_j^q \text{ intercepta um número finito de conjuntos } (\sigma_i^q - f_i^q).$$

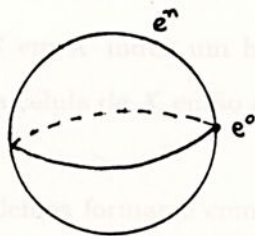
5) Um subconjunto Y de X é fechado se $Y \cap \sigma_j^q$ é fechado em σ_j^q , $\forall q = 0, 1, \dots$ e $\forall j \in J_q$, onde σ_j^q possui a topologia quociente de D^q (via ϕ_j^q).

Notação: Em um CW-complexo X , e^q denotará a célula aberta de dimensão q ($e^q = \sigma^q - f^q$).

Como exemplos de CW-complexo temos:

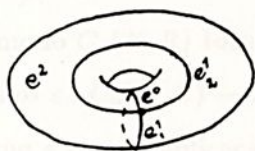
Exemplo 1.2.3 (a) A esfera S^n :

$$S^n = e^0 \cup e^n.$$



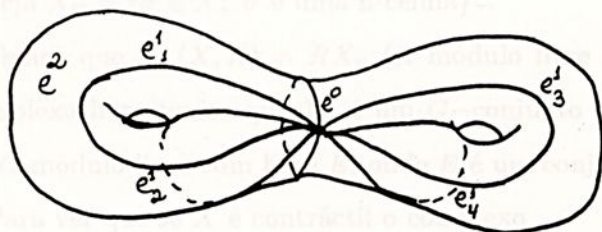
(b) O toro T :

$$T = e^0 \cup e_1^1 \cup e_2^1 \cup e^2.$$



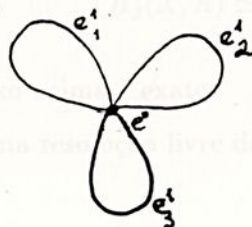
(c) A soma conexa de 2-toros:

$$T \# T = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_4^1 \cup e^2.$$



(d) O bouquet de 3 círculos:

$$\bigvee_{i=1}^3 S_i^1 = \bigcup_{i=1}^3 e_i^1 \cup e^0.$$



Definição 1.2.3 Um G -complexo é um CW -complexo X munido com uma ação de G em X que permuta as células, isto é, se S representa o conjunto das células de X então $gS = S$, $\forall g \in G$. Se a ação de G em X permuta livremente as células dizemos que X é um G -complexo livre.

Note que, como a ação de G em X induz um homeomorfismo $\varphi_g: X \rightarrow X$ definido por $\varphi_g(x) = gx$, temos que se σ é uma célula de X então $g\sigma$ é uma célula de X cuja dimensão é a mesma de σ .

Dado X um G -complexo podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X, R)$, onde $C_n(X, R)$ é o

R -módulo livre gerado pelas células de dimensão n . A ação de G em X induz uma ação em $C_*(X, R)$ da seguinte forma:

$$g(a_1\sigma_1 + \dots + a_n\sigma_n) := a_1g\sigma_1 + \dots + a_ng\sigma_n.$$

Deste modo $C_*(X, R)$ torna-se um complexo de cadeias de RG -módulos.

Definimos $\varepsilon : C_0(X, R) \rightarrow R$ por $\varepsilon(v_0) = 1$ nas 0-células v_0 de X e estendemos ε por linearidade.

Note que ε é uma aplicação de RG -módulos pois gv_0 também é 0-célula e a ação de G em R é trivial.

Nosso objetivo é mostrar que se X é um G -complexo livre contrátil então $C_*(X, R)$ é uma RG -resolução livre de R .

Seja $X_n = \{\sigma \in X; \sigma \text{ é uma } n\text{-célula}\}$.

Temos que $C_n(X, R) = RX_n$ (R módulo livre gerado pelas n -células). Como $X_n \subset X$ e X é G -complexo livre temos que X_n é um G -conjunto livre e assim, pela Proposição 1.1.2, $C_n(X, R)$ é um RG -módulo livre com base E , onde E é um conjunto de representantes para as G -órbitas em X_n .

Para ver que se X é contrátil o complexo

$\dots \rightarrow C_n(X, R) \xrightarrow{\delta_n} C_{n-1}(X, R) \rightarrow \dots \xrightarrow{\delta_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ é exato, basta lembrar que X contrátil implica que X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto e deste modo

$$H_j(X, R) \simeq H_j(\{x_0\}, R) = \begin{cases} R & \text{se } j = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e assim o complexo acima é exato

Daí temos uma resolução livre de R sobre RG .

Como aplicação deste fato temos:

Exemplo 1.2.4 Seja $R = \mathbb{Z}$, $X = \mathbb{R}^2$ e $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

X é contrátil e além disso X é um G -complexo livre pois,

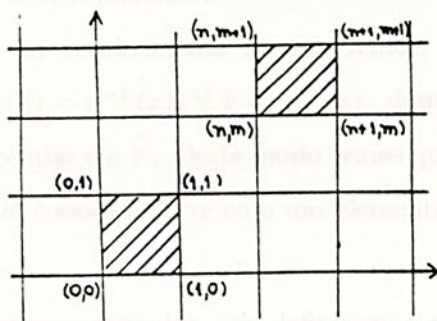
$$(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$((n_1, n_2), (x, y)) \rightarrow (n_1 + x, n_2 + y)$$

é uma ação de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}^2$ que leva célula em célula livremente. Logo pelo visto anteriormente temos que o complexo

$$\dots \rightarrow C_n(\mathbb{R}^2) \rightarrow \dots \rightarrow C_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_1(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Mas $C_n(\mathbb{R}^2) = 0$ para $n > 2$ pois $\mathbb{R}^2$ não tem células de dimensão maior que 2. Determinemos $C_i(\mathbb{R}^2)$ para $i = 0, 1, 2$. Para isso calculemos as órbitas das células.



$$\vdash G(0, 0) := \{(n_1, n_2) \cdot (0, 0) ; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} = \{(n_1, n_2); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$$

Portanto temos uma única G -órbita de 0-células. Daí $C_0(X) \simeq \mathbb{Z}G$

$$\begin{aligned} \vdash G([(0, 0), (1, 0)]) &:= \{(n_1, n_2) \cdot [(0, 0), (1, 0)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \\ &= \{[(n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} \text{ e} \end{aligned}$$

$$\vdash G([(0, 0), (0, 1)]) := \{[(n_1, n_2), (n_1, n_2 + 1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$$

Assim temos 2 órbitas de 1-células: $G([(0, 0), (0, 1)])$ e $G([(0, 0), (1, 0)])$.

Portanto $C_1(X) \simeq \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G$.

$$\begin{aligned} \vdash G([(0, 0), (1, 0)] \times [(0, 0), (0, 1)]) &:= \{(n_1, n_2) \cdot ([(0, 0), (1, 0)] \times [(0, 0), (0, 1)]); (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\} = \\ &= \{[(n_1, n_2), (n_1 + 1, n_2)] \times [(n_1, n_2), (n_1, n_2 + 1)]; (n_1, n_2) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Logo temos uma única órbita de 2-células e daí $C_2(X) \simeq \mathbb{Z}G$.

Deste modo temos que $0 \rightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\delta_2} \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G \xrightarrow{\delta_1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z})$.

Consideremos agora Y um CW -complexo e $\tilde{Y} \xrightarrow{p} Y$ um recobrimento de Y . Por [20], 6.9.2 temos que $\tilde{Y}$ é um CW -complexo onde as n -células $\tilde{\sigma}$ de $\tilde{Y}$ são simplesmente as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n -célula de Y e $p|_{\tilde{\sigma}}: \tilde{\sigma} \rightarrow \sigma$ é homeomorfismo.

Prova-se facilmente que o grupo das transformações de recobrimento, G , atua em $\tilde{Y}$ permutando as células e por [17], 5.6.1 temos que a ação de G em $\tilde{Y}$ é livre.

Agora do fato da ação de G em $\tilde{Y}$ ser livre e de $p|_{\tilde{\sigma}}$ ser homeomorfismo temos que G permuta livremente as células de $\tilde{Y}$. Deste modo temos que $\tilde{Y}$ é um G -complexo livre, onde G é o grupo das transformações de recobrimento.

Portanto, pelo que vimos anteriormente, se $\tilde{Y}$ for contráctil o complexo celular aumentado de $\tilde{Y}$ é uma resolução livre de R sobre RG , onde $C_n(\tilde{Y}, R)$ é um RG -módulo livre com um elemento básico para cada órbita de n -célula em $\tilde{Y}$.

Agora, se $\tilde{Y}$ for recobrimento regular temos, por [17], 5.8.1, que G opera transitivamente em $p^{-1}(x)$, isto é, $G(\tilde{x}) = p^{-1}(x)$, $\forall \tilde{x} \in p^{-1}(x)$, donde concluímos que cada n -célula de Y nos fornece uma órbita de n -células em $\tilde{Y}$. Deste modo temos que se $p : \tilde{Y} \rightarrow Y$ for recobrimento regular contráctil, $C_n(\tilde{Y}, R)$ é um RG -módulo livre com um elemento básico para cada n -célula de Y .

O CW-complexo particular que definiremos abaixo é um CW-complexo que satisfaz todas as condições que referimos anteriormente.

Definição 1.2.4 Consideremos Y um CW-complexo satisfazendo as condições:

- (i) Y é conexo
- (ii) $\pi_1(Y) = G$
- (iii) O recobrimento universal X de Y é contráctil (note que sempre existe recobrimento universal de X , [20], 6.9.1 e [13], 6.7 e que o recobrimento universal é regular).

Tal CW-complexo Y é chamado complexo de Eilenberg-MacLane do tipo $(G, 1)$, ou simplesmente, $K(G, 1)$ -complexo.

Nota: Algumas vezes é conveniente notar que a condição (iii) da definição acima pode ser substituída por (iii)': $H_i(X) = 0$ para $i \geq 2$ ou ainda por (iii)": $\pi_i(Y) = 0$ para $i \geq 2$. ([7], 1.4).

Observação 1.2.2 a) Se $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de um CW-complexo Y temos que $\tilde{Y}$ é um G -complexo onde $G = \pi_1(Y)$.

b) Neste trabalho admitiremos o importante resultado de que dado um grupo G , sempre existe um $K(G, 1)$ -complexo ([7], 8.7.1).

Exemplo 1.2.5 Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$ (grupo abeliano livre de posto n) e $Y = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (toro n dimensional). O recobrimento universal de Y é $\tilde{Y} = \mathbb{R}^n$, que é contráctil, e $\pi_1(Y) = G$.

Portanto Y é um $K(G, 1)$.

Exemplo 1.2.6 Seja $G = F(S)$ o grupo livre gerado por um conjunto S .

Seja $Y = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ um bouquet de círculos.

Temos que Y é um CW-complexo de dimensão 1 com exatamente 1-vértice e uma 1-célula para cada elemento de S e que $\pi_1(Y) = F(S)$.

Além disso Y é conexo e se X é o recobrimento universal de Y temos que X tem dimensão 1 (pois $p : X \rightarrow Y$ é homeomorfismo local) e portanto $H_i(X) = 0$ para $i \geq 2$.

Portanto, Y é um $K(F(S), 1)$.

Lema 1.2.2 Se X é um G -complexo livre compacto então G é finito.

Demonstração: Seja X/G o espaço das órbitas de X . Temos que $p : X \rightarrow X/G$ é recobrimento regular e G atua livremente em X como grupo das transformações de recobrimento ([13], 1.5 ex. 5.10).

Dado $\overline{x_0} \in X/G$, $p^{-1}(\overline{x_0}) = G(x_0)$ e $G(x_0)$ está em correspondência 1-1 com G . Agora a fibra $p^{-1}(\overline{x_0})$ é discreta e fechada.

Suponha $p^{-1}(\overline{x_0})$ infinita. Como $p^{-1}(\overline{x_0})$ é compacta, pela propriedade de Bolzano-Weierstress $p^{-1}(\overline{x_0})$ tem um ponto de acumulação e este está em $p^{-1}(\overline{x_0})$. (Absurdo, pois $p^{-1}(\overline{x_0})$ é discreta).

Logo $p^{-1}(\overline{x_0})$ é finita e daí G é finito. ■

Exemplo 1.2.7 Sejam g um inteiro maior ou igual a 1 e $G = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g; \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$ isto

é, G é o grupo com geradores $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ e a única relação $\prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1$ onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ (G é infinito, [19], 6.4.3).

G é o grupo fundamental da superfície orientada Y de genus g (soma conexa de g toros) ([17], 4.5 Exemplo 5.3)

Vamos provar que Y é um $K(G, 1)$.

Seja $X \xrightarrow{p} Y$ o recobrimento universal de Y . X é não compacto, pois se X fosse compacto, pelo lema anterior, G seria finito. Daí nós temos que X é uma superfície não compacta e conexa e portanto por [13], 22.25, $H_2(X) = 0$. Como $H_k(X) = 0$ para $k > 2$, pois X tem dimensão 2, temos

que $H_k(X) = 0$ para $k \geq 2$. Logo Y é um $K(G, 1)$.

A Proposição a seguir é consequência imediata do que vimos anteriormente.

Proposição 1.2.1 Se Y é um $K(G, 1)$ então o complexo celular de cadeia aumentado do recobrimento universal de Y é uma resolução livre de R sobre RG . ■

Exemplo 1.2.8 Como vimos no Exemplo 1.2.6, $Y = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ é um $K(F(S), 1)$ -complexo, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado por S .

Sabemos também que $C_n(\tilde{Y}, R)$ tem um elemento básico para cada n -célula de Y (já que $\tilde{Y}$ é recobrimento universal de Y , e assim é regular). Assim, tomemos x_0 representante da única G -órbita de vértices de $\tilde{Y}$. Daí x_0 gera o RG -módulo livre $C_0(\tilde{Y}, R)$. Logo $C_0(\tilde{Y}, R) \simeq RG$.

Como base para $C_1(\tilde{Y}, R)$ tomemos para cada $s \in S$ uma 1-célula, orientada no sentido positivo, e_s que é projetada sobre S_s^1 . Podemos supor que e_s tem como ponto inicial x_0 , pois se isto não ocorrer substituímos e_s por um outro representante e_r que tem x_0 como ponto inicial.

O ponto final de e_s é então sx_0 .

Portanto $\delta(e_s) = sx_0 - x_0 = (s - 1)x_0$.

Daí temos $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow RG^{(S)} \xrightarrow{\delta} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ é resolução livre de R sobre RG .

Exemplo 1.2.9 Se $S = \{t\}$ então $G = F(S)$ é cíclico infinito. Neste caso a resolução do exemplo anterior se reduz à $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$.

Resoluções Periódicas via Ações Livres em Esfera

O nosso objetivo é obter uma resolução livre de R sobre RG através de um G -complexo livre X que é homeomorfo à esfera de dimensão ímpar S^{2k-1} . Para isto necessitamos dos seguintes Lemas:

Lema 1.2.3 G atua trivialmente em $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$.

Demonstração: Faremos a demonstração primeiramente para o caso $R = \mathbb{Z}$.

Como G atua livremente em X temos que $\varphi_g : X \rightarrow X$ dado por $\varphi_g(x) = gx$ é um homeomorfismo sem pontos fixos se $g \neq 1$.

Seja $\Lambda_{\varphi_g} = \sum_{i=0}^{2k-1} (-1)^i \text{tr}(\varphi_g)_{*,i}$, onde $(\varphi_g)_{*,i} : H_i(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Z})$ é induzida de φ_g no nível i de homologia, o número de Lefschetz de φ_g . Pelo Teorema do ponto fixo de Lefschetz, $\Lambda_{\varphi_g} = 0$ ([22], pag. 174 ou [7], 1.6 ex. 1), e assim $\text{tr}(\varphi_g)_{*,0} - \text{tr}(\varphi_g)_{*,2k-1} = 0$.

Como X é conexo por caminhos temos $f_{*,0} \equiv \text{id}$, $\forall f : X \rightarrow X$. Daí $\text{tr}(\varphi_g)_{*,0} = 1$ pois $H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Logo $\text{tr}(\varphi_g)_{*,2k-1} = 1$ e então $(\varphi_g)_{*,2k-1} = \text{id}$, pois $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Portanto G atua trivialmente em $H_{2k-1}(X, \mathbb{Z})$.

Agora, por [13], 29.12 temos que $H_{2k-1}(X, R) = H_{2k-1}(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} R \simeq R$. Como R é um RG -módulo trivial, temos que $g(\alpha \otimes r) = g\alpha \otimes gr = \alpha \otimes r$, $\forall \alpha \otimes r \in H_{2k-1}(X, R)$.

Portanto $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$ é um RG -módulo trivial. ■

Lema 1.2.4 A sequência $0 \rightarrow R \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, R) \xrightarrow{\delta_{2k-1}} \dots \rightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\delta_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ é exata, onde $n : R \rightarrow C_{2k-1}(X, R)$ é a inclusão, e $C_i(X, R)$ é o RG -módulo livre gerado pelas células de dimensão i , uma em cada órbita de células.

Demonstração: Considere a sequência

$$0 \rightarrow \ker \delta_{2k-1} \xrightarrow{n} C_{2k-1}(X, R) \xrightarrow{\delta_{2k-1}} \dots \rightarrow C_1(X, R) \xrightarrow{\delta_1} C_0(X, R) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0.$$

Como $\delta_{2k} : C_{2k}(X, R) = \{0\} \rightarrow C_{2k-1}(X, R)$ é aplicação nula, e $H_{2k-1}(X, R) \simeq R$, temos que $\ker \delta_{2k-1} \simeq R$.

Como $H_i(X, R) = 0$ para $0 < i < 2k-1$ temos $\ker \delta_i = \text{Im} \delta_{i+1}$ para $0 < i < 2k-1$.

Agora $\text{Im} \delta_1 = \ker \varepsilon$, pois $H_0(X, R) = R \simeq \frac{C_0(X, R)}{\text{Im} \delta_1}$.

A partir da sequência acima obtemos uma resolução livre de R sobre RG que é periódica de período $2k$. De fato, denotando $C_*(X, R)$ por C_* e considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & R & & & & \\ & \varepsilon \nearrow & & \searrow^n & & & \\ \dots \rightarrow & C_1 & \rightarrow & C_0 & \xrightarrow{\text{nos}} & C_{2k-1} & \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow R \rightarrow 0 \end{array}$$

construímos a seguinte sequência:

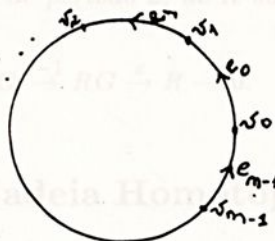
$$\dots \rightarrow C_{2k-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \xrightarrow{\delta_1} C_0 \xrightarrow{\text{nos}} C_{2k-1} \xrightarrow{\delta_{2k-1}} \dots \rightarrow C_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Claramente $\ker(n \circ \varepsilon) = \text{Im} \delta_1$ e $\text{Im}(n \circ \varepsilon) = \ker \delta_{2k-1}$, e assim (1.1) é uma resolução livre de R sobre RG . ■

Como aplicação do Lema acima temos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.2.10 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t .

Consideremos S^1 vista como um CW -complexo com n vértices (que podem ser indentificados com as raízes n -ésimas da unidade) e n 1-células.



Denotando por $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$ os vértices e $e_i = [v_i, v_{i+1}]$ as 1-células de S^1 definimos a ação de G em S^1 por $t^k v_i = v_{k+i}$ e $t^k e_i = e_{k+i}$, $k = 0, \dots, n-1$, $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Claramente esta ação é livre e permuta livremente as células.

Agora $v_i = t^i v_0$ e $e_i = t^i e_0$, $i = 0, \dots, n-1$.

Daí, existe uma única órbita de 0-células e uma única órbita de 1-células, o que nos dá $C_0(S^1, R) \simeq RG$ e $C_1(S^1, R) \simeq RG$.

Assim, pelo fato anterior, temos a seguinte resolução livre de R sobre RG

$$\dots \xrightarrow{\delta_1} RG \xrightarrow{n \circ \varepsilon} RG \xrightarrow{\delta_1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

Vamos determinar δ_1 e $n \circ \varepsilon$:

Temos $\delta_1(e_0) = v_1 - v_0 = tv_0 - v_0 = (t-1)v_0$. Daí δ_1 é a multiplicação por $t-1$.

Para determinar $n \circ \varepsilon$, observe que se $N = 1 + t + \dots + t^{n-1}$ então Ne_0 gera $H_1(S^1; R) \simeq R$.

De fato:

$$R \simeq H_1(S^1; R) = \frac{\ker \delta_1}{\text{Im} \delta_2} = \ker \delta_1, \text{ pois } \text{Im} \delta_2 = \{0\}.$$

Temos que $e_0 + te_0 + t^2e_0 + \dots + t^{n-1}e_0 \in \ker \delta_1$ pois

$$\begin{aligned} \delta_1(e_0 + te_0 + \dots + t^{n-1}e_0) &= (1 + t + \dots + t^{n-1})\delta_1(e_0) = \\ &= (1 + t + \dots + t^{n-1})(t-1)v_0 = (t^n - 1)v_0 = 0. \end{aligned}$$

Além disso, temos que se $x = a_0e_0 + \dots + a_{n-1}t^{n-1}e_0 \in \ker \delta_1$ então é fácil ver que

$$(a_{n-1} - a_0)v_0 + (a_0 - a_1)tv_0 + \dots + (a_{n-2} - a_{n-1})t^{n-1}v_0 = 0.$$

Mas $C_0(X, R)$ é um R -módulo livre que tem como base as 0-células $\{v_0, tv_0, \dots, t^{n-1}v_0\}$. Então $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1}$. Daí $x = a_0(e_0 + te_0 + \dots + t^{n-1}e_0) = a_0Ne_0$ e temos $H_1(S^1, R) = \ker \delta_1 = \langle Ne_0 \rangle$.

Como $\text{Im}(n \circ \varepsilon) = \ker \delta_1$, temos que $(n \circ \varepsilon)(v_0) = Ne_0$, e assim $(n \circ \varepsilon)(1_{RG}) = N$.

Logo $n \circ \varepsilon$ é a multiplicação por N .

Portanto, temos a seguinte resolução periódica, de período 2, de R sobre RG :

$$\dots \rightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0.$$

1.3 Resoluções e Complexos de Cadeia Homotopicamente Equivalentes

Dado um R -módulo M , temos que M admite várias resoluções projetivas. Nesta seção veremos que todas essas resoluções são homotopicamente equivalentes. Aqui estaremos usando alguns conceitos sobre complexos de cadeia tais como: aplicações de cadeia, homotopia de cadeia, complexos homotopicamente equivalentes, etc., que podem ser encontrados em [7], 1.0.

Também faremos uma breve recordação sobre funtores e demonstraremos que se T é um funtor aditivo e $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ são resoluções projetivas de M então TF e TF' são homotopicamente equivalentes. Este resultado será importante no capítulo 2 para a definição da cohomologia e homologia de um grupo.

Lema 1.3.1 Sejam (C, d) e (C', d') complexos de cadeias e seja r um inteiro. Seja $(f_i : C_i \rightarrow C'_i)_{i \leq r}$ uma família de aplicações tal que $d'_i f_i = f_{i-1} d_i$ para $i \leq r$. Se C_i é projetivo para $i > r$ e $H_i(C') = 0$ para $i \geq r$, então $(f_i)_{i \leq r}$ se estende a uma aplicação de cadeia $f : C \rightarrow C'$ e f é única a menos de homotopia.

Demonstração: [7], 1.7.4. ■

Teorema 1.3.1 Dadas resoluções projetivas F e F' de um módulo M , existe uma aplicação de cadeia preservando aumentação $f : F \rightarrow F'$, única a menos de homotopia e f é uma equivalência

de homotopia.

Demonstração: Sejam $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ duas resoluções projetivas de um módulo M . Podemos então formar os complexos de cadeias aumentados com M na dimensão -1 .

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \rightarrow & F_2 & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \downarrow \text{id} & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\ \cdots & \rightarrow & F'_2 & \rightarrow & F'_1 & \rightarrow & F'_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & M & \xrightarrow{0} & 0 & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

Como F_i é projetivo e F' é exata podemos aplicar o Lema 1.3.1 para $r = -1$. Logo a família de aplicações acima se estende a uma aplicação de cadeia $f : F \rightarrow F'$, única a menos de homotopia.

Note que f preserva aumentação pois $\varepsilon' \circ f_0 = \text{id} \circ \varepsilon = \varepsilon$.

Analogamente existe uma aplicação preservando aumentação $f' : F' \rightarrow F$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & F_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \rightarrow & F'_1 & \rightarrow & F'_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow f'_1 & & \downarrow f'_0 & & \downarrow \text{id} & & \\ \cdots & \rightarrow & F_1 & \rightarrow & F_0 & \rightarrow & M & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Agora, temos que $f' \circ f : F \rightarrow F$ estende id_M . Mas $\text{id} : F \rightarrow F$ também estende id_M . Assim pela unicidade do Lema 1.3.1 temos $f'_0 \circ f_0 \sim \text{id}_{F_0}, \dots, f'_n \circ f_n \sim \text{id}_{F_n}$.

Portanto $f' \circ f \sim \text{id}_F$. Analogamente $f \circ f' \sim \text{id}_{F'}$.

Logo f é uma equivalência de homotopia. ■

Definição 1.3.1 Um funtor covariante T (respec. contravariante) da categoria de R -módulos na categoria dos grupos abelianos é uma associação que a cada R -módulo M associa um grupo abeliano $T(M)$ e a cada homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$ associa um homomorfismo de grupos abelianos $T(f) : T(M) \rightarrow T(N)$ (respec. $T(f) : T(N) \rightarrow T(M)$) tal que:

$$T(\text{id}_M) = \text{id}_{T(M)} \text{ e } T(g \circ f) = T(g) \circ T(f) \text{ (respec. } T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)).$$

Se $T(f + g) = T(f) + T(g)$ dizemos que T é aditivo.

Exemplo 1.3.1 Seja $\mathcal{M}_R$ a categoria dos R -módulos (à direita) e $\mathcal{G}$ a categoria dos grupos abelianos. Seja F um R -módulo (à esquerda).

Definimos $T_F : \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{G}$ do seguinte modo:

$T_F(M) := M \otimes_R F$ e $T_F(f) := M \otimes_R F \rightarrow N \otimes_R F$ tal que $T_F(f)(m \otimes_R x) := f(m) \otimes_R x$ para todo homomorfismo de R -módulos $f : M \rightarrow N$. Claramente T_F é um funtor covariante aditivo.

Exemplo 1.3.2 Analogamente se F é um R -módulo (à direita) e ${}_R\mathcal{M}$ denota a categoria dos R -módulos à esquerda, temos que a aplicação $S_F : {}_R\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ definida por $S_F(M) = F \otimes_R M$ e $S_F(f)(x \otimes m) = x \otimes f(m)$ para todo R -módulo à esquerda M e todo R -homomorfismo $f : M \rightarrow N$ é um funtor covariante aditivo.

Exemplo 1.3.3 Com as mesmas notações do exemplo anterior, temos que se F é um R -módulo (à esquerda) a aplicação $H_F : {}_R\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{G}$ definida por $H_F(M) = \text{Hom}_R(F, M)$ e pela aplicação $H_F(f) : \text{Hom}_R(F, M) \rightarrow \text{Hom}_R(F, N)$ tal que $H_F(f)(\varphi) = f \circ \varphi$ onde $f : M \rightarrow N$ é um R -homomorfismo, é um funtor covariante aditivo e $L_F : \mathcal{M}_R \rightarrow \mathcal{G}$ dado por $L_F(M) = \text{Hom}_R(M, F)$ e $L_F(f)(\varphi) = \varphi \circ f$, é funtor contravariante aditivo.

Dados um complexo de R -módulos C e um funtor T consideremos o complexo de cadeias TC de grupos abelianos obtido aplicando T à C termo a termo.

Lema 1.3.2 Se T é um funtor aditivo então T preserva homotopia de cadeias, isto é, se h é uma homotopia de cadeia entre as aplicações $f, g : C \rightarrow C'$, onde C e C' são complexos de cadeias, então $T(h)$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f)$ e $T(g)$.

Demonstração: Suponhamos T um funtor covariante (se T for contravariante a demonstração é análoga).

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & C_0 \xrightarrow{\delta_0} \cdots C \\ & & g_2 \downarrow f_2 & \swarrow h_1 & g_1 \downarrow f_1 & \swarrow h_0 & \\ \cdots & \rightarrow & C'_2 & \xrightarrow{\delta'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\delta'_1} & C'_0 \xrightarrow{\delta'_0} \cdots C' \end{array}$$

Como h é homotopia de cadeia, temos: $h \circ \delta + \delta' \circ h = f - g$. ([7], 1.0)

Daí $T(h \circ \delta + \delta' \circ h) = T(f - g)$ T é aditivo $\Rightarrow T(h \circ \delta) + T(\delta' \circ h) = T(f) - T(g)$ T é funtor covariante $\Rightarrow T(h) \circ T(\delta) + T(\delta') \circ T(h) = T(f) - T(g)$.

Logo $T(h)$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f)$ e $T(g)$. ■

Proposição 1.3.1 Dadas duas resoluções projetivas de M , $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$, então $T(F)$ e $T(F')$ são homotópicas.

Demonstração: Se $\varepsilon : F \rightarrow M$ e $\varepsilon' : F' \rightarrow M$ são resoluções projetivas de M então pelo Teorema 1.3.1 existe uma equivalência de homotopia entre F e F' . Isto é, existem $f : F \rightarrow F'$ e $g : F' \rightarrow F$ aplicações de cadeia com $f \circ g \sim_{h'} id_{F'}$ e $g \circ f \sim_h id_F$, onde h e h' são homotopias de cadeia.

Assim pelo lema anterior $T(h)$ é uma homotopia de cadeia entre $T(g \circ f)$ e $T(id_F) = id_{T(F)}$ e $T(h')$ é uma homotopia de cadeia entre $T(f \circ g)$ e $T(id_{F'}) = id_{T(F')}$. Portanto $T(f)$ é uma equivalência de homotopia entre $T(F)$ e $T(F')$. ■

Observação 1.3.1 Temos que $H_n(T(F))$ (homologia no nível n do complexo de cadeia $T(F)$) depende somente de T e M (a menos de um isomorfismo canônico), pois complexos de cadeias homotópicos possuem homologias isomorfas ([7], 1.0).

A seguinte definição será útil nos capítulos posteriores:

Definição 1.3.2 Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias e $T_1, T_2 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ dois funtores. Uma transformação natural $h : T_1 \rightarrow T_2$ é uma aplicação que a cada objeto X em $\mathcal{C}$ associa um morfismo $h(X) : T_1(X) \rightarrow T_2(X)$ de forma que se $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_1(X) & \xrightarrow{T_1(f)} & T_1(Y) \\ h(X) \downarrow & & \downarrow h(Y) \\ T_2(X) & \xrightarrow{T_2(f)} & T_2(Y) \end{array}$$

Se $h(X) : T_1(X) \rightarrow T_2(X)$ possuir inversa dizemos que h é um isomorfismo natural.

1.4 Coinvariantes

Sejam G um grupo e M um RG -módulo (à esquerda).

Definição 1.4.1 O grupo dos coinvariantes de M , denotado por M_G , é o quociente de M pelo subgrupo aditivo gerado pelos elementos da forma $gm - m$, com $g \in G$ e $m \in M$, isto é, se



$A = \langle gm - m; g \in G, m \in M \rangle$ então $M_G = \frac{M}{A}$.

Lema 1.4.1 $M_G \simeq R \otimes_{RG} M$, onde R é visto como um RG -módulo à direita com G -ação trivial.

Demonstração: Faremos a demonstração primeiramente para $R = \mathbb{Z}$.

Seja $\varphi : M_G \rightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ dada por $\varphi(\overline{m}) = \varphi(m + A) = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} m$.

É fácil ver que φ está bem definida e é homomorfismo de grupos. Para provar que φ é isomorfismo vamos definir uma inversa ψ para φ usando a propriedade universal do produto tensorial ([16], 5.11).

Considere o diagrama universal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times M & \xrightarrow{f} & M_G \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M & & \end{array}$$

onde $f(r, m) = r \cdot \overline{m} = (\overline{m} + \dots + \overline{m})$ (r vezes).

Temos que:

- (i) $f(r_1 + r_2, m) = (r_1 + r_2)\overline{m} = r_1\overline{m} + r_2\overline{m} = f(r_1, m) + f(r_2, m)$
- (ii) $f(r_1, m_1 + m_2) = r_1(\overline{m_1} + \overline{m_2}) = r_1\overline{m_1} + r_1\overline{m_2} = f(r_1, m_1) + f(r_1, m_2)$
- (iii) $f(r\alpha, m) = f(r\varepsilon(\alpha), m) = r\varepsilon(\alpha)\overline{m} = r(\overline{\alpha m}) = r(\varepsilon(\alpha)\overline{m}) = r\varepsilon(\alpha)\overline{m}$.

