



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Faculdade de Ciências e Tecnologia  
Câmpus de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

## Estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e aplicações em modelos epidemiológicos

Elias Oliveira Vieira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva



Presidente Prudente, fevereiro de 2024.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA**

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

**Estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e  
aplicações em modelos epidemiológicos**

Elias Oliveira Vieira dos Santos

Orientador: Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, fevereiro de 2024.



S237e Santos, Elias Oliveira Vieira dos  
Estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e aplicações em  
modelos epidemiológicos / Elias Oliveira Vieira dos Santos. --  
Presidente Prudente, 2024  
162 p. : il., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),  
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente  
Orientador: Fabiano Borges da Silva

1. Equações Diferenciais Estocásticas. 2. Estabilidade. 3. Método  
de Lyapunov. 4. Modelo SIR. 5. Covid-19. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca da Faculdade de  
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

**CERTIFICADO DE APROVAÇÃO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e aplicações em modelos epidemiológicos

**AUTOR:** ELIAS OLIVEIRA VIEIRA DOS SANTOS

**ORIENTADOR:** FABIANO BORGES DA SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional, pela Comissão Examinadora:

Documento assinado digitalmente  
 **FABIANO BORGES DA SILVA**  
Data: 28/02/2024 19:26:17-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. FABIANO BORGES DA SILVA (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - FC/Unesp

Prof. Dr. LOURIVAL RODRIGUES DE LIMA (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática / Escuela Superior Politécnica del Litoral – ESPOL

Profa. Dra. TATIANA MIGUEL RODRIGUES (Participação Virtual)  
Departamento de Matemática / Faculdade de Ciências de Bauru - FC/Unesp

Presidente Prudente, 28 de fevereiro de 2024

*Dedico este trabalho à minha esposa, Daiane, meu porto seguro, companheira de vida,  
bem como nesta jornada acadêmica. E à minha filha, Rafaela.*

---

## Agradecimentos

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, processo número 2021/11857-6, pela concessão da bolsa regular de mestrado que possibilitou a execução desta pesquisa. As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do autor e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Agradeço ao meu orientador, professor Dr. Fabiano Borges da Silva, pela dedicação e paciência durante toda a orientação deste trabalho de mestrado, sobretudo nos momentos de adversidades e desafios que atravessei, onde sempre pude contar com seu apoio e incentivo. Certamente, a conclusão deste trabalho só foi possível devido a sua empatia e apoio. Juntamente com todo o rigor matemático do cálculo estocástico, tive a sorte de ter sob supervisão nesse período do mestrado uma pessoa que fez jus as palavras de Carl Jung: “Conheça todas as teorias, domine todas as técnicas, mas ao tocar uma alma humana, seja apenas outra alma humana”. Estendo esse sentimento de imensa gratidão aos professores do Departamento de Matemática, da Faculdade de Ciências, Unesp Bauru, em nome do professor Associado Rubens de Figueiredo Camargo, na posição da chefia do departamento, que organizou uma “vaquinha” online para que fosse possível arrecadarmos fundos para minha cirurgia de catarata, em ambos os olhos (aos 40 anos), onde a espera pelo SUS era grande, o quadro se avançava e dificultava o prosseguimento dos estudos. O plano de aguardar duas ou três semanas para ver o quanto arrecadava surpreendeu com uma imensa campanha dos colegas de graduação, calouros e veteranos, colegas formados, atuantes na educação básica e estudantes na pós-graduação, professores do PosMAC da Unesp de Presidente Prudente, amigos, familiares e professores e pesquisadores de todo Brasil que se solidarizaram e contribuíram, ultrapassando a meta em apenas cinco dias. Minha gratidão à todos. Foram como anjos enviados em um momento de grande desespero. Em pouco tempo já estava restabelecido podendo retornar com foco total para finalizar esta pesquisa.

Agradeço ao Centro de Psicologia Aplicada - CPA da Unesp / Bauru, na pessoa do hoje psicólogo Edilson Antonio de Souza Rodrigues, pelo atendimento e todo acompanhamento que me proporcionou superar os obstáculos e ultrapassar as grandes barreiras que se apresentaram nesse período, me ensinando a encontrar formas de vencer as adversidades.

Agradeço à coordenação do programa em Matemática Aplicada e Computacional - PosMAC, na pessoa do professor Associado Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta e à Assistente Administrativa Cinthia Thiemi Onishi, da Seção Técnica de Pós-Graduação, da Unesp de Presidente Prudente, pelo atendimento impecável em todas as burocracias ao longo dessa trajetória do mestrado. O PosMAC sendo um programa interunidades nos câmpus de Presidente Prudente e Bauru, estendo meus agradecimentos aos Servidores Técnicos Administrativos de Bauru, Christian Ferreira Oivane, Daniel Buso de Lima e Danilo Pires Maciel, por todo suporte necessário no Departamento de Matemática do câmpus de Bauru.

Sou grato pelos colegas mestrandos no Pos-MAC em Bauru. Tive a sorte de ingressar no programa em 2022 com quatro colegas da graduação: Bruno, Fernanda, Beatriz e Ninuma. Além da Juliana e Muriel da física. Ter com quem partilhar durante essa trajetória certamente fez a caminhada mais leve. Ademais, os veteranos do PosMAC, colegas da graduação: Amanda, Ana Laura, Giovanna, Mylena e Milena. Minha gratidão pela partilha e ajuda com o caminho que já haviam trilhado. E às ingressantes no programa em 2023, Marina e Bruna, foi um prazer poder estar com vocês nesse último ano no PosMAC.

Agradeço a todos os professores que contribuíram em minha formação, nas disciplinas do PosMAC, de Bauru e de Presidente Prudente. Bem como os professores da graduação, no curso em Licenciatura em Matemática na Unesp Bauru, pelos ensinamentos e incentivo que proporcionaram chegar até aqui. Agradeço também aos autores referenciados nesse trabalho. Todos foram gigantes sobre os quais nos apoiamos, como bem nos ensinou Newton.

Agradeço aos professores participantes da banca de qualificação, professor Associado Rubens de Figueiredo Camargo e professora Associada Tatiana Miguel Rodrigues, pela disponibilidade na participação e valiosas contribuições sugeridas que proporcionou aprimorar nosso trabalho.

Agradeço aos professores participantes desta banca de defesa, professor Dr. Lourival Rodrigues de Lima e professora Associada Tatiana Miguel Rodrigues, pela disponibilidade na participação desta e grandes contribuições que forneceram ao nosso trabalho.

Por fim, mas de extrema importância, meu agradecimento especial à minha família: minha esposa, Daiane, minha filha, Rafaela, e meus pais, Elizeu e Ester, por todo apoio, incentivo e por sempre acreditarem em mim.

*“Os que se encantam com a prática sem a ciência são como os timoneiros  
que entram no navio sem timão nem bússola, nunca tendo certeza do seu destino.”*

***Leonardo da Vinci***

---

# Resumo

O presente trabalho apresenta uma pesquisa de mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, onde são apresentados os tópicos de estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e uma aplicação inicial teórica estudada, em crescimento populacional, com uso de simulações numéricas com programação em linguagem Python para gerar gráficos e melhor entender o comportamento do modelo estudado. Para isso, primeiramente são apresentados os conceitos de estabilidade via função de Lyapunov em sistemas determinísticos, contendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), os quais foram necessários para um melhor embasamento do caso estocástico. Assim, são apresentados noções básicas de probabilidade e processos estocásticos, conceitos de integração estocástica (contendo integral de Itô e integral de Wiener), fórmula de Itô, e Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs), para então ser abordado a estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e a aplicação inicial apresentada. Ademais, é apresentado o estudo de estabilidade estocástica em modelagem epidemiológica, utilizando modelos SIR estocásticos, a partir dos quais é apresentado, como uma das contribuições deste trabalho, a demonstração de uma proposição que garante a estabilidade do sistema, sob certas condições. É apresentada simulações numéricas em linguagem Python, com uso do método de Milstein, de modo a verificar através dos gráficos, as condições de estabilidades demonstradas analiticamente. Além disso, pode ser considerada uma segunda contribuição deste trabalho, a estimação de parâmetros do modelo SIRD Estocástico, com os dados reais do início da pandemia de Covid-19 na cidade de Bauru e Rio Claro, de modo a permitir a se fazer previsões do número de infectados, comparando os modelos SIRD Determinístico e Estocástico. Dessa forma, foi possível mostrar que o modelo estocástico pode trazer melhores resultados e ser mais assertivo em previsões epidemiológicas. Ademais, são apresentados nos Apêndices todos os códigos, em linguagem Python, das simulações numéricas apresentadas ao longo do trabalho, de modo que o leitor possa acessá-los na plataforma Google Colab, com a possibilidade de modificá-los, estendê-los ou adaptá-los, segundo suas necessidades em pesquisas futuras.

Palavras-Chave: *Equações Diferenciais Estocásticas, Estabilidade, Método de Lyapunov, Modelo SIR, Covid-19.*

# Abstract

---

This work presents a master's degree research in Applied and Computational Mathematics, that the topics of stochastic stability via Lyapunov functions are presented and an initial theoretical application studied, in population growth, in the use of numerical simulations with Python programming language to generate graphs and better to understand the behavior of the studied model. For that, firstly, the concepts of stability via the Lyapunov function in deterministic systems are presented, containing Ordinary Differential Equations (ODEs), which were necessary for a better basis of the stochastic case. Posteriorly, basic notions of probability and Stochastic Processes, concepts of Stochastic Integration (containing Itô integral and Wiener integral), Itô formula, and Stochastic Differential Equations (SDEs) are presented, and stochastic stability is then addressed via Lyapunov functions and the initial application presented. In addition, the study of stochastic stability in epidemiological modeling is presented, using stochastic SIR models, from which, as one of the contributions of this work, the demonstration of a proposition that guarantees the stability of the system under certain conditions. Numerical simulations in Python language, using the Milstein method, in order to verify, through graphs, the analytically demonstrated stability conditions. Besides, a second contribution of this work can be considered, that the parameter estimation of the Stochastic SIRD model was carried out, with real data from the beginning of the Covid-19 pandemic in the cities Bauru and Rio Claro, in order to allow for vary the number of infected people, comparing the Deterministic and Stochastic SIRD models. In this way, it was possible to show that the stochastic model can bring better results and be more accurate in epidemiological predictions. Furthermore, all the codes, in Python language, of the numerical simulations showed throughout the work are presented in the Appendices, so that the reader can access them on the Google Colab platform, with the possibility of modifying, extending or adapting them according to your needs in future research.

Keywords: *Stochastic Differential Equations, Stability, Lyapunov Method, SIR model, Covid-19.*



---

## Lista de Figuras

|     |                                                                                                      |    |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 | Simulação numérica do Movimento Browniano . . . . .                                                  | 34 |
| 1.2 | Simulações numéricas do Movimento Browniano: 4 trajetórias . . . . .                                 | 35 |
| 1.3 | Simulações numéricas Movimento Browniano: 10 trajetórias e Esperança                                 | 35 |
| 1.4 | Simulações numéricas do Movimento Browniano: 100 trajetórias e Esperança                             | 36 |
| 2.1 | Simulação numérica do crescimento populacional utilizando os parâmetros<br>(2.21) . . . . .          | 61 |
| 2.2 | Simulação numérica do crescimento populacional utilizando os parâmetros<br>(2.22) . . . . .          | 61 |
| 3.1 | Diagrama do modelo SIR . . . . .                                                                     | 64 |
| 3.2 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.17) . .                                 | 79 |
| 3.3 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.18) . .                                 | 80 |
| 3.4 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.19) . .                                 | 81 |
| 3.5 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.20) . .                                 | 82 |
| 3.6 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.21) . .                                 | 83 |
| 3.7 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.22) . .                                 | 84 |
| 3.8 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.23) . .                                 | 85 |
| 3.9 | Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.24) . .                                 | 86 |
| 4.1 | Diagrama do modelo SIRD . . . . .                                                                    | 88 |
| 4.2 | Modelo SIRD com parâmetros da cidade de Bauru estimados no tempo<br>$t = 62$ . . . . .               | 91 |
| 4.3 | Gráfico de dispersão dos dados reais (62 dias analisados) e curva de<br>Infectados - Bauru . . . . . | 92 |

|      |                                                                                                                                                                |     |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4  | Previsão de infectados (dia $t = 90$ ) modelo SIRD Determinístico vs Dados Reais - Bauru . . . . .                                                             | 93  |
| 4.5  | Gráfico de dispersão de Infectados com dados reais (62 dias analisados) - Bauru . . . . .                                                                      | 94  |
| 4.6  | Modelo SIRD Estocástico com 10 simulações e Esperança, parâmetros a partir de dados da cidade de Bauru no tempo $t = 62$ e $\sigma_i$ da Tabela 4.3            | 96  |
| 4.7  | Modelo SIRD Estocástico com 50 simulações e Esperança, parâmetros a partir de dados da cidade de Bauru no tempo $t = 62$ e $\sigma_i$ da Tabela 4.3            | 97  |
| 4.8  | Erro no Google Colab ao compilar código com mil Simulações do modelo SIRD Estocástico . . . . .                                                                | 97  |
| 4.9  | Previsão de infectados para o dia $t = 90$ : modelo SIRD Determinístico vs SIRD Estocástico (Esperança de dez mil simulações) vs Dados Reais - Bauru . . . . . | 99  |
| 4.10 | Comparação entre estimativas de Infectados vs Dados Reais - Covid-19 em Bauru . . . . .                                                                        | 101 |
| 5.1  | Modelo SIR, contendo parâmetro $\mu$ , com parâmetros estimados com dados de Bauru . . . . .                                                                   | 107 |
| K.1  | Modelo SIRD com parâmetros a partir de dados da cidade de Rio Claro no tempo $t = 55$ . . . . .                                                                | 157 |
| K.2  | Gráfico de dispersão dos dados reais (55 dias analisados) - Rio Claro . .                                                                                      | 157 |
| K.3  | Gráfico de dispersão dos dados reais (55 dias analisados) e curva de Infectados do modelo SIRD - Rio Claro . . . . .                                           | 158 |
| K.4  | Gráfico de dispersão de Infectados - dados reais (55 dias analisados) - Rio Claro . . . . .                                                                    | 159 |
| K.5  | Modelo SIRD Estocástico com parâmetros a partir de dados da cidade de Rio Claro no tempo $t = 55$ e $\sigma_i = 5 \cdot 10^{-8}$ . . . . .                     | 160 |
| K.6  | Gráfico de dispersão dos dados reais (55 dias analisados) e curva de Infectados do modelo SIRD Determinístico e Estocástico - Rio Claro . .                    | 161 |

---

## Lista de Tabelas

|     |                                                                                                                                                                                                  |     |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 | Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia . . . . .                                                                                                                              | 89  |
| 4.2 | Parâmetros estimados, no tempo $t = 62$ , do modelo SIRD Det. para cidade de Bauru . . . . .                                                                                                     | 91  |
| 4.3 | Parâmetros estocásticos estimados para o modelo SIRD para a cidade de Bauru . . . . .                                                                                                            | 95  |
| 4.4 | Comparação entre estimativas do número de infectados no dia $t = 90$ em Bauru do modelo determinístico e com dez mil simulações numéricas do modelo estocástico . . . . .                        | 98  |
| 4.5 | Comparação dos Infectados em Bauru: Dados reais (não utilizados na estimação), modelo SIRD Determinístico e Esperança de dez mil simulações do modelo SIRD Estocástico do dia 63 ao 90 . . . . . | 100 |
| 5.1 | Dados de Nascimentos e Óbitos no ano de 2020 em Bauru . . . . .                                                                                                                                  | 103 |
| 5.2 | Óbitos por Covid-19 no ano de 2020 em Bauru . . . . .                                                                                                                                            | 104 |
| 5.3 | Taxas de Nascimento e Óbito no ano de 2020 em Bauru . . . . .                                                                                                                                    | 105 |
| 5.4 | Parâmetros estimados, no tempo $t = 62$ , do modelo SIR para cidade de Bauru . . . . .                                                                                                           | 106 |
| 5.5 | Condições iniciais e parâmetros estimados (no tempo $t = 62$ ) do modelo SIRD - Bauru . . . . .                                                                                                  | 106 |
| D.1 | Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia. Tabela completa parte 1. . . . .                                                                                                      | 127 |
| D.2 | Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia. Tabela completa parte 2. . . . .                                                                                                      | 128 |
| K.1 | Dados relativos à Covid-19 em Rio Claro no início da pandemia. . . .                                                                                                                             | 155 |

|     |                                                                                                            |     |
|-----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| K.2 | Parâmetros estimados, no tempo $t = 55$ , do modelo SIRD para cidade<br>de Rio Claro . . . . .             | 156 |
| K.3 | Parâmetros estocásticos utilizados para modelo SIRD Estocástico - Rio<br>Claro . . . . .                   | 159 |
| K.4 | Estimativas para o número de infectados no dia $t = 76$ em Rio Claro .                                     | 160 |
| K.5 | Previsão de Infectados pelo modelo SIRD Determinístico, Estocástico e<br>Dados Reais - Rio Claro . . . . . | 161 |

---

## Lista de Siglas

**EDOs** Equações Diferenciais Ordinárias

**EDEs** Equações Diferenciais Estocásticas

**SIR** Modelo Epidemiológico Suscetíveis-Infectados-Removidos

**SIRD** Modelo Epidemiológico Suscetíveis-Infectados-Recuperados-Mortos

**Covid-19** (Co)rona (vi)rus (d)isease - 2019

**IBGE** Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística

---

# Conteúdo

|                                                                   |           |
|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Resumo</b>                                                     | <b>8</b>  |
| <b>Abstract</b>                                                   | <b>9</b>  |
| <b>Lista de Figuras</b>                                           | <b>11</b> |
| <b>Lista de Tabelas</b>                                           | <b>13</b> |
| <b>Lista de Siglas</b>                                            | <b>14</b> |
| <b>Introdução</b>                                                 | <b>18</b> |
| <b>1 Preliminares de Cálculo Estocástico</b>                      | <b>23</b> |
| 1.1 Uma introdução à teoria de probabilidade . . . . .            | 23        |
| 1.1.1 Variáveis aleatórias . . . . .                              | 27        |
| 1.1.2 Esperança e distribuição gaussiana . . . . .                | 27        |
| 1.2 Uma introdução aos processos estocásticos . . . . .           | 29        |
| 1.2.1 Movimento Browniano . . . . .                               | 31        |
| 1.2.2 Martingales . . . . .                                       | 36        |
| 1.2.3 Processo de Markov . . . . .                                | 37        |
| 1.3 Integral de Itô . . . . .                                     | 38        |
| 1.4 Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs) . . . . .           | 43        |
| 1.4.1 Uma abordagem heurística para o modelo de difusão . . . . . | 43        |
| 1.4.2 Definição formal de EDEs . . . . .                          | 45        |
| <b>2 Estabilidade via funções de Lyapunov</b>                     | <b>47</b> |
| 2.1 Caso determinístico . . . . .                                 | 47        |

|          |                                                                                                                                 |            |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.1.1    | Método de Lyapunov . . . . .                                                                                                    | 47         |
| 2.1.2    | Aplicações da análise de estabilidade via funções de Lyapunov<br>em casos particulares . . . . .                                | 49         |
| 2.2      | Caso estocástico . . . . .                                                                                                      | 52         |
| 2.2.1    | Aplicação em Crescimento Populacional . . . . .                                                                                 | 58         |
| 2.2.2    | Simulações numéricas do crescimento populacional . . . . .                                                                      | 59         |
| <b>3</b> | <b>Aplicação: Estabilidade em modelos epidemiológicos SIR</b>                                                                   | <b>63</b>  |
| 3.1      | Modelos SIR determinísticos . . . . .                                                                                           | 64         |
| 3.2      | Modelos SIR estocásticos . . . . .                                                                                              | 67         |
| 3.3      | Simulações numéricas: verificação da estabilidade do modelo SIR . . . .                                                         | 78         |
| <b>4</b> | <b>Estimação dos parâmetros do modelo SIRD</b>                                                                                  | <b>87</b>  |
| 4.1      | Estimação dos parâmetros determinísticos: $\beta$ , $\lambda$ , $\gamma$ . .                                                    | 90         |
| 4.2      | Estimação dos parâmetros estocásticos: $\sigma_1$ e $\sigma_2$ . . . .                                                          | 95         |
| <b>5</b> | <b>Verificação da Estabilidade do modelo SIR com parâmetros estimados</b>                                                       | <b>102</b> |
|          | <b>Considerações Finais</b>                                                                                                     | <b>110</b> |
|          | <b>Produção científica</b>                                                                                                      | <b>113</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                                                                                             | <b>115</b> |
| <b>A</b> | <b>Código em Python: simulação numérica do Movimento Browniano</b>                                                              | <b>116</b> |
| <b>B</b> | <b>Código em Python: simulação numérica de aplicação em crescimento<br/>populacional com Método de Euler-Maruyama para EDEs</b> | <b>120</b> |
| <b>C</b> | <b>Código em Python: aplicação de estabilidade em modelo SIR</b>                                                                | <b>123</b> |
| <b>D</b> | <b>Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia</b>                                                                | <b>126</b> |
| <b>E</b> | <b>Cálculos e Manipulações para Estimação dos Parâmetros do modelo<br/>SIRD</b>                                                 | <b>130</b> |
| E.1      | Taxa de Contato do modelo SIRD:<br>parâmetro $\beta$ . . . . .                                                                  | 131        |

|          |                                                                                                    |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| E.2      | Taxa de Recuperação do modelo SIRD:                                                                |            |
|          | parâmetro $\lambda$ . . . . .                                                                      | 132        |
| E.3      | Taxa de Mortalidade do modelo SIRD:                                                                |            |
|          | parâmetro $\gamma$ . . . . .                                                                       | 133        |
| E.4      | Coeficiente Estocástico do modelo SIRD:                                                            |            |
|          | parâmetro $\sigma_1$ . . . . .                                                                     | 134        |
| E.5      | Coeficiente Estocástico do modelo SIRD:                                                            |            |
|          | parâmetro $\sigma_2$ . . . . .                                                                     | 136        |
| <b>F</b> | <b>Código em Python modelo SIRD Det. com dados de Bauru</b>                                        | <b>137</b> |
| <b>G</b> | <b>Código em Python modelo SIRD Est. com dados de Bauru</b>                                        | <b>140</b> |
| <b>H</b> | <b>Código em Python gráfico com previsão de infectados no dia <math>t = 90</math><br/>em Bauru</b> | <b>144</b> |
| <b>I</b> | <b>Código em Python comparação de Infectados em Bauru</b>                                          | <b>147</b> |
| <b>J</b> | <b>Código em Python modelo SIR:</b>                                                                |            |
|          | verificação de estabilidade com dados reais de Bauru                                               | 149        |
| <b>K</b> | <b>Estimação de Parâmetros do modelo SIRD a partir de dados de Rio<br/>Claro</b>                   | <b>153</b> |



---

# Introdução

O Cálculo Estocástico, área de nosso estudo na presente pesquisa, tem apresentado uma demanda crescente pelo estudo de ferramentas e métodos nas últimas décadas. De uma perspectiva aplicada, o Cálculo Estocástico pode ser descrito vagamente como um campo da Matemática, que se preocupa com o cálculo infinitesimal em funções não diferenciáveis, ligados a um espaço de probabilidade. A necessidade desse cálculo vem da necessidade de incluir fatores imprevisíveis na modelagem. É aqui que entra a probabilidade e o resultado é um cálculo para funções aleatórias ou processos estocásticos.

Uma das integrais estocásticas mais utilizadas é a de integral de Itô, introduzida em 1944 pelo matemático japonês Kiyoshi Itô (1915-2008), a qual foi originalmente motivada por uma construção de processos de difusão. Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs) são úteis para modelagem de problemas de engenharia, biologia e economia, nos quais uma incerteza significativa está presente decorrente de parâmetros desconhecidos ou ruídos propostos pelo ambiente. Como em geral não é possível explicitar as soluções das EDEs, é de grande interesse poder caracterizar, pelo menos qualitativamente, o comportamento das soluções. Algumas perguntas naturais e interessantes são se existe uma solução única e definida para sempre; se é possível determinar a probabilidade da solução alcançar determinadas regiões num determinado tempo específico; se a solução é limitada em um sentido estocástico adequado (se temos probabilidade igual a um, de as trajetórias da solução estocástica estarem abaixo de uma constante); se a solução é estável em um sentido estocástico adequado (se temos probabilidade igual a um, de as trajetórias da solução estocástica estarem em uma certa vizinhança de um ponto). E responder a essas questões, na maioria dos casos, é mais interessante do que obter a

própria solução exata, sobretudo no caso estocástico em que a solução é composta por variáveis aleatórias indexadas pelo tempo.

Quando falamos sobre o controle de algum sistema, estamos falando indiretamente sobre sua estabilidade. O objetivo do estudo da estabilidade de um sistema é analisar sob quais condições um processo será estável. O primeiro trabalho teórico sobre a estabilidade de um problema surgiu com o matemático e físico russo Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857-1918), que em 1892 introduziu o conceito de estabilidade de um Sistema Dinâmico, através da função de Lyapunov, sendo esta uma função que nos dá características sobre a energia potencial do sistema.

A análise da estabilidade de um Sistema Dinâmico é feita sem se resolver as equações diferenciais. A ideia básica do método direto de Lyapunov é uma extensão matemática de uma observação física (Primeira Lei da Termodinâmica): Se a energia potencial de um Sistema Dinâmico decresce em um processo dissipativo contínuo, então o sistema (linear ou não linear) deve atingir o ponto de equilíbrio. Assim, pode-se concluir sobre a estabilidade do sistema examinando-se a variação de uma única função escalar.

Dessa forma, temos que da teoria da Mecânica Clássica sabe-se que um sistema é estável se sua energia potencial (uma função positiva) for continuamente decrescente (derivada em relação ao tempo negativa) até que um ponto de equilíbrio seja alcançado. A análise dos pontos de equilíbrio de uma equação diferencial é muitas vezes extremamente importante para ajudar no entendimento global do comportamento das trajetórias no espaço de fase. No caso de equações diferenciais definidas por campos de vetores não-lineares, o comportamento das soluções da equação diferencial em torno de uma singularidade pode exibir uma riqueza dinâmica muito maior do que no caso de campos lineares.

O presente trabalho apresenta a seguinte organização:

- Capítulo 1: apresentamos as Preliminares de Conceitos Estocásticos, contendo noções básicas de Probabilidade e Processos Estocásticos, onde abordamos os conceitos de probabilidade de base axiomática, segundo Kolmogorov, que baseiam nosso trabalho, bem como noções do Processo Estocástico de tempo contínuo que trabalharemos, o Movimento Browniano. Ademais, apresentamos uma revisão de conceitos sobre Integrais Estocásticas, Fórmula de Itô e Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs). De posse de tais conceitos será possível, na na Seção 2.2 do próximo capítulo, apresentar o tema principal de nossa pesquisa, a Estabilidade Estocástica.
- Capítulo 2: são apresentadas, primeiramente, as ideias iniciais de estabilidade e conceitos de estabilidade via funções de Lyapunov envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), isto é, no caso determinístico. Após essa base inicial de estabilidade em sistemas determinísticos, é apresentada a estabilidade via funções de Lyapunov para o caso estocástico, com o uso de EDEs. Ainda nesse capítulo apresentaremos uma aplicação inicial utilizando a teoria estudada, em crescimento populacional, verificando a estabilidade, com uso de simulações numéricas com método de Euler-Maruyama, em linguagem Python, para gerar gráficos e melhor entender o comportamento dos modelos analisados.
- Capítulo 3: apresentamos o cerne de nosso trabalho, uma aplicação em estabilidade, com a análise de um Modelo Epidemiológico Suscetíveis-Infectados-Removidos (SIR) Estocástico, comprovando analiticamente, por meio da demonstração de uma proposição, para quais condições o sistema terá estabilidade. Apresentamos ainda neste capítulo, simulações numéricas, a partir de linguagem em Python, gerando gráficos que verificam os resultados de estabilidade apresentados.
- Capítulo 4: para tornar o estudo com modelos epidemiológicos mais real, saindo de modelos teóricos com parâmetros abstratos, realizamos a estimativa dos parâmetros através da análise dos dados da cidade de Bauru, estado de São Paulo, no período inicial da pandemia de Covid-19, para um Modelo Epidemiológico Suscetíveis-Infectados-Recuperados-Mortos (SIRD), apresentando previsões nos modelos determinísticos e estocásticos, comparando com os dados reais de infectados.

- Capítulo 5: apresentamos uma verificação da estabilidade do modelo SIR trabalhado no Capítulo 3, todavia utilizando o modelo com os parâmetros estimados com os dados reais da pandemia de Covid-19 para a cidade de Bauru, estado de São Paulo. Foram gerados gráficos, a partir de simulações numéricas com programação em Python, de modo a verificar a partir do modelo com parâmetros estimados, os resultados de estabilidade provados analiticamente no Capítulo 3.
- Por fim, tecemos as considerações finais do trabalho, abordando possíveis trabalhos futuros.
- Nos Apêndices A ao K apresentamos todos os códigos utilizados, em linguagem Python, bem como os links para acesso ao ambiente Google Colab, para que o leitor possa ter acesso a todos os resultados que alcançamos e, se desejar, possa prosseguir em futuras pesquisas aperfeiçoando os códigos ou aplicando a outras doenças.

## Objetivos:

O objetivo de nosso estudo é a análise, do ponto de vista qualitativo, buscando entender qual o comportamento de um sistema, determinístico e estocástico, sem precisar encontrar sua solução. Visamos trabalhar com modelos estocásticos, adicionando ruído em modelos determinísticos, compostos por EDOs, gerando as EDEs, de modo a estudar a estabilidade destas a partir do Método de Lyapunov. Ademais, com a utilização de dados reais para a estimação dos parâmetros de modelos epidemiológicos estocásticos, buscou-se verificar que tais modelos podem se apresentar como uma melhor opção, comparado aos determinísticos, apresentando melhores resultados em previsões em modelos epidemiológicos.

## Contribuições:

Ressalta-se ainda, que podemos considerar como contribuições em nosso trabalho:

- A Demonstração da Proposição 4, com detalhamento de todos os cálculos e passos da prova, referente a estabilidade via função de Lyapunov em sistemas SIR Estocásticos, apresentado no Capítulo 3.
- A estimação de parâmetros do modelo SIRD Estocástico, com os dados de Bauru (e Rio Claro), para o início da pandemia de Covid-19, apresentada no Capítulo 4 (e no Apêndice K), comparando as previsões do modelo SIRD Estocástico e Determinístico com dados reais.
- A disponibilização, nos Apêndices, de todos os códigos em Python utilizados, incluindo acesso ao ambiente da plataforma Google Colab, permitindo que o leitor tenha pleno acesso ao conteúdo apresentado.

# Preliminares de Cálculo Estocástico

Neste capítulo, apresentamos uma revisão sobre conceitos do Cálculo Estocástico, iniciando por conceitos introdutórios da teoria de probabilidade e de processos estocásticos, segundo Ruffino (2009), Evans (2013), Klebaner (2005) e Oksendal (2003). Ressaltamos que o presente capítulo, de forma alguma visa ser uma revisão ampla destes temas, mas apenas uma breve introdução de alguns conceitos, com o intuito de apontar a notação utilizada em nosso trabalho.

## 1.1 Uma introdução à teoria de probabilidade

É conhecido da literatura que uma medida em conjuntos  $\Omega$  é uma função que atribui um número real não-negativo para um subconjunto de  $\Omega$ . Em particular, probabilidade é uma medida que assume valores em  $[0, 1]$  em subconjuntos de  $\Omega$  que chamamos de eventos e definiremos a seguir. Aqui,  $\Omega$  denota o espaço amostral; entendemos por um *experimento* qualquer processo que permite ao pesquisador realizar observações e na realização de um experimento, temos o *espaço amostral* como o conjunto de todos os resultados possíveis.

Uma maneira de definir probabilidade é o da frequência relativa, ou seja, podemos definir  $\mathbb{P}(A)$  como o limite da frequência relativa da ocorrência de  $A$  em  $n$  repetições independentes do experimento, com  $n$  tendendo ao infinito, i.e.

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \{\text{número de ocorrências de } A \text{ em } n \text{ “ensaios” independentes}\}.$$

A definição de probabilidade apresentada acima, chamada de “frequentista” ou “estatística” de probabilidade, baseada na experiência da estabilidade da frequência relativa de ocorrência de eventos, quando realizados com muitas repetições do experimento, não é a única para definir probabilidade. Em nosso trabalho, seguiremos uma definição axiomática para probabilidade, introduzida pelo matemático soviético Andrei Kolmogorov, a qual conseguiu proporcionar à teoria da probabilidade uma base matemática robusta.

Dessa forma, apresentamos a seguir definições formais de Espaço Amostral, Eventos, Álgebra de Eventos e  $\sigma$ -álgebra, para então apresentar os conceitos de probabilidade, segundo Kolmogorov.

**Definição 1** (Espaço Amostral e Eventos).

*Seja  $\Omega$  um espaço amostral de um experimento, temos definido como evento todo conjunto  $A$ , de forma que  $A \subset \Omega$ . Temos  $\Omega$  sendo o evento certo e  $\emptyset$  o evento impossível. Se  $\omega$  é um resultado, de forma que  $\omega \in \Omega$ , o evento  $\{\omega\}$  é chamado de evento simples (ou elementar).*

**Definição 2** (Álgebra de Eventos).

*Seja  $\Omega$  o conjunto referente ao espaço amostral, uma classe de eventos aleatórios, denotada por  $\mathfrak{F}$ , subconjunto de  $\Omega$ , chama-se álgebra se:*

1.  $\Omega \in \mathfrak{F}$ ; e  $\emptyset \in \mathfrak{F}$ ;
2. Um subconjunto  $A \in \mathfrak{F}$ , se e somente se, seu complementar  $A^C \in \mathfrak{F}$ ;
3. Se  $A \in \mathfrak{F}$  e  $B \in \mathfrak{F}$ , então  $A \cup B \in \mathfrak{F}$ .

É fácil ver que  $\mathfrak{F}$  é uma álgebra de eventos e vale a seguinte propriedade:  $\forall n \in \mathbb{N}$  e para toda sequência de subconjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathfrak{F}$ , temos

$$\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F} \quad \text{e} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{F}.$$

**Definição 3** ( $\sigma$ -álgebra).

A classe de eventos aleatórios  $\mathfrak{F}$  será chamada de  $\sigma$ -álgebra se o item 3 da Definição anterior valer para toda sequência infinita enumerável de elementos em  $\mathfrak{F}$ , ou seja:

Se  $A_n \in \mathfrak{F}$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$  então

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{F}.$$

**Observação 1.** Uma  $\sigma$ -álgebra é sempre uma álgebra, pois a Definição 2 (item 3) é consequência da Definição 3.

**Definição 4** (Espaço mensurável).

O par ordenado  $(\Omega, \mathfrak{F})$  chama-se um espaço mensurável, e dizemos que um subconjunto  $A \subseteq \Omega$  é mensurável (ou  $\mathfrak{F}$ -mensurável, quando for preciso enfatizar a  $\sigma$ -álgebra), se  $A \in \mathfrak{F}$ .

**Definição 5** (Medida sobre espaço mensurável).

Uma medida  $\mu$  sobre um espaço mensurável  $(\Omega, \mathfrak{F})$  é uma função  $\mu : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  tal que:

$$1. \mu(\emptyset) = 0;$$

2. ( $\sigma$ -aditiva), Se  $(E_n)_{n \geq 1}$  é uma sequência de subconjuntos disjuntos  $\mathfrak{F}$ -mensuráveis então  $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ .

A medida  $\mu$  é dita finita em  $\Omega$  se  $\mu(\Omega) < \infty$ .

**Definição 6** (Medida de probabilidade).

Dada a Definição 5, estamos particularmente interessados naquelas medidas finitas  $\mu$  onde a medida do espaço todo  $\mu(\Omega) = 1$ . Neste caso chamamos  $\mu$  de uma medida de probabilidade, ou simplesmente uma probabilidade no espaço mensurável  $(\Omega, \mathfrak{F})$ .



**Definição 7** (Espaço de Probabilidade).

Um espaço de probabilidade é uma tripla  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ , onde temos:

1.  $\Omega$  um conjunto não vazio;
2.  $\mathfrak{F}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$ ;
3.  $\mathbb{P}$  é uma probabilidade em  $\mathfrak{F}$ .

Veremos a seguir, a definição de probabilidade condicional.

**Definição 8.** (Probabilidade condicional): Seja  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade.

Se  $B \in \mathfrak{F}$ , e  $\mathbb{P}(B) > 0$ , a probabilidade condicional de  $A$  dado  $B$  é definida por:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \quad A \in \mathfrak{F}.$$

**Definição 9.** (Eventos Independentes): Seja  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  um espaço de probabilidade. Os eventos aleatórios  $A$  e  $B$  são independentes se:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

**Observação 2.** Neste caso, temos  $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ , pois se eventos independentes, temos:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A);$$

ou seja, se  $A$  e  $B$  são independentes, o fato de  $B$  ter ocorrido, não altera a probabilidade de  $A$ .

Apresentaremos, a seguir, o conceito de funções mensuráveis e variável aleatória, importante tópico para posteriormente apresentarmos processos estocásticos.

Dados dois espaços mensuráveis  $(X, \mathfrak{F})$  e  $(Y, \mathfrak{G})$ , dizemos que uma função  $f : (X, \mathfrak{F}) \rightarrow (Y, \mathfrak{G})$  é mensurável se ela preservar a estrutura de mensurabilidade no sentido de imagens inversas de subconjuntos mensuráveis em  $Y$  são subconjuntos mensuráveis em  $X$ .

Em teoria de probabilidade, funções mensuráveis recebem o nome especial de variáveis aleatórias.

### 1.1.1 Variáveis aleatórias

Podemos enunciar uma variável aleatória (v.a.), informalmente, como um *característico* numérico do resultado de um experimento, como no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.** *Lançar uma moeda  $n$  vezes e observar a sequência de Caras (denotadas por  $C$ ) ou Coroadas (denotadas por  $K$ ) obtidas. Os resultados possíveis são:*

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) : \omega_i = C \text{ ou } K; i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Ou seja, o número observado de Caras nos  $n$  lançamentos é um característico numérico da sequência de Caras e Coroadas. E se definirmos  $X =$  “número de Caras observadas”, vemos que o valor de  $X$  depende do resultado do experimento e podemos definir:

$$X(\omega) = \text{número de C em } \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) = \#\{i : \omega_i = C, 1 \leq i \leq n\}.$$

Podemos entender uma variável aleatória como uma função do espaço amostral  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  a qual é possível calcular as probabilidades de ocorrências de seus valores.

Assim, temos a seguinte definição formal de variável aleatória:

**Definição 10** (Variável Aleatória).

*Uma variável aleatória  $X$  em um espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  é uma função  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $[X \leq x] \in \mathfrak{F}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .*

**Teorema 1.**  *$X$  é uma variável aleatória em  $(\Omega, \mathfrak{F})$  se, e somente se, for uma função simples ou um limite de funções simples.*

A Demonstração deste teorema pode ser vista em Klebaner (2005) p.30.

### 1.1.2 Esperança e distribuição gaussiana

Nesse momento, introduzimos o conceito de Esperança (média de uma v.a.) e distribuição gaussiana. Novamente, seja  $X$  uma variável aleatória em  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . A

esperança de  $X$  é definida por

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Além disso, temos a definição da variância da v.a.  $X$ , que é uma medida de dispersão e é dada por

$$V(X) := \int_{\Omega} |X(\omega) - \mathbb{E}(X)|^2 d\mathbb{P}(\omega).$$

A variância satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ ; onde  $a, b$  são constantes reais.
2.  $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ .

Seja  $X$  uma variável aleatória no espaço de probabilidade  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$ . A função de distribuição de  $X$  é a função  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  definida por

$$F_X(x) = \mathbb{P}(\omega; X(\omega) \leq x).$$

Além disso, se tivermos

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = p(x),$$

então dizemos que  $p(x)$  é a função densidade de probabilidade de uma v.a  $X$  qualquer.

É importante observar a seguinte relação entre função de distribuição, probabilidade e função de densidade de probabilidade da variável aleatória  $X$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{\{X \leq x\}} d\mathbb{P}(\omega) = \int_{-\infty}^x p(u) du.$$

A função de densidade de probabilidade  $p(x)$  tem as seguintes propriedades:

- (i)  $p(x) \geq 0$ ;
- (ii)  $\int_{-\infty}^{\infty} p(u) du = 1$ .

Diz-se que uma variável aleatória  $X$  tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade for dada por

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

com os parâmetros constantes  $\mu$  e  $\sigma > 0$ .

A média e a variância são dadas por

$$\mathbb{E}[X] = \mu, \quad \text{Var}[X] = \sigma^2.$$

Se  $X$  tem uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , escrevemos  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

A seguir, temos o resultado conhecido como desigualdade de Markov:

Se  $X$  é uma variável aleatória com  $X \geq 0$  e  $a > 0$ , então

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}. \quad (1.1)$$

*Por exemplo, a desigualdade de Markov nos diz que, desde que  $X$  não assuma valores negativos, a probabilidade de  $X$  ser duas vezes maior que seu valor esperado é de no máximo  $\frac{1}{2}$ , o que podemos ver definindo  $a = 2\mathbb{E}(X)$ .*

## 1.2 Uma introdução aos processos estocásticos

De modo geral, processos estocásticos podem ser apresentados como uma coleção de variáveis aleatórias que são utilizadas para estudar a evolução de fenômenos que são observados ao longo do tempo, seguindo a ideia que dado uma condição inicial, ainda temos diversas trajetórias possíveis para a evolução do sistema.

Temos que qualquer sequência de variável aleatória é mensurável, porém o caso mais interessante e utilizado é quando temos uma sequência crescente de informações chamadas de filtração.

Devido a esta evolução temporal das variáveis aleatórias, uma filtração é usada para modelar esse fluxo de informações, isto é, conforme o tempo passa, um observador consegue saber mais detalhes sobre os acontecimentos, ou seja, partições mais “finas” de

$\Omega$ . Por exemplo, seja  $\mathfrak{F}_t \subset \mathcal{H}_t$ , onde  $\mathfrak{F}_t$  e  $\mathcal{H}_t$  são duas filtrações dadas que representam o conhecimento que dois observadores podem adquirir até o tempo  $t$ . Dessa maneira, o observador  $\mathcal{H}_t$  possui mais informações.

