



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Presidente Prudente

ARTUR MARQUES SOARES GUIMARÃES

**MODELAGEM DE VAZÃO E PRECIPITAÇÃO NO RIO
AGUAPEÍ VIA CÓPULAS**

PRESIDENTE PRUDENTE
2024

ARTUR MARQUES SOARES GUIMARÃES

**MODELAGEM DE VAZÃO E PRECIPITAÇÃO NO RIO
AGUAPEÍ VIA CÓPULAS**

Relatório Final de Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Estatística da FCT/Unesp para aproveitamento na disciplina Trabalho de Conclusão de Curso.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Antonio Moala.

**PRESIDENTE PRUDENTE
2024**

G963m Guimarães, Artur Marques Soares
Modelagem de vazão e precipitação no rio Aguapeí via
cópulas / Artur Marques Soares Guimarães. -- Presidente
Prudente, 2024
75 p. : il., tabs.

Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado - Estatística) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de
Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente
Orientador: Fernando Antonio Moala

1. Cópula. 2. Precipitação. 3. Vazão. 4. Modelo bivariado. 5.
Aplicação de cópulas. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Artur Marques Soares Guimarães

**MODELAGEM DE VAZÃO E PRECIPITAÇÃO NO RIO
AGUAPEÍ VIA CÓPULAS**

Relatório de Final de Trabalho de Conclusão de Curso aprovado como requisito para obtenção de créditos na disciplina Trabalho de Conclusão do curso de graduação em Estatística da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Unesp, pela seguinte banca examinadora:

Orientador: _____

Prof. Dr. Fernando Antonio Moala
Departamento de Estatística

Prof. Dr. Edilson Ferreira Flores
Departamento de Estatística

Presidente Prudente, 05 de dezembro de 2024.

RESUMO

O foco deste estudo é modelar a vazão e a precipitação do Rio Aguapeí usando a metodologia de cópulas. A vazão, definida como o volume de água que passa por uma seção transversal de um rio em um determinado período, é influenciada diretamente pela precipitação. Este estudo visa explorar a relação entre essas duas variáveis usando distribuições univariadas Gamma, Weibull e de valor extremo (Gumbel). Os dados utilizados incluíram medições locais e bases de dados meteorológicos. A análise ajusta as distribuições aos dados de precipitação e vazão usando técnicas estatísticas avançadas. Além disso, a teoria das cópulas é usada para representar a relação entre essas variáveis. A técnica escolhida permite superar os limites dos métodos tradicionais que ignoram a estrutura de dependência ao capturar de forma precisa a complexa relação entre precipitação e vazão. Os resultados mostram que as distribuições marginais escolhidas são adequadas para os dados em questão, e as distribuições conjunta via copula construídas mostram que a probabilidade dos eventos terem valores moderados e baixos é maior, o que mostra que a probabilidade de eventos extremos ocorrerem é baixa. A modelagem precisa também pode ajudar na criação de estratégias de mitigação e adaptação para lidar com mudanças climáticas e eventos hidrológicos perigosos. Este estudo é uma aplicação de técnicas estatísticas modernas no campo da hidrologia, destacando a importância de considerar distribuições conjuntas para uma análise mais robusta e precisa das variáveis ambientais.

Palavras-chave: Vazão; Precipitação; Rio Aguapeí; Metodologia de cópulas; Distribuições univariadas; Gamma; Weibull; Gumbel; Técnicas estatísticas avançadas; Teoria das cópulas; Estrutura de dependência; Distribuições conjuntas; Eventos extremos; Modelagem precisa; Hidrologia.

ABSTRACT

The focus of this study is to model the flow and precipitation of the Aguapeí River using the copula methodology. Flow, defined as the volume of water passing through a cross-section of a river over a given period, is directly influenced by precipitation. This study aims to explore the relationship between these two variables using univariate Gamma, Weibull, and extreme value (Gumbel) distributions. The data used included local measurements and meteorological databases. The analysis adjusts the distributions to the precipitation and flow data using advanced statistical techniques. Additionally, copula theory is used to represent the relationship between these variables. The chosen technique allows overcoming the limitations of traditional methods that ignore the dependency structure by accurately capturing the complex relationship between precipitation and flow. The results show that the chosen marginal distributions are adequate for the data in question, and the joint distributions via copula constructed show that the probability of events having moderate and low values is higher, indicating that the probability of extreme events occurring is low. Accurate modeling can also help in creating mitigation and adaptation strategies to deal with climate change and hazardous hydrological events. This study is an application of modern statistical techniques in the field of hydrology, highlighting the importance of considering joint distributions for a more robust and accurate analysis of environmental variables.

Keywords: Flow; Precipitation; Aguapeí River; Copula methodology; Univariate distributions; Gamma; Weibull; Gumbel; Advanced statistical techniques; Copula theory; Dependency structure; Joint distributions; Extreme events; Accurate modeling; Hydrology.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Função de Densidade da Cópula Clayton com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ	18
Figura 2: Função de Densidade da Copula Tawn Tipo 1 com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ e δ_2	20
Figura 3: Função de Densidade da Copula Tawn Tipo 2 com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ e δ_2	20
Figura 4: Função de Densidade da Copula Frank com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ	21
Figura 5: Função de Densidade da Copula Gaussian com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ	23
Figura 6: Função de Densidade da Copula Gumbel com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ	24
Figura 7: Função de Densidade da Copula Joe com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ	25
Figura 8: Função de Densidade da Copula BB8 com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ e δ	26
Figura 9: Histograma e função densidade de probabilidade para os dados de precipitação máxima mensais	38
Figura 10: Função densidade acumulada para os dados de precipitação máxima mensais	39
Figura 11: Gráfico de tempo total de teste para os dados de precipitação máxima mensais	41
Figura 12: Ajuste da função de sobrevivência para os dados de precipitação máxima mensais	43
Figura 13: Ajuste da função de risco para os dados de precipitação máxima mensais	45
Figura 14: Histograma e comparação entre as funções densidade de probabilidade para os dados de vazão mensais	47
Figura 15: Comparação entre as funções densidade acumulada para os dados de vazão mensais.....	48
Figura 16: Gráfico de tempo total de teste para os dados de vazão mensais.....	50

Figura 17: Ajuste e comparação das funções de sobrevivência para os dados de vazão	51
Figura 18: Ajuste e comparação das funções de risco para os dados de vazão.....	53
Figura 19: Gráfico de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via copula para cada mês	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição valor extremo (Gumbel) para os dados de precipitação.	35
Tabela 2: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição Gamma para os dados de vazão.	36
Tabela 3: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição Weibull para os dados de vazão.	37
Tabela 4: Copula selecionada para cada mês e o parâmetro estimado pelo pacote “VineCopula”.	55
Tabela 5: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição conjunta via copula.	55
Tabela 6: Desvio padrão para os parâmetros de interesse da distribuição conjunta via copula.	56
Tabela 7: Intervalo de confiança para os parâmetros de interesse da distribuição conjunta via copula.	56
Tabela 8: Probabilidade condicional.	65
Tabela 9: Probabilidade conjunta Precipitação $> X$, Vazão $> Y$	66
Tabela 10: Base de dados usada para o trabalho.	70

Sumário

RESUMO	5
ABSTRACT	6
LISTA DE FIGURAS.....	7
LISTA DE TABELAS.....	9
1 INTRODUÇÃO	12
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
2.1 Precipitação	14
2.2 Vazão de rios	14
2.3 Cópulas.....	15
3 TEORIA DE CÓPULA.....	16
3.1 Definição	16
3.2 Cópulas de Sobrevivência e Rotação	17
3.3 Famílias de Copulas Bivariadas.....	18
3.3.1 Copula Clayton	18
3.3.2 Copula Tawn	19
3.3.3 Copula Frank	21
3.3.4 Copula Gaussian	22
3.3.5 Copula Gumbel.....	23
3.3.6 Copula Joe	24
3.3.7 Copula BB8	26
4 DISTRIBUIÇÕES.....	27
4.1 Valor Extremo Gumbel.....	27
4.1.1 Definição e propriedades.....	27
4.1.2 Estimação de máxima verossimilhança (Estimação Pontual)	28
4.1.3 Estimação de máxima verossimilhança (Estimação por Intervalos)	28
4.2 Gamma	29

4.2.1 Definição e Propriedades	29
4.2.2 Função de Sobrevivência	30
4.2.3 Função de Risco.....	30
4.2.4 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação Pontual)	30
4.2.5 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação por Intervalos)	31
4.3 Weibull	31
4.3.1 Definição e Propriedades	31
4.3.2 Função de Sobrevivência	31
4.3.3 Função de Risco.....	32
4.3.4 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação Pontual)	32
4.3.5 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação por Intervalos)	32
5 METODOLOGIA.....	34
6 RESULTADOS	35
6.1 Inferência das Marginais da Distribuição Conjunta	35
6.2 Análise Gráfica das Marginais da Distribuição Conjunta.....	37
6.2.1 Precipitação.....	37
6.2.2 Vazão	46
6.3 Escolha da Copula.....	54
6.4 Inferência da Distribuição Conjunta	55
6.5 Visualização da Distribuição Conjunta	57
7 CONSIDERAÇÕES	65
8 REFERÊNCIAS	69
ANEXO A – BASE DE DADOS	70

1 INTRODUÇÃO

As chuvas e as vazões de um rio são inteiramente ligadas, sendo, portanto, variáveis dependentes de extrema importância para os estudos ambientais. Vazão de um rio é por definição o volume de fluido que passa por uma seção por determinado período de tempo, sendo assim, dependente da variável chuva, por esta ser uma fonte extra do fluído (no caso, a água), aumentando então o volume de um rio. As implicações são diversas e extremamente prejudiciais, incluindo a deterioração do ambiente onde peixes e outras espécies vivem, o aumento de inundações devido ao acúmulo de água e à alteração das margens dos rios, bem como a redução do fluxo de água devido ao depósito de sedimentos e outros eventos desfavoráveis.

O complexo modelo estudado é multivariado. Dessa forma, usou-se cópulas, para estudar a dependência entre essas duas variáveis. Cópulas são ferramentas matemáticas que descrevem como duas ou mais variáveis aleatórias se relacionam, sem fazer suposições sobre as distribuições individuais dessas variáveis. Elas se tornam valiosas quando se busca compreender a interconexão entre eventos de sobrevivência em um conjunto de dados. Portanto, é fundamental considerar alguma das distribuições conjuntas de tempo de vida previamente estudadas na literatura, (como as apresentadas por Gumbel (1960), Freund (1961), Marshall & Olkin (1967), Downton (1972), Bloco e Basu (1974), Sarkar (1987), Hawkes (1988) apud Achcar et al., 2015, p.165).

Em resumo, é essencial compreender a complexa relação entre chuva e vazão, pois isso permite prever e analisar os padrões climáticos e suas possíveis mudanças. Até alguns anos atrás, era complexo estudar e simular com precisão a esses dois fatores devido à limitação dos recursos computacionais disponíveis na época. No entanto, essa situação mudou significativamente com os avanços tecnológicos recentes.

O objetivo geral deste trabalho é aplicar as diversas técnicas estatísticas para analisar a influência da chuva na vazão, visando a construção de um modelo bivariado. Os objetivos específicos são: construir uma distribuição bivariada que se adeque aos dados via cópula; usar inferência para analisar os dados; avaliar a dependência das variáveis precipitação e vazão.

Este argumento visa fornecer uma base estatística sólida para a pesquisa no campo do meio ambiente, utilizando a teoria da probabilidade, cópulas, inferência e métodos computacionais como ferramentas essenciais, ou seja, calcular o quanto a chuva influencia na vazão. Este estudo está em total consonância com as metas estabelecidas pelas Nações Unidas, especificamente os Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS). É importante ressaltar que a intenção teórica abordada neste trabalho não só constata, mas também se alinha de maneira consistente com as seguintes ODS: Objetivo 6, que se concentra em Água Potável e Saneamento, Objetivo 13, que trata da Ação Contra a Mudança Global do Clima, e por fim, o Objetivo 14, que aborda a Vida na Água.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo de revisão bibliográfica, exploraremos os estudos e pesquisas existentes que fundamentam nosso trabalho. Discutiremos os principais conceitos, teorias e metodologias previamente desenvolvidas, fornecendo uma base sólida para o entendimento do nosso estudo.

2.1 Precipitação

A precipitação é um fenômeno meteorológico essencial no ciclo hidrológico, ocorrendo quando a água, na forma de vapor, condensa-se em partículas líquidas ou sólidas na atmosfera e cai sob a influência da gravidade. A formação da precipitação está intrinsecamente ligada à dinâmica da atmosfera, incluindo processos de resfriamento do ar e formação de nuvens. A umidade presente na atmosfera se condensa ao atingir níveis de saturação, formando gotas de água ou cristais de gelo que, ao se agregarem, tornam-se suficientemente pesados para vencer a resistência do ar e precipitar em direção ao solo (Torres & Machado, 2011).

A precipitação desempenha um papel crucial em diversas dimensões ambientais e sociais. Primeiramente, é a principal fonte de reposição de água doce nos ecossistemas terrestres, sendo fundamental para a manutenção da vegetação, abastecimento dos corpos hídricos e recarga de aquíferos. Em regiões semiáridas, como o Nordeste do Brasil, a distribuição temporal e espacial da precipitação é particularmente irregular, influenciando diretamente a disponibilidade hídrica e, conseqüentemente, as atividades agrícolas e a segurança alimentar da população local (Cabral Júnior & Lucena, 2021).

2.2 Vazão de rios

A vazão de um rio é uma das variáveis hidrológicas mais importantes para o gerenciamento e planejamento de recursos hídricos. A vazão, definida como o volume de água que passa por uma seção transversal de um rio por unidade de tempo, é influenciada por diversos fatores, como precipitação,

evapotranspiração, infiltração e uso do solo na bacia hidrográfica (Novo & Araújo 2007).

A formação da vazão em um rio ocorre a partir da precipitação que atinge a superfície terrestre e se divide em diferentes fluxos. Parte dessa água infiltra no solo, reabastecendo os aquíferos, enquanto outra parte escoar superficialmente em direção aos cursos d'água. A interação entre estes processos, juntamente com as características da bacia hidrográfica (como topografia, tipo de solo e cobertura vegetal), determina a quantidade e a variação temporal da vazão dos rios.

A vazão dos rios é fundamental para atividades como irrigação, geração de energia hidrelétrica, navegação e abastecimento de água potável. A avaliação correta da vazão garante que estas atividades possam ser realizadas de maneira sustentável e eficiente, além disso a vazão dos rios influencia a disponibilidade de água para consumo humano e a proteção contra eventos extremos, como secas e inundações. A gestão eficiente da vazão é crucial para a segurança hídrica das populações que dependem dos recursos hídricos de uma bacia.

2.3 Cópulas

As cópulas têm ampla aplicação em várias disciplinas devido à sua capacidade de modelar a dependência de forma mais flexível do que os coeficientes de correlação tradicionais, como Pearson, Spearman e Kendall. No setor financeiro, por exemplo, as cópulas são utilizadas na gestão de riscos, na otimização de portfólios e na precificação de derivativos. No entanto, a crise financeira de 2008 destacou os perigos do uso inadequado de cópulas, ressaltando a importância de uma aplicação criteriosa e fundamentada desses modelos (Silva & Souza, 2023).

Além das finanças, as cópulas são empregadas em áreas como hidrologia, para modelar eventos extremos conjuntos, e ciências atuariais, na análise de riscos dependentes. A capacidade das cópulas de capturar dependências complexas e não lineares entre variáveis as torna valiosas para a modelagem de fenômenos multivariados em diversas áreas do conhecimento.

3 TEORIA DE CÓPULA

Diversos pesquisadores têm desenvolvido uma variedade de modelos probabilísticos com o objetivo de descrever e compreender os processos hidrológicos. Neste projeto, apresenta-se uma abordagem inovadora para a modelagem dos processos de vazão e precipitação, fazendo uso de cópulas como ferramenta fundamental para estabelecer um modelo bivariado e quantificar a relação entre essas variáveis. Cópulas, de fato, oferecem a capacidade de capturar uma ampla gama de estruturas de dependência entre duas ou mais variáveis aleatórias, tornando-as uma escolha valiosa para esse propósito específico.

A principal vantagem do uso de cópulas reside na sua flexibilidade e capacidade de modelar diferentes tipos de dependência, indo além das limitações impostas por distribuições marginais tradicionais. Enquanto as distribuições marginais descrevem o comportamento de cada variável individualmente, as funções cópulas permitem a criação de uma distribuição conjunta que leva em consideração as relações específicas entre as variáveis. Isso é de extrema importância em hidrologia, onde a precipitação e a vazão muitas vezes exibem uma dependência complexa e variável ao longo do tempo e do espaço.

3.1 Definição

No contexto de um cenário bivariado, conforme estabelecido pelo teorema de Sklar, quando lidamos com duas variáveis aleatórias, X e Y , que seguem distribuições marginais arbitrárias, representadas por $F_X(x)$ e $F_Y(y)$, respectivamente, é possível estabelecer a existência de uma cópula, denotada por C , que combina essas duas distribuições marginais para gerar a função de distribuição conjunta $F_{(X,Y)}(x, y)$. Essa relação é expressa da seguinte forma:

$$F_{(X,Y)}(x, y) = C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (1)$$

Para uma compreensão mais aprofundada dos fundamentos teóricos e orientações práticas sobre o uso de cópulas, informações detalhadas podem ser encontradas nos trabalhos de Joe (1997), Nelsen (2006) e Salvadori et al. (2007).

Caso desejemos representar a densidade conjunta, $f_{(X,Y)}(x,y)$, juntamente com as densidades marginais de X e Y , $f_{(X)}(x)$ e $f_{(Y)}(y)$, com $f_{(X,Y)}(x,y)$ representando a função de distribuição conjunta, podemos expressar a densidade conjunta em termos da densidade da cópula e das densidades marginais da seguinte maneira:

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)c(F_X(x)F_Y(y)), \quad (2)$$

onde $c(u_1, u_2) = \frac{d^2 C(u_1, u_2)}{du_1 du_2}$, denotando a densidade de cópula de C . Este enfoque permite uma análise mais completa das relações entre as variáveis X e Y , destacando a influência da cópula na distribuição conjunta e nas densidades marginais, facilitando a modelagem e a compreensão de eventos conjuntos em contextos bivariados.

3.2 Cópuas de Sobrevivência e Rotação

A cópula de sobrevivência está relacionada à cópula complementar à cópula original, isto é, uma cópula que modela a dependência das variáveis $(1-u, 1-v)$, onde $u = F_X(x)$ e $v = F_Y(y)$.

Dada uma cópula $C(u, v)$, a cópula de sobrevivência $\hat{C}(u, v)$ é definida como:

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v) \quad (3)$$

essa transformação "inverte" o comportamento das variáveis e é usada principalmente em cenários onde se deseja modelar a dependência de cauda superior (ou eventos extremos associados a altas probabilidades simultâneas de u e v).

Já a rotação de uma cópula é uma técnica aplicada para adaptar cópuas a diferentes padrões de dependência nas caudas (superior e inferior) das distribuições de variáveis aleatórias. Em essência, essa rotação permite modificar a cópula original para modelar dependências opostas às que ela originalmente capturaria.

Para cópuas bivariadas é possível transformar uma ou duas variáveis u , v em $1-u$ ou $1-v$, rotacionando a cópula em 90° , 180° ou 270° .

3.3 Famílias de Copulas Bivariadas

Nesse subtópico apresentaremos as copulas que serão utilizadas nesse trabalho e mostraremos sua forma utilizando duas marginais $U[0,1]$.

3.3.1 Copula Clayton

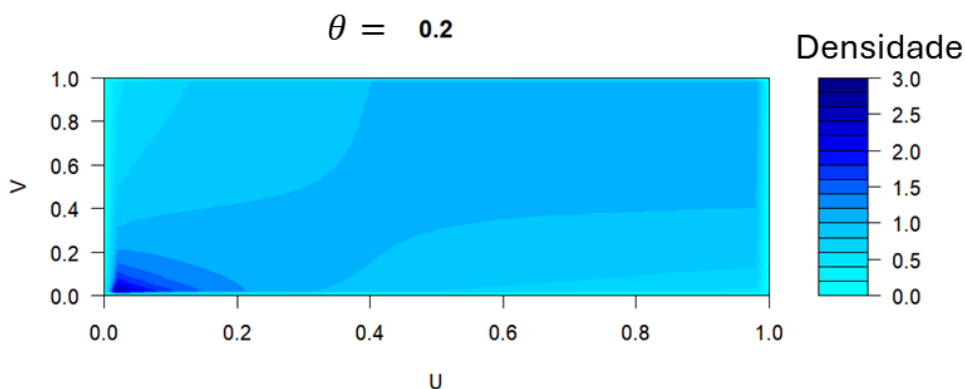
Criada por David George Clayton (1978), para variáveis aleatórias u e v com distribuições marginais uniformes no intervalo $[0,1]$, a cópula de Clayton $C(u, v; \theta)$ é definida como:

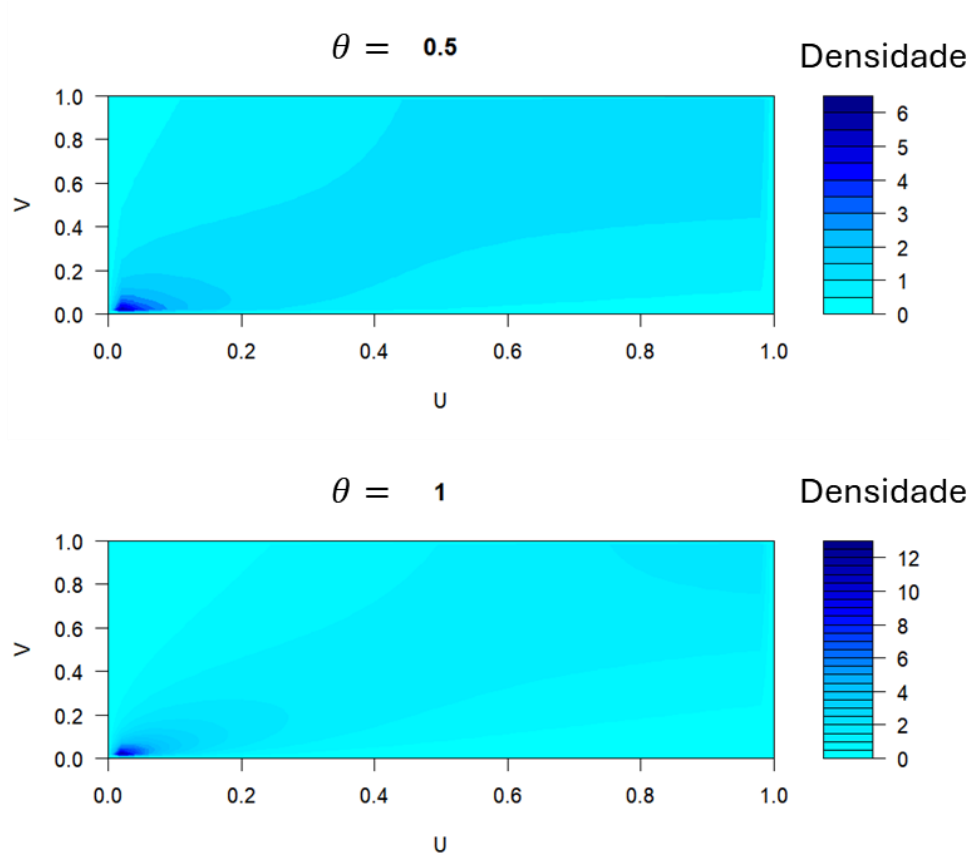
$$C(u, v; \theta) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (4)$$

onde $\theta > 0$ é um parâmetro de dependência. Esse parâmetro controla a força da dependência entre as variáveis:

- Quando $\theta \rightarrow 0$, a cópula de Clayton se aproxima da cópula independente, ou seja, $C(u, v; \theta) \approx uv$.
- À medida que θ aumenta, a dependência entre U e V também aumenta, especialmente na cauda inferior.
- Para $\theta \rightarrow \infty$ a dependência é completa (as variáveis são quase completamente dependentes na cauda inferior).

Figura 1: Função de Densidade da Cópula Clayton com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ





Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.2 Copula Tawn

A cópula de Tawn criada por Jonathan A. Tawn (1988), tem três parâmetros principais:

- Parâmetro de dependência $\theta \in [1, \infty)$: controla a intensidade geral da dependência entre as variáveis U e V .
- Parâmetros de peso $\delta_1 \in [0, 1]$ e $\delta_2 \in [0, 1]$: permitem ajustar a dependência de cauda inferior e cauda superior respectivamente de maneira independente.