Assim $f(r\alpha, m) = f(r, \alpha m)$, $\forall r \in \mathbb{Z}$, $m \in M$ e $\alpha \in \mathbb{Z}G$. Logo, pela propriedade universal do produto tensorial existe um único homomorfismo $\psi : \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M \rightarrow M_G$ dado por $\psi(r \otimes_{\mathbb{Z}G} m) = f(r, m) = r \cdot \overline{m}$. Claramente ψ é inversa de φ .

Agora $R \otimes_{RG} M \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ ([5], pg. 4) e assim $M_G \simeq R \otimes_{RG} M$. ■

Em vista do lema anterior, se M é um RG -módulo, muitas vezes identificaremos M_G com $R \otimes_{RG} M$.

Temos, em vista deste mesmo lema e das propriedades do produto tensorial o seguinte resultado:

Lema 1.4.2 Se F é um RG -módulo livre com base (e_i) então F_G é um R -módulo livre com base $(\overline{e}_i)$.

Demonstração: [7], 2.2.3. ■

Definição 1.4.2 O funtor $-_G = R \otimes_{RG} -$ definido da categoria dos RG -módulos à esquerda para a

categoria dos grupos abelianos é chamado funtor de coinvariantes.

Seja $C : \cdots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$ um complexo de cadeias. Denotaremos por C_G o seguinte complexo

$$C_G : \cdots \rightarrow R \otimes_{RG} C_1 \rightarrow R \otimes_{RG} C_0 \rightarrow 0.$$

Vimos que para qualquer grupo G sempre podemos tomar F a resolução padrão. Neste caso denotaremos F_G por $C_*(G)$.

Finalizando, introduziremos um conceito dual ao conceito de coinvariantes que será útil no próximo capítulo.

Definição 1.4.3 Dado um RG -módulo (à esquerda) M , o grupo dos invariantes de M é o conjunto

$$M^G = \{m \in M; gm = m, \forall g \in G\}.$$

Proposição 1.4.1 $\text{Hom}_{RG}(R; M) \simeq M^G$, onde R é um RG -módulo visto com G -ação trivial.

Demonstração: Defina $\psi : \text{Hom}_{RG}(R; M) \rightarrow M^G$ por $\psi(f) = f(1)$. Claramente ψ definida desta maneira é um isomorfismo. ■

1.5 Módulos Induzidos e Coinduzidos

Para introduzirmos o conceito de módulos induzidos e coinduzidos falaremos, primeiramente, de extensão e coextensão de escalares.

Sejam R, S anéis e $\alpha : R \rightarrow S$ um homomorfismo de anéis.

Seja M um S -módulo à esquerda. Podemos ver M como um R -módulo à esquerda, denotado por $\text{Res}_R^S M$, definindo em M a multiplicação $\mu : R \times M \rightarrow M$ dada por $\mu(r, m) = r * m = \alpha(r) \cdot m$.

Obtemos deste modo um funtor da categoria dos S -módulos (à esquerda) para a categoria dos R -módulos (à esquerda) denominado **restrição de escalares**.

Através do homomorfismo α podemos ver S como um R -módulo (à direita) definindo a multiplicação $\eta : S \times R \rightarrow S$ dada por $\eta(s, r) = s\alpha(r)$ (multiplicação no anel).

Assim podemos pensar no produto tensorial $S \otimes_R M$.

Nosso objetivo é definir em $S \otimes_R M$ uma S -multiplicação à esquerda e assim ver $S \otimes_R M$ como um S -módulo (à esquerda).

Definimos então por $\psi : S \times (S \otimes_R M) \rightarrow S \otimes_R M$ por $\psi(s, s' \otimes_R m) = ss' \otimes_R m$

Observando que $(s's)r = s'(sr)$, $\forall s, s' \in S$ e $\forall r \in R$ prova-se facilmente que $(S \otimes_R M, \psi)$ é um S -módulo (à esquerda).

O S -módulo à esquerda $S \otimes_R M$ é dito ser obtido de M por extensão de escalares de R para S .

Observação 1.5.1 Existe uma aplicação natural $i : M \rightarrow S \otimes_R M$ definida por $i(m) := 1 \otimes_R m$.

Desde que $1 \otimes_R rm = \alpha(r) \otimes_R m = \alpha(r) \cdot (1 \otimes_R m)$ para qualquer $r \in R$ temos que $i(rm) = r * i(m)$, isto é, i é uma aplicação de R -módulos.

Lema 1.5.1 Dados S -módulos (à esquerda) M e N , uma aplicação de R -módulos $f : M \rightarrow N$ e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$ existe uma única aplicação de S -módulos $g : S \otimes_R M \rightarrow N$ tal que $g \circ i = f$.

Demonstração:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & S \otimes_R M \\ f \downarrow & \swarrow g & \\ N & & \end{array}$$

Se a aplicação g existir, deve satisfazer $g(s \otimes_R m) = sg(1 \otimes_R m) = sg(i(m)) = sf(m)$.

Assim, definindo $g(s \otimes_R m) := sf(m)$ temos que g é única. ■

Observação 1.5.2 Se no lema anterior $M = N$ e $f = id_M$ temos que a aplicação i é um R -monomorfismo.

Proposição 1.5.1 Dados S -módulos (à esquerda) M e N e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$ temos: $Hom_R(M, N) \simeq Hom_S(S \otimes_R M, N)$.

Demonstração: Aplicando o lema anterior podemos definir $\phi : Hom_R(M, N) \rightarrow Hom_S(S \otimes_R M, N)$ por $\phi(f)(s \otimes_R m) = g(s \otimes_R m) = sf(m)$.

Claramente ϕ é um homomorfismo de grupos e além disso $\varphi : Hom_S(S \otimes_R M, N) \rightarrow Hom_R(M, N)$ definida por $\varphi(g) = g \circ i$ é inversa para ϕ . ■

Vamos considerar agora uma construção dual na qual usaremos Hom no lugar de $\otimes$.

Dado um R -módulo M (à esquerda) consideremos o grupo abeliano $\text{Hom}_R(S, M)$ onde S é visto como R -módulo (à esquerda) com a multiplicação $r * s = \alpha(r)s$. Desde que $r * (s' \cdot s) = (r * s') \cdot s$ podemos definir em $\text{Hom}_R(S, M)$ uma S -multiplicação à esquerda da seguinte forma:

$$\psi : S \times \text{Hom}_R(S, M) \rightarrow \text{Hom}_R(S, M)$$

definida por $\psi(s, f)(s') = (sf)(s') = f(s's)$, que faz de $\text{Hom}_R(S, M)$ um S -módulo (à esquerda).

O S -módulo $\text{Hom}_R(S, M)$ é dito ser obtido de M por coextensão de escalares de R para S .

Observação 1.5.3 Existe uma aplicação natural $\pi : \text{Hom}_R(S, M) \rightarrow M$, dada por $\pi(f) = f(1)$.

Note que $\pi(r * f) = \pi(\alpha(r)f) = (\alpha(r)f)(1) = f(\alpha(r)) = f(r * 1) = rf(1) = r\pi(f)$.

Então π é uma aplicação de R -módulos (vendo o S -módulo $\text{Hom}_R(S, M)$ com um R -módulo por restrição de escalares).

Lema 1.5.2 Dados S -módulos (à esquerda) M e N , uma aplicação de R -módulos

$f : N \rightarrow M$ e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$, existe uma única aplicação de S -módulos $g : N \rightarrow \text{Hom}_R(S, M)$ tal que $\pi \circ g = f$.

Demonstração:

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Hom}_R(S, M) \\ & \nearrow g & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Para provar o Lema 1.5.2 note que se g existe deve satisfazer $sg(n) = g(sn)$ para $s \in S, n \in N$. Daí, $sg(n)(1) = g(sn)(1)$ e assim $g(n)(s) = g(sn)(1) = \pi(g(sn)) = f(sn)$.

Logo definindo $g : N \rightarrow \text{Hom}_R(S, N)$ por $g(n)(s) = f(sn)$ temos que g é única. ■

Proposição 1.5.2 Dados S -módulos (à esquerda) M e N e um homomorfismo de anéis $\alpha : R \rightarrow S$ temos que $\text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M)) \simeq \text{Hom}_R(N, M)$.

Demonstração: Aplicando o Lema 1.5.2 temos bem definido um isomorfismo

$\psi : \text{Hom}_R(N, M) \rightarrow \text{Hom}_S(N, \text{Hom}_R(S, M))$ dado por $\psi(f) = g$ tal que $g(n)(s) = f(sn)$. ■

Exemplo 1.5.1 Seja $\varepsilon : RG \rightarrow R$ a aplicação aumentação e M um RG -módulo. Então o R -módulo

$R \otimes_{RG} M$ obtido de M por extensão de escalares de RG para R é simplesmente M_G e o R -módulo $\text{Hom}_{RG}(R, M)$ obtido de M por coextensão de escalares de RG para R é M^G .

Consideremos agora o caso particular $RH \xrightarrow{\alpha} RG$, onde H é um subgrupo de G e α é a aplicação inclusão.

Se M é um RG -módulo podemos ver M como um RH -módulo através da inclusão.

Neste caso denotamos o RH -módulo M por $\text{Res}_H^G M$ (módulo restrição).

Considere agora M um RH -módulo. O RG -módulo obtido de M por extensão de escalares, será denotado por $\text{Ind}_H^G M$. Assim

$$\text{Ind}_H^G M = RG \otimes_{RH} M$$

(Neste caso a extensão de escalares é chamada indução)

Da mesma forma, o RG -módulo obtido de M por coextensão de escalares será denotado por $\text{Coind}_H^G M$. Daí

$$\text{Coind}_H^G M = \text{Hom}_{RH}(RG, M)$$

(Neste caso a coextensão de escalares é chamada coindução).

Observação 1.5.4 Se $H = \{1\}$ temos $RH \simeq R$. Deste modo $\text{Ind}_{\{1\}}^G M \simeq RG \otimes_R M$ é chamado módulo induzido e $\text{Coind}_{\{1\}}^G M \simeq \text{Hom}_R(RG, M)$ é chamado módulo coinduzido.

Proposição 1.5.3 O RG -módulo $\text{Ind}_H^G M$ contém M como um RH submódulo. Além disso temos que $\text{Ind}_H^G M \simeq \bigoplus_{g \in E} gM$, onde E é um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de H em G e gM denota o conjunto obtido de M (visto como RH -submódulo de $\text{Ind}_G^H M$) sob a ação de G .

Demonstração: Como $G = \bigcup_{g \in E} gH$, onde E é um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de H em G , temos por [7], pag. 13 que $RG = \bigoplus_{g \in E} R(gH) = \bigoplus_{g \in E} g(RH)$. Daí

$$\text{Ind}_H^G M = \left(\bigoplus_{g \in E} g(RH) \right) \otimes_{RH} M = \bigoplus_{g \in E} (g \otimes_{RH} M) \quad (1)$$

onde $g \otimes_{RH} M = \{g \otimes_{RH} m : m \in M\}$.

Agora, $g \otimes_{RH} M$, pode ser indentificado com M via a bijeção $g \otimes_{RH} m \leftrightarrow m$. Em particular $1 \otimes_{RH} M \leftrightarrow M$, onde 1 denota o elemento neutro de G .

Considere o RH -homomorfismo $i : M \rightarrow RG \otimes_{RH} M$ dado por $i(m) = 1 \otimes_{RH} m$ (ver observação 1.5.2).

Esta aplicação aplica M isomorficamente sobre $1 \otimes_{RH} M$. Deste modo, através da indentificação $1 \otimes_{RH} M \hookrightarrow M$ podemos ver M como um RH -submódulo de $Ind_H^G M$.

O somando $g \otimes_{RH} M$ de (1) é o conjunto obtido de $M \simeq 1 \otimes_{RH} M$ através da ação de G , desde que $g(1 \otimes_{RH} m) = g \otimes_{RH} m$. Identificando $g \otimes_{RH} M$ com gM temos demonstrada a Proposição. ■

Observação 1.5.5 De modo análogo à indução, pode-se mostrar que M é um RH -submódulo de $Coind_H^G M$ através do mergulho $\rho : M \rightarrow Coind_H^G M$ definido por $\rho(m)(g) = \begin{cases} gm & \text{se } g \in H \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

e que $Coind_H^G M = \prod_{g \in E} gM$, onde E é um conjunto de representantes para as classes laterais à esquerda de H em G .

A aplicação ρ se estende a uma RG -homomorfismo $\varphi : RG \otimes_{RH} M \rightarrow Hom_{RH}(RG, M)$ (pelo Lema 1.5.1). Esta aplicação pode ser identificada com a inclusão canônica da soma direta no produto direto ([7], pag. 70) e assim podemos ver $Ind_H^G M$ como um RG -submódulo de $Coind_H^G M$.

Proposição 1.5.4 Se $(G : H) < \infty$ então $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$.

Demonstração: Se $(G : H) < \infty$ temos que a soma direta e o produto direto coincidem e assim $Ind_H^G M \simeq Coind_H^G M$. ■

Proposição 1.5.5 Seja M um RG -módulo. Então existem RG -isomorfismos naturais:

- $Ind_H^G res_H^G M \simeq R(G/H) \otimes_R M$, (com G -ação diagonal).
- $Coind_H^G (res_H^G M) \simeq Hom_R(R(G/H), M)$ (com G -ação diagonal).

Demonstração:

- Seja $f : RG \times M \rightarrow R(G/H) \otimes_R M$ definida por $f(g, m) = gH \otimes_R gm$ nos geradores e estendida por linearidade.

Mostra-se facilmente que f está bem definida e é biaditiva. Logo por [16], 5.1.1 existe $\psi : RG \otimes_{RH} M \rightarrow R(G/H) \otimes_R M$ homomorfismo definido por $\psi(g \otimes_{RH} m) = gH \otimes_R gm$.

Claramente ψ é uma aplicação de RG -módulos.



Agora considere $\tilde{g} : R(G/H) \times M \rightarrow RG \otimes_{RH} M$ definida por $\tilde{g}(gH, m) = g \otimes_{RH} g^{-1}m$ nos geradores e estendida por linearidade. É fácil ver que $\tilde{g}$ está bem definida e é biaditiva e assim novamente por [16], 5.1.1 existe o homomorfismo $\phi : R(G/H) \otimes_R M \rightarrow RG \otimes_{RH} M$ definido por $\phi(gH \otimes_R m) = g \otimes_{RH} g^{-1}m$.

Assim como ψ , ϕ também é uma aplicação de RG -módulos.

Além disso, verifica-se facilmente que $\phi = \psi^{-1}$.

Portanto $Ind_H^G Res_H^G M \simeq R(G/H) \otimes_R M$.

b) Defina $\phi : Hom_{RH}(RG, M) \rightarrow Hom_R(R(G/H), M)$ por $\phi(f)(gH) := gf(g^{-1})$. Claramente ϕ é homomorfismo de RG -módulos e $\psi : Hom_R(R(G/H), M) \rightarrow Hom_{RH}(RG, M)$ definida por $\psi(f)(x) = xf(x^{-1}H)$ é inversa para ϕ . ■

Segue imediatamente desta proposição o seguinte resultado:

Corolário 1.5.1 $Ind_H^G R \simeq R(G/H)$. ■

Proposição 1.5.6 Seja G um grupo e denote por PG o conjunto das partes de G . Então $Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2) \simeq PG$ e o $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo $\mathbb{Z}_2 G = Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$ é levado por este isomorfismo em $FG = \{F \subset G : F \text{ é finito}\}$.

Demonstração: A aplicação $\phi : Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2) \rightarrow PG$ dada por $\phi(f) = \{g \in G : f(g^{-1}) = 1\}$ é um $\mathbb{Z}_2 G$ -homomorfismo cuja inversa é dada por $\psi(A) = f_A; f_A(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g^{-1} \in A \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Além disso através do $\mathbb{Z}_2 G$ -monomorfismo $\varphi : \mathbb{Z}_2 G \rightarrow Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2)$ dada por $\varphi(g)(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = g^{-1} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$ nos geradores e estendido por linearidade podemos ver $\mathbb{Z}_2 G$ como um $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de $Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 G, \mathbb{Z}_2)$.

Verifica-se facilmente que $\phi(\varphi(\mathbb{Z}_2 G)) = FG$ isto é $\mathbb{Z}_2 G$ é levado por ϕ em FG . ■

Finalizando este parágrafo enunciaremos sem demonstração, três proposições bastante úteis neste trabalho, principalmente no capítulo 4.

Proposição 1.5.7 Sejam S e T subgrupos de G e E um conjunto de representantes para as classes

duplas SgT . Para qualquer $\mathbb{Z}_2T$ -módulo M , existe um $\mathbb{Z}_2G$ -isomorfismo:

$$\text{Res}_S^G \text{Ind}_T^G M \simeq \bigoplus_{g \in E} \text{Ind}_{S \cap gTg^{-1}}^S \text{Res}_{S \cap gTg^{-1}}^{gTg^{-1}} M \quad (\text{Fórmula de Mackey}).$$

Demonstração: [7], 3.5.6. ■

Proposição 1.5.8 Se M é um $\mathbb{Z}_2S$ -módulo e N é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo então temos o $\mathbb{Z}_2G$ -isomorfismo $N \otimes \text{Ind}_S^G M \simeq \text{Ind}_S^G (\text{Res}_S^G N \otimes M)$, onde o produto tensorial da direita tem S -ação diagonal e do da esquerda G -ação diagonal.

Demonstração: [1], 1.2.10. ■

Proposição 1.5.9 Sejam G é um grupo e S um subgrupo de G com $[G:S] = \infty$ então $(\text{Ind}_S^G M)^G = 0$ para qualquer RS -módulo M .

Demonstração: [1], 1.2.11. ■

2.1 A definição de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$

Antes de definirmos Homologia e Cohomologia faremos algumas preliminares em $\otimes$ e Hom. Se R é um anel comutativo com unidade.

Dado um RG -módulo à esquerda M , podemos ver M como um RG -módulo à direita, definindo a seguinte G -ação em M : $m \cdot g = g^{-1}m, \forall g \in G, \forall m \in M$.

Observação 2.1.1 Se M e N são RG -módulos, já vimos que M e N são naturalmente R -módulos. Em $M \otimes_R N$ podemos definir a G -ação $g(m \otimes_R n) = gm \otimes_R gn$, chamada G -ação diagonal.

Proposição 2.1.2 Sejam M e N RG -módulos (à esquerda). Então $M \otimes_R N = (M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{A}$, onde $A = \langle gm \otimes_R gn - m \otimes_R n, \forall m \otimes_R n \in M \otimes_R N, \forall g \in G \rangle$.

Demonstração: Considere em $M \otimes_R N$ a relação $(m \cdot g) \otimes_R n \sim m \otimes_R gn, \forall m \in M, \forall g \in G$.

É fácil ver que $M \otimes_R N = \frac{M \otimes_R N}{A}$.

Considere agora em $M \otimes_R N$ a G -ação diagonal e seja A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos

Capítulo 2

(Co)Homologia de Grupos - Produtos

Livres Amalgamados e Extensões

HNN

2.1 A definição de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$

Antes de definirmos Homologia e Cohomologia faremos alguns preliminares em $\bigotimes_{RG}$ e Hom_{RG} , onde R é um anel comutativo com unidade.

Dado um RG -módulo à esquerda M , podemos ver M como um RG -módulo à direita, definindo a seguinte G -ação em M : $m * g = g^{-1}m$, $\forall g \in G$, $\forall m \in M$.

Observação 2.1.1 Se M e N são RG -módulos, já vimos que M e N são naturalmente R -módulos. Em $M \bigotimes_R N$ podemos definir a G -ação $g(m \bigotimes_R n) = gm \bigotimes_R gn$, chamada G -ação diagonal.

Proposição 2.1.1 Sejam M e N RG -módulos (à esquerda). Então $M \bigotimes_{RG} N = (M \bigotimes_R N)_G = \frac{M \bigotimes_R N}{A}$, onde $A = \langle gm \bigotimes_R gn - m \bigotimes_R n, \forall m \bigotimes_R n \in M \bigotimes_R N, \forall g \in G \rangle$.

Demonstração: Considere em $M \bigotimes_R N$ a relação $(m * g) \bigotimes_R n \sim m \bigotimes_R gn, \forall m \in M, , \forall g \in G$.

É fácil ver que $M \bigotimes_{RG} N = \frac{M \bigotimes_R N}{\sim}$.

Considere agora em $M \bigotimes_R N$ a G -ação diagonal e seja A o subgrupo aditivo gerado pelos elementos



da forma $gm \otimes_R gn - m \otimes_R n$, $\forall g \in G$ e $\forall m \otimes_R n \in M \otimes_R N$.

Daí em $(M \otimes_R N)_G = \frac{M \otimes_R N}{A}$ estamos identificando elementos da forma $gm \otimes_R gn$ com $m \otimes_R n$, $\forall n \in N$ e $\forall g \in G$.

Mas $m = gg^{-1}m$, para todo $m \in M$ e $g \in G$.

Assim, se identificarmos $gm \otimes_R gn$ com $m \otimes_R n$ é o mesmo que identificarmos $g^{-1}m \otimes_R n = m * g \otimes_R n$ com $m \otimes_R gn$.

Portanto temos $M \otimes_{RG} N \equiv (M \otimes_R N)_G$. ■

Corolário 2.1.1 $M \otimes_{RG} N \simeq N \otimes_{RG} M$.

Demonstração: $M \otimes_{RG} N \simeq (M \otimes_R N)_G \simeq (N \otimes_R M)_G = N \otimes_{RG} M$. ■

Considere agora $\text{Hom}_R(M, N)$ onde M e N são RG -módulos à esquerda.

A ação de G em M e N induz uma ação em $\text{Hom}_R(M, N)$ dada por $gf(x) = gf(g^{-1}x)$.

Note que o uso de g^{-1} para definir a ação é necessário devido a contravariância de Hom na primeira variável.

Com isso, demonstra-se facilmente o seguinte resultado:

Proposição 2.1.2 $\text{Hom}_{RG}(M, N) = \text{Hom}_R(M, N)^G$. ■

Vejamos agora a definição da (co)homologia de um grupo G .

Se $\cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de R sobre RG e M é um RG -módulo podemos formar o complexo de cadeias:

$F \otimes_{RG} M : \cdots \rightarrow F_n \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_n} F_{n-1} \otimes_{RG} M \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\bar{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \rightarrow 0$ onde $\bar{\partial}_k = \partial_k \otimes id$.

Também podemos formar o complexo de cocadeias

$\text{Hom}_{RG}(F, M) : 0 \xrightarrow{\delta_0} \text{Hom}_{RG}(F_0, M) \xrightarrow{\delta_1} \text{Hom}_{RG}(F_1, M) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, M) \xrightarrow{\delta_n} \cdots$

Demonstração: Se $F \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ então $P = F \otimes_{\mathbb{Z}G} R \rightarrow R \rightarrow 0$ é uma resolução projetiva de R sobre RG .

onde $\delta_k(f) = f \circ \partial_{k+1}$.

Definição 2.1.1 i) O n -ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M é definido por:

$$H_n(G; M) = H_n \left(F \otimes_{RG} M \right).$$

ii) O n -ésimo grupo de cohomologia de G com coeficientes em M é definido por

$$H^n(G; M) = H^n(\text{Hom}_{RG}(F, M)).$$

Proposição 2.1.4 $H_n(G; M) \cong H_n(G; M')$

Demonstração: Consideremos $\epsilon: F \rightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG .

Observação 2.1.2 a) As definições de $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ independem da resolução projetiva $\epsilon: F \rightarrow R$ escolhida (a menos de um isomorfismo canônico). De fato:

Se $\epsilon': F' \rightarrow R$ é uma outra resolução projetiva de R sobre RG , vimos em 1.3 que os complexos $F \otimes_{RG} M$ e $F' \otimes_{RG} M$ são homotopicamente equivalentes (pois $-\otimes_{RG} M$ é um funtor aditivo). Assim $H_*(F \otimes_{RG} M) \simeq H_*(F' \otimes_{RG} M)$.

Da mesma forma os complexos $\text{Hom}_{RG}(F, M)$ e $\text{Hom}_{RG}(F', M)$ são homotopicamente equivalentes e temos $H^*(\text{Hom}_{RG}(F, M)) \simeq H^*(\text{Hom}_{RG}(F', M))$.

b) Se tomarmos $R = M$ com G -ação trivial então $H_*(G; R) = H_*(F \otimes_{RG} R) = H_*(R \otimes_{RG} F) = H_*(F_G)$.

Demonstração: Consideremos $\epsilon: F \rightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG . Então

Todo RG -módulo M pode ser visto como um $\mathbb{Z}G$ -módulo, pois é um grupo abeliano e tem uma G -ação. O próximo resultado relaciona a (co)homologia de um grupo G (definida sobre um anel comutativo com unidade R) com coeficientes em um RG -módulo M com a (co)homologia de G (definida sobre $\mathbb{Z}$) vendo M como um $\mathbb{Z}G$ -módulo.

Proposição 2.1.3 Sejam G um grupo e M um RG -módulo. Então a (co)homologia de G sobre R com coeficientes em M é isomorfa à (co)homologia de G sobre $\mathbb{Z}$ com coeficientes em M (visto como $\mathbb{Z}G$ -módulo).

Demonstração: Se $F \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ então $P = F \otimes_{\mathbb{Z}} R \xrightarrow{\epsilon \otimes id} R$ é uma resolução projetiva de R sobre RG .

Exemplo 2.1.1 Seja $G = F(3)$ o grupo livre gerado por 3.

É fácil ver que:

- a) $F \otimes_{\mathbb{Z}G} M \simeq P \otimes_{RG} M$
 b) $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, M) \simeq \text{Hom}_{RG}(P, M).$

Daí o resultado segue de (a) e (b) usando a definição de (co)homologia. ■

Em vista do resultado anterior podemos sempre que for conveniente, trabalhar com a (co)homologia sobre $\mathbb{Z}$, sem perda de generalidade.

Proposição 2.1.4 $H_0(G; M) \simeq M_G.$

Demonstração: Consideremos $\varepsilon : F \rightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG .

Aplicando o funtor $-\otimes_{RG} M$ temos o complexo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & F_1 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\bar{\delta}_1} & F_0 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\varepsilon_{\#}} & R \otimes_{RG} M \rightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \delta_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

Como o produto tensorial é exato à direita (ver [14], 1.7.9) temos que $\text{Im} \bar{\delta}_1 = \ker \varepsilon_{\#}$. Assim

$$H_0(G; M) = \frac{\ker \delta_0}{\text{Im} \bar{\delta}_1} = \frac{F_0 \otimes_{RG} M}{\ker \varepsilon_{\#}} \simeq R \otimes_{RG} M \simeq M_G. \quad \blacksquare$$

Proposição 2.1.5 $H^0(G; M) \simeq M^G.$

Demonstração: Consideremos $\varepsilon : F \rightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG . Então

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{RG}(R, M) & \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}} & \text{Hom}_{RG}(F_0, M) & \xrightarrow{\delta_1} & \text{Hom}_{RG}(F_1, M) \rightarrow \cdots \\ & & & & \uparrow \delta_0 & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

é exata ([14], 1.8.7).

$$H^0(G; M) = \frac{\ker \delta_1}{\text{Im} \tilde{\varepsilon}} = \ker \delta_1 = \text{Im} \tilde{\varepsilon} \simeq \text{Hom}_{RG}(R, M) \text{ (pois } \tilde{\varepsilon} \text{ é monomorfismo).}$$

$$\text{Mas } \text{Hom}_{RG}(R, M) = (\text{Hom}_R(R, M))^G \simeq M^G. \text{ Portanto } H^0(G; M) \simeq M^G. \quad \blacksquare$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1.1 Seja $G = F(S)$ o grupo livre gerado por S .

Pelo Exemplo 1.2.8, temos que $0 \rightarrow RG^{(S)} \xrightarrow{\delta} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ onde $RG^{(S)}$ é o RG -módulo livre com base $(e_s)_{s \in S}$, $\delta(e_s) = s - 1$ e $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$ é uma resolução livre de R sobre RG .

Segue da definição 2.1.1 i) que a homologia do grupo G é a homologia do complexo $0 \rightarrow R \otimes_{RG} RG^{(S)} \xrightarrow{id \otimes \delta} R \otimes_{RG} RG \rightarrow 0$.

$$\text{Agora } R \otimes_{RG} RG^{(S)} = R \otimes_{RG} \left(\bigoplus_{s \in S} RG \right) = \bigoplus_{s \in S} \left(R \otimes_{RG} RG \right) = \bigoplus_{s \in S} R.$$

$$\text{Assim temos o complexo } \cdots \rightarrow 0 \rightarrow \bigoplus_{s \in S} R \xrightarrow{id \otimes \delta} R \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Calculemos } id \otimes \delta(id \otimes \delta)(r \otimes \sum \alpha_{s_i} e_{s_i}) &= r \otimes \sum \alpha_{s_i} (s_i - 1) = \sum r \cdot \alpha_{s_i} \otimes (s_i - 1) = \\ &= \sum r \alpha_{s_i} \otimes s_i - \sum r \alpha_{s_i} \otimes 1 = \sum r \alpha_{s_i} s_i \otimes 1 - \sum r \alpha_{s_i} \otimes 1 \stackrel{(*)}{=} \sum r \alpha_{s_i} \otimes 1 - \sum r \alpha_{s_i} \otimes 1 = 0 \end{aligned}$$

(*) $s_i \in G$ que atua trivialmente em R e $r \alpha_{s_i} \in R$.

Portanto $id \otimes \delta \equiv 0$ e assim temos o complexo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & 0 & \rightarrow & \bigoplus_{s \in S} R & \xrightarrow{0} & R \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

Dai

$$\begin{cases} H_0(F(S); R) &= R \\ H_1(F(S); R) &= \bigoplus_{s \in S} R \\ H_i(F(S); R) &= 0 \text{ para } i \geq 2 \end{cases}$$

Exemplo 2.1.2 Suponhamos que G é cíclico infinito com gerador t . Pelo Exemplo 1.2.9 temos que $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow RG \xrightarrow{\delta_1 = t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ (*) é resolução livre de R sobre RG .

Vamos calcular $H_*(G; M)$.

Tensorizando a resolução (*) por M sobre RG temos

$$0 \rightarrow RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\delta_1} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\varepsilon} R \otimes_{RG} M \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Agora temos } M &\cong RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\delta_1} RG \otimes_{RG} M \cong M \\ m &\rightarrow 1 \otimes m \rightarrow 1 \otimes (t-1)m \rightarrow (t-1)m. \end{aligned}$$

Assim podemos considerar $\delta_1 : M \rightarrow M$

$$m \rightarrow (t-1)m.$$

Portanto $H_*(G; M)$ é a homologia do complexo: $\cdots \rightarrow 0 \rightarrow M \xrightarrow{t-1} M \xrightarrow{0} 0$.

Daí temos que:

$$\begin{cases} H_0(G; M) = M_G \text{ (proposição 2.1.4)} \\ H_1(G; M) = \frac{\ker(t-1)}{\{0\}} = \ker(t-1) = \{m \in M \mid (t-1)m = 0\} = \{m \in M \mid tm = m\} = M^G \\ H_i(G; M) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que: $H_1(G; M) = M^G \stackrel{\text{prop. 2.1.5}}{=} H^0(G; M)$.

Vamos calcular agora a cohomologia $H^*(G; M)$.

Aplicando $\text{Hom}_{RG}(-, M)$ na resolução (*) obtemos o complexo:

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{RG}(R, M) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\delta} \text{Hom}_{RG}(RG, M) \rightarrow 0$$

onde $\delta(f)(x) = (f \circ (t-1))(x) = f((t-1)x) = (t-1)f(x)$.

Logo $\delta = t-1$ (multiplicação por $t-1$).

Daí temos que $H^*(G; M)$ é a cohomologia do complexo $0 \rightarrow M \xrightarrow{t-1} M \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$.

Assim

$$\begin{cases} H^0(G; M) = M^G \text{ (prop. 2.1.5)} \\ H^1(G; M) = \frac{\ker 0}{\text{Im}(t-1)} = \frac{M}{(t-1)M} = M_G \\ H^i(G; M) = 0 \text{ para } i \geq 2. \end{cases}$$

Note que: $H^1(G; M) = M_G = H_0(G; M)$.

Exemplo 2.1.3 Seja G um grupo cíclico finito de ordem n com gerador t .

Pelo Exemplo 1.2.10 temos a seguinte resolução de R sobre RG

$$\cdots \rightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

$$\text{onde } N = \sum_{i=0}^{n-1} t^i.$$

Vamos calcular $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$.

