

Cláudia Rebuci dos Reis Alves

**Desigualdades dos Tipos Markov e
Kolmogorov para Polinômios**



1910000864



**DESIGUALDADES DOS TIPOS
MARKOV E KOLMOGOROV
PARA POLINÔMIOS**

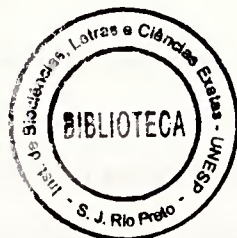
Cláudia Rebuci dos Reis Alves

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP-043

Desigualdades dos Tipos Markov e Kolmogorov para Polinômios

CLÁUDIA REBUCI DOS REIS ALVES

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências
Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho",
Câmpus de São José do Rio Preto, para a obtenção do título de Mestre
em Matemática Aplicada.



864/99

São José do Rio Preto

Março de 1999

Já zerocado



Este trabalho foi realizado no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, durante o curso de Mestrado da candidata, sob a orientação do Prof. Dr. Dimitar Kolev Dimitrov. O estudo e a pesquisa foram apoiados pela FAPESP, processo (97/11591-5).

Os novos resultados desta tese, os Teoremas 1.1 e 1.2, cujas demonstrações detalhadas são dadas no Capítulo 5, são as principais contribuições do artigo C. R. R. Alves and D. K. Dimitrov, Landau and Kolmogoroff type polynomial inequalities, que foi aceito para publicação em *Journal of Inequalities and Applications*.



“ Se vi mais longe, foi por ter
me colocado nos ombros
de gigantes.”



A Deus.

A meus pais,
Carlos e Eunice.

A meus irmãos,
Fernando e Eduardo.

Agradecimentos

A Deus por mais esta vitória.

A todos os professores e funcionários,
que de alguma forma contribuíram
durante este período.

A todos os colegas pós-graduandos
pelo companheirismo.

A toda minha família, amigos e namorado
pelo incentivo e carinho.

À FAPESP, pelo auxílio
financeiro.

Resumo

Estudamos alguns resultados clássicos e recentes sobre desigualdades polinomiais dos tipos Markov e Kolmogorov. Uma ênfase especial é dada às desigualdades na norma L_2 . Novas desigualdades polinomiais dos tipos Landau e Kolmogorov são provadas.



Abstract

We study some classical and recent results on Markov and Kolmogorov type polynomial inequalities. A special emphasis is given to the inequalities in L_2 norm. New polynomial inequalities of Landau and Kolmogorov's type are established.



Índice

1	Introdução	1
2	Resultados Preliminares	9
2.1	Polinômios Ortogonais	9
2.2	Interpolação de Lagrange	14
2.3	Teorema de Rayleigh-Ritz	15
2.3.1	Matrizes Unitárias	15
2.3.2	Matrizes Hermitianas	17
2.3.3	Teorema de Rayleigh-Ritz	19
2.4	Teorema de Rouché e o Teorema de Gauss-Lucas	20
2.4.1	Funções de Variáveis Complexas	21
2.4.2	Limite e Continuidade	21
2.4.3	Diferenciabilidade	22
2.4.4	Funções Analíticas	23
2.4.5	Contorno	23
2.4.6	Teorema de Cauchy	24
2.4.7	Derivadas de uma Função Analítica	25
2.4.8	Séries de Taylor e de Laurent	26
2.4.9	Zeros de uma Função Analítica e Resíduos	26
2.4.10	Função Meromórfica	28
2.4.11	Teorema de Rouché	29



2.4.12	Teorema de Gauss-Lucas	31
2.5	Teorema Geral do Valor Médio	32
2.6	Teorema de Rolle	32
3	A Desigualdade de Duffin e Schaeffer	33
3.1	Uma Desigualdade da Interpolação	34
3.2	Propriedade dos Polinômios de Chebyshev	40
3.3	As Desigualdades dos Irmãos Markov	43
4	Desigualdades Polinomiais do Tipo Markov na Norma L_2	48
4.1	Redução da desigualdade de Markov na Norma L_2 para um problema de auto-valores e auto-vetores de matrizes	49
4.1.1	Redução do problema extremo para o máximo auto-valor de uma dada matriz	49
4.1.2	Casos Particulares	53
4.1.3	Redução do problema extremo para o mínimo auto-valor de uma dada matriz	61
4.1.4	Caso Particular	63
5	Desigualdades do Tipo Kolmogorov	70
5.1	A Desigualdade de Bojanov e Varma	71
5.2	Casos Particulares	78
5.3	Algumas Desigualdades Novas do Tipo Kolmogorov	79
5.3.1	Alguns Resultados Técnicos	80
5.3.2	Redução do Problema (5.11) para um Problema de Auto- valores e Auto-vetores de Matrizes	84
5.3.3	Demonstração do Teorema 1.1	87
5.3.4	Demonstração do Corolário 1.1	89
5.3.5	Demonstração do Teorema 1.2	91
	Referências	97



Capítulo 1

Introdução

É conhecido que existem funções suaves e limitadas cujas derivadas podem atingir quaisquer valores. Como exemplo, citamos as funções $f_c(x) = e^{-cx^2}$. Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, essas funções atingem seus valores de máximo e mínimo quando $f'_c(x) = -2cxe^{-cx^2} = 0$, ou seja, quando $x = 0$. Assim, o valor máximo atingido por f_c é $f_c(0) = 1$ e, dessa forma, $\|f_c\|_\infty = \max_{x \in I} |f_c(x)| = 1$.

A derivada de $f_c(x)$, por sua vez, atinge os valores máximo e mínimo quando $f''_c(x) = -2ce^{-cx^2} + 4c^2x^2e^{-cx^2} = 0$, ou seja, quando $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2c}}$. Assim, o valor máximo atingido por f' é $f'(-\frac{1}{\sqrt{2c}}) = \sqrt{2c}e^{-\frac{1}{2}}$. Desse modo, percebemos que o valor da derivada da função aumenta conforme o valor de c .

Quando trabalhamos com polinômios isso não ocorre, ou seja, se a norma uniforme do polinômio ($\|f\| = \max_{x \in I} |f(x)|$) é limitada, então a norma da derivada desse polinômio também será.

O primeiro a observar esse fato foi o famoso químico Dmitrii Mendeleev, o descobridor da tabela dos elementos químicos. Em 1887, em seu trabalho [17], ele colocou o seguinte problema:

Problema de Mendeleev: Se $p(x)$ é um polinômio de segundo grau e $\max\{|p(x)| : x \in [-1, 1]\} = 1$, qual é o maior valor possível de $p'(x)$ em $[-1, 1]$?