Para variáveis aleatórias u e v com marginais uniformes, a cópula de Tawn $C(u, v; \theta, \delta_1, \delta_2)$ é dada pela fórmula:

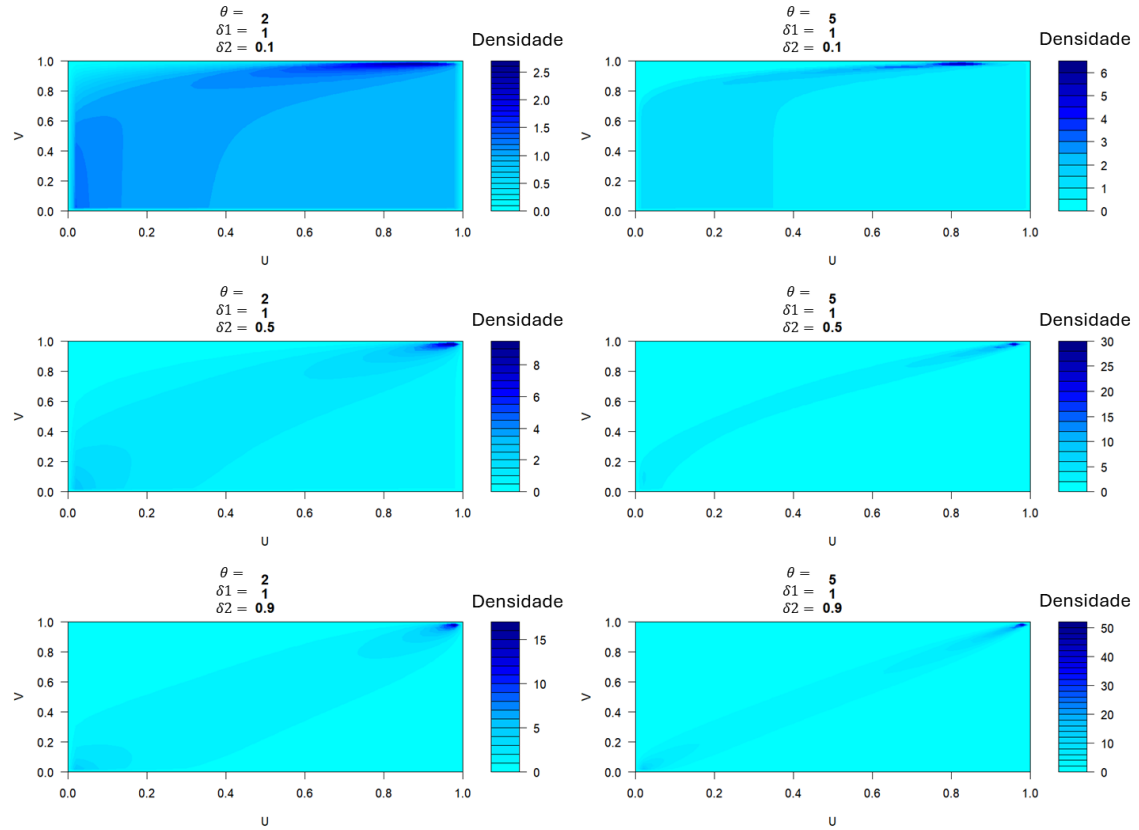
$$C(u, v; \theta, \delta_1, \delta_2) = (1 - \delta_1)t - (1 - \delta_2)(1 - t) + [\delta_1(1 - t)^\theta + (\delta_2 t)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, \quad (5)$$

onde $t = \frac{\log(v)}{\log(uv)}$.

Se $\delta_1 = \delta_2$, então obtemos a cópula de Gumbel. É importante dizer que os parâmetros δ_1 e δ_2 podem ser considerados como parâmetros de

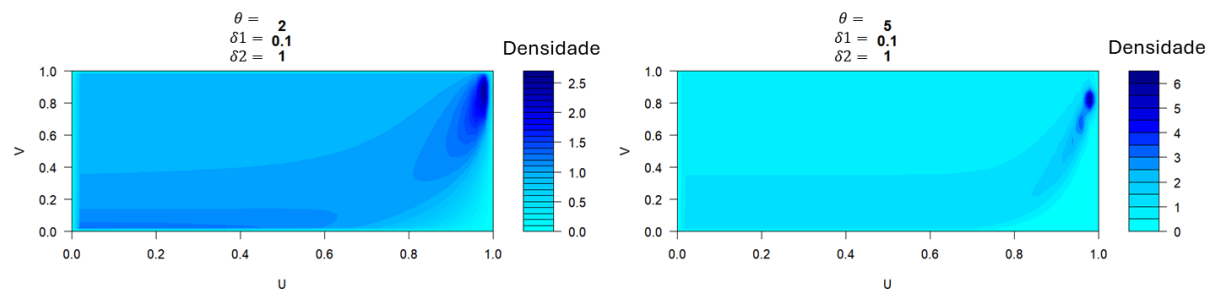
assimetria. Assim, podemos dividir a cópula de Tawn em dois tipos: “Tipo 1”, com $\delta_1 = 1$ (assimetria negativa) e “Tipo 2”, com $\delta_2 = 1$ (assimetria positiva).

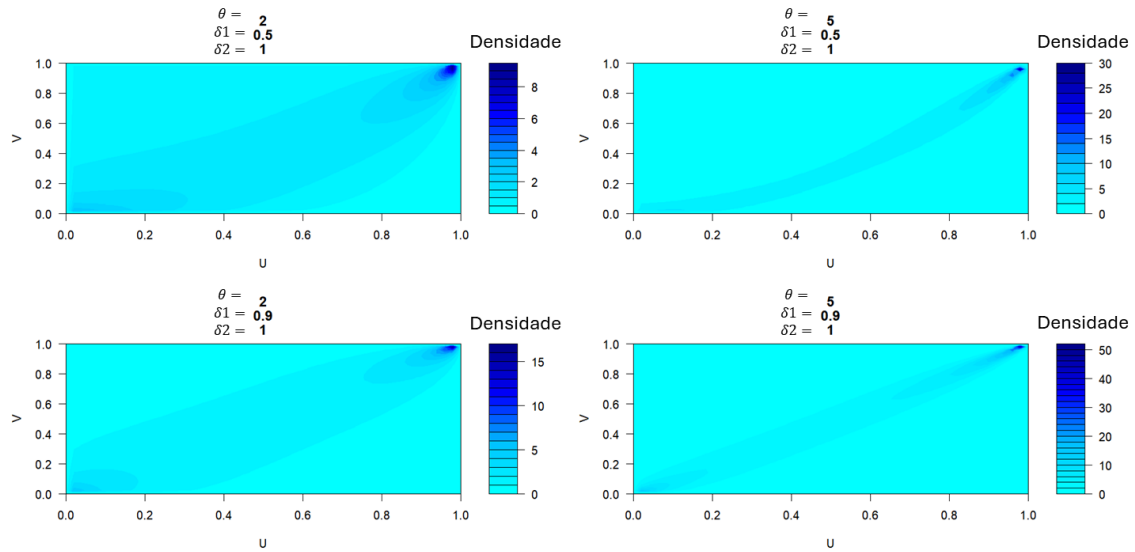
Figura 2: Função de Densidade da Copula Tawn Tipo 1 com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ e δ_2



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 3: Função de Densidade da Copula Tawn Tipo 2 com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ e δ_2





Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.3 Copula Frank

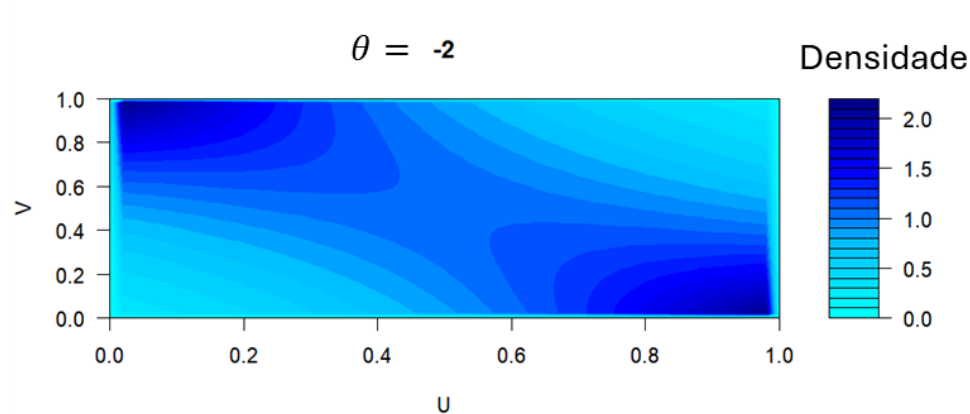
A cópula de Frank criada por Josef Frank (1979), para variáveis u e v uniformes em $[0,1]$, é definida por:

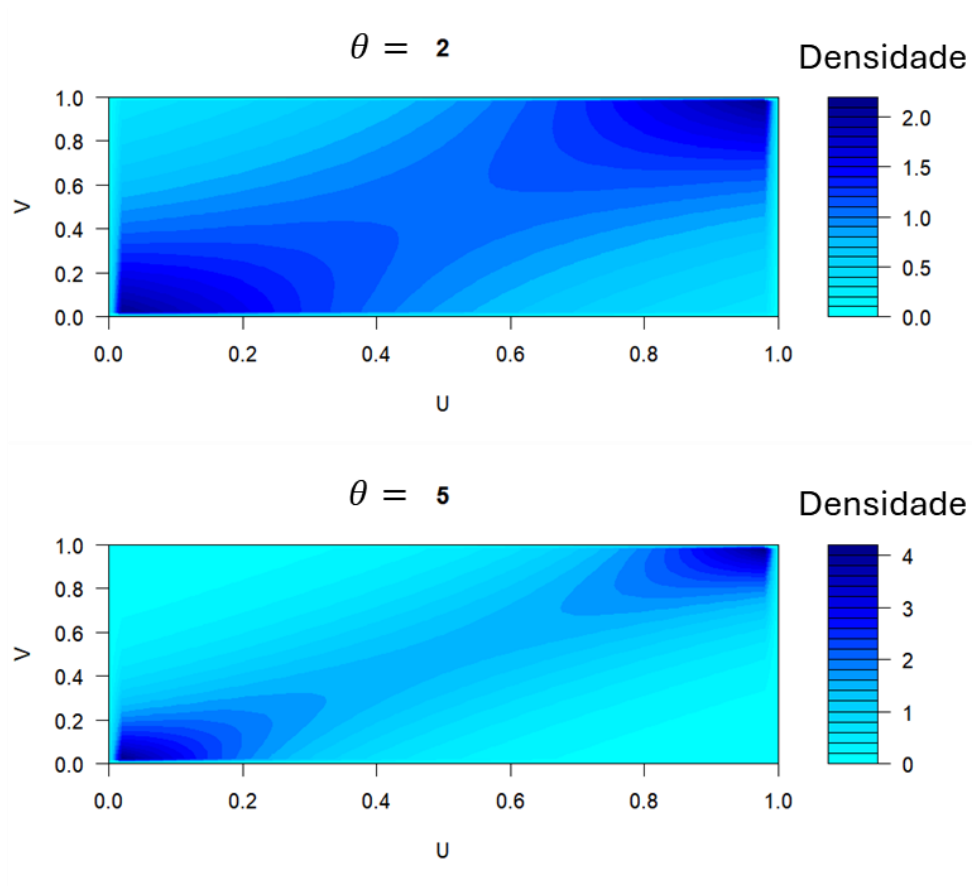
$$C(u, v; \theta) = \frac{-1}{\theta} \log \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \quad (6)$$

onde θ é o parâmetro de dependência e possui as seguintes características:

- $\theta > 0$ indica dependência positiva.
- $\theta < 0$ indica dependência negativa.
- $\theta = 0$ indica independência, caso em que a cópula de Frank se reduz a $C(u, v) = uv$, a cópula independente.

Figura 4: Função de Densidade da Copula Frank com Marginais Uniformes $(0,1)$ para Diferentes Valores de θ





Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.4 Copula Gaussian

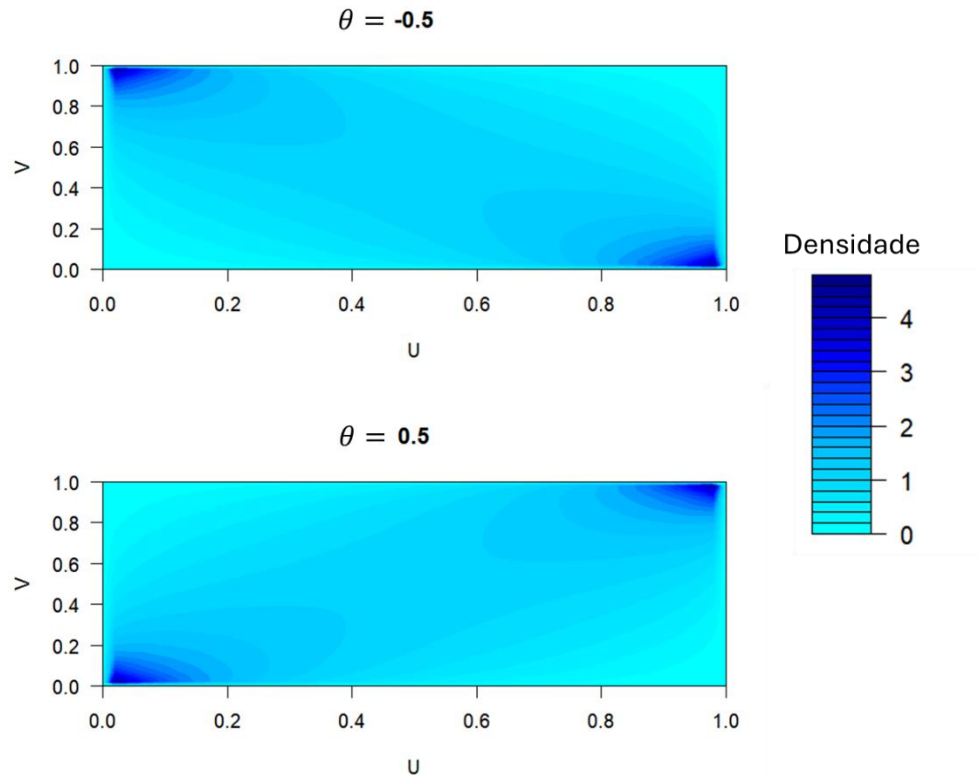
A cópula Gaussiana é construída a partir de uma distribuição normal multivariada, em que as margens são normalizadas para serem uniformes no intervalo $[0,1]$. Para variáveis aleatórias u e v com distribuições marginais uniformes, a cópula Gaussiana $C(u, v; \theta)$ é definida como:

$$C(u, v; \theta) = \Phi_{\theta}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) \quad (7)$$

onde:

- Φ_{θ} é a função de distribuição cumulativa bivariada normal com média zero, variância unitária e coeficiente de correlação θ ,
- Φ^{-1} é a função inversa da distribuição normal padrão univariada (quantil da normal),
- θ é o parâmetro de correlação, que controla a força e direção da dependência entre as variáveis.

Figura 5: Função de Densidade da Copula Gaussian com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.5 Copula Gumbel

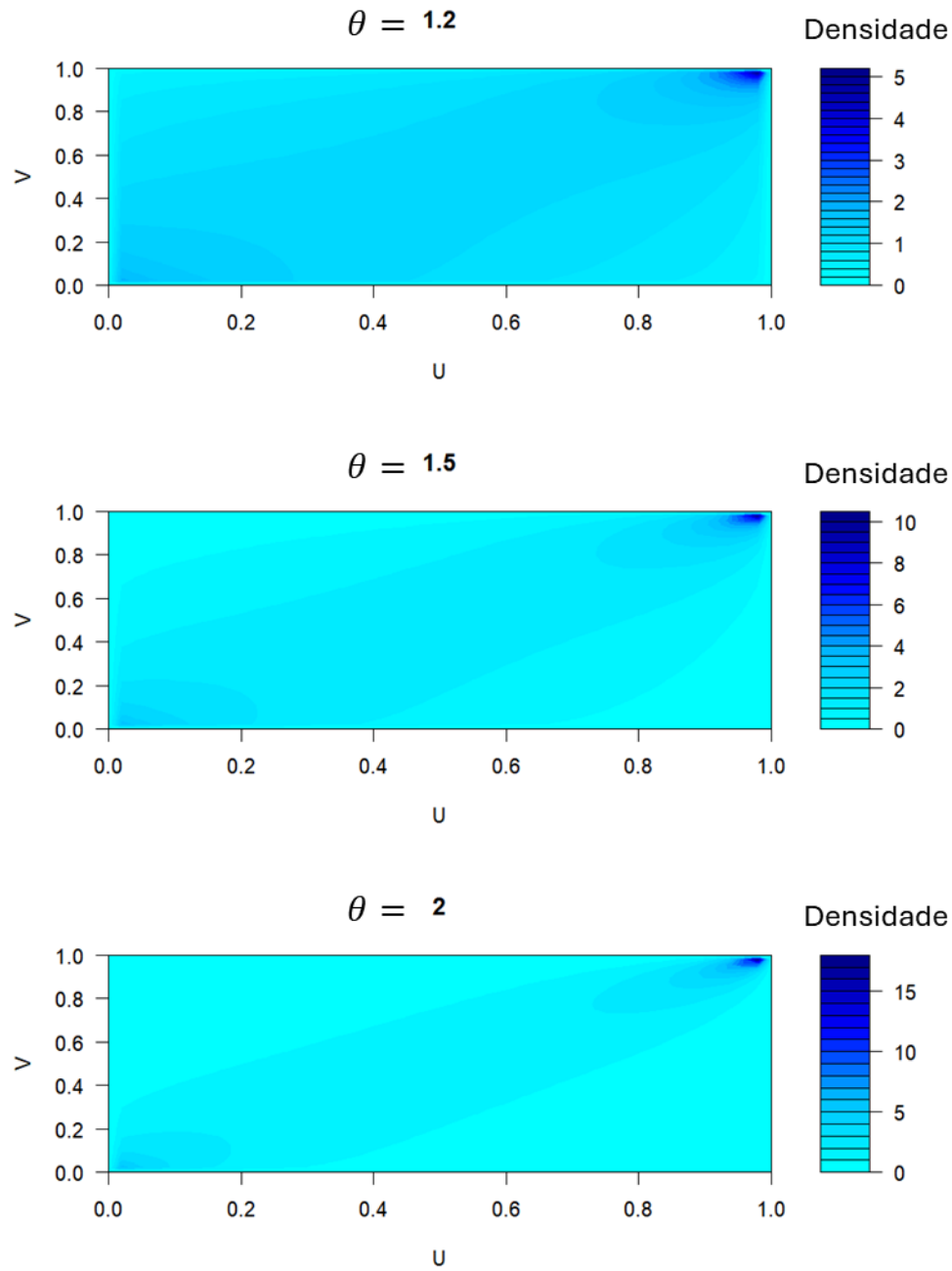
Criada por Emil Julius Gumbel (1960), para variáveis aleatórias u e v com marginais uniformes no intervalo $[0,1]$, a cópula de Gumbel $C(u, v; \theta)$ é dada por:

$$C(u, v; \theta) = \exp\left(-\left[(-\log(u))^\theta + (-\log(v))^\theta\right]^{\frac{1}{\theta}}\right) \quad (8)$$

onde:

- $\theta \geq 1$ é o parâmetro de dependência. Quando $\theta = 1$, a cópula de Gumbel se reduz à cópula de independência $C(u, v) = uv$.
- À medida que $\theta \rightarrow \infty$, a dependência entre as variáveis se torna completa.

Figura 6: Função de Densidade da Copula Gumbel com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.6 Copula Joe

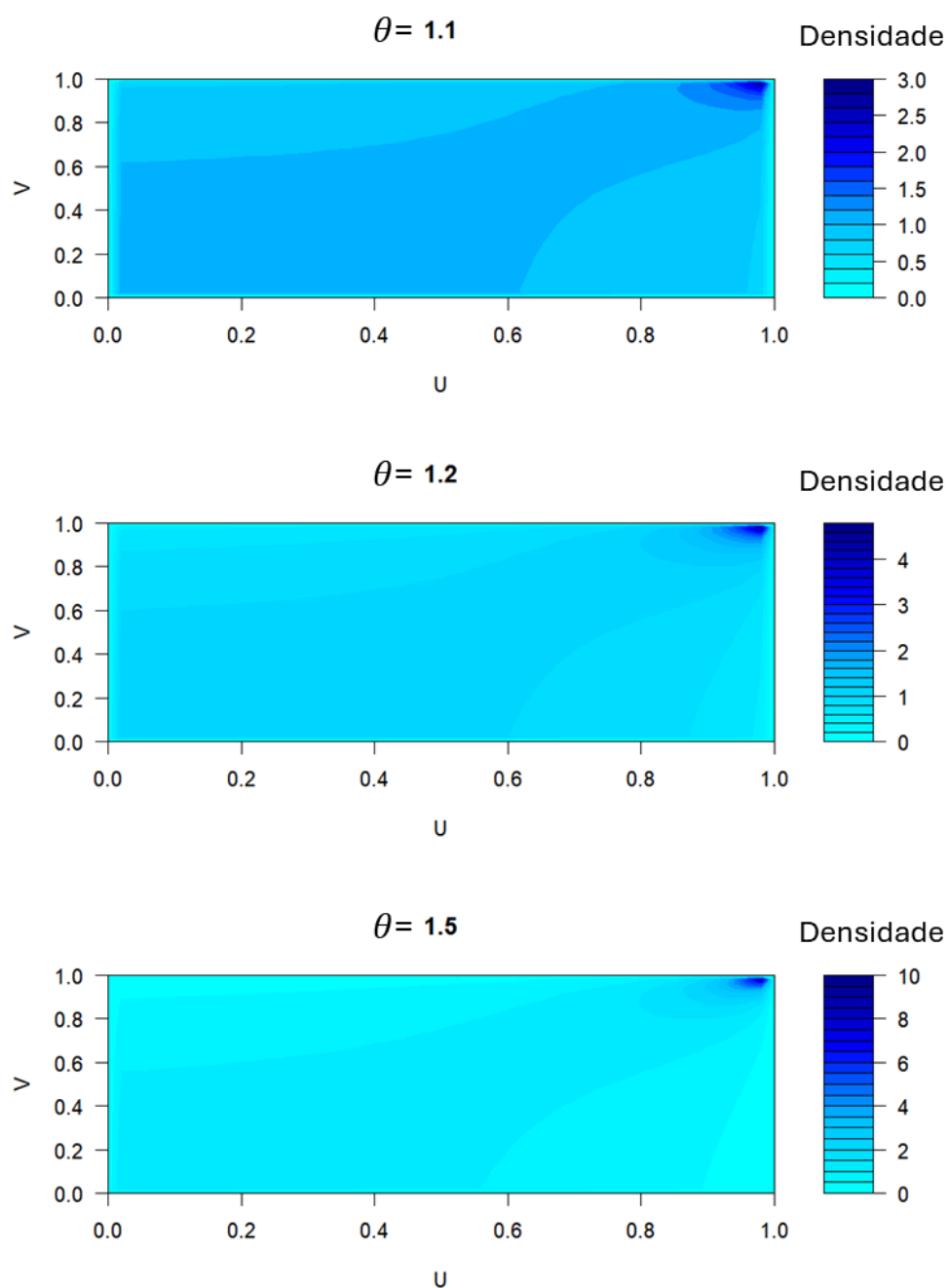
Criada por Harry Joe (1993), para variáveis aleatórias u e v com marginais uniformes no intervalo $[0,1]$, a cópula de Joe $C(u, v; \theta)$ é definida por:

$$C(u, v; \theta) = 1 - \left[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta \cdot (1-v)^\theta \right]^{\frac{1}{\theta}} \quad (9)$$

onde:

- $\theta \geq 1$ é o parâmetro de dependência. Para $\theta = 1$, a cópula de Joe se reduz à cópula de independência $C(u, v) = uv$.
- À medida que θ aumenta, a intensidade da dependência de cauda superior se intensifica.

Figura 7: Função de Densidade da Copula Joe com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.7 Copula BB8

A cópula BB8 é um caso especial da família de cópulas Joe caracterizada por dois parâmetros: θ e δ .

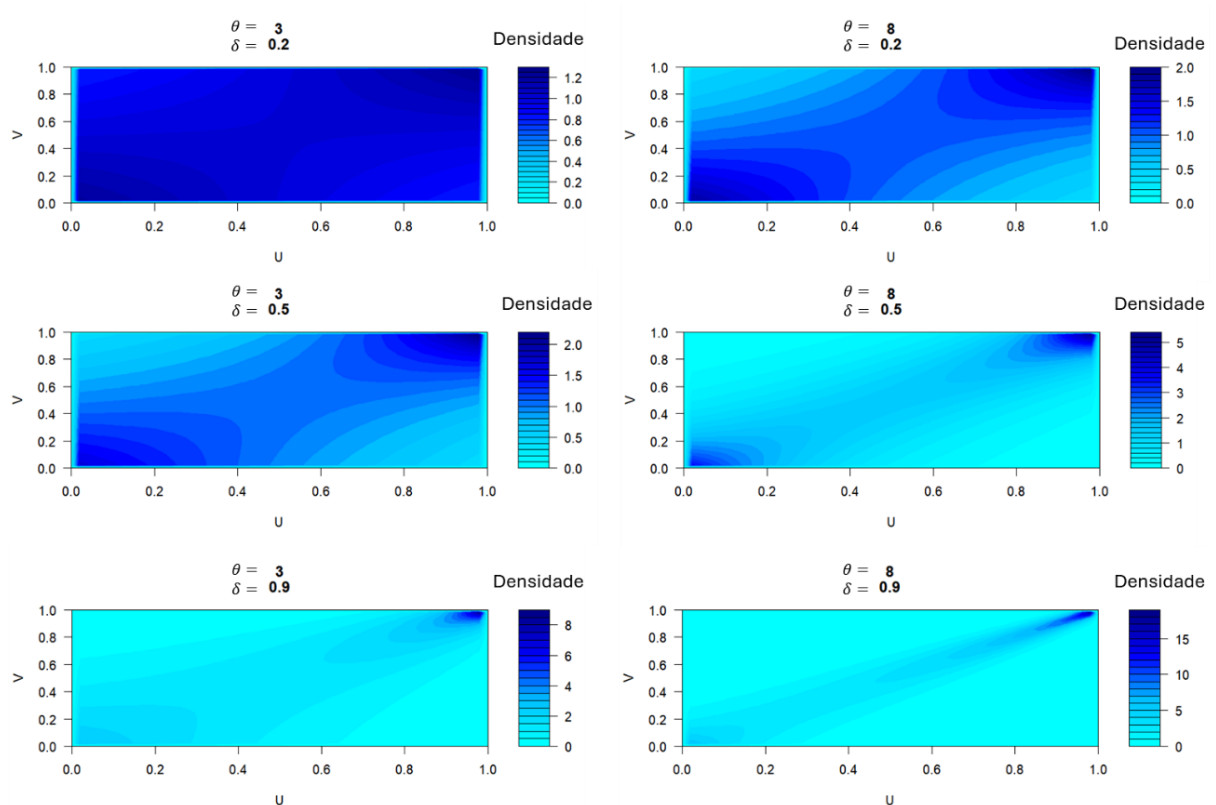
- $\theta \geq 1$: Controla a intensidade da dependência geral.
- $\delta \in [0,1]$: Controla a intensidade específica de dependência de cauda, permitindo modelar a força nas caudas inferior e superior.