Aplicando o funtor $- \otimes_{RG} M$ obtemos o complexo:

$$\cdots \rightarrow RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{t-1} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{N} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{t-1} RG \otimes_{RG} M \xrightarrow{\varepsilon} R \otimes_{RG} M \rightarrow 0.$$

Através dos isomorfismos $RG \otimes_{RG} M \simeq M$ e $R \otimes_{RG} M \simeq M_G$ este complexo toma a seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & M & \xrightarrow{t-1} & M & \xrightarrow{N} & M & \xrightarrow{t-1} & M & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & M_G & \rightarrow & 0 \\ & & & & & & & & \downarrow \delta_0 & & & & \\ & & & & & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Daí:

$$H_i(G; M) = \begin{cases} M_G & \text{se } i = 0 \\ \frac{\ker t-1}{\operatorname{Im} N} & \text{se } i \text{ for ímpar} \\ \frac{\ker N}{\operatorname{Im} t-1} & \text{se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Aplicando $\operatorname{Hom}_{RG}(-, M)$ à resolução acima, temos:

$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_{RG}(R, M) \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} \operatorname{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\overline{t-1}} \operatorname{Hom}_{RG}(RG, M) \xrightarrow{\bar{N}} \operatorname{Hom}_{RG}(RG, M)$$

e através dos isomorfismos $\operatorname{Hom}_{RG}(RG, M) \simeq M$ e $\operatorname{Hom}_{RG}(R, M) \simeq M^G$ obtemos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & M^G & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}} & M & \xrightarrow{t-1} & M & \xrightarrow{N} & M & \xrightarrow{t-1} & \cdots \\ & & & & \uparrow \delta_0 & & & & & & \\ & & & & 0 & & & & & & \end{array}$$

Assim:

$$H^i(G; M) = \begin{cases} M^G & \text{se } i = 0 \\ \frac{\ker N}{\operatorname{Im} t-1} & \text{se } i \text{ for ímpar} \\ \frac{\ker t-1}{\operatorname{Im} N} & \text{se } i \text{ for par} \end{cases}$$

Em particular no caso $R = \mathbb{Z} = M$ (com G -ação trivial) temos que $(t-1) = 0$ e $N = n$, $\forall r \in \mathbb{Z}$.

Daí $\ker(t-1) = \mathbb{Z}$, $\operatorname{Im}(t-1) = \{0\} = \ker N$ e $\operatorname{Im} N = n\mathbb{Z}$ e assim obtemos:

$$H_i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } i \text{ for par} \end{cases} \quad e \quad H^i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ 0 & \text{se } i \text{ for ímpar} \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ for par.} \end{cases}$$

Como aplicação do exemplo anterior, para $R = \mathbb{Z}$, temos:

Proposição 2.1.6 Se G é um grupo cíclico finito não trivial então $\mathbb{Z}$ não admite uma resolução projetiva de comprimento finito sobre $\mathbb{Z}G$.

Demonstração: Suponhamos que $F' : 0 \rightarrow F'_n \rightarrow F'_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F'_1 \rightarrow F'_0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ seja uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito.

Temos, pelo Exemplo 1.2.10 que

$$F : \cdots \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

também é resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

Daí $H_*(G; \mathbb{Z}) = H_*(F'_G) \simeq H_*(F_G)$.

Mas $H_*(F'_G) = 0$ para $i > n$ e $H_*(F_G)$ não são todos nulos para $i > n$, como vimos no exemplo anterior, o que gera uma contradição. Logo não podemos ter resolução de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito. ■

Corolário 2.1.2 Se G tem torção então $\mathbb{Z}$ não admite resolução projetiva de comprimento finito sobre $\mathbb{Z}G$.

Desmonstração: Suponhamos que $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ seja uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento finito. Seja x um elemento de torção de G e considere $H = \langle x \rangle$. Temos H é um grupo cíclico finito. Agora $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ é uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, pois:

(1) $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}H$ -módulo livre.

(2) Como F_k é $\mathbb{Z}G$ -projetivo $\xRightarrow{\text{Lema 1.1.2(iii)}} F_k \oplus Q_k = \bigoplus_{i \in I} (\mathbb{Z}G)_i \stackrel{(1)}{=} \bigoplus_{i,j} (\mathbb{Z}H)_{i,j} \xRightarrow{\text{Lema 1.1.2(iii)}} F_k$ é $\mathbb{Z}H$ -projetivo.

Assim temos H um grupo cíclico finito e uma resolução projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}H$, o que é absurdo pela proposição anterior. ■

2.2 Interpretação Topológica para $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$

A importante proposição a seguir relaciona a homologia de um grupo G com a homologia de seu subgrupo H .

Proposição 2.1.7 (Lema de Shapiro): Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e M um RH -módulo. Então:



$$a) H_*(H; M) \simeq H_*(G; \text{Ind}_H^G M).$$

$$b) H^*(H; M) \simeq H^*(G; \text{Coind}_H^G M).$$

Demonstração: Seja F uma resolução projetiva de R sobre RG . Temos, pelo fato de RG ser RH -livre, que F pode ser vista como uma resolução, projetiva de R sobre RH .

$$a) \text{ Temos que } F \otimes_{RH} M \simeq \left(F \otimes_{RG} RG \right) \otimes_{RH} M = F \otimes_{RG} \left(RG \otimes_{RH} M \right) = F \otimes_{RG} \text{Ind}_H^G M.$$

$$\text{Assim } H_*(H; M) = H_* \left(F \otimes_{RH} M \right) \simeq H_* \left(F \otimes_{RG} \text{Ind}_H^G M \right) = H_*(G; \text{Ind}_H^G M).$$

$$b) \text{ Temos que } \text{Hom}_{RH}(F_n, M) \simeq \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_{RH}(RG, M)). \text{ (ver prop. 1.5.2).}$$

$$\text{Deste modo } \text{Hom}_{RH}(F, M) \simeq \text{Hom}_{RG}(F, \text{Coind}_H^G M) \text{ e temos portanto que } H^*(H; M) = H^*(\text{Hom}_{RH}(F, M)) \simeq H^*(\text{Hom}_{RG}(F, \text{Coind}_H^G M)) = H^*(G, \text{Coind}_H^G M). \quad \blacksquare$$

Exemplo 2.1.4 Seja $M = R$. Então $H_*(H; R) = H_*(G; R(G/H))$.

$$\text{De fato: } H_*(H; R) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H_*(G; \text{Ind}_H^G R) \stackrel{\text{Cor. 1.5.1}}{\simeq} H_*(G; R(G/H)).$$

Exemplo 2.1.5 Sejam G um grupo, H subgrupo de G com $(G : H) < \infty$. Vimos que dada a condição $(G : H) < \infty$, $\text{Coind}_H^G M \simeq \text{Ind}_H^G M$. Então:

$$a) H^*(H; R) \stackrel{\text{Shapiro}}{\simeq} H^*(G; \text{Coind}_H^G R) \simeq H^*(G; \text{Ind}_H^G R) \stackrel{\text{Cor. 1.5.1}}{\simeq} H^*(G; R(G/H))$$

$$b) H^*(H; RH) \simeq H^*(G; \text{Coind}_H^G RH) \simeq H^*(G; \text{Ind}_H^G RH) \simeq H^*(G; RG \otimes_{RH} RH) \simeq H^*(G; RG).$$

Usando a proposição 1.5.5, podemos enunciar o Lema de Shapiro da seguinte maneira:

Proposição 2.1.8 Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RG -módulo. Então

$$(i) H_*(H, M) \simeq H_*(G, R(G/H) \otimes_R M)$$

$$(ii) H^*(H, M) \simeq H^*(G, \text{Hom}_R(R(G/H), M)). \quad \blacksquare$$

2.2 Interpretação Topológica para $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$.

Neste parágrafo relacionaremos a (co)homologia de um grupo G com coeficientes em um RG -módulo trivial M com a (co)homologia de um certo espaço (CW-complexo), denotado por $K(G, 1)$, (def.1.2.4) obtido a partir de G .

Primeiramente faremos a interpretação para $R = \mathbb{Z} = M$.

Para isso necessitaremos do seguinte resultado:

Proposição 2.2.1 Se X é um G -complexo livre e Y o complexo de órbitas X/G , então $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G$.

Demonstração: Seja $X \xrightarrow{p} Y = X/G$, a projeção canônica. Isto é, $p(x) = G(x)$, onde $G(x)$ denota a G -órbita de x .

A nível de complexo de cadeias temos a aplicação induzida $p_\# : C_*(X) \rightarrow C_*(Y)$, dada por $p_\#(\sum a_i \sigma_i) = \sum a_i G(\sigma_i)$.

Agora, seja $\theta : C_*(X) \rightarrow C_*(X)_G = \frac{C_*(X)}{A}$, onde $A = \langle g\alpha - \alpha; g \in G \text{ e } \alpha \in C_*(X) \rangle$, dada por $\theta(\alpha) = \alpha + A = \bar{\alpha}$.

Temos então o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} C_*(X) & \xrightarrow{p_\#} & C_*(Y) \\ \downarrow & \nearrow \varphi & \\ C_*(X)_G & & \end{array}$$

Defina $\varphi : C_*(X)_G \rightarrow C_*(Y)$ por $\varphi(\bar{\alpha}) = \varphi\left(\overline{\sum a_i \sigma_i}\right) = p_\#(\alpha) = \sum a_i G(\sigma_i)$.

Para ver que a aplicação φ está bem definida, observe que $A \subset \ker p_\#$ pois se σ é uma n -célula $p_\#(g\sigma - \sigma) = p_\#(g\sigma) - p_\#(\sigma) = G(g\sigma) - G(\sigma) = G(\sigma) - G(\sigma) = 0$.

Agora, $x \in A \Rightarrow x = \sum_i (g_i \alpha_i - \alpha_i)$, $\alpha_i \in C_n(X) \Rightarrow x = \sum_i (g_i \sum_j \sigma_j^i - \sum_j \sigma_j^i) = \sum_{i,j} (g_i \sigma_j^i - \sigma_j^i)$ e assim $p_\#(x) = p_\#\left(\sum_{i,j} (g_i \sigma_j^i - \sigma_j^i)\right) = 0$.

Daí se $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$ então $\alpha_1 - \alpha_2 \in A \subset \ker p_\#$ e assim $p_\#(\alpha_1) = p_\#(\alpha_2)$ o que nos dá $\varphi(\bar{\alpha}_1) = \varphi(\bar{\alpha}_2)$.

É fácil ver que φ é um homomorfismo de grupos. Além disso φ é bijetora.

De fato:

$\nmid \varphi$ é sobrejetora pois $\forall x = \sum a_i G(\sigma_i) \in C_*(Y)$, $\exists y = \sum a_i \bar{\sigma}_i \in C_*(X)_G$; $\varphi(y) = x$.

$\nmid \varphi$ é injetora pois $\varphi\left(\overline{\sum a_i \sigma_i}\right) = 0 \Rightarrow \sum a_i G(\sigma_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0$.

Assim $\sum a_i \sigma_i = 0 \Rightarrow \overline{\sum a_i \sigma_i} = 0$.

Logo, φ é isomorfismo. ■

O próximo resultado é de bastante interesse pois relaciona a homologia de um grupo G com a

homologia do complexo $K(G, 1)$.

Proposição 2.2.2 Se Y é um $K(G, 1)$ complexo então $H_*(G; \mathbb{Z}) \simeq H_*(Y)$.

Demonstração: Seja $p: X \rightarrow Y$ recobrimento universal de Y . Pela Proposição 1.2.1 $C_*(X) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ é resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Além disso temos $Y \simeq X/G$ ([15], 5.5.14).

Assim temos $H_*(G; \mathbb{Z}) = H_*(C_*(X)_G) \simeq H_*(C_*(X/G)) \simeq H_*(C_*(Y)) = H_*(Y)$. ■

Exemplo 2.2.1 Seja Y o bouquet de círculos indexados por um conjunto S .

Como vimos no Exemplo 1.2.6, Y é um $K(F(S), 1)$ onde $F(S)$ é o grupo livre gerado por S .

Portanto pela proposição anterior $H_i(Y) = H_i(F(S); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \bigoplus_{s \in S} \mathbb{Z} & \text{se } i = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$

Exemplo 2.2.2 Seja Y a soma conexa de n toros. Como vimos no Exemplo 1.2.7, Y é um $K(G, 1)$

onde $G = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$.

Portanto pela proposição anterior

$$H_i(G; \mathbb{Z}) = H_i(Y) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} & (2g \text{ vezes}) \text{ para } i = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{para } i = 2 \\ 0 & \text{para } i \geq 3. \end{cases}$$

Exemplo 2.2.3 Seja $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ (n vezes). Pelo Exemplo 1.2.5, T^n é um $K(\mathbb{Z}^n, 1)$.

Assim temos $H_i(\mathbb{Z}^n; \mathbb{Z}) = H_i(T^n) = \mathbb{Z}^{k_i}$, onde $k_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Proposição 2.2.3 Se G tem torção então não existe $K(G, 1)$ de dimensão finita. Em particular $K(G, 1)$ não pode ser variedade.

Demonstração: Se G tem torção então existe $H = \mathbb{Z}_p \subset G$. Seja X_H o recobrimento de $X = K(G, 1)$ associado a H . Temos que X_H é um $K(H, 1)$ (ver [13], 7.12 e [17], 5.4.1) e X_H tem dimensão finita. Logo existe n tal que $H_i(K(H, 1)) = H_i(H; \mathbb{Z}) = 0$, $\forall i > n$ (absurdo pois $H_*(H; \mathbb{Z})$ é infinita, pelo Exemplo 2.1.3).

Se $K(G, 1) = M^n$, variedade de dimensão n , $K(G, 1)$ seria um complexo de dimensão finita. Logo



$K(G, 1)$ não pode ser variedade. ■

Exemplo 2.2.4 $Y = \mathbb{R}P(\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{R}P(n)$ é um $K(\mathbb{Z}_2, 1)$ que não é variedade pela proposição anterior.

Para cohomologia temos uma interpretação topológica similar.

Proposição 2.2.4 $H^*(G, \mathbb{Z}) = H^*(K(G, 1))$.

Demonstração: Seja Y um complexo $K(G, 1)$ com recobrimento universal X . Então $C_*(X) \rightarrow \mathbb{Z}G$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$.

É suficiente provarmos que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z})$, pois deste modo temos:

$$H^*(G; \mathbb{Z}) = H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z})) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z})) \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X/G), \mathbb{Z})) \simeq \\ \simeq H^*(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(Y), \mathbb{Z})) = H^*(Y) = H^*(K(G, 1)).$$

Defina $\varphi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z})$ por $\varphi(f)(1 \otimes u) = f(u)$ e defina $\psi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*(X)_G, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X), \mathbb{Z})$ por $\psi(g)(u) = g(1 \otimes u)$.

Temos que φ e ψ são homomorfismos e $\varphi^{-1} = \psi$. Logo φ é isomorfismo, como queríamos. ■

No próximo exemplo mostraremos que se X tem estrutura de Espaço Topológico e de grupos, em geral, a homologia do espaço X é diferente da homologia do grupo X .

Exemplo 2.2.5 Seja $X = \mathbb{R}$. Temos que $\mathbb{R}$ é CW-complexo de dimensão 1 e também que $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo. Agora se pensarmos em $\mathbb{R}$ como um espaço temos que $H_1(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) = \pi_1(\mathbb{R})_{ab} = \{0\}_{ab} = \{0\}$.

Por outro lado se olharmos $\mathbb{R}$ como um grupo temos que $H_1(\mathbb{R}; \mathbb{Z}) = H_1(K(\mathbb{R}, 1); \mathbb{Z}) = \pi_1(K(\mathbb{R}, 1))_{ab} = \mathbb{R}_{ab} = \mathbb{R}$.

Logo a homologia do CW-complexo $\mathbb{R}$ é diferente da homologia do grupo $\mathbb{R}$.

Nosso objetivo agora é obter uma interpretação topológica para $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$, onde M é um $\mathbb{R}G$ -módulo trivial. Para isto necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2.2.1 Seja A um grupo abeliano com G -ação trivial. Então:



$$a) F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \simeq F_G \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

$$b) \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_G, A).$$

Demonstração:

$$a) \text{ Defina } F \times A \rightarrow F_G \otimes A \text{ por } f(x, a) = \bar{x} \otimes a.$$

É fácil verificar que f é biaditiva e assim por [16], 5.1.1 existe um homomorfismo $\varphi : F \otimes_{\mathbb{Z}G} A \rightarrow F_G \otimes A$ definido por $\varphi(x \otimes a) = \bar{x} \otimes a$.

Agora considere $g : F_G \times A \rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ dada por $g(\bar{x}, a) = x \otimes a$. Mostra-se facilmente que g está bem definida e é biaditiva, e assim novamente por [16], 5.1.1 temos bem definido um homomorfismo $\psi : F_G \otimes A \rightarrow F \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ dado por $\psi(\bar{x} \otimes a) = x \otimes a$. É claro que $\psi^{-1} = \varphi$ e assim temos o isomorfismo desejado

$$b) \text{ considere as aplicações } \theta : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \rightarrow \operatorname{Hom}(F_G, A) \text{ definida por } \theta(f)(\bar{x}) = f(x) \text{ e}$$

$$\rho : \operatorname{Hom}(F_G, A) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A) \text{ definida por } \rho(f)(x) = f(\bar{x}).$$

Claramente θ e ρ são homomorfismos. Além disso $\theta = \rho^{-1}$ e assim ρ é um isomorfismo entre $\operatorname{Hom}(F_G, A)$ e $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(F, A)$. ■

Proposição 2.2.5 Se M é um RG -módulo trivial então:

$$H_*(G; M) \simeq H_*(K(G, 1); M) \text{ e } H^*(G; M) \simeq H^*(K(G, 1); M).$$

Demonstração:

Seja $Y = K(G, 1)$ e X o recobrimento universal de Y . Temos que:

$$H_*(G; M) = H_*(C_*(X, R) \otimes_{RG} M) \simeq H_*(C_*(X, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \simeq H_*(C_*(X)_G \otimes M)$$

$$\simeq H_*(C_*(Y) \otimes M) = H_*(Y; M)$$

$$H^*(G; M) = H^*(\operatorname{Hom}_{RG}(C_*(X, R); M)) \simeq H^*(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(C_*(X, \mathbb{Z}); M))$$

$$\simeq H^*(\operatorname{Hom}(C_*(X)_G; M)) \simeq H^*(\operatorname{Hom}_{RG}(C_*(Y); M)) = H^*(Y; M). \quad \blacksquare$$

Observação 2.2.1 Se M for um RG -módulo não trivial existe também uma interpretação topológica para $H^*(G; M)$ e $H_*(G; M)$, a saber: $H_*(G; M) = H_*(K(G, 1); \mathcal{M})$ e $H^*(G; M) = H^*(K(G, 1); \mathcal{M})$ onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais associado ao RG -módulo M , mas aqui não detalharemos este fato (ver [11]).

2.3 Os Grupos $H_1(G; M)$ e $H^1(G; M)$

Como já vimos para qualquer grupo G podemos sempre tomar F como sendo a resolução padrão:

$$\cdots \rightarrow F_n \rightarrow F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow O$$

onde $F_n = RG$ -módulo livre gerado pelos símbolos $[g_1 | g_2 | \dots | g_n]$ e

$$\begin{aligned} \delta_n([g_1 | g_2 | \dots | g_n]) &= g_1 [g_2 | \dots | g_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n] + \\ &+ (-1)^n ([g_1 | g_2 | \dots | g_{n-1}]) \end{aligned}$$

Neste caso escrevemos $C_*(G, M)$ para $F \otimes_{RG} M$ e $C^*(G, M)$ para $\text{Hom}_{RG}(F, M)$. Deste modo $C_n(G, M) = F_n \otimes_{RG} M$.

Daí um elemento de $C_n(G, M)$ pode ser unicamente expresso como uma soma finita de elementos da forma $m \otimes [g_1 | \dots | g_n]$. O operador bordo $\delta : C_n(G, M) \rightarrow C_{n-1}(G, M)$ é dado por $\delta(m \otimes [g_1 | \dots | g_n]) = m \otimes g_1 [g_2 | \dots | g_n] + m \otimes \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1 | \dots | g_i g_{i+1} | g_{i+2} | \dots | g_n] + (-1)^n m \otimes [g_1 | \dots | g_{n-1}]$

Temos $C^n(G, M) = \text{Hom}_{RG}(F_n, M)$.

Assim $f \in C^n(G, M)$, $f : F_n \rightarrow M$

$$[g_1 | \dots | g_n] \rightarrow f([g_1 | \dots | g_n])$$

Portanto f pode ser vista como uma função de n variáveis de G em M , isto é, $f : G^n \rightarrow M$. O operador cobordo $\overline{\delta}_{n-1} : C^{n-1}(G, M) \rightarrow C^n(G, M)$ é dado, por:

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_{n-1}f([g_1, \dots, g_n]) &= f(\delta_n[g_1, \dots, g_n]) = f(g_1[g_2, \dots, g_n]) + \\ &+ f\left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n]\right) + (-1)^n f[g_1, \dots, g_{n-1}] \end{aligned}$$

Proposição 2.3.1 Para todo grupo G , $H_1(G; \mathbb{Z}) \simeq G/[G, G] = G_{ab}$ (G abelianizado).

Demonstração: Seja $F \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ a resolução padrão e $C_*(G)$ o complexo F_G . Temos que

$$H_1(G, \mathbb{Z}) = \frac{\ker \delta_1}{\text{Im } \delta_2} = \frac{C_1(G)}{\text{Im } \delta_2}$$

pois $C_1(G) \simeq F_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$ e $\delta_1(1 \otimes_{\mathbb{Z}G} [g_1]) = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} \partial_1([g_1]) = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} (g_1[] - []) = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} g_1[] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} [] = 1 \cdot g_1 \otimes_{\mathbb{Z}G} [] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} [] = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} [] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} [] = 0$

Definamos $\varphi : C_1(G; \mathbb{Z}) \rightarrow G_{ab}$ por $\varphi([1 \otimes g]) = \bar{g}$ nos geradores e estendamos φ por linearidade, isto é, $\varphi(\sum \alpha_i(1 \otimes [g_i])) = \prod \bar{g}_i^{\alpha_i} = \prod \bar{g}_i^{\alpha_i}$ (estamos vendo $C_1(G, \mathbb{Z})$ como grupo aditivo e G como grupo multiplicativo).

$\dashv$ φ está bem definida pois: $\sum_{i \in I} \alpha_i(1 \otimes [g_i]) = \sum_{i \in I} \beta_i(1 \otimes [g_i]) \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \Rightarrow \bar{\xi}_i^{\alpha_i} = \bar{\xi}_i^{\beta_i}$ (aqui estamos vendo $\beta = \{(1 \otimes [g_i]), i \in I\}$ como base de $C_1(G, \mathbb{Z})$ e os α_i 's e β_i 's são quase todos nulos. Na verdade $\beta = \{(1 \otimes [g]), g \in G\}$).

$\dashv$ φ é homomorfismo pela própria definição.

$\dashv$ φ é sobrejetora pois dado $\bar{g} \in G_{ab}$ existe $1 \otimes [g] \in C_1(G, \mathbb{Z})$ tal que $\varphi(1 \otimes [g]) = \bar{g}$.

Afirmção: $Im \delta_2 \subset ker \varphi$.

De fato:

$\alpha \in Im \delta_2 \Rightarrow \alpha = \delta_2(x)$ para algum $x \in C_2(G, \mathbb{Z})$.

Agora, $x \in C_2(G) \Rightarrow x = \sum_{g, g' \in G} \alpha_{g, g'}(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g | g']) \Rightarrow \delta_2(x) = \sum_{g, g' \in G} \alpha_{g, g'} \partial_2(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g | g'])$.

Agora $\partial_2(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g | g']) = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} g[g'] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[gg'] + 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g] = 1 \cdot g \otimes_{\mathbb{Z}G}[g'] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[gg'] + 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g] = 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[gg'] + 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g']$.

Portanto $Im(\delta_2) = \langle 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g] + 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g'] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[gg'], g, g' \in G \rangle$. Mas $\varphi(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g] + 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g'] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[gg']) = \bar{g} \cdot \bar{g}' \cdot \overline{(gg')^{-1}} = 1$. Daí $Im \delta_2 \subseteq Ker \varphi$.

Assim temos bem definida a aplicação $\psi : (C_1(G)/Im \delta_2) \rightarrow G_{ab}$ definida por $\psi(\alpha + Im \delta_2) = \varphi(\alpha)$.

$\dashv$ ψ é sobrejetora pois dado $\bar{g} \in G_{ab}$, como φ é sobrejetora existe $x \in C_1(G, \mathbb{Z})$ tal que $\varphi(x) = \bar{g}$.

Seja $y = x + Im \delta_2$. Temos $\psi(y) = \psi(x + Im \delta_2) = \varphi(x) = \bar{g}$. Logo existe $y \in C_1(G, \mathbb{Z})/Im \delta_2$ tal que $\psi(y) = \bar{g}$.

$\dashv$ ψ é injetora.

De fato, seja $\alpha = \sum \alpha_i(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g_i])$ tal que $\psi(\alpha + Im \delta_2) = \bar{0} \Rightarrow \varphi(\alpha) = \bar{0} \Rightarrow \varphi(\sum \alpha_i(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[g_i])) = 0 \Rightarrow \prod \bar{g}_i^{\alpha_i} = 0 \Rightarrow \prod g_i^{\alpha_i} \in [G, G] \Rightarrow \prod g_i^{\alpha_i} = \prod aba^{-1}b^{-1}$.

Agora note que $1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[aba^{-1}b^{-1}] = \delta_2(1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[aba^{-1}b^{-1} | ba] + 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[b | a] - 1 \otimes_{\mathbb{Z}G}[a | b])$.

Logo $1 \otimes_{\mathbb{Z}G} \prod aba^{-1}b^{-1} \in Im \delta_2 \Rightarrow 1 \otimes_{\mathbb{Z}G} \prod g_i^{\alpha_i} \in Im \delta_2 \Rightarrow \sum \alpha_i(1 \otimes_{\mathbb{Z}G} g_i) \in Im \delta_2 \Rightarrow \overline{\sum \alpha_i(1 \otimes_{\mathbb{Z}G} g_i)} = \bar{0}$.

Assim $\bar{\alpha} = \bar{0}$. Claramente ψ é homomorfismo. Logo ψ é um isomorfismo e temos o resultado desejado. ■

Corolário 2.3.1 Se M é um RG -módulo trivial então $H_1(G; M) \simeq G_{ab} \otimes M$.

Demonstração: Por [7], II.3 ex. 3 temos que $H_1(G; M) \simeq H_1(G; \mathbb{Z}) \otimes M \oplus \text{Tor}(H_0(G; \mathbb{Z}), M)$.

Mas $H_0(G; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$ e $H_1(G; \mathbb{Z}) = G_{ab}$ pela proposição anterior.

Daí $H_1(G; M) \simeq G_{ab} \otimes M \oplus \text{Tor}(\mathbb{Z}, M) = G_{ab} \otimes M$. ■

Lema 2.3.1 $\text{Hom}(G, M) \simeq \text{Hom}(G_{ab}, M)$.

Demonstração: Defina $\psi: \text{Hom}(G, M) \rightarrow \text{Hom}(G_{ab}, M)$ por $\psi(f)(\bar{x}) = f(x)$, onde $x \in G$ e $\bar{x}$ denota um elemento de G_{ab} .

ψ está bem definida, pois $f = g \Rightarrow \psi(f)(\bar{x}) = f(x) = g(x) = \psi(g)(\bar{x})$. Portanto $\psi(f) = \psi(g)$.

Claramente ψ é homomorfismo de grupos.

Agora defina $\theta: \text{Hom}(G_{ab}, M) \rightarrow \text{Hom}(G, M)$ por $\theta(f) = f \circ p$, onde $p: G \rightarrow G_{ab}$ é a projeção canônica.

θ está bem definida, pois

$f \equiv g \Rightarrow f \circ p \equiv g \circ p \Rightarrow \theta(f) = \theta(g)$.

θ é inversa de ψ pois: $(\theta \circ \psi)(f)(\bar{x}) = \theta(f(x)) = (f \circ p)(x) = f(\bar{x})$ e

$(\psi \circ \theta)(f)(x) = \psi((f \circ p)(x)) = \psi(f(\bar{x})) = f(x)$

Assim ψ é um isomorfismo. ■

Proposição 2.3.2 Sejam $D = \{d: G \rightarrow M \mid d(gh) = dg + gd(h)\}$ o grupo das derivações e $D_p = \{d \in D \mid d(g) = gm - m, m \in M \text{ fixo}\}$ o grupo das derivações principais. Então $H^1(G; M) \simeq \frac{D}{D_p}$. Em particular se G atua trivialmente em M então: $H^1(G; M) \simeq \text{Hom}(H_1(G); M)$.

Demonstração: É claro que D_p é um subgrupo de D .

Consideremos o complexo de cocadeias padrão $C^*(G, M)$

$$0 \rightarrow C^0(G, M) \xrightarrow{\delta_0} C^1(G, M) \xrightarrow{\delta_1} C^2(G, M) \rightarrow \dots$$

Temos que $H^1(G, M) = \frac{\ker \delta_1}{\text{Im} \delta_0}$. Mostraremos que $\ker \delta_1 = D$ e que $\text{Im} \delta_0 = D_p$.

Seja $f \in C^1(G, M)$. Então temos $f: G \rightarrow M$ e $\delta_1(f)(g, h) = gf(h) - f(gh) + f(g)$.

Portanto, $\delta_1(f) = 0 \Rightarrow (\delta_1 f)(g, h) = 0 \Rightarrow f(gh) = f(g) + gf(h) \Rightarrow f \in D$. Assim $\ker \delta_1 \subset D$. Por outro lado, se $f \in D \Rightarrow f(gh) = f(g) + gf(h) \Rightarrow gf(h) - f(gh) + f(g) = 0 \Rightarrow \delta_1 f = 0 \Rightarrow f \in \ker \delta_1$ e daí $D \subset \ker \delta_1$.

Logo $\ker \delta_1 = D$.

Agora se $k \in \text{Im} \delta_0$ temos que $\exists f : G^0 \rightarrow M$ tal que $k = \delta \circ f$. Mas $k(g) = (\delta(f))g = gf([1]) - f([1])$.

Se $f([1]) = m$, $k(g) = gm - m$. Portanto $k \in D_p$. Reciprocamente, se $k \in D_p$ então $k(g) = gm - m = (\delta(f))(g)$. Logo $\text{Im} \delta_0 = D_p$.

$$\text{Portanto } H^1(G; M) = \frac{D}{D_p}.$$

Agora se G atua trivialmente em M então: $D = \{d : G \rightarrow M \mid d(gh) = gd(h) + d(g)\} = \{d : G \rightarrow M \mid d(gh) = d(h) + d(g)\} = \text{Hom}(G, M)$

$$\text{e } D_p = \{d \in D \mid d(g) = gm - m = 0\} = \{0\}.$$

$$\text{Portanto } H^1(G; M) = \text{Hom}(G, M) \stackrel{\text{Lema 2.3.1}}{=} \text{Hom}(G_{ab}, M) \stackrel{\text{prop. 2.3.1}}{=} \text{Hom}(H_1(G), M). \quad \blacksquare$$

2.4 H_* e H^* como Funtores do Módulo Coeficiente e como Funtores de Duas Variáveis

Seja $\mathcal{M}$ a categoria dos RG -módulos à esquerda.

Desde que $F \otimes_{RG} -$ e $\text{Hom}_{RG}(F, -)$ são funtores covariantes em $\mathcal{M}$ é claro que $H_*(G; -)$ e $H^*(G; -)$ são funtores covariantes em $\mathcal{M}$.

Proposição 2.4.1 *Seja $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0$ uma seqüência exata de RG -módulos.*

a) *Para todo inteiro n existe uma aplicação $\delta : H_n(G; M'') \rightarrow H_{n-1}(G; M')$ tal que a seqüência*

$$\cdots \rightarrow H_1(G; M) \xrightarrow{j_1} H_1(G; M'') \xrightarrow{\delta} H_0(G; M') \xrightarrow{i_0} H_0(G; M) \xrightarrow{j_0} H_0(G; M'') \rightarrow 0$$

é exata, onde as aplicações i_k e j_k são induzidas por i e j em cada nível de homologia.

b) *Para todo inteiro n existe uma aplicação $\delta : H^n(G; M'') \rightarrow H^{n+1}(G; M')$ tal que a seqüência*

$$0 \rightarrow H^0(G; M') \xrightarrow{i^0} H^0(G; M) \xrightarrow{j^0} H^0(G; M'') \xrightarrow{\delta} H^1(G; M') \xrightarrow{i^1} H^1(G; M) \xrightarrow{j^1} \cdots$$

é exata onde as aplicações i^k e j^k são induzidas por i e j em cada nível de cohomologia.