Mendeleev mostrou que $|p'(x)| \leq 4$ em $[-1, 1]$. Esse limite é o maior possível porque para o polinômio $p(x) = 1 - 2x^2$ temos $|p(x)| \leq 1$, $|p'(x)| \leq 4$ para $x \in [-1, 1]$ e



$$|p'(\pm 1)| = 4.$$

A partir daí, um problema correspondente para polinômios de grau n foi considerado por A. A. Markov. Seja $\|\cdot\|_{L_r(I)}$, $1 \leq r \leq \infty$, a norma no espaço $L_r(I)$, onde I é um intervalo na reta real, definida por

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_r(I)} &:= \left(\int_I |f(x)|^r dx \right)^{1/r}, \quad 1 \leq r < \infty, \\ \|f\|_{L_\infty(I)} &:= \sup\{|f(x)| : x \in I\}.\end{aligned}$$

A. A. Markov [14] provou em 1889 que: para todo número natural n e para todo polinômio $p \in \pi_n$ (onde π_n denota o conjunto dos polinômios algébricos de grau não maior do que n), a desigualdade

$$\|p'\|_{L_\infty[-1,1]} \leq n^2 \|p\|_{L_\infty[-1,1]} \quad (1.1)$$

vale, ou seja, Markov provou que a norma da derivada do polinômio é limitada pela norma do polinômio. A desigualdade acima se reduz à igualdade se, e somente se, $p(x) = cT_n(x)$, onde T_n é o polinômio de Chebyshev de primeira espécie de grau n e c é qualquer constante não nula. O fato de termos igualdade em (1.1) segue de $\|T_n\| = 1$ e $|T'_n(\xi)| = \|T'_n\|_{L_\infty[-1,1]} = n^2$ se, e somente se, $\xi = \pm 1$. Três anos depois, em 1892, V. A. Markov [15], o irmão mais jovem de A. A. Markov, estendeu esse resultado investigando o limite superior para altas derivadas do polinômio, provando que, para todo $1 \leq k \leq n$ e para todo polinômio $p \in \pi_n$,

$$\|p^{(k)}\|_{L_\infty[-1,1]} \leq \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-1)^2)}{1.3 \dots (2k-1)} \|p\|_{L_\infty[-1,1]},$$

onde a desigualdade se reduz à igualdade se, e somente se, $p(x) = cT_n(x)$, e $|p^{(k)}(\xi)| = \|p^{(k)}\|_{L_\infty[-1,1]} = |c| (n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-1)^2)) / (1.3 \dots (2k-1))$ se, e somente se, $\xi = \pm 1$.

Suponhamos que $p(x) \in \pi_n$ tal que $|p(x)| \leq 1$ no intervalo $(-1, 1)$. De acordo com a desigualdade de A. A. Markov, $|p'(x)| \leq n^2$ nesse mesmo intervalo e seguindo os resultados de V. A. Markov obtemos

$$|p^{(k)}| \leq \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-1)^2)}{1.3 \dots (2k-1)}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Duffin e Schaeffer [9], mostram que se supusermos $|p(x)| \leq 1$ apenas nos pontos onde $T_n(x)$ atinge seus extremos no intervalo $[-1, 1]$, então as conclusões dos irmãos Markov não mudam. Os resultados de Duffin e Schaeffer serão demonstrados no Capítulo 3.

Em 1912, S. Bernstein [4] provou que

$$|p'(x)| \leq \frac{n}{\sqrt{1-x^2}} \|p\|_{L_\infty[-1,1]}$$

para todo polinômio $p \in \pi_n$ e para todo $x \in (-1, 1)$. No Capítulo 4, provaremos a desigualdade clássica de Bernstein na norma L_2 .

Outras desigualdades interessantes do tipo Markov foram obtidas por Bojanov. Em [5] ele provou que

$$\|p'\|_{L_r[-1,1]} \leq \|T'_n\|_{L_r[-1,1]} \|p\|_{L_\infty[-1,1]}$$

para todo r , $1 \leq r \leq \infty$, todo n natural e todo polinômio $p \in \pi_n$. Além disso, a igualdade é possível se, e somente se, $p(x) = T_n(x)$.

Outros tipos de desigualdades clássicas, que valem ainda para funções suficientemente suaves e tais que as suas derivadas até a ordem m são limitadas no intervalo I , são do tipo Landau e Kolmogorov.

A desigualdade

$$\|f^{(j)}\|_{L_\infty} \leq K_\infty(m, j) \|f\|_{L_\infty}^{1-(j/m)} \|f^{(m)}\|_{L_\infty}^{j/m}$$

para funções com todas as derivadas de ordem até m limitadas no intervalo I , onde o problema é encontrar a melhor constante possível, foi introduzido por Landau em 1913. Ele mostrou que a desigualdade

$$\|f'\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} \leq \sqrt{2} \|f\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{1/2} \|f''\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{1/2}$$

vale para toda f , tal que f , f' e f'' são limitadas na reta real e a desigualdade

$$\|f'\|_{L_\infty[0, \infty)} \leq 2 \|f\|_{L_\infty[0, \infty)}^{1/2} \|f''\|_{L_\infty[0, \infty)}^{1/2}$$

vale para toda f , tal que f, f' e f'' são limitadas no intervalo $I = [0, \infty)$.

Em 1938, Kolmogorov [12] achou a constante extrema $K_\infty(m, j)$, tal que a desigualdade

$$\|f^{(j)}\|_{L_\infty(-\infty, \infty)} \leq K_\infty(m, j) \|f\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{1-(j/m)} \|f^{(m)}\|_{L_\infty(-\infty, \infty)}^{j/m}$$

vale para toda função com todas as derivadas de ordem até m limitadas na reta real.

O problema para $I = [0, \infty)$ foi estudado em 1914 por Hadamard [10] e em 1955 por Matorin [16] que mostrou que $K_\infty(m, j) \leq (2^{m-1}m!)^{-\frac{j}{m}} T_m^{(j)}(1) = M_{m,j}$ com igualdade para $m = 2$ e $m = 3$, onde T_m é o polinômio de Chebyshev. Em 1970, Schoenberg e Cavaretta [21] resolveram o problema para $I = [0, \infty)$ e mostraram que $K_\infty(m, j) < M_{m,j}$ quando $m \geq 4$.

Recentemente, Eriksson [3] provou que se f é uma função com todas as derivadas de ordem até m limitadas no intervalo $[-1, 1]$, então, para todo k , tal que $0 < k \leq (\cos(\pi/2m))^{-2}$, e para todo j tal que $1 \leq j \leq m-1$,

$$\|f^{(j)}\|_{L_\infty[-1,1]} \leq \frac{1}{k^j} \left(1 - \frac{j}{m}\right) T_m^{(j)}(1) \|f\|_{L_\infty[-1,1]} + \frac{k^{m-j}}{2^{m-1}m!} \frac{j}{m} T_m^{(j)}(1) \|f^{(m)}\|_{L_\infty[-1,1]}.$$

É bem conhecido que as funções extremas para as quais as desigualdades de Landau-Kolmogorov se reduzem a igualdades não são polinômios. Este fato e a importância das desigualdades desse tipo motivaram o problema de provar desigualdades do tipo Landau-Kolmogorov para polinômios. A idéia principal é que, conhecendo a norma do polinômio e a norma de uma derivada de alta ordem desse polinômio, limite-se superiormente a norma de uma derivada intermediária do mesmo.

Seja

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx \right)^{1/2}.$$

Citamos assim, a desigualdade polinomial de Varma [25],

$$\|p'\|^2 \leq \frac{1}{2(2n-1)} \|p''\|^2 + \frac{2n^2}{2n-1} \|p\|^2, \quad (1.2)$$

que vale para todo $p \in \pi_n$. Em um recente trabalho, Bojanov e Varma [6] consideraram o seguinte problema:



Achar as constantes extremas A e B , tais que a desigualdade

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2$$

vale para todo $f \in \pi_n$.