A função cópula BB8 para variáveis u e v com marginais uniformes no intervalo $[0,1]$ é dada por:

$$C(u, v; \theta, \delta) = \frac{1}{\theta} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{1-(1-\delta)^\theta} (1 - (1 - \delta u)^\theta (1 - \delta v)^\theta) \right]^{\frac{1}{\delta}} \right) \quad (10)$$

Esse formato é mais complexo do que o de outras cópulas arquimedianas, refletindo a flexibilidade adicional para capturar caudas.

Figura 8: Função de Densidade da Copula BB8 com Marginais Uniformes (0,1) para Diferentes Valores de θ e δ



Fonte: Elaborado pelo autor.

4 DISTRIBUIÇÕES

Neste capítulo, abordaremos as distribuições Gumbel, Gamma e Weibull, que são utilizadas neste estudo. Serão apresentadas as funções de densidade de probabilidade (FDP), as funções de distribuição acumulada (FDA), as funções de sobrevivência e as funções de risco para cada uma dessas distribuições.

4.1 Valor Extremo Gumbel

A Distribuição Valor Extremo é amplamente usada em previsões de eventos extremos, tais como: inundação, previsões de terremotos, economia, meteorologia e vários outros.

É também muita utilizada em problemas de confiabilidade e testes de sobrevivência, sendo usada em testes de falhas para produtos manufaturados e circuitos elétricos (veja Hahn e Shapiro, 1967).

A distribuição Gumbel, também conhecida como distribuição valor extremo, surge como distribuição limite para máximos ou mínimos (valores extremos) de uma amostra de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, quando o tamanho da amostra aumenta.

Existem basicamente duas formas da distribuição valor extremo. A primeira, ou Tipo I, está relacionada com valores mínimos e a segunda, Tipo II, com valores máximos.

Tal distribuição de probabilidade é comumente chamada de distribuição Gumbel, Tipo I ou Tipo II, respectivamente, em homenagem ao alemão Emil Julius Gumbel (1891-1966) que foi pioneiro na aplicação da Teoria do Valor Extremo, particularmente em Climatologia e Hidrologia.

4.1.1 Definição e propriedades

Seja X uma variável aleatória que represente um comportamento extremo.

A distribuição Gumbel (valor extremo Tipo II) para valores máximos tem a função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x|\phi, \varphi) = \frac{1}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{x-\phi}{\varphi} - \exp \left\{ -\frac{x-\phi}{\varphi} \right\} \right\}, \quad (11)$$

para $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \phi < +\infty$ e $\varphi > 0$, onde ϕ é o parâmetro de posição e φ é o parâmetro de escala.

A probabilidade P de que ocorra uma precipitação pluvial máxima maior que um certo valor x , que também é a função de sobrevivência da distribuição Gumbel, é dada por:

$$P = P(X > x) = 1 - \exp \left\{ -\exp \left\{ -\frac{x-\phi}{\varphi} \right\} \right\}, \quad (12)$$

em que x é a precipitação máxima do período e $0 < x < +\infty$.

O nível de retorno associado ao período de retorno T é dado por:

$$x_p = \phi - \varphi \log[-\log(1 - P)] \quad (13)$$

4.1.2 Estimação de máxima verossimilhança (Estimação Pontual)

Considerando uma amostra aleatória $x_1, x_2, \dots, x_n$ obtida da distribuição Gumbel, a função de verossimilhança para os parâmetros ϕ e φ é simplesmente o produto das densidades de cada uma das observações na amostra, dada então por:

$$L(\phi, \varphi | x) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\varphi} \exp \left\{ -\frac{x-\phi}{\varphi} - \exp \left\{ -\frac{x-\phi}{\varphi} \right\} \right\} \quad (14)$$

O estimador de máxima-verossimilhança é obtido como segue. A função log-verossimilhança é dada por:

$$l(\phi, \varphi | x) = -n \log \varphi - \frac{n}{\varphi} (\bar{x} - \phi) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{x_i - \phi}{\varphi} \right) \quad (15)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$ são obtidos resolvendo as equações de verossimilhança $\frac{\partial l}{\partial \phi} = 0$ e $\frac{\partial l}{\partial \varphi} = 0$ simultaneamente.

Uma vez que estas equações não podem ser resolvidas analiticamente para $\hat{\phi}$ e $\hat{\varphi}$, um método numérico deve ser utilizado, por exemplo, Método de Newton-Raphson (Ruggiero e Lopes, 1988).

4.1.3 Estimação de máxima verossimilhança (Estimação por Intervalos)

A estimação com intervalos de confiança para os parâmetros do modelo pode ser obtida pela aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, isto é:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}) \right), \quad (16)$$

para $n \rightarrow \infty$, onde $I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\varphi})$ é a matriz de Informação de Fisher dada por:

$$I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\varphi}) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\varphi^2} & -\frac{n}{\varphi^2} [1 + \psi(1)] \\ -\frac{n}{\varphi^2} [1 + \psi(1)] & \frac{n}{\varphi^2} [1 + \psi(2) + \psi^2(2)] \end{bmatrix}, \quad (17)$$

e $\psi(k)$ é a função digama $\psi(k) = \frac{d}{dk} \Gamma(k)$, conforme definido em Lawless (1982).

Assim, as regiões de confiança conjunta aproximadas para φ e ϕ podem ser obtidas. Intervalos de confiança individuais aproximados para os parâmetros ϕ e φ com coeficiente de confiança $100(1 - \alpha)\%$ são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\phi} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\phi})} &< \phi < \hat{\phi} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\phi})} \\ \hat{\varphi} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\varphi})} &< \varphi < \hat{\varphi} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\varphi})} \end{aligned} \quad (18)$$

4.2 Gamma

A distribuição Gamma é amplamente utilizada em várias áreas, como confiabilidade, finanças, e modelagem de tempo de vida, devido à sua flexibilidade em modelar diferentes formas de dados. É particularmente útil para modelar o tempo até um evento, como falhas de componentes ou o tempo de espera em filas.

4.2.1 Definição e Propriedades

Seja X uma variável aleatória que representa o tempo até um evento específico. A distribuição Gamma é parametrizada por dois parâmetros: a forma e a escala. A função densidade de probabilidade da distribuição Gamma é dada por:

$$f(x|\phi, \varphi) = \frac{\theta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} \exp\{-x\theta\}, \quad (19)$$

onde $\theta > 0$ e $k > 0$ são os parâmetros de escala e forma da distribuição, respectivamente. E $\Gamma(k)$ é a função gama definida como:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx \quad (20)$$

4.2.2 Função de Sobrevivência

A função de sobrevivência $S(x)$ para a distribuição Gamma é a probabilidade de que a variável aleatória X seja maior que um valor específico

$$x: S(x|k, \theta) = 1 - \frac{\gamma(k, \theta x)}{\Gamma(k)}, \quad (21)$$

onde $\gamma(k, \theta x)$ é a função gama incompleta inferior.

4.2.3 Função de Risco

A função de risco $h(x)$ é a taxa de falha instantânea no tempo x , dada pela razão entre a função densidade de probabilidade e a função de sobrevivência:

$$h(x|k, \theta) = \frac{\frac{\theta^k}{\Gamma(k)} \exp(-x\theta)}{1 - \frac{\gamma(k, x\theta)}{\Gamma(k)}} \quad (22)$$

4.2.4 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação Pontual)

Considerando uma amostra aleatória $x_1, x_2, \dots, x_n$ obtida da distribuição Gamma, a função de verossimilhança para os parâmetros k e θ é o produto das densidades de cada uma das observações na amostra, dada por:

$$L(k, \theta|x) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^k}{\Gamma(k)} x_i^{k-1} \exp(\theta x_i) \quad (23)$$

A função log-verossimilhança é então dada por:

$$l(k, \theta|x) = -n \log \Gamma(k) + (nk) \log \theta + (k-1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \theta \sum_{i=1}^n x_i \quad (24)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{k}$ e $\hat{\theta}$ são obtidos resolvendo as equações de verossimilhança $\frac{\partial l}{\partial k} = 0$ e $\frac{\partial l}{\partial \theta} = 0$ simultaneamente.

4.2.5 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação por Intervalos)

A estimação com intervalos de confiança para os parâmetros do modelo pode ser obtida pela aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança. Supondo que os estimadores $\hat{k}$ e $\hat{\theta}$ seguem uma distribuição normal conjunta, os intervalos de confiança para k e θ com coeficiente de confiança $100(1 - \alpha)\%$ são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{k} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{k})} < k < \hat{k} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{k})} \\ \hat{\theta} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})} < \theta < \hat{\theta} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})} \end{aligned} \quad (25)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão correspondente ao nível de confiança desejado.

4.3 Weibull

A distribuição Weibull apresenta grande flexibilidade onde β controla a forma da função, permitindo modelar distribuições decrescentes, crescentes e "em formato de sino".

4.3.1 Definição e Propriedades

Seja X uma variável aleatória que representa o tempo até a falha. A distribuição Weibull é parametrizada por dois parâmetros: forma (β) e escala (λ). A função densidade de probabilidade da distribuição Weibull é dada por:

$$f(x|\beta, \lambda) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta}\right), \quad (26)$$

onde $\beta > 0$ e $\lambda > 0$ são os parâmetros de forma e escala da distribuição, respectivamente.

4.3.2 Função de Sobrevivência

A função de sobrevivência $S(x)$ para a distribuição Weibull é a probabilidade de que a variável aleatória X seja maior que um valor específico x :

$$S(x) = P(X > x) = \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\beta\right) \quad (27)$$

4.3.3 Função de Risco

A função de risco $h(x)$ é a taxa de falha instantânea no tempo x , dada pela razão entre a função densidade de probabilidade e a função de sobrevivência:

$$h(x|\lambda, \theta) = \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\beta-1} \quad (28)$$

4.3.4 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação Pontual)

Considerando uma amostra aleatória $x_1, x_2, \dots, x_n$ obtida da distribuição Weibull, a função de verossimilhança para os parâmetros β e λ é o produto das densidades de cada uma das observações na amostra, dada por:

$$L(\beta, \lambda|x) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\lambda} \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^{\beta-1} \exp\left(-\left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta\right) \quad (29)$$

A função log-verossimilhança é então dada por:

$$l(\beta, \lambda|x) = -n \log \beta - n \beta \log \lambda + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \log x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^\beta \quad (30)$$

Os estimadores de máxima verossimilhança $\hat{\beta}$ e $\hat{\lambda}$ são obtidos resolvendo as equações de verossimilhança $\frac{\partial l}{\partial \beta} = 0$ e $\frac{\partial l}{\partial \lambda} = 0$ simultaneamente.

4.3.5 Estimação de Máxima Verossimilhança (Estimação por Intervalos)

A estimação com intervalos de confiança para os parâmetros do modelo pode ser obtida pela aproximação normal assintótica dos estimadores de máxima verossimilhança, isto é:

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \beta \end{pmatrix}, I^{-1}(\hat{\beta}, \hat{\lambda}) \right), \quad (31)$$

para $n \rightarrow \infty$, onde $I^{-1}(\hat{\phi}, \hat{\phi})$ é a matriz de Informação de Fisher dada por:

$$I(\lambda, \beta) = \begin{bmatrix} \left(\frac{\beta}{\lambda}\right)^2 & -\frac{\psi(2)}{\lambda} \\ -\frac{\psi(2)}{\lambda} & \frac{1}{\beta^2} [1 + \psi'(2)] \end{bmatrix}, \quad (32)$$

onde $\psi(2)$ e $\psi'(2)$ são chamadas funções digamma e trigamma, respectivamente.

Supondo que os estimadores $\hat{\beta}$ e $\hat{\lambda}$ seguem uma distribuição normal conjunta, os intervalos de confiança para β e λ com coeficiente de confiança $100(1 - \alpha)\%$ são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})} < \beta < \hat{\beta} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})} \\ \hat{\lambda} - z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})} < \lambda < \hat{\lambda} + z_{\alpha/2} \sqrt{\text{Var}(\hat{\lambda})} \end{aligned}, \quad (33)$$

onde $z_{\alpha/2}$ é o quantil da distribuição normal padrão correspondente ao nível de confiança desejado.

5 METODOLOGIA

Primeiramente foi feito um estudo sobre as funções cópula e suas aplicações práticas. Além disso, também foi feito um estudo das possíveis distribuições que possam modelar os dados, como a distribuição univariada de Valor Extremo (Gumbel) para os dados de precipitação e distribuições univariadas Gamma e Weibull para os dados de vazão.

Os dados de vazão foram disponibilizados pelo Prof. Dr. Edilson Ferreira Flores do projeto **Morfologia fluvial, variabilidade/mudanças climáticas e conectividade nos sistemas aluviais do baixo curso dos rios Aguapeí e Peixe, Oeste Paulista, Brasil**, coordenado pelo Prof. Dr. Paulo Cesar Rocha Doutorado. Já os dados de precipitação foram coletados a partir do site <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>, onde selecionamos a área desejada (-21.714444 ; -50.290555), selecionamos o nível temporal (diário) e o período temporal que será trabalhado (de jan. 1981 a dez. 2019). Com os dados de precipitação usamos o pacote “dplyr” do software R para selecionar os valores extremos mensais os quais serão usados no trabalho.

A estimação de máxima verossimilhança para as distribuições marginais foi feita com o auxílio do pacote “maxLik”, que permite o uso de métodos de cálculo numérico para obtenção dos estimadores dos parâmetros de forma aproximada.

Os ajustamentos da função de sobrevivência, risco e o gráfico de tempo total de teste (TTT-Plot) foram feitos usando os pacotes “survival”, “muha” e “tplot” respectivamente.

Para selecionar a cópula que melhor se ajusta aos dados mensais, utilizamos o pacote “VineCopula”, que testa diferentes cópulas e seleciona a que melhor se adequa aos dados, comparando o AIC e o BIC. Com a cópula selecionada, utilizamos o comando “optim” para estimar os parâmetros da distribuição bivariada sob cópula. Verificaremos a adequabilidade dos ajustes obtidos para a distribuição bivariada construída e determinaremos as probabilidades de ocorrência conjunta de níveis máximos de precipitação e vazão.

6 RESULTADOS

Nesta etapa, apresentaremos os resultados iniciais obtidos a partir da base de dados selecionada. Isso inclui os estimadores calculados, os gráficos gerados e os ajustes das funções escolhidas para cada variável analisada.

6.1 Inferência das Marginais da Distribuição Conjunta

A seguir apresentamos três tabelas para cada uma das distribuições estudadas. Cada tabela mostra os valores dos estimadores, desvios padrão e intervalos de confiança para os parâmetros de cada distribuição. Os estimadores representam as melhores estimativas dos parâmetros com base nos dados; o desvio padrão indica a dispersão dos valores em torno da estimativa, e os intervalos de confiança fornecem uma faixa dentro da qual acreditamos que o verdadeiro valor do parâmetro se encontra com uma probabilidade de 95%. Essas informações são essenciais para entender a precisão e a confiabilidade das estimativas obtidas.

Tabela 1: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição valor extremo (Gumbel) para os dados de precipitação.

Mês	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
Janeiro	ϕ	26.29281	1.489128	23.37412	29.2115
	φ	8.533107	1.153474	6.272298	10.79391
Fevereiro	ϕ	22.68129	1.400391	19.93652	25.42606
	φ	8.81968	1.046856	6.767843	10.87152
Março	ϕ	21.3917	1.349642	18.7464	24.037
	φ	8.05546	1.003313	6.088966	10.02195
Abril	ϕ	18.52014	1.865021	14.8647	22.17558
	φ	10.02352	1.267032	7.540132	12.5069
Maio	ϕ	17.10159	1.690596	13.78802	20.41516
	φ	9.670574	1.17464	7.368279	11.97287
Junho	ϕ	8.826534	1.513161	5.860739	11.79233
	φ	8.599245	1.139066	6.366676	10.83181
Julho	ϕ	5.830405	1.147354	3.581591	8.07922
	φ	6.724792	0.931473	4.899105	8.550479
Agosto	ϕ	6.383633	1.436077	3.568923	9.198344
	φ	8.122598	1.089676	5.986833	10.25836

Mês	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
Setembro	ϕ	13.78676	1.585298	10.67958	16.89395
	φ	9.551672	1.227966	7.144858	11.95849
Outubro	ϕ	19.19193	1.47503	16.30087	22.08299
	φ	8.621545	1.057798	6.54826	10.69483
Novembro	ϕ	21.98125	1.477488	19.08538	24.87713
	φ	8.66208	1.075031	6.55502	10.76914
Dezembro	ϕ	25.25293	1.527776	22.25849	28.24737
	φ	9.522675	1.176082	7.217554	11.8278

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 2: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição Gamma para os dados de vazão.

Mês	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
Janeiro	k	4.632593	1.011108	2.650822	6.614364
	θ	0.082936	0.01915	0.045402	0.12047
Fevereiro	k	6.224962	1.352779	3.573516	8.876408
	θ	0.105141	0.023849	0.058396	0.151885
Março	k	9.68098	1.985982	5.788455	13.5735
	θ	0.19998	0.042325	0.117023	0.282937
Abril	k	8.737401	1.979122	4.858322	12.61648
	θ	0.230436	0.053706	0.125172	0.335699
Maio	k	11.75802	2.872174	6.128564	17.38748
	θ	0.350959	0.087332	0.179788	0.52213
Junho	k	6.277055	1.324548	3.680941	8.873169
	θ	0.188552	0.041613	0.106989	0.270114
Julho	k	14.9903	2.577434	9.938527	20.04207
	θ	0.547878	0.096965	0.357826	0.73793
Agosto	k	14.77281	1.032438	12.74924	16.79639
	θ	0.580634	0.047403	0.487724	0.673543
Setembro	k	7.070657	1.590114	3.954033	10.18728
	θ	0.26072	0.060751	0.141647	0.379793
Outubro	k	7.536203	1.670156	4.262698	10.80971
	θ	0.26369	0.060476	0.145156	0.382223
Novembro	k	7.579108	1.669175	4.307526	10.85069
	θ	0.251055	0.05723	0.138883	0.363227
Dezembro	k	7.853897	1.808279	4.309671	11.39812
	θ	0.193575	0.045956	0.1035	0.283649

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 3: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição Weibull para os dados de vazão.

Mês	Parâmetros	Estimador	Desvio Padrão	Limite Inferior	Limite Superior
Janeiro	λ	63.18041	6.412002	50.61288	75.74793
	β	1.945761	0.221367	1.511882	2.379641
Fevereiro	λ	66.84009	4.453772	58.11069	75.56948
	β	2.501575	0.299593	1.914372	3.088777
Março	λ	53.87712	3.693914	46.63705	61.11719
	β	2.849761	0.319503	2.223535	3.475987
Abril	λ	42.50977	2.605029	37.40392	47.61563
	β	2.972087	0.3601	2.266291	3.677883
Maio	λ	37.13641	2.007173	33.20235	41.07047
	β	3.301209	0.375978	2.564293	4.038126
Junho	λ	37.91308	3.762037	30.53949	45.28667
	β	2.047442	0.222454	1.611432	2.483452
Julho	λ	30.0943	1.23079	27.68196	32.50665
	β	4.115147	0.497705	3.139646	5.090649
Agosto	λ	27.99824	1.193662	25.65866	30.33781
	β	4.096652	0.499345	3.117936	5.075367
Setembro	λ	30.53025	2.22278	26.1736	34.88689
	β	2.373382	0.256238	1.871156	2.875608
Outubro	λ	32.20175	2.103356	28.07917	36.32432
	β	2.748796	0.322851	2.116008	3.381584
Novembro	λ	33.86437	2.109134	29.73047	37.99827
	β	2.882198	0.347785	2.200538	3.563857
Dezembro	λ	45.69908	2.7789	40.25244	51.14573
	β	2.554531	0.275965	2.01364	3.095422

Fonte: Elaborado pelo autor.

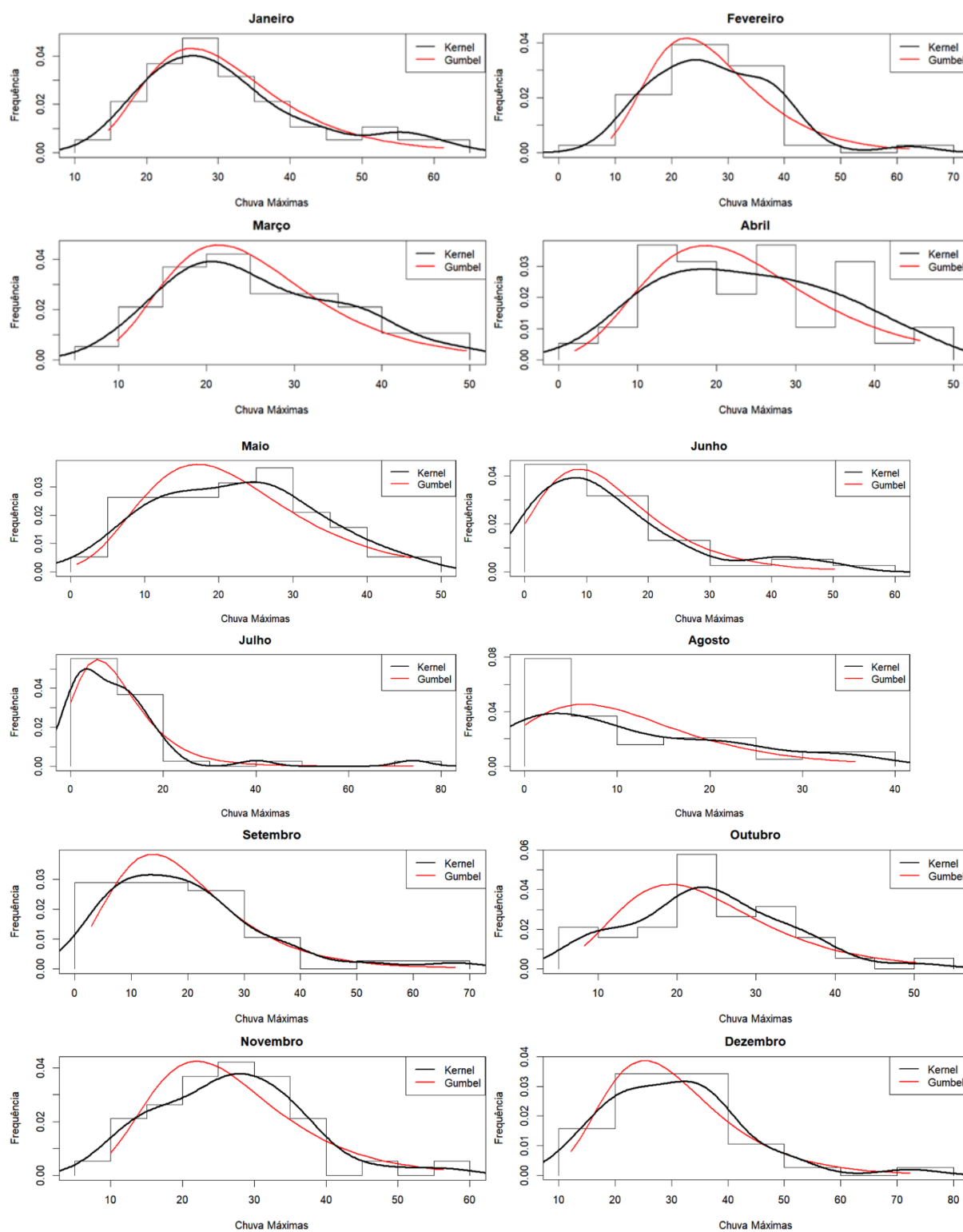
6.2 Análise Gráfica das Marginais da Distribuição Conjunta

Nas figuras a seguir, apresentamos diversos gráficos que ajudam a visualizar os dados e os resultados de maneira intuitiva. Esses gráficos são ferramentas visuais importantes para entender o comportamento dos dados e a adequação dos modelos estatísticos utilizados no estudo.

6.2.1 Precipitação

A Figura 9 mostra a distribuição dos dados de precipitação máxima e como eles se ajustam à função de densidade de probabilidade da função de valor extremo de Gumbel.