Demonstração: Seja

$$F : \cdots \rightarrow F_n \xrightarrow{\delta_n} F_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow R \rightarrow 0 \text{ uma resolução projetiva de } R \text{ sobre } RG.$$

a) Como cada F_n é RG -projetivo (logo é RG plano) temos que:

$$0 \rightarrow M' \bigotimes_{RG} F_n \rightarrow M \bigotimes_{RG} F_n \rightarrow M'' \bigotimes_{RG} F_n \rightarrow 0.$$

é exata para todo n . Daí temos a sequência exata de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow M' \otimes_{RG} F \rightarrow M \otimes_{RG} F \rightarrow M'' \otimes_{RG} F \rightarrow 0.$$

Logo por [7] capítulo 1, Proposição 0.4, temos a sequência exata longa em homologia.

$$\cdots \rightarrow H_1 \left(M'' \otimes_{RG} F \right) \xrightarrow{\delta} H_0 \left(M' \otimes_{RG} F \right) \rightarrow H_0 \left(M \otimes_{RG} F \right) \rightarrow H_0 \left(M'' \otimes_{RG} F \right) \rightarrow 0$$

que nos dá a sequência desejada.

b) Analogamente, como os F'_i s são RG projetivos temos que para cada n , a sequência

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, M') \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, M) \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, M'') \rightarrow 0$$

é exata ([14], 1.9.4 (e)) e daí temos uma sequência exata curta de complexos de cocadeias.

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F, M') \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F, M) \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F, M'') \rightarrow 0$$

que nos fornece a sequência exata longa de cohomologia. ■

Veremos agora que $H_*(-, -)$ é um funtor covariante na categoria $\mathcal{C}$ cujos objetos são pares (G, M) onde G é um grupo e M é um RG -módulo e um morfismo em $\mathcal{C}$ de (G, M) em (G', M') é um par (α, f) com $\alpha : G \rightarrow G'$ um homomorfismo de grupos e $f : M \rightarrow M'$ um homomorfismo de RG -módulos, considerando M' como RG -módulo via α , isto é, um homomorfismo de RG -módulos satisfazendo $f(g * m) = \alpha(g) \cdot f(m)$.

Sejam $(\alpha, f) : (G, M) \rightarrow (G', M')$, F uma resolução projetiva de R sobre RG e F' uma resolução projetiva de R sobre RG' (note que podemos ver F' como resolução de R sobre RG via α , ou seja, cada F'_k poder ser visto como um RG -módulo definindo ação $g * x' = \alpha(g)x'$).

Como F é RG -projetivo e F' é acíclico para $i \geq 1$ (pois F' é RG -resolução), temos pelo Lema 1.3.1, que existe $\tau : F \rightarrow F'$ aplicação de cadeia estendendo a identidade de R , única a menos de homotopia e $\tau(gx) = g * \tau(x)$ pois τ é homomorfismo de RG -módulos.

Seja agora $\tau \otimes f : F \otimes_{RG} M \rightarrow F' \otimes_{RG} M'$ dada por $\tau(x \otimes m) = \tau(x) \otimes f(m)$.

$\tau \otimes f$ é uma aplicação de cadeia entre os complexos $F \otimes_{RG} M$ e $F' \otimes_{RG} M'$ e daí $\tau \otimes f$ induz uma aplicação bem definida.

$(\alpha, f)_* : H_*(G; M) \rightarrow H_*(G'; M')$ tal que $(\alpha, f)_*([x \otimes m]) = [(\tau \otimes f)(x \otimes m)]$.

É fácil ver que :

a) Se $M = M'$, $G = G'$, $\alpha = id_G$ e $f = id_M$ então $(\alpha, f)_* = id_{H_*(G, M)}$.



b) Se $(\alpha, f) : (G, M) \rightarrow (G', M')$ e $(\alpha', f') : (G', M') \rightarrow (G'', M'')$ então $(\alpha' \circ f')_* \circ (\alpha, f)_* = ((\alpha', f') \circ (\alpha, f))_*$.

Logo concluímos que $H_*(-, -)$ é um funtor covariante em $\mathcal{C}$.

A situação para cohomologia é análoga.

Seja $\mathcal{D}$ a categoria cujos objetos são os mesmos que em $\mathcal{C}$ e as aplicações são pares (α, f) onde $\alpha : G \rightarrow G'$ e $f : M' \rightarrow M$ (isto é necessário pois $\text{Hom}(-, -)$ é contravariante na primeira variável).

Se F e F' são resoluções projetivas de R sobre RG e RG' respectivamente e $\tau : F \rightarrow F'$ aplicação de cadeia compatível com α , isto é, $\tau(gx) = \alpha(g)\tau(x)$, existe uma aplicação de cocadeias $\text{Hom}(\tau, f) : \text{Hom}_G(F', M') \rightarrow \text{Hom}_G(F, M)$ dado por $\text{Hom}(\tau, f)(\phi) = f \circ \phi \circ \tau$.

Logo $\text{Hom}(\tau, f)$ induz uma aplicação $(\alpha, f)^* : H^*(G'; M') \rightarrow H^*(G; M)$ tal que $(\alpha, f)^*([\phi]) = [f \circ \phi \circ \tau]$.

É fácil ver que

a) se $\alpha : G \rightarrow G$ é a id_G e $f : M \rightarrow M$ é a id_M então $(\alpha, f)^* = \text{id}_{H^*(G, M)}$

b) $((\alpha, f) \circ (\beta, g))^* = (\beta, g)^* \circ (\alpha, f)^*$.

Logo $H^*(-, -)$ é um funtor contravariante, na categoria $\mathcal{D}$.

Observação 2.4.1 Sejam G um grupo, H um subgrupo de G . Considere $\alpha : H \rightarrow G$ a inclusão e as RH -aplicações canônicas $i : M \rightarrow \text{Ind}_H^G M$ (ver observação 1.5.1) e $\pi : \text{Coind}_H^G M \rightarrow M$ (ver observação 1.5.3). É fácil ver que os isomorfismos da proposição 2.1.7 (Lema de Shapiro) são dados por $(\alpha, i)_*$ e $(\alpha, \pi)^*$ (estes isomorfismos são chamados isomorfismos de Shapiro).

2.5 A Homologia de Produtos Livres Amalgamados e Extensões

HNN

Definição 2.5.1 Um grupo G é definido por geradores $X = \{x_k\}$ e relações $R = \{r_j = 1\}$ no caso em que F é um grupo livre sobre X , H é o subgrupo normal de F gerado por $\{r_j\}$ e $G \simeq \frac{F}{H}$. Dizemos que $\langle X; R \rangle$ é uma apresentação de G .

Definição 2.5.2 Consideremos os grupos G_1 e G_2 com apresentações $G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle$ e $G_2 = \langle X_2; R_2 \rangle$. Se $T_1 \subset G_1$ e $T_2 \subset G_2$ são subgrupos com um dado isomorfismo $\sigma : T_1 \rightarrow T_2$, então o produto livre

$G_1 *_T G_2$ de G_1 e G_2 com subgrupo amalgamado $T = T_1 = T_2$ é dado por:

$$G_1 *_T G_2 = \langle X_1, X_2; R_1, R_2, t = \sigma(t), \forall t \in T_1 \rangle$$

Exemplo 2.5.1 Sejam $G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle$ e $G_2 = \langle X_2; R_2 \rangle$. Seja $T = T_1 = T_2 = \{1\}$ (subgrupo trivial). Então $G_1 *_T G_2 = \langle X_1, X_2; R_1, R_2 \rangle$ é chamado produto livre de G_1 e G_2 e é denotado por $G_1 * G_2$.

Exemplo 2.5.2: Como caso particular do exemplo anterior consideremos $G_1 = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $G_2 = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Então o produto livre de G_1 e G_2 é o grupo livre com dois geradores:

$$G_1 * G_2 = \langle a \rangle * \langle b \rangle = \langle a, b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Exemplo 2.5.3: Sejam $G_1 = \langle x : x^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ e $G_2 = \langle y : y^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$. Então $G = G_1 * G_2 = \langle x, y : x^2 = y^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$. G é chamado grupo diedral infinito.

Exemplo 2.5.4: Sejam $G_1 = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle$, $G_2 = \langle a_2 \rangle * \langle b_2 \rangle$ e S identificado à $S_1 = \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle$ e $S_2 = \langle b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \rangle$.

$$\text{Então } G_1 *_S G_2 = \langle a_1, b_1, a_2, b_2; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \rangle.$$

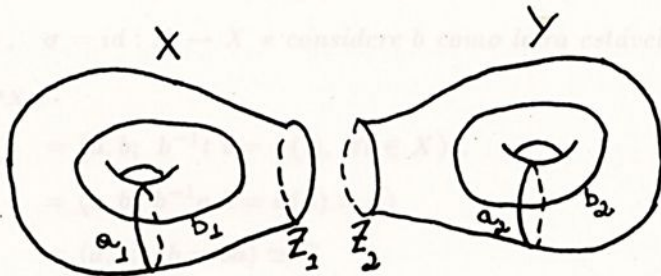
De fato:

$G_1 = \langle a_1, b_1 \rangle$, $G_2 = \langle a_2, b_2 \rangle$. $S_1 \subset G_1$, $S_2 \subset G_2$ e $\sigma : S_1 \rightarrow S_2$ definido por $\sigma(a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}) = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1}$ é um isomorfismo.

Assim

$$\begin{aligned} G_1 *_S G_2 &= \langle a_1, b_1, a_2, b_2; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \rangle \\ &= \langle a_1, b_1, a_2, b_2; a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = 1 \rangle. \end{aligned}$$

$G_1 *_S G_2$ é o grupo fundamental da soma conexa de 2 toros (Isto segue do Teorema de Van-Kanpem - ver [17], 4.2).

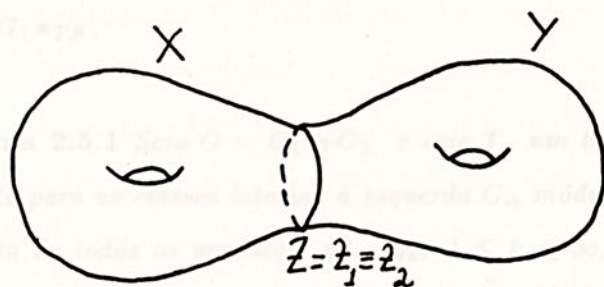


De fato:

$$G_1 = \pi_1(X) = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle, \quad G_2 = \pi_1(Y) = \langle a_2 \rangle * \langle b_2 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle$$

$$S_1 = \pi_1(Z_1) = \langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \rangle,$$

$$S_2 = \pi_1(Z_2) = \langle b_2 a_2 b_2^{-1} a_2^{-1} \rangle$$



Portanto $S = \pi_1(Z) \simeq \pi_1(Z_1) \simeq \pi_1(Z_2)$.

Definição 2.5.3: Consideremos G_1 com apresentação $G_1 = \langle X_1; R_1 \rangle$, se T, T' são subgrupos de G_1 com um dado isomorfismo $\sigma : T \rightarrow T'$ então o grupo HNN $G_1 *_{T, \sigma}$ sobre o grupo base G_1 , com respeito a σ e letra estável p , é dado por:

$$G_1 *_{T, \sigma} = \langle X_1, p; R_1, p^{-1}t p = \sigma(t), \forall t \in T \rangle.$$

Exemplos 2.5.5 Sejam $G_1 = \{1\}$, $T_1 = T_2 = \{1\}$ e $\sigma = id_{\{1\}}$

$$G_1 *_{T, \sigma} = \langle 1, p; p^{-1}1 p = 1 \rangle = \langle 1, p \rangle = \langle p \rangle \simeq \mathbb{Z}.$$

Exemplos 2.5.6 Sejam $G = \langle x, y; xy = yx^2 \rangle$ e $X = \langle x \rangle$. Então $G = X *_{X, \sigma}$, onde $\sigma : X \rightarrow X$, dado por $\sigma(x) = x^2$ é um isomorfismo de X sobre $X' = \langle x^2 \rangle$.

$$\text{De fato, } X *_{X, \sigma} = \langle x, p; p^{-1}t p = \sigma(t), \forall t \in X \rangle$$

$$= \langle x, p; tp = pt^2, \forall t \in X \rangle = \langle x, p; xp = px^2 \rangle = G$$

Exemplos 2.5.7 Seja $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle = \langle a, b; ab = ba \rangle$.

Sejam $X = \langle a \rangle$, $\sigma = id : X \rightarrow X$ e considere b como letra estável.

Então $G = X *_{X, \sigma}$.

$$\text{De fato, } X *_{X, \sigma} = \langle a, b; b^{-1}t b = \sigma(t), \forall t \in X \rangle.$$

$$= \langle a, b; b^{-1}a b = \sigma(a) = a \rangle$$

$$= \langle a, b; ab = ba \rangle \simeq G$$

Definição 2.5.4 Dizemos que G se decompõe sobre um subgrupo T se $G = G_1 *_{T, \sigma} G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$

ou $G = G_1 *_{T, \theta} G_2$.

Enunciaremos aqui dois resultados que caracterizam a estrutura de grupos da forma $G = G_1 *_{T, \theta} G_2$ e $G = G_1 *_{T, \theta} G_2$.

Teorema 2.5.1 *Seja $G = G_1 *_{T, \theta} G_2$ e seja T_α um transversal à esquerda de G_α módulo T (representante para as classes laterais à esquerda G_α módulo T) contendo $1 \in G$ para $\alpha = 1, 2$. Seja S o conjunto de todos os produtos $g_1 \dots g_k$, $1 \leq k \leq \infty$, $g_i \neq 1 \in T_1 \cup T_2$, com a propriedade de que fatores consecutivos g_i, g_{i+1} não pertencem simultaneamente a T_α , $\alpha = 1, 2$. Então $S \cup \{1\}$ é um transversal à esquerda para $G = G_1 *_{T, \theta} G_2$.*

Demonstração: [5], pg. 26. ■

Teorema 2.5.2 *Seja $G = G_1 *_{S, \sigma} G_2$. Considere X e Y transversais de G módulo S e G módulo T , onde $T = \sigma(S)$, respectivamente, ambos contendo $1 \in G$. Seja Z o conjunto de todas as palavras induzidas $x_1 p^{n_1} x_2 p^{n_2} \dots x_k p^{n_k}$ e 1 , onde $n_i = \pm 1$, $x_i \in X$ se $n_i = -1$ e $x_i \in Y$ se $n_i = 1$. Então Z é um transversal à esquerda para G módulo G_1 .*

Demonstração: ver [5], pg. 31. ■

Observação 2.5.1 *Segue do Teorema 2.5.1 que um elemento $g \in G = G_1 *_{T, \theta} G_2$ pode se escrito como $g = g_1 g_2 \dots g_k c$ com $g_i \in T_1 \cup T_2$ e com a propriedade de que fatores consecutivos g_i, g_{i+1} não pertencem a T_α , $\alpha = 1, 2$ e $c \in T$.*

Da mesma forma, se $g \in G_1 *_{S, \sigma} G_2$ então pelo Teorema 2.5.2, $g = x_1 p^{n_1} \dots x_k p^{n_k} c$ onde $n_i = \pm 1$, $x_i \in X$ se $n_i = -1$, $x_i \in Y$ se $n_i = 1$ e $c \in G_1$.

Antes de prosseguirmos no estudo de decomposição de grupos necessitaremos de alguns resultados envolvendo derivação de um grupo G .

Lembremos que uma derivação de um grupo G é uma aplicação $d : G \rightarrow A$, A um RG -módulo, com a seguinte propriedade $d(xy) = d(x) + xd(y)$, $\forall x, y \in G$.

Toda derivação d se estende unicamente a um R -homomorfismo $d : RG \rightarrow A$ da seguinte forma:

$$d\left(\sum_{g \in G} r_g g\right) := \sum_{g \in G} r_g d(g).$$

Considere $\text{Der}(G, A)$ o conjunto de todas as derivações de G em A .

É fácil ver que a aplicação $\rho : \text{Der}(G, A) \rightarrow \text{Hom}_{RG}(\Delta, A)$, onde $\Delta = \ker \varepsilon_0 (\varepsilon_0 : RG \rightarrow R)$ definida por $\rho(d)(g-1) = d(g), \forall g \in G$ e $d \in \text{Der}(G, A)$ é um isomorfismo (note que $g-1$ é uma base para Δ , ver [7], 1.2 ex. 1) cuja inversa é dada por $\psi : \text{Hom}_{RG}(\Delta, A) \rightarrow \text{Der}(G, A)$ tal que $\psi(f)(g) = f(g-1), \forall g \in G$ e $f \in \text{Hom}_{RG}(\Delta, A)$.

No caso particular que $G = F = \langle x_i, i \in I \rangle$, grupo livre com geradores $\{x_i\}_{i \in I}$, temos que Δ é o RF -módulo livre gerado por $\{x_i - 1, i \in I\}$.

Considere para cada $i \in I$, o homomorfismo, $\delta_{ij} : \Delta \rightarrow RF$, definido por $\delta_{ij}(x_j - 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ nos geradores e estendido por linearidade. Do fato de ρ ser isomorfismo, existe uma única derivação, que denotaremos por $\frac{\partial}{\partial x_i} : F \rightarrow RF$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(x_j) = \delta_{ij}(x_j - 1) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_i}$ é a derivada parcial com respeito a x_i .

Seja $d : F \rightarrow A$ uma derivação. Defina $\tilde{d}(w) = \sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} d(x_i), w \in F$. Como $\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0$, exceto para um número finito de x_i 's temos que a soma $\sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} d(x_i)$ está bem definida.

É fácil ver que $\tilde{d} : F \rightarrow A$ é uma derivação.

Agora $\tilde{d}(x_i) = \sum_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} d(x_j) = d(x_i)$.

Portanto $d = \tilde{d}, \forall d \in \text{Der}(F, A)$.

Logo

$$d(w) = \sum_{i \in I} \frac{\partial w}{\partial x_i} d(x_i), \forall d \in \text{Der}(F, A) \text{ e } w \in F. \quad (2.1)$$

Aplicando o resultado (2.1) ao caso especial $d : F \rightarrow RF$ dada por $d(w) = w - 1$.

Obtemos:

$$w - 1 = \sum_i \frac{\partial w}{\partial x_i} (x_i - 1), \forall w \in F. \quad (\text{Fórmula Fundamental}) \quad (2.2)$$

Existem duas maneiras de generalizarmos este fórmula.

1) Estendendo para RF linearmente

$$d: RF \rightarrow RF$$

$$\sum_{f \in F} r_f f \rightarrow \sum_{f \in F} r_f d(f).$$

Assim dado $\lambda \in RF$ temos

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= d\left(\sum_f r_f f\right) = \sum_f r_f d(f) = \sum_f r_f \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - 1) = \\ &= \sum_f \sum_i r_f \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - 1) = \sum_i \sum_f r_f \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - 1) = \sum_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} (x_i - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Por outro lado } d(\lambda) = \sum_f r_f d(f) = \sum_f r_f (f - 1) = \sum_f r_f f - \sum_f r_f = \lambda - \varepsilon(\lambda).$$

$$\text{Portanto temos } \lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum_i \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} (x_i - 1), \forall \lambda \in RF.$$

2) Estendendo de $RF \rightarrow RF$ para $RF \rightarrow RG$.

Seja G um grupo com geradores $\{g_i\}_{i \in I}$ e $\pi: F \rightarrow G$, uma apresentação (π é sobrejetora). F é livremente gerado por $\{x_i\}_{i \in I}$ onde x_i é tal que $\pi(x_i) = g_i$.

Temos o homomorfismo induzido $\pi: RF \rightarrow RG$. Seja $\Lambda \in RF$.

$$\begin{aligned} \Lambda - \varepsilon(\Lambda) &= \sum_i \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} (x_i - 1) \Rightarrow \pi(\Lambda - \varepsilon(\Lambda)) = \pi\left(\sum_i \frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} (x_i - 1)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pi(\Lambda) - \pi(\varepsilon(\Lambda)) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right) \pi(x_i - 1) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right) (g_i - 1). \end{aligned}$$

Seja $\lambda = \pi(\Lambda) \in RG$.

Assim temos $\lambda - \pi(\varepsilon(\Lambda)) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right) (g_i - 1)$. É fácil verificar que $\pi(\varepsilon(\Lambda)) = \varepsilon(\lambda)$.

Portanto temos

$$\lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum_i \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right) (g_i - 1). \quad (2.3)$$

O nosso objetivo agora é obter seqüências de “Mayer-Vietoris” para produtos livres amalgamados de grupos e extensões HNN .

Para isto, necessitamos da definição e das proposições que seguem:

Definição 2.5.5 i) Seja $G = G_1 *_T G_2$, $g = a_1 b_1 \dots a_n b_n c \in G$. O comprimento λ de g é definido por $\lambda(g) = 2n$.

ii) Seja $G = G_1 *_T G_2$, $g = x_1 p^{\varepsilon_1} x_2 p^{\varepsilon_2} \dots x_n p^{\varepsilon_n} c \in G$. O comprimento λ de g é definido por $\lambda(g) = n$.

Proposição 2.5.1 Se $G = G_1 *_T G_2$ então temos a sequência exata curta de RG -módulos:

$$0 \rightarrow R(G/T) \xrightarrow{\alpha} R(G/G_1) \oplus R(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

onde α é dado por $\alpha(xT) = (xG_1, -xG_2)$, $x \in RG$, e ε é a aumentação.

Demonstração: Claramente ε é um epimorfismo. Mostremos que $\ker \varepsilon = \operatorname{Im} \alpha$.

i) $\operatorname{Im} \alpha \subset \ker \varepsilon$. De fato: seja $\lambda_1, \lambda_2 \in RG$ tal que $(\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2) \in \operatorname{Im} \alpha \Rightarrow (\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2) = \alpha(\lambda T) = (\lambda G_1, -\lambda G_2)$, para algum $\lambda \in RG$.

$$\text{Assim } \varepsilon((\lambda_1 G_1, \lambda_2 G_2)) = \varepsilon(\lambda G_1, -\lambda G_2) = 1 - 1 = 0$$

ii) $\ker \varepsilon \subset \operatorname{Im} \alpha$

Considere $G_1 = \frac{F_1}{A_1}$ e $G_2 = \frac{F_2}{A_2}$ onde F_1, F_2 são grupos livres.

Sejam $\{\bar{x}_i\}_{i \in I}$ e $\{\bar{y}_j\}_{j \in J}$ os geradores de G_1 e G_2 respectivamente.

Construa F o grupo livre gerado por $\{x_i, y_j\}$ e a apresentação $\pi : F \rightarrow G_1 *_T G_2 = G$ tal que $\pi(x_i) = \bar{x}_i$ e $\pi(y_j) = \bar{y}_j$.

Por (2.3) temos que $\forall \lambda \in RG$,

$\lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right)(\bar{x}_i - 1) + \sum \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}\right)(\bar{y}_j - 1)$ onde Λ é tal que $\pi(\Lambda) = \lambda$ e $\varepsilon : RG \rightarrow R$ é a aumentação usual.

Assim:

$$\lambda G_1 - \varepsilon(\lambda G_1) = \sum \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}\right)(\bar{y}_j - 1) G_1 \quad (2.4)$$

$$\lambda G_2 - \varepsilon(\lambda G_2) = \sum \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i}\right)(\bar{x}_i - 1) G_2. \quad (2.5)$$

Seja $(\lambda G_1, \mu G_2) \in R(G/G_1) \oplus R(G/G_2)$ tal que $\varepsilon(\lambda G_1, \mu G_2) = \varepsilon(\lambda G_1) + \varepsilon(\mu G_2) = 0$.

Logo

$$\varepsilon(\lambda G_1) = -\varepsilon(\mu G_2) \quad (2.6)$$

Tome $\Lambda, M \in RF$; $\pi(\Lambda) = \lambda$ e $\pi(M) = \mu$.

$$\begin{aligned} \text{Assim } \alpha\left(\sum \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}\right)(\bar{y}_j - 1)T - \sum \pi\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)(\bar{x}_i - 1)T + \varepsilon(\lambda T)\right) &= \\ \left(\sum \pi\left(\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}\right)(\bar{y}_j - 1)G_1 + \varepsilon(\lambda G_1), \sum \pi\left(\frac{\partial M}{\partial x_i}\right)(\bar{x}_i - 1)G_2 - \varepsilon(\lambda G_2)\right) &= \\ = (\lambda G_1, \mu G_2 - \varepsilon(\mu G_2) - \varepsilon(\lambda G_2)) &\text{ (por (2.4) e (2.5))} \\ = (\lambda G_1, \mu G_2 + \varepsilon(\lambda G_1) - \varepsilon(\lambda G_2)) &\text{ (por (2.6))} \\ = (\lambda G_1, \mu G_2) \end{aligned}$$

Portanto $\ker \varepsilon \subset \operatorname{Im} \alpha$ e assim $\operatorname{Im} \alpha = \ker \varepsilon$.

Resta mostrarmos que α é monomorfismo.

Seja $\lambda \in RG$ tal que $\alpha(\lambda T) = (\lambda G_1, -\lambda G_2) = 0$, isto é, $\lambda G_1 = \lambda G_2 = 0$. Agora $\lambda = \sum_{g \in G} r_g g$ com r_g quase todos nulos, isto é, $\lambda = r_{g_1} g_1 + \dots + r_{g_k} g_k$.

Seja $\operatorname{supp}(\lambda T) = \{g_1 T, \dots, g_k T\}$, o suporte de λT (isto é, o conjunto formado pelos gT tais que $r_g \neq 0$ na expressão de λ).

Agora sejam T_i um transversal à esquerda de G_i módulo T , $i = 1, 2$.

Temos pelo, Teorema 2.5.1, que qualquer $g \in G = G_1 *_T G_2$ pode ser escrito na forma $g = a_1 b_1 \dots a_n b_n c$ onde $a_i \in T_1$, $b_i \in T_2$ e $c \in T$. Além disso, se $a_i = 1 \Rightarrow i = 1$ e se $b_i = 1 \Rightarrow i = n$.

Deste modo $\operatorname{supp}(\lambda T) = \{a_{11} b_{11} \dots a_{1n_1} b_{1n_1} T, \dots, a_{k1} b_{k1} \dots a_{kn_k} b_{kn_k} T\}$.

Considere w um elemento de comprimento máximo no $\operatorname{supp}(\lambda T)$.

Temos dois casos a estudar:

1) w termina em uma a_{jn_j} , isto é, $w = a_{j1} b_{j1} \dots a_{jn_j}$.

Assim $w G_2 = a_{j1} b_{j1} \dots a_{jn_j} G_2$ tem o mesmo comprimento que wT e portanto não se anula em λG_2 . Portanto $\lambda G_2 \neq 0$ (contra hipótese).

2) w termina em um b_{jn_j} , isto é, $w = a_{j1} b_{j1} \dots a_{jn_j} b_{jn_j}$.

Neste caso $w G_1$ tem o mesmo comprimento que wT e portanto não se anula em λG_1 . Portanto $\lambda G_1 \neq 0$ (contra hipótese).

Deste modo não existe elemento de comprimento máximo no suporte de λ . Logo $\lambda = 0$. ■

Proposição 2.5.2 *Seja $G = G_1 *_T \sigma$. Então temos a sequência exata curta de RG -módulos*

$$0 \rightarrow R(G/T) \xrightarrow{\alpha} R(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

onde α é dada por $\alpha(xT) = xG_1 - xp^{-1}G_1$ e ε é a aumentação. (p sendo a letra estável de G).

Demonstração: Claramente ε é epimorfismo. Mostremos que $\operatorname{Im} \alpha = \ker \varepsilon$.

i) $\operatorname{Im} \alpha \subset \ker \varepsilon$, pois dado $\lambda G_1 \in \operatorname{Im} \alpha$ então $\lambda G_1 = \alpha(xT) = xG_1 - xp^{-1}G_1$. Assim $\varepsilon(\lambda G_1) = \varepsilon(xG_1 - xp^{-1}G_1) = \varepsilon(xG_1) - \varepsilon(xp^{-1}G_1) = 0$.

ii) $\ker \varepsilon \subset \operatorname{Im} \alpha$.

Temos que $G_1 = \frac{F}{F_0}$, onde F é um grupo livre. Sejam $\{\bar{x}_i\}_{i \in I}$ os geradores de G_1 .

Construa $\bar{F}$ o grupo livre gerado por $\{x_i, q; i \in I\}$ e a apresentação $\bar{F} \xrightarrow{\pi} G = G_1 *_T \sigma$, onde $\pi(x_i) = \bar{x}_i$ e $\pi(q) = p$.

Temos que para todo $\lambda \in RG$

$$\lambda - \varepsilon(\lambda) = \sum \pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} \right) (\bar{x}_i - 1) + \pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) (p - 1)$$

onde Λ é tal que $\pi(\Lambda) = \lambda$ e $\varepsilon : RG \rightarrow R$ é aumentação usual.

$$\begin{aligned} \text{Então } \lambda G_1 - \varepsilon(\lambda G_1) &= \pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) (p-1) G_1 = \pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) p(1-p^{-1}) G_1 = \pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) p G_1 - \pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) p p^{-1} G_1 = \\ &= \alpha \left(\pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) p T \right). \end{aligned}$$

Agora seja $\lambda G_1 \in R(G/G_1)$ tal que $\varepsilon(\lambda G_1) = 0$. Então pelos cálculos acima temos

$$\lambda G_1 = \alpha \left(\pi \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \right) p T \right). \text{ Portanto } \lambda G_1 \in \text{Im} \alpha. \text{ Logo } \ker \varepsilon \subset \text{Im} \alpha.$$

Resta então mostrarmos que α é monomorfismo.

Seja T_1 um transversal para G módulo T e T_2 um transversal para G módulo S (S é um subgrupo de G isomorfo a T).

Temos, pelo Teorema 2.5.2, que o conjunto $\mathcal{C}$ dos elementos da forma $a_1 p^{\varepsilon_1} \dots a_n p^{\varepsilon_n}$ com $a_i \in T_1$ se $\varepsilon_i = -1$, e $a_i \in T_2$ se $\varepsilon_i = 1$ é um transversal de G módulo G_1 .

Além disso verifica-se facilmente que os elementos da forma cx_0 onde $x_0 \in T_1$ e $c \in \mathcal{C}$ é um transversal de G módulo T .

Seja $\mu = \sum_k r_k c_k x_{0k} T$; $r_k \in R$, $c_k \in \mathcal{C}$, $x_{0k} \in T_1$ um elemento de $R(G/T)$ com $u \in \text{Ker}(\alpha)$, isto é,

$$\begin{aligned} \alpha(\mu) &= \sum_k r_k \alpha(c_k x_{0k} T) = \sum_k r_k (c_k x_{0k} G_1 - c_k x_{0k} p^{-1} G_1) \\ &= \sum_k r_k c_k x_{0k} G_1 - \sum_k r_k c_k x_{0k} p^{-1} G_1 \stackrel{\text{notação}}{=} \sum_1 - \sum_2 = 0. \end{aligned}$$

Considere o somando $t = r c x_0 T$ de μ com a propriedade de que $c x_0 = a_1 p^{\varepsilon_1} a_2 p^{\varepsilon_2} \dots a_n p^{\varepsilon_n} x_0$ tenha comprimento máximo n entre as palavras que aparecem em μ .

1) Se $x_0 \neq 1$ ou $\varepsilon_n = -1$, então t da origem a um somando $r_k c x_0 p^{-1} G_1$ em $\sum_2$ de comprimento $n+1$.

Agora todas as palavras que aparecem em $\sum_1$ tem comprimento menor ou igual a n .

Deste modo $r_k c x_0 p^{-1} G_1$ deve cancelar-se com um somando que também está em $\sum_2$, isto é, $c x_0 p^{-1} G_1 = c' x'_0 p^{-1} G_1$. Como $c x_0 p^{-1} \in \mathcal{C}$, temos que $c x_0 p^{-1} = c' x'_0 p^{-1}$ e deste modo $c x_0 T = c' x'_0 T$ ou seja já existiria cancelamento em μ .

Então podemos assumir que $x_0 = 1$ e $\varepsilon_n = 1$, isto é, $t = r a_1 p^{\varepsilon_1} a_2 p^{\varepsilon_2} \dots a_{n-1} p^{\varepsilon_{n-1}} a_n p T = r c' a_n p T$, onde $a_n \in T_2$, $c' a_n p \in \mathcal{C}$ e comprimento de c' é $n-1$. Além disso todas as palavras de comprimento n que aparecem em μ são deste tipo caso contrário teríamos o cancelamento em μ , como visto acima).

Agora as palavras de comprimento n que aparecem em $\sum_2$ possuem letra final p^{-1} , pois se a letra final for p , isto é, a palavra x é dada por $x = a_1 p^{\varepsilon_1} \dots a_n p$ temos que $x p^{-1} = a_1 p^{\varepsilon_1} \dots a_n$ deste modo o comprimento de x em $\sum_2$ é $n - 1$.

Deste modo $t = r c' a_n p T$ dá origem a um somando $r c' a_n p G_1$ em $\sum_1$ que deve cancelar-se com outro elemento em $\sum_1$.

Além disso, como já vimos, todas as palavras de comprimento n em μ são da forma $c' a_n p \in \mathcal{C}$.