Mais precisamente, uma filtração  $\mathbb{F}$  é uma coleção de  $\sigma$ -álgebras de eventos  $\mathfrak{F}_n$ , com

$$\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_0, \mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_n, \dots, \mathfrak{F}_T\}; \quad \text{onde } \mathfrak{F}_n \subset \mathfrak{F}_{n+1},$$

sendo utilizada para modelar um fluxo de informações, obtidas com o decorrer dos experimentos. Em geral, se toma  $\mathfrak{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ , ou seja, no instante  $n = 0$  não temos nenhuma informação. Com o passar do tempo, obtemos informações mais detalhadas.

A seguir, apresentamos definições formais de Filtração, Processo Adaptado e Processo Estocástico.

**Definição 11** (Filtração).

*Uma família de sub- $\sigma$ -álgebras  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0} \subseteq \mathfrak{F}$  é chamada de filtração no espaço mensurável  $(\Omega, \mathfrak{F})$  se for crescente no sentido de  $\mathfrak{F}_s \subseteq \mathfrak{F}_t$  quando  $0 \leq s \leq t$ . Quando necessário enfatizar, denotamos o espaço de probabilidade filtrado por  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}_t, \mathbb{P})$ .*

**Definição 12** (Processo Adaptado).

*Um processo  $X$  é dito adaptado à uma filtração  $(\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}$  se  $X_t$  for  $\mathfrak{F}_t$ -mensurável para todo  $t \geq 0$ .*

**Definição 13** (Processo Estocástico).

*Um processo estocástico adaptado a filtração  $\mathbb{F} = \{\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_T\}$  é uma sequência de variáveis aleatórias  $X_n$ , tal que cada  $X_n$  é uma variável aleatória com relação à  $(\Omega, \mathfrak{F}_n)$  para cada  $n = 1, 2, 3, \dots, T$ .*

**Exemplo 2.** *Considere o exemplo do lançamento de uma moeda não viciada, para  $n = 1, 2$ . Então  $\Omega = \{\omega_1 = (C, C), \omega_2 = (C, K), \omega_3 = (K, C), \omega_4 = (K, K)\}$ .*

*Tome  $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ , o qual representa o evento em que no tempo  $n = 1$  o resultado obtido foi cara. Assim,  $F_1 = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$  e tome  $F_2 = 2^\Omega$ . Considere as seguintes funções em  $\Omega$  :*

- $X(\omega_1) = X(\omega_2) = 15$  e  $X(\omega_3) = X(\omega_4) = 5$ .

$X$  é uma variável aleatória em  $F_1$ , já que  $\{\omega : X(\omega) = 15\} = \{\omega_1, \omega_2\} = A \in F_1$  e  $\{\omega : X(\omega) = 5\} = \{\omega_3, \omega_4\} = A^c \in F_1$ .

- $Y(\omega_1) = 15, Y(\omega_2) = 75, Y(\omega_3) = 75$ , e  $Y(\omega_4) = 5$ .

$Y$  não é uma variável aleatória em  $F_1$ , pois  $\{\omega : Y(\omega) = 75\} = \{\omega_2, \omega_3\} \notin F_1$ . Por outro lado, é claro que  $Y$  é uma variável aleatória em  $F_2$ .

Temos que a sequência  $\{X, Y\}$  é um processo estocástico adaptado a filtração  $\mathbb{F} = \{F_1, F_2\}$ .

Muitas vezes queremos fazer previsões com o que vai ocorrer num determinado tempo futuro, e por isso é interessante trabalhar com uma sequência infinita de variáveis aleatórias. Podemos destacar duas classes de processos mais estudados: processos estocásticos com tempo discreto (enumerável como apresentado na Definição 13) e processos estocásticos com tempo contínuo, por exemplo, o Movimento Browniano que discutiremos na próxima seção, sendo esse o principal processo utilizado no cálculo estocástico de processos contínuos, gerando funções de variação quadrática positiva. Além dos casos de processos discretos e contínuos, podemos citar como exemplos o Movimento Browniano Fracionário (que está no limiar da continuidade), os Processos de Lévy e Funções Càdlàg (contínuas à esquerda e que existem limites à direita). Mais detalhes sobre esses processos, que não podem ser classificados como discretos ou contínuos, podem ser vistos em Ruffino (2009).

No caso em que o tempo é contínuo, a ideia é que  $t \geq 0$  será interpretado como tempo e o conjunto de índices  $T$  será tomado como um intervalo de tempo da forma  $(-\infty, +\infty)$ ,  $[0, +\infty)$  ou  $[\alpha, \beta]$ . Sendo assim, um processo estocástico contínuo é indicado por  $X_t$ .

### 1.2.1 Movimento Browniano

Robert Brown, botânico e físico escocês, descreveu o movimento de uma partícula de pólen suspensa em um fluido em 1828. Foi observado que uma partícula se movia de maneira irregular e aleatória. Albert Einstein, em 1905, argumentou que o movimento se deve ao bombardeio da partícula pelas moléculas do fluido, desse modo, ele obteve

as equações para o Movimento Browniano. Em 1900, Louis Bachelier, matemático francês, usou o Movimento Browniano como modelo para o movimento dos preços das ações em sua teoria matemática da especulação. A base matemática para o Movimento Browniano como um processo estocástico foi feita por Norbert Wiener, matemático norte-americano, em 1931, e esse processo também é chamado de processo de Wiener, e denotada por diversos autores por  $W_t$ , sendo o processo equivalente a nossa notação adotada  $B_t$ .

Na prática, normalmente observamos apenas uma única realização desse processo, um único caminho, dentre uma infinidade de caminhos possíveis. Qualquer caminho é uma função aleatória de  $t$  no intervalo  $[0, T]$ . Para descrever a distribuição e poder fazer cálculos de probabilidade sobre o futuro incerto, é preciso conhecer as distribuições de dimensões finitas. Assim, precisamos especificar como calcular probabilidades da forma  $\mathbb{P}(B(t) \leq b)$  para qualquer momento  $t$ , isto é, as probabilidades na forma

$$\mathbb{P}(B(t_1) \leq b_1, B(t_2) \leq b_2, \dots, B(t_n) \leq b_n),$$

para qualquer escolha de pontos no tempo  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq T$ , e qualquer  $n \geq 1$ , com  $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ .

O Movimento Browniano  $B(t)$  serve como modelo básico para a acumulação do efeito de ruído branco. O ruído branco é um dos principais processos estocásticos encontrados na natureza, que possui propriedades parecidas com o Movimento Browniano. Esse termo é mais utilizado, por exemplo, na física e na engenharia. Se  $B(t)$  denota a posição de uma partícula no tempo  $t$ , então o deslocamento  $B(t) - B(0)$  é o efeito puramente aleatório do ruído ao longo do tempo  $t$ . Apresentaremos a seguir, a definição do Movimento Browniano.

O Movimento Browniano 1-dimensional  $B_t$  é um processo estocástico contínuo com as seguintes propriedades:

- (Independência de incrementos)  $B(t) - B(s)$ , para  $t > s$ , é independente do passado, ou seja, de  $B_u$ ,  $0 \leq u \leq s$ , ou de  $\mathfrak{F}_s$  (informação). A  $\sigma$ -álgebra é gerada por  $B(u)$ ,  $u \leq s$ .

- (Incrementos normais)  $B(t) - B(s)$  tem distribuição normal com média 0 (esperança é 0) e variância  $t - s$ . Isso implica (considerando  $s = 0$ ) que  $B(t) - B(0)$  possui distribuição  $N(0, t)$ . Em particular, se  $B(0) = 0$ , segue que  $\mathbb{E}(B_t)^2 = t$ .
- (Continuidade dos caminhos)  $B(t), t \geq 0$  são funções contínuas em relação ao tempo  $t$ .

Quando  $B(0) = x$ , o Movimento Browniano é iniciado em  $x$ . *Qualquer  $x$  a ele é fixo?* As propriedades acima determinam todas as distribuições finitas dimensionais. Além disso, o tempo no intervalo no qual o Movimento Browniano é definido é  $[0, T]$  para  $T > 0$ , que é permitido ser infinito.

**Definição 14.** *A definição do Movimento Browniano em um modelo mais geral é dada por um par  $(B(t), \mathfrak{F}_t), t \geq 0$ , onde  $\mathfrak{F}_t$  é uma sequência crescente de  $\sigma$ -álgebra (filtração),  $B(t)$  é um processo adaptado, isto é,  $B(t)$  é  $\mathfrak{F}_t$  mensurável, de modo que as condições ditas anteriormente se mantêm.*

Uma importante representação usada para cálculos em processos com independência de incrementos é aquele que para qualquer  $s \geq 0$

$$B(t + s) = B(s) + (B(t + s) - B(s)),$$

onde as duas variáveis são independentes.

A variação quadrática do Movimento Browniano  $[B, B](t)$  é definida como

$$[B, B](t) = [B, B]([0, t]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |B(t_i^n) - B(t_{i-1}^n)|^2,$$

esse limite é assumido sobre todas as partições de  $[0, t]$ , com  $\delta_n = \max_i(t_{i+1}^n - t_i^n) \rightarrow 0$ , com  $n \rightarrow \infty$ . Pode ser visto em Klebaner (2005), que esta variação é igual a  $t$ .

Em resumo, podemos citar que o Movimento Browniano  $B_t$  tem as seguintes propriedades, para quase todo  $\omega$ :

1. É uma função contínua em  $t$ , para qualquer  $t$ ;
2. Possui variação quadrática em  $[0, t]$  igual a  $t$ ;
3. Não é monótona em nenhum intervalo, por menor que seja o intervalo;



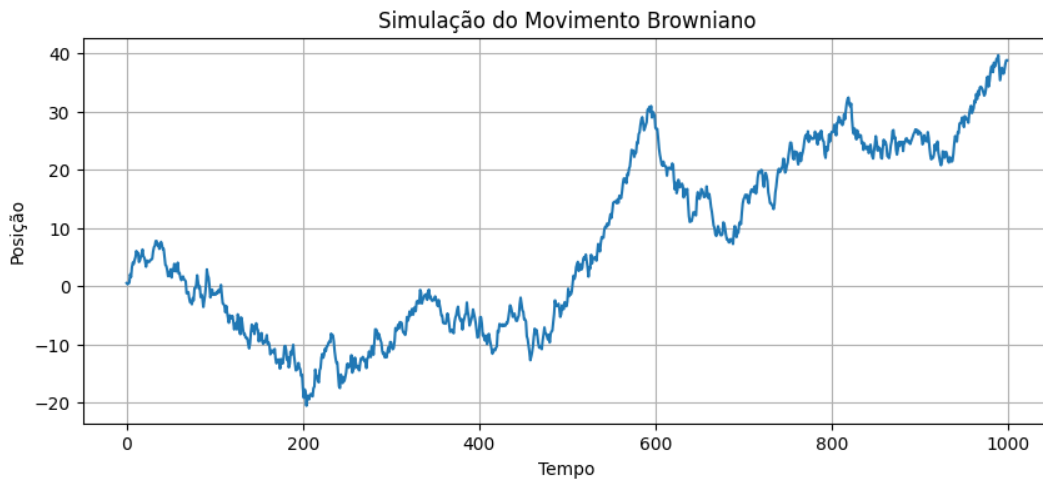
4. Não é diferenciável em nenhum ponto;
5. Possui variação total infinita em qualquer intervalo, por menor que seja.

O Movimento Browniano também pode ser definido em dimensões superiores. Mais precisamente, o Movimento Browniano  $n$ -dimensional pode ser visto como um vetor aleatório  $B(t) = (B^1(t), B^2(t), \dots, B^n(t))$  com todas as coordenadas  $B^i(t)$  sendo movimentos brownianos unidimensionais independentes. E nesse caso, define-se  $\mathfrak{F}_t = \mathfrak{F}_t^{(n)}$  como a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias  $B_s(\cdot); s \leq t$ .

Apresentaremos a seguir algumas realizações do Movimento Browniano unidimensional, através de simulações computacionais em Python, que ilustrarão os conceitos, definições e propriedades apresentados. Os códigos em Python são apresentados no Apêndice A.

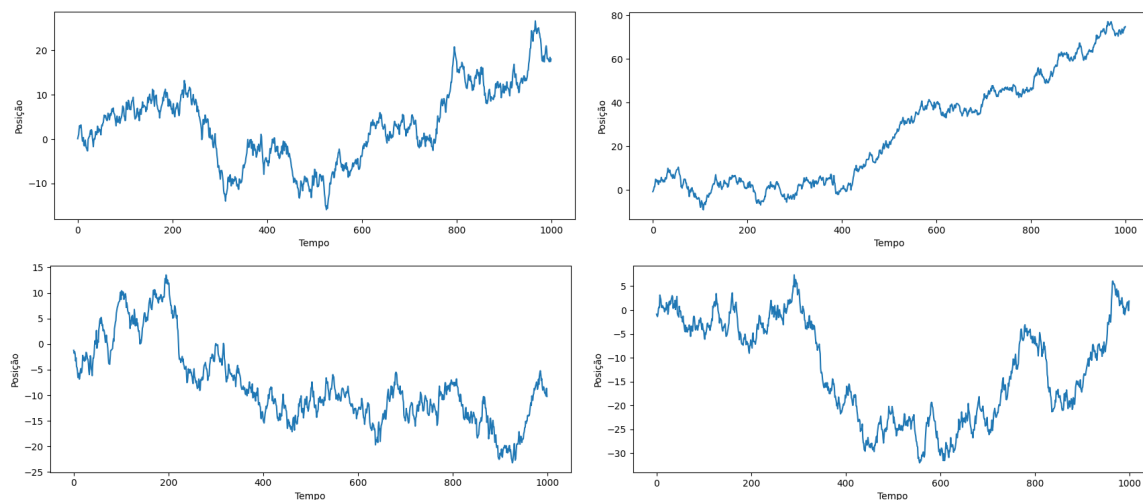
Vemos na Figura 1.1 uma simulação do Movimento Browniano. Devido à natureza aleatória do processo estocástico, se gerarmos várias simulações, podemos notar que cada simulação vai gerar uma trajetória distinta, como é possível ver a seguir, na Figura 1.2.

Figura 1.1: Simulação numérica do Movimento Browniano



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

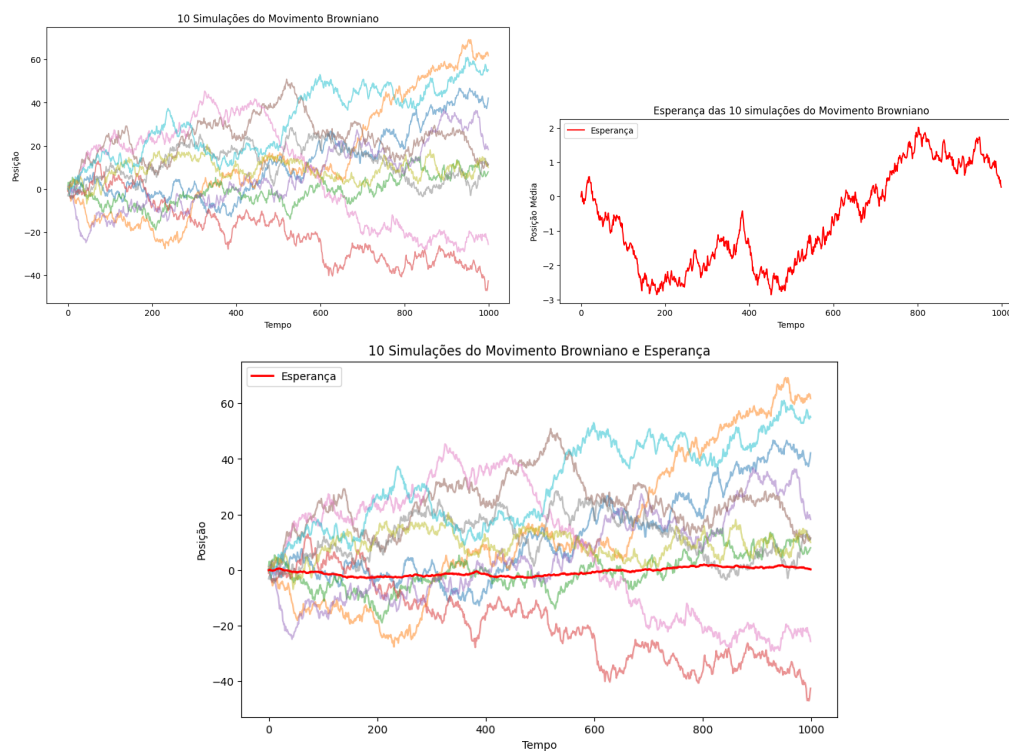
Figura 1.2: Simulações numéricas do Movimento Browniano: 4 trajetórias



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Muitas vezes é interessante gerar um maior número de simulações e calcular a média entre elas, ou seja, a Esperança entre as trajetórias dos Movimentos Brownianos, como apresentado na Figura 1.3, com 10 simulações.

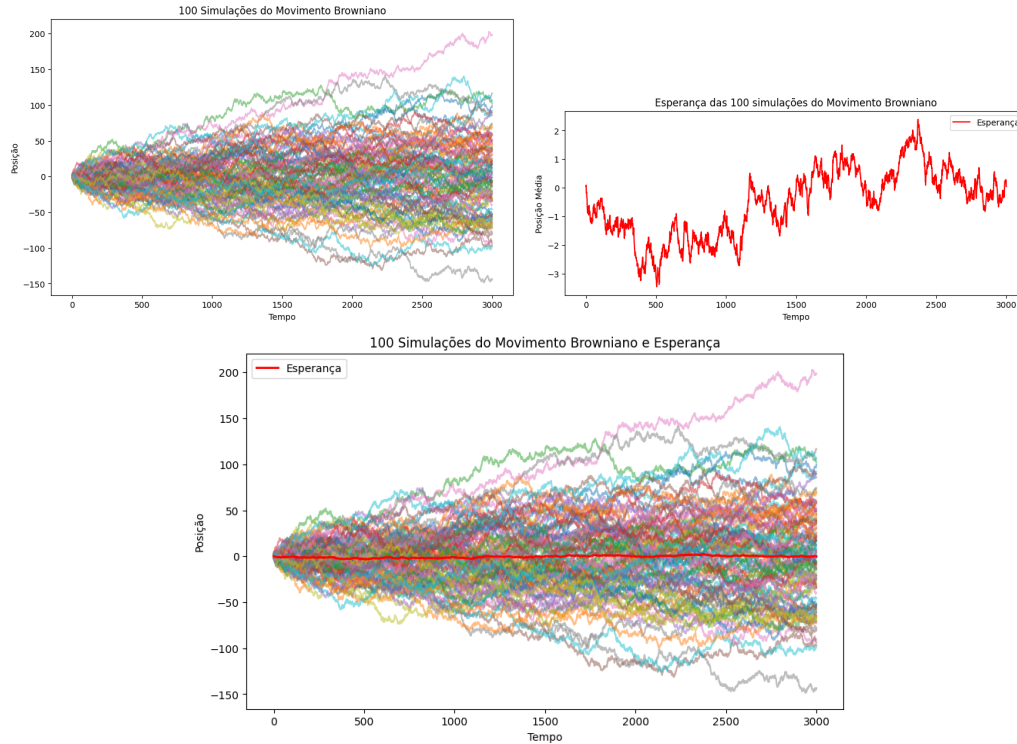
Figura 1.3: Simulações numéricas Movimento Browniano: 10 trajetórias e Esperança



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Apresentamos ainda, na Figura 1.4, uma simulação com 100 trajetórias e a Esperança entre elas.

Figura 1.4: Simulações numéricas do Movimento Browniano: 100 trajetórias e Esperança



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

## 1.2.2 Martingales

A teoria de Martingales se estende, com várias intersecções interessantes com problemas geométricos, analíticos, além dos probabilísticos.

Um Martingale é uma sequência de variáveis aleatórias para o qual, a qualquer tempo específico na sequência observada, a esperança do próximo valor na sequência é igual ao valor presentemente observado, mesmo dado o conhecimento de todos os valores anteriormente constados.

Apresentamos a seguir uma definição formal de um Martingale.

**Definição 15.** Um processo estocástico  $\{X(t), t \geq 0\}$  é um Martingale, se  $\mathbb{E}|X(t)| < \infty$  e para qualquer  $s > 0$ ,

$$\mathbb{E}(X(t+s)|\mathfrak{F}_t) = X(t),$$

onde  $\mathfrak{F}_t$  é a informação sobre o processo até o momento  $t$ , e a igualdade se mantém quase certamente.

Também dizemos que um processo estocástico  $X(t)$  é supermartingale se for uniformemente integrável e

$$\mathbb{E}(X(t+s)|\mathfrak{F}_t) \leq X(t).$$

A propriedade Martingale pode ser entendida da seguinte forma:

Se conhecermos os valores do processo no tempo  $t$ , e  $X(t) = x$ , o valor futuro esperado a qualquer momento futuro é  $x$ .

**Proposição 1.** *Seja  $B(t)$  um Movimento Browniano, então  $B(t)$  é um Martingale.*

A prova dessa proposição pode ser encontrada em Klebaner (2005) p.65 ou Calin (2015) p.46.

### 1.2.3 Processo de Markov

Alguns processos estocásticos possuem a Propriedade de Markov, que significa que se soubermos o estado atual do processo, então o comportamento futuro do processo é independente de seu passado. O processo  $X(t)$  possui essa propriedade se a distribuição condicional de  $X(t+s)$  dada  $X(t) = x$ , não depende dos valores passados (mas pode depender do valor presente  $x$ ).

Apresentamos a seguir uma definição formal de Processo de Markov.

**Definição 16.** *Seja  $\mathfrak{F}_t$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelo processo até o tempo  $t$ ,  $X$  é um processo de Markov se, para qualquer  $t$  e  $s > 0$ , a distribuição condicional de  $X(t+s)$  dado  $\mathfrak{F}_t$  é a mesma que a distribuição condicional de  $X(t+s)$  dado  $X(t)$ , isto é,*

$$\mathbb{P}(X(t+s) \leq y | \mathfrak{F}_t) = \mathbb{P}(X(t+s) \leq y | X(t)).$$

**Proposição 2.** *O Movimento Browniano  $B(t)$  possui a propriedade de Markov.*

A prova desta proposição pode ser encontrada em Klebaner (2005) p.67.

### 1.3 Integral de Itô

Será apresentada, nesta seção, uma motivação para uso de integrais estocásticas, como a integral de Itô, inspirada em Oksendal (2003), a partir de um modelo de crescimento populacional utilizando as seguintes equação diferencial ordinária

$$\frac{dN}{dt} = a(t)N(t), \quad (1.2)$$

onde  $N(t)$  é o tamanho da população no tempo  $t$  e  $a(t)$  é a taxa de crescimento populacional no tempo  $t$ .

Ao considerarmos  $a(t)$  de modo determinístico, sem uma aleatoriedade, não levamos em conta alguns ruídos aleatórios que ocorrem em nosso sistema, que podem alterar a taxa de crescimento populacional e refletem em oscilações aleatórias no crescimento de nossa população.

Dessa forma, para uma melhor modelagem, pode-se adotar uma aleatoriedade em  $a(t)$ , adicionando um termo que usualmente é chamado de Ruído e denotamos a seguir por  $R(t)$ . Assim, temos

$$a(t) = \alpha(t) + R(t), \quad (1.3)$$

onde  $\alpha(t)$  é uma função não aleatória.

Substituindo a Equação (1.3) em (1.2), temos

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= (\alpha(t) + R(t)) \cdot N(t) \\ &= N(t)\alpha(t) + N(t) \cdot R(t). \end{aligned}$$

Fazendo  $g(t; N_t) = N(t)\alpha(t)$ ,  $f(t; N_t) = N(t)$  e representando o Ruído por algum processo estocástico  $W_t$ , temos

$$\frac{dN}{dt} = g(t; N_t) + f(t; N_t)W_t, \quad (1.4)$$

onde  $f$  e  $g$  são determinadas funções e  $W_t$  representa o termo de ruído, assumindo as seguintes propriedades:

- (1) Se  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow W_{t_1}$  e  $W_{t_2}$  são independentes;

(2)  $\{W_t\}$  seja estacionário, ou seja, a distribuição conjunta de  $\{W_{t_1+t}, \dots, W_{t_k+t}\}$  não depende do tempo  $t$ ;

(3)  $\mathbb{E}(W_t) = 0$ .

Entretanto, verifica-se que não existe nenhum processo estocástico contínuo que satisfaz as propriedades (1) e (2). Portanto, é usual tomarmos  $W_t dt$  como sendo  $dB_t$  a partir da Equação (3.3), ou seja, ficamos com a seguinte Equação Diferencial Estocástica (EDE)

$$dN_t = g(t; N_t)dt + f(t; N_t)dB_t, \quad (1.5)$$

a qual é representada na forma integral por

$$N_t = N_0 + \int_0^t g(s; N_s)ds + \int_0^t f(s; N_s)dB_s, \quad (1.6)$$

onde a existência das integrais da Equação (1.6) é garantida a partir da condição de existência de coeficientes de Lipschitz nas funções  $f$  e  $g$ , implicando na convergência das integrais e unicidade da solução. Assim, as integrais da equação (1.6) podem ser obtidas da seguinte forma:

- a primeira integral, sendo  $g$  uma função suficientemente comportada, se fixarmos o acaso ( $\omega = \omega_0$ ) a integral torna-se uma integral de Riemann-Stieljes.
- para a segunda integral, o artifício utilizado na primeira integral não é válido, pois esta segunda integral não existe como uma integral de Riemann-Stieljes, pelo fato de  $B_t$  não ser diferenciável em nenhum ponto e não ter variação total finita. Todavia, pode-se definir esta segunda integral, desde que  $f(t, N_t)$  satisfaça a seguinte condição: Seja  $f(t, N_t)$ , ou simplesmente  $f(t)$ , uma função da variável aleatória  $N_t$ , com  $t \in [a, b]$  e  $\{N_t : t \in [0, \infty)\}$  um processo estocástico, em que  $f$  satisfaça

$$\int_a^b \mathbb{E}(f^2(t))dt < \infty, \quad (1.7)$$

desde que  $E(f^2(t))$  exista. Logo, a integral (1.7) é uma integral de Riemann.

Será apresentada, a seguir, a definição da integral estocástica de Itô.

**Definição 17.** *Seja  $f(t)$  uma função aleatória que satisfaça (1.7). Tomando a partição  $a = t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = b$ ,  $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{k}$  e  $\Delta B(t_i) = B(t_{i+1}) - B(t_i)$ , onde  $B(t)$  é o Movimento Browniano. Então, a integral estocástica de Itô é definida como*

$$\int_a^b f(t)dB_t = l.i.m._{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k f(t_i)\Delta B_{t_i}, \quad (1.8)$$

onde *l.i.m* denota uma convergência em média quadrática. A convergência em média quadrática equivale à convergência  $L^p$ , com  $p = 2$ . Maiores detalhes de convergência  $L^p$  podem ser vistas em Ruffino (2009) p. 16.

Se  $F_k = \sum_{i=1}^k f(t_i)\Delta B_{t_i}$  e  $I = \int_a^b f(t)dB_t$ , então  $l.i.m._{k \rightarrow \infty} F_k = I$  significa que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(F_k - I)^2] = 0. \quad (1.9)$$

Temos que o fato da função  $f(t)$  ter que satisfazer (1.7) não é evidente na definição, mas necessário para que o limite (1.9) exista.

A seguir, são apresentadas algumas propriedades da integral de Itô, onde as provas podem ser vistas em Oksendal (2003).

**Proposição 3.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções mensuráveis e adaptadas a informação gerada pelo Movimento Browniano,  $S \leq U \leq T$ ;  $c, a \in \mathbb{R}$ , então temos*

- (1)  $\int_S^T f(t)dB_t = \int_S^U f(t)dB_t + \int_U^T f(t)dB_t$ ;
- (2)  $\int_S^T cf(t) + ag(t)dB_t = c \int_S^T f(t)dB_t + a \int_S^T g(t)dB_t$ ;
- (3)  $\mathbb{E} \left( \int_S^T f(t)dB_t \right) = 0$ ;
- (4)  $\mathbb{E} \left( \left( \int_S^T f(t)dB_t \right)^2 \right) = \mathbb{E} \left( \int_S^T f^2(t)dt \right)$ .

Apresentaremos, a seguir, a integral de Wiener, que é considerada como um caso particular da integral estocástica de Itô.

A integral de Wiener é obtida substituindo na Integral de Itô o integrando, que pode ser um processo estocástico não adaptado, por uma função determinística  $f(t)$ .

A integral de Wiener é geralmente denotada por

$$\int_a^b f(t)dW_t.$$

Todas as propriedades das integrais de Itô também valem para as integrais de Wiener. Com relação a distribuição, a integral de Wiener é uma variável aleatória com média zero

$$\mathbb{E} \left[ \int_a^b f(t) dW_t \right] = 0 \quad (1.10)$$

e variância

$$\mathbb{E} \left[ \left( \int_a^b f(t) dW_t \right)^2 \right] = \int_a^b f(t)^2 dt. \quad (1.11)$$

Será apresentado, a seguir, a fórmula de Itô unidimensional.

Seja  $B_t$  o Movimento Browniano unidimensional em  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbb{P})$  e  $X_t$  um processo estocástico no mesmo espaço de probabilidade tal que:

$$X_t = X_0 + \int_0^t g(s, \omega) ds + \int_0^t f(s, \omega) dB_s, \quad (1.12)$$

que também pode ter sua representação na forma diferencial, como segue:

$$dX_t = g dt + f dB_t. \quad (1.13)$$

Temos que o processo  $X_t$ , dado pelas integrais, é chamado de processo estocástico de Itô.

Considere  $\varphi(t, x) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$ , isto é, uma função que possui derivadas parciais de segunda ordem contínuas em  $([0, \infty) \times \mathbb{R})$ .

**Teorema 2.** (*Fórmula de Itô*)  $Y_t = \varphi(t, X_t)$  é um processo estocástico de Itô e

$$dY_t = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, X_t) (dX_t)^2, \quad (1.14)$$

onde é utilizada a regra dada por

$$dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0; \quad e \quad (dB_t)^2 = dt.$$

Temos que a fórmula de Itô (1.14), de uma maneira superficial, podemos dizer que faz o papel da regra da cadeia para a derivada de uma composição de funções, a qual não tem o termo extra que aparece na fórmula de Itô.



Em dimensões maiores, seja  $B(t, \omega) = (B_1(t, \omega), \dots, B_m(t, \omega))$  um Movimento Browniano  $m$ -dimensional, podemos formar o seguinte processo  $n$ -dimensional

$$\begin{cases} dX_1 = u_1 dt + v_{11} dB_1 + \dots + v_{1m} dB_m \\ \vdots \\ dX_n = u_n dt + v_{n1} dB_1 + \dots + v_{nm} dB_m \end{cases}$$

Ou na notação matricial simplesmente  $dX(t) = udt + vdB(t)$ , onde

$$X_t = \begin{bmatrix} X_1(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nm} \end{bmatrix}, dB(t) = \begin{bmatrix} dB_1(t) \\ \vdots \\ dB_m(t) \end{bmatrix}.$$

Seja  $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_n(t, x)) \in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$  para  $\mathbb{R}^n$ .

Então  $Y(t, \omega) = g(t, X_t)$  é novamente um processo de Itô, cujo número de componente  $k$ ,  $Y_k$ , é dado por

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X_t) dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X_t) dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t) \cdot dX_i dX_j,$$

onde  $dB_i dB_j = \delta_{ij} dt$ , onde  $\delta_{ij} = 1$ , se  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$ , se  $i \neq j$ ,  $dB_i dt = dt dB_i = 0$ .

Vamos supor que exista uma função contínua não negativa  $V(t, x)$  com derivadas parciais contínuas  $\partial V / \partial t$ ,  $\partial V / \partial x_i$  e  $\partial^2 V / \partial x_i \partial x_j$ . A fórmula de Itô de várias variáveis garante que

$$\begin{aligned} dV(t, X(t)) &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} g_{ik} g_{jk} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right] (t, X(t)) dt \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, X(t)) \sum_{j=1}^m g_{ij}(t, X(t)) dB_j(t). \end{aligned} \quad (1.15)$$

A expressão presente na equação (1.15) pode ser escrita de forma simplificada por

$$dV = \left[ V_t + f^T V_x + \frac{1}{2} \text{tr} \left( G G^T V_{xx} \right) \right] dt + V_x^T G dB, \quad (1.16)$$

onde temos

$$V_t = \frac{\partial V}{\partial t}; \quad V_x = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_d} \right);$$

$$V_{xx} = \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{d \times d} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_d \partial x_d} \end{pmatrix}.$$

Quando escrevemos a equação (1.16) na forma integral e tomamos a esperança dos dois lados a integral de Itô resulta em zero, portanto o termo  $\int_{t_0}^T V_x^T G dB$  desaparece, assim temos

$$\mathbb{E} \left( V(t, X(t)) \right) - V(t_0, X(t_0)) = \mathbb{E} \left( \int_{t_0}^T LV(t, X(s)) ds \right), \quad (1.17)$$

onde temos

$$LV(t, x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f + \frac{1}{2} \text{tr} \left( GG^T V_{xx} \right) \right] (t, x). \quad (1.18)$$

## 1.4 Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs)

### 1.4.1 Uma abordagem heurística para o modelo de difusão

O fenômeno físico que dá origem ao modelo matemático da difusão (e do Movimento Browniano) é o movimento microscópico de uma partícula suspensa em um fluido. Moléculas do fluido se movem com várias velocidades e colidem com a partícula de todas as direções possíveis produzindo um bombardeio constante.

Como resultado desse bombardeio, a partícula exibe um movimento errático sempre presente. Esse movimento se intensifica com o aumento da temperatura do fluido. Denotemos por  $X(t)$  o deslocamento da partícula em uma direção a partir de sua posição inicial no instante  $t$ . Se  $\sigma(x, t)$  mede o efeito da temperatura no ponto  $x$  no tempo  $t$ , então o deslocamento devido ao bombardeio durante o tempo no intervalo  $[t, t + \Delta]$  é modelado como

$$\sigma(x, t)(B(t + \Delta) - B(t)).$$

Se a velocidade do fluido no ponto  $x$  no tempo  $t$  é  $\mu(x, t)$ , então o deslocamento da partícula devido ao movimento do fluido é  $\mu(x, t)\Delta$ . Assim, o deslocamento total de sua posição  $x$  no tempo  $t$  é dado por

$$X(t + \Delta) - x \approx \mu(x, t)\Delta + \sigma(x, t)(B(t + \Delta) - B(t)). \quad (1.19)$$

Assim, obtemos desta equação, o deslocamento médio de  $x$  durante o curto tempo  $\Delta$  é dado por

$$E((X(t + \Delta) - X(t) \mid X(t) = x) \approx \mu(x, t) \cdot \Delta, \quad (1.20)$$

e o segundo momento do deslocamento de  $x$  durante o curto tempo  $\Delta$  é dado por

$$E((X(t + \Delta) - X(t))^2 \mid X(t) = x) \approx \sigma^2(x, t)\Delta. \quad (1.21)$$

As relações apresentadas anteriormente mostram que para pequenos intervalos de tempo tanto a média quanto o segundo momento (e variância) do deslocamento de uma partícula em difusão no tempo  $t$  no ponto  $x$  são proporcionais ao comprimento do intervalo, com coeficientes  $\mu(x, t)$  e  $\sigma^2(x, t)$ , respectivamente.

Pode-se mostrar que, tomadas como relações assintóticas quando  $\Delta \rightarrow 0$ , ou seja, substituindo o sinal  $\approx$  pela igualdade e acrescentando termos  $o(\Delta)$  ao lado direito, esses dois requisitos caracterizam processos de difusão.

Assumindo que  $\mu(x, t)$  e  $\sigma(x, t)$  são funções suaves, a Equação Heurística (1.19) também aponta que para pequenos intervalos de tempo  $\Delta$ , as difusões são aproximadamente processos gaussianos. Dado  $X(t) = x$ ,  $X(t + \Delta) - X(t)$  é aproximadamente normalmente distribuído,

$$N(\mu(x, t)\Delta, \sigma^2(x, t)\Delta).$$

Temos claramente que, para grandes intervalos de tempo, as difusões não são gaussianas, a menos que os coeficientes não sejam aleatórios. Uma equação diferencial estocástica é obtida heurísticamente da relação (1.19) substituindo  $\Delta$  por  $dt$  e  $\Delta B = B(t + \Delta) - B(t)$  por  $dB(t)$ , e  $X(t + \Delta) - X(t)$  por  $dX(t)$ .

Seja  $B(t)$ ,  $t \geq 0$ , um processo de Movimento Browniano. Uma equação da forma

$$dX(t) = \mu(X(t), t)dt + \sigma(X(t), t)dB(t), \quad (1.22)$$

onde as funções  $\mu(x, t)$  e  $\sigma(x, t)$  são dadas e  $X(t)$  é o processo desconhecido, é chamado de Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs) conduzidas pelo Movimento Browniano. As funções  $\mu(x, t)$  e  $\sigma(x, t)$  são chamadas de coeficientes.

### 1.4.2 Definição formal de EDEs

**Definição 18.** Um processo  $X(t)$  é chamado de solução (ou solução forte) da EDE (1.22) se para todo  $t > 0$  as integrais  $\int_0^t \mu(X(s), s)ds$  e  $\int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s)$  existem, sendo a segunda uma integral de Itô, e temos que

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \mu(X(s), s)ds + \int_0^t \sigma(X(s), s)dB(s). \quad (1.23)$$

Equações da forma (1.22) são chamadas EDEs do tipo difusão.

EDEs mais gerais têm a forma

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dB(t), \quad (1.24)$$

onde  $\mu(t)$  e  $\sigma(t)$  podem depender de  $t$  e todo o passado dos processos

$$X(t) \text{ e } B(t)(X(s), B(s), s \leq t),$$

ou seja,

$$\mu(t) = \mu(X(s), s \leq t, t), \quad \sigma(t) = \sigma(X(s), s \leq t, t).$$

A única restrição em  $\mu(t)$  e  $\sigma(t)$  é que eles devem ser processos adaptados, com respectivas integrais definidas. Embora muitos resultados (como resultados de existência e unicidade) possam ser formulados para EDEs gerais, nos concentramos neste estudo em EDEs do tipo difusão.

Apenas algumas classes de EDEs admitem uma solução de forma fechada. Quando uma solução de forma fechada é difícil de encontrar, um resultado de existência e

unicidade é importante, porque sem ele, não fica claro o que exatamente a equação significa. Quando uma solução existe e é única, então métodos numéricos podem ser empregados para calculá-la. Da mesma forma que as Equações Diferenciais Ordinárias, as EDEs lineares podem ser resolvidas explicitamente.

De posse dos conceitos apresentados neste capítulo, podemos apresentar, na Seção 2.2 do próximo capítulo, os resultados de nosso estudo qualitativo envolvendo estabilidade via funções de Lyapunov para o caso estocástico.

# Estabilidade via funções de Lyapunov

## 2.1 Caso determinístico

Neste capítulo, serão introduzidos, segundo Gard (1988), Mao (2007) e Doering e Lopes (2016), uma síntese dos conceitos de estabilidade via funções de Lyapunov para sistemas determinísticos, a fim de tornar mais compreensível a teoria da estabilidade estocástica, a ser apresentada na Seção 2.2 deste capítulo.

Assim sendo, apresentaremos a seguir como se dá o método de Lyapunov e o teorema que garante a estabilidade ao sistema.

### 2.1.1 Método de Lyapunov

O método de Lyapunov torna possível a verificação, sem conhecimento explícito de solução do Sistema (2.1), a partir de uma função auxiliar, chamada de função de Lyapunov, definida a seguir.

**Definição 19** (Função de Lyapunov).

*Seja  $f(t, x)$  uma função contínua de  $\mathbb{R}^n$ -valor definida para  $t \in [t_0, T]$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

*Seja  $x(t; t_0, x_0)$  uma solução do problema de valor inicial determinístico:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

A função de Lyapunov  $V(t, x)$ , que torna possível a verificação da estabilidade no sistema, tem a seguinte derivada ao longo da curva solução:

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} = \dot{V}(t, x(t)) = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f \right] (t, x(t)).$$

onde  $\nabla_x V \cdot f$  indica o produto escalar do campo gradiente da função  $V$  pelo campo vetorial  $f$ .

Considerando que  $f(t, 0) = 0$ , temos, a partir do Teorema 3 garantida a estabilidade do sistema (2.1).

A estabilidade para uma solução de equilíbrio, ou outra solução escolhida de uma equação diferencial, constitui um conceito qualitativo importante para aplicações. De maneira geral, soluções que começam perto da solução escolhida permanecem sempre próximas a essa solução particular para o tempo tendendo ao infinito. Mais precisamente, consideremos a equação diferencial (2.1) e suponhamos também que  $f(t, 0) = 0$ , para todo  $t$ ; então  $x(t; t_0, 0) \equiv 0$  seja uma solução de (2.1). Esta solução é dita estável se dado  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta = \delta(s, \varepsilon) > 0$  tal que para todos  $t > s \geq t_0$

$$\|x(t; s, x)\| \leq \varepsilon$$

sempre que  $\|x\| < \delta$ .

Se, além disso, existir um  $\bar{\delta} = \bar{\delta}(s) > 0$  de tal modo que

$$x(t; s, x) \longrightarrow 0 \quad \text{com } t \longrightarrow \infty, \quad (2.2)$$

sempre que  $\|x\| < \bar{\delta}$ , então a solução zero é assintoticamente estável.

Se  $\delta$  (  $\bar{\delta}$  ) não é dependente de  $s$ , a estabilidade (estabilidade assintótica) é uniforme. Se a condição (2.2) vale para todos  $x_0$ , então  $x(t) \equiv 0$  é referido como globalmente assintoticamente estável.

**Teorema 3.** (*Teorema de Lyapunov*)

Assuma, para  $t > 0$  e  $|x| \leq K$ , para alguma constante  $K$ , existe uma função continuamente diferenciável  $V(t, x)$  que satisfaz as condições:

i)  $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ , onde as funções  $a$  e  $b$  são contínuas e positivas definidas em  $\mathbb{R}_+$ ;

ii)  $\dot{V}(t, x) \leq 0$ .

Então a solução zero, isto é,  $x(t) \equiv 0$ , da Equação (2.1) é (uniformemente) estável.

A prova para o teorema acima pode ser vista em Yoshizawa (1966), apud Gard (1988).

Apresentaremos, a seguir, aplicações em casos particulares envolvendo um sistema onde buscaremos uma função de Lyapunov candidata  $V(x)$ , para que possamos melhor entender os conceitos apresentados.