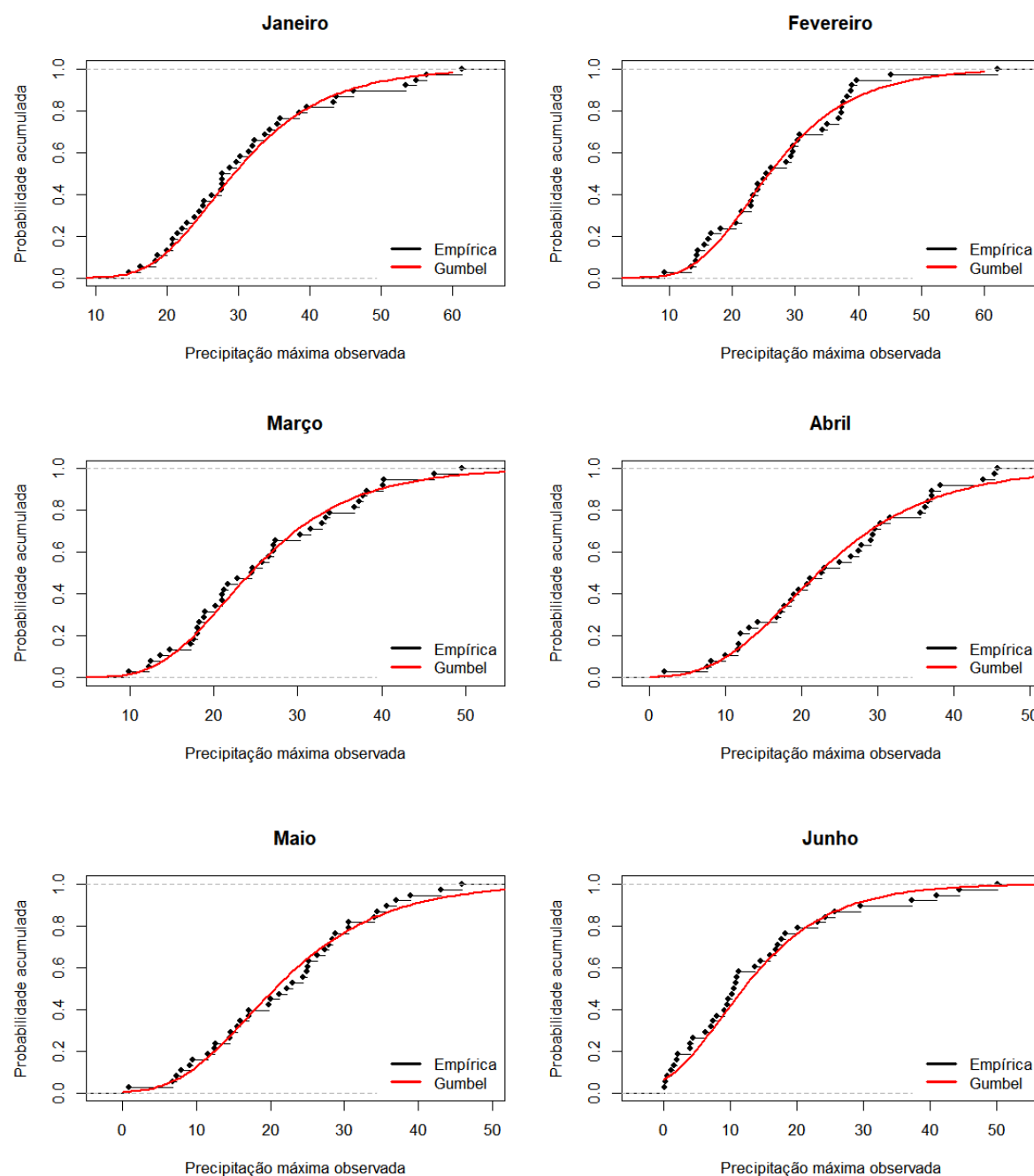
Figura 9: Histograma e função densidade de probabilidade para os dados de precipitação máxima mensais

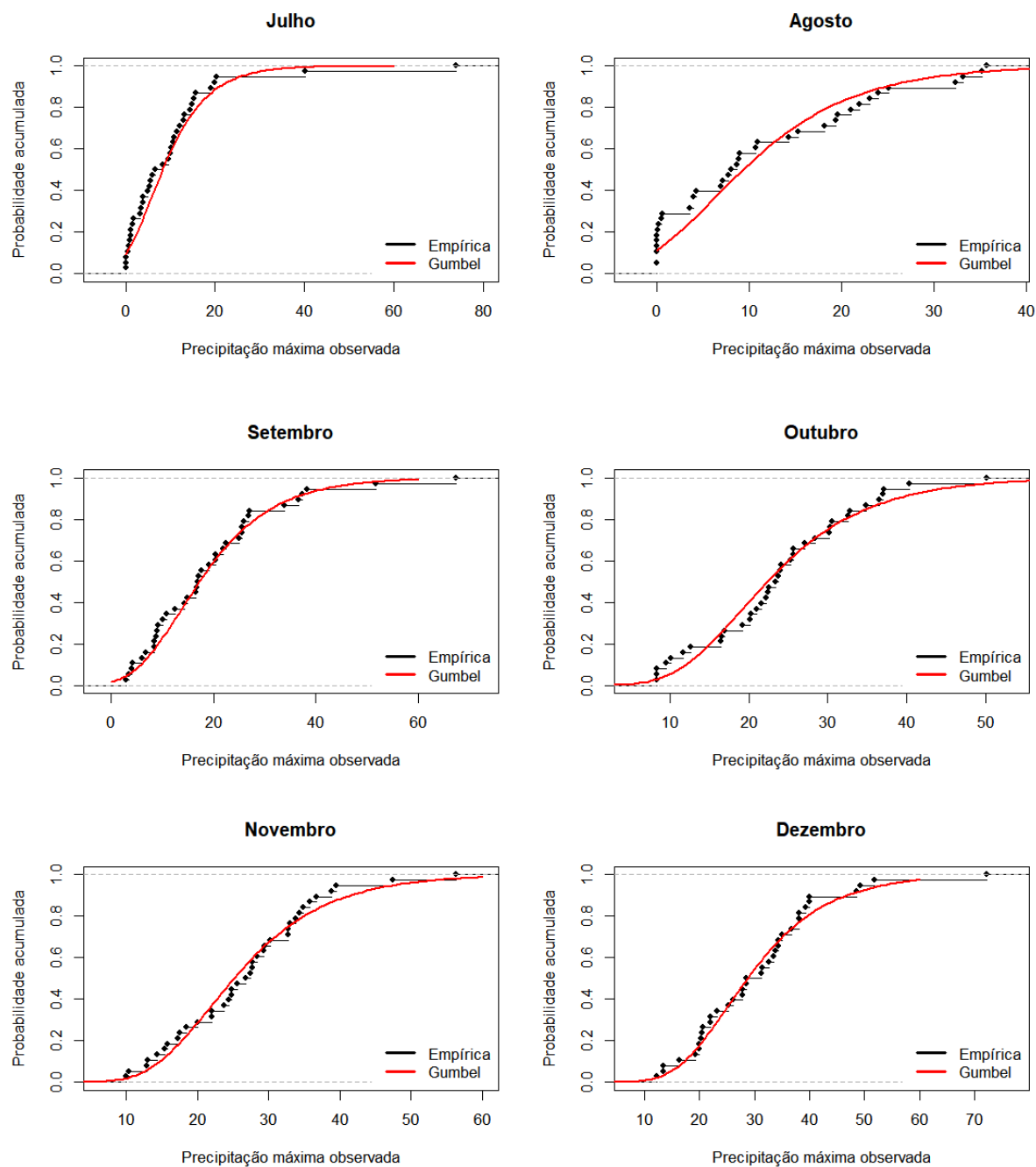


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 10 exibe a probabilidade acumulada dos dados de precipitação máxima até determinado ponto e a curva ajustada da FDA de valor extremo de Gumbel.

Figura 10: Função densidade acumulada para os dados de precipitação máxima mensais

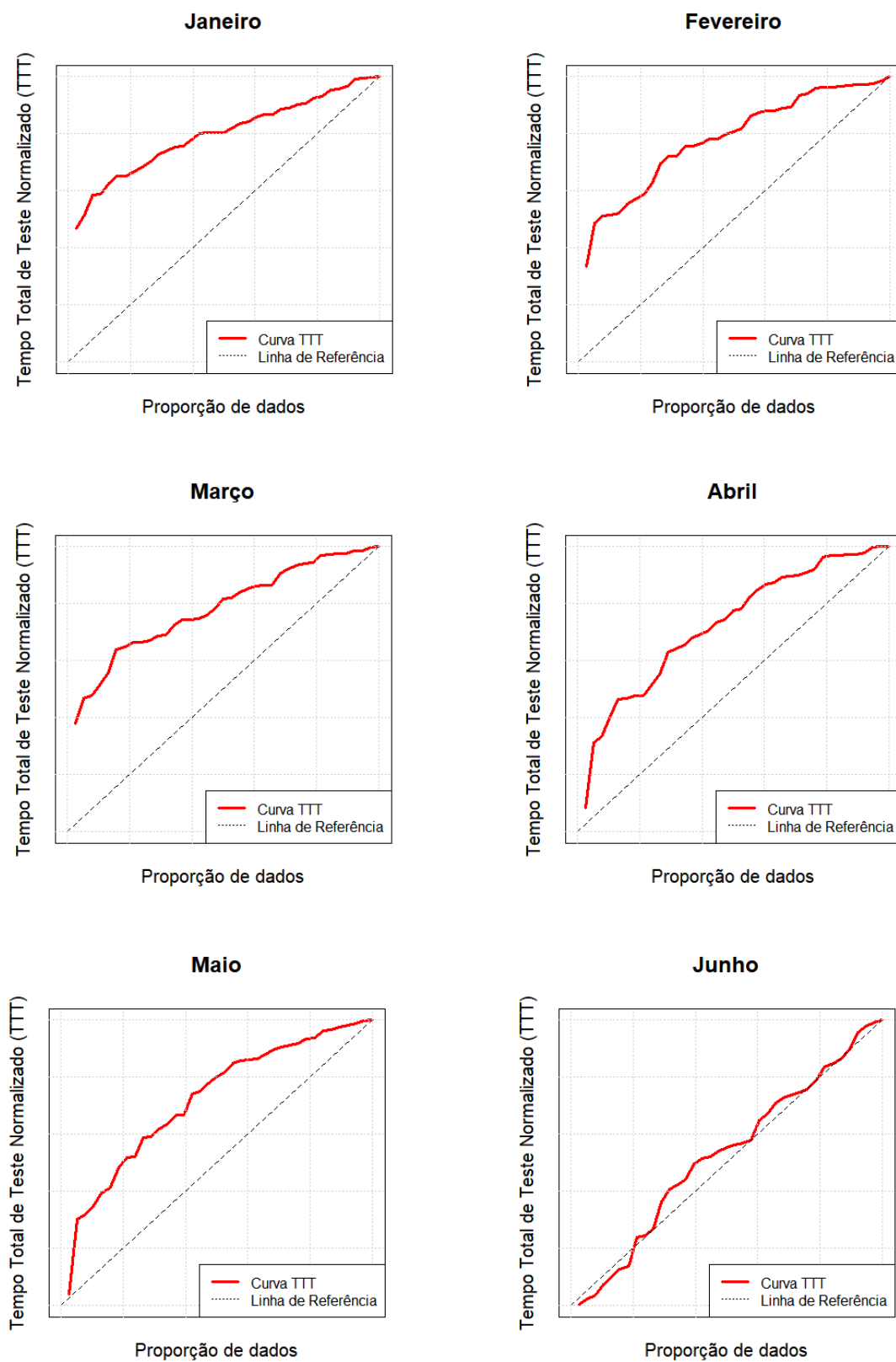


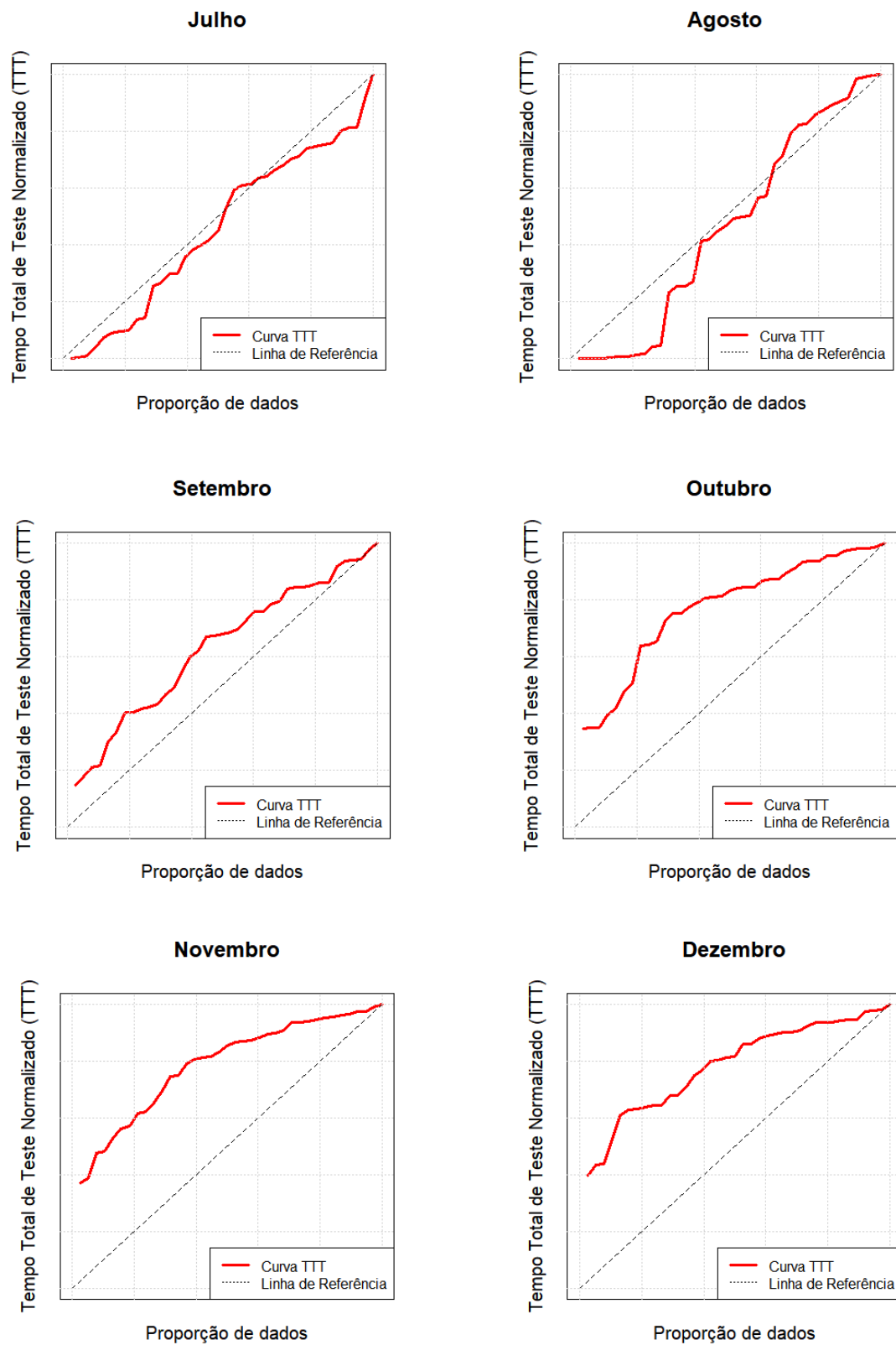


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 11 Representa o tempo total observado até a ocorrência de eventos específicos, neste caso a precipitação máxima.

Figura 11: Gráfico de tempo total de teste para os dados de precipitação máxima mensais

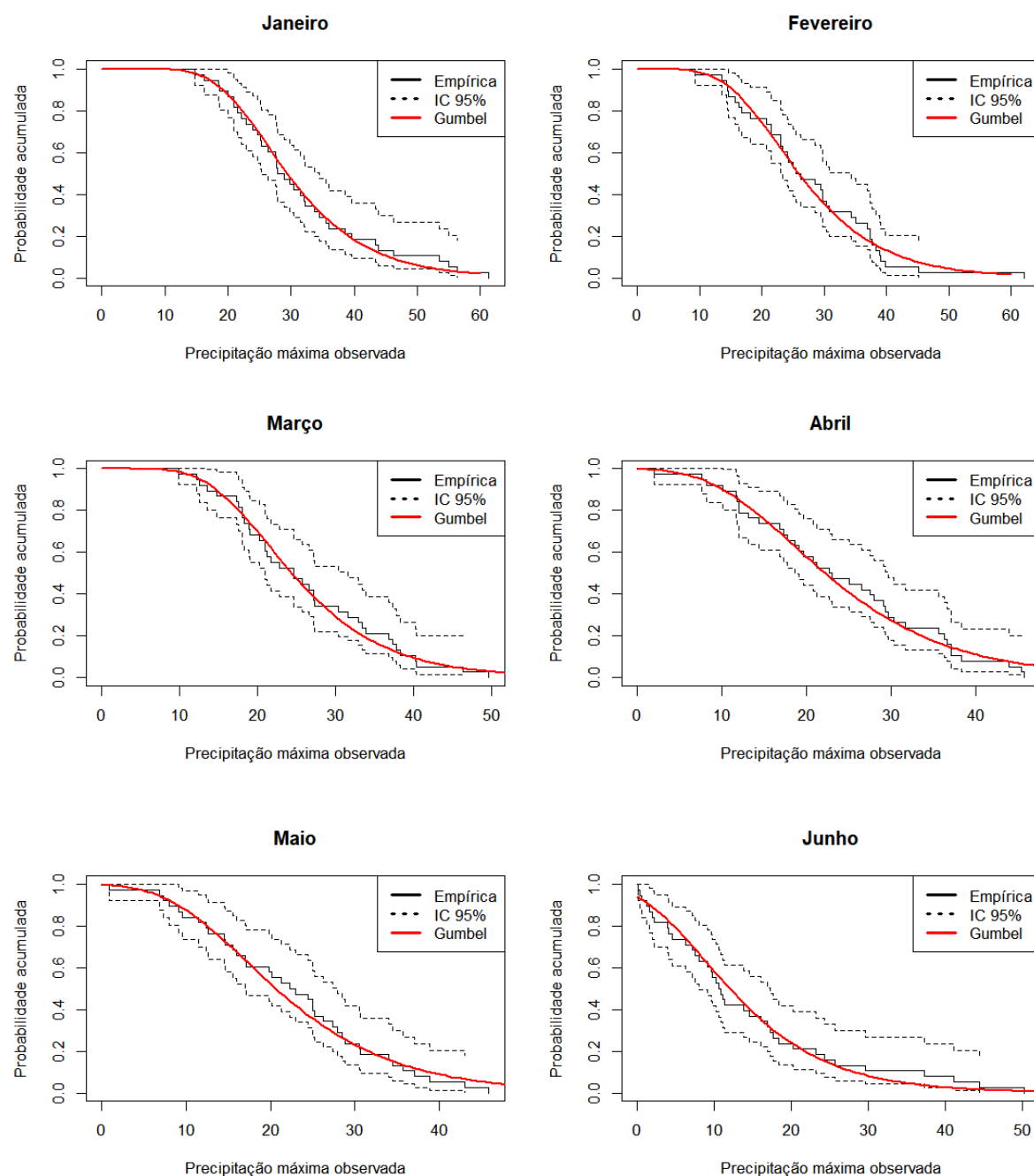


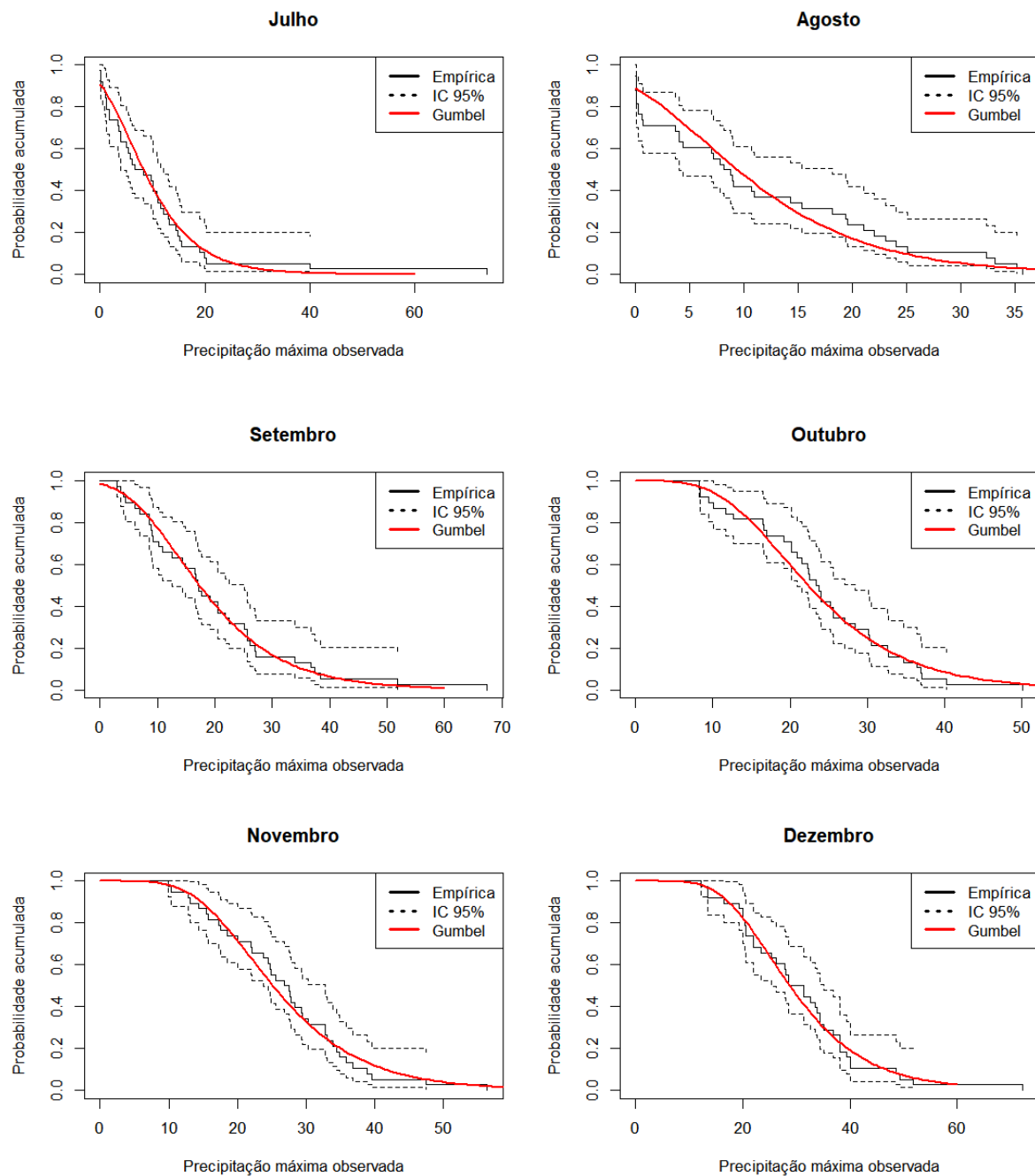


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 12 é o gráfico de Kaplan-Meier que mostra a probabilidade acumulada de sobrevivência ou de não exceder determinados valores de precipitação máxima ao longo do tempo.

Figura 12: Ajuste da função de sobrevivência para os dados de precipitação máxima mensais

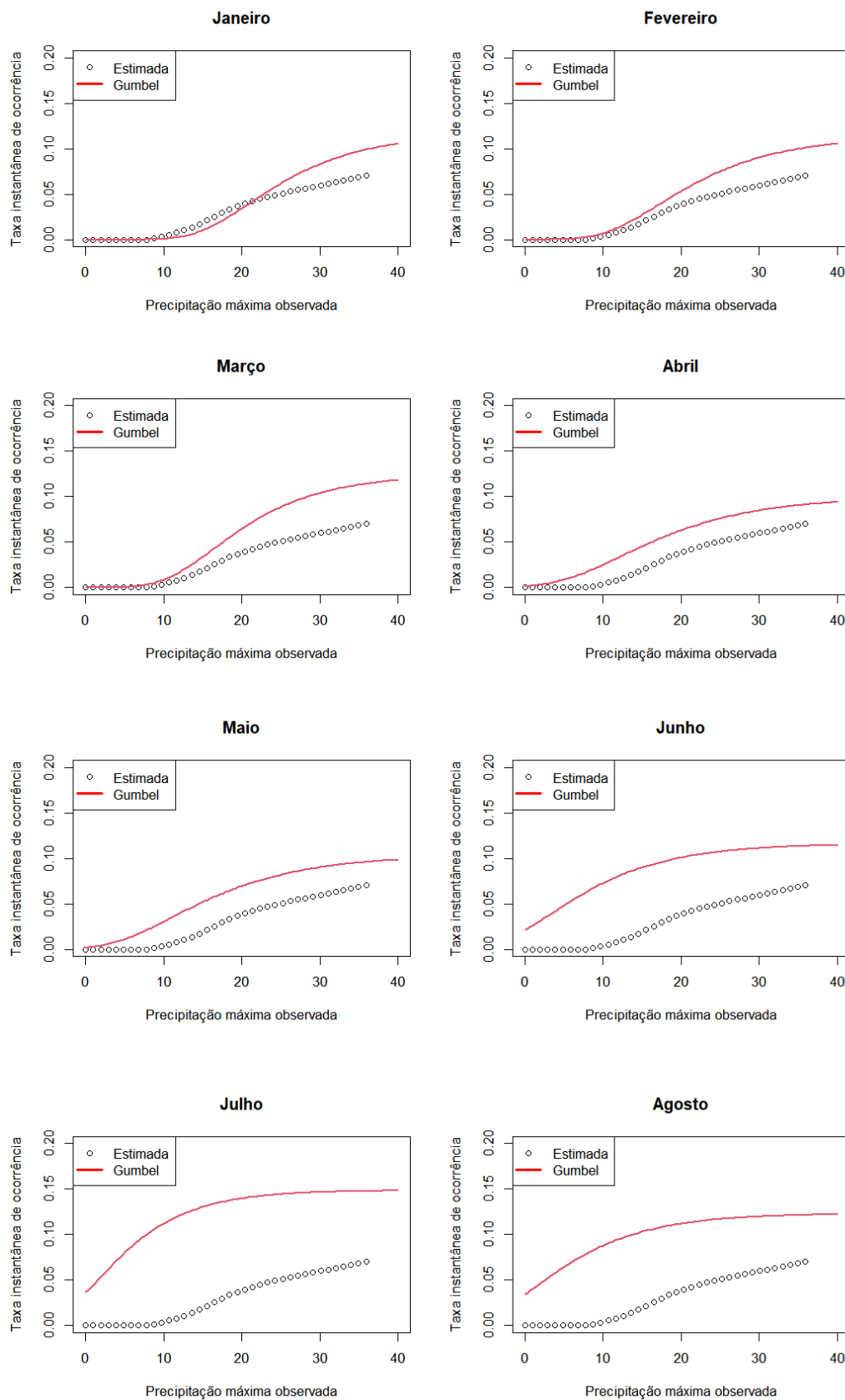


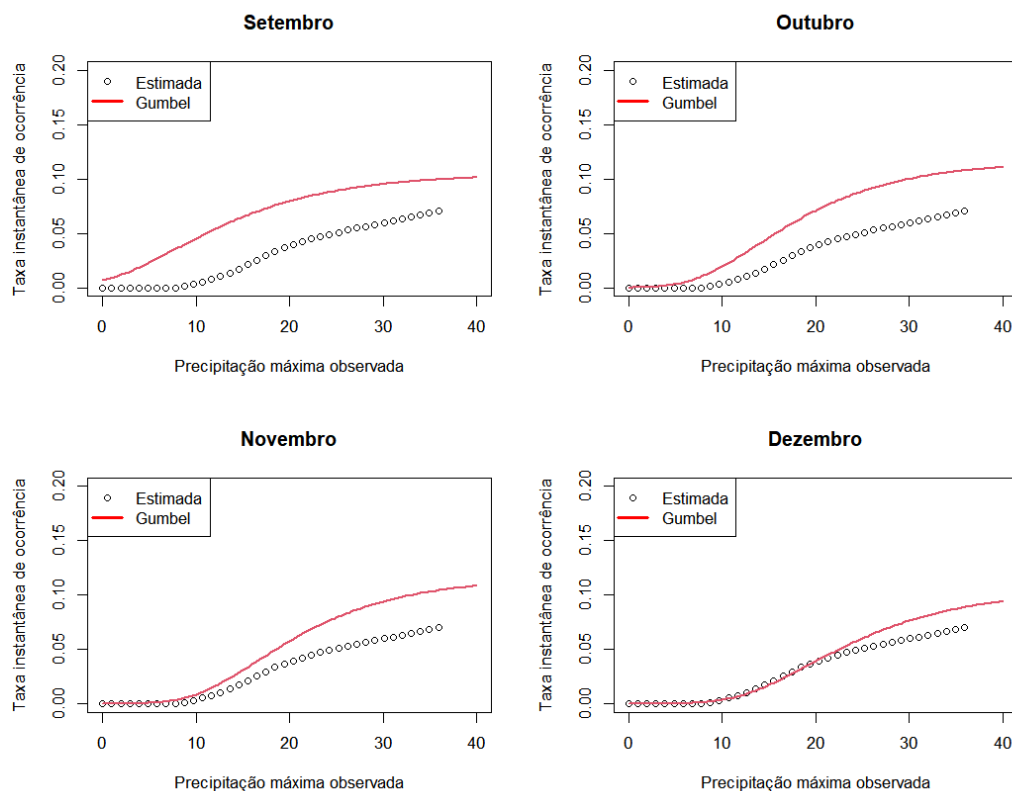


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 13 indica a taxa de ocorrência de eventos no caso a precipitação máxima ao longo do tempo.