Assim temos $c' a_n p G_1 = \tilde{c} a_n p G_1$, e como $\mathcal{C}$ é um transversal de G módulo G_1 teríamos $c' a_n = \tilde{c} a_n$ e deste modo já existiria cancelamento em μ .

Concluimos assim que não existe somando de comprimento máximo em μ .

Logo $\mu = 0$ e assim α é injetora. ■

Veremos agora um teorema que relaciona a (co)homologia de um produto livre amalgamado $G = G_1 *_S G_2$ com (co)homologia dos subgrupos G_1 , G_2 e S .

Teorema 2.5.3 *Sejam $G = G_1 *_S G_2$ e M um RG -módulo (à esquerda). Então existem seqüências exatas longas naturais (seqüências de Mayer-Vietoris)*

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_k(S; M) \xrightarrow{(\text{cor}_S^{G_1}, -\text{cor}_S^{G_2})} H_k(G_1; M) \oplus H_k(G_2; M) \xrightarrow{(\text{cor}_{G_1}^{G_1}, \text{cor}_{G_2}^{G_2})} \\ (\text{cor}_{G_1}^{G_1}, \text{cor}_{G_2}^{G_2}) H_k(G; M) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(S; M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^k(G; M) \xrightarrow{(\text{res}_{G_1}^{G_1}, \text{res}_{G_2}^{G_2})} H^k(G_1; M) \oplus H^k(G_2; M) \xrightarrow{(\text{res}_S^{G_1}, -\text{res}_S^{G_2})} \\ (\text{res}_S^{G_1}, -\text{res}_S^{G_2}) H^k(S; M) \xrightarrow{\delta} H^{k-1}(G; M) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Demonstração: Considere a seqüência exata

$$0 \rightarrow R(G/S) \xrightarrow{\alpha} R(G/G_1) \oplus R(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

dada pela Proposição 2.5.1.

Como R é R -livre temos que a seqüência acima cinde e assim obtemos ([14], 1.7.10 e 1.8.8) as seqüências exatas curtas de RG -módulos (com G -ação diagonal).

$$0 \rightarrow R(G/S) \otimes_R M \xrightarrow{\alpha^\#} \left(R(G/G_1) \otimes_R M \right) \oplus \left(R(G/G_2) \otimes_R M \right) \xrightarrow{\varepsilon^\#} R \otimes_R M \simeq M \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow M \simeq \text{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\varepsilon^\#} \text{Hom}_R(R(G/G_1), M) \oplus \text{Hom}_R(R(G/G_2), M) \xrightarrow{\alpha^\#} \\ \xrightarrow{\alpha^\#} \text{Hom}_R(R(G/S), M) \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Usando (Proposição 2.4.1) obtemos as seqüências exatas longas (de homologia e cohomologia):

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_k(G; R(G/S) \otimes_R M) &\xrightarrow{\alpha_*} H_k(G; R(G/G_1) \otimes_R M) \oplus H_k(G; R(G/G_2) \otimes_R M) \xrightarrow{\varepsilon_*} \\ &\xrightarrow{\varepsilon_*} H_k(G; M) \xrightarrow{\partial} H_{k-1}(G; R(G/S) \otimes_R M) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H^k(G; M) &\xrightarrow{\varepsilon^*} H^k(G; \text{Hom}_R(R(G/G_1), M)) \oplus H^k(G; \text{Hom}_R(R(G/G_2), M)) \xrightarrow{\alpha^*} \\ &\xrightarrow{\alpha^*} H^k(G; \text{Hom}(R(G/S), M)) \xrightarrow{\delta} H^{k-1}(G; M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Aplicando a Proposição 2.1.8 às seqüências acima obtemos:

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_k(S; M) &\xrightarrow{\tilde{\alpha}_*} H_k(G_1; M) \oplus H_k(G_2; M) \xrightarrow{\tilde{\varepsilon}_*} H_k(G; M) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(S; M) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H^k(G; M) &\xrightarrow{\tilde{\varepsilon}^*} H^k(G_1; M) \oplus H^k(G_2; M) \xrightarrow{\tilde{\alpha}^*} H^k(S; M) \xrightarrow{\delta} H^{k-1}(G; M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Usando o mesmo raciocínio da demonstração da Proposição 3.2.1 (que veremos adiante) temos que $\tilde{\alpha}_* = (\text{cor}_S^{G_1}, -\text{cor}_S^{G_2})$ e $\tilde{\varepsilon}_* = (\text{cor}_{G_1}^G, \text{cor}_{G_2}^G)$ onde cor denota as aplicações induzidas em homologia pelas inclusões $S \hookrightarrow G_i$ e $G_i \hookrightarrow G$, $i = 1, 2$ e que $\tilde{\alpha}^* = (\text{res}_S^{G_1}, -\text{res}_S^{G_2})$ e $\tilde{\varepsilon}^* = (\text{res}_{G_1}^G, \text{res}_{G_2}^G)$ onde res denota as aplicações induzidas em cohomologia pelas inclusões $S \hookrightarrow G_i$ e $G_i \hookrightarrow G$, $i = 1, 2$. ■

De modo análogo, usando a Proposição 2.5.2, obtemos:

Teorema 2.5.4 *Seja $G = G_1 *_{S, \sigma}$ um HNN-grupo associado aos subgrupos S, T e letra estável p . Então temos as seqüências exata longas naturais (seqüências de Mayer Vietoris)*

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_k(S; M) &\xrightarrow{\text{cor}_S^{G_1} - \text{cor}_T^{G_1} \circ c_p^*} H_k(G_1; M) \xrightarrow{\text{cor}_{G_1}^G} H_k(G; M) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(S; M) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow H^{k-1}(S; M) &\xrightarrow{\delta} H^k(G; M) \xrightarrow{\text{res}_{G_1}^G} H^k(G_1; M) \xrightarrow{\text{res}_S^{G_1} - c_p^* \circ \text{res}_T^{G_1}} H^{k-1}(G; M) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

para todo RG -módulo à esquerda M . As aplicações res e cor são induzidas pelas inclusões, $c_p^* : H_k(S; M) \rightarrow H_k(T; M)$ e $c_p^* : H^k(T; M) \rightarrow H^k(S; M)$ são os isomorfismos induzidos pela conjugação em G .

Demonstração: [5], 1.2.12. ■

Finalizando este parágrafo demonstraremos dois resultados que serão úteis no Capítulo 4.

Proposição 2.5.3: *Se $G = G_1 *_{S, \sigma} G_2$ com $G_1 \neq S \neq G_2$ então $[G : G_i] = \infty$ para $i = 1, 2$.*

Demonstração: Sejam T_i um transversal à esquerda de G_i módulo S , para $i = 1, 2$.

Como já vimos, g é representado por uma única palavra reduzida da forma $g = a_1 b_1 \cdots a_n b_n c$ tal que $a_i \in T_1, b_i \in T_2, c \in S$ e $a_i = 1 \Rightarrow i = 1$ e $b_i = 1 \Rightarrow i = n$.

A palavra vazia é representada por $1 \in S$.

Seja T um transversal à esquerda de G módulo G_1 e suponhamos T finito. Portanto $T = \{g_1, \dots, g_r, g_0 = 1\}$. Temos que $\forall g \in G, g = g_i a$; $g_i \in T$ e $a \in G_1$ ($g \in G \Rightarrow gG_1 \in G/G_1 \Rightarrow gG_1 = g_i G_1 \Rightarrow g_i^{-1} g \in G_1 \Rightarrow g_i^{-1} g = a \Rightarrow g = g_i a$).

Agora $a \in G_1 \Rightarrow aS \in G_1/S \Rightarrow aS = a_i S$ para $a_i \in T_1 \Rightarrow a_i^{-1} a \in S \Rightarrow a_i^{-1} a = c \in S \Rightarrow a = a_i c$ para algum $a_i \in T_1$ e $c \in S$.

Portanto $g = g_i a_i c$.

Mas $g_i = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_n} b_{i_n}$ com $b_{i_n} \neq 1$ se $i \neq 0$ (podemos fazer a escolha de T desta maneira pois se $g_i = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_n} b_{i_n} c \Rightarrow g_i G_1 = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_n} b_{i_n} G_1$ já que $c \in S \subset G_1$ e se $g_i = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}} b_{i_{n-1}} a_{i_n} \Rightarrow g_i G_1 = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_{n-1}} b_{i_{n-1}} G_1$ pois $a_{i_n} \in G_1$).

Portanto $g = g_i a_i c$ é uma palavra reduzida.

Como T é finito, podemos tomar k como sendo o “comprimento” do maior $g_i \in T$.

Temos

- (1) $g_i = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_m} b_{i_m}$ com $a_{i_1} \neq 1$ e $b_{i_m} \neq 1$ ou
- (2) $g_i = b_{i_1} a_{i_2} b_{i_2} \cdots a_{i_m} b_{i_m}$ com $b_{i_1} \neq 1$ e $b_{i_m} \neq 1$.

Portanto $k = 2m$ ou $k = 2m - 1$ para algum m .

Como $S \neq G_2$, existe $\beta \in T_2$; $\beta \neq 1$ e suponhamos que g_{i_0} na forma (1) é o elemento “maior”.

Seja $x = \beta g_{i_0} \in G$. Assim $x = g_i a_i c$ com $g_i \in T, a_i \in G_1$ e $c \in S$.

Portanto $\beta g_{i_0} = g_i a_i c$

$$\beta a_{i_{0_1}} b_{i_{0_1}} \cdots a_{i_{0_m}} b_{i_{0_m}} = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_r} b_{i_r} a_i c.$$

Como $\beta \neq 1, a_{i_{0_1}} \neq 1$ e $b_{i_{0_m}} \neq 1$ temos comprimento de βg_{i_0} é igual a $2m + 1$ e como $b_{i_r} \neq 1$ temos que comprimento de $g_i a_i c$ é menor ou igual a $2r + 1$, além disso como $b_{i_{0_m}} \neq 1 \Rightarrow a_i = 1$ e $c = 1$.

Portanto $\beta g_{i_0} = g_i$ com $m \leq r$ (absurdo!!!).

Se g_{i_0} (elemento máximo) é da forma (2) então $g_{i_0} = b_{i_{0_1}} a_{i_{0_2}} b_{i_{0_2}} \cdots a_{i_{0_m}} b_{i_{0_m}}$ de comprimento $2m - 1$.

Como $G_1 \neq S \Rightarrow \exists \alpha \in T_1$ tal que $\alpha \neq 1$. Seja $y = \alpha g_{i_0}$ (comprimento de y é $2m$);

$y \in G \Rightarrow y = g_i a_i c$ assim $\alpha g_{i_0} = a_{i_1} b_{i_1} \cdots a_{i_r} b_{i_r} a_i c$.

Como $b_{i_0 m} \neq 1$ temos que $a_i = c = 1$, e assim $\alpha g_{i_0} = g_i$ com $2m \leq 2r+1$ (absurdo!!). Portanto não existe em T palavra de comprimento máximo, logo T é infinito. Portanto $[G : G_1] = \infty$. Analogamente prova-se que $[G : G_2] = \infty$. ■

Proposição 2.5.4 Se $G = G_1 *_{S, \theta}$ então $[G : G_1] = \infty$, $\theta : S_1 \xrightarrow{\cong} S_2$.

Demonstração: Sejam T_1 um transversal à esquerda de G_1/S_1 e T_2 um transversal à esquerda de G_1/S_2 . Qualquer $g \in G$, g é escrito de maneira única na forma $g = a_1 t^{\varepsilon_1} a_2 t^{\varepsilon_2} \dots a_n t^{\varepsilon_n} a_{n+1}$ onde $\varepsilon_i = \pm 1$, $a_i \in T_1$ se $\varepsilon_i = 1$, $a_i \in T_2$ se $\varepsilon_i = -1$ e $a_i \neq 1$ se $\varepsilon_{i-1} \neq \varepsilon_i$, a_n é arbitrário.

O conjunto $T = \{t^{\varepsilon_1} x_1 t^{\varepsilon_2} x_2 \dots t^{\varepsilon_n} x_n \text{ com } \varepsilon_i = \pm 1 \text{ onde } x_i \in T_1 \text{ se } \varepsilon_i = 1 \text{ e } x_i \in T_2 \text{ se } \varepsilon_i = -1\}$ é um transversal de G módulo G_1 .

Temos claramente que T é infinito, pois não existe palavra de comprimento máximo em T . Logo $[G : G_1] = \infty$. ■

3.1 A Definição de $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$

Neste parágrafo veremos o conceito de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G . Este conceito foi introduzido por Bieri e Eckmann em [3]. Nesta referência a teoria de (co)homologia está definida sobre o anel $\mathbb{K}$ com coeficientes em um $\mathbb{K}G$ -módulo, mas como no capítulo 2, definiremos sobre um anel comutativo com unidade R com coeficientes em um RG -módulo M .

Definição 3.1.1 Um par grupo (G, S) consiste de um grupo G e uma família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G , não necessariamente distintos.

Denotaremos por $R(G/S)$ o R -módulo livre gerado pelas classes gS_i , no qual G atua por multiplicação à esquerda. Def. $H(G/S) = \bigoplus_{i \in I} H(G/S_i)$. Pelo Corolário 1.5.1, temos que $H(G/S_i) \cong \text{Ind}_{S_i}^G H$. Portanto $H(G/S) = \bigoplus_{i \in I} \text{Ind}_{S_i}^G H$.

Seja $\varepsilon : H(G/S) \rightarrow H$ a aplicação quociente natural que leva cada gerador gS_i em $1 \in H$. Denotaremos por Δ o núcleo de ε . Temos então:

Definição 3.1.2 Sejam (G, S) um par grupo, $S = \{S_i, i \in I\} \neq \emptyset$ um RG -módulo. Os grupos de

Capítulo 3

(Co)Homologia Relativa de Grupos e Dualidade

3.1 A Definição de $H^*(G, S; M)$ e $H_*(G, S; M)$

Neste parágrafo veremos o conceito de (co)homologia relativa para um grupo G e uma família $S = \{S_i, i \in I\}$ de subgrupos de G . Este conceito foi introduzido por Bieri e Eckmann em [5]. Nesta referência a teoria de (co)homologia está definida sobre o anel $\mathbb{Z}$ com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$ -módulo, mas como no capítulo 2, definiremos sobre um anel comutativo com unidade R com coeficientes em um RG -módulo M .

Definição 3.1.1 Um par grupo (G, S) consiste de um grupo G e uma família $S = \{S_i; i \in I\}$ de subgrupos de G , não necessariamente distintos.

Denotaremos por $R(G/S)$ o R -módulo livre gerado pelas classes gS_i , no qual G atua por multiplicação à esquerda. Daí: $R(G/S) = \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i)$. Pelo Corolário 1.5.1, temos que $R(G/S_i) \simeq \text{Ind}_{S_i}^G R$. Portanto $R(G/S) = \bigoplus_{i \in I} \text{Ind}_{S_i}^G R$.

Seja $\varepsilon : R(G/S) \rightarrow R$ a aplicação aumentação usual que leva cada gerador gS_i em $1 \in R$. Denotaremos por Δ o núcleo de ε . Temos então:

Definição 3.1.2 Sejam (G, S) um par grupo, $S = \{S_i; i \in I\}$ e M um RG -módulo. Os grupos de



(co)homologia relativa para (G, S) com coeficientes em M são definidos, para todo $k \in \mathbb{Z}$, por:

$$H^k(G, S; M) := H^{k-1}(G; \text{Hom}_R(\Delta, M)) \quad \text{e} \quad H_k(G, S; M) := H_{k-1}\left(G; \Delta \bigotimes_R M\right)$$

onde as ações de G em $\text{Hom}_R(\Delta, M)$ e $\Delta \bigotimes_R M$ são dadas respectivamente por $gf(x) = gf(g^{-1}x)$ e $g(x \otimes m) = gx \otimes gm$ (ações diagonais).

Observação 3.1.1 a) Segue da definição que $H^k(G, S; M) = H_k(G, S; M) = 0$ se $k \leq 0$.

b) Se $S = \phi$, por convenção, temos $H^k(G, \phi; M) = H^k(G; M)$ e $H_k(G, \phi; M) = H_k(G; M)$.

É conveniente, escrevermos para qualquer família $S = \{S_i; i \in I\}$ de subgrupos de G , $H_k(S; M) =$

$= \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M)$ e $H^k(S; M) = \prod_{i \in I} H^k(S_i; M)$, onde M é um RS -módulo, isto é, um RS_i -módulo para todo i . Se M é um RG -módulo então M é um RS -módulo por restrição.

Em [16], Ribes deu uma definição de cohomologia relativa $H^*(G, S; M)$, onde G é um grupo e S é um subgrupo de G .

Recordaremos aqui esta definição. Antes disso necessitaremos de alguns resultados.

Seja M um RG -módulo e considere o grupo abeliano:

$$\text{Der}(G, S, M) = \{f : G \rightarrow M; f(xy) = xf(y) + f(x), \forall x, y \in G \text{ e } f|_S = 0\}.$$

Temos que $\text{Der}(G, S, -)$ é um funtor covariante, exato à esquerda, da categoria dos RG -módulos à esquerda na categoria dos grupos abelianos.

De fato, dado $\alpha : M \rightarrow N$ um homomorfismo de RG -módulos definimos

$$\alpha_* : \text{Der}(G, S, M) \rightarrow \text{Der}(G, S, N) \text{ por } \alpha_*(f) := \alpha \circ f.$$

Temos que

⊢ Se $\alpha = \text{id} : M \rightarrow M$ então $\alpha_*(f) = \alpha \circ f = f$. Portanto $\alpha_* = \text{id}$.

⊢ Se $\alpha : M \rightarrow N$ e $\beta : N \rightarrow P$ são homomorfismos de RG -módulos então

$$(\beta \circ \alpha)_*(f) = (\beta \circ \alpha) \circ f = \beta \circ (\alpha \circ f) = \beta(\alpha_*(f)) = (\beta_* \circ \alpha_*)(f). \text{ Portanto } (\beta \circ \alpha)_* = \beta_* \circ \alpha_*.$$

Além disso dada $0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta de RG -módulos, então

$$0 \rightarrow \text{Der}(G, S, M) \xrightarrow{\varphi_*} \text{Der}(G, S, N) \xrightarrow{\psi_*} \text{Der}(G, S, P) \rightarrow 0$$

é exata à esquerda. De fato:

⊢ $\varphi_*(f)(x) = 0 \Rightarrow \varphi(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x$. Portanto $f \equiv 0$ e assim φ_* é injetora.

⊢ $\text{Im } \varphi_* = \ker \psi_*$.

Se $h \in \text{Im } \varphi_*$ então $h = \varphi_*(f) = \varphi \circ f$. Assim $\psi_*(h) = \psi_*(\varphi \circ f) = \psi \circ \varphi \circ f$. Daí $(\psi_*(\varphi \circ f))(x) = \psi(\varphi(f(x))) = 0 \ \forall x$. Portanto $h \in \ker \psi_*$ e assim $\text{Im } \varphi_* \subset \ker \psi_*$.

Agora, $h \in \ker \psi_* \Rightarrow \psi \circ h = 0 \Rightarrow (\psi \circ h)(x) = 0, \forall x \in G$. Assim $h(x) \in \ker \psi = \text{Im } \varphi$ e portanto temos $h(x) = \varphi(y)$ (y depende de x).

Defina $f: G \rightarrow M$ por $f(x) = y(x)$.

Mostremos que f está bem definida e que $f \in \text{Der}(G, S, M)$:

i) $\forall x_1, x_2 \in G, x_1 = x_2 \Rightarrow h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow \varphi(y(x_1)) = \varphi(y(x_2)) \xRightarrow{\varphi \text{ é } 1-1} y(x_1) = y(x_2) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

ii) $h(x_1 x_2) = x_1 h(x_2) + h(x_1) = x_1 \varphi(y(x_2)) + \varphi(y(x_1)) \xRightarrow{\varphi \text{ é RG-homo.}} \varphi(x_1 y(x_2) + y(x_1)).$

Por outro lado $h(x_1 x_2) = \varphi(y(x_1 x_2))$.

Assim $\varphi(y(x_1 x_2)) = \varphi(x_1 y(x_2) + y(x_1)) \xRightarrow{\varphi \text{ é } 1-1} y(x_1 x_2) = x_1 y(x_2) + y(x_1)$.

Portanto $f(x_1 x_2) = x_1 f(x_2) + f(x_1)$.

Além disso $f|_S = 0$ pois, $f(s) = y(s)$ tal que $\varphi(y(s)) = h(s) = 0 \xRightarrow{\varphi \text{ é } 1-1} y(s) = 0$ e assim $f(s) = 0$.

Seja agora $0 \rightarrow M \xrightarrow{\psi} P_0 \xrightarrow{\delta_0} P_1 \xrightarrow{\delta_1} \dots$ uma resolução injetiva de M (isto é, uma sequência exata de RG-módulos injetivos (ver [12], 1.10).

Aplicando o funtor covariante $\text{Der}(G, S, -)$ à resolução obtemos o complexo de cocadeias: $D: 0 \rightarrow \text{Der}(G, S, P_0) \xrightarrow{\tilde{\delta}_0} \text{Der}(G, S, P_1) \xrightarrow{\tilde{\delta}_1} \dots$

Definição 3.1.3 (Ribes) Se G é um grupo, S um subgrupo de G e M um RG-módulo então: $H^{k+1}(G, S; M) := H^k(D)$, para todo inteiro $k \in \mathbb{Z}$.

Observação 3.1.2 Decorre da definição anterior que $H^0(G, S; M) = H^{-1}(D) = 0$ e $H^1(G, S; M) = \text{Der}(G, S, M)$ pois, como $\text{Der}(G, S, -)$ é exato à esquerda $H^1(G, S; M) = H^0(D) = \ker \tilde{\delta}_0 = \text{Im } \tilde{\psi} = \frac{\text{Der}(G, S, M)}{\ker \tilde{\psi}} = \text{Der}(G, S, M)$.

É verdadeiro que a definição 3.1.2, para S consistindo de um único subgrupo S de G , é equivalente à definição 3.1.3, isto é:

Teorema 3.1.1 Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RG-módulo. Então $H^k(G, \{S\}; M) \simeq$



$H^k(G, S; M)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: ver [3], 1.3.7. ■

Em vista deste resultado e da observação anterior, sempre que tivermos $S = \{S\}$, uma família consistindo de um único subgrupo de um grupo G podemos identificar $H^1(G, \{S\}; M)$ com $Der(G, S, M)$.

3.2 (Co)Homologia Relativa como Funtor de Duas Variáveis.

Neste parágrafo veremos que $H_*(-, -; -)$ e $H^*(-, -; -)$ são funtores de duas variáveis $((G, S); M)$. Mostraremos primeiramente, com detalhes, que a cohomologia relativa é um funtor contravariante numa determinada categoria $\mathcal{C}$. Os resultados para homologia relativa são análogos. Aqui iremos usar os resultados contidos em 2.4 para cohomologia absoluta.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são os pares $((G, S); M)$, onde G é um grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G e M é um RG -módulo e cujos homomorfismos são aplicações:

$\psi : ((G, S = \{S_i, i \in I\}); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R} = \{R_j, j \in J\}); N)$ consistindo de:

- a) Um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow L$;
- b) Uma aplicação $\pi : I \rightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) \subset R_{\pi(i)}$;
- c) Um homomorfismo de RG -módulos $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\phi(\alpha(g)n) = g\phi(n)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de RG -módulos via α .

Vamos ver que, nestas condições, existe um homomorfismo $\psi^* : H^*(L, \mathcal{R}; N) \rightarrow H^*(G, S; M)$ (induzido pela ψ).

Sejam $\varepsilon_G : R(G/S) \rightarrow R$ tal que $\varepsilon_G(xS_i) = 1$ e $\varepsilon_L : R(L/\mathcal{R}) \rightarrow R$ tal que $\varepsilon_L(yR_j) = 1$ as aumentações usuais.

Denotamos por Δ_G o núcleo de ε_G e por Δ_L o núcleo de ε_L .

Definimos $\rho : R(G/S) \rightarrow R(L/\mathcal{R})$ por $\rho(xS_i) = \alpha(x)R_{\pi(i)}$ nos geradores e estendamos ρ por linearidade.

Temos que ρ está bem definida, é homomorfismo e que $\rho(\Delta_G) \subset \Delta_L$.

Deste modo podemos definir $\bar{\rho} := \rho|_{\Delta_G} : \Delta_G \rightarrow \Delta_L$.

Temos então, por 2.4, $(\bar{\rho}, \phi)^\# : Hom_R(\Delta_L, N) \rightarrow Hom_R(\Delta_G, M)$, dada por $(\bar{\rho}, \phi)^\#(f) = \phi \circ f \circ \bar{\rho}$, onde $\phi : M \rightarrow N$ é dada em (c).

Por simplicidade, denotemos $Hom_R(\Delta_L, N)$ por $\mathcal{N}$ e $Hom_R(\Delta_G, M)$ por $\mathcal{M}$.



Temos que $\mathcal{N}$ é um RL -módulo com L -ação diagonal $(yf)(x) = yf(y^{-1}x)$, para todo $x \in \Delta_L$, $f \in \mathcal{N}$ e $y \in L$.

Da mesma forma $\mathcal{M}$ é um RG -módulo com G ação diagonal.

Lema 3.2.1 A aplicação $(\bar{\rho}, \phi)^\# : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$, definida anteriormente, satisfaz a condição $(\bar{\rho}, \phi)^\#(\alpha(g)f) = g(\bar{\rho}, \phi)^\#(f)$, para todo $f \in \mathcal{N}$ e todo $g \in G$, isto é, $(\bar{\rho}, \phi)^\#$ é uma aplicação de RG -módulos, onde $\mathcal{N}$ é visto como RG -módulo via α .

Demonstração: Inicialmente note que $\rho : R(G/S) \rightarrow R(L/\mathcal{R})$ é tal que $\rho(gu) = \alpha(g)\rho(u)$ para todo $g \in G$ e $u \in R(G/S)$.

Basta verificar isto nos geradores de $R(G/S)$. Seja xS_i um gerador de $R(G/S)$. Temos:

$$\rho(g(xS_i)) = \rho(gxS_i) = \alpha(gx)R_{\pi(i)} = \alpha(g)\alpha(x)R_{\pi(i)} = \alpha(g)(\alpha(x)R_{\pi(i)}) = \alpha(g)\rho(xS_i).$$

Seja agora $f \in \mathcal{N}$ e $u \in \Delta_G$. Temos que:

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}, \phi)^\#(\alpha(g)f)(u) &= (\phi \circ (\alpha(g)f) \circ \bar{\rho})(u) = \phi(\alpha(g)f)(\bar{\rho}(u)) \\ &= \phi(\alpha(g)f(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u))) = g\phi(f(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u))) = g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (g(\bar{\rho}, \phi)^\#(f))(u) &= g((\bar{\rho}, \phi)^\#(f)(g^{-1}u)) = g((\phi \circ f \circ \bar{\rho})(g^{-1}u)) \\ &= g((\phi \circ f)(\bar{\rho}(g^{-1}u))) = g(\phi \circ f)(\alpha(g)^{-1}\bar{\rho}(u)). \end{aligned}$$

Logo $(\bar{\rho}, \phi)^\#$ é uma aplicação de RG -módulos. ■

Teorema 3.2.1 $H^*((-, -); -)$ é um funtor contravariante na categoria $\mathcal{C}$.

Demonstração: Denotemos por ψ a aplicação $\left(G \xrightarrow{\alpha} L, \mathcal{N} \xrightarrow{(\bar{\rho}, \phi)^\#} \mathcal{M}\right)$.

Pelo lema anterior $(\bar{\rho}, \phi)^\#$ é uma aplicação de RG -módulos e daí, por 2.4, temos que ψ induz, para todo $k \in \mathbb{Z}$, um homomorfismo $\bar{\psi}^k : H^k(L; \mathcal{N}) \rightarrow H^k(G; \mathcal{M})$

Mas por definição $H^k(G, \mathcal{S}, M) = H^{k-1}(G; \mathcal{M})$ e $H^k(L, \mathcal{R}; N) = H^{k-1}(L; \mathcal{N})$.

Logo temos o homomorfismo induzido: $\psi^* : H^*(L, \mathcal{R}; N) \rightarrow H^*(G, \mathcal{S}; M)$.

Verifica-se facilmente que:

- Se $\psi : ((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow ((G, \mathcal{S}); M)$ é a aplicação identidade, então a aplicação $\psi^* : H^*((G, \mathcal{S}); M) \rightarrow H^*((G, \mathcal{S}); M)$ é o homomorfismo identidade.

- Se $\psi : ((G, S), M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}), N)$ e $\gamma : ((L, \mathcal{R}), N) \rightarrow ((K, \mathcal{O}), P)$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então $(\gamma \circ \psi)^* = \psi^* \circ \gamma^*$.

Daí, $H^*((-, -); -)$ é um funtor contravariante em $\mathcal{C}$. ■

Para a homologia relativa a situação é análoga, isto é, se considerarmos a categoria $\mathcal{D}$ cujos objetos são os mesmos de $\mathcal{C}$ mas os morfismos são aplicações $\psi : ((G, S); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}); N)$ consistindo de (a) e (b) e (c)' : $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\phi(gm) = \alpha(g)\phi(m)$, mostra-se, analogamente, que existe um homomorfismo induzido $\psi_* : H_*((G, S); M) \rightarrow H_*((L, \mathcal{R}); N)$ e que $H_*((- , -), -)$, é um funtor covariante na categoria $\mathcal{D}$.

Proposição 3.2.1 *Sejam $(G, S = \{S_i, i \in I\})$ um par grupo e M um RG -módulo. Então temos as seqüências exatas longas:*

$$i) \dots \rightarrow H^k(G; M) \xrightarrow{\text{res}_S^G} \prod_{i \in I} H^k(S_i; M) \rightarrow H^{k+1}(G, S; M) \xrightarrow{I} H^{k+1}(G; M) \rightarrow \dots$$

$$ii) \dots \rightarrow H_{k+1}(G; M) \xrightarrow{\rho} H_{k+1}(G, S; M) \rightarrow \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M) \xrightarrow{\text{cor}_S^G} H_k(G; M) \rightarrow \dots$$

que são naturais no RG -módulo M e no par (G, S) , onde $\text{res}_S^G : H^k(G; M) \rightarrow \prod_{i \in I} H^k(S_i; M)$ e $\text{cor}_S^G : \bigoplus_{i \in I} H_k(S_i; M) \rightarrow H_k(G; M)$ são as aplicações induzidas, no nível k de (co)homologia, pelas inclusões $S_i \xrightarrow{i} G$.

Demonstração:

- i) Considere a seguinte seqüência exata curta $0 \rightarrow \Delta \xrightarrow{i} R(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$ onde ε é aplicação aumentação, $\Delta := \ker \varepsilon$ e i a inclusão. Como R é R -projetivo, essa seqüência cinde e assim por [12], 1.8.8 a seqüência $0 \rightarrow \text{Hom}_R(R, M) \xrightarrow{\varepsilon^\#} \text{Hom}_R(R(G/S), M) \xrightarrow{i^\#} \text{Hom}_R(\Delta, M) \rightarrow 0$ também é exata, onde $i^\#(\varphi) = \varphi \circ i$ e $\varepsilon^\#(\varphi) = \varphi \circ \varepsilon$.

Seja $F \rightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG . Como os F_i' são RG -projetivos temos por [12], 1.9.4 (e) que para todo n

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow[\widetilde{i_n^\#}]{\widetilde{\varepsilon_n^\#}} \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_R(R(G/S), M)) \xrightarrow[\widetilde{i_n^\#}]{\widetilde{\varepsilon_n^\#}} \text{Hom}_{RG}(F_n, \text{Hom}_R(\Delta, M)) \rightarrow 0$$

é exata e assim temos a seqüência exata curta de complexos de cocadeias.



$$0 \rightarrow \operatorname{Hom}_{RG}(F, \operatorname{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}^\#} \operatorname{Hom}_{RG}(F, \operatorname{Hom}_R(R(G/S), M)) \xrightarrow{\widetilde{i}^\#} \\ \xrightarrow{\widetilde{i}^\#} \operatorname{Hom}_{RG}(F, \operatorname{Hom}_R(\Delta, M)) \rightarrow 0$$

onde $\widetilde{i}^\#(\varphi) = i^\# \circ \varphi$ e $\widetilde{\varepsilon}^\#(\varphi) = \varepsilon^\# \circ \varphi$.