### 2.1.2 Aplicações da análise de estabilidade via funções de Lyapunov em casos particulares

#### Caso 1.

Consideremos um sistema dinâmico a analisar a estabilidade, modelado pela EDO (2.3). Seja uma função contínua  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(t, x) = -x^3$ , onde  $x = x(t)$ . Assim, temos:

$$\dot{x} = -x^3, \quad (2.3)$$

com o ponto de equilíbrio igual a 0, pois quando  $x \equiv 0$ , temos  $\dot{x} = 0$ .

Podemos considerar como função candidata à função de Lyapunov, a função

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2. \quad (2.4)$$

Notemos que  $V(x) > 0$ , para  $x \neq 0$ , portanto  $V(x)$  é uma função positiva definida, como requer o método.

Dada a função  $V(x)$ , apresentada em (2.4), temos



$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(2x)\dot{x} \\
&= x\dot{x} \\
&\stackrel{\text{por (2.3)}}{=} x(-x^3) = -x^4.
\end{aligned}$$

Como  $x^4 \geq 0$ , para qualquer valor de  $x$ , temos

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x.$$

Temos ainda

$$V(0) = 0$$

$$V(x) > 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Dessa forma, temos pelo Teorema 3 (Teorema de Lyapunov) e a função  $V(x)$ , apresentada em (2.4), que o sistema (2.3) é uniformemente estável e  $x = 0$  é um ponto de equilíbrio estável do sistema.

Ainda pode-se mostrar que o sistema (2.3) é globalmente assintoticamente estável.

Apresentaremos, a seguir, mais um caso de aplicação, onde temos um sistema contendo EDOs no  $\mathbb{R}^3$ .

## Caso 2.

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2(x_3 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_3 - 1) \\ \dot{x}_3 = -x_3 \end{cases} \quad (2.5)$$

definidas pelo campo de vetores não-lineares

$$f(x_1, x_2, x_3) = (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3).$$

A parte linear do sistema (2.5) no ponto de equilíbrio dado pela origem  $x_0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  é

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vamos buscar uma função de Lyapunov para o sistema na origem no formato quadrático

$$V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2, \quad \text{com } a, b, c > 0$$

Claramente, temos  $V(0, 0, 0) = 0$  e  $V(x) > 0$ , para cada  $x \neq x_0 = (0, 0, 0)$ .

Também temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle &= \langle (2ax_1, 2bx_2, 2cx_3), (2x_2x_3 - 2x_2, x_1 - x_1x_3, -x_3) \rangle \\ &= (2b - 4a)x_1x_2 + (4a - 2b)x_1x_2x_3 - 2cx_3^2 \end{aligned}$$

e assim, se tomarmos  $a = 1$ ,  $b = 2a = 2$  e  $c = 1$ , resulta que pra todo  $x_1, x_2, x_3$ :

$$\langle \nabla V(x_1, x_2, x_3), f(x_1, x_2, x_3) \rangle = -2x_3^2 \leq 0,$$

para  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2$ .

Logo, pelo Teorema 3 (Teorema de Lyapunov), podemos concluir que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio estável do sistema (2.5).

Na próxima seção, será apresentado o escopo de nossa pesquisa, isto é, a estabilidade via funções de Lyapunov para o caso estocástico, utilizando EDEs.

## 2.2 Caso estocástico

De modo análogo ao apresentado, na Seção 2.1, onde introduzimos os conceitos de estabilidade via funções de Lyapunov para sistemas modelados por EDOs, apresentaremos nesta seção, segundo Gard (1988) e Mao (2007), uma síntese dos conceitos de estabilidade via função de Lyapunov para sistemas estocásticos, ou seja, sistemas modelados por EDEs.

A teoria qualitativa das equações diferenciais engloba técnicas e métodos que permitem investigar o comportamento geral das soluções a partir da forma das equações diferenciais e de qualquer informação disponível sobre condições iniciais ou dados da vizinhança. Para EDOs, em particular, os resultados correspondentes englobam a versão mais simples de integrar uma desigualdade diferencial envolvendo uma função auxiliar. Ou seja, deduz-se, da não positividade de sua derivada, que uma função do tipo Lyapunov aplicada a uma solução é uma função não crescente. Um ponto-chave aqui que torna essa abordagem útil para resultados qualitativos é que apenas a forma da função de Lyapunov e a equação diferencial, e não a forma explícita da solução, são necessárias para estabelecer a não positividade da derivada. As propriedades das soluções são determinadas, então, a partir daquelas que a função do tipo Lyapunov possui. No caso estocástico utiliza-se a Fórmula de Itô, apresentada no Capítulo 1, Equação (1.18), para fornecer uma expressão para a diferencial estocástica da função de Lyapunov, aplicada a uma solução da Equação Diferencial Estocástica.

Ao longo das próximas definições, considera-se o seguinte sistema estocástico, sob condições que garantem a existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dB(t), \quad (2.6)$$

onde  $f$  é uma função contínua com valor vetorial  $n$  para  $t \in [t_0, T]$ ,  $x \in R^n$ ;  $G$  é uma função contínua, em que os coeficientes assumem os valores de uma matriz  $n \times m$ ;  $f(t, x)$  e  $G(t, x)$  são pelo menos localmente Lipschitz em  $x$ ; e  $B = \{B_j\}$ , é o Movimento Browniano  $m$ -dimensional.

Assim, será apresentado a seguir, os teoremas de Lyapunov referente à EDEs.

**Teorema 4.** (Teorema de Lyapunov para EDEs - Parte I)

Suponha  $t > 0$  e alguma constante  $K$ . Se temos que:

*i)* Existem uma função contínua  $V(t, x)$  que satisfaz, para  $|x| \leq K$ :

$$a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|),$$

onde as funções  $a$  e  $b$  são contínuas e positivas definidas em  $\mathbb{R}_+$ ;

*ii)* As derivadas parciais  $\partial V/\partial t$ ,  $\partial V/\partial x_i$  e  $\partial^2 V/\partial x_i \partial x_j$  existem, são contínuas

e

$$LV(t, x) \leq 0,$$

para  $0 < |x| < K$ , onde  $LV(t, x)$  é dado por:

$$LV(t, x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f + \frac{1}{2} \text{tr} \left( GG^T V_{xx} \right) \right] (t, x). \quad (2.7)$$

Então a solução zero, isto é,  $x(t) \equiv 0$ , da Equação (2.6) é (uniformemente) estável.

Notemos na condição ii) que não é exigido que as derivadas parciais sejam contínuas em  $x = 0$ . Isto torna a prova deste resultado um pouco mais técnica, pois se faz necessário trabalhar com a Fórmula de Itô levando em conta tempos de paradas que atingem uma determinada bola de raio pequeno e centrada na origem. Esta prova com todos estes detalhes pode ser vista em Gard (1988), p. 136-139.

Todavia, apresentaremos a ideia central e alguns passos importantes para tal prova, inspirados em Kloeden e Platen (1992). Para isso, vamos assumir que as derivadas parciais da função  $V$ , apresentadas em ii), existem e são contínuas em todos os pontos, e na condição i) vamos assumir que  $a = a(r)$  e  $b = b(r)$  são funções contínuas e crescentes, para  $r > 0$ , e  $a(0) = b(0) = 0$ , tal que  $a(|x|) \leq V(t, x) \leq b(|x|)$ . De acordo com nossas considerações, a função  $V(t, x)$  é suficientemente suave para que a Fórmula Itô possa ser aplicada. Logo,  $V(t, X_t)$  tem o diferencial estocástico de Itô dado por

$$dV(t, X_t) = LV(t, X_t) dt + \nabla_x V(t, X_t) dW_t,$$

ou ainda, na forma integral

$$\begin{aligned} V(t, X_t) - V(t_0, X_{t_0}) \\ = \int_{t_0}^t LV(s, X_s) ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X_s) dW_s, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde o operador  $L$  satisfaz a condição

$$LV(t, x) \leq 0, \quad (2.9)$$

para todo  $x$  e  $t$ . Então a igualdade (2.8) pode ser substituída pela desigualdade

$$V(t, X_t) - V(t_0, X_{t_0}) \leq \int_{t_0}^t b(s, X_s) \frac{\partial V}{\partial x}(s, X_s) dW_s. \quad (2.10)$$

Tomando a esperança condicional e usando uma das propriedades das integrais de Itô obtemos

$$E(V(t, X_t) \mid \mathcal{A}_{t_0}) \leq V(t_0, X_{t_0}),$$

onde  $\mathcal{A}_t$ , é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $X_s$ , para  $t_0 \leq s \leq t$ . Esta desigualdade diz que a função de Lyapunov  $V(t, X_t)$  avaliada ao longo das soluções da equação (2.6) é um supermartingale. Portanto, podemos usar a desigualdade máxima de martingale (conforme apresentada em Kloeden e Platen (1992), p. 66, desigualdade (3.6)) para obter

$$P\left(\sup_{t_0 \leq t \leq T} V(t, X_t) \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} V(t_0, x_0),$$

para todo  $\epsilon > 0$  e todo  $T > t_0$ . Assim

$$P\left(\sup_{t \geq t_0} V(t, X_t) \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon} V(t_0, x_0). \quad (2.11)$$

Como a função  $V$  é contínua, segue que  $V(t_0, x_0) \rightarrow 0$  quando  $x_0 \rightarrow 0$ , e assim, pela condição i) segue que

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} P\left(\sup_{t \geq t_0} |X_t| \geq \epsilon\right) = 0,$$

ou seja, a solução zero é estocasticamente estável como queríamos provar.

**Teorema 5.** *(Teorema de Lyapunov para EDEs - Parte II)*

*Se as premissas do Teorema 4 forem mantidas, exceto que em (ii)  $LV(t, x) \leq 0$  for substituído por  $LV(t, x) \leq -c(|x|)$ , onde a função  $c$  é contínua e definida positiva em  $\mathbb{R}_+$ , então a solução  $x(t) \equiv 0$ , da Equação (2.6), é estocasticamente assintoticamente estável. Além disso, se as hipóteses deste teorema valem para todo  $x$ , e a função  $a$  que aparece em (i) também satisfaz  $a(r) \rightarrow \infty$  quando  $r \rightarrow \infty$  ( $V$  é chamado radialmente ilimitado), então  $x(t) \equiv 0$  é globalmente assintoticamente estável.*

A prova dos Teorema 5 pode ser vistas em Gard (1988), p. 136-139.

Muitos problemas relativos à estabilidade dos estados de equilíbrio de um sistema estocástico não linear podem ser reduzidos a problemas relativos à estabilidade de soluções do sistema linear associado. (TORNATORE; BUCCELLATO; VETRO, 2005) (GARD, 1988). Seja  $X(t) \equiv 0$  a solução trivial do sistema 2.6. A forma linear da Equação 2.6 é definida da seguinte forma:

$$dX(t) = F(t)X(t)dt + G(t)X(t)dW(t). \quad (2.12)$$

**Teorema 6.** *Se a solução trivial  $X(t) = 0$  é assintoticamente estável para o sistema linear 2.12 com coeficientes constantes ( $F(t) = F$ ,  $G(t) = G$ ) e os coeficientes dos sistemas 2.6 e 2.12 satisfazem a seguinte desigualdade:*

$$|f(t, x) - F \cdot x| + |g(t, x) - G \cdot x| < \gamma|x|$$

*em uma vizinhança suficientemente pequena de  $x = 0$ , com uma constante suficientemente pequena  $\gamma$ , então a solução trivial  $X(t) = 0$  do sistema 2.6 é globalmente assintoticamente estável.*

A prova dos Teorema 6 pode ser vista em Tornatore, Buccellato e Vetro (2005), p. 121.

A partir dos conceitos apresentados nos Teoremas 4 e 5, podemos considerar o corolário a seguir, que apresentaremos sua demonstração.

**Corolário 1.** *Consideremos a equação escalar não autônoma*

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t), \quad (2.13)$$

onde, além das condições de existência e unicidade, as funções  $f$  e  $g$  satisfazem, para as constantes  $a$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} f(t, x) &= ax + \bar{f}(t, x) \\ g(t, x) &= bx + \bar{g}(t, x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

com

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \left[ \frac{|\bar{f}(t, x)|}{|x|} + \frac{|\bar{g}(t, x)|}{|x|} \right] = 0, \quad \text{uniformemente em } t,$$

onde uniformemente em  $t$  significa que para qualquer valor de  $t$  esse limite vai para zero.

Então, a solução  $X(t) \equiv 0$  da Equação (2.13) é estocasticamente assintoticamente estável se temos:

$$a - \frac{1}{2} b^2 < 0.$$

**Demonstração:**

De fato, considerando a função  $V(x) = |x|^k$ , para  $k > 0$  e  $|x| > 0$ . Sabemos que

$$LV(t, x) = \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_x V \cdot f + \frac{1}{2} \text{tr} (GG^T V_{xx}) \right] (t, x). \quad (2.15)$$

Para a nossa escolha de  $V$ , temos então

$$LV(X) = [0 + k|x|^{k-1}f + \frac{1}{2}g^2k(k-1)|x|^{k-2}].$$

A partir da Equação (2.14), obtemos

$$LV(X) = \left[ k|x|^{k-1} \left( ax + \bar{f}(t, x) \right) + \frac{1}{2} \left( bx + \bar{g}(t, x) \right)^2 k(k-1)|x|^{k-2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[ a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{1}{2}(k-1) \left( bx + \bar{g}(t, x) \right)^2 x^{-2} \right] k|x|^k \\
&= \left[ a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{1}{2}(k-1) \left( (bx)^2 + 2bx\bar{g}(t, x) + (\bar{g})^2(t, x) \right) x^{-2} \right] k|x|^k \\
&= \left[ a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{1}{2}(k-1) \left( b^2 + \frac{2b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{x^2} \right) \right] k|x|^k \\
&= \left[ a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \left( \frac{k}{2} - \frac{1}{2} \right) \left( b^2 + \frac{2b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{x^2} \right) \right] k|x|^k \\
&= \left[ a + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{b^2 k}{2} + \frac{bk\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{k(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} - \frac{b^2}{2} - \frac{b\bar{g}(t, x)}{x} - \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right] k|x|^k \\
&= \left[ a - \frac{b^2}{2} + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{b^2 k}{2} + k \left( \frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right) - \left( \frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right) \right] k|x|^k \\
&= \left[ a - \frac{b^2}{2} + \frac{\bar{f}(t, x)}{x} + \frac{b^2 k}{2} + (k-1) \left( \frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{(\bar{g})^2(t, x)}{2x^2} \right) \right] k|x|^k.
\end{aligned}$$

Como  $k$  pode ser escolhido tão pequeno (próximo de 0) e como temos que o

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{|\bar{f}(t, x)|}{|x|} = \frac{|\bar{g}(t, x)|}{|x|} = 0$$

presente em (2.14), podemos notar que

$$\left| \frac{\bar{f}(t, x)}{x} \right| + \frac{1}{2}kb^2 + \left| (k-1) \left[ \frac{b\bar{g}(t, x)}{x} + \frac{\bar{g}^2(t, x)}{2x^2} \right] \right| < \left| a - \frac{1}{2}b^2 \right|$$

em  $B_r \setminus \{0\}$ .

Com isso temos que:

- As derivadas parciais de  $V$  existem e temos

$$LV(x) \leq -ck|x|^k, \quad (2.16)$$



onde  $h(|x|) = ck|x|^k$ , contínua e positiva definida no  $\mathbb{R}_+$ . No Teorema 5,  $h$  é a função procurada para  $LV(t, x) \leq -c(|x|)$ .

- Ainda temos que vale

$$V(t, x) = |x|^k \quad (x \neq 0, k > 0).$$

Tomando  $a(|x|) = b(|x|) = |x|^k$ , logo  $a$  e  $b$  são funções contínuas e assumem valores positivos.

Para o caso particular com a equação linear correspondente

$$dX(t) = aX(t)dt + bX(t)dW(t), \quad (2.17)$$

com  $\bar{f} = 0$  e  $\bar{g} = 0$  para qualquer  $x$  (inclusive  $x \rightarrow \infty$ ).

A análise anterior resulta em (2.16) valendo para todo  $x \neq 0$ .

Como  $V(x) = |x|^k$  é radialmente ilimitado, pode-se concluir que  $X(t) \equiv 0$  é estocasticamente assintoticamente estável globalmente se  $a - \frac{1}{2}b^2 < 0$ , pela segunda parte do Teorema 5. ■

Será apresentado, a seguir, uma aplicação do Corolário 1, que é apresentada como exercício proposto em Oksendal (2003) p. 77, onde temos um caso em que a Equação Diferencial Estocástica aplicada em um problema de Crescimento Populacional, sendo estudado a condição de estabilidade.

### 2.2.1 Aplicação em Crescimento Populacional

Temos a equação diferencial estocástica

$$dX_t = rX_t(K - X_t)dt + \beta X_t dB_t, \quad (2.18)$$

com  $X_0 = x > 0$ , que é frequentemente utilizada como modelo para o crescimento de uma população de tamanho  $X_t$  em um ambiente que possui um ruído aleatório. A constante  $\beta \in \mathbb{R}$  é uma constante que mede a intensidade da parte aleatória.

Podemos notar que a EDE tem os seguintes campos:

$$f(x) = rKx + \bar{f}(x), \text{ onde } \bar{f}(x) = -rx^2 \quad \text{e} \quad g(x) = \beta x + \bar{g}(x), \text{ onde } \bar{g}(x) = 0.$$

Assim, temos

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \left[ \frac{|\bar{f}(x)|}{|x|} + \frac{|\bar{g}(x)|}{|x|} \right] = 0$$

e, portanto, por uma consequência do Teorema de Lyapunov para o caso estocástico, isto é, Teorema 5, temos que a solução  $X_t = 0$  é estocasticamente assintoticamente estável se

$$\left( rK - \frac{1}{2}\beta^2 \right) < 0, \quad (2.19)$$

ou seja, se

$$rK < \frac{1}{2}\beta^2. \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Simulações numéricas do crescimento populacional

A partir dos resultados encontrados na aplicação apresentada na seção anterior, foram realizadas simulações numéricas da Equação (2.18), com utilização de programação em linguagem Python, fazendo uso do método Euler-Maruyama (ROSSANT, 2018), para gerar os gráficos apresentados nas Figuras 2.1 e 2.2, de modo a variar os seguintes parâmetros:

- a constante  $r$ , que é chamada de taxa de crescimento (ou decrescimento) intrínseca;
- a constante  $K$ , que é a capacidade do ambiente (portanto temos sempre  $K > 0$ );
- e a constante  $\beta$ , que representa o ruído presente no sistema.

Rossant (2018) apresenta um código para gerar gráficos de EDEs, implementado na plataforma Jupyter, a qual modificamos para utilizar no ambiente Colaboratory do Google (Google Colab). Optamos pelo uso em tal ambiente para utilização da linguagem Python, devido ao fato de já possuímos experiência nessa plataforma, bem como pela facilidade de acesso ao Google Colab, por fazer parte das ferramentas e serviços do G Suite for Education, disponibilizados pelo Termo de Cooperação Técnica firmado entre a Google e a universidade em que se realiza esta pesquisa, a Unesp. Ademais, Rossant

(2018) apresenta o código fonte, em Python, aplicado para uma equação de Langevin, modelando um processo de Ornstein-Uhlenbeck; o qual ajustamos para a EDE (2.18), que modela a aplicação em crescimento populacional que trabalhamos.

Os conhecidos métodos de Euler, definidos considerando o método de Runge-Kutta de ordem 2, permitem que seja encontrado numericamente tantos pontos quanto se queiram, de um determinado intervalo de uma EDO. Com uso computacional de tais métodos, é possível trabalhar com um grande número de pontos, ao discretizar o intervalo, tendo um resultado próximo do valor exato da equação diferencial. Para o caso estocástico, ao se trabalhar com EDEs, temos o método de Euler-Maruyama que envolve um termo determinístico (como no método padrão de Euler para EDOs) e um termo estocástico (referente à variável aleatória), da seguinte forma:

Consideremos a seguinte equação diferencial estocástica

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t,$$

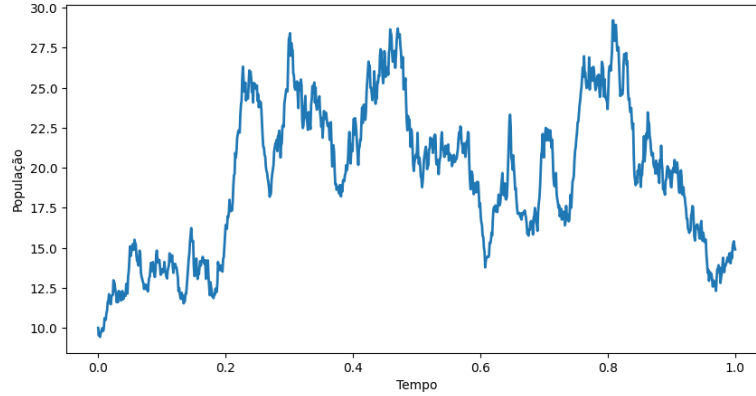
O método de Euler-Maruyama apresenta o seguinte esquema iterativo

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta_t + b\Delta W_t.$$

Mais detalhes do método podem ser vistos em Kloeden e Platen (1992) p. 305.

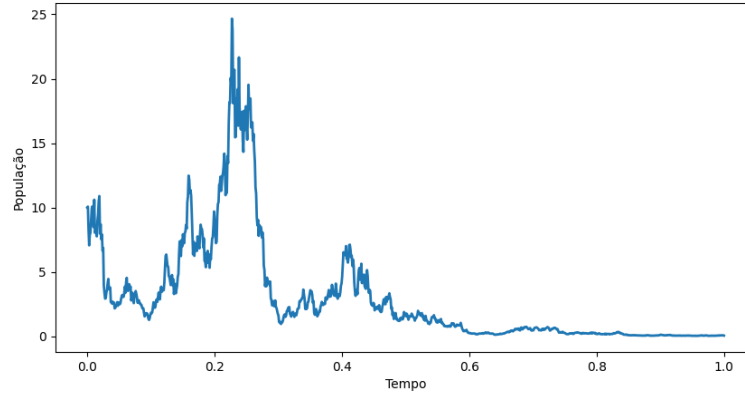
Apresentamos no Apêndice B o código em Python na plataforma Google Colab, como adaptamos e utilizamos para gerar os gráficos apresentados nas Figuras 2.1 e 2.2, de modo a variar os parâmetros como descrevemos a seguir, em (2.21) e (2.22).

Figura 2.1: Simulação numérica do crescimento populacional utilizando os parâmetros (2.21)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 2.2: Simulação numérica do crescimento populacional utilizando os parâmetros (2.22)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Temos na Figura 2.1 uma simulação utilizando os parâmetros

$$K = 20, \quad r = 0,25 \quad e \quad \beta = 1, \quad (2.21)$$

tendo  $rK - \frac{1}{2}\beta^2 \geq 0$ , que mostra que quando não se tem a condição  $(rK - \frac{1}{2}\beta^2) < 0$ , o sistema não é estocasticamente assintoticamente estável.

Todavia, na Figura 2.2 temos uma simulação utilizando os parâmetros

$$K = 20, \quad r = 0,25 \quad e \quad \beta = 4, \quad (2.22)$$

tendo  $rK - \frac{1}{2}\beta^2 < 0$ , mostra que se esta condição,  $(rK - \frac{1}{2}\beta^2) < 0$ , é satisfeita, temos estabilidade no sistema.

Destaca-se que os gráficos apresentados nas Figuras 2.1 e 2.2, por serem modelados a partir de uma EDE, são gerados a partir de uma variável aleatória. Dessa forma, a cada vez que o programa é rodado este gera um novo gráfico (assim como apresentado para o Movimento Browniano na Figura 1.2, no Capítulo 1). Contudo, permanecendo o mesmo tipo de comportamento.

Além do código utilizado em linguagem Python, disponibilizado no Apêndice B, em tal apêndice também é possível acessá-lo no ambiente Google Colab, a partir do link disponibilizado (para isso, sendo necessário uma conta Google).

A Aplicação em Crescimento Populacional apresentada neste capítulo foi de grande importância para, na fase inicial da pesquisa, visualizar uma aplicação do conteúdo teórico abordado.

Será apresentado, no próximo capítulo, a aplicação central de nossa pesquisa, um estudo de Estabilidade em modelos epidemiológicos, com a utilização de modelos SIR Estocásticos.

## Aplicação: Estabilidade em modelos epidemiológicos SIR

Pode-se definir a epidemiologia como a ciência que estuda as causas, a evolução e a distribuição de doenças em populações. Na epidemiologia matemática, doenças infecciosas são modeladas com o objetivo de buscar melhores estratégias de prevenção e controle, bem como auxiliar governos e agentes de saúde na tomada de decisão. Desse modo, os modelos matemáticos são importantes ferramentas para realizar a análise da propagação e controle de doenças infecciosas (ALMEIDA, 2020).

É uma estratégia usual na modelagem, considerar inicialmente o modelo mais simples possível, mesmo que algumas características de contágio não sejam levadas em conta. Desse modo, o modelo SIR, introduzido por McKendrick <sup>1</sup> e Kermack <sup>2</sup> (1927), que é um modelo compartimental que divide a população nos estados de (S)uscetíveis, (I)nfectados e (R)emovidos (que contém os que se recuperaram e os que, infelizmente, faleceram), embora simples, tem sido usado amplamente no estudo de diversas doenças, inclusive, da Covid-19 (COMUNIAN et al, 2020; COOPE et al, 2020; e NEVES e GUERRERO, 2020; apud (ALMEIDA, 2020).

<sup>1</sup>Tenente-coronel, médico militar e epidemiologista escocês, Anderson Gray McKendrick (1876-1943), foi pioneiro no uso de métodos matemáticos em epidemiologia.

<sup>2</sup>Bioquímico escocês, William Ogilvy Kermack (1898-1970).

Após o estudo do método de Lyapunov para sistemas estocásticos, apresentado no capítulo anterior, procurou-se entender como é utilizado o modelo epidemiológico SIR, primeiramente no modelo determinístico para modelagem de epidemias, para então se trabalhar também com modelos SIR Estocásticos com uso de Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs), que fornecem uma importante abordagem para o estudo de fenômenos naturais, utilizando-se de distribuições de probabilidade de modo a ser possível gerar conclusões que não seriam possíveis com uma modelagem determinística (ALLEN, 2010).

### 3.1 Modelos SIR determinísticos

Consideremos o seguinte modelo SIR determinístico, introduzido por Kermack e Mckendrick (1927):

Figura 3.1: Diagrama do modelo SIR



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t); \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \lambda I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde, nas Equações (3.1),  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$  denotam o número (ou proporção) de indivíduos Suscetíveis à doença, de membros Infectados e de membros que foram afastados da possibilidade de infecção por imunidade total, ou que, infelizmente faleceram (Removidos), respectivamente. A população considerada tem tamanho constante  $N$ , e as variáveis podem ser normalizadas para  $N = 1$ , ou seja  $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ , para todo  $t \geq 0$ . O parâmetro  $\lambda$  representa a taxa de recuperação de pessoas infectadas; e  $\beta$  é o número médio de contatos por infectante por dia (ou taxa de infecção). Obviamente, temos  $\lambda, \beta \in R_+$ .

Tal modelo, baseia-se nas seguintes suposições:

- (i) Um membro da população faz contato suficiente para transmitir a infecção com  $\beta N$  por unidade de tempo, onde  $N$  representa o tamanho total da população.
- (ii) Os infectantes deixam a classe infecciosa na taxa  $\lambda I$  por unidade de tempo.
- (iii) Não há entrada ou saída da população, exceto possivelmente através de morte pela doença.
- (iv) Não há mortes por outras doenças e o tamanho total da população é um  $N$  constante (LOPES, 2023).

Ademais, este modelo considera ainda que um indivíduo recuperado não volta a ser contagioso. Além disso, o período de incubação (o tempo entre a infecção e o aparecimento visível dos sintomas) e latência (o tempo entre a infecção e a capacidade de infectar) são considerados irrelevante para o estudo da propagação da doença (LOPES, 2023).

Quando a epidemia a ser modelada não satisfaz as suposições apresentadas, é possível apresentar extensões ou modificações do modelo SIR clássico, apresentado em (3.1), para que o novo modelo possa abranger tais características, como por exemplo, ser relevante o período de incubação ou latência ser relevante ao modelo, o número de nascimentos e óbitos naturais (bem como por outras doenças), vacinas. Kermack e McKendrick apresentam uma série de três artigos apresentando uma variedade de modelos epidemiológicos, estendendo e modificando o modelo SIR clássico (Kermack; McKendrick, 1927), (Kermack; McKendrick, 1932), (Kermack; McKendrick, 1933). Uma forma de realizar essa extensão é com a utilização de mais compartimentos no modelo. Outra forma, é a utilização de novos parâmetros. Apresentamos, a título de exemplos, alguns desses modelos:

- SEIR (Suscetíveis, Expostos, Infectados, Recuperados)

Modelo para doenças infecciosas que há um período de exposição após a transmissão da infecção de indivíduos susceptíveis para membros potencialmente infecciosos, mas antes que estes potenciais infecciosos desenvolvam sintomas e possam transmitir a infecção.



- SITR (Suscetíveis, Infectados, Tratamento, Recuperados)

Uma forma de tratamento possível para algumas doenças é a vacinação para proteger contra infecções antes do início de uma epidemia. Uma forma de modelar isto seria reduzir o tamanho total da população pela fração da população protegida contra a infecção, no compartimento Tratamento.

- SLIAR (Suscetíveis, Latentes, Infectados, Assintomáticos, Recuperados)

Em algumas doenças, como a gripe, no final de um estágio (Latentes) os indivíduos podem prosseguir para um de dois estágios: parte dos indivíduos Latentes prossegue para um estágio de Infecciosos, enquanto o restante prossegue para um estágio do compartimento Assintomáticos.

- SEQIJR (Suscetíveis, Expostos, Quarentena, Infectados, Hospitalizados (em isolamento), Recuperados)

Modelo para doenças onde não existe vacina disponível, o isolamento dos infecciosos diagnosticados e a quarentena das pessoas suspeitas de terem sido infectadas são as únicas medidas de controle disponíveis.

- SIRD (Suscetíveis, Infectados, Recuperados, Mortos)

Modelo que acrescenta o compartimento Mortos, dividindo o compartimento Removidos do SIR clássico, nos indivíduos que se recuperaram e os que faleceram.

Maiores detalhes destes e outros modelos epidemiológicos derivados do SIR clássico, podem ser encontrados em Brauer e Castillo-Chavez (2012).

Para o estudo de estabilidade a ser apresentado no presente capítulo, consideramos o modelo SIR com Nascimentos e Óbitos, apresentado por Kermack e McKendrick (1932), onde ao Sistema (3.1) é adicionado o parâmetro  $\mu$ , que representa a taxa de natalidade e a taxa mortalidade ao longo do tempo em que se modela a epidemia, ou seja, mortes da população exceto dos infectados pela epidemia em estudo (TORNATORE; BUCCELLATO; VETRO, 2005). Ressaltamos que, por motivos de simplificação do modelo, é usual utilizar-se o mesmo valor para taxa de natalidade e para taxa mortalidade, portanto, utiliza-se um mesmo parâmetro  $\mu$  para ambos. Tal modelo, é apresentado a seguir:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu; \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - (\lambda + \mu)I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t) - \mu R(t). \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.2 Modelos SIR estocásticos

É possível introduzir um ruído nas equações do Sistema (3.2), transformando o problema determinístico em um problema estocástico. O ruído pode induzir efeitos não triviais em sistemas físicos e biológicos. A presença de uma fonte de ruído de fato pode modificar o comportamento da evolução determinística correspondente do sistema. Dessa forma, temos o seguinte modelo SIR estocástico, como apresentado por Tornatore, Buccellato e Vetro (2005):

$$\begin{cases} dS(t) = (-\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu)dt - \sigma S(t)I(t)dW(t); \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - (\lambda + \mu)I(t))dt + \sigma S(t)I(t)dW(t); \\ dR(t) = (\lambda I(t) - \mu R(t))dt, \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\sigma$  é uma constante positiva e  $W$  é um processo real de Wiener definido em base estocástica  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ .

Se usarmos a seguinte função de Lyapunov:

$$V(u) = u_1^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} u_2^2 + \frac{\mu}{\lambda} u_3^2, \quad (3.4)$$

onde  $u = (u_1, u_2, u_3)$ , então vale o seguinte resultado para estabilidade estocástica no sistema (3.3), apresentado na Proposição 4, a qual demonstraremos de modo detalhado a seguir, como uma das contribuições de nosso trabalho.

#### Proposição 4.

*Se as condições  $0 < \beta < \min \left\{ \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}, 2\mu \right\}$  e  $\mu > \lambda$  se mantêm, então o equilíbrio livre de doença, dado no ponto de equilíbrio  $E_0 = (1, 0, 0)$  de (3.3) é globalmente assintoticamente estável.*

#### Demonstração:

Substituindo, no Sistema (3.3),  $S(t) = u_1(t) + 1$ ,  $I(t) = u_2(t)$ ,  $R(t) = u_3(t)$ , podemos reescrever o sistema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} du_1(t) &= (-\beta(u_1(t) + 1)u_2(t) - \mu u_1(t) + \mu)dt - \sigma(u_1(t) + 1)u_2(t)dW(t); \\ du_2(t) &= (\beta(u_1(t) + 1) - \lambda + \mu)u_2(t)dt + \sigma(u_1(t) + 1)u_2(t)dW(t); \\ du_3(t) &= (\lambda u_2(t) - \mu u_3(t))dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Utilizando o Teorema 6, podemos considerar o seguinte sistema, como um sistema linearizado de (3.5):

$$\begin{aligned} du_1(t) &= (-\beta u_2(t) - \mu u_1(t))dt - \sigma u_2(t)dW(t); \\ du_2(t) &= (\beta - \lambda - \mu)u_2(t)dt + \sigma u_2(t)dW(t); \\ du_3(t) &= (\lambda u_2(t) - \mu u_3(t))dt. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O sistema linearizado (3.6) pode ser visto, como na forma do seguinte sistema estocástico n-dimensional:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dW(t),$$

onde  $f(t, X)$  é uma função em  $\mathbb{R}^3$  definida em  $[t_0, +\infty[ \times \mathbb{R}^3$ ;

$g(t, X)$  é uma matriz  $3 \times 1$ ;

$f, g$  são funções localmente Lipschitz em  $x$ ;

e  $W(t)$  é um processo de Wiener 1-dimensional.

Portanto, temos

$$\begin{aligned} f(t, x, y, z) &= ((-\beta y - \mu x), ((\beta - \lambda - \mu)y), (\lambda y - \mu z)); \\ g(t, x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\sigma y \\ \sigma y \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Considerando a função  $V(u)$  apresentada em (3.4), com  $u = (x, y, z)$  temos:

$$V(u) = V(x, y, z) = x^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} y^2 + \frac{\mu}{\lambda} z^2, \quad (3.8)$$

então temos, sob as condições  $0 < \beta < \min \left\{ \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}, 2\mu \right\}$  e  $\mu > \lambda$ , que  $V(u)$  é uma função de Lyapunov. Além disso, para todo  $(x, y, z)$  diferente de  $(0, 0, 0)$  mostremos o valor de  $LV$ , sendo apresentados os cálculos nas seguintes parcelas:

$$LV(t, \mathbf{x}) = \left[ \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{(i)} + \underbrace{\nabla_{\mathbf{x}} V \cdot \mathbf{f}}_{(ii)} + \underbrace{\frac{1}{2} \text{tr} (GG^T V_{\mathbf{xx}})}_{(iii)} \right] (t, \mathbf{x}), \quad (3.9)$$

onde temos  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ .

(i)

Temos  $\frac{\partial V}{\partial t} = 0$ , pois  $V$ , apresentada em (3.8), não possui a variável  $t$ .

Para encontrar os valores das parcelas (ii) e (iii), busquemos primeiramente os valores das primeiras e segundas derivadas parciais da função  $V(u) = V(x, y, z)$ , que irão compor o Vetor Gradiente e a Matriz Hessiana, utilizados no Gerador Infinitesimal apresentado em (3.9), em (ii) e (iii).

Encontremos, primeiramente, os valores de  $\frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} V(u) = V(x, y, z) &= x^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} y^2 + \frac{\mu}{\lambda} z^2 \Rightarrow \\ \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z) &= 2x \\ \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z) &= 2 \cdot \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \cdot y = \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \cdot y \\ \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) &= 2 \cdot \frac{\mu}{\lambda} \cdot z \end{aligned}$$

Para então encontrar as seguintes derivadas parciais de ordem 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x^2}(x, y, z) &= 2; & \frac{\partial V}{\partial y^2}(x, y, z) &= \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}}; & \frac{\partial V}{\partial z^2}(x, y, z) &= \frac{2\mu}{\lambda}; \\ & & & & (3.10) \\ \frac{\partial V}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial V}{\partial z \partial y} = \frac{\partial V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial V}{\partial y \partial z} = 0. \end{aligned}$$

Vamos determinar o Vetor Gradiente da função  $V$ :

$$\nabla V = \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x, y, z); \quad \frac{\partial V}{\partial y}(x, y, z); \quad \frac{\partial V}{\partial z}(x, y, z) \right) = \left( 2x; \quad \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \cdot y; \quad 2 \cdot \frac{\mu}{\lambda} \cdot z \right)$$

A partir do qual, podemos encontrar o seguinte produto interno  $\nabla V \cdot f$ , isto é, a parcela **(ii)** de (3.9).

$$\begin{aligned} \nabla V \cdot f &= \left\langle \left( 2x; \quad \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} y; \quad 2 \frac{\mu}{\lambda} z \right), \quad \left( (-\beta y - \mu x); ((\beta - \lambda - \mu)y); (\lambda y - \mu z) \right) \right\rangle \\ &= \left( 2x \cdot (-\beta y - \mu x) \quad + \quad \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} y \cdot ((\beta - \lambda - \mu)y) \quad + \quad 2 \frac{\mu}{\lambda} z \cdot (\lambda y - \mu z) \right) \\ &= \left( -2\beta xy - 2\mu x^2 \quad + \quad \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} (\beta y^2 - \lambda y^2 - \mu y^2) \quad + \quad 2\mu yz - \frac{2\mu^2}{\lambda} z^2 \right) \\ &= \left( -2\beta xy - 2\mu x^2 \quad + \right. \\ &\quad + \frac{\beta \lambda y^2 - \lambda^2 y^2 - \lambda \mu y^2 + 2\beta \mu y^2 - 2\lambda \mu y^2 - 2\mu^2 y^2 + \beta \sigma^2 y^2 - \lambda \sigma^2 y^2 - \mu \sigma^2 y^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \quad + \\ &\quad \left. + 2\mu yz - \frac{2\mu^2}{\lambda} z^2 \right) \\ &= \left( \frac{(\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot (-2\beta xy - 2\mu x^2)}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \quad + \right. \\ &\quad + \frac{\beta \lambda y^2 - \lambda^2 y^2 - \lambda \mu y^2 + 2\beta \mu y^2 - 2\lambda \mu y^2 - 2\mu^2 y^2 + \beta \sigma^2 y^2 - \lambda \sigma^2 y^2 - \mu \sigma^2 y^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \quad + \\ &\quad \left. + \frac{(\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot \left( 2\mu yz - \frac{2\mu^2}{\lambda} z^2 \right)}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -2\beta\lambda xy - 2\lambda\mu x^2 - 2\beta\mu xy - 2\mu^2 x^2 + 2\beta^2 xy + 2\beta\mu x^2 + 2\beta\frac{\sigma^2}{2}xy + 2\mu\frac{\sigma^2}{2}x^2 \right. \\
&\quad \left. + \beta\lambda y^2 - \lambda^2 y^2 - \lambda\mu y^2 + 2\beta\mu y^2 - 2\lambda\mu y^2 - 2\mu^2 y^2 + \beta\sigma^2 y^2 - \lambda\sigma^2 y^2 - \mu\sigma^2 y^2 \right. \\
&\quad \left. + 2\lambda\mu yz - \frac{2\lambda\mu^2}{\lambda}z^2 + 2\mu^2 yz - \frac{2\mu^3}{\lambda}z^2 - 2\beta\mu yz + \frac{2\beta\mu^2}{\lambda}z^2 - 2\mu\frac{\sigma^2}{2}yz + \frac{2\mu^2\sigma^2}{2\lambda}z^2 \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) \\
&= \left( +2\beta\mu x^2 - 2\lambda\mu x^2 + 2\mu\frac{\sigma^2}{2}x^2 - 2\mu^2 x^2 + \right. \\
&\quad \left. -2\beta\lambda xy - 2\beta\mu xy + 2\beta^2 xy + 2\beta\frac{\sigma^2}{2}xy + \right. \\
&\quad \left. +\beta\lambda y^2 - \lambda^2 y^2 - \lambda\mu y^2 + 2\beta\mu y^2 - 2\lambda\mu y^2 - 2\mu^2 y^2 + \beta\sigma^2 y^2 - \lambda\sigma^2 y^2 - \mu\sigma^2 y^2 + \right. \\
&\quad \left. -2\beta\mu yz + 2\lambda\mu yz + 2\mu^2 yz - 2\mu\frac{\sigma^2}{2}yz + \right. \\
&\quad \left. +\frac{2\beta\mu^2}{\lambda}z^2 - \frac{2\lambda\mu^2}{\lambda}z^2 - \frac{2\mu^3}{\lambda}z^2 + \frac{2\mu^2\sigma^2}{2\lambda}z^2 \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) \\
&= \left( x^2 \left( +2\beta\mu - 2\lambda\mu + 2\mu\frac{\sigma^2}{2} - 2\mu^2 \right) + xy \left( -2\beta\mu - 2\beta\lambda + 2\beta^2 + 2\beta\frac{\sigma^2}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. +y^2 \left( \beta\lambda - \lambda^2 - \lambda\mu + 2\beta\mu - 2\lambda\mu - 2\mu^2 + \beta\sigma^2 - \lambda\sigma^2 - \mu\sigma^2 \right) + \right. \\
&\quad \left. +yz \left( -2\beta\mu + 2\lambda\mu + 2\mu^2 - 2\mu\frac{\sigma^2}{2} \right) + z^2 \left( \frac{2\beta\mu^2}{\lambda} - \frac{2\lambda\mu^2}{\lambda} - \frac{2\mu^3}{\lambda} + \frac{2\mu^2\sigma^2}{2\lambda} \right) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( -2\mu x^2 \left( -\beta + \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - 2\beta xy \left( -\beta + \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + y^2 \left( \lambda(\beta - \lambda - \mu) + 2\mu(\beta - \lambda - \mu) + \sigma^2(\beta - \lambda - \mu) \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\mu yz \left( -\beta + \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) - 2\frac{\mu^2}{\lambda} z^2 \left( -\beta + \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left( \frac{1}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) \\
&= -2\mu x^2 \left( \frac{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) - 2\beta xy \left( \frac{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) + \\
&\quad + y^2 \left( \frac{(\lambda + 2\mu + \sigma^2)(\beta - \lambda - \mu)}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) + \\
&\quad + 2\mu yz \left( \frac{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) - 2\frac{\mu^2}{\lambda} z^2 \left( \frac{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) \\
&= -2\mu x^2 - 2\beta xy + y^2 \left( \frac{(\lambda + 2\mu + \sigma^2)(\beta - \lambda - \mu)}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda} z^2.
\end{aligned}$$

Ou ainda, podemos reescrever a expressão acima como:

$$\nabla V \cdot f = -2\mu x^2 - 2\beta xy + y^2 \left( \frac{2(\lambda + 2\mu + \sigma^2)(\beta - \lambda - \mu)}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda} z^2. \quad (3.11)$$

Assim, em (3.11) encontramos o valor para a parcela **(ii)** da expressão (3.9), para finalizar o valor de  $LV$ .