Figura 13: Ajuste da função de risco para os dados de precipitação máxima mensais





Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com as Figuras 9, 10 e 12 a distribuição de valor extremo de Gumbel se ajusta muito bem aos dados, pois ela se mostra muito semelhante a função empírica dos dados.

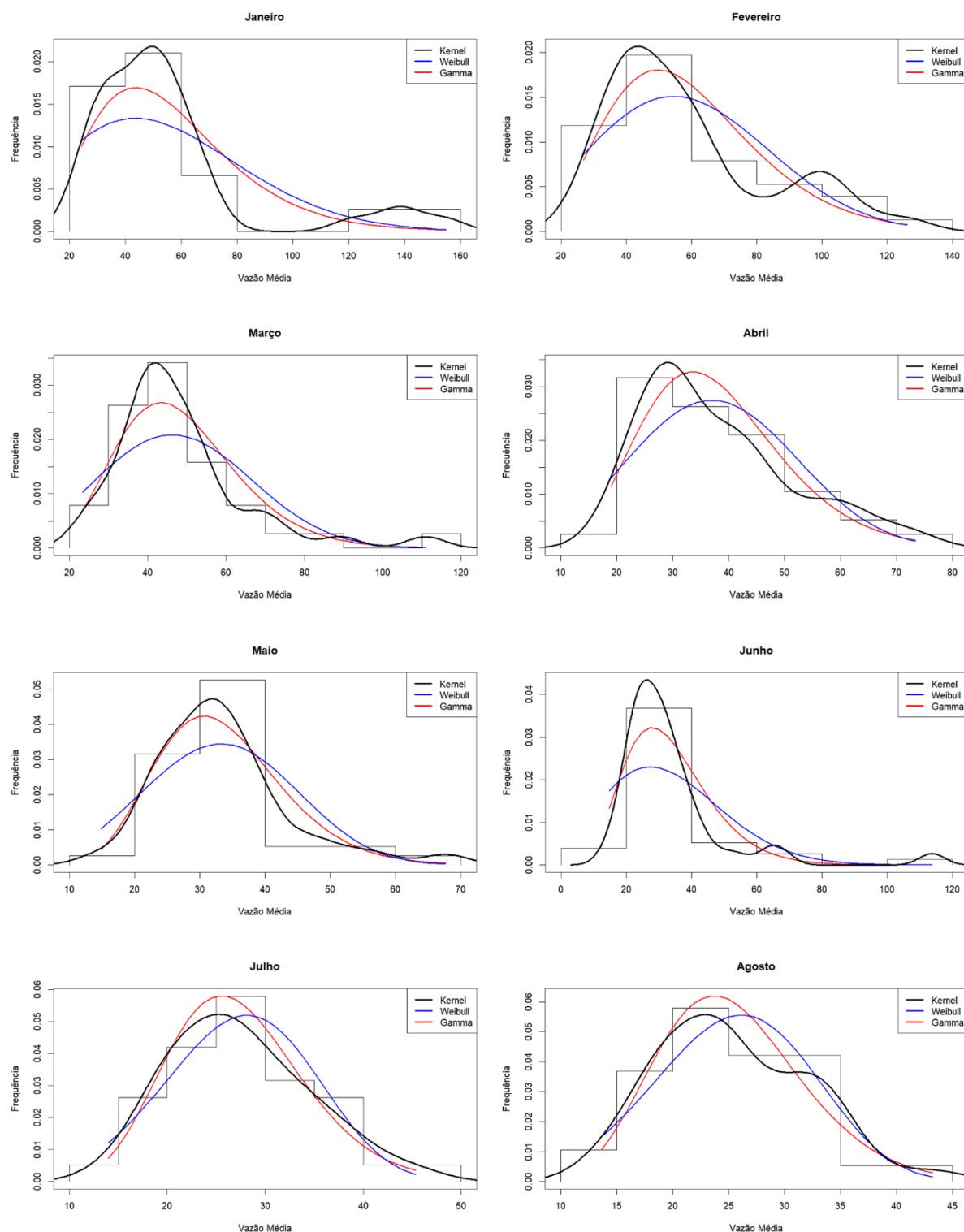
Na Figura 11 verificamos que a curva de risco empírica dos dados apresenta um comportamento de função de risco com forma crescente, que é a mesma da distribuição selecionada.

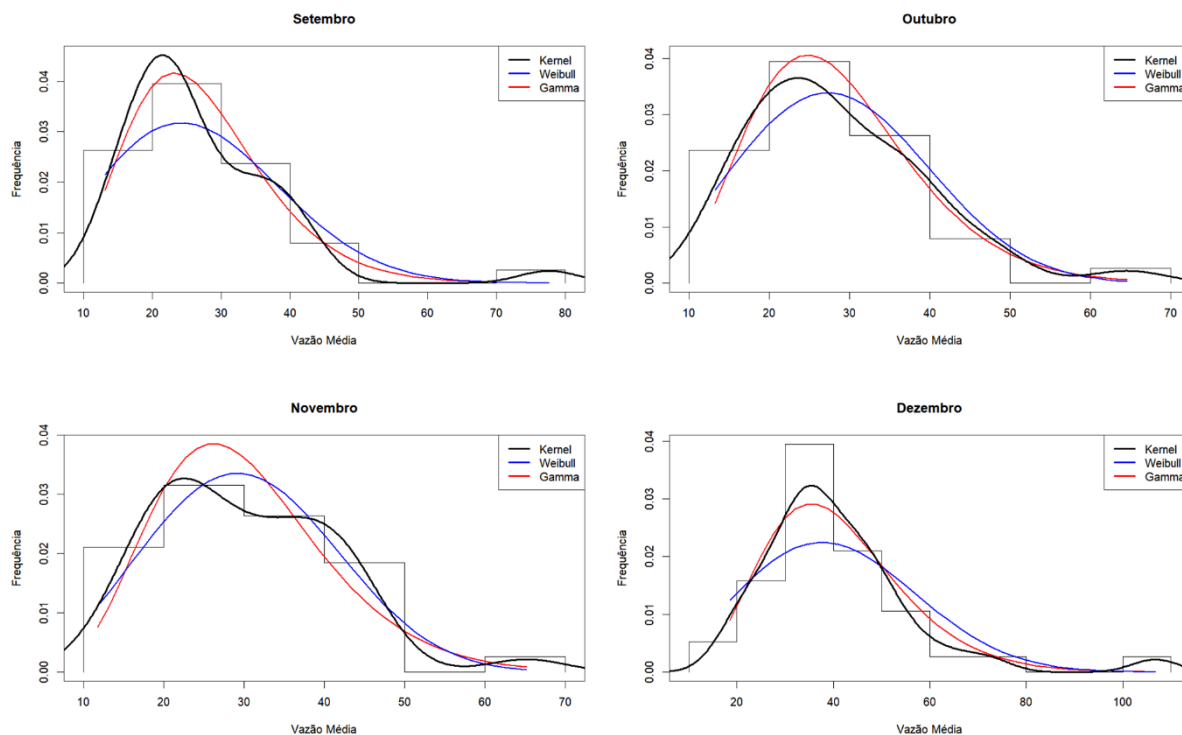
Analisando a Figura 13, a função de risco não tem um bom ajuste para dados com valores muito alto e meses de seca, mas como as figuras anteriores mostram um bom ajuste seguiremos com essa distribuição para os dados de precipitação máxima.

6.2.2 Vazão

A seguir faremos os mesmos ajustes para os dados de vazão segundo as distribuições Gamma e Weibull.

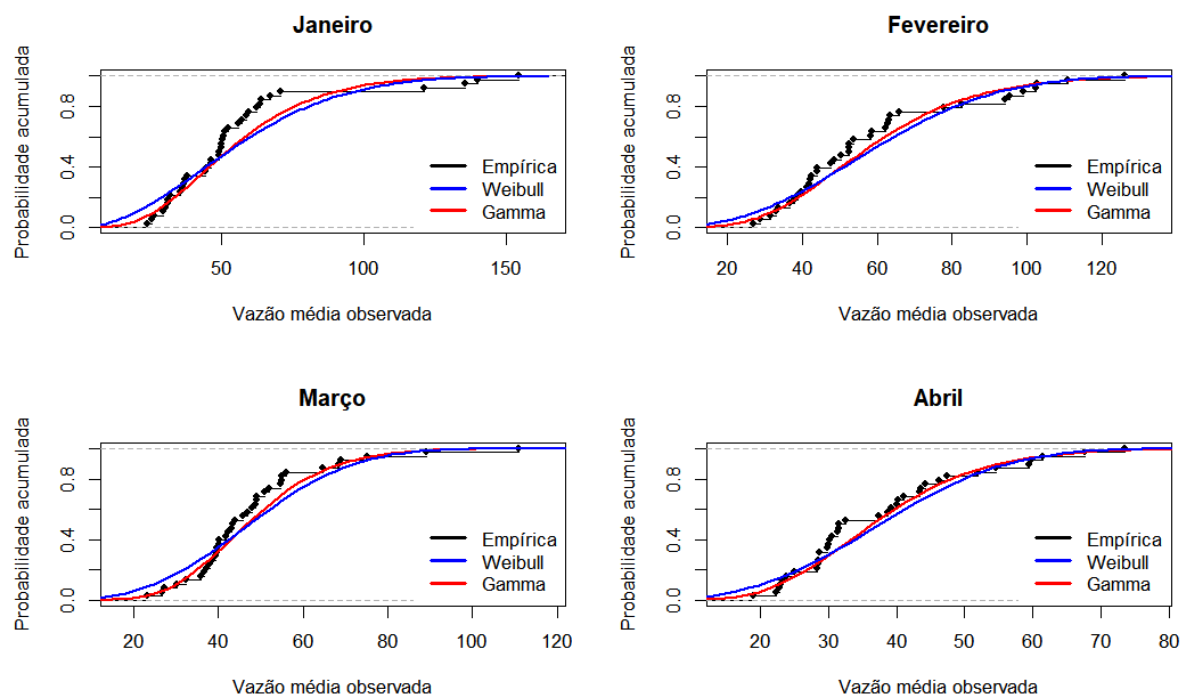
Figura 14: Histograma e comparação entre as funções densidade de probabilidade para os dados de vazão mensais

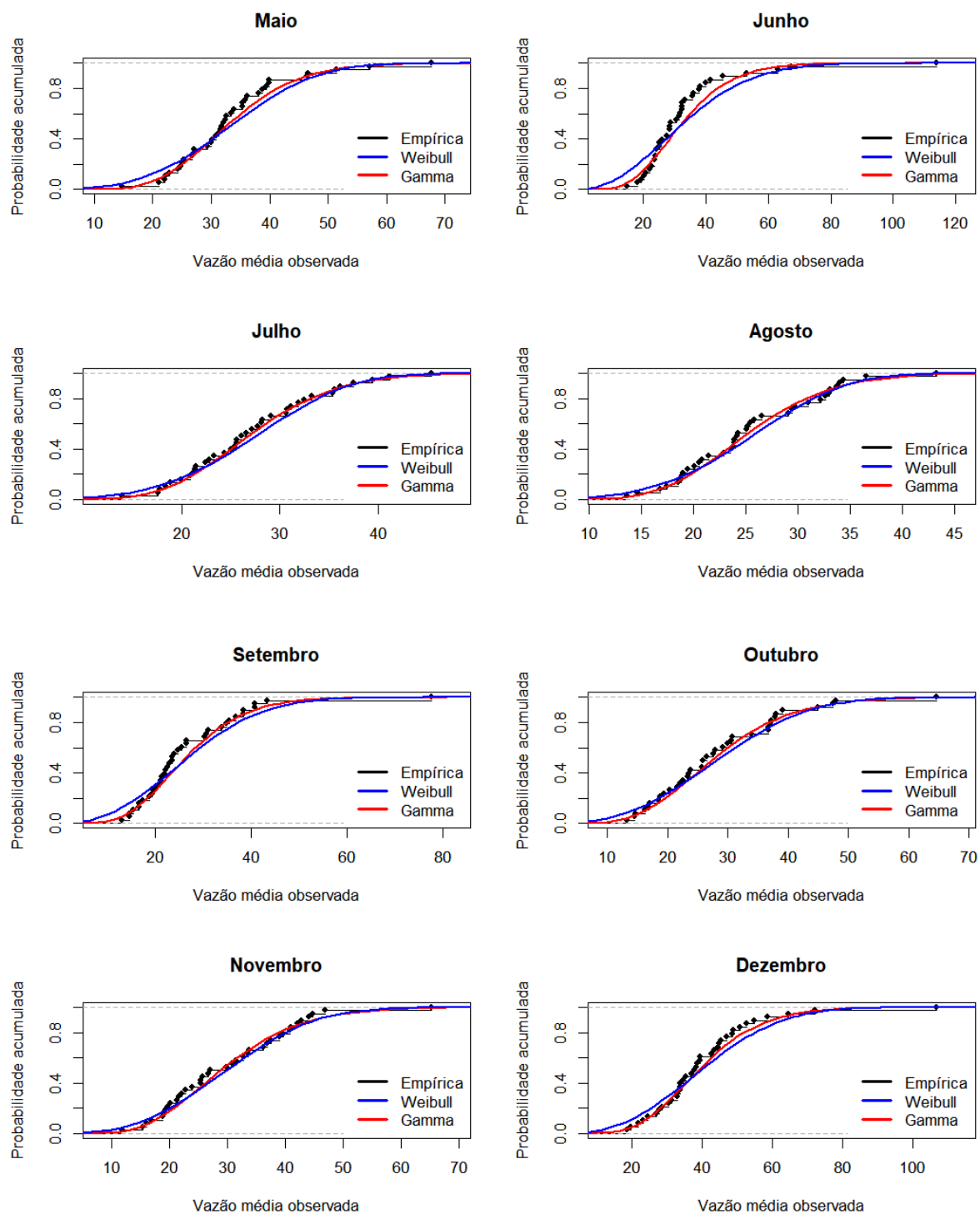




Fonte: Elaborado pelo autor.

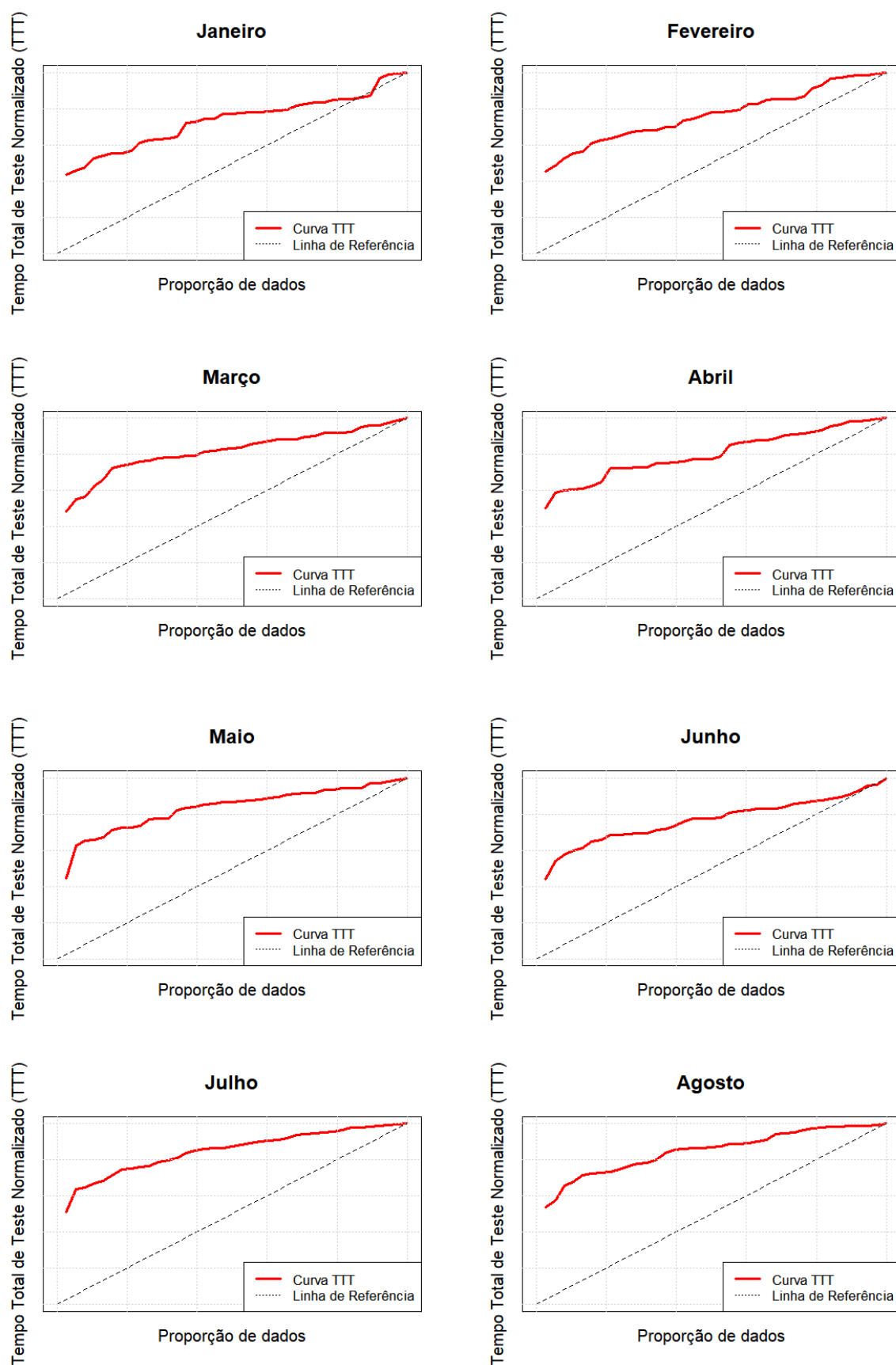
Figura 15: Comparação entre as funções densidade acumulada para os dados de vazão mensais

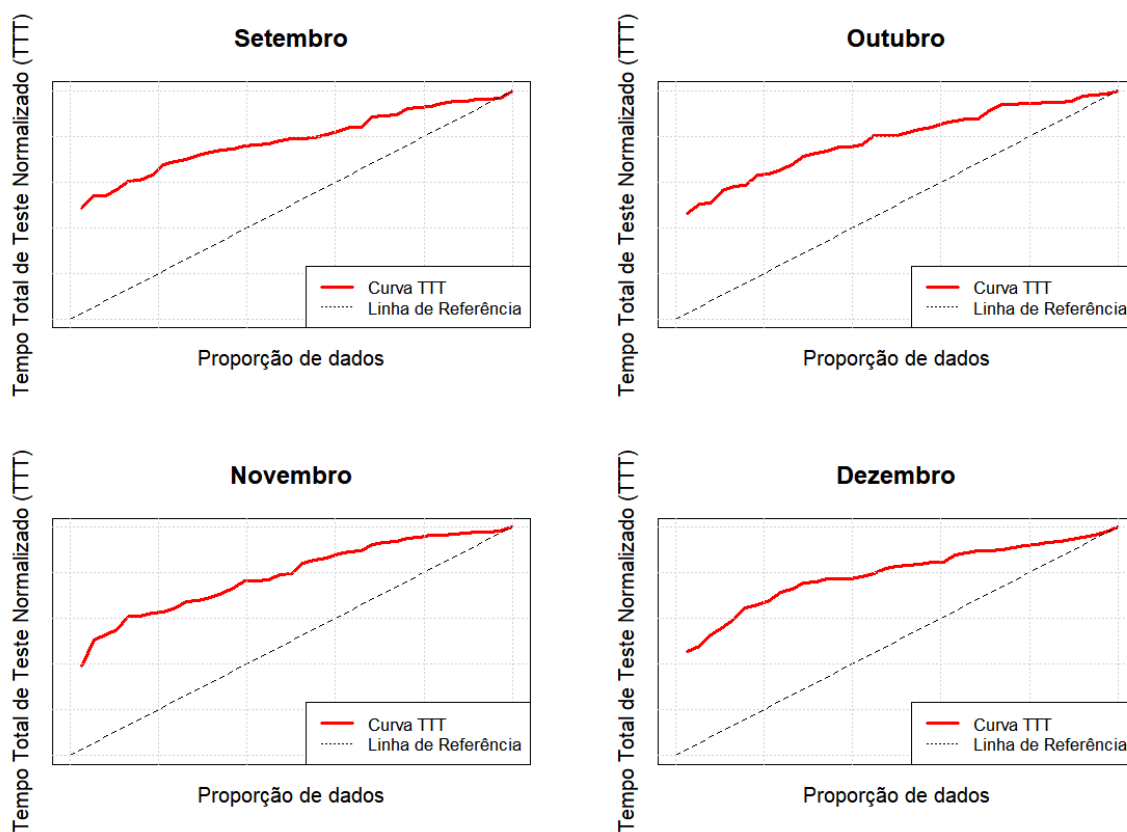




Fonte: Elaborado pelo autor.