Agora esta sequência exata curta de complexos induz a seguinte sequência exata longa em cohomologia (ver proposição 2.4.1 (b)):

$$\cdots \rightarrow H^n(G; \operatorname{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\varepsilon_n^*} H^n(G; \operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M)) \xrightarrow{i_n^*} \\ \xrightarrow{i_n^*} H^n(G; \operatorname{Hom}_R(\Delta, M)) \xrightarrow{\tau_n} H^{n+1}(G; \operatorname{Hom}_R(R, M)) \rightarrow \cdots$$

onde $(\varepsilon_n^*)([\varphi]) = [\widetilde{\varepsilon}_n^\#(\varphi)] = [\varepsilon^\# \circ \varphi]$; $(i_n^*)([\varphi]) = [\widetilde{i}_n^\#(\varphi)] = [i^\# \circ \varphi]$ e τ_n é o homomorfismo de conexão.

Mas $\operatorname{Hom}_R(R, M) \simeq M$ através do isomorfismo $\psi: M \rightarrow \operatorname{Hom}_R(R, M)$ dado por $\psi(m)(1) = m$ (e estendido por linearidade).

Dai $H^n(G; M) \xrightarrow{\psi^*} H^n(G; \operatorname{Hom}_R(R, M))$, onde ψ^* é induzido de ψ e dado por $\psi^*[f] = [\psi \circ f]$.

Vamos mostrar que

$$H^n(G, \operatorname{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i); M)) \simeq \prod_{i \in I} H^n(S_i; M) \quad (3.1)$$

através de um isomorfismo, que denotaremos por ρ^* , e assim lembrando que

$$H^n(G; \operatorname{Hom}_R(\Delta, M)) = H^{n+1}(G, S; M),$$

a sequência exata acima toma a forma:

$$\cdots \rightarrow H^n(G; M) \xrightarrow{\rho^* \circ \varepsilon_n^* \circ \psi^*} \prod_{i \in I} H^n(S_i; M) \rightarrow H^{n+1}(G, S; M) \rightarrow \\ \rightarrow H^{n+1}(G; M) \rightarrow \prod_{i \in I} H^{n+1}(S_i; M) \rightarrow \cdots$$

Além disso, mostremos que $\rho^* \circ \varepsilon_n^* \circ \psi^* = \operatorname{res}_S^G$, onde $\operatorname{res}_S^G([f]) = (\operatorname{res}_i[f])_{i \in I}$, com $\operatorname{res}_i: H^n(G; M) \rightarrow H^n(S_i; M)$ induzida pela inclusão $S_i \hookrightarrow G$.

Para mostrar (3.1) e que $\rho^* \circ \varepsilon_n^* \circ \psi^* = \operatorname{res}_S^G$ considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{c}
H^n(G; M) \xrightarrow{\psi^*} H^n(G; \text{Hom}_R(R, M)) \xrightarrow{\varepsilon_n^*} H^n(G; \text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M)) \\
\downarrow \phi^* \\
H^n(G; \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)) \\
\downarrow \gamma \\
\prod_{i \in I} H^n(G; \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)) \\
\downarrow \varphi^* = (\varphi_i^*)_{i \in I} \\
\prod_{i \in I} H^n(G; \text{Coind}_{S_i}^G M) \\
\downarrow (\pi_i^*)_{i \in I} \\
\prod_{i \in I} H^n(G; M) \\
\downarrow (res_i)_{i \in I} \\
\prod_{i \in I} H^n(S_i; M) = H^n(S; M)
\end{array}$$

$\swarrow \text{res}_S^G$

onde as aplicações ϕ^* , φ^* , $(\pi_i^*)_{i \in I}$, γ e $(res_i)_{i \in I}$ são dadas por:

$\dashv \phi^*$ é a induzida, no nível n de cohomologia, de

$$\phi : \text{Hom}_R\left(\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i), M\right) \rightarrow \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)$$

definida por $\phi(f) = (f \circ j_i)_{i \in I}$ onde j_i é a inclusão de $R(G/S_i)$ em $R(G/S)$.

$\dashv \varphi_i^*$ é a induzida, no nível n de cohomologia, de $\varphi_i : \text{Hom}_R(R(G/S_i), M) \rightarrow \text{Coind}_{S_i}^G M$ definida por $\varphi_i(f_i)(x) = x f_i(x^{-1} S_i)$.

$\dashv (\pi_i^*)$ é a induzida, no nível n de cohomologia, de $\pi_i : \text{Coind}_{S_i}^G M \rightarrow M$ tal que $\pi_i(f_i) = f_i(1)$.

$\dashv \gamma : H^n\left(G; \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)\right) \rightarrow \prod_{i \in I} H^n(G; \text{Hom}_R(R(G/S_i), M))$ é tal que $\gamma([f]) = ([p_j \circ f])_{j \in I}$, onde $p_j : \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(R(G/S_i), M) \rightarrow \text{Hom}_R(R(G/S_i), M)$ é a projeção.

$\dashv (res_i)_{i \in I} : \prod_{i \in I} H^n(G; M) \rightarrow \prod_{i \in I} H^n(S_i; M)$ tal que $(res_i)_{i \in I}([\phi_i]_{i \in I}) = (res_i([\phi_i]))_{i \in I}$.

Observe que φ^* , γ , ϕ^* e $(res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} = (res_i \circ \pi_i^*)_{i \in I}$ são isomorfismos, onde $res_i \circ \pi_i^*$ é o isomorfismo de Shapiro (ver observação 2.4.1), para cada $i \in I$.

Daí $\rho^* = (res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^* \circ \gamma \circ \phi^*$ é isomorfismo e temos que (1) é verdadeira.

Agora

$$\begin{aligned}
 (\rho^* \circ \varepsilon_n^* \circ \psi^*)([f]) &= (\rho^* \circ \varepsilon_n^*)([\psi \circ f]) = \rho^*([\varepsilon^\# \circ \psi \circ f]) = \\
 &= ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^* \circ \gamma \circ \phi^*)([\varepsilon^\# \circ \psi \circ f]) = \\
 &= ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^* \circ \gamma)([\phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f]) = \\
 &= ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I} \circ \varphi^*)([p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f])_{i \in I} = \\
 &= ((res_i)_{i \in I} \circ (\pi_i^*)_{i \in I})([\varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f])_{i \in I} = \\
 &= (res_i[\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f])_{i \in I}.
 \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned}
 (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f)(x) &= (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi)(f(x)) = \\
 &= (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi)(\varepsilon^\#(\psi(f(x)))) = (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi)(\psi(f(x)) \circ \varepsilon) = \\
 &= (\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i)(\psi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_k)_{k \in I} = (\pi_i \circ \varphi_i)(\psi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i) = \\
 &= \pi_i(\varphi_i(\psi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i)) = (\varphi_i(\psi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i))(1) = \\
 &= (\psi(f(x)) \circ \varepsilon \circ j_i)(1.S_i) = \psi(f(x))(1) = f(x), \forall x \in F,
 \end{aligned}$$

onde F uma resolução projetiva de R sobre RG .

Portanto $res_i[\pi_i \circ \varphi_i \circ p_i \circ \phi \circ \varepsilon^\# \circ \psi \circ f] = res_i[f]$ e assim $(\rho^* \circ \varepsilon_n^* \circ \psi^*)([f]) = (res_i[f])_{i \in I} = res_G^G$ como queríamos.

ii) Considere novamente a sequência exata

$$0 \rightarrow \Delta \xrightarrow{i} R(G/S) \xrightarrow{\varepsilon} R \rightarrow 0$$

onde ε é aplicação aumentação, $\Delta = \ker \varepsilon$ e i a inclusão. Como R é R -projetivo a sequência acima cinde. Assim por [12], 1.7.10 a sequência

$$0 \rightarrow \Delta \otimes_R M \xrightarrow{i \otimes id} R(G/S) \otimes_R M \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} R \otimes_R M \rightarrow 0$$

também é exata.

Seja $F \rightarrow R$ uma resolução projetiva de R sobre RG . Temos então a sequência exata curta de complexos de cadeias

$$0 \rightarrow F \otimes_{RG} \left(\Delta \otimes_R M \right) \xrightarrow{i^\#} F \otimes_{RG} \left(R(G/S) \otimes_R M \right) \xrightarrow{\varepsilon^\#} F \otimes_{RG} \left(R \otimes_R M \right) \rightarrow 0$$

onde $\varepsilon^\#(x \otimes_{RG}(gS_i \otimes_R m)) = x \otimes_{RG}(1 \otimes_R m)$ e $i^\#(x \otimes_{RG}(s \otimes_R m)) = x \otimes_{RG}(i(s) \otimes_R m)$.

Agora pela Proposição 2.4.1 (a) esta sequência induz a sequência exata longa em homologia:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_{n+1}(G; R \otimes_R M) & \xrightarrow{\tau_{n-1}} & H_n(G; \Delta \otimes_R M) & \xrightarrow{i_*} & H_n(G; R(G/S) \otimes_R M) \xrightarrow{\varepsilon_*} \\ & & & \xrightarrow{\varepsilon_*} & H_n(G; R \otimes_R M) & \xrightarrow{\tau_n} & H_{n-1}(G; \Delta \otimes_R M) \rightarrow \cdots \end{array}$$

onde i_* e ε_* são os homomorfismos induzidos de $i_\#$ e $\varepsilon_\#$ em homologia e τ_n é o homomorfismo de conexão no nível n .

Temos que $R \otimes_R M \simeq M$ através do isomorfismo θ dado por $\theta(1 \otimes m) = m$ (e estendido por linearidade).

Daí $H_n(G; R \otimes_R M) \simeq H_n(G; M)$ através do isomorfismo θ^* induzido por θ definido por $\theta^*[x \otimes (1 \otimes m)] = [x \otimes \theta(1 \otimes m)] = [x \otimes m]$.

Agora, $H_n(G; \Delta \otimes_R M) := H_{n+1}(G, S; M)$. Mostremos que

$$\bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \simeq H_n\left(G; R(G/S) \otimes_R M\right) \quad (3.2)$$

através de um isomorfismo denotado por α_* e assim a sequência exata acima tomará a forma:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & H_{n+1}(G; M) & \rightarrow & H_{n+1}(G, S; M) & \rightarrow & \bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \xrightarrow{\theta_* \circ \varepsilon_* \circ \alpha_*} \\ & & \xrightarrow{\theta_* \circ \varepsilon_* \circ \alpha_*} & & H_n(G; M) & \rightarrow & H_n(G, S; M) \rightarrow \cdots \end{array}$$

Mostremos também que $\theta_* \circ \varepsilon_* \circ \alpha_* = \text{cor}_S^G$, onde $\text{cor}_S^G : \bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) \rightarrow H_n(G; M)$ é definida por $\text{cor}_S^G\left(\left[x_i \otimes_{RS_i} m_i\right]_{i \in I}\right) = \sum_{i \in I} [x_i \otimes_{RG} m_i]$.

Para mostrar (3.2) e que $\theta_* \circ \varepsilon_* \circ \alpha_* = \text{cor}_S^G$ considere o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
\bigoplus_{i \in I} H_n(S_i; M) & \xrightarrow{(cor_i)_{i \in I}} & \bigoplus_{i \in I} H_n(G; M) & \xrightarrow{(J_{i*})_{i \in I}} & \bigoplus_{i \in I} H_n(G; Ind_{S_i}^G M) \\
& & & & \downarrow (\varphi_{i*})_{i \in I} \\
& & & & \bigoplus_{i \in I} H_n(G; (R(G/S_i) \otimes_R M)) \\
& & & & \downarrow \gamma \\
& & & & H_n(G; \bigoplus_{i \in I} (R(G/S_i) \otimes_R M)) \\
& & & & \downarrow h_* \\
& & & & H_n\left(G; \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \otimes_R M\right) \\
& & & & \downarrow \varepsilon_* \\
& & & & H_n(G, R \otimes_R M) \\
& & & & \downarrow \theta_* \\
& & & & H_n(G; M)
\end{array}$$

cor_S^G

onde:

$\vdash cor_i : H_n(S_i, M) \rightarrow H_n(G; M)$ é dada por $cor_i([x \otimes_{RS_i} m]) = [x \otimes_{RG} m]$ é induzida da inclusão $S_i \hookrightarrow G$.

$\vdash J_{i*}$ é induzida de $J_i : M \rightarrow Ind_{S_i}^G M$ dada por $J_i(m) = 1 \otimes m$.

$\vdash \varphi_{i*}$ é a induzida de $\varphi_i : Ind_{S_i}^G M \rightarrow (R(G/S_i) \otimes_R M)$ dada por $\varphi_i(g \otimes m) = \bar{g}_i \otimes gm$.

$\vdash \gamma([([x_i \otimes_{RG} (\bar{g}_i \otimes_R m_i)])_{i \in I}]) = \left[\sum_{i \in I} x_i \otimes_R (r_k)_{k \in I} \right]$, onde $r_k = 0$ se $k \neq i$ e $r_k = \bar{g}_i \otimes m_i$ se $k = i$.

$\vdash h_*$ é a induzida em homologia de $h : \bigoplus_{i \in I} ((R(G/S_i) \otimes M) \rightarrow (\bigoplus_{i \in I} R(G/S_i)) \otimes M$ dada por $h(\bar{g}_i \otimes m_i)_{i \in I} = \sum_{i \in I} ((r_k)_{k \in I} \otimes m_i)$ onde $r_k = 0$ se $k \neq i$ e $r_k = \bar{g}_i$ se $k = i$.

$\vdash \varepsilon_*$ é a induzida em homologia de $\varepsilon : \bigoplus_{i \in I} R(G/S_i) \otimes M \rightarrow R \otimes M$ dada por $\varepsilon(g S_i \otimes m) = 1 \otimes m$.

$\vdash \theta_*$ é a induzida em homologia de $\theta : R \otimes M \rightarrow M$ definida por $\theta(1 \otimes m) = m$.

Observe que h_* , γ , $(\varphi_{i*})_{i \in I}$ e $(J_{i*})_{i \in I} \circ (cor_i)_{i \in I} = (J_{i*} \circ cor_i)_{i \in I}$ são isomorfismos onde $J_{i*} \circ cor_i$ são isomorfismos de Shapiro para cada $i \in I$ (ver observação 2.4.1).

Daí $\alpha_* = h_* \circ \gamma \circ (\varphi_{i*})_{i \in I} \circ (J_{i*})_{i \in I} \circ (cor_i)_{i \in I}$ é isomorfismo e temos provado (2).

É fácil ver através das definições das aplicações envolvidas que $\theta_* \circ \varepsilon_* \circ \alpha_*([x_i \otimes_{RS_i} m_i])_{i \in I} = \sum_{i \in I} [x_i \otimes_{RG} m_i]$ e portanto $\theta_* \circ \varepsilon_* \circ \alpha_* = cor_S^G$ como queríamos demonstrar. ■

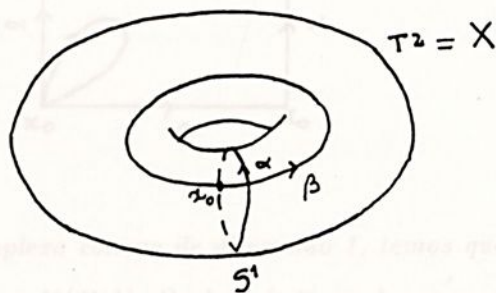
3.3 Interpretação Topológica da (Co)Homologia Relativa

Neste parágrafo veremos a relação entre a (co)homologia relativa de grupos e a (co)homologia relativa de espaços topológicos.

Definição 3.3.1: Um par grupo (G, S) , $S = \{S_i; i \in I\}$ é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane $(X, Y) = K(G, S, 1)$ se:

- i) X é um $K(G, 1)$ complexo celular
- ii) Y é um subcomplexo cujas componentes conexas Y_i , $i \in I$, são $K(S_i, 1)$ complexos, de tal modo que a aplicação $i_{\#} : \pi_1(Y_i) \rightarrow \pi_1(X)$ induzida da inclusão $i : Y_i \rightarrow X$ é injetiva e aplica $\pi_1(Y_i)$ sobre $S_i \subset G$, depois de uma conveniente escolha de caminhos conectados por pontos bases.

Exemplo 3.3.1 Sejam $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Considere X o toro T^2 e os laços α e β como mostrado na figura abaixo:



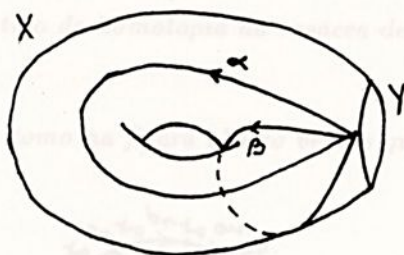
Temos que $G \simeq \langle [\alpha] \rangle \oplus \langle [\beta] \rangle$ e $S \simeq \langle [\alpha] \rangle$. Assim identificaremos $[\alpha]$ com a e $[\beta]$ com b .

Seja Y o laço representado por α . Já vimos no Exemplo 1.2.7, que X é um $K(G, 1)$. Como $Y \simeq S^1$ temos que Y é um $K(S, 1)$ complexo (ver ex.1.2.6). Observe que $i_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ dada por $i_{\#}([\alpha]) = [i \circ \alpha]$, onde $i : Y \rightarrow X$ é a inclusão, é injetora. Portanto (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.2 Sejam $G = \langle t \rangle * \langle s \rangle$ e $S = \langle sts^{-1}t^{-1} \rangle$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é o toro T^2 menos um disco aberto D e Y é o bordo de X .

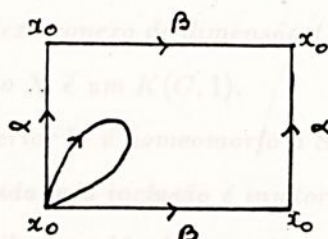
De fato:

Considere α, β os laços representados na figura abaixo



Temos que X tem o mesmo tipo de homotopia da figura oito, que denotaremos por F . Logo $\pi_1(X) \simeq \pi_1(F) = \langle [\alpha] * [\beta] \rangle \simeq G$.

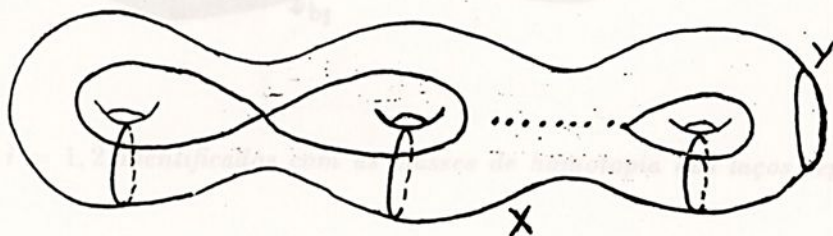
Representando X como na figura abaixo, vemos que $\pi_1(Y) \simeq \langle sts^{-1}t^{-1} \rangle = S$.



Agora, como F é um CW-complexo conexo de dimensão 1, temos que $H_i(F) = \{0\}$ para $i \geq 2$. Logo F é um $K(G, 1)$ e assim X é um $K(G, 1)$. Do fato de Y ser homeomorfo a S^1 temos que Y é um $K(S, 1)$. A aplicação $i_{\#} : \pi_1(Y) = S \rightarrow \pi_1(X) = G$ induzida da inclusão é injetora. Portanto (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.3 Mais geralmente, sejam $G = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle * \dots * \langle a_k \rangle * \langle b_k \rangle$ e $S = \left\langle \prod_{i=1}^k [a_i, b_i] \right\rangle$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) onde X é a superfície orientada de genus k menos um disco aberto D e Y é o bordo de X .

De fato:



Considere $a_i, b_i, i = 1, 2, \dots, k$ identificados com as classes de homologia dos laços representados na figura acima.

Temos que X tem o mesmo tipo de homotopia da rosácea de $2k$ pétalas, denotada aqui por R .

Logo $\pi_1(X) = \pi_1(R) = G$.

Além disso representando X como na figura abaixo vemos que $\pi_1(Y) \simeq \left\langle \prod_{i=1}^k [a_i b_i] \right\rangle = S$.



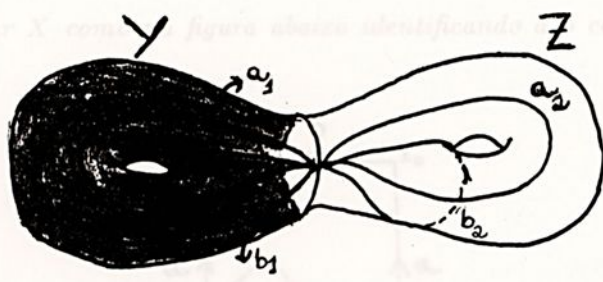
Agora, como R é um CW-complexo conexo de dimensão 1, temos então que $H_i(R) = 0$ para $i \geq 2$.

Logo R é um $K(G, 1)$ e portanto X é um $K(G, 1)$.

Como já vimos no exemplo anterior Y é homeomorfo a S^1 e assim é um $K(S, 1)$. Observe que a aplicação $i_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ induzida pela inclusão é injetora.

Portanto (X, Y) é um par de Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.4 Sejam $G = \langle a_1, b_1, a_2, b_2; \prod_{i=1}^2 [a_i, b_i] = 1 \rangle$ e $S = \langle a_1 \rangle * \langle b_1 \rangle$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é a superfície orientada de genus 2 ($T^2 \# T^2$) e Y é a superfície compacta com o mostra a figura.



De fato:

Considere $a_i, b_i, i = 1, 2$ identificados com as classes de homotopia dos laços representados na figura acima.

Desta forma $\pi_1(X) = G$ e $\pi_1(Y) = S$.

Já vimos no Exemplo 1.2.7 que X é um $K(G, 1)$ e pelo Exemplo 3.3.2, Y é um $K(S, 1)$.

Mostremos que $i_{\#} : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ a induzida pela inclusão é injetora:

Seja Z como mostra a figura acima. Assim $Y \cap Z \simeq S^1$.

Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y \cap Z) & \xrightarrow{\alpha_1} & \pi_1(Z) \\ \alpha_2 \downarrow & & \downarrow \alpha_3 \\ \pi_1(Y) & \xrightarrow{i_{\#}} & \pi_1(X) \end{array}$$

onde $i_{\#}$, α_1 , α_2 , α_3 são todas induzidas das inclusões. Temos que $\pi_1(Y \cap Z) = \langle a \rangle$ e α_1 não é homotópico a zero em Z . Logo α_1 é injetora.

Analogamente vemos que α_2 é injetora. Logo, por [6], Lema 2.7.4 $i_{\#}$ e α_3 também são injetoras e então podemos ver $\pi_1(Y)$ como subgrupo de $\pi_1(X)$.

Logo (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

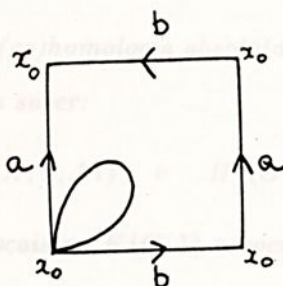
Exemplo 3.3.5 Sejam G um grupo e $S = \{1\}$ o subgrupo trivial. Considere $X = K(G, 1)$ e o vértice $x_0 \in X$. O par (G, S) é realizado topologicamente por $(X, \{x_0\})$.

De fato, $\{x_0\}$ é um $K(S, 1)$ subcomplexo de $X = K(G, 1)$.

Exemplo 3.3.6 Sejam $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ e $Y = \langle baba^{-1} \rangle$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente por um par Eilenberg-MacLane (X, Y) , onde X é a garrafa de Klein (KB) menos um disco aberto e Y é o bordo de X .

De fato:

Podemos representar X como na figura abaixo identificando a, b com os laços representados na figura.

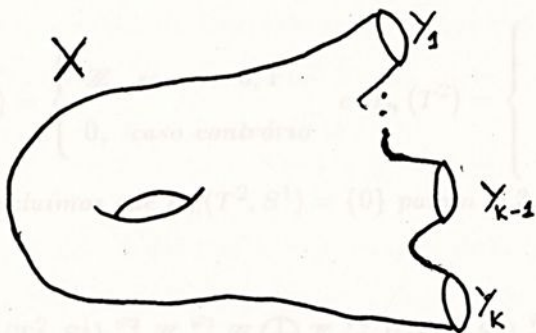


Aqui, como no Exemplo (3.3.2), vemos que X tem o mesmo tipo de homotopia da figura oito, assim concluímos que X é um $K(G, 1)$.

Na figura acima vemos que $\pi_1(Y) = \langle baba^{-1} \rangle = S$. Novamente Y é homeomorfa a S^1 . Logo Y é um $K(S, 1)$.

Portanto (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) .

Exemplo 3.3.7 Consideremos agora X o toro T^2 menos k discos abertos e Y o bordo de X .



Considere $G = \pi_1(X)$ e $S = \{S_i = \pi_1(Y_i), i = 1, \dots, k\}$. Temos que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) ([5], 9.2).

Veremos agora, sem demonstração um resultado que relaciona a (co)homologia de grupos com a (co)homologia de pares Eilenberg-MacLane.

Teorema 3.3.1 Se (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando o par grupo (G, S) e M é um RG -módulo trivial então $H_k(G, S; M) \simeq H_k(X, Y; M)$ e $H^k(G, S; M) \simeq H^k(X, Y; M)$.

Demonstração: [5], Teorema 1.3. ■

Observação 3.3.1 Como no caso da (co)homologia absoluta, se M for RG -módulo qualquer, também existe uma interpretação topológica, a saber:

$$H_k(G, S; M) \simeq H_k(X, Y, \mathcal{M}) \quad \text{e} \quad H^k(G, S; M) \simeq H^k(X, Y, \mathcal{M})$$

onde $\mathcal{M}$ é o sistema de coeficientes locais no $K(G, 1)$ associado ao RG -módulo M .

Exemplo 3.3.8 (Cálculo de (Co)Homologia Relativa de Grupos Através de (Co)homologia

de Espaços) Seja G o grupo abeliano livre com dois geradores, isto é $G = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e sejam $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Temos que (G, S) é realizado topologicamente pelo par Eilenberg-MacLane (T^2, S^1) (Exemplo 3.3.1).

Pelo teorema anterior $H_k(G, S; \mathbb{Z}) \simeq H_k(T^2, S^1; \mathbb{Z}) \stackrel{\text{notação}}{=} H_k(T^2, S^1)$. Pela definição de homologia relativa $H_0(G, S; \mathbb{Z}) = \{0\}$. Logo $H_0(T^2, S^1) = \{0\}$.

Usando a sequência exata longa de homologia abaixo vamos calcular $H_k(T^2, S^1)$ para $k \geq 1$.

$$\cdots \rightarrow H_n(S^1) \rightarrow H_n(T^2) \rightarrow H_n(T^2, S^1) \rightarrow H_{n-1}(S^1) \rightarrow \cdots \rightarrow H_0(S^1) \rightarrow H_0(T^2) \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

$$\text{É conhecido que } H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ e } H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } n = 0, 2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{se } n = 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Com estes resultados concluímos que $H_n(T^2, S^1) = \{0\}$ para $n \geq 3$ e a sequência exata (3.3) toma a seguinte forma:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_1} H_2(T^2, S^1) \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_3} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_4} H_1(T^2, S^1) \xrightarrow{\varphi_5} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_6} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Analise a aplicação $\varphi_3 : H_1(S^1) = \mathbb{Z} \rightarrow H_1(T^2) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ induzida da inclusão $S^1 \xrightarrow{i} T^2$.

Temos que $H_1(S^1) = \pi_1(S^1)$ e $H_1(T^2) = \pi_1(T^2)$. Logo φ_3 é a aplicação induzida pela inclusão $S^1 \xrightarrow{i} T^2$ no grupo fundamental, isto é, $\varphi_3 = i_{\#} : \pi_1(S^1) \rightarrow \pi_1(T^2)$.

Como (T^2, S^1) é um par Eilenberg-MacLane, temos que φ_3 é injetora (é a inclusão de $S = \mathbb{Z}$ em $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$). Portanto $\text{Im } \varphi_3 = \mathbb{Z}$ e $\ker \varphi_3 = \{0\}$. Temos também $\mathbb{Z} = \text{Im } \varphi_1 = \ker \varphi_2$ e $H_2(T^2, S^1) / \ker \varphi_2 \simeq \text{Im } \varphi_2 = \ker \varphi_3 = \{0\}$. Assim, $H_2(T^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Agora, $\text{Im } \varphi_3 = \mathbb{Z} = \ker \varphi_4$ e $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} / \ker \varphi_4 \simeq \text{Im } \varphi_4$, donde concluímos que $\ker \varphi_5 = \text{Im } \varphi_4 \simeq \mathbb{Z}$. Daí $H_1(T^2, S^1) / \ker \varphi_5 \simeq \text{Im } \varphi_5 = \{0\}$ pois φ_6 é isomorfismo, e temos então $H_1(T^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$ e portanto

$$H_k(G, S; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 1, 2 \\ \{0\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinemos agora $H^k(G, S; \mathbb{Z})$. Para isso usaremos os cálculos anteriores e o seguinte resultado: "Seja R um domínio de ideais principais e suponhamos $H_{q-1}(X, Y; R)$ finitamente gerado. Seja T_{q-1} o submódulo de torção de $H_{q-1}(X, Y; R)$ e F_q a parte livre de $H_q(X, Y; R)$ então $H^q(X, Y; R) \simeq F_q \oplus T_{q-1}$." ([11], 23.18)

Como $\mathbb{Z}$ é um domínio de ideais principais e os grupos de homologia relativa $H_k(T^2, S^1; \mathbb{Z})$ são livres, finitamente gerados temos $H^k(T^2, S^1; \mathbb{Z}) \simeq H_k(T^2, S^1; \mathbb{Z})$.

$$\text{Daí } H^k(T^2, S^1; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 1, 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\text{e assim temos } H^k(G, S; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } k = 1, 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

3.4 Grupos e Pares de Dualidade

Neste parágrafo faremos um estudo da teoria de grupos e pares de dualidade.

Nas definições e resultados que se seguem R denotará um anel comutativo com unidade qualquer, mas estaremos interessados nos casos $R = \mathbb{Z}$ ou $R = \mathbb{Z}_2$.

Definição 3.4.1 *Seja G um grupo. A dimensão cohomológica de G sobre R , denotada por $cd_R G$, é definida por $cd_R G = \sup\{n : H^n(G; M) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo } M\} = \inf\{n : H^i(G; -) = 0, \forall i > n\}$.*

Observação 3.4.1

a) $cd_R G \geq 0$ pois $H^0(G; R) \simeq R^G = R \neq 0$.

b) Se R admite uma resolução projetiva sobre RG de comprimento finito, isto é,

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow R \rightarrow 0$$

então $cd_R G \leq n$.

Exemplo 3.4.1 *Seja G um grupo cíclico infinito. Temos, pelo Exemplo 2.1.2 que*

$$H^1(G; M) = M_G$$

$$H^0(G; M) = M^G$$

$$H^i(G; M) = 0 \text{ para } i \geq 2.$$

Assim $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$.

Exemplo 3.4.2 *Se G é o grupo cíclico de ordem n então $cd_{\mathbb{Z}} G = \infty$. De fato, pelo Exemplo 2.1.3,*



temos que

$$H^i(G; \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } i = 0 \\ \mathbb{Z}_n & \text{se } i \text{ é par} \\ 0 & \text{se } i \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Definição 3.4.2 Seja G um grupo. Dizemos que G tem R -torção se existe um elemento g em G cuja ordem, denotada por $o(g)$, é finita e não invertível em R (isto é, $o(g)$ é um inteiro $n > 0$ tal que $n1_R$ não é invertível em R).

Exemplo 3.4.3 $\mathbb{Z}_2$ tem $\mathbb{Z}_2$ torção, pois existe $\bar{1} \in \mathbb{Z}_2$; $o(\bar{1}) = 2$ e $2\bar{1} = \bar{2} = \bar{0}$ que é não invertível em $\mathbb{Z}_2$.

Observação 3.4.2 $cd_R G = 0$ se e somente se G é finito sem R -torção ([4], 2.4.12 (a)).

Exemplo 3.4.4 O único grupo finito que não tem $\mathbb{Z}$ torção (isto é, é livre de torção) é o grupo trivial.

De fato:

Seja $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ um grupo finito que não tem $\mathbb{Z}$ -torção. Então para qualquer $g_i \in G$ temos que $o(g_i)$ é infinita ou invertível em $\mathbb{Z}$.

Agora $o(g_i)$ divide $o(G) = n$.

Logo, para qualquer $g_i \in G$, temos que $o(g_i)$ é finita e assim pelas nossas hipóteses $o(g_i)$ é invertível em $\mathbb{Z}$. Daí $o(g_i) = 1$, $\forall g_i \in G$ e assim $g_i = e$, $\forall g_i \in G$. Portanto $G = \{e\}$.

Exemplo 3.4.5 Se $G = \{1\}$, grupo trivial, então $cd_{\mathbb{Z}} G = 0$. Reciprocamente se $cd_{\mathbb{Z}} G = 0$ então G é trivial (Observação 3.4.2 e Exemplo 3.4.4).

Exemplo 3.4.6 Se G é um grupo livre gerado por um conjunto S isto é, $G \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}$ (s cópias de $\mathbb{Z}$, $s \geq 1$) então $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$.