Determinemos a parcela **(iii)** de (3.9), isto é,  $\frac{1}{2} \text{tr} (GG^T V_{\mathbf{xx}})$ .

Temos  $V_{\mathbf{xx}}$  dada pela Matriz Hessiana:

$$V_{\mathbf{xx}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}(x, y, z) & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Portanto, substituindo os valores das derivadas parciais de ordem 2, calculada em (3.10), temos a seguinte matriz Hessiana  $V_{xx}$ :

$$V_{\mathbf{xx}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Assim, calculemos a matriz  $GG^T$ .

$$G = \begin{pmatrix} -\sigma y \\ \sigma y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G^T = \begin{pmatrix} -\sigma y & \sigma y & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{temos:}$$

$$GG^T = \begin{pmatrix} \sigma^2 y^2 & -\sigma^2 y^2 & 0 \\ -\sigma^2 y^2 & \sigma^2 y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então podemos calcular a matriz  $GG^T V_{\mathbf{xx}}$ :

$$GG^T V_{\mathbf{xx}} = GG^T \cdot V_{\mathbf{xx}} = \begin{pmatrix} \sigma^2 y^2 & -\sigma^2 y^2 & 0 \\ -\sigma^2 y^2 & \sigma^2 y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda} \end{pmatrix}.$$



$$GG^T V_{\mathbf{xx}} = \begin{pmatrix} 2(\sigma^2 y^2) & (-\sigma^2 y^2) \cdot \left( \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) & 0 \\ 2(-\sigma^2 y^2) & (\sigma^2 y^2) \cdot \left( \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos o seguinte Traço da Matriz  $(GG^T V_{\mathbf{xx}})$ :

$$\text{tr}(GG^T V_{\mathbf{xx}}) = 2(\sigma^2 y^2) + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{\lambda + \mu - \beta - \frac{\sigma^2}{2}} \sigma^2 y^2.$$

Dessa forma, encontramos o valor da parcela **(iii)** de (3.9):

$$\frac{1}{2} \text{tr}(GG^T V_{\mathbf{xx}}) = \sigma^2 y^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \sigma^2 y^2.$$

Assim, encontrados os valores para **(i)**, **(ii)** e **(iii)**, temos:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \frac{\partial V}{\partial t} &= 0; \\ \text{(ii)} \quad \nabla V \cdot f &= -2\mu x^2 - 2\beta xy + y^2 \left( \frac{2(\lambda + 2\mu + \sigma^2)(\beta - \lambda - \mu)}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda} z^2; \\ \text{(iii)} \quad \frac{1}{2} \text{tr}(GG^T V_{\mathbf{xx}}) &= \sigma^2 y^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \sigma^2 y^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos encontrar o valor de  $LV$ :

$$\begin{aligned} LV(t, \mathbf{x}) &= \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{x}} V \cdot f + \frac{1}{2} \text{tr}(GG^T V_{\mathbf{xx}}) \right] (t, \mathbf{x}) \\ &= -2\mu x^2 - 2\beta xy + y^2 \left( \frac{2(\lambda + 2\mu + \sigma^2)(\beta - \lambda - \mu)}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda} z^2 + \\ &\quad + \sigma^2 y^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \sigma^2 y^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Podemos ainda reescrever a expressão  $LV$ , apresentada em (3.12), pois temos válida a seguinte igualdade da parcela de  $y^2$  em  $LV$ :

$$\left( \frac{2(\lambda + 2\mu + \sigma^2) (\beta - \lambda - \mu)}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} + \sigma^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \sigma^2 \right) y^2 = -(\lambda + 2\mu) y^2.$$

A qual mostraremos a seguir:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{2(\lambda + 2\mu + \sigma^2) (\beta - \lambda - \mu)}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} + \sigma^2 + \frac{\lambda + 2\mu + \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \sigma^2 \right) y^2 \\ &= \left( \frac{2(\lambda + 2\mu + \sigma^2) (\beta - \lambda - \mu) + (2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2) \sigma^2 + (\lambda + 2\mu + \sigma^2) \sigma^2}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) y^2 \\ &= \left( 2\beta\lambda + 4\beta\mu + 2\beta\sigma^2 - 2\lambda^2 - 4\lambda\mu - 2\lambda\sigma^2 - 2\lambda\mu - 4\mu^2 - 2\mu\sigma^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2\lambda\sigma^2 + 2\mu\sigma^2 - 2\beta\sigma^2 - \sigma^4 + \lambda\sigma^2 + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4 \right) \cdot \left( \frac{1}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) y^2 \\ &= \left( 2\beta\lambda - 2\lambda^2 + \lambda\sigma^2 - 2\lambda\mu - 4\lambda\mu + 4\beta\mu - 4\mu^2 + 2\mu\sigma^2 + \right. \\ & \quad \left. + 2\lambda\sigma^2 - 2\lambda\sigma^2 + 2\mu\sigma^2 - 2\mu\sigma^2 + 2\beta\sigma^2 - 2\beta\sigma^2 + \sigma^4 - \sigma^4 \right) \cdot \left( \frac{1}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) y^2 \\ &= \left( -\lambda(2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2) - 2\mu(2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2) \right) \cdot \left( \frac{1}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) y^2 \\ &= \left( -(\lambda + 2\mu) \cdot (2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2) \right) \cdot \left( \frac{1}{2\lambda + 2\mu - 2\beta - \sigma^2} \right) y^2 \\ &= -(\lambda + 2\mu) y^2. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos reescrever  $LV$  (3.12) da seguinte forma:

$$LV(t, \mathbf{x}) = -2\mu x^2 - 2\beta xy - (\lambda + 2\mu)y^2 + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2.$$

E temos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} LV(t, \mathbf{x}) &= -2\mu x^2 - 2\beta xy - (\lambda + 2\mu)y^2 + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2 \\ &\leq -2\mu(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2) - (\lambda + 2\mu)y^2 + 2\mu(y^2 + z^2) - 2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Pois temos:

$$i) -2\mu x^2 \leq -2\mu(x^2 + y^2);$$

$$ii) -2\beta xy \leq \beta(x^2 + y^2).$$

De fato:

$$\begin{aligned} (x + y)^2 \geq 0 &\Rightarrow x + 2xy + y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq -2xy \\ &\Rightarrow -2xy \leq x^2 + y^2 \Rightarrow -2\beta xy \leq \beta(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

$$iii) -(\lambda + 2\mu)y^2 \leq -(\lambda + 2\mu)y^2;$$

$$iv) 2\mu yz \leq 2\mu(y^2 + z^2).$$

De fato:

$$\begin{aligned} (y - z)^2 \geq 0 &\Rightarrow y^2 - 2yz + z^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 + z^2 \geq 2yz \\ &\Rightarrow 2yz \leq y^2 + z^2 \Rightarrow 2\mu yz \leq 2\mu(y^2 + z^2). \end{aligned}$$

$$v) -2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2 \leq -2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2.$$

Assim, podemos reescrever a expressão (3.13) como:

$$\begin{aligned}
LV(t, \mathbf{x}) &\leq -2\mu(x^2 + y^2) + \beta(x^2 + y^2) - (\lambda + 2\mu)y^2 + 2\mu(y^2 + z^2) - 2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2 \\
&= -2\mu x^2 + \beta x^2 - 2\mu y^2 + \beta y^2 - \lambda y^2 - 2\mu y^2 + 2\mu y^2 + 2\mu z^2 - \frac{2\mu^2}{\lambda}z^2 \\
&= -(2\mu - \beta)x^2 - (2\mu + \lambda - \beta)y^2 - \frac{2\mu}{\lambda}(\mu - \lambda)z^2.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, de (3.13) e (3.14), temos:

$$\begin{aligned}
LV(t, \mathbf{x}) &= -2\mu x^2 - 2\beta xy - (\lambda + 2\mu)y^2 + 2\mu yz - 2\frac{\mu^2}{\lambda}z^2 \\
&\leq -(2\mu - \beta)x^2 - (2\mu + \lambda - \beta)y^2 - \frac{2\mu}{\lambda}(\mu - \lambda)z^2.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ou seja, temos  $LV(t, \mathbf{x}) \leq -c(|\mathbf{x}|)$ , onde a função  $c$  é contínua e definida positiva em  $\mathbb{R}_+$  e, portanto, pelo Teorema 5 temos que o sistema é estocasticamente assintoticamente estável, se satisfeitas as condições apresentadas, isto é, quando satisfaz:

$$0 < \beta < \min \left\{ \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}, 2\mu \right\} \quad \text{e} \quad \mu > \lambda.$$

Pois, na expressão (3.15), temos:

- $(2\mu - \beta) > 0$ , pois  $2\mu > \beta$ .
- $(2\mu + \lambda - \beta) > 0$ , pois  $(2\mu + \lambda - \sigma^2/2) > \beta \Rightarrow (2\mu + \lambda) > \beta$ .
- $(\mu - \lambda) > 0$ , pois  $\mu > \lambda$ .

■

A partir de simulações numéricas com programação em linguagem Python, buscou verificar-se que a estabilidade via funções de Lyapunov do modelo matemático SIR Estocástico estudado, de maneira analítica, é confirmado pelas simulações numéricas, como apresentado na próxima seção.

### 3.3 Simulações numéricas: verificação da estabilidade do modelo SIR

De modo análogo ao apresentado na Seção 2.2.2, para a aplicação de crescimento populacional, utilizamos a mesma programação em linguagem Python, fazendo uso do método Euler-Maruyama (ROSSANT, 2018). Todavia, agora para o sistema (3.3) em três dimensões. O código utilizado é apresentado no Apêndice C.

Considerando a condição (3.16), apresentada a seguir, introduzida na Proposição 4, realizamos as seguintes simulações, com utilização de valores para os parâmetros:

- $\beta$ : Taxa de contato (ou taxa de infecção);
- $\lambda$ : Taxa de Recuperação;
- $\mu$ : Taxa de Nascimento e Taxa de Óbitos (excedo os falecidos pela pandemia);
- $\sigma$ : Taxa Estocástica.

$$0 < \beta < \min \left\{ \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}, 2\mu \right\} \quad \text{e} \quad \mu > \lambda, \quad (3.16)$$

#### SIMULAÇÃO 1

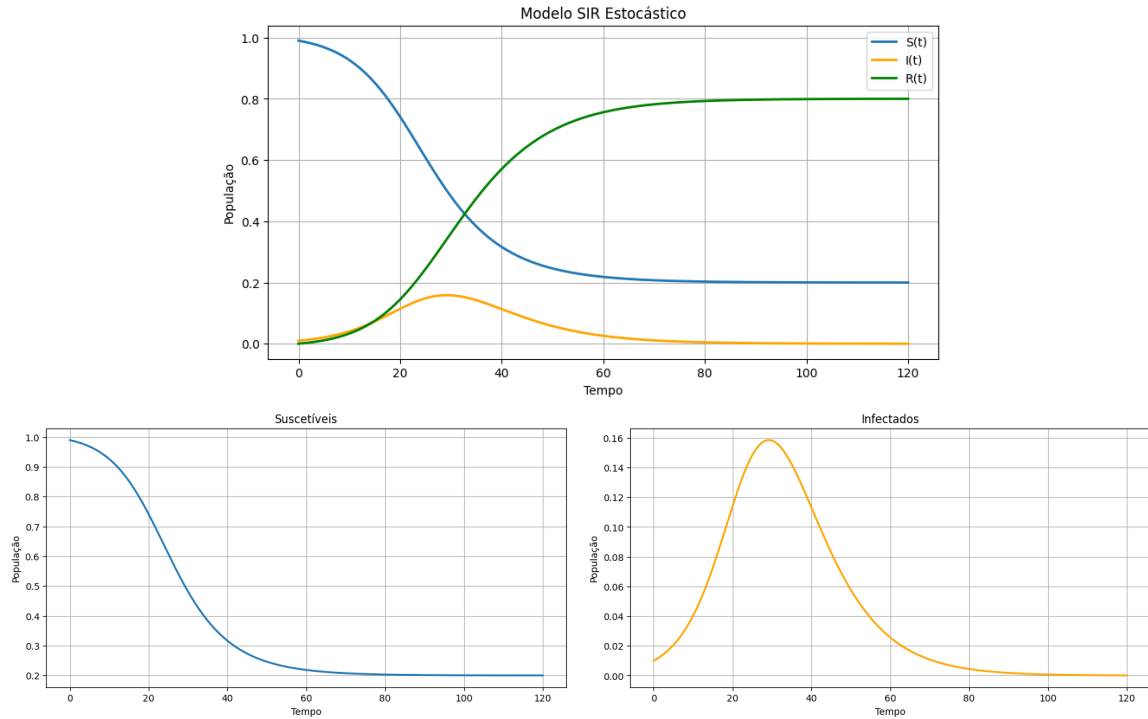
Inicialmente, realizamos uma simulação com o parâmetro  $\sigma$  igual a 0 (ou seja, considerando o modelo SIR como determinístico), tomando a taxa de natalidade e óbitos  $\mu = 0$  e com valores de  $\beta = 0,3$  e  $\lambda = 0,15$ , temos apresentado o comportamento da Figura 3.2, pois temos que tais parâmetros não satisfaz a condição (3.16), pois temos:

$$\beta = 0,3; \quad \lambda = 0,15; \quad \mu = 0; \quad \sigma = 0 \quad (3.17)$$

$$\Rightarrow 0,3 < \min\{0,15 + 0; 0\} ? \Rightarrow 0,3 < \min\{0,15; 0\} ? \Rightarrow \text{A condição não é válida.}$$

Portanto, pelo resultado da proposição apresentada, temos que, como a condição da desigualdade não é válida, então não temos o equilíbrio livre de doença  $E_0 = (1, 0, 0)$  sendo globalmente assintoticamente estável. Resultado esse, que de fato pode ser verificado nos gráficos apresentados na Figura 3.2.

Figura 3.2: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.17)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

## SIMULAÇÃO 2

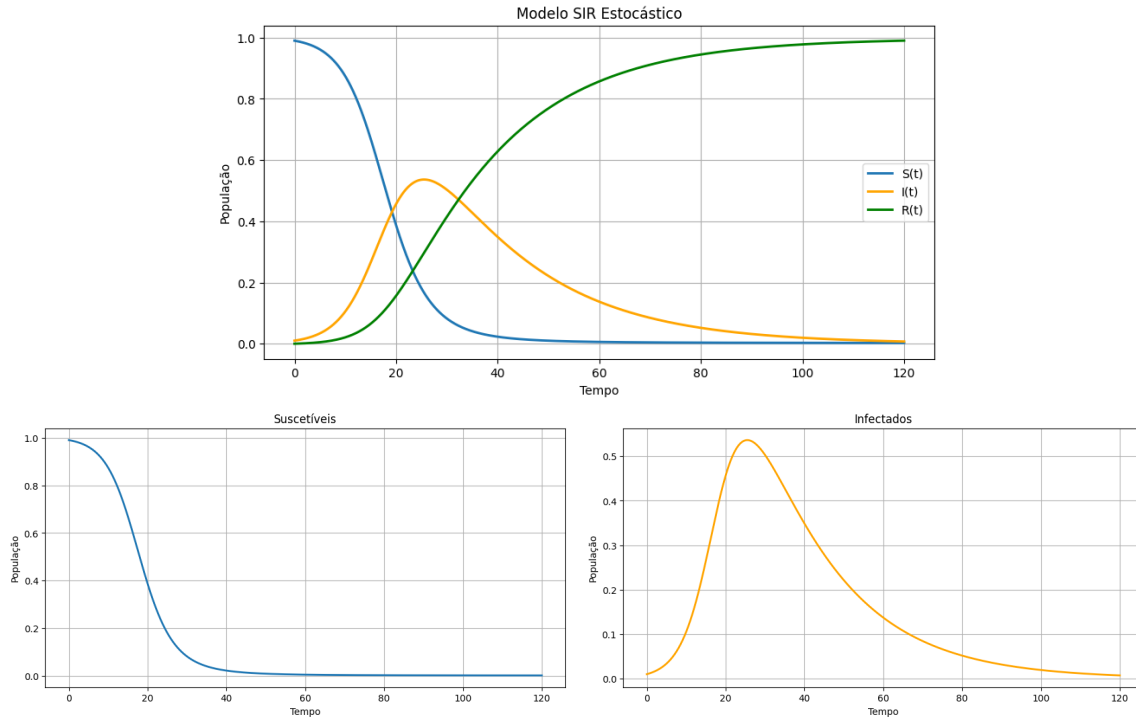
Nesta segunda simulação, mantivemos os valores dos parâmetros  $\beta, \mu$  e  $\sigma$ , mas alteramos o valor de  $\lambda$  de 0,15 para 0,05. Assim, temos:

$$\beta = 0,3; \quad \lambda = 0,05; \quad \mu = 0; \quad \sigma = 0 \quad (3.18)$$

$$\Rightarrow 0,3 < \min\{0,05 + 0; 0\} ? \Rightarrow 0,3 < \min\{0,05; 0\} ? \Rightarrow \text{A condição não é válida.}$$

Ou seja, assim como na simulação anterior, temos que como a condição da desigualdade não é válida, então não temos o equilíbrio livre de doença no ponto  $E_0 = (1, 0, 0)$  sendo globalmente assintoticamente estável. Todavia, podemos perceber que com a diminuição da taxa de recuperação, onde tínhamos um ponto de máximo na curva dos infectados próximo de 16% na simulação anterior, agora chegamos a um ponto de máximo na curva de infectados acima de 50%, como pode ser visto na Figura 3.3.

Figura 3.3: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.18)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

### SIMULAÇÃO 3

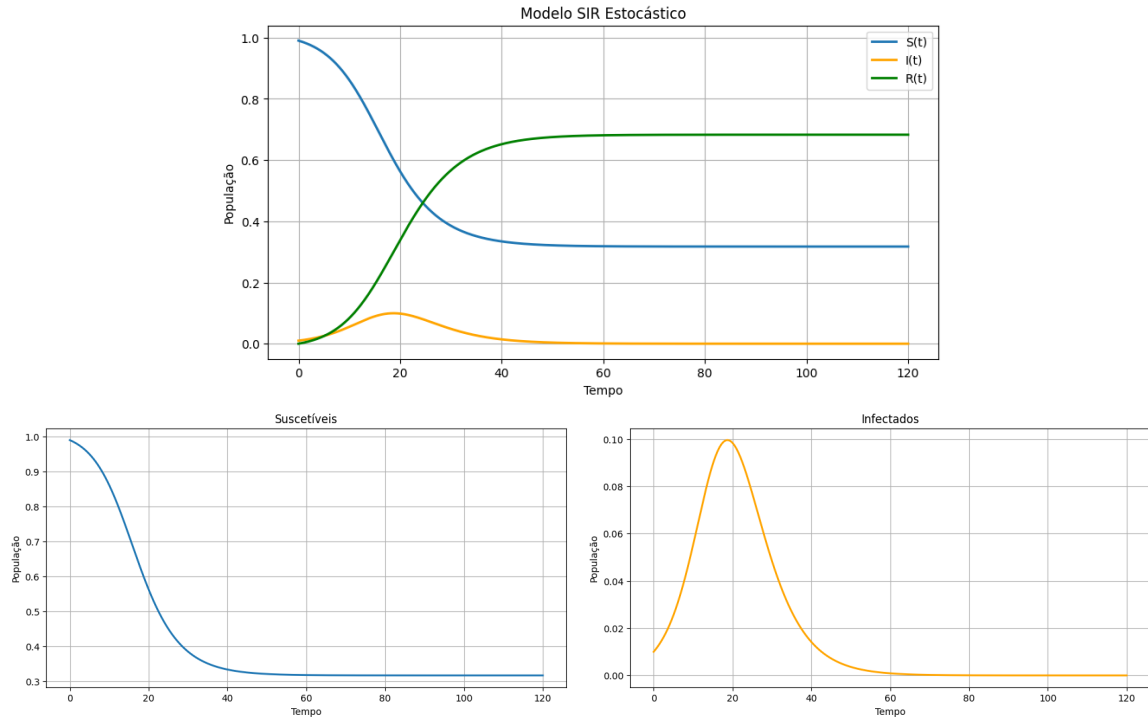
Por outro lado, se temos os parâmetros:  $\beta = 0,05$ ;  $\lambda = 0,3$ ;  $\mu = 0$ ; e  $\sigma = 0$ ; analisando somente a relação  $\beta < \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , teríamos que a condição se mantém. O que de fato, implicará em um comportamento diferente das simulações anteriores, pois o valor de  $\beta$  é menor que  $\lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}$ , como pode se perceber na Figura 3.4, e com isso, a epidemia não se propaga como nos casos anteriores e a curva de infectados decresce.

Todavia, como a condição (3.16) não se satisfaz, pois com  $\mu = 0$  teremos a expressão  $\min \left\{ \lambda + \mu - \frac{\sigma^2}{2}, 2\mu \right\}$  da seguinte forma, para esta simulação 3:

$$\begin{aligned} & \beta = 0,05; \quad \lambda = 0,3; \quad \mu = 0; \quad \sigma = 0 \\ \Rightarrow & 0,05 < \min\{0,3 + 0; 0\} ? \Rightarrow 0,05 < \min\{0,3; 0\} ? \Rightarrow \text{A condição não é válida.} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ou seja, por mais que nesse caso percebemos na Figura 3.4 que o comportamento se alterou, como verificamos que a condição acima não foi satisfeita, temos que, novamente, não temos o equilíbrio livre de doença no ponto  $E_0 = (1, 0, 0)$  como globalmente assintoticamente estável.

Figura 3.4: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.19)



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Podemos perceber que enquanto utilizarmos a taxa de natalidade  $\mu = 0$ , não teremos equilíbrio no sistema, pois a condição (3.16) depende desta taxa, de natalidade, ser maior que  $\beta$ .

#### SIMULAÇÃO 4

Na presente simulação, mantivemos os valores da simulação anterior, exceto que adicionamos um valor de 0,1 para o parâmetro  $\mu$ , ou seja, gerando uma simulação com os seguintes parâmetros:

$$\beta = 0,05; \quad \lambda = 0,3; \quad \mu = 0,1; \quad \sigma = 0 \quad (3.20)$$

$$\Rightarrow 0,05 < \min\{0,3 + 0,1; 0,2\} ? \quad \Rightarrow 0,05 < \min\{0,4; 0,2\} ?$$

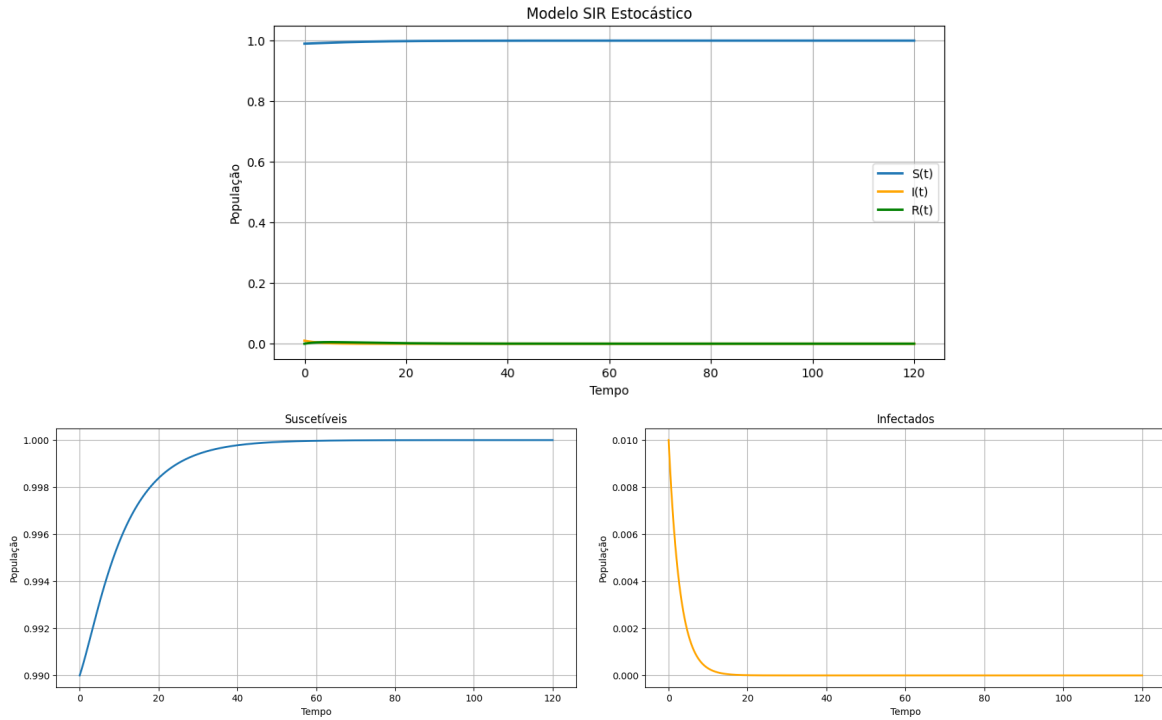
$$\Rightarrow 0,05 < 0,2 \Rightarrow \text{A condição é válida.}$$

Portanto, como a condição da Proposição 4 é satisfeita, temos o o equilíbrio livre de doença  $E_0 = (1,0,0)$  sendo globalmente assintoticamente estável, como podemos



verificar na Figura 3.5 que, de fato, a curva dos Suscetíveis sai de uma vizinhança de 1, e com o decorrer do tempo ela volta ao ponto de equilíbrio  $S = 1$ .

Figura 3.5: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.20)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

## SIMULAÇÃO 5

Por outro lado, voltando ao caso da Simulação 2, onde foi realizada uma simulação com os parâmetros  $\beta = 0,3$ ;  $\lambda = 0,05$ ;  $\mu = 0$ ;  $\sigma = 0$ , acrescentando um valor para o parâmetro  $\mu = 0,1$ , apesar de alterar o comportamento do sistema, manteremos não satisfeita a desigualdade da condição, isto é, temos:

$$\beta = 0,3; \quad \lambda = 0,05; \quad \mu = 0,1; \quad \sigma = 0 \quad (3.21)$$

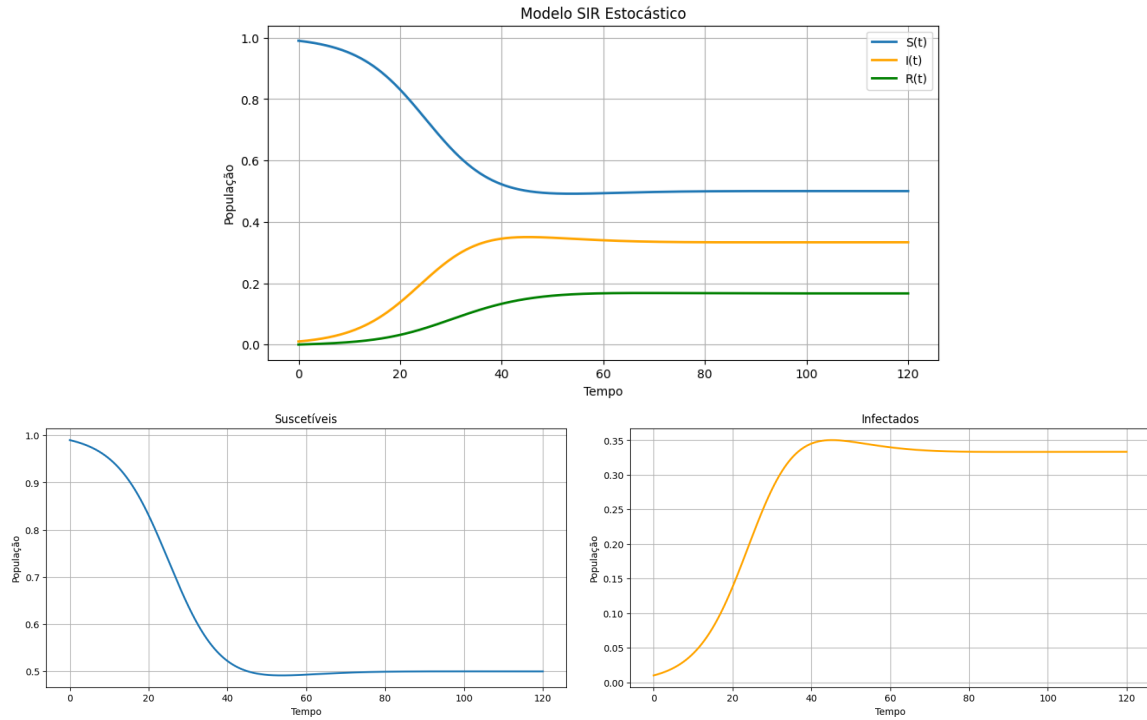
$$\Rightarrow 0,3 < \min\{0,05 + 0,1; 0,2\} ? \quad \Rightarrow 0,3 < \min\{0,15; 0,2\} ?$$

$$\Rightarrow 0,3 < 0,15 ? \quad \Rightarrow \text{A condição não é válida.}$$

Portanto, assim como podemos verificar na Figura 3.6, apesar de um comportamento diferente do caso da Simulação 2 (Fig. 3.3) pelo fato de agora termos uma taxa

de natalidade acrescentada ao sistema, mas, ainda assim, não temos o equilíbrio livre de doença.

Figura 3.6: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.21)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

## SIMULAÇÃO 6

Realizamos uma nova simulação, alterando o parâmetro  $\mu = 0,1$  para  $\mu = 0,3$  (mantendo  $\beta = 0,3$  e  $\sigma = 0,05$ ), teremos agora satisfeita a condição da desigualdade:

$$\beta = 0,3; \quad \lambda = 0,05; \quad \mu = 0,3; \quad \sigma = 0 \quad (3.22)$$

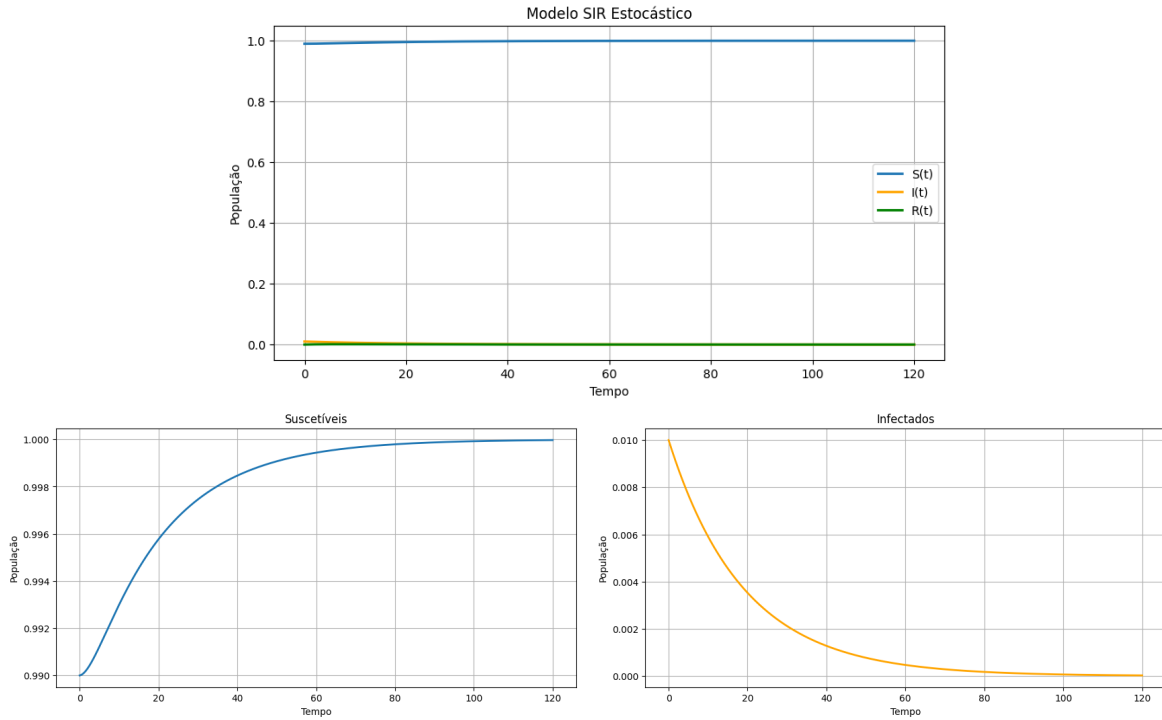
$$\Rightarrow 0,3 < \min\{0,05 + 0,3; 0,6\} ? \quad \Rightarrow 0,3 < \min\{0,35; 0,6\} ?$$

$$\Rightarrow 0,3 < 0,35 \quad \Rightarrow \text{A condição é válida.}$$

Portanto, temos novamente um caso que a condição da Proposição 4 é válida e, portanto, temos o equilíbrio no sistema, como pode ser verificado na Figura 3.7, que a curva de Suscetíveis se inicia de uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $S = 1$ , e como o decorrer do tempo, ela volta para o equilíbrio  $S = 1$ . E da mesma forma, a curva de

infectados se inicia de uma vizinhança do ponto de equilíbrio  $I = 0$ , e como o decorrer do tempo, ela volta para o equilíbrio  $I = 0$ .

Figura 3.7: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.22)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Ressaltamos que em todas as simulações apresentadas até o momento utilizamos o parâmetro  $\sigma = 0$ , isto é, com o termo estocástico nulo; assim, temos o equivalente a um sistema SIR determinístico. Apresentaremos a seguir, algumas simulações, incluindo valores para o parâmetro  $\sigma$  e analisando a condição de estabilidade.

## SIMULAÇÃO 7

Realizamos uma nova simulação, com os seguintes valores para os parâmetros:

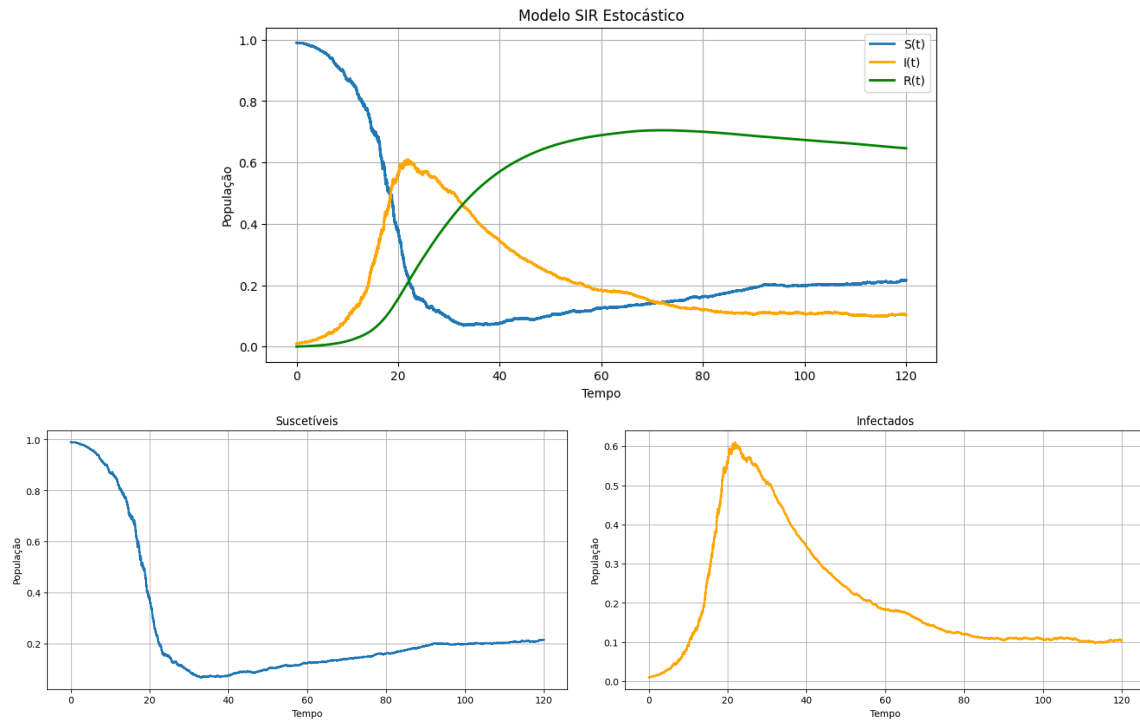
$$\beta = 0,3; \quad \lambda = 0,05; \quad \mu = 0,01; \quad \sigma = 0,1 \quad (3.23)$$

$$\Rightarrow 0,3 < \min\{0,05 + 0,01 - 0,005; 0,02\} ? \quad \Rightarrow 0,3 < \min\{0,055; 0,02\} ?$$

$$\Rightarrow 0,3 < 0,02 ? \quad \Rightarrow \text{A condição não é válida.}$$

Assim, pelo resultado da proposição apresentada, temos que, como a condição da desigualdade não é válida, não temos o equilíbrio livre de doença no sistema. Resultado esse, que de fato pode ser verificado nos gráficos apresentados na Figura 3.8.

Figura 3.8: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.23)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

## SIMULAÇÃO 8

Por outro lado, realizando uma nova simulação, com os seguintes valores para os parâmetros:

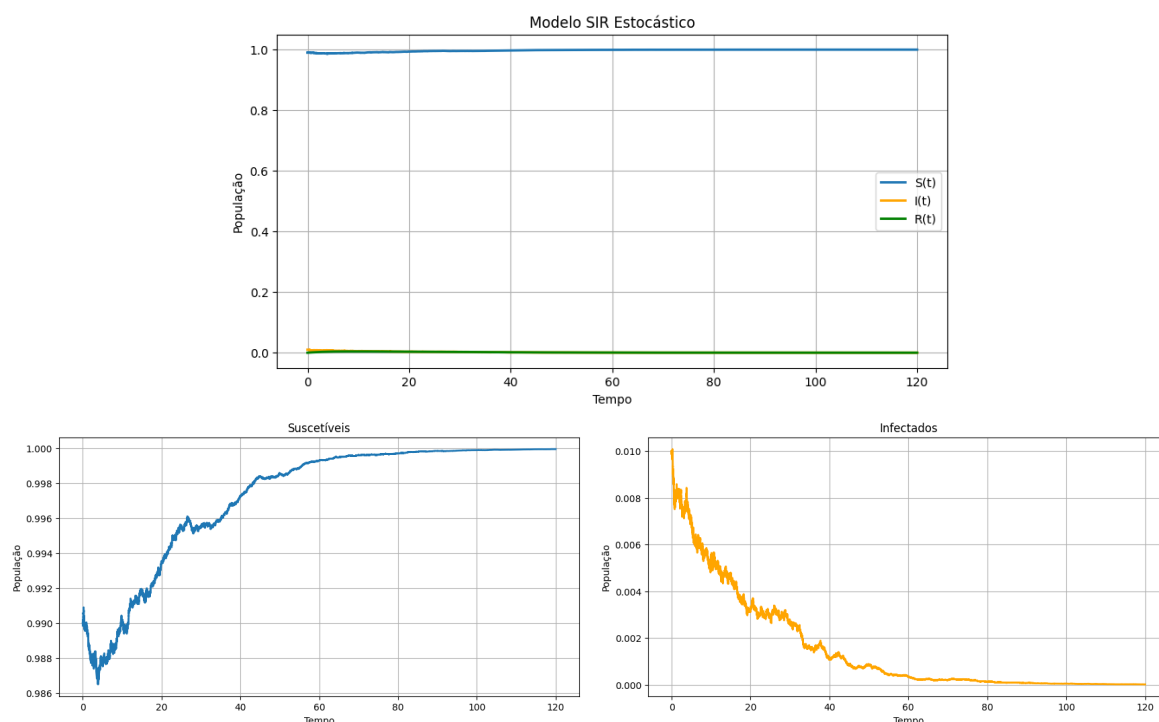
$$\beta = 0,3; \quad \lambda = 0,15; \quad \mu = 0,2; \quad \sigma = 0,1 \quad (3.24)$$

$$\Rightarrow 0,3 < \min\{0,15 + 0,2 - 0,005; 0,4\} ? \quad \Rightarrow 0,3 < \min\{0,345; 0,4\} ?$$

$$\Rightarrow 0,3 < 0,345 \Rightarrow \text{A condição é válida.}$$

Temos novamente um caso em que quando a condição da Proposição 4 é válida e assim temos o equilíbrio no sistema, como pode ser verificado na Figura 3.9, agora para o caso estocástico (pois temos  $\sigma \neq 0$ ).

Figura 3.9: Simulação numérica do modelo SIR utilizando os parâmetros (3.24)



Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Dessa forma, foi possível verificar nas Simulações de 1 a 8 e nos gráficos apresentados, que houve equilíbrio no sistema somente nos casos das Simulação 4 (Fig. 3.5), Simulação 6 (Fig. 3.7) e Simulação 8 (Fig. 3.9), pois os parâmetros utilizados nesses casos cumpriram a condição apresentada da Proposição 4.

Ademais, além de disponibilizarmos no Apêndice C o código utilizado, em linguagem Python, das simulações apresentadas, em tal apêndice também é possível acessá-lo no ambiente Google Colab, a partir do link disponibilizado (para isso, sendo necessário uma conta Google).

No próximo capítulo, será apresentado o estudo de um modelo compartimental utilizado para Covid-19, derivado do SIR, o modelo SIRD, que acrescenta o compartimento (D)eceased para os indivíduos falecidos; de modo que realizou-se a estimação dos parâmetros para este modelo, através da análise dos dados da pandemia de Covid-19 no município de Bauru, no início da pandemia.