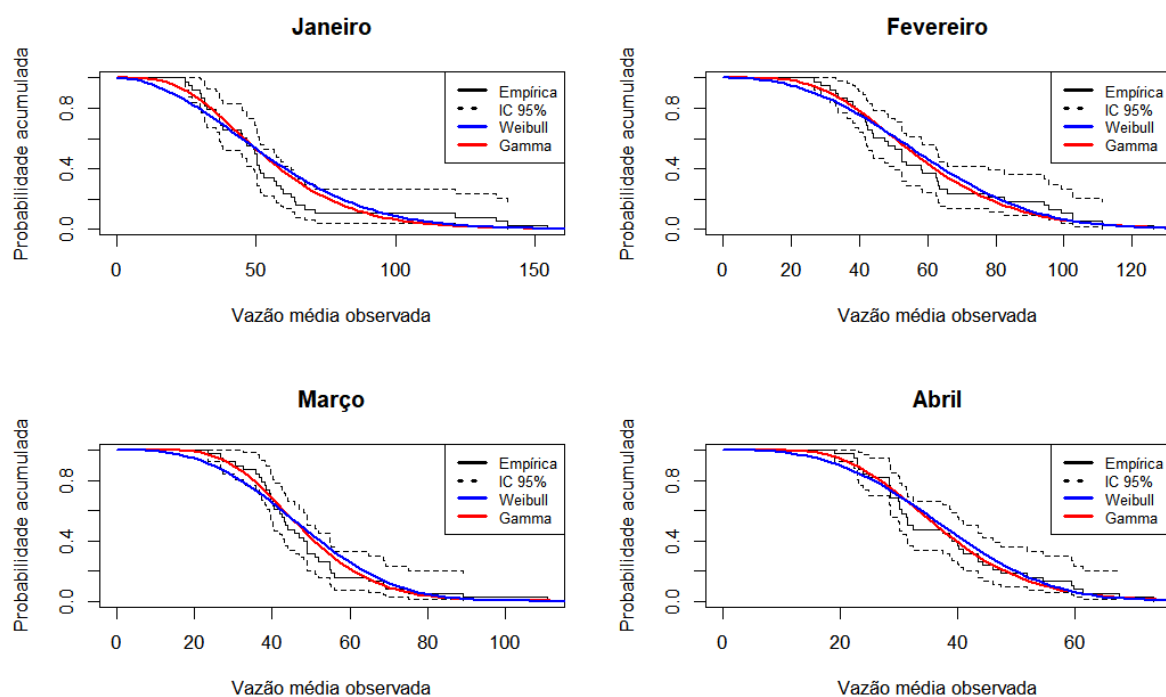
Figura 16: Gráfico de tempo total de teste para os dados de vazão mensais

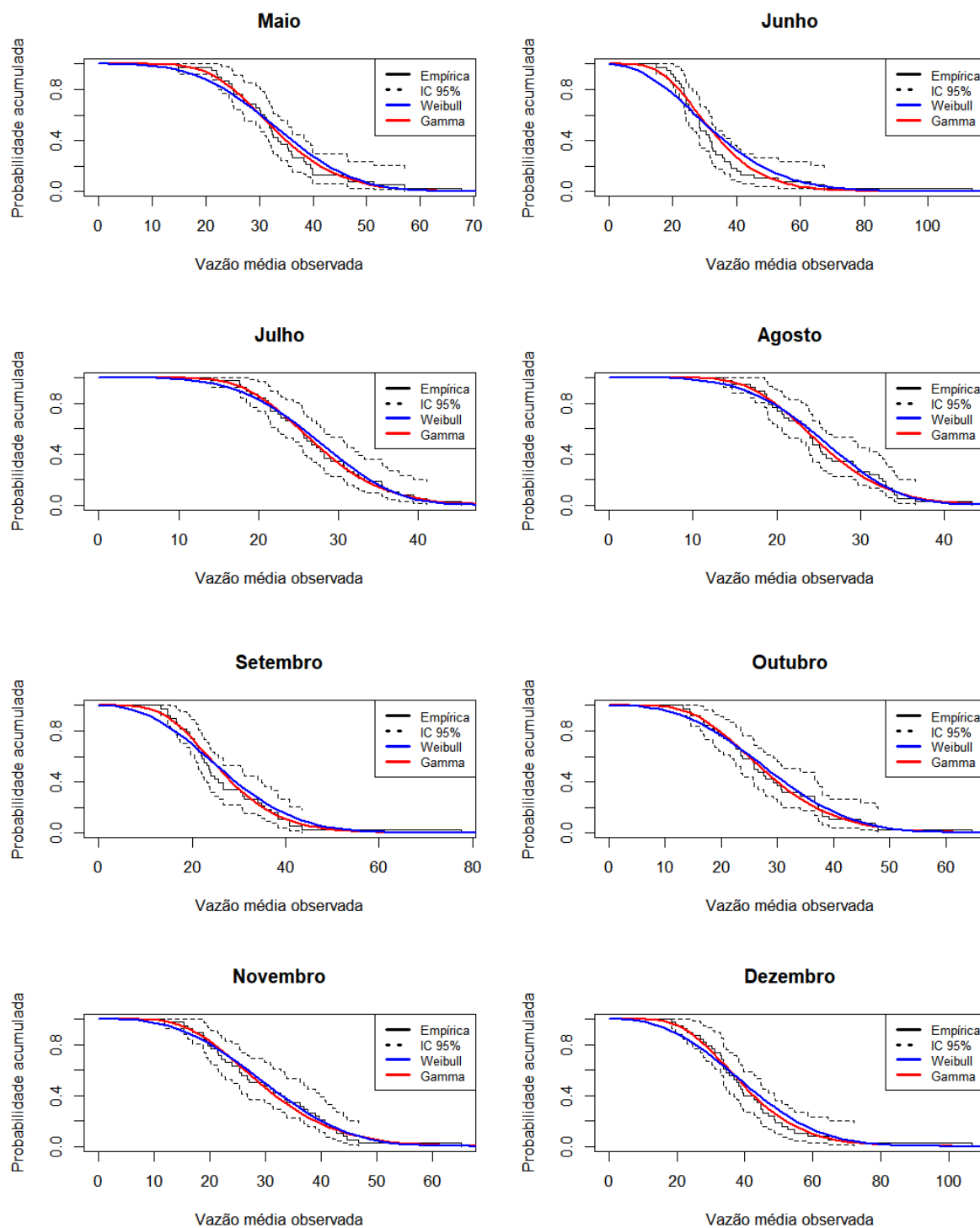




Fonte: Elaborado pelo autor.

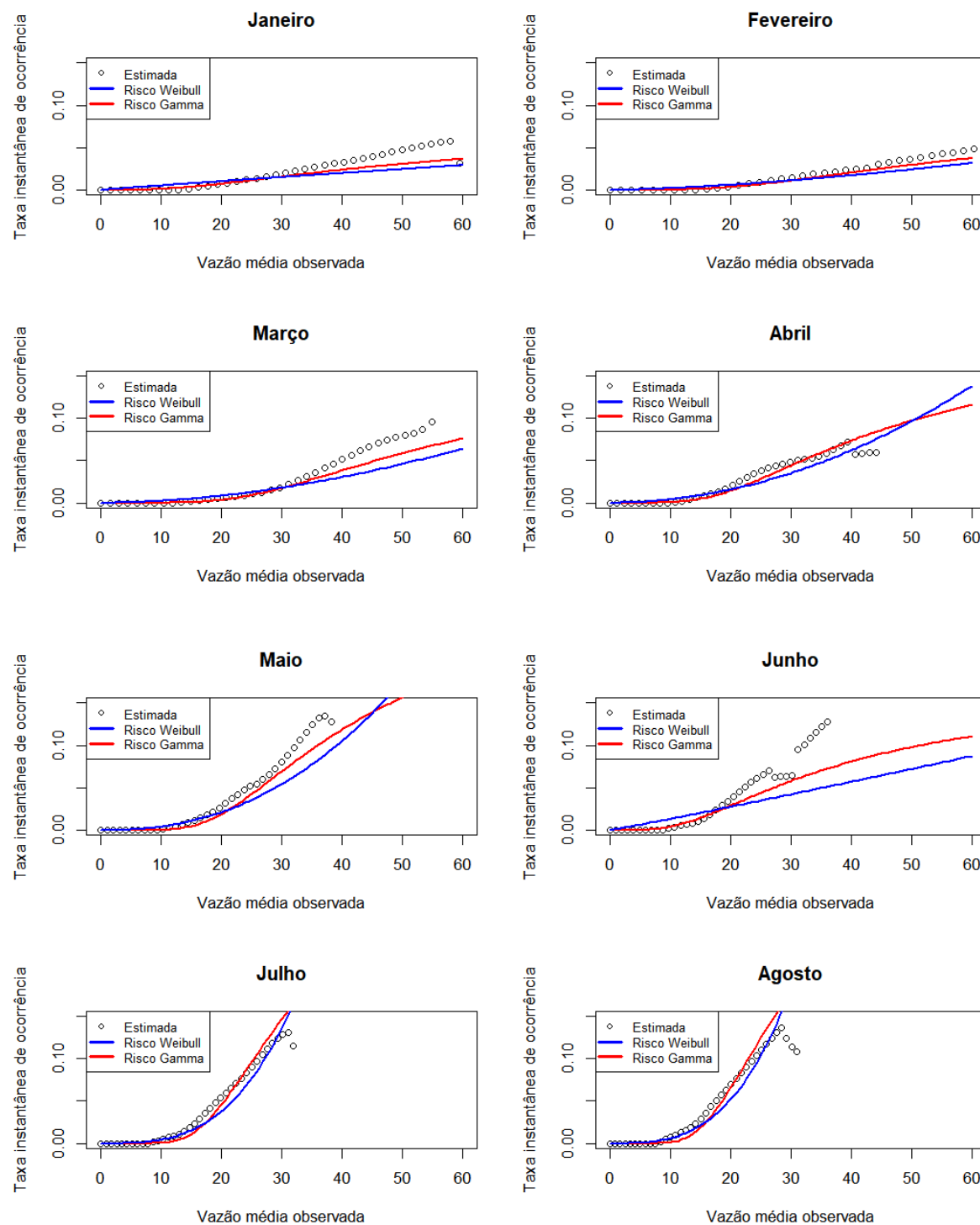
Figura 17: Ajuste e comparação das funções de sobrevivência para os dados de vazão

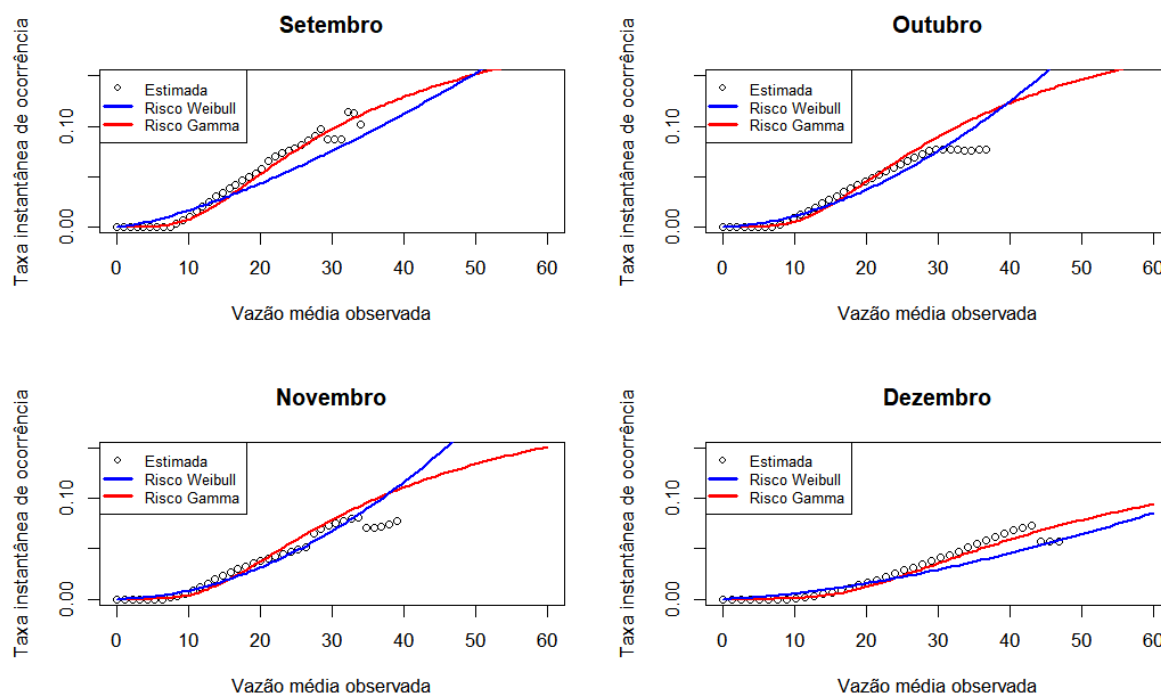




Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 18: Ajuste e comparação das funções de risco para os dados de vazão





Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com as Figuras 14 e 15, as distribuições Gamma e Weibull se ajustam bem aos dados. Além disso, a curva de risco apresentada no TTT-Plot (Figura 16) também é crescente, assim como as duas distribuições. No entanto, ao analisarmos a função de sobrevivência (Figura 17), percebemos que a curva da distribuição Weibull sai do intervalo de confiança. A curva de risco apresentada na Figura 18 mostra que a distribuição Gamma se ajusta melhor, enquanto a distribuição Weibull não segue o mesmo formato dos dados. Portanto, para a construção da distribuição conjunta, usaremos a distribuição Gamma como nossa marginal para os dados de vazão, descartando assim a distribuição Weibull.

6.3 Escolha da Copula

Utilizando as marginais selecionadas e os dados mensais no pacote “VineCopula”, o mesmo ajusta todas as copulas disponíveis pela estimação de máxima verossimilhança e por meio do AIC e BIC seleciona-se a copula que melhor se ajusta aos dados. Os resultados obtidos estão na Tabela 4.

Tabela 4: Copula selecionada para cada mês e o parâmetro estimado pelo pacote “VineCopula”.

Mês	Copula	θ_c	δ
Janeiro	Clayton	0.751071	0
Fevereiro	Rotated Tawn type 1 180 degrees	3.183486	0.191316
Março	Frank	3.25627	0
Abril	Frank	1.84198	0
Maio	Gaussian	0.344682	0
Junho	BB8	3.08716	0.799638
Julho	Rotated Tawn type 2 180 degrees	20	0.040335
Agosto	Survival Clayton	0.559199	0
Setembro	Survival Gumbel	1.684489	0
Outubro	Clayton	0.353076	0
Novembro	Survival Joe	1.534991	0
Dezembro	Survival Clayton	0.20432	0

Fonte: Elaborado pelo autor.

6.4 Inferência da Distribuição Conjunta

Com as copulas selecionadas usamos a estimação de máxima verossimilhança para estimar os parâmetros da nossa distribuição conjunta pelo comando “optim” e com isso obtivemos seus estimadores (Tabela 5), seus desvios (Tabela 6) e seus intervalos de confiança (Tabela 7).

Tabela 5: Estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros de interesse da distribuição conjunta via copula.

Mês	$\hat{\phi}$	$\hat{\phi}$	$\hat{k}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\theta}_c$	$\hat{\delta}$
Janeiro	26.06265	9.097	4.54785	0.081739	0.86395	-
Fevereiro	22.65344	8.509861	6.07138	0.103353	30	0.039798
Março	22.11975	8.431356	9.967911	0.206839	3.454697	-
Abril	18.67297	10.10151	8.866329	0.235779	1.902248	-
Maio	17.10031	9.655998	11.85927	0.354286	0.342884	-
Junho	9.456512	9.166217	6.313298	0.188746	3.102591	0.811604
Julho	5.830679	6.724558	14.99019	0.551921	20.00002	0.047954
Agosto	6.38909	8.102527	15.18464	0.601124	0.549714	-
Setembro	13.61831	9.902239	7.076905	0.258649	1.71767	-
Outubro	19.16801	8.730983	7.589565	0.265532	0.361276	-
Novembro	22.04869	8.726321	7.807412	0.259782	1.532879	-
Dezembro	25.16257	9.401886	7.68299	0.188986	0.208942	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6: Desvio padrão para os parâmetros de interesse da distribuição conjunta via copula.

Mês	$s(\phi)$	$s(\varphi)$	$s(k)$	$s(\theta)$	$s(\theta_c)$	$s(\delta)$
Janeiro	1.548704	1.243801	0.998723	0.018959	0.409015	-
Fevereiro	1.455617	1.027942	0.521296	0.009699	40.32286	0.014167
Março	1.422364	1.088557	2.211185	0.046951	1.129217	-
Abril	1.720401	1.254894	1.986526	0.054094	1.019933	-
Maio	1.657942	1.182822	2.701966	0.082491	0.147481	-
Junho	1.531336	1.279984	1.339537	0.042	2.522412	0.324902
Julho	1.135188	0.923331	3.407383	0.126605	24.61623	0.022424
Agosto	1.374348	1.094398	3.334045	0.133496	0.261625	-
Setembro	1.658345	1.294387	1.553647	0.059453	0.260726	-
Outubro	1.498247	1.086229	1.686756	0.060989	0.253457	-
Novembro	1.476459	1.053496	1.670641	0.057429	0.289901	-
Dezembro	1.606779	1.177493	1.741818	0.044293	0.178976	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7: Intervalo de confiança para os parâmetros de interesse da distribuição conjunta via copula.

Mês	LI $\hat{\phi}$	LS $\hat{\phi}$	LI $\hat{\varphi}$	LS $\hat{\varphi}$	LI $\hat{k}$	LS $\hat{k}$
Janeiro	23.02719	29.09811	6.659149	11.53485	2.590353	6.505348
Fevereiro	19.80043	25.50645	6.495094	10.52463	5.04964	7.093119
Março	19.33191	24.90758	6.297784	10.56493	5.633989	14.30183
Abril	15.30098	22.04495	7.641919	12.5611	4.972737	12.75992
Maio	13.85075	20.34988	7.337667	11.97433	6.563414	17.15512
Junho	6.455093	12.45793	6.65745	11.67499	3.687805	8.938791
Julho	3.605711	8.055648	4.914829	8.534287	8.311721	21.66866
Agosto	3.695369	9.082812	5.957507	10.24755	8.649909	21.71936
Setembro	10.36795	16.86866	7.365241	12.43924	4.031757	10.12205
Outubro	16.23145	22.10458	6.601974	10.85999	4.283523	10.89561
Novembro	19.15483	24.94255	6.661468	10.79117	4.532957	11.08187
Dezembro	22.01328	28.31185	7.093999	11.70977	4.269026	11.09695

Mês	LI $\hat{\theta}$	LS $\hat{\theta}$	LI $\hat{\theta}_c$	LS $\hat{\theta}_c$	LI $\hat{\delta}$	LS $\hat{\delta}$
Janeiro	0.044579	0.118898	0.062279	1.66562	-	-
Fevereiro	0.084344	0.122363	-49.0328	109.0328	0.012031	0.067565
Março	0.114815	0.298862	1.241432	5.667962	-	-
Abril	0.129754	0.341803	-0.09682	3.901315	-	-
Maio	0.192604	0.515968	0.053822	0.631946	-	-
Junho	0.106426	0.271067	-1.84134	8.046519	0.174796	1.448412
Julho	0.303775	0.800068	-28.2478	68.24783	0.004002	0.091906
Agosto	0.339471	0.862777	0.036929	1.062499	-	-
Setembro	0.142121	0.375178	1.206646	2.228693	-	-
Outubro	0.145994	0.385071	-0.1355	0.858052	-	-

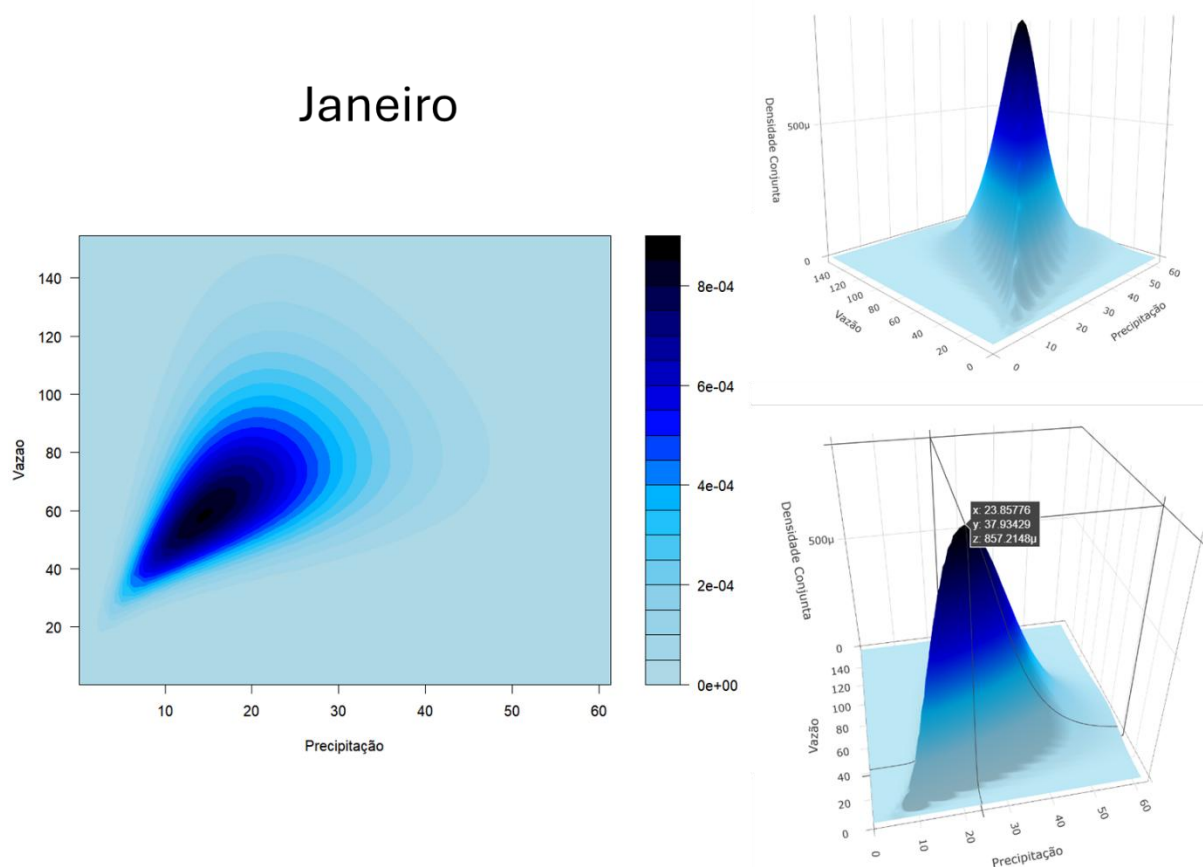
Mês	LI $\hat{\theta}$	LS $\hat{\theta}$	LI $\hat{\theta}_c$	LS $\hat{\theta}_c$	LI $\hat{\delta}$	LS $\hat{\delta}$
Novembro	0.147221	0.372344	0.964673	2.101086	-	-
Dezembro	0.102171	0.2758	-0.14185	0.559734	-	-

Fonte: Elaborado pelo autor.

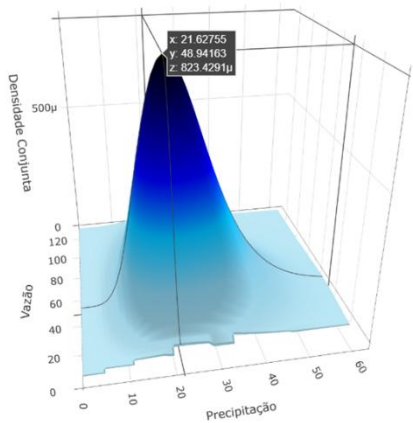
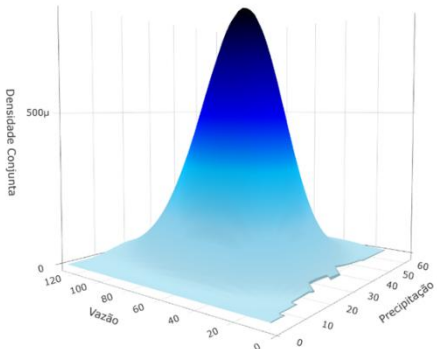
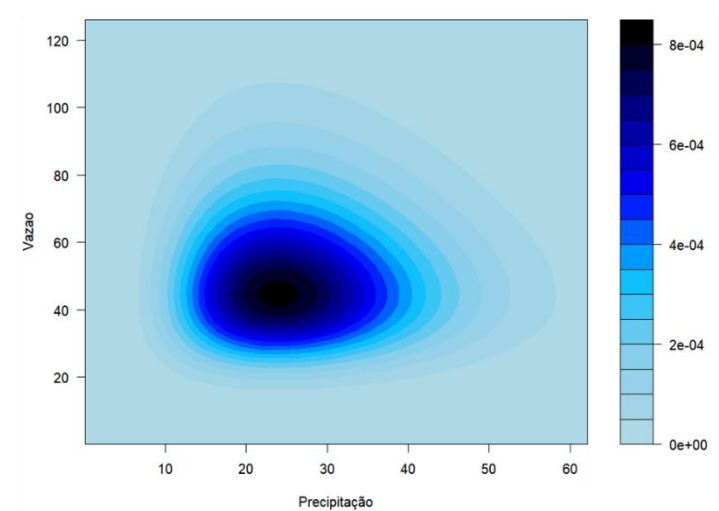
6.5 Visualização da Distribuição Conjunta

Usando as distribuições marginais, as copulas selecionadas e os estimadores calculados para cada parâmetro criamos a Figura 19 que ilustra a análise da dependência entre variáveis de precipitação e vazão, por meio da função de densidade conjunta. A esquerda representa as curvas de nível, indicando as regiões com maior concentração de densidade para a combinação dessas variáveis, com maior intensidade de cor nas áreas de maior densidade. As imagens à direita exibem a mesma função de densidade conjunta em um gráfico tridimensional, oferecendo uma visualização em relevo que facilita a identificação das áreas de maior densidade.