De fato, pelo Exemplo 1.2.8 $0 \rightarrow (\mathbb{Z}G)^{(S)} \rightarrow \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 1. Assim, Pela observação 3.4.1 (b), $cd_{\mathbb{Z}} G \leq 1$. Se $cd_{\mathbb{Z}} G = 0$, teríamos, pelo exemplo

anterior que $G = \{1\}$. Logo, $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$.

Definição 3.4.3 Seja G um grupo. Dizemos que G tem dimensão cohomológica virtual finita sobre R e denotamos por $vcd_R G < \infty$ se existe um subgrupo S de G com $[G : S] < \infty$ e $cd_R S < \infty$.

Exemplo 3.4.7 Sejam $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_n$ e $S = \mathbb{Z}$ subgrupo de G . Temos que $[G : S] = n < \infty$ e $cd_{\mathbb{Z}} S = 1$, pelo Exemplo 3.4.1, logo $vcd_{\mathbb{Z}} G < \infty$.

Proposição 3.4.1 Seja G um grupo. Se G não tem $\mathbb{Z}$ -torção então G não tem $\mathbb{Z}_p$ -torção para $\forall p \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Se G não tem $\mathbb{Z}$ -torção então $\forall g \in G$, $o(g)$ é infinita ou invertível em $\mathbb{Z}$.

Seja $g \in G$. Se $o(g) = \infty$ temos que g não é elemento de torção. Suponhamos que $o(g) = n$ seja invertível em $\mathbb{Z}$. Então $n = 1$ e assim $n \cdot \bar{1} = \bar{1}$ que é invertível em $\mathbb{Z}_p$.

Logo G não tem $\mathbb{Z}_p$ -torção. ■

O exemplo que daremos a seguir mostra que a recíproca da proposição anterior é falsa.

Exemplo 3.4.8 Se p é ímpar então $\mathbb{Z}_p$ não tem $\mathbb{Z}_2$ -torção, mas tem $\mathbb{Z}$ -torção.

Se $x \in \mathbb{Z}_p$, então $o(x)$ divide p e assim $o(x)$ é ímpar. Logo $o(x) = 2k + 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Assim em $\mathbb{Z}_2$, $o(x) \cdot \bar{1} = \overline{o(x)} = \overline{2k + 1} = \overline{2k} + \bar{1} = \bar{1}$, que é invertível em $\mathbb{Z}_2$. Portanto $\mathbb{Z}_p$ não tem $\mathbb{Z}_2$ -torção. Agora $\mathbb{Z}_p = \langle \bar{1} \rangle$ com $o(\bar{1}) = p$, que não é invertível em $\mathbb{Z}$. Assim $\mathbb{Z}_p$ tem $\mathbb{Z}$ -torção.

Definição 3.4.4 Um grupo G é dito ser do tipo FP sobre R se R admite uma resolução projetiva finita $\varepsilon : P \rightarrow R$ sobre RG , isto é, $\varepsilon : P \rightarrow R$ é de comprimento finito com cada P_i finitamente gerado como RG -módulo.

Observação 3.4.3 a) Se G é do tipo FP sobre R então $cd_R G < \infty$.

b) Se G é do tipo FP sobre $\mathbb{Z}$ então G é do tipo FP sobre R , pois se $\varepsilon : P \rightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução

projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ então $\bar{\varepsilon} : P \otimes_R R \rightarrow R$ é uma resolução projetiva finita de R sobre RG .

Exemplo 3.4.9 Segue diretamente dos Exemplos 1.2.4, 1.2.8 e 1.2.9 respectivamente que, $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, $F(S)$ onde $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ e $\mathbb{Z}$ são do tipo FP sobre $\mathbb{Z}$.

Interpretação Topológica Para Grupos de Tipo FP Sobre $\mathbb{Z}$

Um grupo ser de tipo FP significa intuitivamente que certas condições de finitude (tais como dimensão cohomológica finita) são satisfeitas por G .

Quando se trata de CW -complexos, satisfazer condições de finitude, significa ter um número finito de células ou dimensão finita. Como para todo grupo G existe um CW -complexo $Y = K(G, 1)$, veremos agora quais condições de finitude deve satisfazer Y se G for do tipo FP .

Definição 3.4.5 Um espaço topológico Y é finitamente dominado se existe um CW -complexo finito K e aplicações $i : Y \rightarrow K$ e $r : K \rightarrow Y$ com $r \circ i \sim id_Y$.

Teorema 3.4.1 Seja G um grupo. Se existe um $K(G, 1)$ finitamente dominado então G é do tipo FP .

Demonstração: [6], 8.6.4. ■

Se G for finitamente apresentado a recíproca do teorema acima é verdadeira, isto é,

Teorema 3.4.2. Se G é finitamente apresentado e de tipo FP então existe um $K(G, 1)$ complexo Y , n -dimensional ($n = \max\{cdG, 3\}$), com Y finitamente dominado.

Demonstração: [6], 8.7.1. ■

Veremos agora o importante conceito de **grupos de dualidade**, isto é, grupos que satisfazem certos isomorfismos de dualidade em homologia e cohomologia.

Definição 3.4.6 Um grupo G é dito ser um grupo de dualidade de dimensão n sobre R (D^n -grupo sobre R) se existe um RG -módulo C ; chamado módulo dualizante, e isomorfismos naturais tais que

$H^k(G; M) \simeq H_{n-k} \left(G; C \otimes_R M \right), \forall k \in \mathbb{Z}$ e todo RG -módulo M , com G atuando diagonalmente no produto tensorial. Se $C \simeq R$ então G é chamado grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n -grupo sobre R).

Observação 3.4.4 Na literatura, é comum distinguir entre grupos de dualidade de Poincaré orientáveis e não orientáveis. A saber, se G é um PD^n -grupo e a ação de G no módulo dualizante $C \simeq R$ é trivial, dizemos que G é um PD^n -grupo orientável. Caso contrário, G é dito não orientável.

Se $R = \mathbb{Z}_2$, já vimos que a única ação possível de G em R é a trivial. Daí, PD^n -grupos sobre $\mathbb{Z}_2$ são sempre orientáveis. Neste trabalho não daremos destaque a essa distinção.

Mostremos agora que o módulo dualizante C e a dimensão n que aparecem na definição de um grupo de dualidade são determinados por G .

Proposição 3.4.3 Seja G um grupo de dualidade sobre R de dimensão n e com módulo dualizante C . Então $C \simeq H^n(G; RG)$ e $n = cd_R G$.

Demonstração: Temos pela definição de dualidade, pela Proposição 2.1.4 e por [12], 1.7.4 que $H^n(G; RG) \simeq H_0 \left(G; C \otimes_R RG \right) \simeq \left(C \otimes_R RG \right) \otimes_{RG} R \simeq C \otimes_R R \simeq C$. Agora, pelas Proposições 1.4.1 e 2.1.5, $R \simeq Hom_{RG}(R, R) \simeq H^0(G; R) \simeq H_n \left(G; C \otimes_R R \right) \simeq H_n(G; C)$. Assim $C \neq 0$. Além disso $H^k(G; A) = H_{n-k} \left(G; C \otimes_R A \right) = 0$ para $k > n$ e qualquer RG -módulo A . Logo $cd_R G \leq n$. Como $H^n(G; RG) = C \neq 0$ temos $cd_R G = n$. ■

Nota: É provado em [4], Teorema 3.9.2, que todo grupo de dualidade sobre R é de tipo FP sobre R .

Logo para definirmos grupos de dualidade, poderíamos nos restringir à categoria dos grupos de tipo FP .

Em [6], 8.10.1, é mostrado que as seguintes condições são equivalentes para um grupo de tipo FP :

- i) Existe um inteiro n e um RG -módulo C tal que $H^i(G; M) \simeq H_{n-i} \left(G; C \otimes_R M \right)$, para todos os

RG -módulos M e todo $i \in \mathbb{Z}$.

ii) Existem isomorfismos naturais $H^i(G; -) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes_R -)$ onde $n = cd_R G$ e $C = H^n(G; RG)$; para todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.

iii) Existe um inteiro n tal que $H^i\left(G; RG \otimes_R A\right) = 0$ para $i \neq n$ e todos os grupos abelianos A .

Assim, se G é um grupo do tipo FP e quisermos mostrar que G é um grupo de dualidade, basta mostrarmos que a condição (i) é verdadeira.

Isto será usado nos exemplos que se seguem:

Exemplo 3.4.10 Se G é cíclico infinito então G é um PD^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$.

De fato, temos que G é de tipo FP e como vimos no Exemplo 2.1.2 $H^0(G; M) = H_1(G; M) = M^G$, $H^1(G; M) = H_0(G; M) = M_G$ e $H^n(G; M) = 0 = H_{1-n}(G; M)$, $\forall n \geq 2$.

Exemplo 3.4.11 $G = F(S)$, grupo livre com k geradores, $1 \leq k < \infty$ é um D^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$ que não é PD^1 grupo se $k > 1$.

De fato, já vimos que G é de tipo FP sobre $\mathbb{Z}$ e que $cd_{\mathbb{Z}} G = 1$. Vamos mostrar que a condição (iii) acima é verdadeira para $n = 1$, isto é, que $H^0(G; \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$ para todo grupo abeliano A .

De fato, $H^0(G; \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = H^0\left(G; \text{Ind}_{\{1\}}^G A\right) = \left\{\text{Ind}_{\{1\}}^G A\right\}^G = 0$ (pela Proposição 1.5.9).

Logo G é um D^1 -grupo.

Seja $k > 1$. Temos que, $H^1(G; \mathbb{Z}) \simeq \text{Hom}(\mathbb{Z}^k, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^k$.

Por outro lado $H^1(G; \mathbb{Z}) \simeq H_0(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}) = H_0(G; C)$. Se $C \simeq \mathbb{Z}$ com G -ação trivial $H_0(G; C) \simeq H_0(G; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Portanto $\mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{Z}$ (absurdo).

Se $C \simeq \mathbb{Z}$ com G -ação não trivial, temos que $gn = -n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ e $\forall g \in G$. Portanto $B = \langle gn - n \mid n \in \mathbb{Z} \text{ e } g \in G \rangle \simeq 2\mathbb{Z}$. Assim $H_0(G; C) \simeq C_G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Assim $\mathbb{Z}^k \simeq \mathbb{Z}_2$ (absurdo). Logo $C \neq \mathbb{Z}$. Daí G não é PD^1 -grupo sobre $\mathbb{Z}$. ■

Nos exemplos acima o anel R usado foi sempre o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$. A classe de grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ está contida na classe de grupos de dualidade sobre R , onde R é qualquer anel comutativo com unidade, como mostra o seguinte resultado.

Proposição 3.4.4 Se G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ com módulo dualizante



C então G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Demonstração Seja M um RG -módulo temos que

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k} \left(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M \right) \simeq H_{n-k} \left(G; \left(C \otimes_{\mathbb{Z}} R \right) \otimes_R M \right).$$

Portanto existe $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$ tal que $H^k(G; M) \simeq H_{n-k} \left(G; C' \otimes_R M \right)$ e assim G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R . ■

Observação 3.4.5 Os grupos que aparecem nos Exemplos 3.4.10 e 3.4.11 são de acordo com a Proposição anterior, grupos de dualidade sobre R . Em particular são grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}_2$.

A seguinte proposição caracteriza os grupos de dualidade em dimensões baixas.

Proposição 3.4.5 i) G é um grupo de dualidade de dimensão 0 sobre R , se e somente se, G é finito sem R -torção.

ii) G é um grupo de dualidade de dimensão 1 sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado e $cd_R G = 1$.

Demonstração: [4], Proposição 9.17. ■

Interpretação Topológica Para Grupos de Dualidade de Poincaré

A teoria de grupos dualidade de Poincaré está relacionada com a teoria de variedade esféricas (variedades X que tem o mesmo tipo de homotopia de um $K(\pi_1(X), 1)$).

Teorema 3.4.3 Se G é um grupo tal que existe uma variedade esférica X fechada (compacta e sem bordo) de dimensão n com $\pi_1(X) = G$ então G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ e conseqüentemente sobre R .

Demonstração: [7], 5.1.1. ■

Exemplo 3.4.12 O toro $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ é uma variedade esférica fechada de dimensão n . Logo $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$ é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$.

Exemplo 3.4.13 Seja F uma superfície fechada. Então pelo Teorema de Classificação de Superfícies

([15], 1.5.1), temos as seguintes possibilidades para F :

- i) $F = S^2$
- ii) $F = T^2$
- iii) $F = \mathbb{R}P(2)$
- iv) $F = T^2 \# \dots \# T^2$ (soma conexa de n toros)
- v) $F = \mathbb{R}P(2) \# \dots \# \mathbb{R}P(2)$ (soma conexa de n planos projetivos).

Destas somente S^2 e $\mathbb{R}P^2$ não são esféricas. Logo

$$\pi_1(T^2) = \langle a, b; [a, b] = 1 \rangle, \quad \pi_1(T^2 \# T^2 \# \dots \# T^2) = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n; \prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

e $\pi_1(\mathbb{R}P(2) \# \dots \# \mathbb{R}P(2)) = \langle a_1, \dots, a_n; \prod_{i=1}^n a_i^2 = 1 \rangle$ ($n \geq 2$) são grupos de dualidade de Poincaré de dimensão 2 sobre $\mathbb{Z}$.

Pares de Dualidade

Definição 3.4.7 Seja (G, S) um par grupo. A dimensão cohomológica de (G, S) sobre R , denotada por $cd_R(G, S)$, é dada por:

$$cd_R(G, S) = \sup \{n; H^n(G, S; A) \neq 0, \text{ para algum } RG\text{-módulo } A\}$$

Definição 3.4.8 Um par de dualidade de dimensão n sobre R (D^n -par) consiste de um par de grupo (G, S) e um RG -módulo C , onde $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família finita de D^{n-1} -subgrupos de G com módulo dualizante C (visto como RS_i -módulo por restrição), e isomorfismos naturais:

$$\begin{aligned} H^k(G; A) &\simeq H_{n-k}(G, S; C \otimes_R A) \\ H^k(G, S; A) &\simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R A) \end{aligned}$$

para todo RG -módulo A e todo $k \in \mathbb{Z}$.

Se $C \simeq R$, (G, S) é chamado par de dualidade de Poincaré de dimensão n (PD^n -par). Neste caso cada $S_i \in S$ é um PD^{n-1} -subgrupo de G .

Observação 3.4.6 a) O conceito de grupo de dualidade é um caso particular do conceito de par de dualidade considerando $S = \emptyset$.

b) Em [5], Bieri e Eckmann definiram originalmente D^{n-1} -pares (G, S) como sendo um par grupo (G, S) , com $S = \{S_i, i \in I\}$ uma família não necessariamente finita e S_i não necessariamente D^{n-1} -subgrupos de G , satisfazendo isomorfismos naturais da definição anterior.

É claro que um D^n -par no sentido da definição anterior é também D^n -par no sentido de Bieri-Eckmann. Reciprocamente, se (G, S) é um D^n -par com módulo dualizante C , no sentido de Bieri-Eckmann, temos por [5], Teorema 4.2 que $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família finita de subgrupos de G e cada S_i é um D^{n-1} -subgrupo com módulo dualizante C (visto como RS_i -módulo por restrição). Daí (G, S) é um D^n -par no sentido da definição anterior.

Proposição 3.4.6 Se (G, S) é um D^n -par com módulo dualizante C então G é um D^{n-1} -grupo com módulo dualizante $\Delta \otimes_R C$.

Demonstração: $H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G, S; C \otimes_R M) := H_{n-k-1}(G; \Delta \otimes_R (C \otimes_R M)) \simeq H_{(n-1)-k}(G; (\Delta \otimes_R C) \otimes_R M)$.

Como todos os isomorfismos acima são naturais temos que G é um D^{n-1} -grupo. ■

Proposição 3.4.7 Seja (G, S) um D^n -par com módulo dualizante C . Então:

- i) $C \simeq H^n(G, S; RG) \neq 0$ e $H^k(G, S; RG) = 0$ se $k \neq n$
- ii) $n = cd_R(G, S)$.

Demonstração:

i) Temos que

$$\begin{aligned} H^k(G, S; RG) &\simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R RG) \simeq H_{n-k}(G; RG \otimes_R C) \\ &\simeq H_{n-k}(G; \text{Ind}_{\{1\}}^G C) \simeq H_{n-k}(\{1\}; C) = \begin{cases} C & \text{se } k = n \\ 0 & \text{se } k \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, $H^0(G; R) \simeq H_n(G, S; C \otimes_R R) \simeq H_n(G, S; C)$. Por outro lado, $H^0(G; R) \simeq R^G = R$. Portanto $H_n(G, S; C) \simeq R$ e assim $C \neq 0$.

ii) Temos que $H^k(G, S; A) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R A) = 0$ para $k > n$ e qualquer RG -módulo A . Como $H^n(G, S; RG) \simeq C \neq 0$ (dem. item (i)) temos que $cd_R(G, S) = n$. ■

A categoria dos pares de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ está contida na categoria sobre R , onde R é um anel

comutativo com unidade, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 3.4.8 Se (G, S) é um par de dualidade de dimensão n sobre $\mathbb{Z}$ então (G, S) é um par de dualidade de dimensão n sobre R .

Demonstração: Se (G, S) é um par de dualidade sobre $\mathbb{Z}$, com módulo dualizante C então temos que $S = \{S_i, i = 1, \dots, r\}$ é uma família finita de D^{n-1} -subgrupos de G (sobre $\mathbb{Z}$) com módulo dualizante C .

Pela Proposição 3.4.4, cada S_i é um D^{n-1} -subgrupo sobre R com módulo dualizante $C \otimes_{\mathbb{Z}} R$. Considere M um RG -módulo. Logo M é também um $\mathbb{Z}G$ -módulo e temos:

$$\begin{aligned} H^k(G, S; M) &\simeq H_{n-k} \left(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M \right) \simeq H_{n-k} \left(G; \left(C \otimes_{\mathbb{Z}} R \right) \otimes_R M \right) \\ H^k(G; M) &\simeq H_{n-k} \left(G, S; C \otimes_{\mathbb{Z}} M \right) \simeq H_{n-k} \left(G, S; \left(C \otimes_{\mathbb{Z}} R \right) \otimes_R M \right). \end{aligned}$$

Como os isomorfismos envolvidos são naturais temos que (G, S) é um D^n -par sobre R com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} R$. ■

Exemplo 3.4.15 Sejam $R = \mathbb{Z}_2$, $G = \langle t \rangle \oplus \langle s \rangle \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, e $S = \langle t^2 \rangle \oplus \langle s \rangle \simeq 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Então (G, S) é um PD^3 -par sobre $\mathbb{Z}_2$.

De fato:

Temos que $G/S = \{(\overline{t}, 1), (\overline{1}, 1)\} = \{(\overline{t}, \overline{1}), (\overline{1}, \overline{1})\} = \{\overline{1}, \overline{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Calculemos $\Delta = \ker \varepsilon$, onde $\varepsilon : \mathbb{Z}_2(G/S) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ é a aplicação aumentação.

Temos $\mathbb{Z}_2(G/S) = \mathbb{Z}_2(\mathbb{Z}_2) = \{\alpha \overline{1} + \beta \overline{T} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2\} = \{0, \overline{1}, \overline{T}, \overline{1} + \overline{T}\}$.

Agora, $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon(\overline{1}) = 1$, $\varepsilon(\overline{T}) = 1$ e $\varepsilon(\overline{1} + \overline{T}) = \varepsilon(\overline{1}) + \varepsilon(\overline{T}) = 1 + 1 = 0$

Logo $\Delta = \{0, \overline{1} + \overline{T}\} \simeq \mathbb{Z}_2$.

Portanto $\text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M) = M$ e $\Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M = M$. Como G é PD^2 -grupo temos:

$$H_{3-k}(G, S; M) := H_{3-k-1} \left(G; \Delta \otimes_{\mathbb{Z}_2} M \right) = H_{2-k}(G; M) \simeq H^k(G; M)$$

$$H^k(G, S; M) := H^{k-1}(G; \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, M)) = H^{k-1}(G; M) \simeq H_{3-k}(G; M)$$

e deste modo como os isomorfismos envolvidos são naturais temos que (G, S) é um PD^3 -par.

Interpretação Topológica Para Pares de Dualidade de Poincaré

O seguinte resultado pode ser encontrado em [5] e mostra a relação entre PD^n -pares e variedades e também fornece um critério para se produzir exemplos de PD^n -pares através de modelos topológicos.

Teorema 3.4.5 *Sejam $(X, Y) = K(G, S, 1)$ um par Eilenberg-MacLane, onde X é uma n -variedade, com bordo, compacta e $Y = \partial X$. Sejam Y_i , $i = 1, \dots, r$ as componentes conexas de Y . Se $G = \pi_1(X)$ e $S = \{S_i = \pi_1(Y_i), i = 1, \dots, r\}$, então (G, S) é um PD^n -par sobre $\mathbb{Z}$. (Conseqüentemente (G, S) é um PD^n -par sobre R).*

Demonstração: [5], 6.3. ■

Usando este resultado veremos alguns exemplos de PD^n -pares.

Exemplo 3.4.16 *Seja $X = [P_0, P_1]$ como mostra a figura.*

Temos que $\partial X = P_0 \cup P_1$ e $(X, P_0 \cup P_1)$ é claramente um par Eilenberg-MacLane. Realizando (G, S) onde $G = \{1\}$ e $S = \{\{1\}, \{1\}\}$. Assim pela proposição anterior $(\{1\}, \{\{1\}, \{1\}\})$ é PD^1 -par sobre $\mathbb{Z}$ e conseqüentemente sobre qualquer anel R .

Exemplo 3.4.17 *Considere X como sendo o toro T^2 menos um disco aberto e $Y = \partial X$. Sejam $G = \pi_1(X) \simeq \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \pi_1(Y) \simeq \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Já vimos no Exemplo 3.3.2 que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) . Assim pelo teorema anterior, (G, S) é um PD^2 -par.*

Exemplo 3.4.18 *Seja X a superfície orientada de genus $g \geq 1$ da qual um disco aberto foi removido e seja $Y = \partial X$. Daí $G = \pi_1(X)$ é um grupo livre com $2g$ geradores $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ e $S = \pi_1(Y) = \langle [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g] \rangle$ onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ (Exemplo 3.3.3). Temos que (X, Y) é um par Eilenberg-MacLane realizando (G, S) . Daí (G, S) é um par PD^2 -par.*

Exemplo 3.4.19 *Generalizando os exemplos anteriores, considere X uma superfície fechada da*

PD^2 -par. Invariantes $E'(G, S)$ e $\overline{E}(G, S)$

verdadeira. $\mathcal{E}$ relativa) como espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}_0$ e assim podemos falar em dimensão destes espaços.

Capítulo 4

Os Invariantes $E'(G, \mathcal{S})$ e $\overline{E}(G, \mathcal{S})$

Neste capítulo faremos um estudo do invariante $E'(G, \mathcal{S}, M)$ definido por Andrade e Fanti em [3]. Estaremos interessados nos casos em que M é o $\mathbb{Z}_2G$ -módulo trivial $\mathbb{Z}_2$ ou M é o anel grupo $\mathbb{Z}_2G$, mas no primeiro parágrafo faremos um breve estudo deste invariante para M um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo qualquer.

As referências usadas neste capítulo foram [1], [3] e [4].

Aqui sempre trabalharemos com o anel $R = \mathbb{Z}_2$, o que nos permite ver os grupos de (co)homologia (absoluta e relativa) como espaços vetoriais sobre $\mathbb{Z}_2$ e assim podemos falar em dimensão destes espaços.

4.1 O Invariante $E(G, \mathcal{S}, M)$

Definição 4.1.1 Sejam $(G, \mathcal{S})$ um par grupo, $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G com $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$ e M um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo. Definimos

$$E(G, \mathcal{S}, M) = 1 + \dim \ker \text{res}_{\mathcal{S}}^G$$

onde $\text{res}_{\mathcal{S}}^G : H^1(G; M) \rightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; M)$ é definida por $\text{res}_{\mathcal{S}}^G([f]) = (\text{res}_i[f])_{i \in I}$ com $\text{res}_i : H^1(G; M) \rightarrow H^1(S_i; M)$ a aplicação induzida, no nível 1 de cohomologia, da inclusão $S_i \hookrightarrow G$.

Observação 4.1.1 Seja $\mathcal{S} = \{S\}$ uma família consistindo de um único subgrupo S de G com



$[G : S] = \infty$ denotaremos $E(G, S, M)$ por $E(G, S, M)$.

Seja $\mathcal{C}$ a categoria cujos objetos são os pares $((G, S); M)$ onde G é um grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de índice infinito em G e M é um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo e cujos morfismos são aplicações $\psi : ((G, S); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}); N)$ consistindo de:

- Um homomorfismo $\alpha : G \rightarrow L$;
- Uma aplicação $\pi : I \rightarrow J$ tal que $\alpha(S_i) = \mathcal{R}_{\pi(i)}$;
- Um homomorfismo $\phi : N \rightarrow M$ tal que $\phi(\alpha(g)n) = g\phi(n)$, isto é, ϕ é um homomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$ -módulos onde consideramos N como $\mathbb{Z}_2G$ -módulo via α .

Observamos que um isomorfismo $\psi : ((G, S); M) \rightarrow ((L, \mathcal{R}); N)$ na categoria $\mathcal{C}$ consiste de:

- $\alpha : G \rightarrow L$ isomorfismo de grupos;
- $\pi : I \rightarrow J$ bijeção tal que $\alpha(S_i) = \mathcal{R}_{\pi(i)}$;
- $\phi : N \rightarrow M$ isomorfismo de $\mathbb{Z}_2G$ -módulos.

O resultado abaixo nos diz que $E(G, S, M)$ é um invariante na categoria $\mathcal{C}$.

Proposição 4.1.1 Se na categoria $\mathcal{C}$, $((G, S); M)$ e $((L, \mathcal{R}); N)$ são isomorfos, então temos que $E(G, S, M) = E(L, \mathcal{R}, N)$.

Demonstração: [1], 3.1.3. ■

Proposição 4.1.2 Sejam (G, S) um par grupo com $[G : S] = \infty, \forall S \in S$ e M um $\mathbb{Z}_2G$ -módulo e suponhamos que os grupos de cohomologia $H^0(G; M)$, $H^0(S; M)$ e $H^1(G, S; M)$ tenham dimensão finita. Então $E(G, S; M) = 1 + \dim H^0(G; M) - \dim H^0(S; M) + \dim H^1(G, S; M)$.

Demonstração: Pela Proposição 3.2.1(i) temos a seguinte sequência exata longa:

$$0 \rightarrow H^0(G; M) \xrightarrow{\chi} H^0(S; M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, S; M) \xrightarrow{J} H^1(G; M) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^1(S; M) \rightarrow \dots$$

que nos fornece a sequência exata curta

$$0 \rightarrow H^0(G; M) \xrightarrow{\chi} H^0(S; M) \xrightarrow{\delta} H^1(G, S; M) \xrightarrow{J} \text{Im } J \rightarrow 0$$

Agora $E(G, S, M) = 1 + \dim \text{Im } J$. Como χ, δ e J são transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita temos:

$$\begin{aligned}
\dim \operatorname{Im} J &= \dim H^1(G, S; M) - \dim \ker J = \dim H^1(G, S; M) - \dim \operatorname{Im} \delta = \\
&= \dim H^1(G, S; M) - \dim H^0(S; M) + \dim \ker \delta = \\
&= \dim H^1(G, S; M) - \dim H^0(S; M) + \dim \operatorname{Im} \chi = \\
&= \dim H^1(G, S; M) - \dim H^0(S; M) + \dim H^0(G; M).
\end{aligned}$$

Logo $E(G, S; M) = 1 + \dim H^1(G, S; M) - \dim H^0(S; M) + \dim H^0(G; M)$. ■

Proposição 4.1.3 *Sejam (G, S) um par grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G com $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$ e M um $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo então:*

$$E(G, S, M) = 1 + \dim \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_i.$$

Demonstração: Temos que $\alpha \in \ker \operatorname{res}_S^G \Leftrightarrow (\operatorname{res}_i(\alpha))_{i \in I} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{res}_i(\alpha) = 0 \forall i \in I \Leftrightarrow \alpha \in \ker \operatorname{res}_i, \forall i \in I$.

Portanto $\ker \operatorname{res}_S^G = \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_i$. Logo $E(G, S, M) = 1 + \dim \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_i$. ■

Como consequência imediata da proposição acima temos as seguintes propriedades:

Propriedade 4.1.1 *Seja (G, S) um par grupo com $S = \{S_i, i \in I\}$ e $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$. Se $S' = \{S_{i_k}, i_k \in I' \subset I\}$ é uma subfamília de S então $E(G, S, M) \leq E(G, S', M)$ para qualquer $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo M . Em particular $E(G, S, M) \leq E(G, S_i, M)$ para todo $i \in I$.*

Demonstração: Temos que $\bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_i \subset \bigcap_{i_k \in I'} \ker \operatorname{res}_{i_k}$. Assim $E(G, S; M) = 1 + \dim \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_i \leq 1 + \dim \bigcap_{i_k \in I'} \ker \operatorname{res}_{i_k} = E(G, S', M)$. ■

Propriedade 4.1.2 *Se (G, S) é um par grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$ com $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$ e $S' = \{H_i; H_i \text{ é subgrupo de } S_i, i \in I\}$ então $E(G, S, M) \leq E(G, S', M)$.*

Demonstração: Temos $[G : H_i] = [G : S_i][S_i : H_i] = \infty$. Logo $E(G, S', M)$ está bem definido.

Além disso $\operatorname{res}_{H_i}^G = \operatorname{res}_{H_i}^{S_i} \circ \operatorname{res}_{S_i}^G$.

Assim $\ker \operatorname{res}_{S_i}^G \subset \ker \operatorname{res}_{H_i}^G$ para todo $i \in I$. Logo $\bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_{S_i}^G \subset \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_{H_i}^G$, donde segue que $E(G, S, M) = 1 + \dim \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_{S_i}^G \leq 1 + \dim \bigcap_{i \in I} \ker \operatorname{res}_{H_i}^G = E(G, S', M)$. ■

Propriedade 4.1.3 *Seja (G, S) um par grupo com $S = \bigcup_{l \in L} S_l = \{S_i, i \in I\}$ onde $S_l = \{S_{i_l} = R_l, i_l \in I_l \subseteq I\}$ e $[G : S_i] = \infty, \forall i \in I$. Então $E(G, S, M) = E(G, S', M)$ onde*



$S' = \{\mathcal{R}_l, l \in L\}$ e M é um $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo qualquer. Em particular, se $S = \{S_i = S, i \in I\}$ então $E(G, S, M) = E(G, S, M)$.

Demonstração: $E(G, S, M) = 1 + \dim \bigcap_{i \in I} \ker \text{res}_i = 1 + \dim \bigcap_{l \in L} \bigcap_{i_l \in I_l} \ker \text{res}_{i_l} = 1 + \dim \bigcap_{l \in L} \ker \text{res}_l = E(G, S'; M)$. ■

4.2 O Invariante $E'(G, S)$

Estudaremos o invariante $E(G, S, M)$ no caso em que M é o $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo trivial $\mathbb{Z}_2$.

Por simplicidade, denotaremos $E(G, S, \mathbb{Z}_2)$ por $E'(G, S)$.

Assim, se G é um grupo e $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos de G com índice infinito em G temos

$$E'(G, S) = 1 + \dim \ker \text{res}_S^G$$

onde $\text{res}_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; \mathbb{Z}_2)$ é a aplicação restrição.

Se $S = \{S\}$, família com um único subgrupo denotaremos $E'(G, S)$ por $E'(G, S)$. Neste caso temos o seguinte resultado:

Proposição 4.2.1 Considerando G um grupo e S um subgrupo de G com $[G : S] = \infty$, então $E'(G, S) = 1 + \dim H^1(G, S, \mathbb{Z}_2)$.

Demonstração: Considere a sequência exata longa da Proposição 3.2.1 (i) para $M = \mathbb{Z}_2$ e $S = \{S\}$.

$$0 \rightarrow H^0(G; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\chi} H^0(S; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{l} H^1(G, S; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{J} H^1(G; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^1(S; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \dots$$

Temos: $H^0(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^G = \mathbb{Z}_2$ e $H^0(S; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^S = \mathbb{Z}_2$.

Logo a aplicação χ é isomorfismo e l é a aplicação nula.

Agora $\ker J = \text{Im } l = \{0\}$. Portanto J é injetora.

Assim $H^1(G, S; \mathbb{Z}_2) \simeq \text{Im } J = \ker \text{res}_S^G$. Portanto $E'(G, S) = 1 + \dim H^1(G, S; \mathbb{Z}_2)$. ■

Corolário 4.2.1 Se (G, S) é um D^n -par com módulo dualizante C , então

$$E'(G, S) = 1 + \dim H_{n-1}(G, C).$$

Demonstração:

$$H^1(G, S; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-1}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-1}(G; C)$$

Logo pela proposição anterior temos que $E'(G, S) = 1 + \dim H_{n-1}(G; C)$. ■

Exemplo 4.2.1 Considere $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Como vimos no Exemplo 3.4.17, (G, S) é um PD^2 -par. Logo $E'(G, S) = 1 + \dim H_1(G; \mathbb{Z}_2)$.