Bojanov e Varma mostraram que, para $0 < j < m \leq n$, a desigualdade

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq A\|f^{(m)}\|^2 + \left\{ 2^j \frac{n!}{(n-j)!} - A2^m \frac{n!}{(n-m)!} \right\} \|f\|^2 \quad (1.3)$$

vale para todo $f \in \pi_n$ e para todo A , tal que

$$A \leq \frac{j}{m2^{m-j}} \frac{1}{(n-j) \cdots (n-m+1)}.$$

Os resultados de Bojanov e Varma, bem como suas demonstrações, se encontram no Capítulo 5. Ainda nesse Capítulo, para a norma $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x) dx$, provamos algumas desigualdades polinomiais do tipo Kolmogorov. Nas afirmações dos teoremas a seguir, por H_n denotamos os polinômios de Hermite, definidos no Capítulo 2. Nossos resultados seguem:

TEOREMA 1.1 *Sejam $j < m \leq n$ inteiros positivos e A e B constantes positivas.*

(i) *Se*

$$\frac{A}{B} \leq 2^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} \frac{j}{m-j}, \quad (1.4)$$

então

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2}{A2^{m-j}(n-j)![(n-m)!]^{-1} + B2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}} \quad (1.5)$$

para todo $f \in \pi_n$. Além disso, temos igualdade se, e somente se, $f(x) = cH_n(x)$, onde c é uma constante.

(ii) *Se $\frac{2^{-m}}{(m+1)!} \frac{j}{(m-j)} < \frac{A}{B} < 2^{-m} \frac{j}{m(m-j)}$, então*

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2}{A2^{m-j}(m-j)! + B2^{-j}(m-j)!(m!)^{-1}} \quad (1.6)$$

para todo $f \in \pi_n$. Além disso, temos igualdade se, e somente se, $f(x) = cH_m(x)$, onde c é uma constante.

(iii) Se $\frac{A}{B} > 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)}$, então

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2}{B2^{-j}(m-j-1)![(m-1)!]^{-1}} \quad (1.7)$$

para todo $f \in \pi_n$. Além disso, temos igualdade se, e somente se, $f(x) = cH_{m-1}(x)$, onde c é uma constante.

(iv) Se $\frac{A}{B} = 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)}$, então as desigualdades (1.6) e (1.7) coincidem e valem para todo $f \in \pi_n$. Nesse caso, a igualdade é atingida se, e somente se, $f(x)$ é qualquer combinação linear de $H_{m-1}(x)$ e $H_m(x)$.

Como consequência imediata do Teorema 1.1(i) obtemos

COROLÁRIO 1.1 *Seja*

$$\alpha \leq \frac{(n-m)!j}{2^{m-j}(n-j)!m}.$$

Então, a desigualdade

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \alpha\|f^{(m)}\|^2 + \left\{ 2^j \binom{n}{j} j! - \alpha 2^m \binom{n}{m} m! \right\} \|f\|^2,$$

vale para todo $f \in \pi_n$. Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $f = cH_n$.

Esta é exatamente a afirmação do resultado de Bojanov e Varma, citado anteriormente.

Para o caso particular $j = 1$ e $m = 2$, demos a completa caracterização das constantes A e B , para as quais as correspondentes desigualdades do tipo Landau valem.

TEOREMA 1.2 *Sejam A e B constantes positivas.*

(i) Se $0 < \frac{A}{B} < \frac{1}{4n(n-1)}$, então

$$\|f'\|^2 \leq \frac{A}{2A(n-1) + B(2n)^{-1}} \|f''\|^2 + \frac{B}{2A(n-1) + B(2n)^{-1}} \|f\|^2 \quad (1.8)$$

para todo $f \in \pi_n$. Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $f(x) = cH_n(x)$, onde c é uma constante.

(ii) Se $\frac{1}{4k(k+1)} < \frac{A}{B} < \frac{1}{4k(k-1)}$, onde $k \in N$; $2 \leq k \leq n-1$, então

$$\|f'\|^2 \leq \frac{A}{2A(k-1) + B(2k)^{-1}} \|f''\|^2 + \frac{B}{2A(k-1) + B(2k)^{-1}} \|f\|^2 \quad (1.9)$$

para todo $f \in \pi_n$. Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $f(x) = cH_k(x)$, onde c é uma constante.

(iii) Se $\frac{1}{8} < \frac{A}{B} < \infty$, então

$$\|f'\|^2 \leq \frac{2A}{B} \|f''\|^2 + 2\|f\|^2 \quad (1.10)$$

para todo $f \in \pi_n$. Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $f(x) = cH_1(x)$, onde c é uma constante.

(iv) Se $\frac{A}{B} = \frac{1}{4k(k+1)}$, então as desigualdades

$$\|f'\|^2 \leq \frac{A}{2A(k-1) + B(2k)^{-1}} \|f''\|^2 + \frac{B}{2A(k-1) + B(2k)^{-1}} \|f\|^2 \quad (1.11)$$

e

$$\|f'\|^2 \leq \frac{A}{2Ak + B[2(k+1)]^{-1}} \|f''\|^2 + \frac{B}{2Ak + B[2(k+1)]^{-1}} \|f\|^2, \quad (1.12)$$

são equivalentes e valem para todo $f \in \pi_n$. Nesse caso, a igualdade em (1.11) e (1.12) é atingida se, e somente se, $f(x)$ é qualquer combinação linear de $H_k(x)$ e $H_{k+1}(x)$.

Em particular, tomando $B = 4n^2A$ no Teorema 1.2(i), obtemos a desigualdade

$$\|f'\|^2 \leq \frac{1}{2(2n-1)} \|f''\|^2 + \frac{2n^2}{2n-1} \|f\|^2, \quad f \in \pi_n,$$

onde a igualdade é atingida se, e somente se, $f(x) = cH_n(x)$.

Este é exatamente o resultado de Varma anteriormente citado. Vemos, dessa forma, que o resultado de Varma é um caso bem particular do Teorema 1.2(i).

Os Teoremas 1.1 e 1.2 são os resultados principais do artigo [1].



Capítulo 2

Resultados Preliminares

Introdução

Neste capítulo, introduziremos alguns resultados básicos que serão utilizados no decorrer deste trabalho.

2.1 Polinômios Ortogonais

DEFINIÇÃO 2.1 *Seja $\omega(x)$ uma função real não negativa e não identicamente nula em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, tal que $\mu_n = \int_a^b x^n \omega(x) dx, n = 0, 1, \dots$ existem.*

Então $\omega(x)$ é chamada função peso, e os μ_n são chamados seus momentos.

DEFINIÇÃO 2.2 *Dizemos que $P_n(x), n \geq 0$, é um sistema de polinômios ortogonais se:*

i) $P_n(x)$ é de grau n , isto é, se $P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, então $a_n \neq 0$.

$$ii) \int_a^b P_n(x) P_m(x) \omega(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \gamma_n > 0, & \text{se } m = n \end{cases}$$

Se $\gamma_n = 1$, então $P_n(x)$ é chamado um sistema de polinômios ortonormais.

DEFINIÇÃO 2.3 *Os polinômios $p_n(x), n \geq 0$, são linearmente independentes se existem constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, tais que,*

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i p_i(x) = 0, \text{ para qualquer } x \in \mathbb{R},$$



se, e somente se, $\alpha_i = 0, i = 0, \dots, n$.

TEOREMA 2.1 Se $P_0(x), \dots, P_n(x)$ são polinômios ortogonais, então eles são linearmente independentes em π_n .