## **Estimação dos parâmetros do modelo SIRD: analisando os primeiros meses da pandemia de COVID-19 em Bauru**

O presente capítulo teve por objetivo a análise dos dados do início da pandemia de Covid-19 no município de Bauru, estado de São Paulo, no período de 64 dias, no intervalo de 29 de março de 2020, a 31 de maio de 2020, para a busca dos parâmetros do modelo epidemiológico, segundo Rubio et al. (2023). O modelo trabalhado foi o modelo SIRD, um modelo derivado do SIR tradicional, que estende o modelo inicial, acrescentando um novo compartimento para separar os indivíduos que se recuperaram dos que faleceram e, conseqüentemente, acrescenta uma nova variável ao modelo. (OKABE; SHUDO, 2020).

A partir da estimação dos parâmetros do modelo foi possível simular previsões, supondo estarmos em 31 de maio de 2020, logo após a coleta dos dados, onde foi possível prever qual o número de infectados, por exemplo, 30 dias após o término da coleta dos dados para estimação dos parâmetros, comparando o número de infectados estimados pelo modelo, com o número dos dados reais coletados.

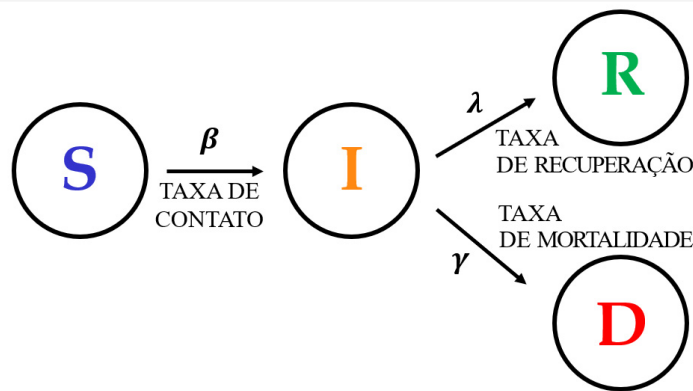
Para a coleta dos dados utilizamos a plataforma SP Covid Info Tracker (acesso em <https://www.spcovid.net.br>), sendo esta um projeto coordenado pelos pesquisadores Wallace Casaca e Marilaine Colnago desenvolvido com o propósito de disponibilizar

à sociedade civil, órgãos de imprensa, formuladores de políticas governamentais e comunidade científica uma plataforma interativa para monitoramento em tempo real e análise preditiva de dados da Covid-19, fornecendo informações precisas e relatórios detalhados sobre o progresso diário do coronavírus em mais de 90 cidades espalhadas pelo estado de São Paulo (AMARAL et al., 2001). Optamos por utilizar a SP Covid Info Tracker, pois esta divulga os dados organizados como número de novos casos, número de novos óbitos e recuperados, informações necessárias para nosso sistema SIRD.

## Modelo SIRD determinístico

Para simplificar o modelo, optamos por não trabalhar com o parâmetro de taxa de natalidade  $\mu$ , como no sistemas (3.2) e (3.3) do capítulo anterior. Mas adicionamos o compartimento (D)ead / Mortos, no sistema (3.1), de modo que ficamos com o seguinte modelo:

Figura 4.1: Diagrama do modelo SIRD



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t); \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t); \\ D'(t) = \gamma I(t). \end{cases} \quad (4.1)$$

onde, nas equações do sistema (4.1), de modo análogo aos sistemas SIR apresentados no capítulo anterior, temos que  $S(t)$ ,  $I(t)$ ,  $R(t)$ ,  $D(t)$  denotam o número de indivíduos Suscetíveis à doença, número de membros Infectados, número de Recuperados e número

de Mortos, respectivamente. A população considerada tem tamanho constante  $N$ , e as variáveis podem ser normalizadas para  $N=1$ , ou seja,  $S(t) + I(t) + R(t) + D(t) = 1$ , para todo  $t \geq 0$ , ou trabalhadas com o número total da população analisada. Trabalhamos com a população da cidade de Bauru informada no site SP Covid Info Tracker, de 379300 habitantes. O parâmetro  $\beta$  é o número médio de contatos por infectante por dia (ou taxa de infecção);  $\lambda$  representa a taxa de recuperação de pessoas infectadas; e o parâmetro  $\gamma$  representa a taxa de mortalidade. Obviamente, temos  $\beta, \lambda, \gamma \in R_+$

Coletamos os dados de novos casos, número de novos óbitos e recuperados, calculamos os números de casos acumulados e óbitos acumulados, para formar nossa base de dados de Suscetíveis, Infectados (isto é, os casos ativos no momento, excluindo do total de casos acumulados os que já se recuperaram ou faleceram), Recuperados e Mortos, conforme apresentado a seguir, na Tabela 4.1. Optamos por apresentar tal tabela apontando somente alguns dias, de maneira ilustrativa, por questões de espaço (todavia, é apresentado no Apêndice D a versão completa, com os 62 dias).

Tabela 4.1: Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia

| Dia<br>$t$ | Data   | Suscetíveis<br>$S(t)$ | Infectados<br>$I(t)$ | Recuperados<br>$R(t)$ | Mortos<br>$D(t)$ |
|------------|--------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| 0          | 29/mar | 379300                | 0                    | 0                     | 0                |
| 1          | 30/mar | 379298                | 2                    | 0                     | 0                |
| 2          | 31/mar | 379298                | 2                    | 0                     | 0                |
| 3          | 1/abr  | 379297                | 3                    | 0                     | 0                |
| 8          | 6/abr  | 379294                | 5                    | 0                     | 1                |
| 11         | 9/abr  | 379289                | 10                   | 0                     | 1                |
| 16         | 14/abr | 379276                | 21                   | 0                     | 3                |
| 18         | 16/abr | 379264                | 30                   | 2                     | 4                |
| 20         | 18/abr | 379242                | 50                   | 3                     | 5                |
| 28         | 26/abr | 379213                | 70                   | 10                    | 7                |
| 34         | 2/mai  | 379183                | 86                   | 24                    | 7                |
| 41         | 9/mai  | 379140                | 93                   | 58                    | 9                |
| 45         | 13/mai | 379107                | 103                  | 80                    | 10               |
| 53         | 21/mai | 379062                | 110                  | 116                   | 12               |
| 57         | 25/mai | 379044                | 93                   | 149                   | 14               |
| 61         | 29/mai | 379016                | 102                  | 167                   | 15               |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor



### 4.1 Estimação dos parâmetros determinísticos: $\beta$ , $\lambda$ , $\gamma$

As Equações do Sistema (4.1) do modelo SIRD permitem a determinação dos parâmetros  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  com base na evolução dos dados oficiais dos efeitos da Covid-19, apresentados na Tabela 4.1 através da aproximação da derivada pela diferença central

$$f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h},$$

onde para cada dia dos dados da amostra  $t = 1, 2, \dots, 62 = T$  calculamos os parâmetros  $\beta_t$ ,  $\lambda_t$  e  $\gamma_t$ , que nos fornecem uma sequência de dados, como apresentado nas Equações (4.2), (4.3) e (4.4). Os cálculos e manipulações que resultam em tais equações são apresentados no Apêndice E.

$$\beta = \frac{\sum_{t=1}^T \beta_t}{T}, \quad \text{onde temos} \quad \beta_t = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)}; \quad (4.2)$$

$$\lambda = \frac{\sum_{t=1}^T \lambda_t}{T}, \quad \text{onde temos} \quad \lambda_t = \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)}; \quad (4.3)$$

$$\gamma = \frac{\sum_{t=1}^T \gamma_t}{T}, \quad \text{onde temos} \quad \gamma_t = \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2I(t)}. \quad (4.4)$$

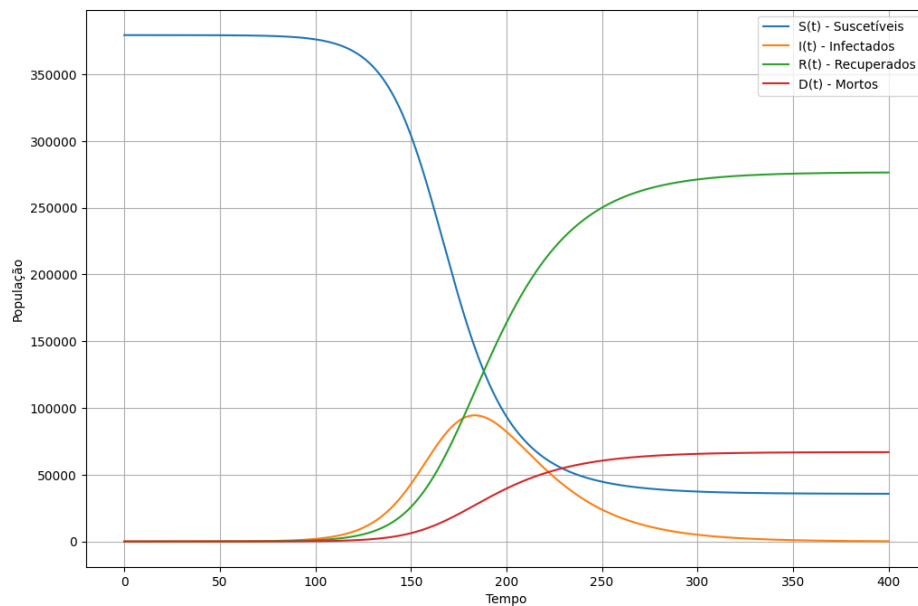
Em seguida, calculamos a média simples de tais valores, gerando os parâmetros apresentados na Tabela 4.2.

De posse de tais parâmetros, considerando o momento inicial da pandemia, após 62 dias iniciais, foi possível gerar os gráficos do modelo SIRD a partir de código em linguagem Python, apresentado na Figura 4.2. Foi utilizada a função Odeint, do módulo `scipy.integrate`, da biblioteca SciPy, que resolve numericamente EDOs, no código em linguagem Python, do modelo SIRD. Tal código é apresentado no Apêndice F, o qual além do gráfico do modelo SIRD, retorna o número de previsão de infectados nos dias  $t = 0$  a  $t = 90$  (informação essa que usaremos mais adiante, na Tabela 4.5).

Tabela 4.2: Parâmetros estimados, no tempo  $t = 62$ , do modelo SIRD Det. para cidade de Bauru

|                                       |                                  |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| $N$ - População Total                 | 379300                           |
| $S_0$ - Número Inicial de Suscetíveis | 379298                           |
| $I_0$ - Número Inicial de Infectados  | 2                                |
| $R_0$ - Número Inicial de Recuperados | 0                                |
| $D_0$ - Número Inicial de Mortos      | 0                                |
| $t_0$ - Data Inicial                  | 30/03/2020                       |
| $\beta$ - Taxa de Contato             | $2,94858301579693 \cdot 10^{-7}$ |
| $\lambda$ - Taxa de Recuperação       | $3,45122943418598 \cdot 10^{-2}$ |
| $\gamma$ - Taxa de Mortalidade        | $8,35692416616626 \cdot 10^{-3}$ |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

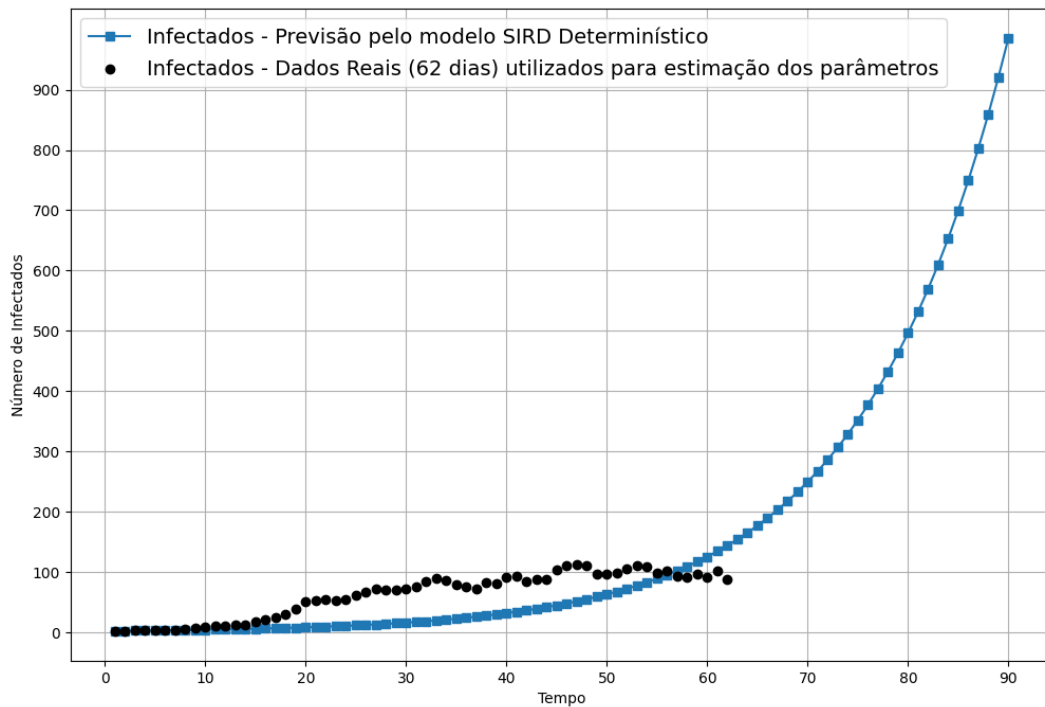
Figura 4.2: Modelo SIRD com parâmetros da cidade de Bauru estimados no tempo  $t = 62$ 

Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

Ressaltamos que tais parâmetros refletem o comportamento previsto naquele momento da pandemia na cidade de Bauru, e é recomendado uma atualização dos parâmetros a cada 7 ou 15 dias, a fim de proporcionar um melhor comportamento a médio e longo prazo no modelo. Até porque a própria divulgação de estudos epidemiológicos, bem como as tomadas de decisões governamentais alteraram o comportamento dos indivíduos, alterando o comportamento futuro da epidemia.

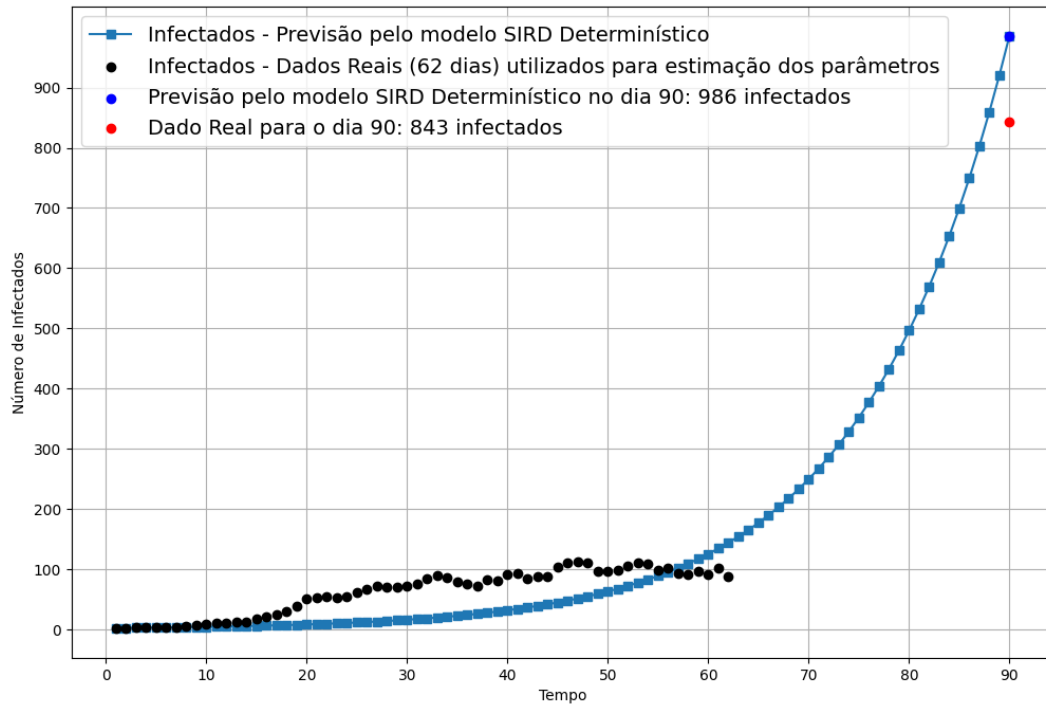
A partir do gráfico do modelo SIRD, da Figura 4.2, isolamos somente a curva de Infectados do modelo, e colocamos um gráfico de dispersão dos dados analisados no período de 62 dias, o qual é apresentado a seguir na Figura 4.3.

Figura 4.3: Gráfico de dispersão dos dados reais (62 dias analisados) e curva de Infectados - Bauru



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

Analisando o gráfico da Figura 4.3, bem como os dados da Tabela 4.1, podemos ver que com dois meses de pandemia, na cidade de Bauru-SP, havia na faixa de 100 indivíduos infectados. Nesse momento hipotético, a partir desse modelo, podemos prever quantos infectados teríamos após 4 semanas, ou seja, no tempo  $t = 90$ . Podemos ver no gráfico apresentado a seguir na Figura 4.4, que a curva de infectados apresenta o valor estimado de 986 indivíduos infectados, para o dia 90 (ponto azul). Enquanto o dado real que temos para o número de infectados nessa data é de 843 indivíduos infectados (ponto vermelho). Isto é, uma estimativa com um erro de menos de aproximadamente 17 %.

Figura 4.4: Previsão de infectados (dia  $t = 90$ ) modelo SIRD Determinístico vs Dados Reais - Bauru

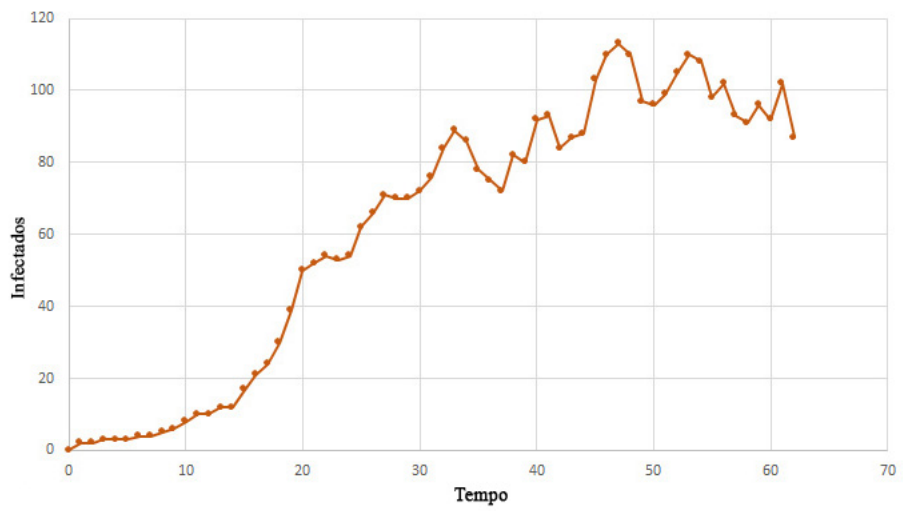
Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

## Modelo SIRD estocástico

Todavia, um modelo determinístico como o apresentado no Sistema (4.1), pode não ser a melhor forma de se modelar uma epidemia. Podemos observar que no modelo determinístico todos os parâmetros são considerados determinísticos, independentemente das flutuações ambientais. Do ponto de vista biológico, o modelo determinístico impõe algumas limitações à modelagem matemática de sistemas ecológicos, pois podemos observar no comportamento dos dados, que estes apresentam oscilações. A imprecisão dos dados, é outro ruído que pode ser considerado que um modelo estocástico pode vir a modelar melhor que um determinístico. Formas de infecção, além do contato direto, como pelo contato a um objeto infectado, também pode trazer variações que um sistema estocástico viria a modelar melhor. Assim como a variação nos dados analisados, que pode ser observada na tabela completa apresentada no Apêndice D, ou no gráfico da Figura 4.5, os quais mostram que a variação da coleta dos dados dos infectados

lembra mais um comportamento estocástico, com certa imprevisibilidade, do que um crescimento determinístico.

Figura 4.5: Gráfico de dispersão de Infectados com dados reais (62 dias analisados) - Bauru



Fonte: Elaborado pelo próprio autor no software Microsoft Excel

Dessa forma, podemos considerar perturbações aleatórias nas variáveis suscetíveis e infectados, e sua influência não muito conhecida entre estas variáveis por um ruído branco, propondo para as Equações (4.1) do modelo SIRD determinístico, o seguinte modelo SIRD Estocástico:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_1 S(t)dW_1(t), & S(0) = s_0, \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))dt + \sigma_2 I(t)dW_2(t), & I(0) = i_0, \\ dR(t) = \lambda I(t)dt, & R(0) = r_0, \\ dD(t) = \gamma I(t)dt, & D(0) = d_0. \end{cases} \quad (4.5)$$

onde temos  $s_0, i_0, r_0, d_0 \geq 0$  com  $s_0 + i_0 + r_0 + d_0 = N$ ;

sendo  $N$  o total da população;

$W_1(t)$  e  $W_2(t)$  são Movimentos Brownianos clássicos independentes;

e  $\sigma_i^2 \geq 0$ ,  $i = \{1, 2\}$  representam as intensidades de  $W_1(t)$  e  $W_2(t)$ .

## 4.2 Estimação dos parâmetros estocásticos: $\sigma_1$ e $\sigma_2$

Considerando o modelo SIRD Estocástico apresentado em (4.5), os parâmetros  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  apresentados na Tabela 4.2, podemos calcular o parâmetro  $\sigma_1$  a partir da primeira EDE do sistema do modelo SIRD Estocástico apresentada no Sistema 4.5, ou seja:

$$dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_1 S(t)dW_1(t)$$

Dessa forma, encontramos a seguinte equação para o parâmetro  $\sigma_1$ , onde apresentamos no Apêndice E.4 os cálculos e manipulações que implicam em tal resultado:

$$\sigma_1 = \frac{\sum_{t=1}^T \sigma_{1t}}{T}, \quad \text{onde temos} \quad \sigma_{1t} = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{S(t)}; \quad (4.6)$$

De modo análogo, para encontrar o valor do parâmetro  $\sigma_2$  do modelo estocástico, utilizamos a segunda EDE do sistema do modelo SIRD Estocástico, apresentada no Sistema 4.5, ou seja:

$$dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))dt + \sigma_2 I(t)dW_2(t).$$

onde foi possível encontrar a seguinte equação para o parâmetro  $\sigma_2$ , sendo apresentado no Apêndice E.5 os cálculos e manipulações que implicam em tal resultado:

$$\sigma_2 = \frac{\sum_{t=1}^T \sigma_{2t}}{T}, \quad \text{onde temos:} \quad (4.7)$$

$$\sigma_{2t} = -\frac{S(t+1)-S(t-1)}{2I(t)} + \frac{I(t+1)-I(t-1)}{2I(t)} + \frac{R(t+1)-R(t-1)}{2I(t)} + \frac{D(t+1)+D(t-1)}{2I(t)}.$$

Dessa forma, a partir das Equações (4.6) e (4.7), foi possível realizar os cálculos, utilizando os dados dos 62 dias apresentados na Tabela 4.1, onde chegamos nos seguintes valores dos parâmetros estocásticos:

Tabela 4.3: Parâmetros estocásticos estimados para o modelo SIRD para a cidade de Bauru

|                               |                                  |
|-------------------------------|----------------------------------|
| $\sigma_1$ - Taxa Estocástica | $2,41622620562151 \cdot 10^{-5}$ |
| $\sigma_2$ - Taxa Estocástica | $2,069235991256 \cdot 10^{-1}$   |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Assim sendo, realizamos várias simulações numéricas, em um código em linguagem Python das trajetórias das EDEs com o Movimento Browniano (em um mesmo gráfico), do modelo SIRD Estocástico apresentado no Sistema 4.5 com os parâmetros estimados, e calculamos a Esperança entre elas, para as variáveis S, I, R e D, como apresentado na Figura 4.6. O código em linguagem Python onde tal figura é gerada é apresentado no Apêndice G, onde utilizamos o método de Milstein, o qual é apresentado da seguinte forma:

Consideremos a seguinte equação diferencial estocástica

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dB_t,$$

O método de Milstein adiciona ao método Euler-Maruyama a seguinte parcela, como fator de correção

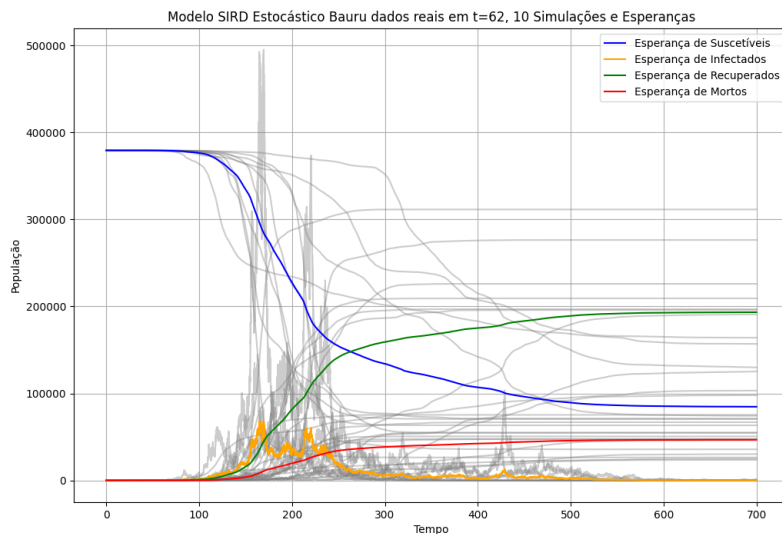
$$\frac{1}{2}bb' \{(\Delta W)^2 - \Delta\}.$$

Ou seja, o método de Milstein apresenta o seguinte esquema iterativo

$$Y_{n+1} = Y_n + a\Delta + b\Delta W + \frac{1}{2}bb' \{(\Delta W)^2 - \Delta\}.$$

Mais detalhes do método podem ser vistos em Kloeden e Platen (1992), p. 345.

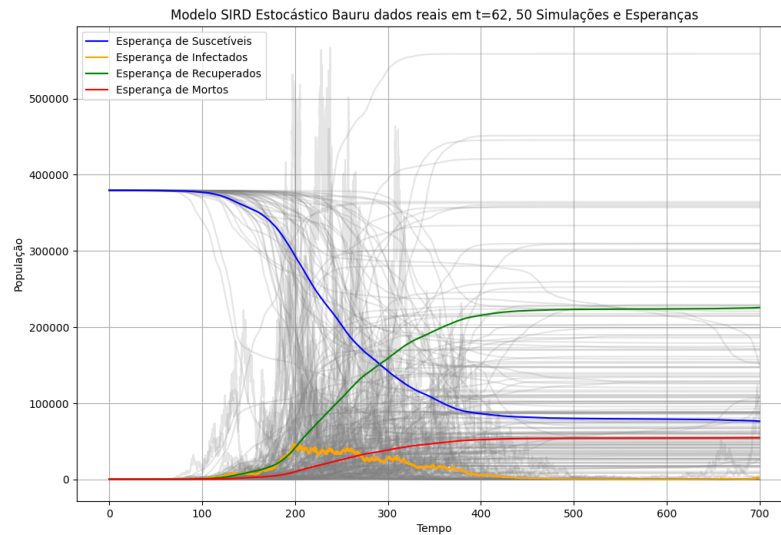
Figura 4.6: Modelo SIRD Estocástico com 10 simulações e Esperança, parâmetros a partir de dados da cidade de Bauru no tempo  $t = 62$  e  $\sigma_i$  da Tabela 4.3



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

Aumentamos o número de simulações para 50, com as Esperanças de S, I, R e D, na simulação numérica, gerando o gráfico a seguir, apresentado na Figura 4.7:

Figura 4.7: Modelo SIRD Estocástico com 50 simulações e Esperança, parâmetros a partir de dados da cidade de Bauru no tempo  $t = 62$  e  $\sigma_i$  da Tabela 4.3



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

Porém, ao aumentar consideravelmente o número das simulações, para mil simulações, ocorre um aumento do processamento exigido, onde a plataforma Google Colab utilizada para compilar o código em linguagem Python apresentou o seguinte erro:

Figura 4.8: Erro no Google Colab ao compilar código com mil Simulações do modelo SIRD Estocástico

A sessão falhou depois de utilizar toda a RAM disponível. Se tiver interesse em aceder a tempos de execução com mais RAM, consulte o [Veja os registos do tempo de execução Colab Pro](#).

Fonte: Elaborado pelo próprio autor / print do ambiente Google Colab

Para contornar esse problema, optamos por editar o código, retirando o gráfico que seria gerado ao final, onde foi possível realizar a compilação do código com um maior número de simulações com sucesso, entregando como resultado o número de infectados em um tempo solicitado ( $t = 90$ ), conforme apresentado no Quadro 4.1.



Quadro 4.1: Compilação código em Python contendo dez mil simulações do modelo SIRD Estocástico

|                                           |
|-------------------------------------------|
| Número de simulações: 10000               |
| Esperança de Infectados em $t = 90$ : 901 |
| Tempo de execução: 32,5 minutos           |

Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Dessa forma, temos os valores apresentados na Tabela 4.4, comparando o valor estimado a partir do modelo SIRD Estocástico, apresentado no Quadro 6.1, o modelo SIRD Determinístico, apresentado na Figura 4.4, e os Dados Reais para o dia  $t = 90$ .

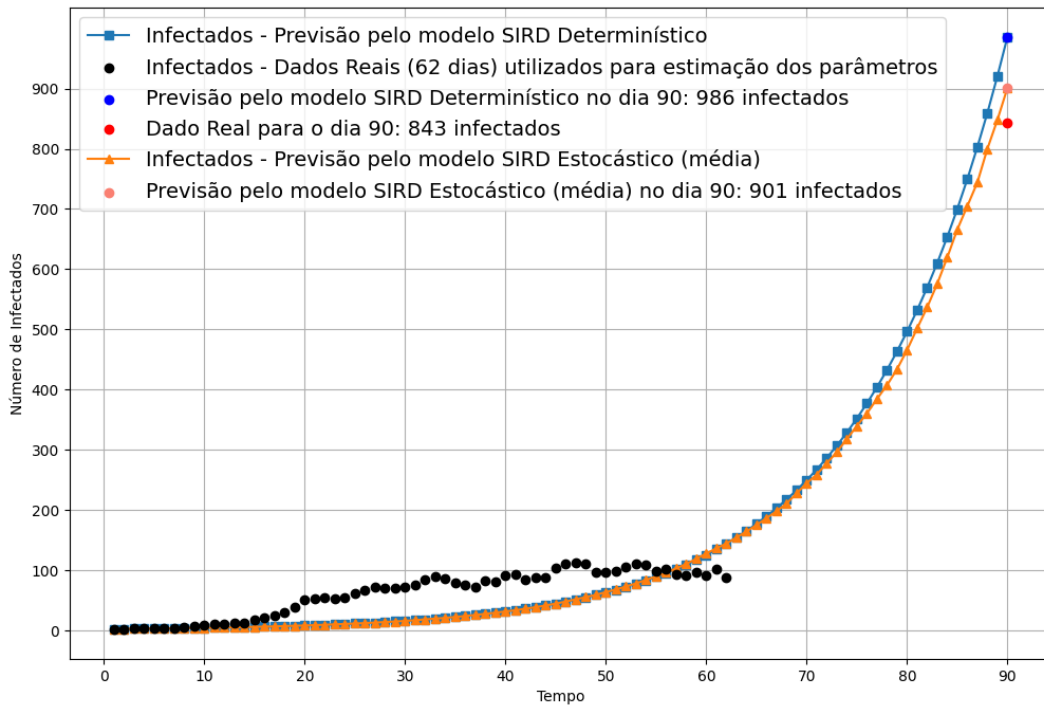
Tabela 4.4: Comparação entre estimativas do número de infectados no dia  $t = 90$  em Bauru do modelo determinístico e com dez mil simulações numéricas do modelo estocástico

| SIRD Det. | SIRD Est. | Dados Reais |
|-----------|-----------|-------------|
| 986       | 901       | 843         |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Assim, pode se verificar que o modelo SIRD Estocástico, com 10 mil simulações, resultou em uma estimativa de 901 infectados no tempo  $t = 90$ , apresentando um erro relativo de 6,88% em relação aos dados reais (de 843 infectados). Enquanto o modelo SIRD Determinístico, vimos anteriormente que apresentou um erro de 16,96%, mostrando, portanto, que o modelo estocástico pode apresentar previsões mais assertivas que o modelo determinístico (assim como ilustra a Figura 4.9).

Figura 4.9: Previsão de infectados para o dia  $t = 90$ : modelo SIRD Determinístico vs SIRD Estocástico (Esperança de dez mil simulações) vs Dados Reais - Bauru



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

O código em linguagem Python utilizado para o produzir o gráfico apresentado na Figura 4.4 é disponibilizado no Apêndice H.

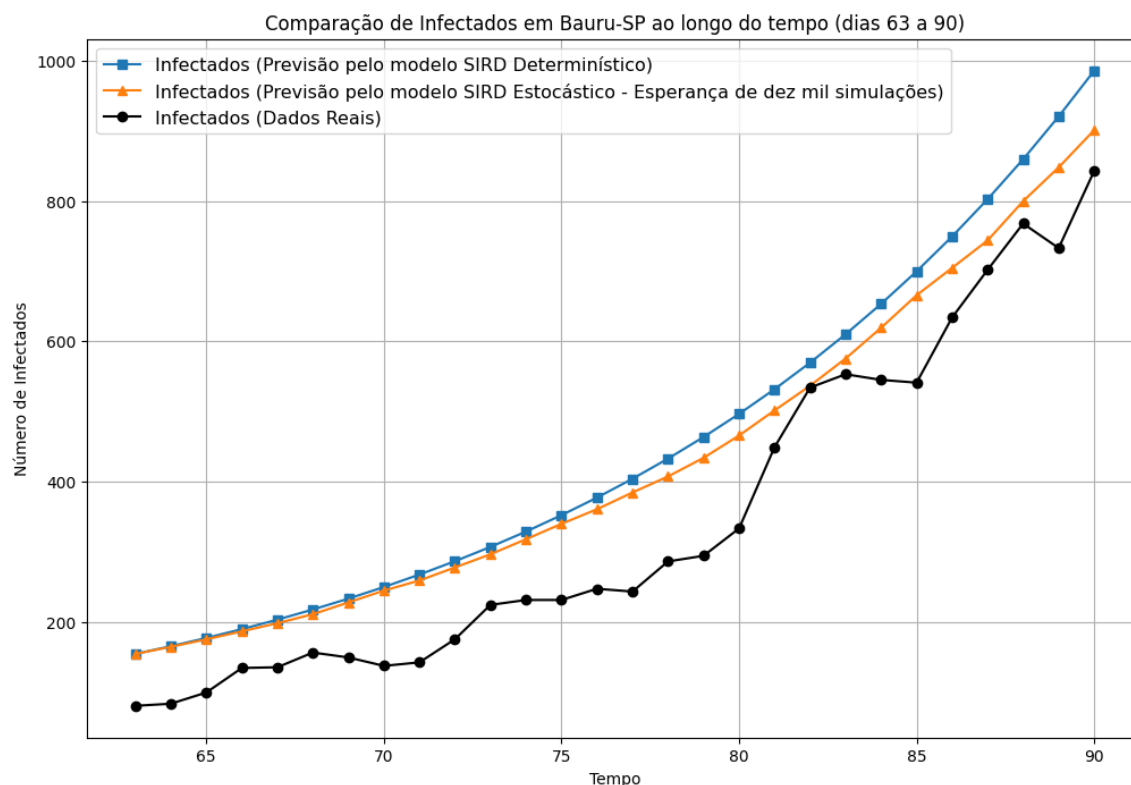
Apresentamos, a seguir, na Tabela 4.5 os dados estimados pelo modelo SIRD Determinístico, modelo SIRD Estocástico (com a esperança das dez mil simulações) e os dados reais, do dia  $t = 63$  até do dia  $t = 90$ . Apresentamos também, na Figura 4.10 o gráfico da comparação de tais dados (o qual apresentamos o código em linguagem Python no Apêndice I), mostrando que em todo intervalo analisado o modelo estocástico apresentou previsões mais assertivas que o modelo determinístico.

Tabela 4.5: Comparação dos Infectados em Bauru: Dados reais (não utilizados na estimação), modelo SIRD Determinístico e Esperança de dez mil simulações do modelo SIRD Estocástico do dia 63 ao 90

| <b>Dia (t)</b> | <b>Infectados</b><br>Previsão pelo<br>modelo SIRD Det. | <b>Infectados</b><br>Previsão pelo<br>modelo SIRD Est. | <b>Infectados</b><br>Dados reais |
|----------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------|
| 63             | 154,05                                                 | 154.01                                                 | 80                               |
| 64             | 165,03                                                 | 164.1                                                  | 83                               |
| 65             | 176,80                                                 | 174.87                                                 | 99                               |
| 66             | 189,41                                                 | 186.26                                                 | 134                              |
| 67             | 202,92                                                 | 197.85                                                 | 135                              |
| 68             | 217,39                                                 | 210.7                                                  | 156                              |
| 69             | 232,88                                                 | 227.51                                                 | 149                              |
| 70             | 249,48                                                 | 244.36                                                 | 137                              |
| 71             | 267,26                                                 | 258.84                                                 | 142                              |
| 72             | 286,31                                                 | 277.41                                                 | 175                              |
| 73             | 306,71                                                 | 296.19                                                 | 224                              |
| 74             | 328,56                                                 | 317.65                                                 | 231                              |
| 75             | 351,97                                                 | 339.61                                                 | 231                              |
| 76             | 377,03                                                 | 360.46                                                 | 247                              |
| 77             | 403,88                                                 | 384.33                                                 | 243                              |
| 78             | 432,63                                                 | 407.2                                                  | 286                              |
| 79             | 463,42                                                 | 433.75                                                 | 294                              |
| 80             | 496,40                                                 | 465.6                                                  | 333                              |
| 81             | 531,72                                                 | 501.47                                                 | 449                              |
| 82             | 569,53                                                 | 536.59                                                 | 534                              |
| 83             | 610,03                                                 | 575.43                                                 | 553                              |
| 84             | 653,39                                                 | 619.3                                                  | 545                              |
| 85             | 699,82                                                 | 665.76                                                 | 541                              |
| 86             | 749,53                                                 | 704.73                                                 | 634                              |
| 87             | 802,75                                                 | 743.94                                                 | 702                              |
| 88             | 859,73                                                 | 799.95                                                 | 768                              |
| 89             | 920,73                                                 | 848.12                                                 | 733                              |
| 90             | 986,02                                                 | 901.29                                                 | 843                              |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Figura 4.10: Comparação entre estimativas de Infectados vs Dados Reais - Covid-19 em Bauru



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

De modo análogo ao apresentado no presente capítulo, para os dados reais da cidade de Bauru, realizamos também a estimação de parâmetros do modelo SIRD Estocástico para a cidade de Rio Claro. Apresentamos tais resultados no Apêndice K.

## **Verificação da Estabilidade do modelo SIR com parâmetros estimados: dados reais de Bauru**

Apresentaremos, neste capítulo, os resultados obtidos em relação à análise da estabilidade do modelo epidemiológico SIR, com utilização de dados reais, onde para isso buscamos dados de nascimentos e óbitos na cidade de Bauru para estimar o parâmetro  $\mu$  (que representa a taxa de natalidade e a taxa mortalidade ao longo do tempo em que se modela a epidemia, ou seja, mortes da população exceto dos infectados pela epidemia em estudo) e realizar a análise da estabilidade do modelo SIR, apresentado no Capítulo 3, a partir dos dados reais de Bauru no início da pandemia de Covid-19. Todavia, não encontramos os dados de nascimentos e óbitos por dia, ou mês. Para isso, seria necessário solicitação como pesquisador ao Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE)), o que envolve certas burocracias como apresentação de projeto e aprovação no Comitê de Ética em Pesquisa, o qual demandaria de um tempo que não tínhamos disponível, por se tratar de uma pesquisa de mestrado em fase final. Assim, como alternativa, coletamos no site do IBGE os seguintes dados de nascimentos e mortes no ano de 2020, conforme apresentado na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Dados de Nascimentos e Óbitos no ano de 2020 em Bauru

| Nascidos Vivos* | Óbitos* |
|-----------------|---------|
| 4366            | 2845    |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor com dados do IBGE

\*Utilizamos os dados dos Nascidos Vivos no lugar de residência da mãe e Óbitos no lugar de residência do falecido, isto é, a categoria que exclui os casos de nascimentos e óbitos de indivíduos residentes em outras cidades.

Sendo que no modelo SIR Estocástico apresentado no Sistema (3.3) o parâmetro  $\mu$  é apresentado como a taxa de nascimento e óbitos (excluindo os falecidos pela doença analisada no modelo), buscamos os dados dos mortos por Covid-19 na cidade de Bauru no ano de 2020, como apresentado na Tabela 5.2, para posteriormente subtrair dos dados de óbitos totais apresentados na Tabela 5.1.

Portanto, do total de Óbitos em Bauru em 2020 de 2845 indivíduos, apresentados na Tabela 5.1, excluindo 299 falecidos por Covid-19, conforme apresentado na Tabela 5.2, temos um total de 2546 indivíduos falecidos em Bauru, em 2020 (exceto por Covid-19). O qual nos resulta em uma média de 212 falecidos por mês (exceto por Covid-19). Temos ainda, do número total de nascimentos em Bauru no ano de 2020, de 4366, uma média de 364 nascimentos por mês.

Ressalta-se que temos no modelo SIR Estocástico apresentado no Sistema (3.3), isto é, o sistema:

$$\begin{cases} dS(t) = (-\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu)dt - \sigma S(t)I(t)dW(t); \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - (\lambda + \mu)I(t))dt + \sigma S(t)I(t)dW(t); \\ dR(t) = (\lambda I(t) - \mu R(t))dt. \end{cases}$$

onde o parâmetro  $\mu$  apresentado como a taxa de nascimento e óbitos (exceto os da epidemia estudada), em um sistema onde essas duas taxas são iguais, por questões de simplificação do modelo. Como ao coletar os dados de nascimentos e óbitos na cidade de Bauru no início da pandemia, observamos que tais dados não são iguais, consideramos

Tabela 5.2: Óbitos por Covid-19 no ano de 2020 em Bauru

| Mês | Óbitos | Óbitos acumulados |
|-----|--------|-------------------|
| Jan | 0      | 0                 |
| Fev | 0      | 0                 |
| Mar | 0      | 0                 |
| Abr | 7      | 7                 |
| Mai | 8      | 15                |
| Jun | 15     | 30                |
| Jul | 43     | 73                |
| Ago | 67     | 140               |
| Set | 56     | 196               |
| Out | 51     | 247               |
| Nov | 23     | 270               |
| Dez | 29     | 299               |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor com dados do SP Covid-19 Info Tracker

denotar a taxa  $\mu$  como  $\mu_N$  para a taxa de nascimentos e  $\mu_O$  a taxa de óbitos (exceto os da epidemia estudada).