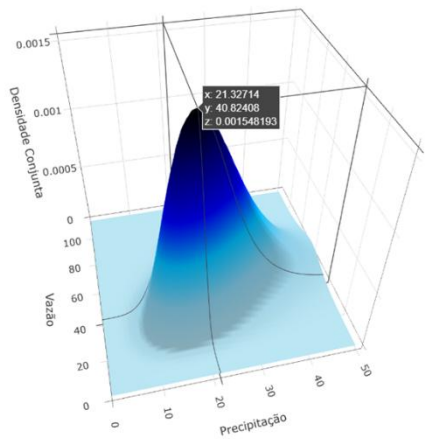
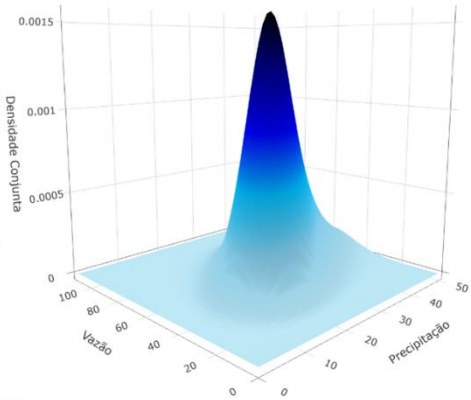
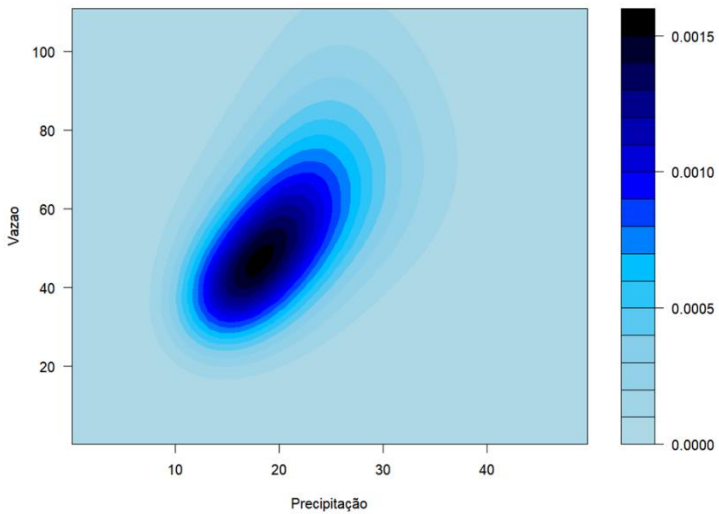
Figura 19: Gráfico de contorno e de perspectiva 3D da distribuição conjunta via copula para cada mês



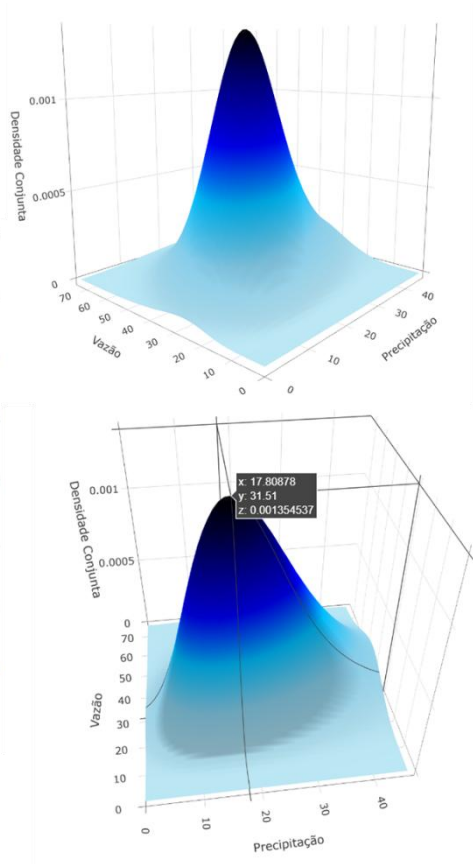
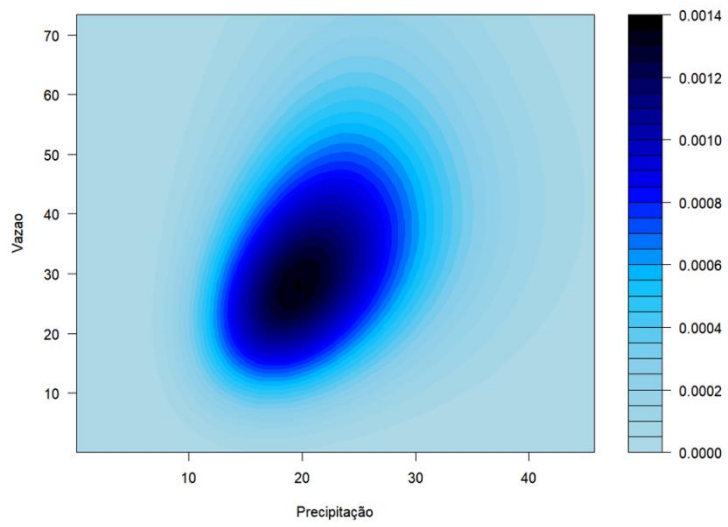
Fevereiro



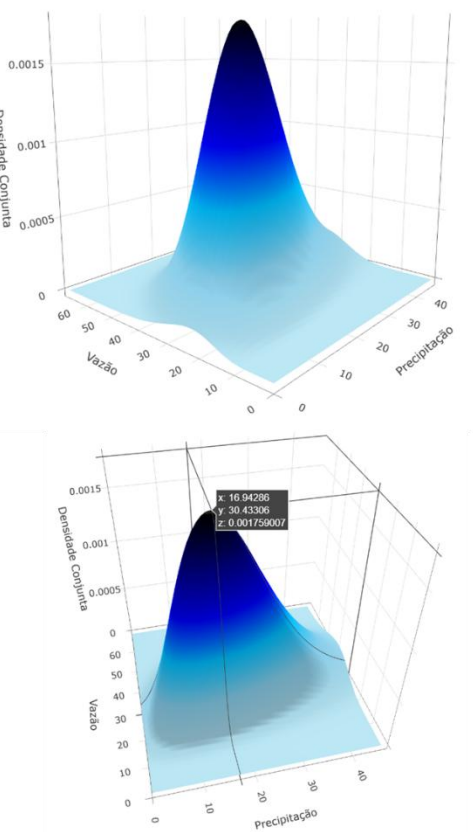
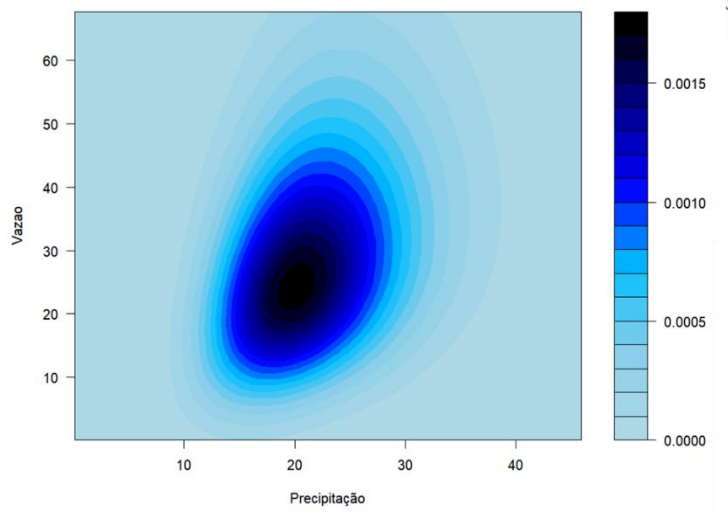
Março



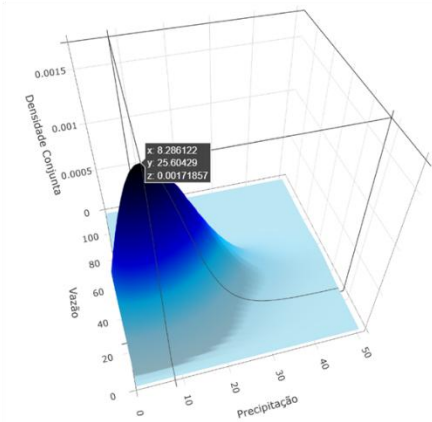
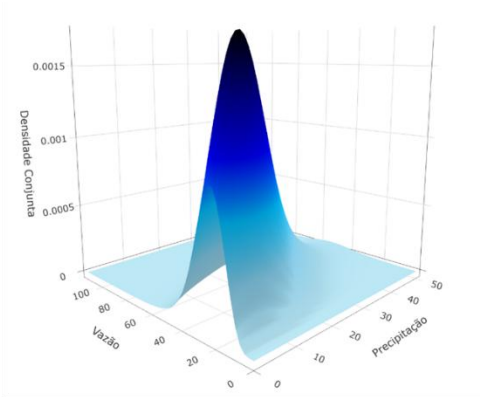
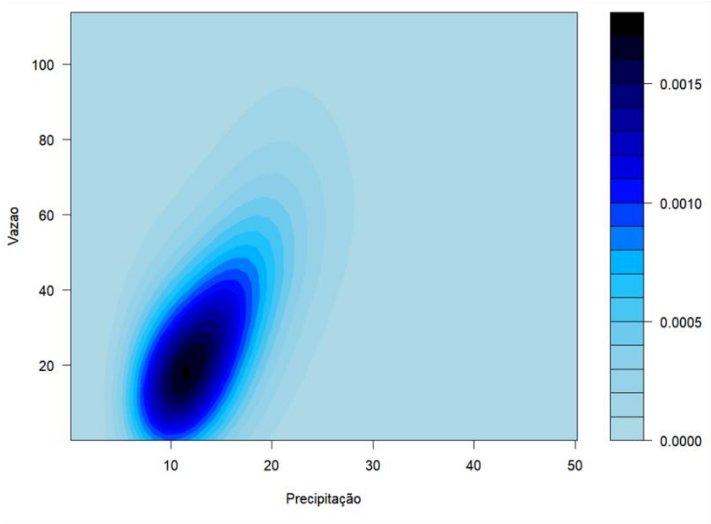
Abril



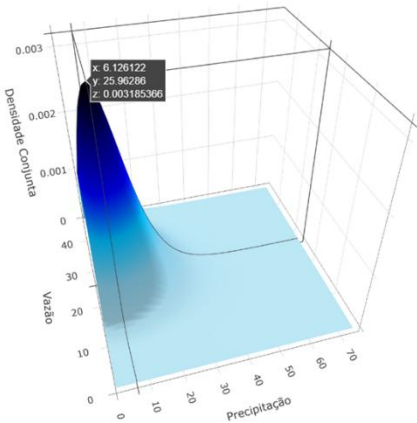
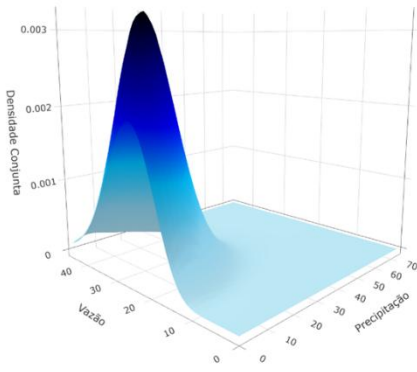
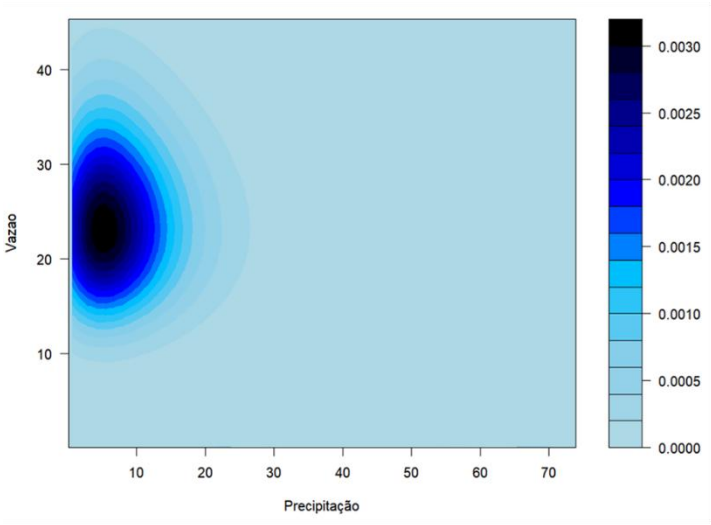
Maio



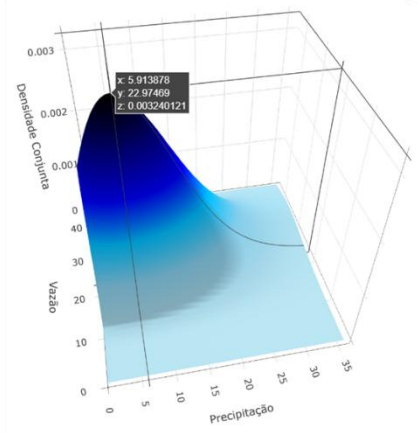
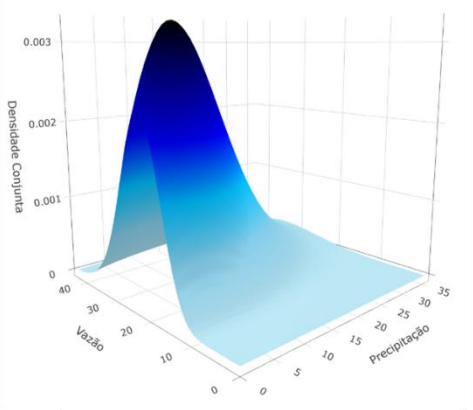
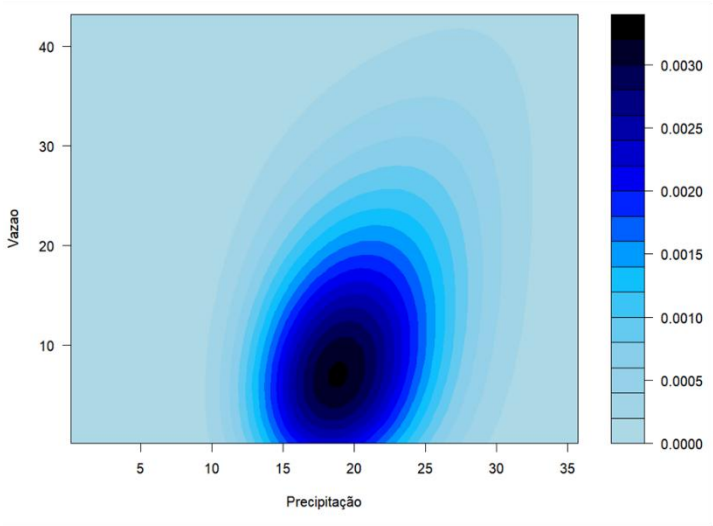
Junho



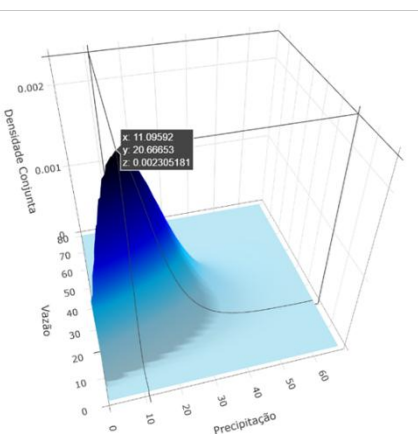
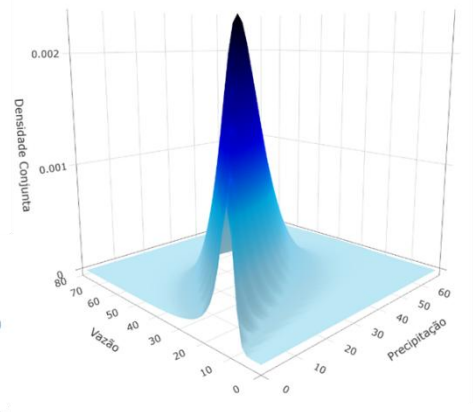
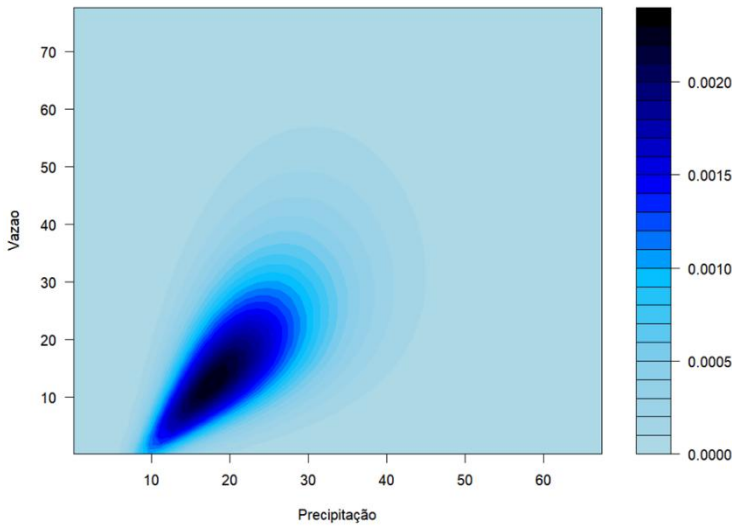
Julho



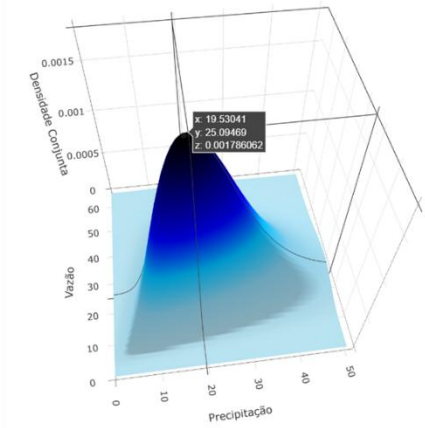
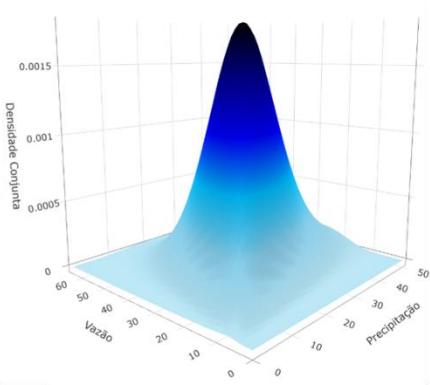
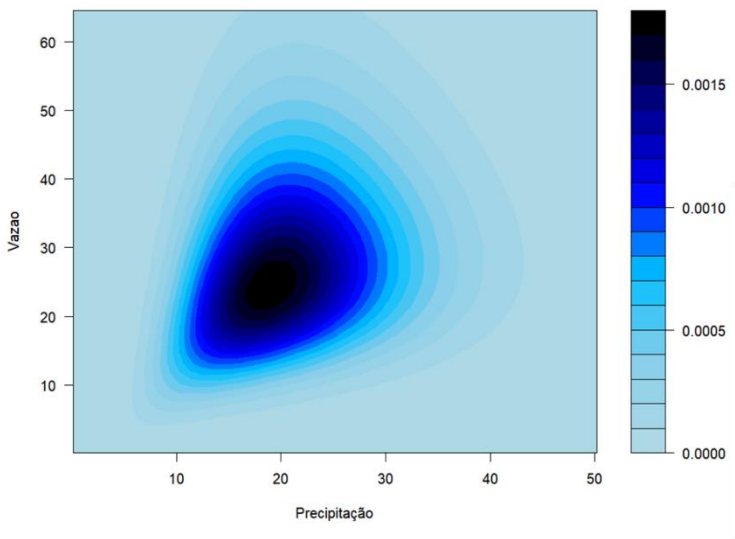
Agosto



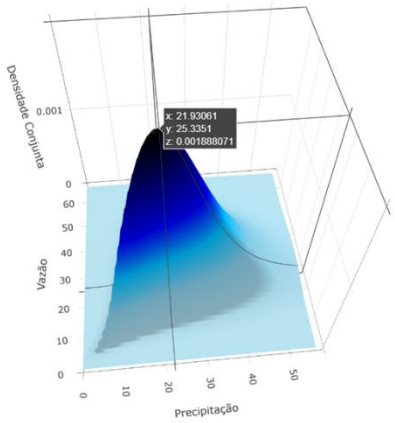
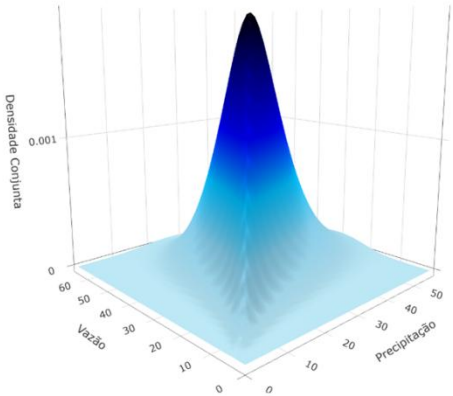
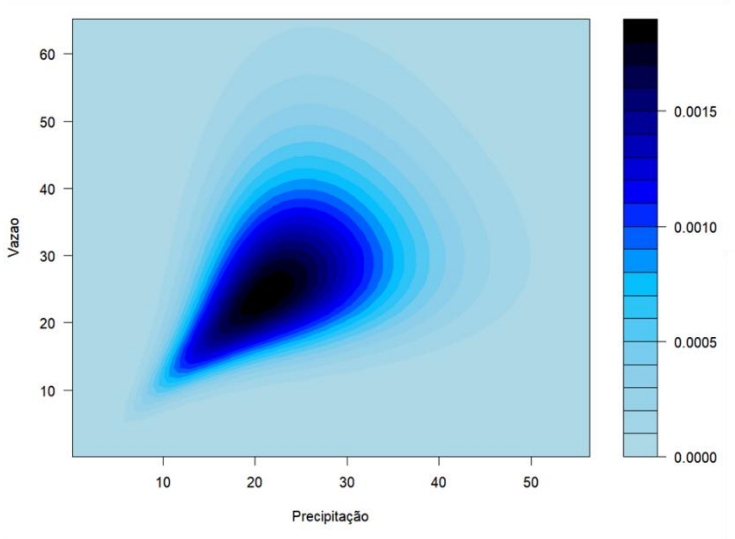
Setembro



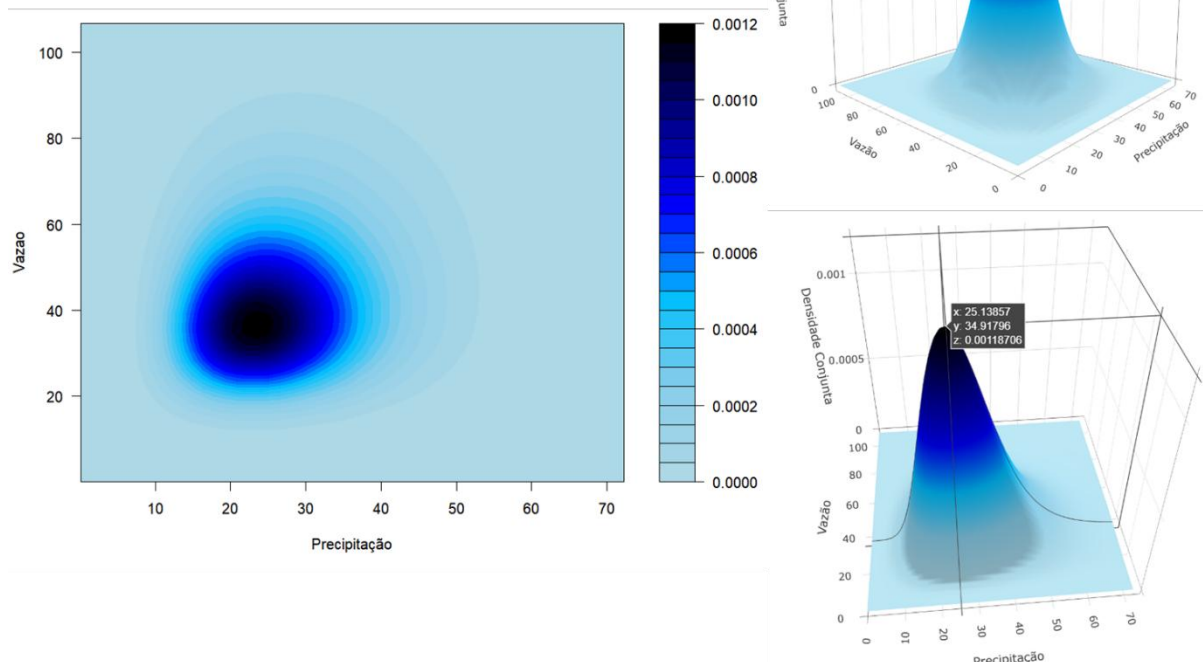
Outubro



Novembro



Dezembro



Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando a Figura 19 conseguimos perceber que há uma dependência clara entre precipitação e vazão. Quando a precipitação aumenta, é mais provável que a vazão do rio também aumente e isso é mostrado pelas regiões de alta densidade no gráfico, onde valores elevados de precipitação estão associados a valores elevados de vazão.

Nos meses de fevereiro, março, abril, maio, outubro e dezembro as áreas mais escuras do gráfico de contorno estão concentradas no centro o que indica que a probabilidade dos eventos terem valores moderados é maior, que significa que eventos de valores extremos tem probabilidade mais baixa de ocorrer.

Já nos meses de janeiro, junho julho, agosto, setembro e novembro as áreas mais escuras do gráfico de contorno estão concentradas em direção ao canto inferior esquerdo, ou seja, os valores mais prováveis de ocorrerem estão em níveis baixos tanto de precipitação quanto de vazão, sugerindo que, nesses meses, os eventos de baixa precipitação e baixa vazão são mais frequentes.

Dito isso as cópulas escolhidas para esse trabalho proporcionam dependência assimétrica entre precipitação e vazão. Isso significa que a relação é mais evidente quando uma das variáveis está em valores extremos (geralmente altos), mas não é igualmente forte em todas as direções. Por exemplo, chuvas muito fortes podem causar vazões altas, mas vazões altas nem sempre estão associadas a chuvas intensas (podem ser influenciadas por outros fatores, como o escoamento acumulado).

7 CONSIDERAÇÕES

Este trabalho teve como objetivo construir distribuições conjuntas por meio de cópulas para dados reais, permitindo-nos estudar a relação entre as variáveis de vazão e precipitação no rio Aguapeí. Com isso, foi possível calcular a probabilidade de a vazão do rio atingir um determinado valor dado que a precipitação atingiu x (Tabela 8), ou calcular a probabilidade dos eventos ocorrerem simultaneamente (Tabela 9). Essas análises fornecem uma visão detalhada sobre a dependência entre essas variáveis, permitindo interpretar os impactos das chuvas no comportamento da vazão do rio.

Esse estudo contribui para uma melhor compreensão da influência mútua entre essas variáveis, possibilitando que, com o conhecimento das variações da vazão do rio, as pessoas possam se planejar para atividades como a pesca e a irrigação de plantações. Além disso, essa análise pode auxiliar na tomada de decisões quanto à segurança de pessoas e de gado próximo ao rio em determinados períodos.

Como sugestão para trabalhos futuros, propomos a utilização de dados máximos diários para ambas as variáveis. Isso permitiria capturar com maior precisão os eventos extremos, como enchentes e secas severas. Além disso, recomenda-se a separação dos dados com base nos fenômenos climáticos El Niño e La Niña, o que possibilitaria a construção de distribuições específicas para cenários climáticos distintos, refletindo melhor as condições reais e aprimorando as previsões e o planejamento.