Demonstração: Seja $\sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x) = 0$. Então,

$$\int_a^b \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i(x) P_j(x) \omega(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i \int_a^b P_i(x) P_j(x) \omega(x) dx = 0, i = 0, \dots, n.$$

Por outro lado, temos que

$$\int_a^b P_i(x) P_j(x) \omega(x) dx = 0, \text{ para } i \neq j$$

e

$$\int_a^b P_i(x) P_i(x) \omega(x) dx \neq 0.$$

Portanto,

$$\alpha_i \int_a^b P_i(x) P_i(x) \omega(x) dx = 0, i = 0, \dots, n,$$

se, e somente se, $\alpha_i = 0$. $\square$

TEOREMA 2.2 Seja $P \in \pi_n$ e $\{P_i\}_{i=0}^n$, uma sequência de polinômios ortogonais. Então existe um único vetor $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, tal que

$$P(x) = \alpha_0 P_0(x) + \dots + \alpha_n P_n(x).$$

Demonstração: Como os $n+1$ polinômios, $P_0, \dots, P_n$, são linearmente independentes no espaço π_n cuja dimensão é $n+1$, eles formam uma base nesse espaço. Por outro lado, todo vetor do espaço pode ser escrito de forma única como combinação linear dos elementos da base, assim, podemos escrever,

$$P(x) = \alpha_0 P_0(x) + \dots + \alpha_n P_n(x). \quad \square$$

Um resultado ainda mais geral vale:

TEOREMA 2.3 *Sejam $q_0, \dots, q_n$, $(n+1)$ polinômios algébricos tais que para qualquer i , $i = 0, \dots, n$, q_i é um polinômio de grau exatamente i . Então, os polinômios $q_0, \dots, q_n$, formam base em π_n .*

Demonstração: Suponhamos que existem $\alpha_0, \dots, \alpha_n$, tais que

$$\alpha_0 q_0(x) + \dots + \alpha_{n-1} q_{n-1}(x) + \alpha_n q_n(x) = 0.$$

Pela hipótese do teorema, q_i , $i = 0, \dots, n$, é de grau exatamente i , então,

$$\alpha_i q_i = 0, \text{ se, e somente se, } \alpha_i = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

Portanto, pela definição 2.3, os polinômios $q_0, \dots, q_n$ são linearmente independentes em π_n . Ou seja, temos $n+1$ polinômios l.i. no espaço π_n cuja dimensão é $n+1$. Logo, os polinômios q_i , $i = 0, \dots, n$, formam uma base em π_n . $\square$

LEMA 2.1
$$\left(\sum_{k=0}^n b_k \right)^2 = \sum_{k=0}^n (b_k)^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n} b_k b_j$$

Demonstração: Provemos por indução. Para $n=1$ temos,

$$(b_0 + b_1)^2 = (b_0)^2 + (b_1)^2 + 2b_0 b_1.$$

Suponhamos que o lema vale para $(n-1)$ pontos, então

$$(b_0 + \dots + b_{n-1})^2 = (b_0)^2 + \dots + (b_{n-1})^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n-1} b_k b_j.$$

Mostremos que vale para n

$$\begin{aligned} (b_0 + \dots + b_{n-1} + b_n)^2 &= (b_0 + \dots + b_{n-1})^2 + 2b_n(b_0 + \dots + b_{n-1}) + b_n^2 \\ &= (b_0)^2 + \dots + (b_{n-1})^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n-1} b_k b_j \\ &\quad + 2(b_0 b_n + \dots + b_{n-1} b_n) + (b_n)^2 \\ &= (b_0)^2 + \dots + (b_{n-1})^2 + (b_n)^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n} b_k b_j. \end{aligned}$$

Portanto por indução, mostramos o lema. $\square$

Vejamos agora alguns polinômios ortogonais particulares.

Polinômios de Jacobi:



Os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, são ortogonais em $[-1, 1]$ com relação à função peso $\omega_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. A normalização de $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ é dada por

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n} = (n+\alpha)(n+\alpha-1)\dots(\alpha+1)/n!.$$

Seja

$$\|f\|_{\alpha,\beta}^2 = \int_{-1}^1 f^2(x)\omega_{\alpha,\beta}(x)dx.$$

Os polinômios de Jacobi satisfazem às seguintes relações (cf. (4.21.7), (4.3.3) e (4.2.1) em [22]):

$$\frac{d}{dx}P_k^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(k+\alpha+\beta+1)}{2}P_{k-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x), \quad (2.1)$$

$$h_k^{(\alpha,\beta)} = \|P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\|_{(\alpha,\beta)}^2 = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{(2k+\alpha+\beta+1)} \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)}, \quad (2.2)$$

onde Γ é a função gama e

$$\frac{d}{dx}[(1-x^2)P'_{k-1}(x)] = -k(k-1)P_{k-1}(x). \quad (2.3)$$

Polinômios de Laguerre:

Definimos os polinômios de Laguerre, $L_n^{(\alpha)}(x)$, para $\alpha > -1$ pelas seguintes condições de ortogonalidade e normalização:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)L_m^{(\alpha)}(x)dx = \Gamma(\alpha+1) \binom{n+\alpha}{n} \delta_{nm}, \quad n, m = 0, 1, \dots,$$

onde $\delta_{n,m}$ é o conhecido delta de Kronecker.

Eles satisfazem às seguintes relações (cf. (5.1.13), (5.1.14) e (5.1.1) em [22]):

$$L_n^{(\alpha-1)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x) - L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha-1)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad (2.5)$$

$$\frac{d}{dx}(xL'_n(x)) = -nL_{n-1}(x) \quad (2.6)$$

e

$$h_n^{(\alpha)} = (\|L_n^{(\alpha)}\|_{(\alpha)})^2 = \Gamma(\alpha + 1) \binom{n + \alpha}{n}. \quad (2.7)$$

Polinômios de Hermite:

Os polinômios de Hermite são ortogonais em $(-\infty, +\infty)$ com a função peso $\omega(x) = e^{-x^2}$. Eles satisfazem às seguintes condições de ortogonalidade (cf. (5.5.1) e (5.5.10) em [22]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{n,m}, \quad n, m = 0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

e

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x). \quad (2.9)$$

Polinômios de Chebyshev:

Os polinômios de Chebyshev de primeira espécie de grau n , são denotados por $T_n(x)$ e são definidos no intervalo $[-1, 1]$ pela equação

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (2.10)$$

Assim, segue imediatamente que

$$|T_n(x)| \leq 1 \quad \text{para } x \in [-1, 1]. \quad (2.11)$$

Além disso, teremos $|\cos(n \arccos x)| = 1$, $x \in [-1, 1]$, para

$$n \arccos x = \nu \pi, \quad \nu = 0, \dots, n.$$

Dessa equação, determinamos os pontos extremos η_ν de $T_n(x)$ em $[-1, 1]$. Obtemos $\eta_\nu = \cos \frac{\nu \pi}{n}$, $\nu = 0, \dots, n$.

Podemos verificar diretamente que

$$T_n(\eta_\nu) = (-1)^\nu, \quad \nu = 0, \dots, n, \quad (2.12)$$



ou seja, dizemos que o polinômio T_n se alterna nos pontos $\{\eta_\nu\}_{\nu=0}^n$.

De (2.12), segue que $T_n(x)$ tem exatamente n diferentes zeros em $[-1, 1]$. Eles podem ser achados imediatamente pela expressão (2.10). Obviamente $T_n(x) = 0$ para $\arccos x = (2\nu - 1)\frac{\pi}{2}$, $\nu = 1, \dots, n$. Daí, determinamos os zeros $\{\xi_\nu\}_{\nu=1}^n$ de $T_n(x)$:

$$\xi_\nu = \cos \frac{(2\nu - 1)\pi}{2n}, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Diferenciando $T_n(x) = \cos n\theta$ com respeito a x , obtemos

$$T'_n(x) = \left(\frac{d}{d\theta} \cos n\theta \right) \frac{d\theta}{dx} = \frac{-n \sin n\theta}{-\sin \theta} = n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta.$$

O polinômio de grau $n - 1$,

$$U_{n-1}(x) = \frac{1}{n} T'_n(x) = \frac{\sin n\theta}{\sin \theta}, \quad x = \cos \theta, \quad (2.13)$$

é chamado polinômio de Chebyshev de segunda-espécie.