Assim sendo, do Sistema (3.3) que apresentava uma única taxa  $\mu$  para nascimentos e óbitos, substituímos este por  $\mu_N$  e  $\mu_O$ , obtendo o Sistema (5.1):

$$\begin{cases} dS(t) = (-\beta S(t)I(t) - \mu_O S(t) + \mu_N)dt - \sigma_1 S(t)I(t)dW_1(t); \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - (\lambda + \mu_O)I(t))dt + \sigma_2 S(t)I(t)dW_2(t); \\ dR(t) = (\lambda I(t) - \mu_O R(t))dt. \end{cases} \quad (5.1)$$

A partir dos dados encontrados para o ano de 2020 em Bauru, de 2546 indivíduos falecidos (exceto por Covid-19) e de 4366 nascimentos, calculamos a média diária para nascimentos e falecimentos (exceto por Covid-19) de, respectivamente, 7 e 12 indivíduos. A partir do qual foi possível, considerando a população total de Bauru de 379300, calcular os seguintes valores para os parâmetros  $\mu_N$  e  $\mu_O$ :

Tabela 5.3: Taxas de Nascimento e Óbito no ano de 2020 em Bauru

| $\mu_N$                          | $\mu_O$                          |
|----------------------------------|----------------------------------|
| $1,86395992617981 \cdot 10^{-5}$ | $3,15317690482468 \cdot 10^{-5}$ |

Fonte: Elaborada pelo próprio a partir de dados do IBGE

Efetuamos a análise da estabilidade no modelo SIR Estocástico apresentado no Sistema (3.3), o qual apresentamos a prova analítica da Proposição 4 envolvendo a estabilidade do sistema, no Capítulo 3. Todavia, primeiramente, manipulamos os dados para estimativa dos parâmetros a partir do modelo SIR Determinístico apresentado no Sistema (3.1), para buscar o parâmetro  $\beta$  (taxa de contato) e o parâmetro  $\lambda$  (taxa de recuperação), como realizado na Seção 4.1, do Capítulo 4, a partir das Equações (4.2), (4.3) e (4.4), com base na evolução dos dados oficiais dos efeitos da Covid-19, apresentados, de modo ilustrativo, na Tabela 4.1 (e apresentado a tabela completa com os 55 dias no Apêndice D) através da aproximação da derivada pela diferença central

$$f'(t) \approx \frac{f(t+h) - f(t-h)}{2h},$$

onde para cada dia dos dados da amostra  $t = 1, 2, \dots, 62 = T$  calculamos os parâmetros  $\beta_t$  e  $\lambda_t$  a partir das seguintes equações:

$$\beta = \frac{\sum_{t=1}^T \beta_t}{T}, \quad \text{onde temos:} \quad \beta_t = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)};$$

$$\lambda = \frac{\sum_{t=1}^T \lambda_t}{T}, \quad \text{onde temos} \quad \lambda_t = \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)}.$$

Ressaltamos que para o modelo SIR, o compartimento Removidos corresponde à soma dos indivíduos presentes no compartimento Recuperados e no compartimento Mortos, do modelo SIRD. Assim, calculamos a média simples dos valores de  $\beta_t$  e  $\lambda_t$ , ao longo dos 62 dias, gerando os parâmetros apresentado na Tabela 5.4:



Tabela 5.4: Parâmetros estimados, no tempo  $t = 62$ , do modelo SIR para cidade de Bauru

| $\beta$<br>Taxa<br>de<br>Contato | $\lambda$<br>Taxa<br>de<br>Recuperação |
|----------------------------------|----------------------------------------|
| $2,94858301579693 \cdot 10^{-7}$ | $4,2888420071182 \cdot 10^{-2}$        |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Para a estimativa dos parâmetros estocásticos,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , do modelo SIRD Estocástico apresentado no Sistema 3.3, utilizaremos a estimativa realizada da mesma forma apresentada na Seção 4.2, do Capítulo 4, a partir das Equações 4.6 e 4.7, isto é:

$$\sigma_1 = \frac{\sum_{t=1}^T \sigma_{1t}}{T}, \quad \text{onde temos} \quad \sigma_{1t} = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{S(t)};$$

$$\sigma_2 = \frac{\sum_{t=1}^T \sigma_{2t}}{T}, \quad \text{onde temos:}$$

$$\sigma_{2t} = -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2I(t)} + \frac{I(t+1) - I(t-1)}{2I(t)} + \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)}.$$

Assim, calculamos os valores de  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , ao longo dos 62 dias, gerando os parâmetros, e condições iniciais, apresentados na Tabela 5.5.

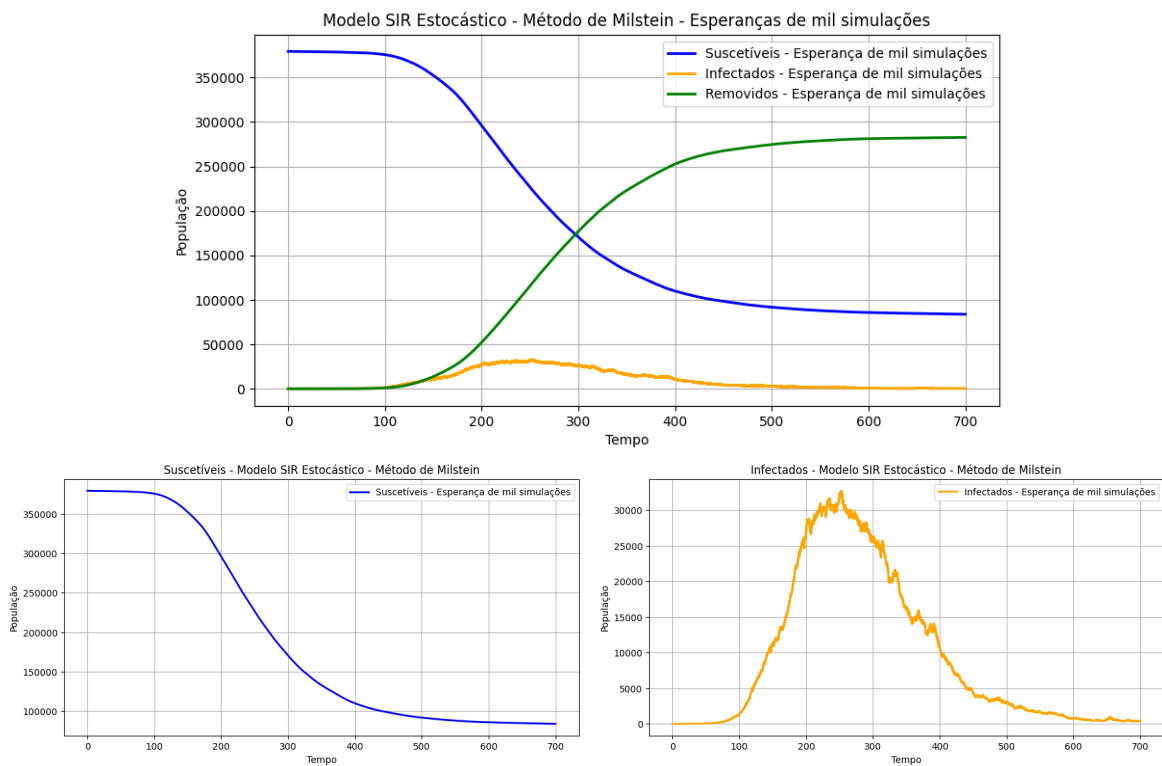
Tabela 5.5: Condições iniciais e parâmetros estimados (no tempo  $t = 62$ ) do modelo SIRD - Bauru

|                                       |                                  |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| $N$ - População Total                 | 379300                           |
| $S_0$ - Número Inicial de Suscetíveis | 379298                           |
| $I_0$ - Número Inicial de Infectados  | 2                                |
| $R_0$ - Número Inicial de Recuperados | 0                                |
| $D_0$ - Número Inicial de Mortos      | 0                                |
| $t_0$ - Data Inicial                  | 30/03/2020                       |
| $\beta$ - Taxa de Contato             | $2,94858301579693 \cdot 10^{-7}$ |
| $\lambda$ - Taxa de Recuperação       | $4,2888420071182 \cdot 10^{-2}$  |
| $\mu_N$ - Taxa de Natalidade          | $1,86395992617981 \cdot 10^{-5}$ |
| $\mu_O$ - Taxa de Mortalidade         | $3,15317690482468 \cdot 10^{-5}$ |
| $\sigma_1$ - Taxa Estocástica         | $2,41622620562151 \cdot 10^{-5}$ |
| $\sigma_2$ - Taxa Estocástica         | $2,23637447457932 \cdot 10^{-1}$ |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Dessa forma, utilizamos os parâmetros determinísticos e estocásticos e as condições iniciais apresentados na Tabela 5.5 para realizar simulações numéricas, em linguagem Python com uso do Método Milstein, de modo a verificar a estabilidade do modelo SIR, apresentado no Capítulo 3, a partir dos dados reais de Bauru no início da pandemia de Covid-19. O código é apresentado no Apêndice J, o qual gerou os gráficos, apresentados, a seguir (Fig. 5.1), realizados a partir de mil simulações estocásticas do modelo SIR, sendo apresentadas as esperanças destas.

Figura 5.1: Modelo SIR, contendo parâmetro  $\mu$ , com parâmetros estimados com dados de Bauru



Fonte: Elaborado pelo próprio autor

Dessa forma, é possível verificar nos gráficos apresentados na Figura 5.1, que com os parâmetros estimados com os dados de Bauru, para o modelo SIR do início da pandemia de Covid-19, se manteve o comportamento de não estabilidade como esperado, apresentado no Capítulo 3, com a Proposição 4 (que demonstramos analiticamente) e verificou-se com as simulações apresentadas na Seção 3.3, onde quando não temos satisfeitas as condições da proposição, apresentada em (3.16), como no início de uma pandemia como a da Covid-19, não temos o equilíbrio livre de doença no ponto  $E_0 = (1, 0, 0)$  como globalmente assintoticamente estável.

---

## Considerações finais

Neste trabalho, o nosso objetivo foi apresentar um estudo qualitativo, envolvendo os conceitos de estabilidades e método de Lyapunov, para sistemas determinísticos e para os sistemas estocásticos. Para isso, iniciamos apresentando os conceitos de Estabilidade via Lyapunov para EDOs, para então apresentar uma breve revisão dos conceitos de Probabilidade e Processos Estocásticos, bem como apresentar noções básicas sobre Integrais Estocásticas, Fórmula de Itô e Equações Diferenciais Estocásticas (EDEs). Dessa forma, foi possível estender o estudo de estabilidade via funções de Lyapunov para sistemas estocásticos, isto é, modelados por EDEs, adicionando um ruído nas EDOs, modelado pelo Movimento Browniano, e com o estudo de uma aplicação inicial em crescimento populacional.

Apresentou-se ainda, como cerne de nosso trabalho a aplicação de estabilidade em modelos epidemiológicos, com a demonstração do resultado que garante estabilidade para sistemas SIR estocásticos, no Capítulo 3. Além disso, para a verificação dos resultados a partir de simulações numéricas foi implementado e compilado um código em linguagem Python com uso do método Euler-Maruyama para EDEs, gerando gráficos da análise de estabilidade no modelo SIR Estocástico.

Ademais, realizou-se a estimação de parâmetros do modelo SIRD utilizando dados reais do início da pandemia de Covid-19 no município de Bauru-SP (e de Rio Claro-SP, apresentado no Apêndice K), de modo a poder fazer previsões a partir do modelo proposto, comparando o modelo SIRD Determinístico com o modelo SIRD Estocástico e os Dados Reais. Assim, foi possível verificar que o modelo Estocástico apresentou previsões mais assertivas que o modelo Determinístico.

Ressaltamos que no modelo para Covid-19 abordado nessa pesquisa considerou-se o período inicial da pandemia e, com isso, não foi levado em consideração a possibilidade de reinfecção, bem como não foi considerado a existência de vacinas.

Dessa forma, podemos propor como tema para pesquisas futuras, o estudo da pandemia de Covid-19 considerando a possibilidade de reinfecção, assim como a vacinação, a partir de modelos epidemiológicos estendidos do modelo SIR clássico, como por exemplos os modelos apresentados em Brauer e Castillo-Chavez (2012).

Além disso, disponibilizamos nos Apêndices os códigos em linguagem Python produzidos ou adaptados, utilizados ao longo deste trabalho, com links para acesso à plataforma Google Colab, onde o leitor pode acessá-los e utilizá-los com inspiração em pesquisas futuras.

Assim sendo, deste conteúdo apresentado, podemos considerar como contribuições que nosso trabalho apresenta:

1. Demonstração da Proposição 4 referente a estabilidade, via função de Lyapunov, em sistemas SIR Estocásticos, apresentado no Capítulo 3.
2. Trabalho com dados reais das cidades de Bauru (Capítulo 4) e Rio Claro (Apêndice K) para a estimação de parâmetros do modelo SIRD Estocástico, permitindo fazer previsões do número de infectados, comparando com os Dados Reais.
3. Compartilhamento de todos os códigos em Python utilizados, com a possibilidade de acesso pelo ambiente da plataforma Google Colab.

Ademais, apresentamos ainda, na próxima Seção, (5 - Produção Científica), a produção realizada a partir da presente pesquisa, na forma de Apresentação de Trabalhos e Publicação em Anais de Eventos.

---

## Produção Científica

Será apresentado a produção realizada em Apresentação de Trabalhos e Publicação em Anais de Eventos, a partir do trabalho desenvolvido nesta pesquisa.

### Apresentação de Trabalhos

- Apresentação do trabalho intitulado “Um estudo de estabilidade para EDEs via funções de Lyapunov”, 12º Congresso Científico da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia do IFSP - CONCISTEC 2022. Evento promovido pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) - Câmpus Bragança Paulista, de 19 a 21 de outubro de 2022.
- Apresentação do trabalho intitulado “ Estabilidade para EDEs via funções de Lyapunov aplicada ao crescimento populacional”, na XXXIV Semana da Licenciatura em Matemática - SELMAT 2022. Evento promovido pelo Departamento de Matemática da Unesp, Câmpus de Bauru, de 28 de novembro a 1 de dezembro de 2022.
- Apresentação do trabalho intitulado “Estabilidade via funções de Lyapunov em modelos SIR Estocásticos”, no XLII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2023. Evento promovido pela Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional - SBMAC, de 18 a 22 de setembro de 2023, em Bonito - MS.

- Apresentação do trabalho intitulado “Estimação de parâmetros do modelo SIRD: analisando os primeiros meses da pandemia de COVID-19 em Bauru-SP”, na XXXV Semana da Licenciatura em Matemática - SELMAT 2023. Evento promovido pelo Departamento de Matemática da Unesp, Câmpus de Bauru, de 16 a 20 de outubro de 2023.
- Apresentação, em Sessão de Comunicações Orais, do trabalho intitulado “ Modelo SIRD Estocástico: estimativa de parâmetros com dados de Rio Claro - SP nos primeiros meses da pandemia de Covid-19” no II Encontro do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PGMAT) do Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE, da Unesp, Câmpus de Rio Claro, realizado nos dias 25 e 26 de janeiro de 2024.

## Premiações

- Trabalho “ Modelo SIRD Estocástico: estimativa de parâmetros com dados de Rio Claro - SP nos primeiros meses da pandemia de Covid-19” classificado em segundo lugar na Sessão de Comunicações Orais do II Encontro do Programa de Pós-Graduação em Matemática do IGCE, Unesp / Rio Claro, realizado nos dias 25 e 26 de janeiro de 2024.

## Publicação em Anais de Eventos

- PASCOLAT, G. S.; SANTOS, E. O. V.; SILVA, F. B. Um estudo de estabilidade para EDEs via funções de Lyapunov. In: 12º Congresso Científico da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia do IFSP. 2022, Bragança Paulista, SP. *Anais do 12º Congresso Científico da Semana Nacional de Ciência e Tecnologia no IFSP (CONCISTEC 2022)* . ISSN 2178-9940. 2022.

Disponível em: <<https://drive.ifsp.edu.br/s/fnpinHOECDbiSk9#pdfviewer>>.

Acesso em 01 mar 2023.

- SANTOS, E. O. V.; PASCOLAT, G. S.; SILVA, F. B. Estabilidade para EDEs via funções de Lyapunov aplicada ao crescimento populacional. In: XXXIV Semana da Licenciatura em Matemática (SELMAT), 2022, Bauru, SP. *CADERNO DE RESUMOS - XXXIV SEMANA DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - SELMAT*. p. 12 - 14. 2022.  
  
Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/semanadalicenciatura/caderno-selmat-2022publicado.pdf>>. Acesso em 01 mar 2023.
- SANTOS, E. O. V.; SILVA, F. B. Estimação de parâmetros do modelo SIRD: analisando os primeiros meses da pandemia de COVID-19 em Bauru-SP. In: XXXV Semana da Licenciatura em Matemática (SELMAT), 2023, Bauru, SP. *CADERNO DE RESUMOS - XXXV SEMANA DA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA - SELMAT*. p. 32 - 34. 2023.  
  
Disponível em: <<https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/semanadalicenciatura/00--caderno-de-resumos---selmat-2023.pdf>>. Acesso em 30 jan 2024.
- SANTOS, E. O. V.; SILVA, F. B. Estabilidade via funções de Lyapunov em modelos SIR Estocásticos. In: XLII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC), 2023, Bonito, MS. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics - CNMAC 2023*. v. 10 n. 1. 2023.  
  
Disponível em: <<https://proceedings.sbmacc.org.br/sbmacc/article/view/4385>>. Acesso em 30 jan 2024.

Ademais, estamos trabalhando para publicação de artigo em periódico.

---

## Bibliografia

ALLEN, L. J. S. *An introduction to stochastic processes with applications to biology*. 2a. ed. Boca Raton: CRC press, 2010.

ALMEIDA, M. L. *Modelagem epidemiológica com um modelo SIR estocástico utilizando Cadeia de Markov de tempo contínuo*. Rio de Janeiro: 2020, Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, UFRJ, 2020.

AMARAL, F. et al. Towards Providing Effective Data-Driven Responses to Predict the Covid-19 in São Paulo and Brazil. *Sensors*, v. 21, n. 2, p. 540, 2021.

BARREIRA, L.; VALLS, C. *Equações diferenciais ordinárias: teoria qualitativa*. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

BRAUER, F.; CASTILLO-CHAVEZ, C. *Mathematical models in population biology and epidemiology*. New York: Springer, 2012.

CALIN, O. *An informal introduction to stochastic calculus with applications*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2015.

DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

EVANS, L. *An introduction to stochastic differential equations*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2013.

GARD, T. C. *Introduction to Stochastic Differential Equations*. New York: Marcel Dekker Inc., 1988.

HIGHAM, D. J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. *SIAM review*, v. 43, n. 3, p. 525-546, 2001.

JAMI, P.; KHODABIN, M.; HASHEMIZADEH, E. Numerical solution of stochastic SIR model via split-step forward *milstein* method. *J. Interpol. Approx. Sci. Comput*, v. 1, n. 1, p. 38-45, 2016.

KALACHEV, L.; LANDGUTH, E. L.; GRAHAM, J. Revisiting classical SIR modelling in light of the COVID-19 pandemic. *Infectious Disease Modelling*, v. 8, n. 1, p. 72-83, 2023.

KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *The Royal Society* 115, p. 700-721, London, 1927.



- KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. II. *The Royal Society* 138, p. 55-83, London, 1932.
- KERMACK, W. O.; MCKENDRICK, A. Contributions to the mathematical theory of epidemics, part. III. *The Royal Society* 141, p. 94-112, London, 1933.
- KLEBANER, F. C. *Introduction to stochastic calculus with applications*. 2. ed. London: Imperial College Press, 2005.
- KLOEDEN, P. E.; PLATEN, E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer, 1992.
- LOPES, M. M. *Fractional calculus and fuzzy sets theory: a study with epidemiological models for COVID-19*. Campinas: 2023, Tese (Doutorado) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2023.
- MAO, X. *Stochastic differential equations and applications*. 2. ed. [S.l.]: Elsevier., 2007.
- MONTEIRO, N. Z. *Aplicação do Cálculo de Ordem Arbitrária à Epidemiologia*. Juiz de Fora: 2021, Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Juiz de Fora, 2021.
- OKABE, Y.; SHUDO, A. A mathematical model of epidemics - a tutorial for students. *Mathematics*, v. 8, n. 7, p. 1174, 2020.
- OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 6. ed. New York: Springer Science & Business Media, 2003. ISBN 3-540-04758-1.
- PASCOLAT, G. S. *Um estudo de estabilidade estocástica via funções de Lyapunov*. Presidente Prudente: 2023, Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2023.
- PLATEN, E. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. *Acta Numerica*, v. 8, p. 197-246, 1999.
- ROSSANT, C. *Python Interactive Computing and Visualization Cookbook: Over 100 hands-on recipes to sharpen your skills in high-performance numerical computing and data science in the Jupyter Notebook*. 2018.
- RUBIO, O. et al. Simulation of the behaviour of Covid-19 with the stochastic SIRD model: case of peru. *Selecciones Matemáticas*, v. 10, n. 01, p. 81-89, 2023.
- RUFFINO, P. *Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- SOARES, B. R. *Equações diferenciais no estudo epidemiológico: Modelo SIR de Kermack e McKendrick*. Goiânia: 2023, Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, 2023.
- THEODORO, M. M. *Modelagem Fracionária da dinâmica da COVID-19*. Botucatu: 2022, Dissertação (Mestrado) - Instituto de Biociências de Botucatu, Universidade Estadual Paulista (Unesp), 2022.

---

TORNATORE, E.; BUCCELLATO, S. M.; VETRO, P. Stability of a stochastic SIR system. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 354, pp. 111-126. DOI: 10.1016, 2005.

VINCI, L. *The notebooks of Leonardo da Vinci*. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.

## **Código em Python: simulação numérica do Movimento Browniano**

04/10/2023, 14:20

Simulações Movimento Browniano.ipynb - Colaboratory

Simulação do Movimento Browniano

Elias Oliveira Vieira dos Santos

[elias.ov.santos@unesp.br](mailto:elias.ov.santos@unesp.br)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
num_passos = 1000 # Número de passos no movimento
media = 0          # Média dos deslocamentos
desvio_padrao = 1  # Desvio padrão dos deslocamentos

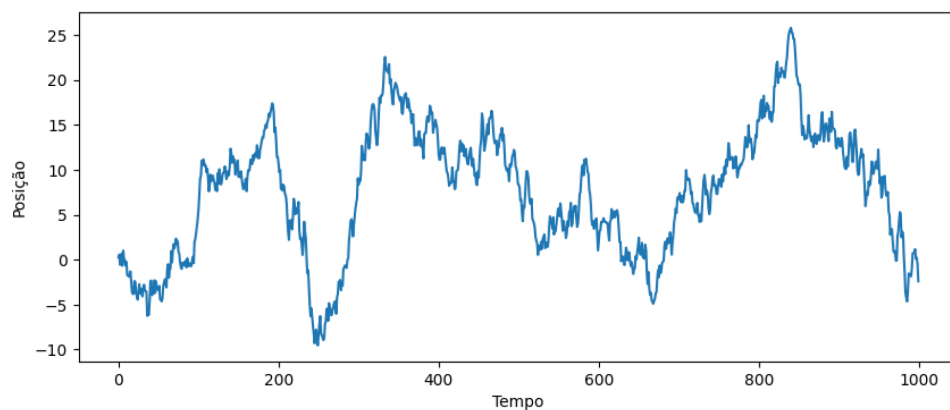
# Gere os deslocamentos aleatórios
deslocamentos = np.random.normal(loc=media, scale=desvio_padrao, size=num_passos)

# Calcule as posições acumuladas
posicoes = np.cumsum(deslocamentos)

# Crie um vetor de tempo
tempo = np.arange(num_passos)

# Plote o Movimento Browniano
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(tempo, posicoes)
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Posição')
plt.title('Simulação do Movimento Browniano')
plt.grid(True)

plt.show()
```



04/10/2023, 14:20

Simulações Movimento Browniano.ipynb - Colaboratory

10 Simulações do Movimento Browniano e Esperança

Elias Oliveira Vieira dos Santos

[elias.ov.santos@unesp.br](mailto:elias.ov.santos@unesp.br)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Parâmetros
num_simulacoes = 10 # Número de simulações
num_passos = 1000 # Número de passos em cada simulação
media = 0 # Média dos deslocamentos
desvio_padrao = 1 # Desvio padrão dos deslocamentos

# Inicialize uma matriz para armazenar todas as simulações
simulacoes = np.zeros((num_simulacoes, num_passos))

# Realize as simulações
for i in range(num_simulacoes):
    deslocamentos = np.random.normal(loc=media, scale=desvio_padrao, size=num_passos)
    simulacoes[i, :] = np.cumsum(deslocamentos)

# Crie um vetor de tempo
tempo = np.arange(num_passos)

# Plote as 10 trajetórias sem a esperança
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(num_simulacoes):
    plt.plot(tempo, simulacoes[i, :], alpha=0.5)
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Posição')
plt.title('10 Simulações do Movimento Browniano')

# Plote a esperança
plt.figure(figsize=(10, 4))
plt.plot(tempo, esperanca, color='red', label='Esperança')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Posição Média')
plt.title('Esperança das 10 simulações do Movimento Browniano')
plt.legend()

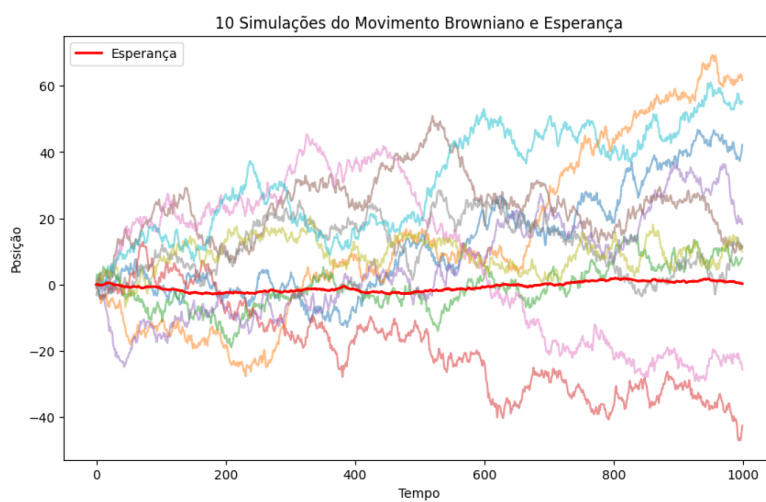
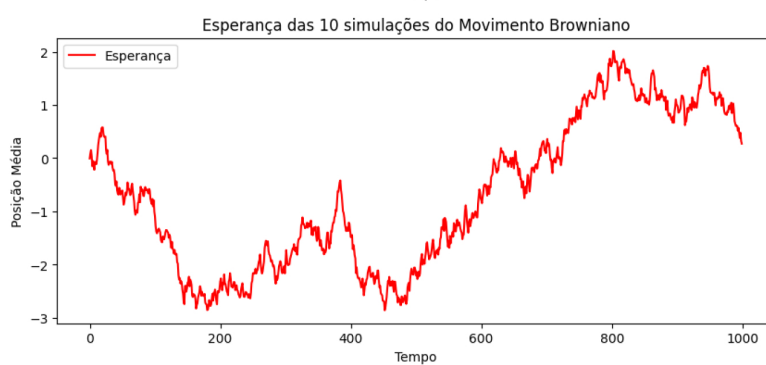
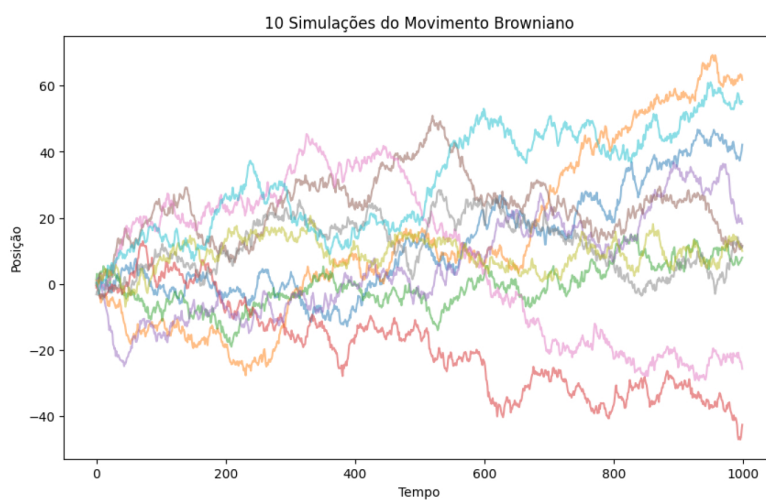
# Plote as 10 trajetórias e a esperança no mesmo gráfico
plt.figure(figsize=(10, 6))
for i in range(num_simulacoes):
    plt.plot(tempo, simulacoes[i, :], alpha=0.5)
plt.plot(tempo, esperanca, color='red', linewidth=2, label='Esperança')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Posição')
plt.title('10 Simulações do Movimento Browniano e Esperança')
plt.legend()

plt.show()
```



04/10/2023, 14:20

Simulações Movimento Browniano.ipynb - Colaboratory



## **Código em Python: simulação numérica de aplicação em crescimento populacional com Método de Euler-Maruyama para EDEs**

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python com Método de Euler-Maruyama para EDEs, utilizado na aplicação de Crescimento Populacional estudada. Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1QwLqJOxl2dS7NI6Z50IoAF7r0rQeAN3v>  
>. Acesso em 08 mar 2023.

Compartilharemos neste documento o código em Python utilizado em nossa pesquisa, intitulada **Estabilidade estocástica via funções de Lyapunov e aplicações**, de autoria de Elias Oliveira Vieira dos Santos, sob orientação do Prof. Dr. Fabiano Borges da Silva, fomentado pela Bolsa FAPESP de Mestrado Processo n. 2021/11857-6.

O código em Python utilizado, foi inspirado em Rossant (2018), fazendo uso do método Euler-Maruyama para gerar os gráficos da aplicação apresentada em nosso trabalho.

Código para o gráfico da Figura 1:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

beta = 1 # Standard deviation.
k = 20 # Mean.
r = 0.25 # Time constant.
x_init = 10

dt = .001 # Time step.
T = 100. # Total time.
n = int(T / dt) # Number of time steps.
t = np.linspace(0., T, n) # Vector of times.

sqrtdt = np.sqrt(dt)

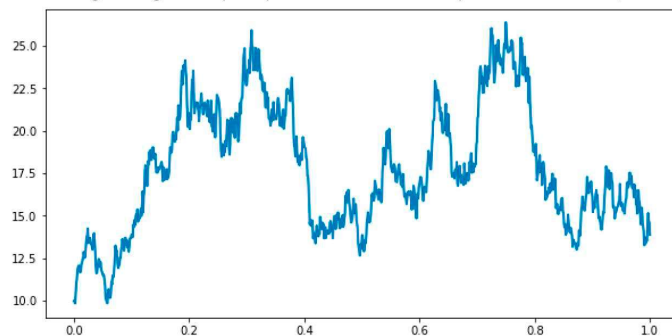
x = np.zeros(n)
x[0] = x_init

for i in range(n - 1):
    x[i + 1] = x[i] + dt *
        ((r * k * x[i] - r * x[i] * x[i])) + beta * x[i] * sqrtdt * np.random.randn()

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, x, lw=2)

print ('Temos o seguinte gráfico para para o sistema com os parâmetros
      K =', k, ', r =', r, 'e  $\beta =$ ', beta, '.')
```

☞ Temos o seguinte gráfico para para o sistema com os parâmetros  $K = 20$  ,  $r = 0.25$  e  $\beta = 1$  .





02/03/2023, 22:00

EDEs - Método de Euler-Maruyama.ipynb - Colaboratory

Código para o gráfico da Figura 2:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline

beta = 4 # Standard deviation.
k = 20 # Mean.
r = 0.25 # Time constant.
x_init = 10

dt = .001 # Time step.
T = 1. # Total time.
n = int(T / dt) # Number of time steps.
t = np.linspace(0., T, n) # Vector of times.

sqrtdt = np.sqrt(dt)

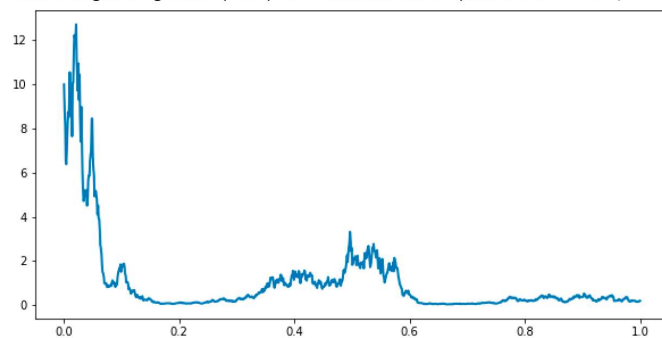
x = np.zeros(n)
x[0] = x_init

for i in range(n - 1):
    x[i + 1] = x[i] + dt *
        ((r * k * x[i] - r * x[i] * x[i])) + beta * x[i] * sqrtdt * np.random.randn()

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, x, lw=2)

print ('Temos o seguinte gráfico para para o sistema com os parâmetros
K =', k, ', r =', r, 'e  $\beta =$ ', beta, '.')
```

Temos o seguinte gráfico para para o sistema com os parâmetros  $K = 20$  ,  $r = 0.25$  e  $\beta = 4$  .



Obrigado! :)

# **Código em Python: simulação numérica de aplicação de estabilidade em modelo SIR**

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python com Método de Euler-Maruyama para EDEs, utilizado na aplicação do Modelo SIR Estocástico.

Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1I3VvZ1TEdbfNM-DRTuifsADbcXwigM8T>

>. Acesso em 29 set 2023.

03/10/2023, 01:55

Modelo SIR Estocástico - Método Euler-Maruyama.ipynb - Colaboratory

```

MODELO SIR ESTOCÁSTICO (Tornatore et al, 2005)


$$dS(t) = (-\beta S(t)I(t) - \mu S(t) + \mu)dt - \sigma S(t)I(t)dW(t),$$


$$dI(t) = (\beta S(t)I(t) - (\lambda + \mu)I(t))dt + \sigma S(t)I(t)dW(t),$$


$$dR(t) = (\lambda I(t) - \mu R(t))dt.$$


Trabalho de Qualificação de Mestrado Programa de Pós-graduação Matemática Aplicada e Computacional Unesp.
Elias Oliveira Vieira dos Santos

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
from scipy.integrate import odeint
%matplotlib inline

tend = 500
beta = 0.3
lamb = 0.15
mu = 0.2
sigma = 0.1
S_init = 0.99
I_init = 0.01
R_init = 0
dt = 0.001 # Time step.
T = 120 # Total time.
n = int(T / dt) # Number of time steps.
t = np.linspace(0., T, n) # Vector of times.

sqrtdt = np.sqrt(dt)

x = np.zeros(n)
x[0] = S_init
y = np.zeros(n)
y[0] = I_init
z = np.zeros(n)
z[0] = R_init

for i in range(n - 1):
    x[i + 1] = x[i] + (dt * ( (- beta * x[i] * y[i] ) - mu * x[i] + mu )) +
    + ( (- sigma * x[i] * y[i] ) * sqrtdt * np.random.randn() ) )
    y[i + 1] = y[i] + (dt * ( beta * x[i] * y[i] - ( lamb + mu ) * y[i] )) +
    + ( sigma * x[i] * y[i] ) * sqrtdt * np.random.randn()
    z[i + 1] = z[i] + (dt * ( lamb * y[i] - mu * z[i] ))

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, x, lw=2, label="S(t)")
ax.plot(t, y, lw=2, label="I(t)", color= 'orange')
ax.plot(t, z, lw=2, label="R(t)", color= 'green')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Modelo SIR Estocástico")

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, x, lw=2, label="S(t)")
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Suscetíveis")

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, y, lw=2, label="I(t)", color= 'orange')
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Infectados")

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, z, lw=2, label="R(t)", color= 'green')
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Removidos")

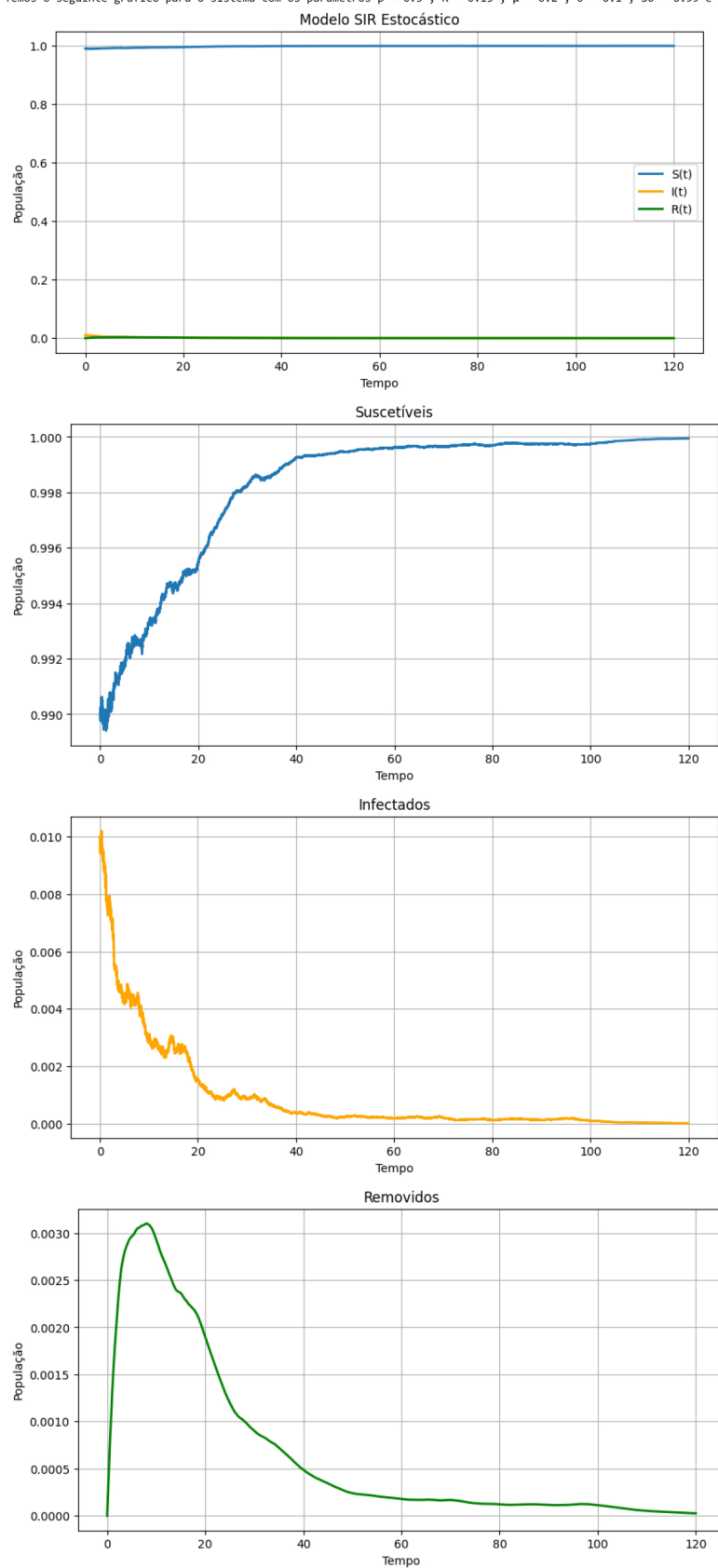
print ('Temos o seguinte gráfico para o sistema com os parâmetros  $\beta =$ , beta,
',  $\lambda =$ , lamb, ',  $\mu =$ , mu, ',  $\sigma =$ , sigma, ',
S0 =', S_init, 'e I0 =', I_init, '.')

```



03/10/2023, 01:55

Modelo SIR Estocástico - Método Euler-Maruyama.ipynb - Colaboratory

Temos o seguinte gráfico para o sistema com os parâmetros  $\beta = 0.3$ ,  $\lambda = 0.15$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $S_0 = 0.99$  e  $I_0 = 0.01$ .

## **Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia**

Apresentamos do decorrer do texto, no Capítulo 6, a Tabela 4.1, onde apontamos, de maneira ilustrativa apenas alguns dias, por questões de espaço, os números de Suscetíveis, Infectados, Recuperados e Mortos. Todavia, apresentamos a seguir, a tabela completa com os 62 dias coletados, a qual dividimos em duas partes.