Mas $H_1(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. De fato, pelo Corolário 2.3.1 temos que $H_1(G; \mathbb{Z}_2) \simeq G_{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ onde G_{ab} denota o grupo G abelianizado, isto é, $G/[G, G]$.

Logo $H_1(G; \mathbb{Z}_2) = (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ e temos $E'(G, S) = 3$.

Se (G, S) é um PD^n -par, $S = \{S_i, i = 1, \dots, r\}$, temos que G e cada $S_i \in S$ são grupos do tipo FP (pois são grupos de dualidade). Se além disso, G é finitamente apresentado então existe um $K(G, 1)$ finitamente dominado (Teorema 3.4.2). Veremos que nestas condições existe uma relação entre o invariante $E'(G, S)$ e o número de elementos da família S .

Para isso necessitamos do seguinte lema:

Lema 4.2.1 Se Y é finitamente dominado então os módulos de homologia $H_*(Y; \mathbb{Z}_2)$ e cohomologia $H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$ são finitamente gerados como $\mathbb{Z}_2$ -espaços vetoriais.

Demonstração: Como Y é finitamente dominado existem um CW-complexo finito K e aplicações $i: Y \rightarrow K$ e $r: K \rightarrow Y$ com $r \circ i \sim id_Y$. Então $r_* \circ i_* = id$. Logo $i_*: H_*(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(K; \mathbb{Z}_2)$ é monomorfismo. Agora, K é finito e então $H_*(K; \mathbb{Z}_2)$ é finitamente gerado.

Como $H_*(Y; \mathbb{Z}_2) \simeq Im\ i_* \subset H_*(K; \mathbb{Z}_2)$ temos que $H_*(Y; \mathbb{Z}_2)$ é finitamente gerado.

Usando que $r^*: H^*(Y; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^*(K; \mathbb{Z}_2)$ é um monomorfismo, prova-se de maneira análoga que $H^*(Y; \mathbb{Z}_2)$ é finitamente gerado. ■

Observação 4.2.1 Segue do lema anterior que se G é um grupo do tipo FP e finitamente apresentado $H_*(G; \mathbb{Z}_2) = H_*(K(G, 1); \mathbb{Z}_2)$ e $H^*(G; \mathbb{Z}_2) = H^*(K(G, 1); \mathbb{Z}_2)$ são finitamente gerados.

Proposição 4.2.2 Sejam (G, S) um PD^n -par, $S = \{S_i, i = 1, \dots, r\}$, com $[G: S_i] = \infty$ e G finitamente apresentado. Então $E'(G, S) = 2 - r + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$.

Demonstração: Temos $H^0(G; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2$, $H^0(S; \mathbb{Z}_2) = \bigoplus H^0(S_i; \mathbb{Z}_2) \simeq \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}_2$ e que $H^1(G, S; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$ que por hipótese é finitamente gerado. Assim pela Proposição 4.1.2 temos que $E'(G, S) =$

$$2 - r + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2).$$

Segue imediatamente da proposição o seguinte resultado:

Corolário 4.2.2 Se (G, S) é um PD^n -par, $S = \{S_i, i = 1, \dots, r\}$, com G finitamente apresentado e $[G : S_i] = \infty$, $i = 1, \dots, r$, então $r \leq 1 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$.

Exemplo 4.2.2 Seja $G = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. No Exemplo 3.4.11 vimos que G é um D^1 -grupo. Além disso, temos $H_1(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (ver Exemplo 4.2.1). Logo, a fim de que (G, S) seja um PD^2 -par o número máximo de subgrupos na família S é 3.

Vejamos agora a relação do invariante $E'(G, S)$ com a teoria de decomposição de grupos.

Pelas Proposições 2.5.3 e 2.5.4 temos que se $G = G_1 * T G_2$ com $G_1 \neq T \neq G_2$ então $[G : G_1] = [G : G_2] = \infty$ e se $G = G_1 * T_\delta$ então $[G : G_1] = \infty$. Logo, nestes casos, o invariante $E'(G, S)$ pode ser definido quando S é uma família qualquer de subgrupos de G_1 ou G_2 pois se S é um subgrupo de G_i , então $[G : S] = [G : G_i][G_i : S] = \infty$.

Na proposição abaixo daremos uma condição necessária para G se decompor sobre um subgrupo T .

Proposição 4.2.3 Sejam G um grupo, G_1, G_2, T subgrupos de G .

- i) Se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 * T G_2$ então $E'(G, \{G_1, G_2\}) = 1$.
- ii) Se G se decompõe sobre T na forma $G = G_1 * T_\delta$ então $E'(G, \{G_1\}) = 2$.

Demonstração:

- i) Temos que $H^0(G; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^G = \mathbb{Z}_2$ e $H^0(G_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^0(G_2; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^{G_1} \oplus \mathbb{Z}_2^{G_2} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$

Agora considerando a sequência exata curta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \oplus \mathbb{Z}_2(G/G_2) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$$

dada pela Proposição 2.5.1, temos que $\ker \varepsilon = \text{Im } \alpha \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$. Portanto $\Delta = \ker \varepsilon \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$.

Logo $H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) := H^0(G; \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\Delta, \mathbb{Z}_2)) \simeq H^0(G; \text{Hom}_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2(G/T); \mathbb{Z}_2)) \simeq H^0(T; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^T = \mathbb{Z}_2$. Assim, pela Proposição 4.1.2, $E(G, \{G_1, G_2\}, \mathbb{Z}_2) = 1 + \dim H^0(G, \mathbb{Z}_2) - \dim(H^0(G_1; \mathbb{Z}_2) \oplus H^0(G_2; \mathbb{Z}_2)) + \dim H^1(G, \{G_1, G_2\}, \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 2 + 1 = 1$.

ii) Considerando a sequência exata curta, dada pela Proposição 2.5.2,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}_2(G/T) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2(G/G_1) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0, \text{ temos } \Delta = \ker \varepsilon = \operatorname{Im} \alpha \simeq \mathbb{Z}_2(G/T).$$

$$\text{Assim } H^1(G, G_1; \mathbb{Z}_2) = H^0(G; \operatorname{Hom}(\Delta, \mathbb{Z}_2)) \simeq H^0(G; \operatorname{Hom}(\mathbb{Z}_2(G/T), \mathbb{Z}_2)) \simeq H^0(T; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2^T = \mathbb{Z}_2.$$

$$\text{Deste modo, pela Proposição 4.1.2, temos que } E(G, \{G_1\}; \mathbb{Z}_2) = 1 + \dim H^0(G; \mathbb{Z}_2) - \dim H^0(G_1; \mathbb{Z}_2) + \dim H_1(G, G_1; \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2. \quad \blacksquare$$

Corolário 4.2.3 *Sejam G um grupo e n um inteiro maior do que 1 de tal modo que $\dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 1$. Então:*

- i) *Se G_1 e G_2 são subgrupos de G tais que $(G; \{G_1, G_2\})$ é um PD^n -par, então $G \neq G_1 *_T G_2$ para qualquer subgrupo T de G_1 e G_2 .*
- ii) *Se G_1 é um subgrupo de G tal que $(G, \{G_1\})$ é um PD^n -par então $G \neq G_1 *_T \sigma$ para qualquer subgrupo T de G_1 .*

Demonstração:

i) Como $(G, \{G_1, G_2\})$ é um PD^n -par, então $H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) \simeq H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$.

$$\text{Além disso temos } H^0(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \text{ e } H^0(\{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

$$\text{Logo } E(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 2 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 1.$$

Assim, pela proposição, anterior $G \neq G_1 *_T G_2$ para qualquer T subgrupo de G_1 e G_2 .

ii) Como $(G, \{G_1\})$ é um PD^n -par, então $H^1(G, \{G_1\}; \mathbb{Z}_2) = H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2)$.

$$\text{Além disso } H^0(G; \mathbb{Z}_2) = H^0(G_1; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2.$$

$$\text{Logo } E(G, \{G_1\}; \mathbb{Z}_2) = 1 + 1 - 1 + \dim H_{n-1}(G; \mathbb{Z}_2) > 2.$$

Assim, pela, proposição, anterior $G \neq G_1 *_T \sigma$ para qualquer T subgrupo de G_1 . ■

Exemplo 4.2.3 *Sejam $G = \langle s \rangle * \langle t \rangle$, $S_1 = \langle s \rangle$, $S_2 = \langle t \rangle$ e $S = \langle sts^{-1}t^{-1} \rangle$.*

Vimos no Exemplo 4.2.1 que $H_1(G; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Logo $\dim H_1(G; \mathbb{Z}_2) = 2 > 1$.

Agora pelo Exemplo 3.4.17 (G, S) é um PD^2 -par. Logo pelo corolário anterior, $G \neq S *_T \delta$ para qualquer subgrupo T de S .

Além disso como $G = S_1 * S_2$ temos, pelo corolário anterior, que $(G, \{S_1, S_2\})$ não é um PD^2 -par.



4.3 O Invariante $\overline{E}(G, S)$

Estudaremos agora o invariante $E(G, S, M)$ no caso em que M é o $\mathbb{Z}_2G$ -módulo $\mathbb{Z}_2G$. Por simplicidade, denotaremos $E(G, S, \mathbb{Z}_2G)$ por $\overline{E}(G, S)$.

Deste modo temos que: $\overline{E}(G, S) = 1 + \dim \ker \text{res}_S^G$, onde G é um grupo, S é uma família de subgrupos de G com índice infinito em G e $\text{res}_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \rightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; \mathbb{Z}_2G)$ é a aplicação restrição.

Além das propriedades 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 temos também, neste caso particular, a seguinte propriedade:

Propriedade 4.3.1 *Sejam (G, S) um par grupo, $S = \{S_i, i \in I\}$, com $[G : S_i] = \infty, \forall i \in I$ e seja $\mathcal{R} = \{S_j \in S \text{ tal que } S_j \text{ é infinito}\}$. Então $\overline{E}(G, S) = \overline{E}(G, \mathcal{R})$.*

Demonstração: Se para qualquer $i \in I$, S_i for infinito temos que $S = \mathcal{R}$ donde segue o resultado.

Suponhamos então que exista $S_i \in S$ finito.

$$\begin{aligned} \text{Temos } H^1(S_i; \mathbb{Z}_2G) &= H^1(S_i; \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \\ &= H^1(S_i; \bigoplus_{g \in E} \text{Ind}_{\{1\}}^{S_i} g\mathbb{Z}_2) \text{ (pela Proposição 1.5.7)} \\ &= \bigoplus_{g \in E} H^1(S_i; \text{Ind}_{\{1\}}^{S_i} g\mathbb{Z}_2) \\ &= \bigoplus_{g \in E} H^1(S_i; \text{Coind}_{\{1\}}^{S_i} g\mathbb{Z}_2) \text{ (Proposição 1.5.4)} \\ &= \bigoplus_{g \in E} H^1(\{1\}, g\mathbb{Z}_2) = 0 \text{ (Proposição 2.1.7 (ii)).} \end{aligned}$$

Assim $\text{res}_i : H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \rightarrow H^1(S_i; \mathbb{Z}_2G)$ é a aplicação nula, donde concluímos que $\ker \text{res}_i = H^1(G; \mathbb{Z}_2G), \forall S_i \in S, S_i$ finito.

$$\begin{aligned} \text{Agora, pela Proposição 4.1.3, } \overline{E}(G, S) &= 1 + \dim \left(\left(\bigcap_{S_j \text{ finito}} \ker \text{res}_j \right) \cap \left(\bigcap_{S_j \text{ infinito}} \ker \text{res}_j \right) \right) = \\ &= 1 + \dim \left((H^1(G; \mathbb{Z}_2G)) \cap \left(\bigcap_{S_j \text{ infinito}} \ker \text{res}_j \right) \right) = 1 + \dim \left(\bigcap_{S_j \text{ infinito}} \ker \text{res}_j \right) = \overline{E}(G, \mathcal{R}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

O invariante $\overline{E}(G, S)$ também está relacionado com dualidade. Entre outras coisas, fornece uma condição necessária para que (G, S) seja um PD^n -par, como mostra a seguinte proposição:

Proposição 4.3.1: *i) Se (G, S) é um D^n -par com $[G : S] = \infty$ para todo $S \in S$ então temos que $\overline{E}(G, S) = 1$.*

ii) Se (G, S) é um par grupo com $[G : S] = \infty$, para todo $S \in \mathcal{S}$ e (G, T) é um D^n -par para algum $T \in \mathcal{S}$ ($n > 1$) então $\overline{E}(G, S) = 1$.

iii) Se G é um D^n -grupo com módulo dualizante C e $n > 1$ então $\overline{E}(G, S) = 1$ para toda família S de subgrupos de G com $[G : S] = \infty, \forall S \in \mathcal{S}$.

Demonstração:

i) Temos que:

$$\begin{aligned} H^1(G, S; \mathbb{Z}_2 G) &= H^1(G, S; \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) = H_{n-1}(G; C \otimes \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \\ &= H_{n-1}(G; \text{Ind}_{\{1\}}^G (C \otimes \mathbb{Z}_2)) = H_{n-1}(\{1\}; C \otimes \mathbb{Z}_2) = 0, \end{aligned}$$

pois $n > 1$ e que $H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) = 0$, (pela Proposição 1.5.9).

Assim da sequência exata longa da Proposição 3.2.1 (i), temos que $H^0(S; \mathbb{Z}_2 G) = 0$. Portanto, pela Proposição 4.1.2, $\overline{E}(G, S) = 1$.

ii) Pela Propriedade 4.1.1, temos que $\overline{E}(G, S) \leq \overline{E}(G, T)$. Mas por (i), $\overline{E}(G, T) = 1$ e como $\overline{E}(G, S) \geq 1$, segue que $\overline{E}(G, S) = 1$.

iii) Temos que

$$\begin{aligned} H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) &= H_{n-1}(G; C \otimes \mathbb{Z}_2 G) = H_{n-1}(G; \text{Ind}_{\{1\}}^G (C \otimes \mathbb{Z}_2)) \\ &= H_{n-1}(\{1\}; C \otimes \mathbb{Z}_2) = 0, \end{aligned}$$

pois $n > 1$. Deste modo $\ker \text{res}_S^G = \{0\}$ e portanto $\overline{E}(G, S) = 1$. ■

Exemplo 4.3.1 Seja $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ e $S = \langle aba^{-1}b^{-1} \rangle \simeq \mathbb{Z}$. Temos que (G, S) é um PD^2 -par. Logo $\overline{E}(G, S) = 1$, pela proposição anterior (i).

Exemplo 4.3.2 Sejam G e S como no exemplo anterior e seja $H = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$.

Pela proposição anterior (ii) $\overline{E}(G, \{S, H\}) = 1$.

Veremos agora que sob certas condições o invariante $\overline{E}(G, S)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞ . Para isto enunciaremos o seguinte lema cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Lema 4.3.1 Se G é um grupo infinito, finitamente gerado com $\text{vcd} G < \infty$, então qualquer $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de $H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$ tem dimensão 0, 1 ou ∞ quando considerado como $\mathbb{Z}_2$ -espaço

Proposição 4.3.2 *Seja (G, S) um par grupo com $[G : S] = \infty$, para todo $S \in S$. Se G é finitamente gerado com $\text{vcd} G < \infty$, então $\overline{E}(G, S)$ assume somente os valores 1, 2 ou ∞ .*

Demonstração: Temos que $\text{res}_{S_i}^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \rightarrow H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G)$ é um $\mathbb{Z}_2 G$ -homomorfismo com $H^1(-; \mathbb{Z}_2 G)$ visto como $\mathbb{Z}_2 G$ -módulo com a ação à direita $[f]g = [fg]$ onde $(fg)(x) = f(x)g$.

Logo $\text{res}_S^G = (\text{res}_{S_i}^G)_{i \in I}$ é um $\mathbb{Z}_2 G$ -homomorfismo e daí $\ker \text{res}_S^G$ é um $\mathbb{Z}_2 G$ -submódulo de $H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$. Pelo lema anterior, $\ker \text{res}_S^G$ tem dimensão 0, 1 ou ∞ , o que prova a proposição. ■

Estamos interessados agora em estudar o invariante $\overline{E}(G, S)$ no caso em que G se decompõe sobre um subgrupo finito T de G e $S = \{S_i, i \in I\}$ é uma família de subgrupos com cada $S_i \subset G_1$ ou G_2 se $G = G_1 *_T G_2$ ou cada $S_i \subset G_1$ se $G_1 *_T \theta$. Pelas proposições 2.5.3 e 2.5.4, não precisamos supor que $[G : S_i] = \infty$ para todo $i \in I$ pois $[G : S_i] = [G : G_i][G_i : S_i] = \infty$.

Primeiramente veremos o caso em que G_1 e G_2 são finitos. Para isto necessitaremos do seguinte resultado que enunciaremos sem demonstração.

Lema 4.3.3 *Seja G um grupo. Se G se decompõe sobre um subgrupo finito então $H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \neq 0$.*

Demonstração: [21]. ■

Com base nisto temos a seguinte proposição:

Proposição 4.3.3 *Seja (G, S) um par grupo com $S = \{S_i, i \in I\}$ e $[G : S_i] = \infty, \forall i \in I$. Se $G = G_1 *_T G_2$ com T, G_1 e G_2 finitos e cada S_i contido em G_1 ou G_2 ou se $G = G_1 *_T \theta$ com G_1, T finitos e $S_i \subset G_1, \forall i \in I$, então $\overline{E}(G, S) \geq 2$.*

Demonstração Pela Fórmula de Mackey (ver Proposição 1.5.7) $\text{Res}_{S_i}^G \mathbb{Z}_2 G = \text{Res}_{S_i}^G \text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2 = \bigoplus_{g \in E} \text{Ind}_{\{1\}}^{S_i} g \mathbb{Z}_2$ onde E é um conjunto de representantes para as classes duplas $Sg\{1\} = Sg$.

$$\begin{aligned}
\text{Logo } H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G) &= H^1(S_i; \bigoplus_{g \in E} \text{Ind}_{\{1\}}^{S_i} g \mathbb{Z}_2) \\
&= \bigoplus_{g \in E} H^1(S_i; \text{Ind}_{\{1\}}^{S_i} g \mathbb{Z}_2) \\
&= \bigoplus_{g \in E} H^1(S_i; \text{Coind}_{\{1\}}^{S_i} g \mathbb{Z}_2) \text{ (pois } S_i \text{ é finito)} \\
&= \bigoplus_{g \in E} H^1(\{1\}; g \mathbb{Z}_2) = 0
\end{aligned}$$

Deste modo $\text{res}_S^G : H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \rightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; \mathbb{Z}_2 G)$ é a aplicação nula e assim temos $\overline{E}(G, \mathcal{S}) = 1 + \dim H^1(G; \mathbb{Z}_2 G)$.

Portanto, pelo lema anterior $\overline{E}(G, \mathcal{S}) \geq 2$. ■

Exemplo 4.3.3 Sejam $G_1 = \langle a; a^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$, $G_2 = \langle b; b^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ e $G = G_1 * G_2 \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2$ (grupo diedral infinito). Então $\overline{E}(G, \mathcal{S}) \geq 2$, onde $\mathcal{S} = \{S_i; i \in I \text{ e } S_i \subset G_1 \text{ ou } S_i \subset G_2\}$.

Exemplo 4.3.4 Seja $G_1 = \{1\}$ e $G = \{1\} *_{\{1\}, \text{id}} \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$. Então $\overline{E}(G, \{S_i = G_1, i \in I\}) \geq 2$.

Veremos nos próximos resultados como se comporta o invariante $\overline{E}(G, \mathcal{S})$ nos casos em que $G = G_1 *_T G_2$, com G_1 e G_2 infinitos ou $G = G_1 *_T \theta$ com G_1 infinito.

Proposição 4.3.4i) Se $G = G_1 *_T G_2$, com T finito e G_1, G_2 infinitos então

$$\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = \infty.$$

ii) Se $G = G_1 *_T \theta$ com T finito e G_1 infinito então $\overline{E}(G, G_1) = \infty$.

Demonstração: Como G é infinito, temos que $H^0(G, \mathbb{Z}_2 G) = (\text{Ind}_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2)^G = 0$ (Proposição 1.5.9).

Além disso temos, usando a Fórmula de Mackey, que $H^0(G_i; \mathbb{Z}_2 G) = H^0(G_i; \bigoplus_{g \in E} \text{Ind}_{\{1\}}^{G_i} g \mathbb{Z}_2) = \bigoplus_{g \in E} H^0(G_i; \text{Ind}_{\{1\}}^{G_i} g \mathbb{Z}_2) = 0$, pois G_i também é infinito.

Daí a sequência exata longa dada na Proposição 3.2.1 (i), toma a forma:

$$0 \rightarrow H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2 G) \rightarrow H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \xrightarrow{\text{res}_S^G} H^1(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \oplus H^1(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \rightarrow \dots$$

e assim $\ker \text{res}_S^G \simeq H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2 G)$.

Agora considerando E' um conjunto de representantes para as classes Tg , $g \in G$ e lembrando que se $G = G_1 *_T G_2$ então pela Proposição 2.5.1, $\Delta \simeq \mathbb{Z}_2(G/T)$ temos:

$$\begin{aligned}
H^1(G, \{G_1, G_2\}, \mathbb{Z}_2 G) &:= H^0(G; \text{Hom}(\Delta, \mathbb{Z}_2 G)) \\
&= H^0(G; \text{Hom}(\mathbb{Z}_2(G/T), \mathbb{Z}_2 G))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= H^0(T, \mathbb{Z}_2 G) = H^0(T, \bigoplus_{g \in E'} \text{Ind}_{\{1\}}^T g \mathbb{Z}_2) \\
&= \bigoplus_{g \in E'} H^0(T, \text{Ind}_{\{1\}}^T g \mathbb{Z}_2) \\
&= \bigoplus_{g \in E'} H^0(\{1\}, g \mathbb{Z}_2) \simeq \bigoplus_{g \in E'} g \mathbb{Z}_2.
\end{aligned}$$

Como E' é infinito temos $\dim H^1(G, \{G_1, G_2\}; \mathbb{Z}_2 G) = \infty$.

Logo temos que $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = \infty$.

ii) Usando o mesmo raciocínio do item (i) prova-se que $H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) = H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) = 0$ e $H^1(G, G_1; \mathbb{Z}_2 G) = \bigoplus_{g \in E} g \mathbb{Z}_2$, onde E é um conjunto de representantes para as classes Tg , $g \in G$.

Novamente, como E é infinito concluímos que $\overline{E}(G, G_1) = \infty$. ■

Corolário 4.3.1 *Seja (G, S) um par grupo com $S = \{S_i, i \in I\}$. Suponhamos que G se decompõe sobre um subgrupo finito T .*

i) *Se $G = G_1 *_T G_2$ com G_1, G_2 infinitos e cada S_i está contido em G_1 ou G_2 então $\overline{E}(G, S) = \infty$.*

ii) *Se $G = G_1 *_T \emptyset$, com G_1 infinito e cada S_i está contido G_1 , então $\overline{E}(G, S) = \infty$.*

Demonstração:

i) Consideremos as subfamílias $S_1 = \{S_i, i \in I' \subset I; S_i \subset G_1\}$ e $S_2 = \{S_j, j \in J \subset I; S_j \subset G_2\}$ de S .

Portanto $S = S_1 \cup S_2$.

Sejam $S'_1 = \{R_i = G_1, i \in I'\}$ e $S'_2 = \{R_j = G_2, j \in J\}$.

Se $S_1 = \emptyset$ temos $S_i \subset G_2, \forall i \in I$. Logo usando as propriedades 4.1.1, 4.1.2 e 4.1.3 temos $\overline{E}(G, S) = \overline{E}(G, S_2) \geq \overline{E}(G, S'_2) = \overline{E}(G, G_2) \geq \overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = \infty$, pela proposição anterior.

Analogamente mostra-se que $\overline{E}(G, S) = \infty$ se $S_2 = \emptyset$.

Suponhamos agora $S_1 \neq \emptyset$ e $S_2 \neq \emptyset$.

Deste modo temos, usando novamente as propriedades 4.1.1 e 4.1.3, que

$$\overline{E}(G, S) = \overline{E}(G, S_1 \cup S_2) \geq \overline{E}(G, S'_1 \cup S'_2) = \overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = \infty.$$

ii) Seja $S' = \{R_i = G_1, i \in I\}$. Assim usando as propriedades 4.1.2 e 4.1.3 temos

$$\overline{E}(G, S) \geq \overline{E}(G, S') = \overline{E}(G, G_1) = \infty. \quad \blacksquare$$

Exemplo 4.3.5 *Sejam $S = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $H = \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e $G = \langle a \rangle * \langle b \rangle \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Então $\overline{E}(G, \{S, H\}) = \overline{E}(G, \{S\}) = \overline{E}(G, \{H\}) = \infty$. Em particular $(G, \{S, H\})$, $(G, \{S\})$ e $(G, \{H\})$ não são D^2 -pares, pela*



proposição 4.3.1.

Os próximos resultados nos mostra o comportamento do invariante $\overline{E}(G, \mathcal{S})$ no caso em que $G = G_1 *_{\mathcal{T}} G_2$ com apenas um dos G'_i s finitos.

Proposição 4.3.5 Se G se decompõe sobre um subgrupo T na forma $G_1 *_{\mathcal{T}} G_2$ com apenas um dos subgrupos G_1 ou G_2 finitos, então $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) \geq 2$.

Demonstração: Suponhamos que G_1 é finito e G_2 é infinito. Consideremos a sequência de Mayer-Vietoris para $G = G_1 *_{\mathcal{T}} G_2$ e $M = \mathbb{Z}_2 G$ (Teorema 2.5.3)

$$0 \rightarrow H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) \rightarrow H^0(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \oplus H^0(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \xrightarrow{r} H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) \xrightarrow{\delta} \\ \xrightarrow{\delta} H^1(G; \mathbb{Z}_2 G) \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} res_{G_1}^{G_1} & res_{G_2}^{G_2} \end{smallmatrix} \right)} H^1(G_1; \mathbb{Z}_2 G) \oplus H^1(G_2; \mathbb{Z}_2 G) \rightarrow \dots$$

onde $r(f_1, f_2) = res_T^{G_1} f_1 - res_T^{G_2} f_2$.

Como G e G_2 são infinitos, temos que $H^0(G; \mathbb{Z}_2 G) = H^0(G_2; \mathbb{Z}_2 G) = 0$. Assim temos a seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow H^0(G_1, \mathbb{Z}_2 G) \xrightarrow{res_T^{G_1}} H^0(T; \mathbb{Z}_2 G) \xrightarrow{\delta} Im \delta = \ker(res_{G_1}^{G_1}, res_{G_2}^{G_2}) \rightarrow 0$$

Mas $H^0(G_1, \mathbb{Z}_2 G) \simeq (\mathbb{Z}_2 G)^{G_1}$ e $H^0(T, \mathbb{Z}_2 G) \simeq (\mathbb{Z}_2 G)^T$ e temos a inclusão $(\mathbb{Z}_2 G)^{G_1} \xrightarrow{j} (\mathbb{Z}_2 G)^T$. Logo podemos construir o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^0(G_1, \mathbb{Z}_2 G) & \xrightarrow{\psi_1} & (\mathbb{Z}_2 G)^{G_1} \\ res_T^{G_1} \downarrow & & \downarrow j \\ H^0(T, \mathbb{Z}_2 G) & \xrightarrow{\psi_2} & (\mathbb{Z}_2 G)^T \end{array}$$

onde $\psi_i(f) = f(1)$, $i = 1, 2$ são isomorfismos.

Com isso verifica-se facilmente que $res_T^{G_1}$ é sobrejetora se, e somente se, j é sobrejetora. Temos ainda que $\mathbb{Z}_2 G$ pode ser identificado com o conjunto formado pelos subconjuntos finitos de PG , a saber, FG (ver Proposição 1.5.6).

Daí podemos ver $j : (FG)^{G_1} \rightarrow (FG)^T$ tal que $j(A) = A$ (a inclusão).

Agora, temos que T é finito e $tT = T, \forall t \in T$, logo $T \in (FG)^T$. Mas $T \notin (FG)^{G_1}$, pois se $T \in (FG)^{G_1}$ teríamos $g_1 T = T, \forall g_1 \in G_1$ e daí $G_1 = T$, que pela definição 2.5.4 é uma contradição.

Deste modo j e logo $res_T^{G_1}$, não é sobrejetora.

Agora $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = 1 + \dim(\ker(\text{res}_{G_1}^G) \cap \ker(\text{res}_{G_2}^G)) = 1 + \dim \ker(\text{res}_{G_1}^G, \text{res}_{G_2}^G)$, pela Proposição 4.1.3.

Portanto se $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) = 1$ temos que $\ker(\text{res}_{G_1}^G, \text{res}_{G_2}^G) = 0$ e portanto $\text{Im} \delta = 0$ e daí $\text{res}_T^{G_1}$ seria um isomorfismo, o que não ocorre.

Logo $\overline{E}(G, \{G_1, G_2\}) \geq 2$. ■

Corolário 4.3.2: *Se $G = G_1 *_T G_2$ com apenas um dos subgrupos G_1 ou G_2 finitos e cada S_i contido em G_1 ou G_2 então $\overline{E}(G, S) \geq 2$.*

Demonstração: Análoga à dada no Corolário 4.3.1 (i). ■

Exemplo 4.3.6 Sejam $G_1 = \langle a \rangle \simeq \mathbb{Z}$, $G_2 = \langle b; b^2 = 1 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2$ e $G = G_1 * G_2 \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$. Então $\overline{E}(G, S) \geq 2$, onde $S = \{S_i; i \in I \text{ e } S_i \subset G_1 \text{ ou } S_i \subset G_2\}$.

Bibliografia

- [1] Andrade, M.G.C.; *Invariantes Relativos e Dualidade*, Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, Campinas, 1992.
- [2] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *Cohomologia Relativa de Grupos e Levantamento de Extensões*, Métrica, Estudos e Pesquisas em Matemática, Nº 54 - Ibilce - Unesp - SJRP, 1995.
- [3] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A Relative Cohomological Invariant for Pairs of Groups*, Manuscripta Math. 83, pp. 1-18, 1994.
- [4] Andrade, M.G.C.; Fanti, E.L.C.; *A Relative Cohomological Invariant for Pairs of Groups II* (em preparação).
- [5] Bieri, R.; *Homological Dimension of Discrete Groups*, Queen Mary College Math Notes, Queen Mary College, London, 1976.
- [6] Bieri, R.; Eckmann, B.; *Relative Homology and Poincaré Duality for Group Pairs*, Journal of Pure and Applied Algebra 13, pp. 277-319, 1978.
- [7] Brown, K.S.; *Cohomology of Groups*, G.T.M. 87 Springer Verlag, New York, 1982.
- [8] Dicks, W.; Dunwood, M.; *Groups Acting on Graphs*, Cambridge University Press, 1988.
- [9] Eckmann, B.; Müller; *Poincaré Duality Groups of Dimension Two*, Comm. Math. Helvetici 55, pp. 510-520, 1980.
- [10] Eckmann, B.; Linell, P.A.; *Poincaré Duality Groups of Dimension Two II*, Comm. Math. Helv. 58, pp. 111-114, 1983.
- [11] Eilenberg, S.; *Homology of Spaces with Operators I*, Trans. Amer. Math. Soc. 61, pp. 378-417, 1947; errata 62 (1947) 548.



- [12] Fanti, E.L.C.; *Invariantes Cohomológicos e Decomposição de Grupos*, Tese de Doutorado, ICMSC - USP, São Carlos, 1992.
- [13] Greenberg, M.J.; *Lectures on Algebraic Topology*, W.A., Benjamin, Inc., 1966.
- [14] Hu, S.T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden - Day Series in Mathematics, Holden Day Inc. São Francisco, 1968.
- [15] Lima, E.L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1977.
- [16] MacLane, S.; *Homology*, Springer Verlag, Berlin, 1967.
- [17] Massey, W.S.; *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer Verlag, New York Inc., 1967.
- [18] Ribes, L.; *On a Cohomology Theory for Pairs of Groups*, Proc. of the A.M.S. 21, pp. 230-234, 1969.
- [19] Robinson, D.J.S.; *A Course in the Theory of Groups*, G.T.M. 80, Springer, Berlin, 1982.
- [20] Schubert, H.; *Topology*, MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.
- [21] Stallings, J.R.; *On Torcion Free Groups with Infinitely Many Ends*, Amm of Math. 88 pp. 312-334, 1968.
- [22] Vick, J.W.; *Homology Theory*, Academic Press, Inc., 1973.