2.2 Interpolação de Lagrange

Consideremos o seguinte problema de interpolação.

Sejam $x_1, \dots, x_n$ pontos distintos e $y_1, \dots, y_n$ números reais dados. Existe um único polinômio algébrico $P(x)$ de grau $\leq n$, que satisfaz às condições

$$P(x_\nu) = y_\nu, \quad \nu = 1, \dots, n. \quad (2.14)$$

Em outras palavras, dados n pontos $\{(x_\nu, y_\nu)\}_{\nu=1}^n$ no plano, constrói-se um único polinômio P de grau $n - 1$, cujo gráfico passa pelos pontos dados (x_ν, y_ν) , $\nu = 1, \dots, n$.

A solução do problema de interpolação (2.14) pode ser dada por

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{\nu=1}^n y_\nu \prod_{i=1, i \neq \nu}^n \frac{x - x_i}{x_\nu - x_i} \\ &= \sum_{\nu=1}^n y_\nu \frac{\omega(x)}{(x - x_\nu)\omega'(x_\nu)}, \end{aligned}$$

onde $\omega(x) = (x-x_1) \dots (x-x_n)$ e $\omega'(x_\nu) = (x_\nu-x_1) \dots (x_\nu-x_{\nu-1})(x_\nu-x_{\nu+1}) \dots (x_\nu-x_n)$.

Em particular, quando os dados y_ν coincidem com os valores de uma função $f(x)$, isto é, quando $y_\nu = f(x_\nu)$, $\nu = 1, \dots, n$, o polinômio de Lagrange que interpola a função f nos pontos $\{x_i\}_{i=1}^n$ é dado por

$$L_{n-1}(f; x) = \sum_{\nu=1}^n f(x_\nu) \frac{\omega(x)}{(x-x_\nu)\omega'(x_\nu)}. \quad (2.15)$$

A propriedade principal dos polinômios de interpolação de Lagrange $L_{n-1}(f; x)$, é que $L_{n-1}(f; x) \equiv f(x)$, para qualquer $f \in \pi_{n-1}$.

2.3 Teorema de Rayleigh-Ritz

Este é o resultado fundamental usado em nossa dissertação. Para a compreensão deste teorema, bem como da sua demonstração, daremos algumas definições:

2.3.1 Matrizes Unitárias

DEFINIÇÃO 2.4 A matriz $U \in M_n$, onde M_n denota o espaço das matrizes de ordem $n \times n$, é unitária se $U^*U = I$ (onde $U^* = \overline{U}^t$ e $\overline{U}^t$, é a matriz conjugada transposta de U). Se $U \in M_n(\mathbb{R})$, então U é chamada ortogonal.

DEFINIÇÃO 2.5 Recordamos que os vetores $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{C}^n$ formam um conjunto ortogonal se $x_i^*x_j = 0$ para quaisquer $1 \leq i < j \leq k$. Se, além disso, os vetores são normalizados, isto é, $x_i^*x_i = 1$, $i = 1, 2, \dots, k$, então o conjunto é chamado ortonormal.

DEFINIÇÃO 2.6 A matriz $B \in M_n$ é unitariamente equivalente a $A \in M_n$, se existe uma matriz unitária $U \in M_n$, tal que $B = U^*AU$. Se U for tomada como real (e por isso é ortogonal real), então B é ortogonalmente equivalente a A .

Um teorema importante dentro desta seção é o Teorema de Schur:

TEOREMA 2.4 Dado $A \in M_n$ com auto-valores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de qualquer ordem pre-estabelecida, existe uma matriz unitária $U \in M_n$ tal que $U^*AU = T$, onde T é triangular superior com diagonal $t_{ii} = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$.

Demonstração: Provemos por indução. Para $n = 1$, $(a_{11}) = (1)(a_{11})(1)$.

Suponhamos que o teorema vale para $n = k - 1$. Vamos provar que o teorema vale para k .

Seja $A \in \mathcal{C}^{k \times k}$ e seja λ um auto-valor de A associado a um auto-vetor $v_1 \in \mathcal{C}^k$ tal que $\|v_1\|_2 = 1$. Tomemos U_1 qualquer matriz unitária tal que v_1 é a primeira coluna. Seja

$$U_1 = (v_1, w) \in \mathcal{C}^{k \times k},$$

onde w é formada pelas colunas 2 a k de U_1 . Então,

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} v_1^* \\ w^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} v_1 \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^* \\ w^* \end{pmatrix} (Av_1, Aw) \\ &= \begin{pmatrix} v_1^*Av_1 & v_1^*Aw \\ w^*Av_1 & w^*Aw \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1^*v_1 & v_1^*Aw \\ \lambda w^*v_1 & w^*Aw \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda & v_1^*Aw \\ 0 & w^*Aw \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como $w^*Aw \in \mathcal{C}^{(k-1) \times (k-1)}$, pela hipótese de indução, existe uma matriz $\tilde{U}_2$ unitária tal que $\tilde{U}_2^*(w^*Aw)\tilde{U}_2 = \tilde{T}$. Seja

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{U}_2 \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^{k \times k}.$$

A matriz U_2 é unitária, pois $U_2^*U_2 = I$. Observe que

$$U_2^*A_1U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \lambda & v_1^*Aw \\ 0 & w^*Aw \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & v_1^* A w \\ 0 & w^* A w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & v_1^* A w \\ 0 & \tilde{U}_2^* (w^* A w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{U}_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda & v_1^* A w \tilde{U}_2 \\ 0 & \tilde{U}_2^* (w^* A w) \tilde{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & v_1^* A w \tilde{U}_2 \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} \\
&= T.
\end{aligned}$$

Então, $U_2^* A_1 U_2 = U_2^* U_1^* A U_1 U_2 = T$ logo, $(U_1 U_2)^* A (U_1 U_2) = T$ e portanto $U^* A U = T$, onde U é unitária. $\square$

2.3.2 Matrizes Hermitianas

DEFINIÇÃO 2.7 A matriz $A \in M_n$ é hermitiana se $A = A^*$, onde $A^* = \overline{A}^t$. Se $A = -A^*$, então A é chamada anti-hermitiana.

Observações :

1. $A + A^*$, AA^* e A^*A são hermitianas para todo $A \in M_n$.
2. Se A é hermitiana então A^k é hermitiana para $k = 1, 2, \dots$
3. Se A é não-singular então A^{-1} é hermitiana.
4. Se A, B são hermitianas, então $aA + bB$ é hermitiana para todos os escalares reais a e b .
5. Se $A \in M_n$ é hermitiana, então $a_{ii} \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ e $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ para todos os i e j tais que $1 \leq i < j \leq n$.

LEMA 2.2 Sejam a e b números complexos, então, $a\bar{b} + \bar{a}b \in M_n(\mathbb{R})$.



Demonstração: Seja $a = a_1 + ia_2$ e $b = b_1 + ib_2$, onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são reais. Então,

$$\begin{aligned} a\bar{b} + \bar{a}b &= (a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2) + (a_1 - ia_2)(b_1 + ib_2) \\ &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_1b_1 + a_2b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + a_1b_2) \\ &= 2(a_1b_1 + a_2b_2), \end{aligned}$$

que é um número real. $\square$

TEOREMA 2.5 *Seja $A \in M_n$ hermitiana. Então,*

- (a) x^*Ax é real para todo $x \in \mathbb{C}^n$.
- (b) Todos os auto-valores de A são reais.
- (c) S^*AS é hermitiana para todo $S \in M_n$.