Tabela D.1: Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia. Tabela completa parte 1.

| Dia<br>$t$ | Data   | Suscetíveis<br>$S(t)$ | Infectados<br>$I(t)$ | Recuperados<br>$R(t)$ | Mortos<br>$D(t)$ |
|------------|--------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| 0          | 29/mar | 379300                | 0                    | 0                     | 0                |
| 1          | 30/mar | 379298                | 2                    | 0                     | 0                |
| 2          | 31/mar | 379298                | 2                    | 0                     | 0                |
| 3          | 1/abr  | 379297                | 3                    | 0                     | 0                |
| 4          | 2/abr  | 379297                | 3                    | 0                     | 0                |
| 5          | 3/abr  | 379297                | 3                    | 0                     | 0                |
| 6          | 4/abr  | 379296                | 4                    | 0                     | 0                |
| 7          | 5/abr  | 379296                | 4                    | 0                     | 0                |
| 8          | 6/abr  | 379294                | 5                    | 0                     | 1                |
| 9          | 6/abr  | 379293                | 6                    | 0                     | 1                |
| 10         | 7/abr  | 379291                | 8                    | 0                     | 1                |
| 11         | 9/abr  | 379289                | 10                   | 0                     | 1                |
| 12         | 10/abr | 379289                | 10                   | 0                     | 1                |
| 13         | 11/abr | 379287                | 12                   | 0                     | 1                |
| 14         | 12/abr | 379287                | 12                   | 0                     | 1                |
| 15         | 13/abr | 379282                | 17                   | 0                     | 1                |
| 16         | 14/abr | 379276                | 21                   | 0                     | 3                |
| 17         | 15/abr | 379272                | 24                   | 0                     | 4                |
| 18         | 16/abr | 379264                | 30                   | 2                     | 4                |
| 19         | 17/abr | 379255                | 39                   | 2                     | 4                |
| 20         | 18/abr | 379242                | 50                   | 3                     | 5                |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Tabela D.2: Dados relativos à Covid-19 em Bauru no início da pandemia. Tabela completa parte 2.

| Dia<br>$t$ | Data    | Suscetíveis<br>$S(t)$ | Infectados<br>$I(t)$ | Recuperados<br>$R(t)$ | Mortos<br>$D(t)$ |
|------------|---------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| 21         | 19/abr  | 379239                | 52                   | 3                     | 6                |
| 22         | 20/abr  | 379237                | 54                   | 3                     | 6                |
| 23         | 21/abr  | 379237                | 53                   | 4                     | 6                |
| 24         | 22/abr  | 379236                | 54                   | 4                     | 6                |
| 25         | 23/abr  | 379227                | 62                   | 5                     | 6                |
| 26         | 24/abr  | 379222                | 66                   | 6                     | 6                |
| 27         | 25/abr  | 379214                | 71                   | 8                     | 7                |
| 28         | 26/abr  | 379213                | 70                   | 10                    | 7                |
| 29         | 27/abr  | 379213                | 70                   | 10                    | 7                |
| 30         | 28/abr  | 379209                | 72                   | 12                    | 7                |
| 31         | 29/abr  | 379205                | 76                   | 12                    | 7                |
| 32         | 30/abr  | 379192                | 84                   | 17                    | 7                |
| 33         | 1/mai   | 379183                | 89                   | 21                    | 7                |
| 34         | 2/mai   | 379183                | 86                   | 24                    | 7                |
| 35         | 3/mai   | 379183                | 78                   | 32                    | 7                |
| 36         | 4/mai   | 379177                | 75                   | 41                    | 7                |
| 37         | 5/mai   | 379168                | 72                   | 53                    | 7                |
| 38         | 6/mai   | 379156                | 82                   | 55                    | 7                |
| 39         | 7/mai   | 379154                | 80                   | 57                    | 9                |
| 40         | 8/mai   | 379142                | 92                   | 57                    | 9                |
| 41         | 9/mai   | 379140                | 93                   | 58                    | 9                |
| 42         | 10/mai  | 379140                | 84                   | 67                    | 9                |
| 43         | 11/mai  | 379132                | 87                   | 72                    | 9                |
| 44         | 12/mai  | 379123                | 88                   | 79                    | 10               |
| 45         | 13/mai  | 379107                | 103                  | 80                    | 10               |
| 46         | 14/mai  | 379100                | 110                  | 80                    | 10               |
| 47         | 15/mai  | 379092                | 113                  | 84                    | 11               |
| 48         | 16/mai  | 379090                | 110                  | 88                    | 12               |
| 49         | 17/mai  | 379090                | 97                   | 101                   | 12               |
| 50         | 18/mai  | 379082                | 96                   | 110                   | 12               |
| 51         | 19/mai  | 379079                | 99                   | 110                   | 12               |
| 52         | 20/mai  | 379073                | 105                  | 110                   | 12               |
| 53         | 21/mai  | 379062                | 110                  | 116                   | 12               |
| 54         | 22/mai  | 379055                | 108                  | 125                   | 12               |
| 55         | 23/mai  | 379053                | 98                   | 137                   | 12               |
| 56         | 24/mai  | 379048                | 102                  | 137                   | 13               |
| 57         | 25/mai  | 379044                | 93                   | 149                   | 14               |
| 58         | 26/mai  | 379044                | 91                   | 151                   | 14               |
| 59         | 27/mai  | 379039                | 96                   | 151                   | 14               |
| 60         | 27/mai  | 379034                | 92                   | 159                   | 15               |
| 61         | 29/mai  | 379016                | 102                  | 167                   | 15               |
| 62         | 30 /mai | 379015                | 87                   | 183                   | 15               |
| 63*        | 31 /mai | 379015                | 80                   | 190                   | 15               |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

\* **Observação:** Trabalhamos com análise de 62 dias, ( $t = 62$ ), mas como para calcular os valores dos parâmetros  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  as expressões 4.2, 4.3 e 4.4 pedem os valores de  $t + 1$  para  $S_t$ ,  $R_t$  e  $D_t$ , foi necessário encontrar os valores de  $t = 63$ .



## **Cálculos e Manipulações para Estimação dos Parâmetros do modelo SIRD**

Apresentamos no presente apêndice os cálculos e manipulações que resultam nas expressões apresentadas, para os seguintes parâmetros do modelo SIRD:

- $\beta$ : Taxa de Contato;
- $\lambda$ : Taxa de Recuperação;
- $\gamma$ : Taxa de Mortalidade;
- $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ : Coeficientes Estocásticos.

## E.1 Taxa de Contato do modelo SIRD: parâmetro $\beta$

Para buscar a estimação dos parâmetros, trabalhamos com modelo SIRD Determinístico apresentado no Sistema (4.1), isto é, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t); \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t); \\ D'(t) = \gamma I(t). \end{cases}$$

onde a partir da primeira EDO do sistema, isto é:

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

realizamos as seguintes manipulações, a fim de encontrar uma fórmula para estimar o valor do parâmetro  $\beta$  do modelo SIRD:

Como podemos escrever  $S'(t) = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2}$ , pela aproximação da derivada pela diferença central, temos:

$$\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} = -\beta S(t)I(t)$$

$$\beta = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)}$$

## E.2 Taxa de Recuperação do modelo SIRD: parâmetro $\lambda$

Para buscar a estimação dos parâmetros, trabalhamos com modelo SIRD Determinístico apresentado no Sistema (4.1), isto é, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t); \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t); \\ D'(t) = \gamma I(t). \end{cases}$$

onde a partir da terceira EDO do sistema, isto é:

$$R'(t) = \lambda I(t)$$

realizamos manipulações, a fim de encontrar uma fórmula para estimar o valor do parâmetro  $\lambda$  do modelo SIRD:

Como podemos escrever  $R'(t) = \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2}$ , pela aproximação da derivada pela diferença central, temos:

$$\frac{R(t+1) - R(t-1)}{2} = \lambda I(t)$$

$$\lambda = \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)}$$

### E.3 Taxa de Mortalidade do modelo SIRD: parâmetro $\gamma$

Para buscar a estimação dos parâmetros, trabalhamos com modelo SIRD Determinístico apresentado no Sistema (4.1), isto é, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)I(t); \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t); \\ D'(t) = \gamma I(t). \end{cases}$$

onde a partir da quarta EDO do sistema, isto é:

$$D'(t) = \gamma I(t)$$

realizaremos manipulações, a fim de encontrar uma fórmula para estimar o valor do parâmetro  $\gamma$  do modelo SIRD:

Como podemos escrever  $D'(t) = \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2}$ , pela aproximação da derivada pela diferença central, temos:

$$\frac{D(t+1) - D(t-1)}{2} = \gamma I(t)$$

$$\gamma = \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2I(t)}$$

## E.4 Coeficiente Estocástico do modelo SIRD: parâmetro $\sigma_1$

Para buscar a estimação dos parâmetros referente aos coeficientes estocásticos, trabalhamos com modelo SIRD Estocástico apresentado no Sistema (4.5), isto é, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_1 S(t)dW_1(t), & S(0) = s_0, \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))dt + \sigma_2 I(t)dW_2(t), & I(0) = i_0, \\ dR(t) = \lambda I(t)dt, & R(0) = r_0, \\ dD(t) = \gamma I(t)dt, & D(0) = d_0. \end{cases}$$

onde a partir da primeira EDE do sistema, ou seja

$$dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_1 S(t)dW_1(t)$$

realizamos as seguintes manipulações, a fim de encontrar uma fórmula para estimar o valor do parâmetro  $\sigma_1$  do modelo SIRD Estocástico:

$$dS(t) - \sigma_1 S(t)dW_1(t) = -\beta S(t)I(t)dt$$

$$\frac{dS(t) - \sigma_1 S(t)dW_1(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

$$S'(t) - \frac{\sigma_1 S(t)dW_1(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t)$$

Como  $\beta_t = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)}$  (como apresentado no Apêndice ??), temos:

$$S'(t) - \frac{\sigma_1 S(t)dW_1(t)}{dt} = -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)} S(t)I(t)$$

.

$$S'(t) - \frac{\sigma_1 S(t)dW_1(t)}{dt} = -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2}$$

Como podemos escrever  $S'(t) = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2}$ , pela aproximação da derivada pela diferença central, temos:

$$\begin{aligned} \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} - \frac{\sigma_1 S(t) dW_1(t)}{dt} &= -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} \\ \frac{\sigma_1 S(t) dW_1(t)}{dt} &= S(t+1) - S(t-1) \\ \sigma_1 S(t) dW_1(t) &= (S(t+1) - S(t-1)) dt \\ \sigma_1 &= \frac{(S(t+1) - S(t-1)) dt}{S(t) dW_1(t)} \\ \sigma_1 &= \frac{(S(t+1) - S(t-1))}{S(t)} \cdot \frac{dt}{dW_1(t)} \end{aligned}$$

Como podemos considerar  $dW_1(t) = \sqrt{dt}$ , temos:

$$\sigma_1 = \frac{(S(t+1) - S(t-1))}{S(t)} \cdot \frac{dt}{\sqrt{dt}}$$

Considerando os dados analisados, em cada  $dt$  varia um dia, podemos considerar  $dt = 1$  e  $\sqrt{dt} = 1$ . Assim, temos:

$$\sigma_1 = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{S(t)}$$

## E.5 Coeficiente Estocástico do modelo SIRD: parâmetro $\sigma_2$

A partir da segunda EDE do sistema do modelo SIRD (4.5), ou seja:

$$dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))dt + \sigma_2 I(t)dW_2(t)$$

realizamos manipulações, a fim de encontrar uma fórmula para estimar o valor do parâmetro  $\sigma_2$  do modelo SIRD Estocástico:

$$dI(t) - \sigma_2 I(t)dW_2(t) = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))dt$$

$$\frac{dI(t) - \sigma_2 I(t)dW_2(t)}{dt} = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))$$

$$I'(t) - \frac{\sigma_2 I(t)dW_2(t)}{dt} = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))$$

Como  $\beta_t = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)}$ ,  $\lambda_t = \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)}$  e  $\gamma_t = \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2I(t)}$  (como apresentado nos Apêndices E.1, E.2 e E.3), temos:

$$I'(t) - \frac{\sigma_2 I(t)dW_2(t)}{dt} = \left( \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2S(t)I(t)} \right) S(t)I(t) + \\ - \left( \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)} \right) I(t) - \left( \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2I(t)} \right) I(t)$$

$$I'(t) - \frac{\sigma_2 I(t)dW_2(t)}{dt} = \left( \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} \right) - \left( \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2} \right) - \left( \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2} \right)$$

Como podemos escrever  $I'(t) = \frac{I(t+1) - I(t-1)}{2}$ , pela aproximação da derivada pela diferença central, temos:

$$\frac{I(t+1) - I(t-1)}{2} - \frac{\sigma_2 I(t)dW_2(t)}{dt} = \frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} - \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2} - \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2}$$

$$\frac{\sigma_2 I(t)dW_2(t)}{dt} = -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} + \frac{I(t+1) - I(t-1)}{2} + \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2} + \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2}$$

$$\sigma_2 I(t) \frac{\sqrt{dt}}{dt} = -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2} + \frac{I(t+1) - I(t-1)}{2} + \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2} + \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2}$$

$$\sigma_2 = -\frac{S(t+1) - S(t-1)}{2I(t)} + \frac{I(t+1) - I(t-1)}{2I(t)} + \frac{R(t+1) - R(t-1)}{2I(t)} + \frac{D(t+1) - D(t-1)}{2I(t)}$$

## Código em Python modelo SIRD Det. com dados de Bauru

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python utilizando a função `Odeint`, do módulo `scipy.integrate`, da biblioteca SciPy, que resolve numericamente EDOs do modelo SIRD determinístico com parâmetros estimados a partir de dados reais da cidade de Bauru, no início da pandemia de Covid-19. Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1fh0Y22PIgLUr3GufYo6UHBtZZVo90RM>  
>. Acesso em 06 jan 2024.

O código retorna o gráfico do modelo SIRD Determinístico e a previsão de infectados do dia  $t = 0$  e  $t = 90$ .



01/02/24, 00:16

Modelo SIRD Determinístico\_Parametros Bauru.ipynb - Colaboratory

Modelo SIRD Determinístico

Com uso da função Odeint

Parâmetros obtidos através de análise de dados reais do município de Bauru no início da pandemia de Covid-19.

Elias Oliveira Vieira dos Santos

```

import numpy as np
import scipy.integrate
import matplotlib.pyplot as plt

def SIRD_model(y, t, beta, gamma, delta):
    S, I, R, D = y

    dS = -(beta)*S*I
    dI = (beta)*S*I - gamma*I - delta*I
    dR = gamma*I
    dD = delta*I

    return ([dS, dI, dR, dD])

t = np.linspace(0, 360, 361)

#Condições Iniciais e Parâmetros para cidade de Bauru-SP

N = 379300
S0 = 379298
I0 = 2
R0 = 0.0
D0 = 0.0
beta = 0.000000294858301579693
gamma = 0.0345122943418598
delta = 0.00835692416616626
#Ro = beta/(delta+gamma)
#print('R0 = ', Ro)
solution = scipy.integrate.odeint(SIRD_model, [S0, I0, R0, D0], t, args=(beta, gamma, delta))

plt.figure(figsize=[12,8])
plt.plot(t, solution[:, 0], label="S(t) - Suscetíveis")
plt.plot(t, solution[:, 1], label="I(t) - Infectados")
plt.plot(t, solution[:, 2], label="R(t) - Recuperados")
plt.plot(t, solution[:, 3], label="D(t) - Mortos")
plt.grid()
plt.legend()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
#plt.title("Modelo SIRD determinístico")
plt.show()

print("Modelo SIRD Determinístico cidade de Bauru - Função Odeint")
print(f"Dia 90: {solution[:, 1][90]} Infectados")
print(" ")

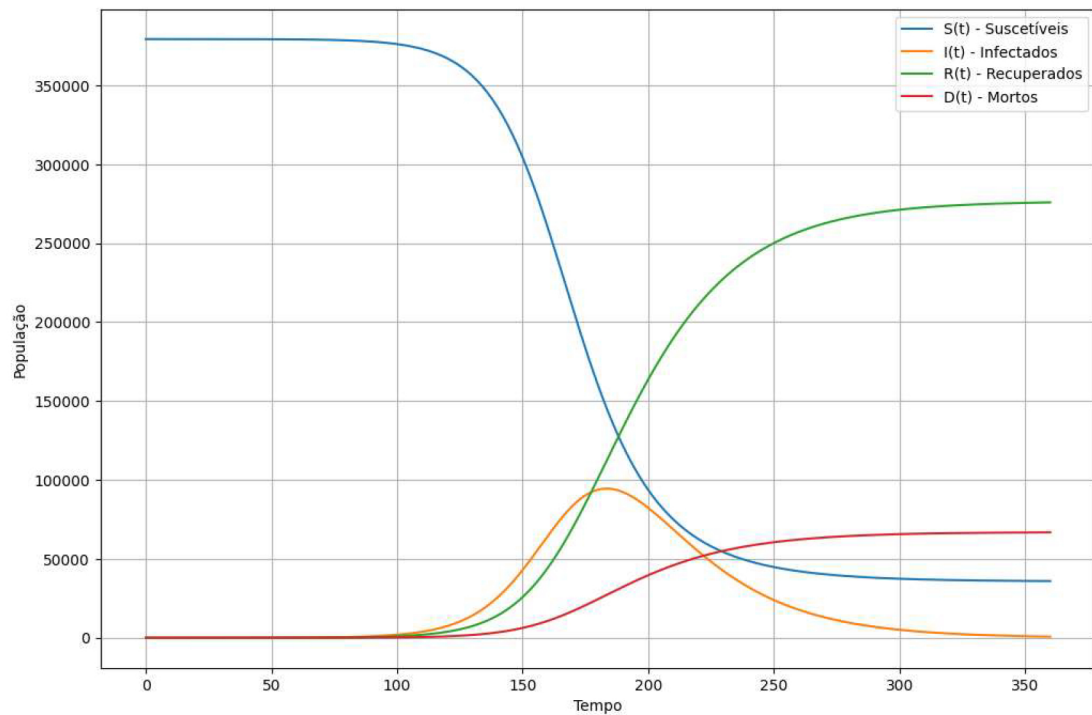
# Identificando os índices correspondentes a t=0, t=1, t=2, ..., t=90
indices_tempo = np.arange(0, 91, 1)

# Imprimir os valores de previsão dos infectados para t=0 até t=90
for indice in indices_tempo:
    print(f"Dia {indice}: Previsão de Infectados = {solution[:, 1][indice]}")

```

01/02/24, 00:16

Modelo SIRD Determinístico\_Parametros Bauru.ipynb - Colaboratory



Modelo SIRD Determinístico cidade de Bauru - Função Odeint  
Dia 90: 986.0221710960851 Infectados

|                                                     |                                                     |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| Dia 0: Previsão de Infectados = 2.0                 | Dia 46: Previsão de Infectados = 47.72673123836915  |
| Dia 1: Previsão de Infectados = 2.1428079320002738  | Dia 47: Previsão de Infectados = 51.133452026985395 |
| Dia 2: Previsão de Infectados = 2.2958127625501143  | Dia 48: Previsão de Infectados = 54.783251159378516 |
| Dia 3: Previsão de Infectados = 2.459742557305534   | Dia 49: Previsão de Infectados = 58.69345931033817  |
| Dia 4: Previsão de Infectados = 2.635377360539003   | Dia 50: Previsão de Infectados = 62.88264067987042  |
| Dia 5: Previsão de Infectados = 2.82355287198643    | Dia 51: Previsão de Infectados = 67.37068050480899  |
| Dia 6: Previsão de Infectados = 3.025164531273408   | Dia 52: Previsão de Infectados = 72.1788789867495   |
| Dia 7: Previsão de Infectados = 3.241171654160046   | Dia 53: Previsão de Infectados = 77.33005105415545  |
| Dia 8: Previsão de Infectados = 3.4726020549824685  | Dia 54: Previsão de Infectados = 82.84863434823937  |
| Dia 9: Previsão de Infectados = 3.720556955081875   | Dia 55: Previsão de Infectados = 88.76080333410074  |
| Dia 10: Previsão de Infectados = 3.9862161702074057 | Dia 56: Previsão de Infectados = 95.09459284863098  |
| Dia 11: Previsão de Infectados = 4.270843594566807  | Dia 57: Previsão de Infectados = 101.88002915560081 |
| Dia 12: Previsão de Infectados = 4.575793636840057  | Dia 58: Previsão de Infectados = 109.14927077747288 |
| Dia 13: Previsão de Infectados = 4.902517237578507  | Dia 59: Previsão de Infectados = 116.93675927283473 |
| Dia 14: Previsão de Infectados = 5.252568899177657  | Dia 60: Previsão de Infectados = 125.27937959809455 |
| Dia 15: Previsão de Infectados = 5.627614122938857  | Dia 61: Previsão de Infectados = 134.2166330665692  |
| Dia 16: Previsão de Infectados = 6.029437300424016  | Dia 62: Previsão de Infectados = 143.79082159609706 |
| Dia 17: Previsão de Infectados = 6.459950195533233  | Dia 63: Previsão de Infectados = 154.04724332582498 |
| Dia 18: Previsão de Infectados = 6.921201022806715  | Dia 64: Previsão de Infectados = 165.03440477098306 |
| Dia 19: Previsão de Infectados = 7.4153842073258485 | Dia 65: Previsão de Infectados = 176.8042450992621  |
| Dia 20: Previsão de Infectados = 7.9448508036440675 | Dia 66: Previsão de Infectados = 189.41237713325654 |
| Dia 21: Previsão de Infectados = 8.512119683440279  | Dia 67: Previsão de Infectados = 202.9183436616407  |
| Dia 22: Previsão de Infectados = 9.11988947995073   | Dia 68: Previsão de Infectados = 217.3858934645274  |
| Dia 23: Previsão de Infectados = 9.771051370491005  | Dia 69: Previsão de Infectados = 232.88327310475455 |
| Dia 24: Previsão de Infectados = 10.468702968123608 | Dia 70: Previsão de Infectados = 249.48354193461284 |
| Dia 25: Previsão de Infectados = 11.216162911809906 | Dia 71: Previsão de Infectados = 267.2649053701279  |
| Dia 26: Previsão de Infectados = 12.016986657573457 | Dia 72: Previsão de Infectados = 286.31107283511835 |
| Dia 27: Previsão de Infectados = 12.874983402123565 | Dia 73: Previsão de Infectados = 306.7116389010075  |
| Dia 28: Previsão de Infectados = 13.794234109881614 | Dia 74: Previsão de Infectados = 328.56248910437915 |
| Dia 29: Previsão de Infectados = 14.779110937308022 | Dia 75: Previsão de Infectados = 351.9662352659827  |
| Dia 30: Previsão de Infectados = 15.834298006122673 | Dia 76: Previsão de Infectados = 377.0326757761399  |
| Dia 31: Previsão de Infectados = 16.964813605604935 | Dia 77: Previsão de Infectados = 403.87929058233493 |
| Dia 32: Previsão de Infectados = 18.17603405059814  | Dia 78: Previsão de Infectados = 432.6317643778108  |
| Dia 33: Previsão de Infectados = 19.473719150430014 | Dia 79: Previsão de Infectados = 463.4245460001194  |
| Dia 34: Previsão de Infectados = 20.86403959453536  | Dia 80: Previsão de Infectados = 496.4014448563331  |
| Dia 35: Previsão de Infectados = 22.353606161688276 | Dia 81: Previsão de Infectados = 531.7162630836916  |
| Dia 36: Previsão de Infectados = 23.949501146263348 | Dia 82: Previsão de Infectados = 569.5334680677574  |
| Dia 37: Previsão de Infectados = 25.65931187643411  | Dia 83: Previsão de Infectados = 610.028908542517   |
| Dia 38: Previsão de Infectados = 27.49116675444373  | Dia 84: Previsão de Infectados = 653.3905746411184  |
| Dia 39: Previsão de Infectados = 29.45377360743292  | Dia 85: Previsão de Infectados = 699.8194026889743  |
| Dia 40: Previsão de Infectados = 31.556461224238625 | Dia 86: Previsão de Infectados = 749.5301320657431  |
| Dia 41: Previsão de Infectados = 33.80922326020557  | Dia 87: Previsão de Infectados = 802.7522101441976  |
| Dia 42: Previsão de Infectados = 36.22276575356082  | Dia 88: Previsão de Infectados = 859.730751764076   |
| Dia 43: Previsão de Infectados = 38.80855770234397  | Dia 89: Previsão de Infectados = 920.7275549204577  |
| Dia 44: Previsão de Infectados = 41.57888527333904  | Dia 90: Previsão de Infectados = 986.0221710960851  |
| Dia 45: Previsão de Infectados = 44.54691012053598  |                                                     |

## Código em Python modelo SIRD Est. com dados de Bauru

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python com Método de Milstein para EDEs, utilizado na aplicação do modelo epidemiológico SIRD Estocástico, com parâmetros estimados com dados da cidade de Bauru, no início da pandemia de Covid-19. Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1cOucdA6GGi3Gt1ELvWYKNzXf4IuJe5> >. Acesso em 23 jan 2024.

Observação: O presente código utiliza o modelo SIRD com os parâmetros estocásticos apresentados na Seção 4.2 do Capítulo 4, trabalhando várias simulações numéricas, das trajetórias das EDEs com o Movimento Browniano (em um mesmo gráfico), calculando a Esperança entre elas, para as variáveis S, I, R e D.

Ademais, o código retorna o gráfico do modelo SIRD Estocástico de Bauru, com a Esperanças das várias simulações realizadas e o tempo de execução. Além disso, o código apresenta a Esperança da previsão de infectados do dia  $t = 0$  e  $t = 90$ .

Ressaltamos que para um número grande de simulações, como apresentado no Capítulo 4 onde realizamos dez mil simulações, o Google Colab não suporta o processamento exigido, sendo necessário retirar do código as linhas que geram o gráfico (em marca d'água cinza para as simulações).

06/02/24, 03:52

Modelo SIRD Estocástico Bauru.ipynb - Colaboratory

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import time

start_time = time.time()

# Parâmetros do modelo para Bauru
beta = 0.00000294858301579693 # Taxa de transmissão
lambda_ = 0.0345122943418598 # Taxa de recuperação
gamma = 0.00835692416616626 # Taxa de mortalidade
sigma1, sigma2 = 0.0000241622620562151, 0.2069235991256

# Condições iniciais para Bauru
populacao_total = 379300
I0 = 2 # Infectados iniciais
R0 = 0 # Recuperados iniciais
D0 = 0 # Mortos iniciais
S0 = populacao_total - I0 - R0 - D0 # Suscetíveis iniciais

# Tempo de simulação e passo de tempo (dt)
T = 700
dt = 0.01
N = int(T/dt) + 1 # Número de pontos no tempo
t = np.linspace(0, T, N) # Criando o array de tempo

# número de simulações
num_simulacoes = 10
S_esperanca = np.zeros(N)
I_esperanca = np.zeros(N)
R_esperanca = np.zeros(N)
D_esperanca = np.zeros(N)

print("Modelo SIRD Estocástico com parâmetros estimados a partir de dados reais da cidade de Bauru")
print("Número de simulações a serem realizadas:", num_simulacoes)
print("Contando:")
# Realizando as simulações
for sim in range(num_simulacoes):
    print("Simulação:", sim)
    S_sim = np.zeros(N)
    I_sim = np.zeros(N)
    R_sim = np.zeros(N)
    D_sim = np.zeros(N)
    S_sim[0], I_sim[0], R_sim[0], D_sim[0] = S0, I0, R0, D0

    for i in range(1, N):
        dw1 = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        dw2 = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        dw3 = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        dw4 = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))
        dw5 = np.random.normal(0, np.sqrt(dt))

        milstein_term_S = 0.5 * (sigma1 * S_sim[i-1] * dw1) * (sigma1 * dw1) * ((dw1**2) - dt)
        milstein_term_I = 0.5 * (sigma2 * I_sim[i-1] * dw2) * (sigma2 * dw2) * ((dw2**2) - dt)

        S_sim[i] = S_sim[i-1] - beta*S_sim[i-1]*I_sim[i-1]*dt + sigma1*S_sim[i-1]*dw1 + milstein_term_S
        I_sim[i] = I_sim[i-1] + (beta*S_sim[i-1]*I_sim[i-1] - lambda_*I_sim[i-1] - gamma*I_sim[i-1])*dt +
                                + sigma2*I_sim[i-1]*dw2 + milstein_term_I
        R_sim[i] = R_sim[i-1] + lambda_*I_sim[i-1]*dt
        D_sim[i] = D_sim[i-1] + gamma*I_sim[i-1]*dt

    # Acumulando as somas para o cálculo da esperança
    S_esperanca += S_sim
    I_esperanca += I_sim
    R_esperanca += R_sim
    D_esperanca += D_sim

```

06/02/24, 03:52

Modelo SIRD Estocástico Bauru.ipynb - Colaboratory

```
# Plotando as simulações em marca d'água cinza
# ATENÇÃO, para um número grande de simulações o processamento exigido não suporta
#(sendo necessário retirar as próximas linhas com #):
plt.plot(t, S_sim, color='grey', alpha=0.5)
plt.plot(t, I_sim, color='grey', alpha=0.5)
plt.plot(t, R_sim, color='grey', alpha=0.5)
plt.plot(t, D_sim, color='grey', alpha=0.5)

# Calculando a esperança (média) para S, I, R, D
S_esperanca /= num_simulacoes
I_esperanca /= num_simulacoes
R_esperanca /= num_simulacoes
D_esperanca /= num_simulacoes

# Encontrando o valor da média de infectados no tempo t = 90
indice_t90 = int(90 / dt)
media_infectados_t90 = I_esperanca[indice_t90]

print("Número de simulações:", num_simulacoes)

# Exibindo o valor da média de infectados no tempo t = 90
print("Média de Infectados em t = 90:", media_infectados_t90)
print(" ")

# Imprimir os resultados dos infectados de t=0 até t=90
#for dia, infectados in zip(range(T+1), I_odeint):
#    print(f"Dia {dia}: Infectados = {infectados}")

# Identificando os índices correspondentes a t=0, t=1, t=2, ..., t=90
indices_tempo = np.arange(0, 91) * 100

# Imprimir os valores médios dos infectados para t=0 até t=90
for indice in indices_tempo:
    print(f"Dia {indice // 100}: Média de Infectados = {I_esperanca[indice]}")

print(" ")

end_time = time.time()
elapsed_time = end_time - start_time
print(f"Tempo de execução:")
print(f"{elapsed_time} segundos")
elapsed_time_min = elapsed_time / 60
print(f"{elapsed_time_min} minutos")

#Plotando as esperanças com cores
plt.plot(t, S_esperanca, label='Esperança de Suscetíveis', color='blue')
plt.plot(t, I_esperanca, label='Esperança de Infectados', color='orange')
plt.plot(t, R_esperanca, label='Esperança de Recuperados', color='green')
plt.plot(t, D_esperanca, label='Esperança de Mortos', color='red')

plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('População')
plt.title('Modelo SIRD Estocástico Bauru dados reais em t=62, Esperanças de várias simulações')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```

06/02/24, 03:52

Modelo SIRD Estocástico Bauru.ipynb - Colaboratory

```

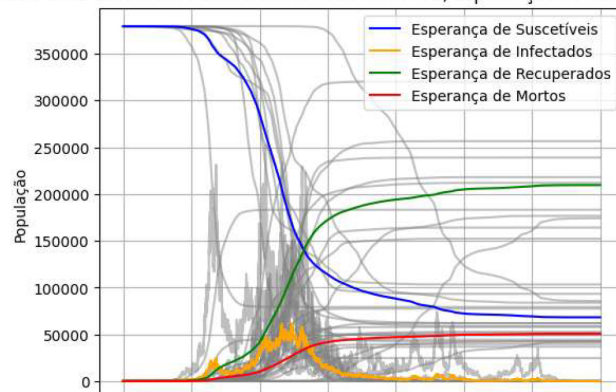
Modelo SIRD Estocástico com parâmetros estimados a partir de dados reais da cidade de Bauru
Número de simulações a serem realizadas: 10
Contando:
Simulação: 0
Simulação: 1
Simulação: 2
Simulação: 3
Simulação: 4
Simulação: 5
Simulação: 6
Simulação: 7
Simulação: 8
Simulação: 9
Número de simulações: 10
Média de Infectados em t = 90: 850.0455340300214

Dia 0: Média de Infectados = 2.0
Dia 1: Média de Infectados = 2.2183482599099387
Dia 2: Média de Infectados = 2.3549017066839424
Dia 3: Média de Infectados = 2.3819123293780944
Dia 4: Média de Infectados = 2.4684375393303877
Dia 5: Média de Infectados = 2.5035207096714758
Dia 6: Média de Infectados = 2.606419285142581
Dia 7: Média de Infectados = 2.9324923105462664
Dia 8: Média de Infectados = 3.2778204503350303
Dia 9: Média de Infectados = 3.331719785186339
Dia 10: Média de Infectados = 3.91454278641848
Dia 11: Média de Infectados = 4.13402352292994
Dia 12: Média de Infectados = 4.3816191642307825
Dia 13: Média de Infectados = 4.684032760412751
Dia 14: Média de Infectados = 4.857745404872514
Dia 15: Média de Infectados = 4.55262736548254
Dia 16: Média de Infectados = 4.758331779789603
Dia 17: Média de Infectados = 5.517183210714708
Dia 18: Média de Infectados = 6.079130024035258
Dia 19: Média de Infectados = 7.431793410532227
Dia 20: Média de Infectados = 8.763940403437184
Dia 21: Média de Infectados = 11.02129395959774
Dia 22: Média de Infectados = 13.530787133835409
Dia 23: Média de Infectados = 15.532145227786122
Dia 24: Média de Infectados = 15.84105612350353
Dia 25: Média de Infectados = 15.810419615347053
Dia 26: Média de Infectados = 18.997825902865227
Dia 27: Média de Infectados = 15.571399092220426
Dia 28: Média de Infectados = 17.01805758755169
Dia 29: Média de Infectados = 15.805893024749636
Dia 30: Média de Infectados = 17.15637792169821
Dia 31: Média de Infectados = 15.69500394547716
Dia 32: Média de Infectados = 19.877239488767025
Dia 33: Média de Infectados = 19.102625355763777
Dia 34: Média de Infectados = 18.24461005855713
Dia 35: Média de Infectados = 21.162179881390195
Dia 36: Média de Infectados = 23.719554209737698
Dia 37: Média de Infectados = 31.140060644100323
Dia 38: Média de Infectados = 26.560410047140277
Dia 39: Média de Infectados = 29.410869963736843
Dia 40: Média de Infectados = 29.65834068143218
Dia 41: Média de Infectados = 32.11454775011564
Dia 42: Média de Infectados = 31.97099445808479
Dia 43: Média de Infectados = 33.62768366045533
Dia 44: Média de Infectados = 34.187484348998794
Dia 45: Média de Infectados = 43.08324481344644
Dia 46: Média de Infectados = 53.45553879636778
Dia 47: Média de Infectados = 51.34753677506709
Dia 48: Média de Infectados = 60.33449714087227
Dia 49: Média de Infectados = 59.44433875986025
Dia 50: Média de Infectados = 75.01110438139328
Dia 51: Média de Infectados = 74.51490343992054
Dia 52: Média de Infectados = 93.99977837542811
Dia 53: Média de Infectados = 80.14735022080329
Dia 54: Média de Infectados = 111.10946486771468
Dia 55: Média de Infectados = 89.45811475526156
Dia 56: Média de Infectados = 94.33963643016327
Dia 57: Média de Infectados = 88.22821612405477
Dia 58: Média de Infectados = 94.28741802929788
Dia 59: Média de Infectados = 78.46414491672684
Dia 60: Média de Infectados = 78.08853965453069
Dia 61: Média de Infectados = 77.70213983531659
Dia 62: Média de Infectados = 67.56328919249405
Dia 63: Média de Infectados = 83.05217252188984
Dia 64: Média de Infectados = 93.23563597423755
Dia 65: Média de Infectados = 96.9034812410772
Dia 66: Média de Infectados = 111.76375174633581
Dia 67: Média de Infectados = 122.87390507839234
Dia 68: Média de Infectados = 123.17918835568226
Dia 69: Média de Infectados = 122.35607729600534
Dia 70: Média de Infectados = 151.52578243809447
Dia 71: Média de Infectados = 163.69870517778287
Dia 72: Média de Infectados = 198.0485598887705
Dia 73: Média de Infectados = 207.22708822840778
Dia 74: Média de Infectados = 253.46861839468593
Dia 75: Média de Infectados = 353.8745305441285
Dia 76: Média de Infectados = 362.70271880501576
Dia 77: Média de Infectados = 354.03815910064253
Dia 78: Média de Infectados = 411.91065390939565
Dia 79: Média de Infectados = 358.90631638884355
Dia 80: Média de Infectados = 379.8322714079253
Dia 81: Média de Infectados = 507.06678297997377
Dia 82: Média de Infectados = 498.5395864696346
Dia 83: Média de Infectados = 617.341114871212
Dia 84: Média de Infectados = 605.6684549309921
Dia 85: Média de Infectados = 791.7447070169023
Dia 86: Média de Infectados = 953.7324190356301
Dia 87: Média de Infectados = 916.3148306457313
Dia 88: Média de Infectados = 1039.591939402003
Dia 89: Média de Infectados = 935.136663402666
Dia 90: Média de Infectados = 850.0455340300214

```

Tempo de execução:  
13.365651369094849 segundos  
0.2227608561515808 minutos

Modelo SIRD Estocástico Bauru dados reais em t=62, Esperanças de várias simulações



## **Código em Python: gráfico com previsão de infectados no dia $t = 90$ em Bauru**

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python que gera um gráfico a partir de listas de dados com números de infectados dos dados reais e previsão dos modelos SIRDs determinísticos e estocásticos (esperança de dez mil simulações) e previsões para o número de infectados em  $t = 90$ . Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1DGFLsoUkruljihfGEz9E-nYQjUDAGxN>  
>. Acesso em 06 fev 2024.

## H. Código em Python gráfico com previsão de infectados no dia $t = 90$ em Bauru 145

06/02/24, 03:35

Previsões de Infectados no dia t=90.ipynb - Colaboratory

Gerando gráfico a partir de listas de dados com números de infectados dos dados reais e previsão dos modelos SIRDs determinísticos e estocásticos (esperança de dez mil simulações).

```
import matplotlib.pyplot as plt

# Dias do intervalo de 1 a 90
dias = list(range(1, 91))

# Infectados - DADOS REAIS Bauru dias t=1 a t=62
infectados_reais = [
    2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 8, 10, 10, 12, 12, 17, 21, 24, 30, 39, 50, 52, 54, 53, 54, 62, 66, 71, 70,
    70, 72, 76, 84, 89, 86, 78, 75, 72, 82, 80, 92, 93, 84, 87, 88, 103, 110, 113, 110, 97, 96, 99, 105,
    110, 108, 98, 102, 93, 91, 96, 92, 102, 87]

# Dados de Infectados (SIRD Det.)
infectados_sird_det = [
    2.14, 2.30, 2.46, 2.64, 2.82, 3.03, 3.24, 3.47, 3.72, 3.99, 4.27, 4.58, 4.90, 5.25, 5.63, 6.03, 6.46,
    6.92, 7.42, 7.94, 8.51, 9.12, 9.77, 10.47, 11.22, 12.02, 12.87, 13.79, 14.78, 15.83, 16.96, 18.18,
    19.47, 20.86, 22.35, 23.95, 25.66, 27.49, 29.45, 31.56, 33.81, 36.22, 38.81, 41.58, 44.55, 47.73,
    51.13, 54.78, 58.69, 62.88, 67.37, 72.18, 77.33, 82.85, 88.76, 95.09, 101.88, 109.15, 116.94, 125.28,
    134.22, 143.79, 154.05, 165.03, 176.80, 189.41, 202.92, 217.39, 232.88, 249.48, 267.26, 286.31, 306.71,
    328.56, 351.97, 377.03, 403.88, 432.63, 463.42, 496.40, 531.72, 569.53, 610.03, 653.39, 699.82, 749.53,
    802.75, 859.73, 920.73, 986.02]

# Dados de Infectados (SIRD Est.) #Bauru Esperança de dez mil simulações
infectados_sird_est = [
    2.15, 2.3, 2.46, 2.64, 2.83, 3.03, 3.25, 3.48, 3.74, 3.99, 4.28, 4.58, 4.93, 5.28, 5.66, 6.04, 6.44, 6.92,
    7.41, 7.95, 8.54, 9.11, 9.79, 10.46, 11.19, 11.9, 12.76, 13.7, 14.55, 15.57, 16.73, 18.11, 19.32, 20.61,
    22.13, 23.75, 25.43, 27.3, 29.15, 31.27, 33.29, 35.84, 38.34, 41.21, 44.27, 47.75, 51.42, 55.11, 58.86,
    63.46, 67.8, 72.68, 77.93, 83.67, 89.55, 95.86, 102.85, 110.2, 118.76, 127.56, 136.11, 144.27, 154.01, 164.1,
    174.87, 186.26, 197.85, 210.7, 227.51, 244.36, 258.84, 277.41, 296.19, 317.65, 339.61, 360.46, 384.33, 407.2,
    433.75, 465.6, 501.47, 536.59, 575.43, 619.3, 665.76, 704.73, 743.94, 799.95, 848.12, 901.29]

# Coordenadas do ponto a ser adicionado
ponto_dado_real = (90, 843)
ponto_dado_prev_det = (90, 986.02)
ponto_dado_prev_est = (90, 901.29)

# Coordenadas dos pontos a serem adicionados - Dados Reais t=1 a t=60
pontos_infectados_reais = list(zip(dias, infectados_reais))

# Criando o gráfico
plt.figure(figsize=(12, 8))

# Plota as curvas no gráfico
plt.plot(dias, infectados_reais, 'o-', label='Infectados (Dados Reais)')
plt.plot(dias, infectados_sird_det, 's-', label='Infectados - Previsão pelo modelo SIRD Determinístico')
plt.scatter(*zip(*pontos_infectados_reais), color='black', label='Infectados - Dados Reais (62 dias) utilizados para estimação dos parâmetros', zorder=5)
plt.scatter(*ponto_dado_prev_det, color='blue', label='Previsão pelo modelo SIRD Determinístico no dia 90: 986 infectados ', zorder=5)
plt.scatter(*ponto_dado_real, color='red', label='Dado Real para o dia 90: 843 infectados ', zorder=5)

plt.plot(dias, infectados_sird_est, '^-', label='Infectados - Previsão pelo modelo SIRD Estocástico')
plt.scatter(*ponto_dado_prev_est, color='salmon', label='Previsão pelo modelo SIRD Estocástico no dia 90: 901 infectados ', zorder=5)

# Define a graduação do eixo x em intervalos de 20
plt.xticks(range(0, 91, 10))
plt.yticks(range(0, 1000, 100))

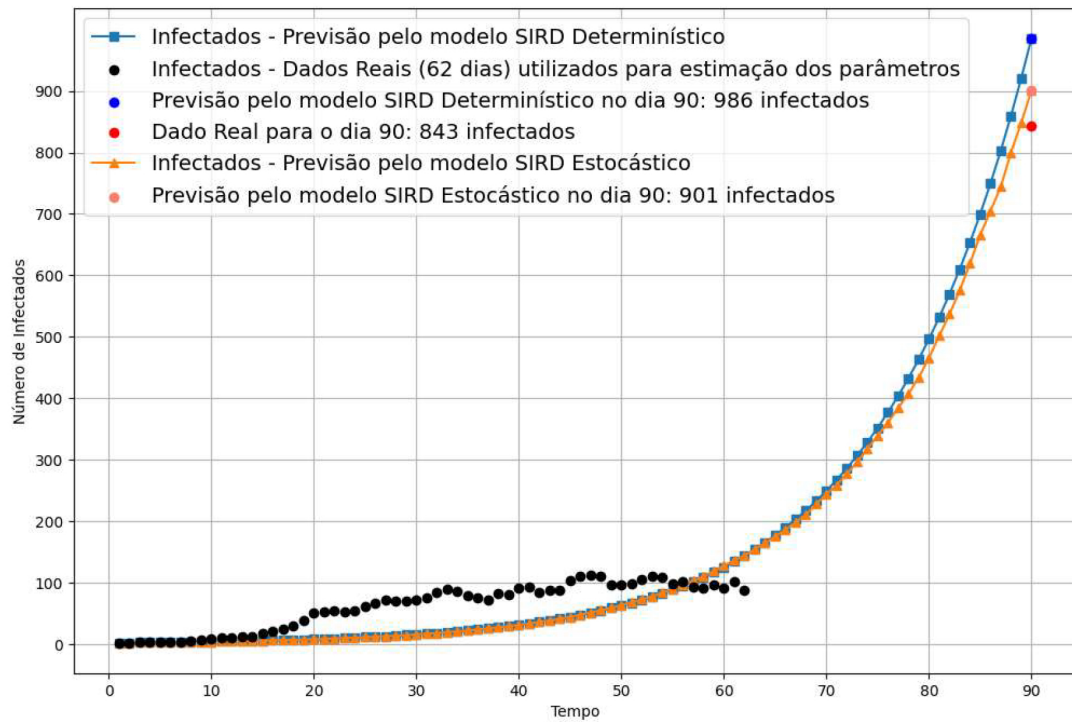
# Adiciona título e rótulos
plt.title('Comparação de Infectados em Bauru ')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Número de Infectados')
plt.legend(fontsize=14)

# Mostra o gráfico
plt.grid(True)
plt.show()
```



06/02/24, 03:35

Previsões de Infectados no dia  $t=90$ .ipynb - Colaboratory



## Código em Python comparação de Infectados em Bauru

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python que gera um gráfico comparando os dados de previsão de Infectados do modelo SIRD Estocástico, previsão de Infectados do modelos SIRD Determinístico e Dados Reais de Infectados, no intervalo de  $t = 63$  a  $t = 90$ . Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1qBfUoPC8LsAWoQZ1dNLhiQIRqdCin6iN>  
>. Acesso em 31 jan 2024.