Tabela 8: Probabilidade condicional.

	Mês	Vazão = 40	Vazão = 50	Vazão = 60	Vazão = 70	Vazão = 80
Precipitação = 30	Janeiro	0,555715713	0,382917232	0,252466452	0,161335842	0,10054057
	Fevereiro	0,769288931	0,591926294	0,417773537	0,273745323	0,16845112
	Março	0,578956722	0,287715776	0,117062202	0,04339882	0,015076206
	Abril	0,321266833	0,121861489	0,038917757	0,010841916	0,002686057
	Maio	0,187597316	0,039078419	0,005674896	0,000627937	5,63E-05
	Junho	0,224386456	0,075738527	0,022926112	0,006721041	0,001894337
	Julho	0,045711503	0,003335413	0,000150223	4,77E-06	1,16E-07
	Agosto	0,011772891	0,000160911	7,36E-07	1,76E-09	2,74E-12
	Setembro	0,07525816	0,01522451	0,00260994	0,00039906	5,60E-05
	Outubro	0,123651375	0,03146591	0,006565545	0,001180153	0,000189146
	Novembro	0,140045438	0,038685201	0,00879351	0,001720155	0,000299362
	Dezembro	0,425628699	0,196258928	0,074214871	0,023914166	0,006764603

	Mês	Vazão = 40	Vazão = 50	Vazão = 60	Vazão = 70	Vazão = 80
Precipitação = 40	Janeiro	0,649828817	0,477475057	0,331059873	0,219362388	0,140117899
	Fevereiro	0,772353304	0,596689677	0,423448466	0,279360757	0,17329811
	Março	0,647575377	0,369090753	0,171039905	0,06855449	0,024673632
	Abril	0,357448803	0,14252747	0,046666395	0,013119658	0,003259212
	Maio	0,211761876	0,047947124	0,007612945	0,000923047	9,08E-05
	Junho	0,257391055	0,097992468	0,032360927	0,009853998	0,002813381
	Julho	0,045874294	0,003347291	0,000150758	4,79E-06	1,17E-07
	Agosto	0,016116373	0,000296643	1,52E-06	3,70E-09	5,77E-12
	Setembro	0,095639935	0,021050127	0,003826735	0,000609439	8,81E-05
	Outubro	0,131938668	0,03373573	0,007048038	0,001267224	0,000203111
	Novembro	0,159836532	0,044608195	0,01016878	0,001990498	0,000346457
	Dezembro	0,444375408	0,212694382	0,08404777	0,028377261	0,008404983
Precipitação = 50	Janeiro	0,679339934	0,509900027	0,359969206	0,241817519	0,155975374
	Fevereiro	0,773132695	0,597901193	0,424891825	0,280788984	0,174530892
	Março	0,668988302	0,398482787	0,194202719	0,080747069	0,029616952
	Abril	0,373157259	0,152253937	0,050476179	0,014258287	0,003547169
	Maio	0,223881769	0,053021209	0,008868387	0,001137925	0,000118737
	Junho	0,269694267	0,10761019	0,037062045	0,011535163	0,003320142
	Julho	0,04592945	0,003351316	0,000150939	4,79E-06	1,17E-07
	Agosto	0,019124049	0,00048597	2,98E-06	7,55E-09	1,18E-11
	Setembro	0,106458145	0,024821093	0,004738113	0,000784204	0,000116846
	Outubro	0,134677467	0,034490749	0,007208802	0,001296247	0,000207766
	Novembro	0,166504455	0,046658843	0,010648703	0,002085015	0,000362928
	Dezembro	0,457160584	0,224773244	0,091938212	0,032308584	0,009989073
Precipitação = 60	Janeiro	0,68889989	0,520721415	0,369860018	0,249646125	0,161577976
	Fevereiro	0,773359523	0,598253784	0,425311889	0,281204644	0,174889671
	Março	0,675502499	0,407809374	0,202003235	0,085064655	0,031417373
	Abril	0,379325161	0,156208253	0,052056789	0,014734473	0,00366789
	Maio	0,229422593	0,055594316	0,009572289	0,001270551	0,000137665
	Junho	0,273955572	0,111117811	0,038883084	0,012210871	0,003526836
	Julho	0,04594648	0,003352558	0,000150995	4,79E-06	1,17E-07
	Agosto	0,020660565	0,00069237	5,56E-06	1,51E-08	2,38E-11
	Setembro	0,111471612	0,026865746	0,005303687	0,000904781	0,00013834
	Outubro	0,135559299	0,03473437	0,007260705	0,001305618	0,000209269
	Novembro	0,168659536	0,047328355	0,01080587	0,002115989	0,000368326
	Dezembro	0,464095025	0,231796867	0,096938424	0,035050974	0,011209756

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 9: Probabilidade conjunta (Precipitação > X , Vazão > Y)

	Mês	Vazão = 40	Vazão = 50	Vazão = 60	Vazão = 70	Vazão = 80
Precipitação = 30	Janeiro	0,767756	0,677428	0,609237	0,5616	0,52982
	Fevereiro	0,84868	0,73235	0,618126	0,52366	0,454599

	Mês	Vazão = 40	Vazão = 50	Vazão = 60	Vazão = 70	Vazão = 80
Precipitação = 30	Março	0,715707	0,519057	0,40383	0,354091	0,334968
	Abril	0,510013	0,366059	0,306181	0,285913	0,280025
	Maio	0,375419	0,261237	0,235556	0,231675	0,231236
	Junho	0,302624	0,16897	0,121485	0,106914	0,102574
	Mês	Vazão = 40	Vazão = 50	Vazão = 60	Vazão = 70	Vazão = 80
	Julho	0,071581	0,030354	0,027255	0,027113	0,027109
	Agosto	0,063963	0,052964	0,052812	0,052812	0,052812
	Setembro	0,236207	0,186622	0,176203	0,174377	0,174094
	Outubro	0,343735	0,274701	0,256054	0,252021	0,251279
	Novembro	0,424734	0,356929	0,336933	0,332201	0,331251
	Dezembro	0,684081	0,557921	0,490794	0,463127	0,453694
Precipitação = 40	Janeiro	0,717879	0,579019	0,461057	0,371066	0,307222
	Fevereiro	0,800152	0,645939	0,493852	0,367359	0,274248
	Março	0,687412	0,440405	0,264741	0,17384	0,134919
	Abril	0,430726	0,240314	0,155385	0,125664	0,116928
	Maio	0,282004	0,132787	0,096047	0,089953	0,089195
	Junho	0,283445	0,129639	0,06631	0,044593	0,0378
	Julho	0,051783	0,009519	0,006343	0,006197	0,006193
	Agosto	0,031533	0,015961	0,01567	0,015669	0,015669
	Setembro	0,156488	0,086917	0,070853	0,067852	0,067366
	Outubro	0,208236	0,118664	0,094322	0,089049	0,088079
	Novembro	0,260645	0,159243	0,128935	0,121738	0,120292
	Dezembro	0,547977	0,359495	0,254836	0,209546	0,193298
Precipitação = 50	Janeiro	0,70161	0,543938	0,404421	0,294475	0,214594
	Fevereiro	0,782075	0,613751	0,447561	0,309138	0,207069
	Março	0,680896	0,420121	0,223189	0,113815	0,064524
	Abril	0,400736	0,189552	0,092252	0,057628	0,047388
	Maio	0,249177	0,083885	0,041171	0,033693	0,032707
	Junho	0,278403	0,118252	0,048545	0,023322	0,015205
	Julho	0,047268	0,00475	0,001554	0,001408	0,001403
	Agosto	0,023623	0,00507	0,004589	0,004586	0,004586
	Setembro	0,128844	0,049253	0,029673	0,025818	0,025167
	Outubro	0,159635	0,062338	0,035843	0,030101	0,029044
	Novembro	0,199695	0,084622	0,050046	0,041823	0,04017
	Dezembro	0,494485	0,278077	0,154375	0,098845	0,078061
Precipitação = 60	Janeiro	0,696271	0,532077	0,38479	0,267424	0,181443
	Fevereiro	0,776157	0,603212	0,432404	0,290075	0,185072
	Março	0,679113	0,414399	0,210883	0,095245	0,042195
	Abril	0,389616	0,170199	0,067774	0,031071	0,020188
	Maio	0,238434	0,066638	0,021154	0,01295	0,01183
	Junho	0,276875	0,114692	0,042748	0,016183	0,007534
	Julho	0,046249	0,003669	0,000468	0,000322	0,000317

	Mês	Vazão = 40	Vazão = 50	Vazão = 60	Vazão = 70	Vazão = 80
Precipitação = 60	Agosto	0,02197	0,002029	0,001343	0,001337	0,001337
	Setembro	0,119646	0,035818	0,014455	0,010096	0,009337
	Outubro	0,14357	0,043679	0,01646	0,01056	0,009474
	Novembro	0,17933	0,059557	0,023503	0,014925	0,013199
	Dezembro	0,477113	0,250458	0,118875	0,058491	0,035229

Fonte: Elaborado pelo autor.

8 REFERÊNCIAS

Achcar, J.A., Moala, F.A., Tarumoto, M.H.; Coladello, L.F. **A Bivariate Generalized Exponential Distribution Derived From Copula Functions in the Presence of Censored Data and Covariates**. Pesquisa Operacional, 35, 165-186, 2015.

JOE, H. **Multivariate Models and Dependence Concepts**, Editora Chapman & Hall, Londres, 1997.

Nelsen, R.B. **An Introduction to Copulas**. 2nd ed. Springer, 272 pp, 2006.

Salvadori, G.; De Michele, C.; Kottegoda, N. T.; Rosso, R. **Extremes in Nature: An Approach Using Copulas**. Springer, 292 pp, 2007.

Sklar, A. **Fonctions de repartition à n-dimensions et leurs marges**, Inst. Stat. University Paris, 8, 229-231, 1959.

Almeida, F. Disponível: <https://repositorio.unifesp.br/handle/11600/61550>. Acesso em: 05 nov. 2023.

TORRES, F. T. P., MACHADO, P. J. de O. **Introdução à climatologia**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

Cabral Júnior, R. G., & Lucena, D. A. (2021). **Variabilidade da precipitação e temperatura do ar no semiárido do Nordeste do Brasil**. Revista de Estudos Climáticos, 13(24), 169-183. DOI: 10.30612/rel. v13i24.181.

NOVO, E. M. L. M.; ARAÚJO, C. B. **Hidrologia Estatística**, Editora CPRM, Belo Horizonte, 2007.

Shahirinia, Amir et al. **Spatial modeling sensitivity analysis: Copula selection for wind speed dependence**. AIP Advances 2024.

ANEXO A – BASE DE DADOS

Na Tabela 10 está o ano e o mês do dado em questão e em seguida os valores de vazão média e precipitação máxima obtidos.

Tabela 10: Base de dados usada para o trabalho.

Ano	Mês	Precipitação	Vazão	Ano	Mês	Precipitação	Vazão
1981	1	20,89	57,17	2000	1	38,52	46,58
1981	2	15,64	43,85	2000	2	39,74	63,32
1981	3	18,01	26,63	2000	3	33,33	54,84
1981	4	37,12	23,88	2000	4	10,03	28,63
1981	5	0,83	24,3	2000	5	12,41	24,86
1981	6	37,26	26,16	2000	6	10,59	23,81
1981	7	0,42	19,9	2000	7	12,16	25,39
1981	8	4,34	20,06	2000	8	35,14	24,22
1981	9	3,53	17,44	2000	9	36,73	36,87
1981	10	30,51	25,87	2000	10	9,46	22,58
1981	11	36,8	31,41	2000	11	34,89	38,95
1981	12	20,06	26,94	2000	12	38,11	52,55
1982	1	53,46	56,23	2001	1	22,15	36,56
1982	2	30,73	48,38	2001	2	37,35	62,32
1982	3	38,23	110,96	2001	3	13,54	43,06
1982	4	23	47,43	2001	4	20,79	28,66
1982	5	35,77	33,36	2001	5	25,26	30,06
1982	6	10,8	41,44	2001	6	24,25	28,36
1982	7	10,74	36,08	2001	7	13,26	25,59
1982	8	7,13	25,86	2001	8	6,99	23,87
1982	9	17,71	20,46	2001	9	8,57	23,12
1982	10	30,2	64,56	2001	10	28,43	29,96
1982	11	29,38	39,68	2001	11	39,57	22,11
1982	12	28,57	64,5	2001	12	36,81	50,83
1983	1	43,33	140,34	2002	1	61,37	52,62
1983	2	24,15	94,32	2002	2	38,83	58,29
1983	3	24,53	89,17	2002	3	24,64	37,28
1983	4	45,77	54,68	2002	4	1,99	23,22
1983	5	27,35	57,05	2002	5	43,04	26,82
1983	6	20,15	113,71	2002	6	0,04	22,18
1983	7	4,92	45,36	2002	7	40,1	23,32
1983	8	0,04	33,08	2002	8	32,31	23,5
1983	9	38,36	77,62	2002	9	14,3	22,55
1983	10	25,61	47,43	2002	10	8,32	17
1983	11	27,72	65,18	2002	11	18,52	23,88
1983	12	23,3	58,57	2002	12	34,31	39,41
1984	1	25,11	51,34	2003	1	27,75	59,59
1984	2	16,23	47,6	2003	2	45,18	95,37

1984	3	18,21	48,83	2003	3	18,94	35,85
1984	4	17,72	41,09	2003	4	27,93	28,48
1984	5	17,04	39,93	2003	5	11,52	22,01
1984	6	0,31	28,36	2003	6	18,29	20,3
1984	7	1,11	25,08	2003	7	6,01	17,58
1984	8	21,96	31,01	2003	8	8,14	17,44
1984	9	19,15	30,69	2003	9	6,12	14,71
1984	10	25,29	23,45	2003	10	12,65	14,63
1984	11	27,46	22,81	2003	11	14,4	19,27
1984	12	48,59	33,69	2003	12	31,44	33,8
1985	1	26,36	44,43	2004	1	54,95	30,36
1985	2	29,68	26,82	2004	2	30,35	33,03
1985	3	40,27	44,08	2004	3	27,3	27,22
1985	4	22,64	40,22	2004	4	38,3	23,06
1985	5	37,08	32,62	2004	5	27,96	27,04
1985	6	11,3	24,15	2004	6	13,74	31,39
1985	7	11,54	22,47	2004	7	19,97	24,37
1985	8	3,66	18,83	2004	8	0,09	16,81
1985	9	10,85	18,91	2004	9	4,33	13,2
1985	10	11,66	14,47	2004	10	27,13	18,81
1985	11	24,81	21,27	2004	11	38,87	19,56
1985	12	27,79	23,01	2004	12	26,18	24,59
1986	1	22,88	25,56	2005	1	27,57	59
1986	2	37,38	38,64	2005	2	14,37	52,36
1986	3	18,8	43,48	2005	3	14,75	42,44
1986	4	26,46	22,87	2005	4	17,23	28,41
1986	5	24,97	24,97	2005	5	30,6	21,08
1986	6	0,53	20,76	2005	6	16,83	18,16
1986	7	10,03	17,79	2005	7	10,12	18,44
1986	8	23,03	32,59	2005	8	21,04	14,67
1986	9	8,52	19,37	2005	9	33,91	16,76
1986	10	22,22	18,53	2005	10	25,59	20,31
1986	11	22,01	15,29	2005	11	17,25	20,19
1986	12	40,01	44,66	2005	12	20,51	21,7
1987	1	43,8	38,02	2006	1	24,59	31,34
1987	2	20,67	102,4	2006	2	36,95	33,72
1987	3	20,98	39,31	2006	3	17,22	23,35
1987	4	25,03	30,58	2006	4	19,07	19
1987	5	34,07	46,51	2006	5	14,6	14,82
1987	6	10,22	33,33	2006	6	7,15	14,74
1987	7	15,62	25,66	2006	7	3,96	14
1987	8	4,04	20,58	2006	8	8,89	13,63
1987	9	20,46	24,82	2006	9	16,96	14,72
1987	10	37,07	26,53	2006	10	32,76	19,44
1987	11	47,53	40,89	2006	11	9,93	11,82
1987	12	19,93	39,49	2006	12	31,31	27,67

1988	1	56,4	67,2	2008	1	23,95	26,71
1988	2	23,02	58,62	2008	2	23,34	42,2
1988	3	40,22	46,93	2008	3	17,99	45,73
1988	4	29,64	39,17	2008	4	31,62	30,12
1988	5	19,82	30,18	2008	5	24,48	22,21
1988	6	3,91	27,52	2008	6	4,46	19,445
1988	7	0	21,17	2008	7	0,03	20,87
1988	8	0	18,95	2008	8	18,15	23,815
1988	9	2,87	16,62	2008	9	8,98	15,43
1988	10	36,49	27,56	2008	10	32,61	16,86
1988	11	12,86	26,74	2008	11	17,5	18,88
1988	12	38,11	18,48	2008	12	20,59	19,52
1989	1	33,78	64,16	2009	1	35,92	49,18
1989	2	29,35	77,87	2009	2	24,95	52,585
1989	3	37,74	52,04	2009	3	25,7	41,945
1989	4	7,63	32,58	2009	4	11,98	22,44
1989	5	20,12	32,13	2009	5	15,5	25,26
1989	6	29,53	32,51	2009	6	9,71	24,15
1989	7	73,92	27,17	2009	7	20,25	27,74
1989	8	19,55	43,21	2009	8	35,71	34
1989	9	16,57	34,86	2009	9	25,58	38,41
1989	10	34,8	22,18	2009	10	24,04	39,1
1989	11	24,85	32,76	2009	11	22,1	44,65
1989	12	39,31	48,9	2009	12	49,33	106,73
1990	1	34,4	135,98	2010	1	20,86	50,103
1990	2	16,7	44,06	2010	2	18,15	62,97
1990	3	33,82	50,94	2010	3	9,79	38,16
1990	4	36,3	43,49	2010	4	16,81	38,75
1990	5	28,48	38,21	2010	5	7,27	31,88
1990	6	4,03	28,43	2010	6	7,47	25,15
1990	7	8,28	29,07	2010	7	3,3	28,2
1990	8	24,02	29,68	2010	8	0,22	20,8
1990	9	25,6	31,1	2010	9	67,45	21,97
1990	10	23,76	37,9	2010	10	20,21	33,99
1990	11	34,43	30,75	2010	11	10,35	40,72
1990	12	32,6	38,26	2010	12	21,99	72,185
1991	1	30,33	35,57	2011	1	28,82	51,027
1991	2	37,66	111,12	2011	2	35,04	63,264
1991	3	37,28	68,58	2011	3	31,57	56,141
1991	4	27,48	73,39	2011	4	35,62	43,565
1991	5	17,1	46,39	2011	5	9,15	33,923
1991	6	15,94	36,12	2011	6	17,17	35,621
1991	7	9,68	31,89	2011	7	1,73	32,474
1991	8	0,18	25,18	2011	8	7,74	34,385
1991	9	14,91	21,31	2011	9	8,88	26,673
1991	10	50,21	30,66	2011	10	20,15	37,988

1991	11	15,44	21,53	2011	11	33,09	36,791
1991	12	28,55	43,49	2011	12	22	37,64
1992	1	16,25	32,22	2012	1	27,79	50,05
1992	2	62,15	50,31	2012	2	9,22	31,337
1992	3	20,22	39,65	2012	3	12,49	40,321
1992	4	43,9	59,48	2012	4	37,07	31,395
1992	5	26,31	67,66	2012	5	34,5	39,889
1992	6	1,12	32,4	2012	6	44,42	63,223
1992	7	3,98	28,14	2012	7	5,4	37,508
1992	8	10,71	25,06	2012	8	0,01	24,314
1992	9	26,04	43,45	2012	9	37,42	40,782
1992	10	23,35	37,11	2012	10	10,1	29,257
1992	11	30,24	37,5	2012	11	26,83	42,71
1992	12	13,43	33,68	2012	12	51,81	54,713
1993	1	46,16	46,38	2013	1	32,04	50,348
1993	2	28,56	99,07	2013	2	13,56	52,527
1993	3	32,92	69,12	2013	3	36,74	49,028
1993	4	21,17	67,71	2013	4	13,12	59,861
1993	5	14,53	38,72	2013	5	45,95	51,429
1993	6	41,04	45,55	2013	6	17,64	53,1
1993	7	3,48	30,62	2013	7	14,48	41,084
1993	8	15,32	33,01	2013	8	0,64	33,714
1993	9	22,42	40,79	2013	9	27,08	38,458
1993	10	8,23	36,69	2013	10	16,48	47,901
1993	11	32,73	29,75	2013	11	20,1	44,029
1993	12	16,37	38,68	2013	12	12,19	36,882
1994	1	32,25	63,88	2014	1	14,65	36,742
1994	2	21,52	65,78	2014	2	39,02	28,802
1994	3	22,8	49,08	2014	3	21,64	32,483
1994	4	29,36	44,24	2014	4	11,64	29,912
1994	5	9,55	31,28	2014	5	25,06	30,885
1994	6	9,11	30,61	2014	6	1,97	23,588
1994	7	5,65	26,57	2014	7	19,01	22,825
1994	8	0,01	23,88	2014	8	4,04	18,555
1994	9	4,14	20,96	2014	9	25,11	21,407
1994	10	19,22	25,74	2014	10	16,58	13,255
1994	11	32,77	25,31	2014	11	29,51	18,772
1994	12	35,1	31,24	2014	12	25,28	42,64
1995	1	19,98	70,95	2015	1	18,49	24,269
1995	2	34,3	126,06	2015	2	24,07	41,106
1995	3	49,63	55,1	2015	3	26,49	40,291
1995	4	8,19	61,5	2015	4	11,73	24,984
1995	5	12,54	36,19	2015	5	28,84	35,299
1995	6	14,54	31,68	2015	6	1,51	28,802
1995	7	10,92	31,1	2015	7	14,82	39,401
1995	8	0,08	22,89	2015	8	8,97	21,47

1995	9	26,93	22,2	2015	9	51,83	33,972
1995	10	20,96	36,68	2015	10	21,55	23,414
1995	11	25,59	27,07	2015	11	24,45	46,75
1995	12	33,51	34,51	2015	12	34,38	46,891
1996	1	18,68	49,21	2016	1	39,6	62,55
1996	2	14,28	36,61	2016	2	29,73	41,739
1996	3	30,29	54,96	2016	3	12,2	48,099
1996	4	11,98	28,66	2016	4	45,41	37,461
1996	5	15,98	31,7	2016	5	22,26	35,868
1996	6	11,05	22,61	2016	6	25,66	38,216
1996	7	0,82	21,51	2016	7	6,62	35,535
1996	8	8,75	19,48	2016	8	33,17	36,551
1996	9	21,84	25,68	2016	9	6,88	35,468
1996	10	22,41	25,87	2016	10	30,35	23,874
1996	11	56,4	36,12	2016	11	13,1	16,024
1996	12	27,9	48,62	2016	12	19,3	30,396
1997	1	27,74	121,26	2017	1	35,5	44,769
1997	2	21,52	82,6	2017	2	14,56	42,371
1997	3	27,09	38,47	2017	3	27,12	39,708
1997	4	18,6	31,49	2017	4	30,35	40,066
1997	5	30,66	32,41	2017	5	38,92	29,346
1997	6	50,24	67,5	2017	6	7,91	40,039
1997	7	12,94	33,27	2017	7	0,1	35,367
1997	8	0,59	26,57	2017	8	19,34	29,43
1997	9	20,48	23,64	2017	9	9,26	23,703
1997	10	23,96	27,92	2017	10	40,3	30,802
1997	11	35,88	42,13	2017	11	33,88	33,499
1997	12	20,32	45,31	2017	12	40,06	35,403
1998	1	25,29	31,3	2018	1	29,72	37,307
1998	2	25,43	53,79	2018	2	23,01	39,625
1998	3	46,27	75,08	2018	3	21,18	36,583
1998	4	36,6	51,99	2018	4	19,59	31,578
1998	5	21,25	35,37	2018	5	6,87	22,825
1998	6	6,26	32,41	2018	6	2,14	25,092
1998	7	1,13	26,06	2018	7	1,03	21,407
1998	8	25,04	32,2	2018	8	14,29	29,118
1998	9	16,7	30,31	2018	9	17,2	23,931
1998	10	22,55	44,87	2018	10	37,02	37,276
1998	11	15,76	33,76	2018	11	28,37	25,677
1998	12	72,27	44,82	2018	12	13,47	32,789
1999	1	31,46	154,59	2019	1	21,55	29,65
1999	2	38,31	102,65	2019	2	26,13	37,977
1999	3	17,52	64,74	2019	3	20,93	30,34
1999	4	29,13	46,17	2019	4	14,29	30,17
1999	5	22,98	39,5	2019	5	8,01	27,099
1999	6	23,2	37,87	2019	6	9,55	23,588

1999	7	1,65	30,73	2019	7	15,2	18,915
1999	8	0	25,41	2019	8	10,9	18,986
1999	9	10,21	26,68	2019	9	12,54	19,686
1999	10	8,33	21,62	2019	10	16,95	16,266
1999	11	23,8	25,34	2019	11	27,78	16,9
1999	12	38,18	32,99	2019	12	33,82	28,619

Fonte Precipitação: POWER(NASA). Organização elaborado pelo autor.
Disponível em: <https://power.larc.nasa.gov/beta/data-access-viewer/>. Acesso em: 15 jul. de 2024;

Fonte Vazão: Prof. Dr. Edilson Ferreira Flores do projeto **Morfologia fluvial, variabilidade/mudanças climáticas e conectividade nos sistemas aluviais do baixo curso dos rios Aguapeí e Peixe, Oeste Paulista, Brasil**, coordenado pelo Prof. Dr. Paulo Cesar Rocha Doutorado. Organização elaborado pelo autor. Organização elaborado pelo autor.