Demonstração: (a) Seja $x \in \mathbb{C}^n$, assim,

$$\begin{aligned} x^*Ax &= (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x_1\bar{x}_1 + a_{12}x_2\bar{x}_1 + \dots + a_{1n}x_n\bar{x}_1 \\ &\quad + a_{21}x_1\bar{x}_2 + a_{22}x_2\bar{x}_2 + \dots + a_{2n}x_n\bar{x}_2 \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_{n1}x_1\bar{x}_n + a_{n2}x_2\bar{x}_n + \dots + a_{nn}x_n\bar{x}_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i\bar{x}_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij}\bar{x}_i x_j + \overline{a_{ij}x_i x_j}) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ii}|x_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} [(a_{ij}x_j)\bar{x}_i + (\overline{a_{ij}x_j})x_i]. \end{aligned}$$

Pela Observação 5 acima, $a_{ii} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$. Logo, a primeira soma é real. O fato da segunda soma ser real segue imediatamente do Lema 2.2.

(b) Seja λ auto-valor de A com auto-vetor x . Então, $Ax = \lambda x$ e escolhemos $x^*x = 1$. Logo, $\lambda = \lambda x^*x = x^*\lambda x = x^*Ax$ que é real pelo item (a).

(c) Mostremos que (S^*AS) é hermitiana.

$$(S^*AS)^* = S^*A^*S = S^*AS.$$

Logo, S^*AS é hermitiana. $\square$

TEOREMA 2.6 (Teorema Espectral) *Seja $A \in M_n$ hermitiana. Então, existe uma matriz unitária $U \in M_n$ e uma diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $D = U^*AU$. (Os auto-vetores são as colunas de U e os auto-valores os elementos da diagonal de D).*

Demonstração: Como A é hermitiana, $A = A^*$. Pelo Teorema de Schur existe U unitária tal que $U^*AU = T$ onde T é triangular superior. Então, $(U^*AU)^* = T^*$. Mas, $U^*A^*U = U^*AU = T$. Logo, $T = T^*$. Assim temos que $t_{ij} = 0, i \neq j$ e $\overline{t_{ii}} = t_{ii}$ ou seja, $t_{ii} \in M_n(\mathbb{R})$.

Portanto, T é diagonal e real. $\square$

2.3.3 Teorema de Rayleigh-Ritz

TEOREMA 2.7 *Seja $A \in M_n$ hermitiana e seus auto-valores ordenados da forma*

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}.$$

*Então, $\lambda_1 x^*x \leq x^*Ax \leq \lambda_n x^*x$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$,*

$$\lambda_{\max} = \lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \max_{x^*x=1} x^*Ax,$$

$$\lambda_{\min} = \lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x} = \min_{x^*x=1} x^*Ax.$$

Demonstração: Como A é hermitiana, podemos escrever $A = UDU^*$, onde $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ e $U \in M_n$ unitária, isto é, $U^*U = I$. Para qualquer $x \in \mathbb{C}^n$ temos:

$$x^*Ax = x^*(UDU^*)x = (U^*x)^*D(U^*x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i |(U^*x)_i|^2.$$

Como cada termo $|(U^*x)_i|^2 > 0$, temos então:

$$\lambda_{\min} \sum_{i=1}^n |(U^*x)_i|^2 \leq x^*Ax = \sum_{i=1}^n \lambda_i |(U^*x)_i|^2 \leq \lambda_{\max} \sum_{i=1}^n |(U^*x)_i|^2.$$

Por outro lado, U é unitária, logo,

$$\sum_{i=1}^n |(U^*x)_i|^2 = (U^*x)^*(U^*x) = x^*UU^*x = x^*x.$$

Dessa forma,

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} \leq \lambda_n \sum_{i=1}^n \frac{|(U^*x)_i|^2}{x^*x} = \lambda_n.$$

Então, se $x \neq 0$, temos $\lambda_n \geq \frac{x^*Ax}{x^*x}$, com igualdade quando x é auto-vetor de A , ou seja,

$$\lambda_n = \max_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x}. \quad (2.16)$$

Analogamente,

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^n \frac{|(U^*x)_i|^2}{x^*x} = \lambda_1.$$

Então, se $x \neq 0$, temos $\lambda_1 \leq \frac{x^*Ax}{x^*x}$, com igualdade quando x é auto-vetor de A , isto é,

$$\lambda_1 = \min_{x \neq 0} \frac{x^*Ax}{x^*x}. \quad (2.17)$$

Ou seja, $\lambda_1 x^*x \leq x^*Ax \leq \lambda_n x^*x$.

Finalmente, de $x \neq 0$, temos

$$\frac{x^*Ax}{x^*x} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}} \right)^* A \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}} \right)$$

e

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}} \right)^* \left(\frac{x}{\sqrt{x^*x}} \right) = 1.$$

então, as condições (2.16) e (2.17) são equivalentes às condições $\max_{x^*x=1} x^*Ax = \lambda_n$ e $\min_{x^*x=1} x^*Ax = \lambda_1$, respectivamente. $\square$

2.4 Teorema de Rouché e o Teorema de Gauss-Lucas

Estes resultados serão utilizados no trabalho de Duffin e Schaeffer apresentado no Capítulo 3.

Consideremos algumas definições:



2.4.1 Funções de Variáveis Complexas

Seja S o conjunto dos números complexos. Se z é qualquer um dos números desse conjunto, então z é chamado de variável complexa.

Se, para cada valor z de S , o valor de uma segunda variável complexa w é determinado, temos que w é uma função da variável complexa z no conjunto S tal que $w = f(z)$.

Toda função $f(z)$ tem partes real e imaginária, as quais são funções reais de x e y . Sejam u e v essas partes. Então,

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

2.4.2 Limite e Continuidade

Dizemos que uma função $f(z)$ tem limite L quando z tende a z_0 se a distância, $|f(z) - L|$, entre $f(z)$ e L pode ser feita arbitrariamente pequena, desde que se restrinja z a uma vizinhança conveniente de z_0 . Em outras palavras, dado qualquer $\varepsilon > 0$ que mede a proximidade entre $f(z)$ e L , pode-se determinar um $\delta > 0$ de tal forma que para todos os valores de z sujeitos à condição $0 < |z - z_0| < \delta$, tenhamos $|f(z) - L| < \varepsilon$.

Damos então a seguinte definição de limite:

DEFINIÇÃO 2.8 *Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio D de uma função f , isto é, toda vizinhança de z_0 contém algum ponto de D diferente do próprio z_0 . Diz-se que f tem limite L para z tendendo a z_0 se, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$, tal que*

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

Escrevemos, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = L$.

DEFINIÇÃO 2.9 *Quando o ponto z_0 pertence ao domínio de f e $L = f(z_0)$, então dizemos que f é contínua no ponto z_0 :*



$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, encontramos $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

2.4.3 Diferenciabilidade

DEFINIÇÃO 2.10 Da classe de funções complexas contínuas, tomemos aquelas que podem ser diferenciáveis. Temos então: dado qualquer $\varepsilon > 0$ encontramos δ tal que

$$\left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| < \varepsilon, \text{ sempre que } |z - z_0| < \delta,$$

ou seja, $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0}$ e dizemos que $f(z)$ é diferenciável se o limite existir.

Tomemos, agora, as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$, que são as partes real e imaginária da função $f(z)$.