06/02/24, 04:44

Comparação de Infectados em Bauru t=63 a t=90.ipynb - Colaboratory

```
#Comparação de Infectados em Bauru-SP ao longo do tempo (dias 63 a 90)

import matplotlib.pyplot as plt

# Dias do intervalo de 63 a 90
dias = list(range(63, 91))

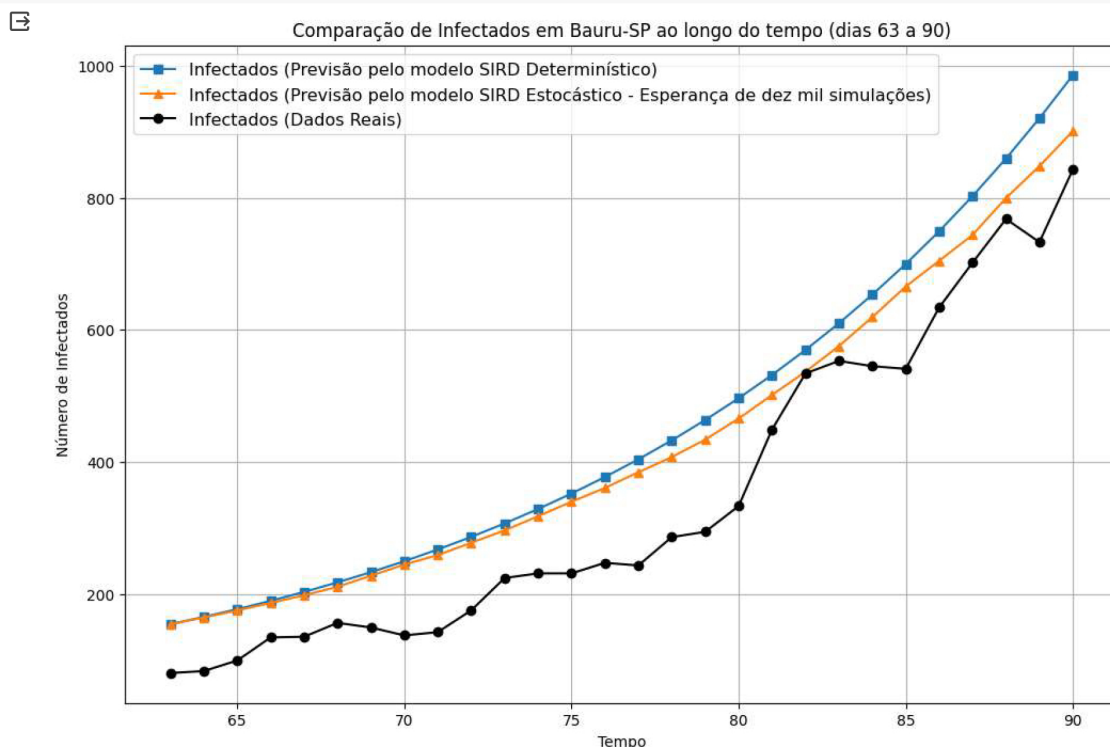
# Dados de Infectados (Dados Reais)
infectados_reais = [
    80, 83, 99, 134, 135, 156, 149, 137, 142, 175, 224, 231, 231, 247, 243, 286,
    294, 333, 449, 534, 553, 545, 541, 634, 702, 768, 733, 843]

# Dados de Infectados (SIRD Det.)
infectados_sird_det = [
    154.05, 165.03, 176.80, 189.41, 202.92, 217.39, 232.88, 249.48, 267.26,
    286.31, 306.71, 328.56, 351.97, 377.03, 403.88, 432.63, 463.42, 496.40, 531.72,
    569.53, 610.03, 653.39, 699.82, 749.53, 802.75, 859.73, 920.73, 986.02]

# Dados de Infectados (SIRD Est.)
infectados_sird_est = [
    154.01, 164.1, 174.87, 186.26, 197.85, 210.7, 227.51, 244.36, 258.84, 277.41, 296.19,
    317.65, 339.61, 360.46, 384.33, 407.2, 433.75, 465.6, 501.47, 536.59, 575.43, 619.3,
    665.76, 704.73, 743.94, 799.95, 848.12, 901.29]

# Criando o gráfico
plt.figure(figsize=(12, 8))
# Plota as curvas no gráfico
plt.plot(dias, infectados_sird_det, 's-', label='Infectados (Previsão pelo modelo SIRD Determinístico)')
plt.plot(dias, infectados_sird_est, '^-', label='Infectados (Previsão pelo modelo SIRD Estocástico -
    Esperança de dez mil simulações)')
plt.plot(dias, infectados_reais, 'o-', label='Infectados (Dados Reais)', color='k')
# Adiciona título e rótulos
plt.title('Comparação de Infectados em Bauru-SP ao longo do tempo (dias 63 a 90)')
plt.xlabel('Tempo')
plt.ylabel('Número de Infectados')
plt.legend(fontsize=11.5)

# Mostra o gráfico
plt.grid(True)
plt.show()
```



## **Código em Python modelo SIR: verificação de estabilidade com dados reais de Bauru**

Link do ambiente Google Colab com código em linguagem Python com Método de Milstein para o modelo SIR com parâmetros estimados a partir de dados reais da cidade de Bauru, no início da pandemia de Covid-19, utilizado para análise de estabilidade. Disponível em:

< <https://colab.research.google.com/drive/1LLItCF6ruZIGtRyAOiEDHgGyIzS1qk0y> >.

Acesso em 05 jan 2024.

06/01/24, 19:21

Analise Estabilidade.ipynb - Colaboratory

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import random
from scipy.integrate import odeint

# Parâmetros do modelo SIR
tend = 700
beta = 0.000000294858301579693 # Taxa de Contato
lamb = 0.042869218508026 # Taxa de Recuperação
muM = 0.0000315317690482468 # Taxa de MortalidadeNatural
muN = 0.0000186395992617981 # Taxa de Nascimento
sigma1 = 0.0000241622620562151 # Taxa Estocástica
sigma2 = 0.223637447457932

# Condições iniciais
S_init = 379298
I_init = 2
R_init = 0

# Configurações temporais
dt = 0.001 # Time step.
T = 700 # Total time.
n = int(T / dt) # Number of time steps.
t = np.linspace(0., T, n) # Vector of times.
sqrt dt = np.sqrt(dt)

# Número de simulações
num_simulations = 1000

# Arrays para armazenar as médias de S, I e R
S_avg = np.zeros(n)
I_avg = np.zeros(n)
R_avg = np.zeros(n)

# Realiza as simulações
for simulation in range(num_simulations):
    S = np.zeros(n)
    I = np.zeros(n)
    R = np.zeros(n)
    S[0] = S_init
    I[0] = I_init
    R[0] = R_init

    # Loop principal usando o método de Milstein
    for i in range(n - 1):
        dW1 = np.random.randn() * sqrt dt
        dW2 = np.random.randn() * sqrt dt

        # Termos de Milstein para S e I
        milstein_term_S = 0.5 * sigma1 * sigma1 * S[i] * (dW1**2 - dt)
        milstein_term_I = 0.5 * sigma2 * sigma2 * I[i] * (dW2**2 - dt)

        # Atualizações das variáveis de estado
        S[i + 1] = S[i] + dt * ((-beta * S[i] * I[i]) - muM * S[i] + muN) + sigma1 * S[i] * dW1 + milstein_term_S
        I[i + 1] = I[i] + dt * (beta * S[i] * I[i] - (lamb + muM) * I[i]) + sigma2 * I[i] * dW2 + milstein_term_I
        R[i + 1] = R[i] + dt * (lamb * I[i] - muM * R[i])
```

06/01/24, 19:21

Analise Estabilidade.ipynb - Colaboratory

```
# Acumula as somas para calcular a média
S_avg += S
I_avg += I
R_avg += R

# Calcula a média (esperança) de S, I e R
S_avg /= num_simulations
I_avg /= num_simulations
R_avg /= num_simulations

# Plotting - Modelo SIR com médias
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, S_avg, lw=2, label="Suscetíveis - Esperança de mil simulações", color='blue')
ax.plot(t, I_avg, lw=2, label="Infectados - Esperança de mil simulações", color='orange')
ax.plot(t, R_avg, lw=2, label="Removidos - Esperança de mil simulações", color='green')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Modelo SIR Estocástico - Método de Milstein - Esperanças de mil simulações")
plt.show()

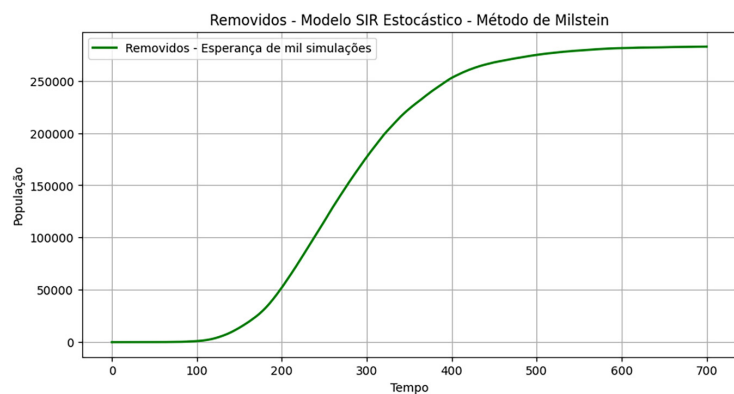
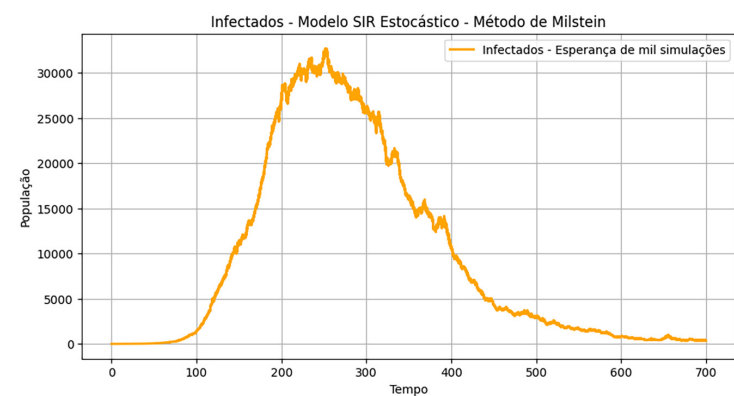
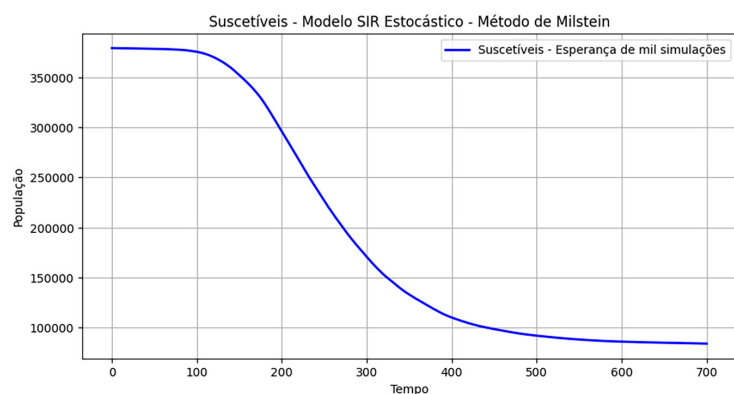
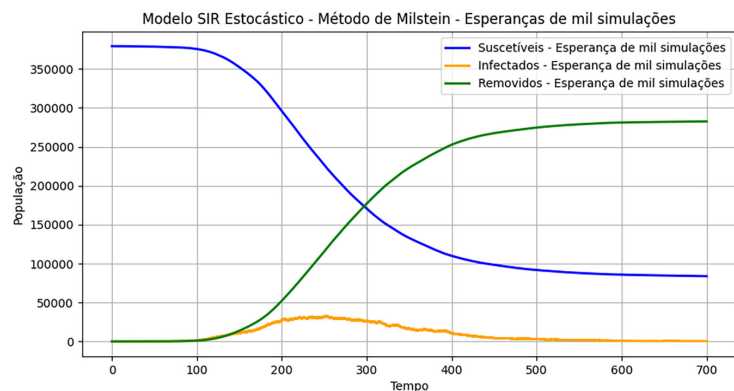
# Plotting - Modelo SIR com médias
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, S_avg, lw=2, label="Suscetíveis - Esperança de mil simulações", color='blue')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Suscetíveis - Modelo SIR Estocástico - Método de Milstein")
plt.show()

# Plotting - Modelo SIR com médias
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, I_avg, lw=2, label="Infectados - Esperança de mil simulações", color='orange')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Infectados - Modelo SIR Estocástico - Método de Milstein")
plt.show()

# Plotting - Modelo SIR com médias
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(10, 5))
ax.plot(t, R_avg, lw=2, label="Removidos - Esperança de mil simulações", color='green')
plt.legend()
plt.grid()
plt.xlabel("Tempo")
plt.ylabel("População")
plt.title("Removidos - Modelo SIR Estocástico - Método de Milstein")
plt.show()
```

06/01/24, 19:21

Analise Estabilidade.ipynb - Colaboratory



## Estimação de Parâmetros do modelo SIRD a partir de dados de Rio Claro

Apresentamos no presente apêndice a estimação de parâmetros do modelo SIRD a partir de dados da cidade de Rio Claro - SP, realizado com objetivo de apresentação na Sessão de Comunicações Orais do II Encontro do Programa de Pós-Graduação em Matemática (PGMAT) do Instituto de Geociências e Ciências Exatas - IGCE, da Unesp, Câmpus de Rio Claro, realizado nos dias 25 e 26 de janeiro de 2024. Para apresentação de trabalho neste evento, preparamos o conteúdo apresentado no Capítulo 4, com estimação de parâmetros do modelo SIRD Estocástico, para os dados da cidade de Rio Claro, para o início da pandemia de Covid-19.

De modo análogo ao que foi realizado com os dados de Bauru, elaboramos a partir dos dados de Rio Claro, com coleta dos dados fornecidos pela Secretaria da Saúde de Rio Claro, a partir da plataforma SP Covid Info Tracker (acesso em <https://www.spcovid.net.br>). Foi utilizado o período de 55 dias, no intervalo de 7 de abril de 2020, a 31 de maio de 2020, para busca dos parâmetros do modelo epidemiológico SIRD Estocástico apresentado no Sistema (4.5), porém utilizando os cinco coeficientes estocásticos apresentado em Rubio et al. (2023), como apresentado o Sistema (K.1).



$$\left\{ \begin{array}{l} dS(t) = -\beta S(t)I(t)dt + \sigma_1 S(t)dW_1(t) - \sigma_5 S(t)I(t)dW_5(t); \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t))dt + \sigma_2 I(t)dW_2(t) + \sigma_5 S(t)I(t)dW_5(t); \\ dR(t) = \lambda I(t)dt + \sigma_3 R(t)dW_3(t); \\ dD(t) = \gamma I(t)dt + \sigma_4 D(t)dW_4(t). \end{array} \right. \quad (\text{K.1})$$

onde temos que  $W_i(t)$  são Movimentos Brownianos 1-dimensionais independentes e  $\sigma_i$  representam as intensidades de  $W_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ .

A partir da estimação dos parâmetros do modelo foi possível simular previsões, supondo estarmos em 31 de maio de 2020, logo após a coleta dos dados, onde foi possível estimar qual o número de infectados, por exemplo, 3 semanas após o término da coleta dos dados para estimativa dos parâmetros, comparando os números de infectados estimados pelo modelo determinístico e estocástico, com o número dos dados reais coletados.

De modo análogo ao realizado no Capítulo 4, primeiramente foram estimados os parâmetros  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  do modelo SIR Determinístico apresentado no Sistema (4.1), isto é:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = -\beta S(t)I(t); \\ I'(t) = \beta S(t)I(t) - \lambda I(t) - \gamma I(t); \\ R'(t) = \lambda I(t); \\ D'(t) = \gamma I(t). \end{array} \right.$$

Assim, coletamos os dados de 55 dias do número de **novos casos**, número de **novos óbitos** e **recuperados**, calculamos os números de casos acumulados e óbitos acumulados, para formar nossa base de dados de **Suscetíveis**, **Infectados** (isto é, os casos ativos no momento, excluindo do total de casos acumulados os que já se recuperaram ou faleceram), **Recuperados** e **Mortos**, conforme apresentado a seguir, na Tabela K.1.

Tabela K.1: Dados relativos à Covid-19 em Rio Claro no início da pandemia.

| Dia<br>$t$ | Data   | Suscetíveis<br>$S(t)$ | Infectados<br>$I(t)$ | Recuperados<br>$R(t)$ | Mortos<br>$D(t)$ |
|------------|--------|-----------------------|----------------------|-----------------------|------------------|
| 0          | 6/abr  | 208000                | 0                    | 0                     | 0                |
| 1          | 7/abr  | 207998                | 2                    | 0                     | 0                |
| 2          | 8/abr  | 207998                | 2                    | 0                     | 0                |
| 3          | 9/abr  | 207998                | 2                    | 0                     | 0                |
| 4          | 10/abr | 207998                | 2                    | 0                     | 0                |
| 5          | 11/abr | 207998                | 2                    | 0                     | 0                |
| 6          | 12/abr | 207993                | 4                    | 1                     | 2                |
| 7          | 13/abr | 207993                | 3                    | 1                     | 3                |
| 8          | 14/abr | 207993                | 3                    | 1                     | 3                |
| 9          | 15/abr | 207993                | 3                    | 1                     | 3                |
| 10         | 16/abr | 207989                | 6                    | 1                     | 4                |
| 11         | 17/abr | 207987                | 8                    | 1                     | 4                |
| 12         | 18/abr | 207987                | 8                    | 1                     | 4                |
| 13         | 19/abr | 207987                | 8                    | 1                     | 4                |
| 14         | 20/abr | 207981                | 13                   | 1                     | 5                |
| 15         | 21/abr | 207981                | 13                   | 1                     | 5                |
| 16         | 22/abr | 207976                | 18                   | 1                     | 5                |
| 17         | 23/abr | 207983                | 20                   | 1                     | 6                |
| 18         | 24/abr | 207973                | 18                   | 3                     | 6                |
| 19         | 25/abr | 207972                | 19                   | 3                     | 6                |
| 20         | 26/abr | 207972                | 19                   | 3                     | 6                |
| 21         | 27/abr | 207972                | 19                   | 3                     | 6                |
| 22         | 28/abr | 207971                | 20                   | 3                     | 6                |
| 23         | 29/abr | 207968                | 19                   | 6                     | 7                |
| 24         | 30/abr | 207967                | 21                   | 5                     | 7                |
| 25         | 01/mai | 207967                | 21                   | 5                     | 7                |
| 26         | 02/mai | 207967                | 21                   | 5                     | 7                |
| 27         | 03/mai | 207967                | 18                   | 8                     | 7                |
| 28         | 04/mai | 207967                | 16                   | 10                    | 7                |
| 29         | 05/mai | 207966                | 17                   | 10                    | 7                |
| 30         | 06/mai | 207964                | 19                   | 10                    | 7                |
| 31         | 07/mai | 207962                | 16                   | 15                    | 7                |
| 32         | 08/mai | 207960                | 18                   | 15                    | 7                |
| 33         | 09/mai | 207960                | 13                   | 20                    | 7                |
| 34         | 10/mai | 207960                | 11                   | 22                    | 7                |
| 35         | 11/mai | 207960                | 11                   | 22                    | 7                |
| 36         | 12/mai | 207960                | 9                    | 23                    | 8                |
| 37         | 13/mai | 207960                | 9                    | 23                    | 8                |
| 38         | 14/mai | 207955                | 14                   | 23                    | 8                |
| 39         | 15/mai | 207953                | 15                   | 24                    | 8                |
| 40         | 16/mai | 207953                | 13                   | 26                    | 8                |
| 41         | 17/mai | 207952                | 13                   | 27                    | 8                |
| 42         | 18/mai | 207952                | 13                   | 27                    | 8                |
| 43         | 19/mai | 207948                | 17                   | 27                    | 8                |
| 44         | 20/mai | 207946                | 19                   | 27                    | 8                |
| 45         | 21/mai | 207940                | 25                   | 27                    | 8                |
| 46         | 22/mai | 207936                | 28                   | 28                    | 8                |
| 47         | 23/mai | 207931                | 30                   | 30                    | 9                |
| 48         | 24/mai | 207931                | 27                   | 32                    | 10               |
| 49         | 25/mai | 207931                | 25                   | 34                    | 10               |
| 50         | 26/mai | 207927                | 29                   | 34                    | 10               |
| 51         | 27/mai | 207927                | 29                   | 34                    | 10               |
| 52         | 28/mai | 207913                | 42                   | 34                    | 11               |
| 53         | 29/mai | 207913                | 43                   | 33                    | 11               |
| 54         | 30/mai | 207913                | 43                   | 33                    | 11               |
| 55         | 31/mai | 207894                | 55                   | 38                    | 13               |
| 56*        | 01/jun | 207894                | 53                   | 40                    | 13               |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

\* **Observação:** Trabalhamos com análise de 55 dias, ( $t = 55$ ), mas como para calcular os valores dos parâmetros  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  as expressões (4.2), (4.3) e (4.4) pedem os valores de  $t + 1$  para  $S_t$ ,  $R_t$  e  $D_t$ , foi necessário encontrar os valores de  $t = 63$ .

Dessa forma, para realizar a estimação dos parâmetros, primeiramente do modelo SIRD Determinístico apresentado no Sistema (4.1), trabalhou-se com as expressões (4.2), (4.3) e (4.4), de modo a encontrar os valores de  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  com base na evolução dos dados oficiais dos efeitos da Covid-19 na cidade de Rio Claro nos 55 dias analisados. Assim, encontrou-se os valores apresentados na Tabela K.2:

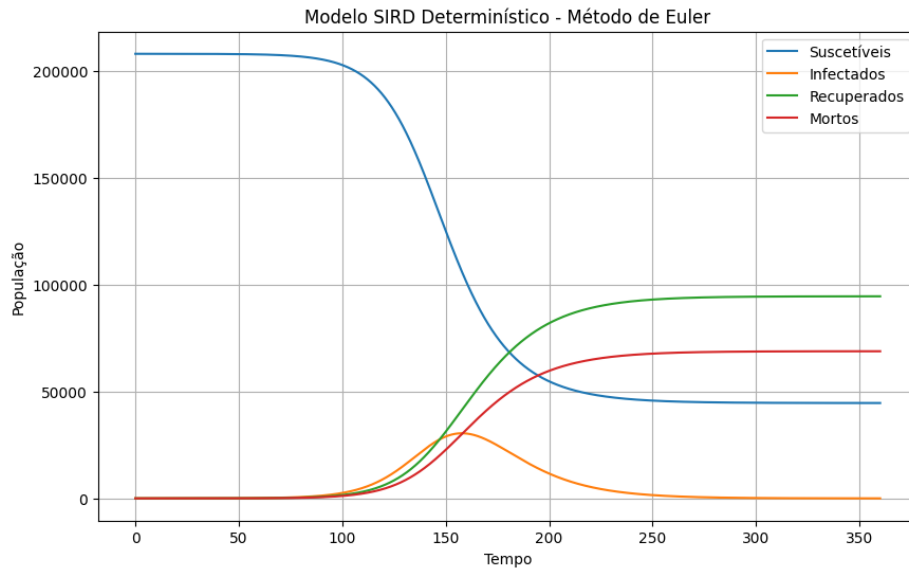
Tabela K.2: Parâmetros estimados, no tempo  $t = 55$ , do modelo SIRD para cidade de Rio Claro

|                                       |                                  |
|---------------------------------------|----------------------------------|
| $N$ - População Total                 | 208000                           |
| $S_0$ - Número Inicial de Suscetíveis | 207998                           |
| $I_0$ - Número Inicial de Infectados  | 2                                |
| $R_0$ - Número Inicial de Recuperados | 0                                |
| $D_0$ - Número Inicial de Mortos      | 0                                |
| $t_0$ - Data Inicial                  | 07/04/2020                       |
| $\beta$ - Taxa de Contato             | $7,06711703606731 \cdot 10^{-7}$ |
| $\lambda$ - Taxa de Recuperação       | $4,34032492168967 \cdot 10^{-2}$ |
| $\gamma$ - Taxa de Mortalidade        | $3,16004480263487 \cdot 10^{-3}$ |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

De posse de tais parâmetros, considerando o momento inicial da pandemia, após 55 dias iniciais, foi possível gerar os gráficos do modelo SIRD em linguagem Python com uso do Método de Euler, como apresentado a seguir, na Figura K.1

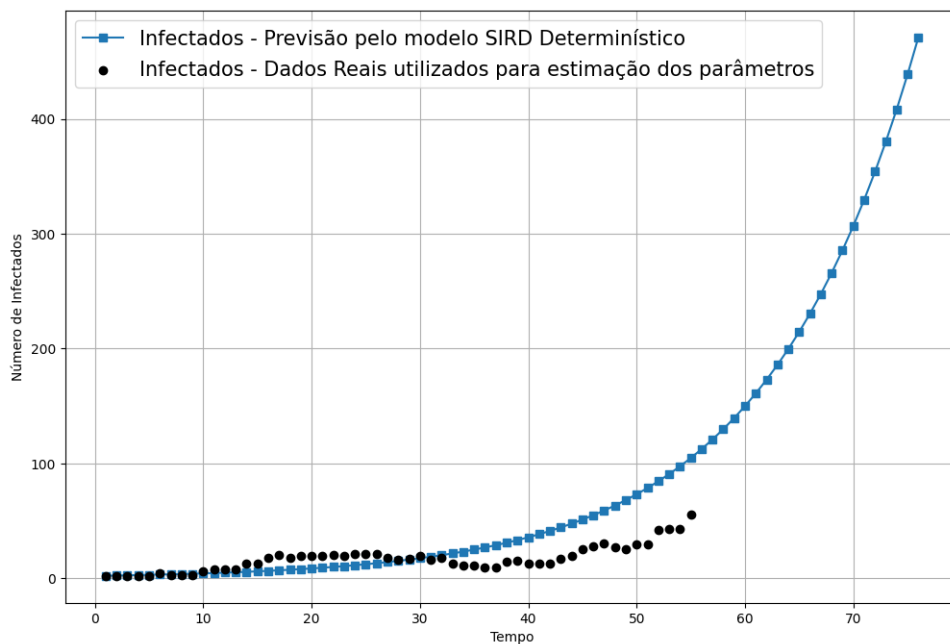
Figura K.1: Modelo SIRD com parâmetros a partir de dados da cidade de Rio Claro no tempo  $t = 55$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

A partir do gráfico da Figura K.1, do modelo SIRD, isolamos somente a curva de Infectados do modelo, e colocamos um gráfico de dispersão dos dados analisados no período de 55 dias, o qual é apresentado a seguir na Figura K.2.

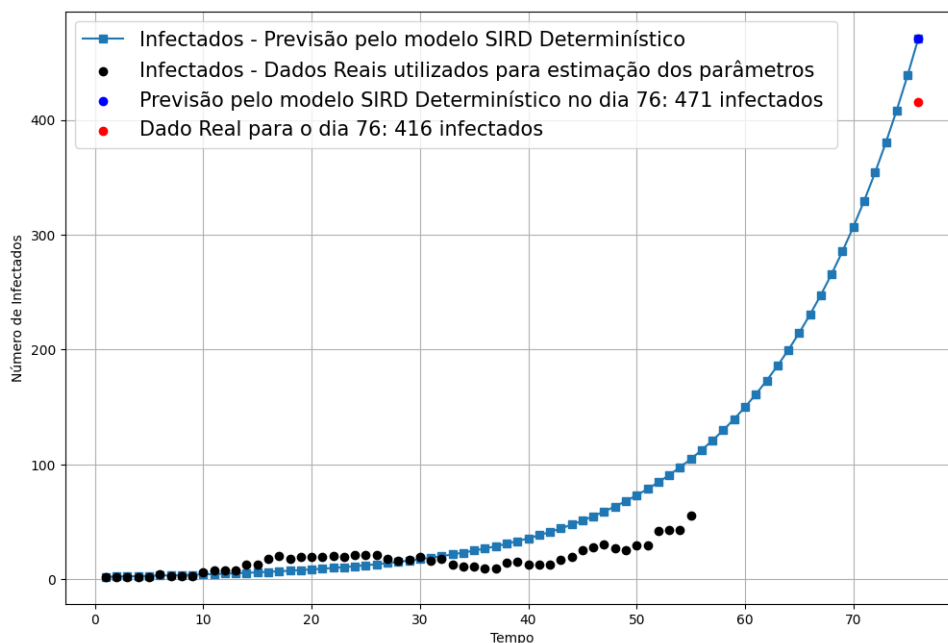
Figura K.2: Gráfico de dispersão dos dados reais (55 dias analisados) - Rio Claro



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

Analisando esse gráfico, apresentado na Figura K.2, bem como os dados da Tabela K.1, podemos ver que com 55 dias de pandemia, na cidade de Rio Claro-SP, havia 55 indivíduos infectados. Nesse momento hipotético, a partir desse modelo, podemos prever quantos infectados teríamos após 3 semanas, ou seja, no tempo  $t = 76$ . Podemos ver no gráfico apresentado a seguir na Figura K.3, que a curva de infectados apresenta o valor estimado de 471 indivíduos infectados, para o dia 76 (ponto azul). Enquanto o dado real que temos para o número de infectados nessa data é de 416 indivíduos infectados (ponto vermelho). Isto é, uma estimativa com um erro relativo de 13 %, aproximadamente.

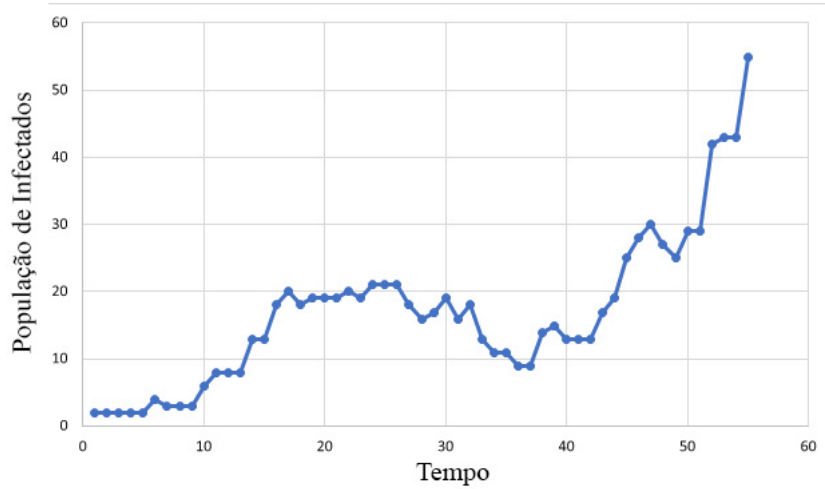
Figura K.3: Gráfico de dispersão dos dados reais (55 dias analisados) e curva de Infectados do modelo SIRD - Rio Claro



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python

Todavia, assim como apresentado no no Capítulo 4, um modelo determinístico apresentado em (4.1), pode não ser a melhor forma de se modelar uma epidemia. E de forma análoga ao apresentado com os dados de Bauru, no Capítulo 4, podemos ver agora, com os dados de Rio Claro, que a variação nos dados analisados, que pode ser observado na Tabela K.1, bem como no gráfico da Figura 4.5, o qual mostra que a variação da coleta dos dados dos infectados lembra mais um comportamento estocástico, com certa imprevisibilidade, do que um crescimento determinístico.

Figura K.4: Gráfico de dispersão de Infectados - dados reais (55 dias analisados) - Rio Claro



Fonte: Elaborado pelo próprio autor no software Microsoft Excel.

Dessa forma, podemos considerar perturbações aleatórias de cada uma das variáveis e sua influência não muito conhecida entre os suscetíveis nos infectados e os recuperados por um ruído branco, propondo para as Equações (4.1) do modelo SIRD Determinístico, o modelo SIRD Estocástico apresentado no Sistema (K.1) e estimando os parâmetros estocásticos.

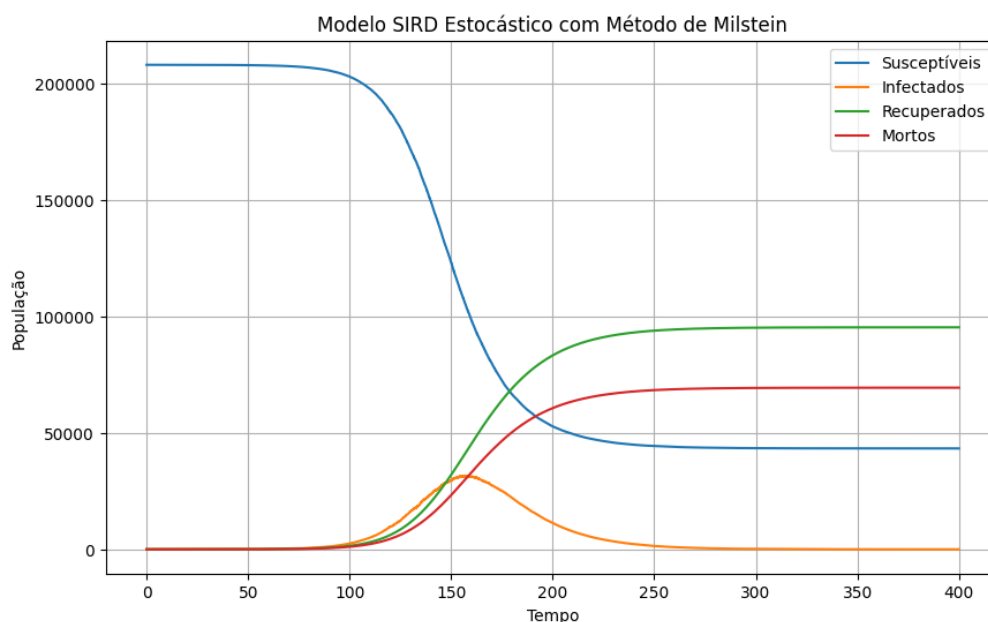
Assim, considerando o modelo SIRD Estocástico apresentado em (K.1), os parâmetros  $\beta$ ,  $\lambda$  e  $\gamma$  apresentados na Tabela K.1, tomando valores iguais para  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ ,  $\sigma_4$  e  $\sigma_5$  e considerando três possíveis cenários: pessimista, otimista e regular. Dado que a Taxa de Contato é da ordem de  $10^{-7}$ , tomamos como palpite os seguintes valores, apresentados na Tabela K.3 para  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5$  para gerar o gráfico do Modelo SIRD Estocástico apresentado na Figura K.5, a partir do método de Milstein em linguagem Python.

Tabela K.3: Parâmetros estocásticos utilizados para modelo SIRD Estocástico - Rio Claro

| Cenário Otimista<br>$\sigma_i$<br>$i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ | Cenário Pessimista<br>$\sigma_i$<br>$i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ | Cenário Regular<br>$\sigma_i$<br>$i = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ |
|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $1 \cdot 10^{-7}$                                         | $1 \cdot 10^{-8}$                                           | $5 \cdot 10^{-8}$                                        |

Fonte: elaborada pelo próprio autor.

Figura K.5: Modelo SIRD Estocástico com parâmetros a partir de dados da cidade de Rio Claro no tempo  $t = 55$  e  $\sigma_i = 5 \cdot 10^{-8}$



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulao numérica em linguagem Python.

Realizando a estimativa para o número de infectados no tempo  $t = 76$ , como apresentado na Figura K.3, para o SIRD Determinístico, agora no modelo SIRD Estocástico, temos os dados apresentados na Tabela K.5.

Tabela K.4: Estimativas para o número de infectados no dia  $t = 76$  em Rio Claro

| SIRD Det. | SIRD Est.<br>Cenário Otimista | SIRD Est.<br>Cenário Pessimista | SIRD Est.<br>Cenário Regular | Dados Reais |
|-----------|-------------------------------|---------------------------------|------------------------------|-------------|
| 471       | 377                           | 461                             | 423                          | 416         |

Fonte: Elaborada pelo próprio autor.

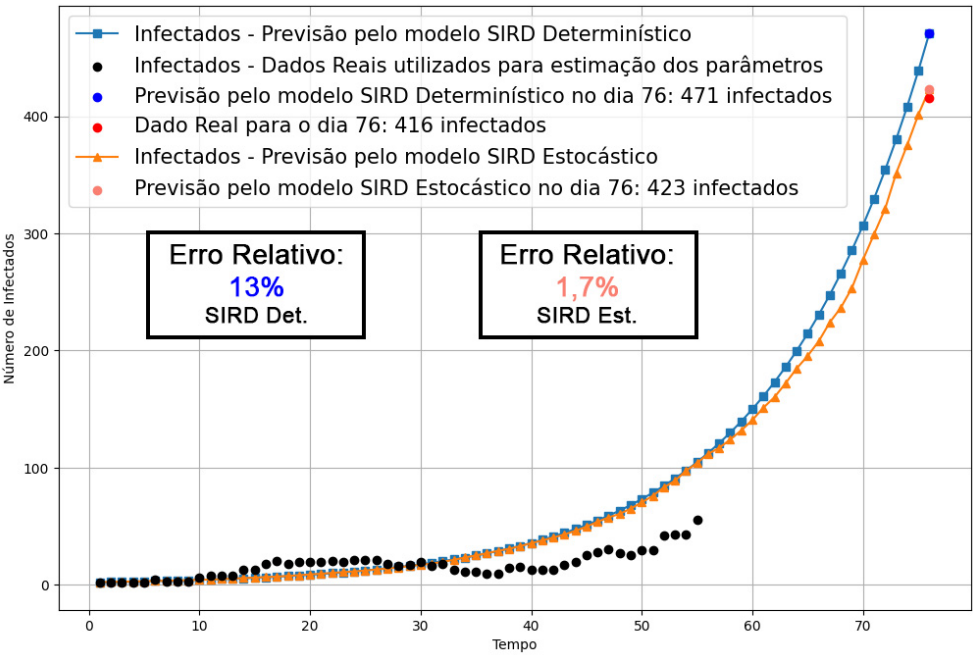
Dessa forma, pode se ver que utilizando os valores de  $\sigma_i = 5 \cdot 10^{-8}$ , isto , o que chamamos de Cenário Regular, obtivemos um número estimado de infectados de 423 indivíduos (como apresentado na Figura K.6), com erro relativo de apenas 1,7% para o número apresentado pelos Dados Reais, de 416 indivíduos, mostrando que o sistema estocástico pode apresentar previsões mais acertivas que o modelo determinístico, com previsões mais confiáveis. Ademais, apresentamos na K.5 os dados comparativos entre o número de infectados pelo modelos SIRD Determinístico, Estocástico no Cenário Regular e os Dados Reais em Rio Claro, nos dias  $t = 56$  a  $t = 76$ .

Tabela K.5: Previsão de Infectados pelo modelo SIRD Determinístico, Estocástico e Dados Reais - Rio Claro

| Dia (t) | Infectados<br>Previsão pelo<br>modelo SIRD Det. | Infectados<br>Previsão pelo<br>modelo SIRD Est. | Infectados<br>Dados reais |
|---------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|---------------------------|
| 56      | 112,46                                          | 111,69                                          | 53                        |
| 57      | 120,83                                          | 116,82                                          | 53                        |
| 58      | 129,83                                          | 123,98                                          | 82                        |
| 59      | 139,49                                          | 131,82                                          | 82                        |
| 60      | 149,88                                          | 140,65                                          | 78                        |
| 61      | 161,03                                          | 151,15                                          | 76                        |
| 62      | 173,01                                          | 160,15                                          | 111                       |
| 63      | 185,87                                          | 172,02                                          | 116                       |
| 64      | 199,69                                          | 184,64                                          | 146                       |
| 65      | 214,54                                          | 195,39                                          | 183                       |
| 66      | 230,48                                          | 207,91                                          | 201                       |
| 67      | 247,60                                          | 224,05                                          | 224                       |
| 68      | 265,98                                          | 236,62                                          | 263                       |
| 69      | 285,72                                          | 253,39                                          | 260                       |
| 70      | 306,92                                          | 277,38                                          | 283                       |
| 71      | 329,68                                          | 299,36                                          | 316                       |
| 72      | 354,11                                          | 321,05                                          | 346                       |
| 73      | 380,34                                          | 351,40                                          | 377                       |
| 74      | 408,50                                          | 375,57                                          | 416                       |
| 75      | 438,73                                          | 401,26                                          | 410                       |
| 76      | 471,17                                          | 423,29                                          | 416                       |

Fonte: Elaborada pelo autor

Figura K.6: Gráfico de dispersão dos dados reais (55 dias analisados) e curva de Infectados do modelo SIRD Determinístico e Estocástico - Rio Claro



Fonte: Elaborado pelo próprio autor a partir de simulação numérica em linguagem Python.



**Observação:** Os códigos, em linguagem Python, para gerar os gráficos apresentados no presente Apêndice, com dados da cidade de Rio Claro, são os mesmos apresentados nos Apêndices anteriores, com dados da cidade de Bauru.