Suponhamos que $z - z_0$ seja puramente real. Então,

$$z_0 = x_0 + iy_0 \text{ e } z = x + iy_0.$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x, y_0) + iv(x, y_0) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \frac{iv(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Se esta expressão tende ao limite quando $x \rightarrow x_0$, então suas partes real e imaginária também tendem a limites, separadamente. Então, $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial x}$ existem no ponto (x_0, y_0) .

Temos também

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=x_0, y=y_0}. \quad (2.18)$$

Se tomarmos agora $z - z_0$ puramente imaginário então,

$$z_0 = x_0 + iy_0 \text{ e } z = x_0 + iy.$$

Temos

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0, y) + iv(x_0, y) - u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{iy - iy_0} \\ &= \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}.\end{aligned}$$

Da mesma forma, $\frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$ existem no ponto (x_0, y_0) . Temos

$$f'(z_0) = \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=x_0, y=y_0}. \quad (2.19)$$

Comparando (2.18) e (2.19) e igualando as partes real e imaginária, temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (x = x_0, y = y_0). \quad (2.20)$$

As equações (2.20) são chamadas de Equações de Cauchy-Riemann. Vemos dessa forma, que as funções $u(x, y)$ e $v(x, y)$ não apenas possuem coeficientes diferenciais parciais de primeira ordem, mas estão conectadas pelas equações de Cauchy-Riemann. Isso significa que mesmo que u e v sejam funções de x e y com coeficientes diferenciais parciais de primeira ordem, $u + iv$ poderá não ser uma função diferenciável em z .

2.4.4 Funções Analíticas

DEFINIÇÃO 2.11 *A função que é diferenciável no sentido definido acima, é dita ser analítica.*

A função é analítica em uma região se ela é analítica em todos os pontos da região. Se uma função é analítica em algum ponto de cada vizinhança de um ponto z_0 , exceto no próprio z_0 , então z_0 é dito ser ponto singular ou singularidade da função.

2.4.5 Contorno

DEFINIÇÃO 2.12 *São curvas contínuas consistindo de um número finito de arcos definidos como um conjunto de pontos (x, y) tais que*

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t), \quad (a \leq t \leq b),$$



onde ϕ' e ψ' são contínuas.

A definição estabelece uma transformação contínua de pontos t do intervalo (a, b) no arco e uma orientação dos pontos (x, y) de acordo com o sentido de crescimento de t . Se nenhum par de valores diferentes de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) , o arco se diz arco de Jordan. Se $\phi(a) = \phi(b)$ e $\psi(a) = \psi(b)$ e nenhum outro par de valores diferentes de t corresponde a um mesmo ponto (x, y) , então o arco contínuo é uma curva simples fechada.

O círculo

$$x = r_0 \cos t, y = r_0 \sin t, (0 \leq t \leq 2\pi),$$

é um exemplo de curva simples fechada.

2.4.6 Teorema de Cauchy

Seja $F(t) = U(t) + iV(t)$ uma função contínua da variável real t num intervalo $[a, b]$. Sua integral é definida em termos das integrais das funções reais U e V , mediante a expressão

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i \int_a^b V(t)dt.$$

A integral de uma função f de variável complexa z de um ponto $z = \alpha$ a um ponto $z = \beta$ é definida em termos dos valores de $f(z)$ nos pontos de um arco C que se estende do ponto α ao ponto β . Temos então

$$\int_C f(z)dz \text{ ou } \int_\alpha^\beta f(z)dz.$$

TEOREMA 2.8 *Se a função $f(z)$ é analítica em todos os pontos interiores e sobre um contorno fechado C , então*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Se existe um número finito de contornos $C', C'', \dots$ dentro de C e $f(z)$ é analítica na região entre eles, então

$$\int_C f(z)dz = \int_{C'} f(z)dz + \int_{C''} f(z)dz + \dots$$



TEOREMA 2.9 *Seja $f(z)$ analítica no interior e sobre um contorno fechado C . Então, se z é qualquer ponto do interior de C ,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Essa é chamada fórmula integral de Cauchy.

2.4.7 Derivadas de uma Função Analítica

Seja z um ponto qualquer no interior de C e $z + h$ um pontos nas vizinhanças mas também dentro de C . Então, pela fórmula acima temos

$$f(z + h) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z - h} dw.$$

Subtraindo essas duas equações apresentadas e dividindo por h , temos

$$\begin{aligned} \frac{f(z + h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z - h} - \frac{f(w)}{w - z} dw \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(w - z)f(w) - (w - z - h)f(w)}{(w - z - h)(w - z)} dw \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{hf(w)}{(w - z - h)(w - z)} dw \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)(w - z - h)} dw. \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0$, o integrando tende ao limite $\frac{f(w)}{(w - z)^2}$.

Mostremos que é possível passar o limite sob o sinal da integral. Consideremos a diferença

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(w)}{(w - z)(w - z - h)} dw - \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2} dw &= \int_C \frac{(w - z)f(w) - (w - z - h)f(w)}{(w - z)^2(w - z - h)} dw \\ &= \int_C \frac{hf(w)}{(w - z)^2} dw \\ &= h \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2(w - z - h)} dw. \end{aligned}$$

Seja M o valor máximo de $|f(w)|$ sobre C e L o comprimento de C . Se δ é a distância mínima de z a C e se $|h| < \delta$, então

$$\left| \int_C \frac{f(w)}{(w - z)^2(w - z - h)} dw \right| \leq \frac{ML}{\delta^2(\delta - |h|)},$$

que é limitado quando $|h| \rightarrow 0$. Assim, a última fração tende a zero com $|h|$. Consequentemente,

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw,$$

que é a fórmula de Cauchy para $f'(z)$.

Da mesma forma, temos que $f''(z)$, a derivada de $f'(z)$, existe e é dada pela fórmula

$$f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^3} dw.$$

Usando esse argumento repetidamente, temos que $f(z)$ tem derivadas de todas as ordens e a n -ésima é dada por

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw.$$

2.4.8 Séries de Taylor e de Laurent

Suponhamos $f(z)$ analítica dentro e sobre um contorno fechado simples C e seja a um ponto dentro de C . Então,

$$f(z) = f(a) + (z-a)f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots$$

é a série de Taylor, convergente se $|z-a| < \delta$.

Seja $f(z)$ analítica sobre C, C' e na região entre esses dois círculos concêntricos de raios R e R' ($R' < R$), respectivamente. Então, $f(z)$ pode ser expandida por uma série convergente de potências positivas e negativas de $(z-a)$, isto é:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}.$$

Essa série é chamada Série de Laurent.

2.4.9 Zeros de uma Função Analítica e Resíduos

Se $f(z)$ é analítica em a , existe uma vizinhança de a onde f é representada por uma série de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$



para $|z - a|$ suficientemente pequeno.

Se $a_n = 0$ para $n < m$ e $a_m \neq 0$, então diz-se que $f(z)$ tem um zero de m -ésima ordem. No zero de ordem m , temos

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0,$$

que é claro das séries de Taylor.

Se uma função é analítica num ponto então, a menos que a função seja identicamente nula, existe uma vizinhança desse ponto onde a função não tem zeros, exceto, possivelmente, no próprio ponto isto é, os zeros de uma função analítica são isolados.

Se $f(z)$ é analítica em toda vizinhança de um ponto a , dizemos para $|z - a| < R$, exceto no próprio ponto a . Então a é chamado singularidade isolada da função. Quando a é um ponto singular isolado de f , existe R tal que a função é analítica em cada ponto z onde $|z - a| < R$. Assim, a função é representada pela série de Laurent.

Se as séries de potências negativas de $(z - a)$ contiverem um número finito de termos, então $f(z)$ é dita ter um pólo no ponto $z = a$. Se tivermos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - a)^n + \sum_{n=1}^m b_n(z - a)^{-n}, \quad (2.21)$$

diz-se que o pólo é de ordem m .

Quando as séries de potências negativas de $(z - a)$ tiverem uma infinidade de termos, o ponto a é chamado ponto singular essencial da função.

Como foi dito acima, em uma vizinhança de uma singularidade isolada a , a função analítica pode ser expandida na forma (2.21). O coeficiente b_1 é chamado de resíduo de $f(z)$ no ponto $z = a$ onde

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz,$$

e γ é qualquer círculo com centro $z = a$. Observemos que se uma função tem apenas um número finito de singularidades no domínio, esses pontos singulares são necessariamente isolados.



TEOREMA 2.10 (Teorema dos Resíduos)

Seja $f(z)$ analítica sobre e no interior de C , exceto em um número finito de singularidades $z_1, z_2, \dots, z_n$. Se $R_1, R_2, \dots, R_n$ são os resíduos de $f(z)$ nesses pontos, então

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(R_1 + R_2 + \dots + R_n).$$

Demonstração: Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ círculos com centros $z_1, \dots, z_n$, respectivamente e raios tão pequenos que esses n círculos e o contorno C não se encontrem. Então, $f(z)$ é analítica na região entre C e esses círculos logo, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_C f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

Mas, sabemos que $\int_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i R_j$, $j = 1, \dots, n$. O resultado segue imediatamente. $\square$

2.4.10 Função Meromórfica

Uma função é meromórfica em uma região se é analítica na região, exceto em um número finito de pólos.

Uma função integral é a função que é analítica para todos os valores finitos de z . Seja $f(z)$ uma função integral de z . Suponhamos que ela possua zeros simples nos pontos $a_1, a_2, \dots$. Em uma vizinhança de a_n ,

$$f(z) = (z - a_n)g(z),$$

onde $g(z)$ é analítica e $g \neq 0$. Assim,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - a_n} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

e o último termo é analítico em a_n . Portanto, $f'(z)/f(z)$ tem pólo simples em $z = a_n$ com resíduo 1.

LEMA 2.3 Se $f(z)$ é analítica dentro e sobre um contorno fechado C , separadamente de um número finito de pólos, e não é zero no contorno, então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P,$$



onde N é o número de zeros dentro do contorno (um zero de ordem m sendo contado m vezes) e P é o número de pólos (um pólo de ordem m sendo contado m vezes).

Demonstração: Suponhamos que $z = a$ seja um zero de ordem m . Temos então que, na vizinhança desse ponto, $f(z) = (z - a)^m g(z)$, onde $g(z)$ é analítica e $g \neq 0$. Assim,

$$f'(z) = m(z - a)^{m-1}g(z) + (z - a)^m g'(z)$$

e, portanto, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - a} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, onde o último termo é analítico em $z = a$. Daí, temos $f'(z)/f(z)$ tem pólo simples em $z = a$ com resíduo m . Temos então, que a soma dos resíduos nos zeros de $f(z)$ é N .

Suponhamos agora, $z = a_p$ um pólo de ordem m . A função $h(z) = (z - a_p)^m f(z)$ pode ser definida em a_p de modo a se tornar analítica nesse ponto. Assim, em alguma vizinhança de a_p exceto no próprio ponto,

$$f(z) = (z - a_p)^{-m} h(z),$$

onde $h(a_p) \neq 0$,

$$f'(z) = -m(z - a_p)^{-m-1} h(z) + (z - a_p)^{-m} h'(z).$$

Portanto, $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - a_p} + \frac{h'(z)}{h(z)}$. Temos então que f'/f tem um pólo simples em a_p com resíduo $-m$. Logo, a soma dos resíduos nos pólos de $f(z)$ é $-P$. $\square$

COROLÁRIO 2.1 Se $f(z)$ é analítica no interior de C , então a fórmula acima mencionada se reduz a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N.$$

2.4.11 Teorema de Rouché

TEOREMA 2.11 Se $f(z)$ e $g(z)$ são funções analíticas dentro e sobre um contorno fechado C e $|g(z)| < |f(z)|$, $z \in C$, então $f(z)$ e $f(z) + g(z)$ têm o mesmo número de zeros no interior de C .

Demonstração: Sejam N o número de zeros de $f(z)$ e N' o número de zeros de $f(z) + g(z)$. Introduzindo a função analítica $\phi(z) = g(z)/f(z)$, podemos escrever

$$g'(z) = f'(z)\phi(z) + f(z)\phi'(z)$$

e

$$f(z) + g(z) = f(z) + f(z)\phi(z).$$

Assim, pelo Corolário 2.1,

$$\begin{aligned} N' &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z) + g'(z)}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f' + f'\phi + f\phi'}{f(1 + \phi)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'}{f} + \frac{\phi'}{1 + \phi} dz = N + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi'}{1 + \phi} dz. \end{aligned}$$

Desde que a função $1 + \phi(z)$ é meromórfica, ela pode ser representada por uma série de Laurent. Suponhamos que essa função possua pólo em $z = a$. Então, $|1 + \phi(z)| \rightarrow \infty$ quando $z = a$. Por outro lado, pela desigualdade triangular, $|1 + \phi(z)| \leq 1 + |\phi(z)| < 2$, $z \in C$, pois, por hipótese, $|f(z)| > |g(z)|$ e daí, $|\phi| = \frac{|g(z)|}{|f(z)|} < 1$.

Portanto, a função não possui pólos. Desse modo, a função possui apenas os termos de potências positivas em sua série de Laurent. Então, ela é uma função analítica.

Verifiquemos se essa função possui zeros dentro de C . Se a função $1 + \phi(z)$ tivesse zeros, então o valor da função $\phi(z)$ deveria ser -1 . Mas sabemos que $|\phi(z)| < 1$. Portanto, a função não possui zeros dentro de C .

Como

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1 + \phi)'}{1 + \phi} dz = N - P,$$

onde N é o número de zeros da função dentro de C e P é o número de pólos,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\phi'}{1 + \phi} dz = 0,$$

ou seja, $N' = N$. $\square$

2.4.12 Teorema de Gauss-Lucas

DEFINIÇÃO 2.13 Um conjunto S em $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ é convexo se $s_1, s_2 \in S$ implica

$$\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2 \in S,$$

para $0 \leq \lambda \leq 1$.

DEFINIÇÃO 2.14 Se números não negativos $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ satisfazem $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n, (\mathbb{C}^n)$, então $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$, é chamado uma combinação convexa de S e é denotado por $\hat{S}$.

TEOREMA 2.12 Se $p(z) = c(z - z_1) \dots (z - z_n)$, então os zeros de $p'(z)$ estão dentro do envoltório convexo $z_1, \dots, z_n$.

Demonstração: Suponhamos que $p'(\xi) = 0$ e $\xi \neq z_j, j = 1, \dots, n$. Então,

$$\frac{p'(\xi)}{p(\xi)} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\xi - z_j} = 0,$$

onde a igualdade acima vem do fato de $p(z) = c(z - z_1) \dots (z - z_n) = c\omega(z)$ e $p'(z) = c \sum_{i=1}^n \frac{\omega(z)}{z - z_i}$. Logo,

$$p'(z)/p(z) = c \sum_{i=1}^n \frac{\omega(z)}{z - z_i} / c\omega(z) = \sum_{i=1}^n 1/(z - z_i).$$

Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{\xi - z_j} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\xi - z_j} \frac{\xi - z_j}{\xi - z_j} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\xi - z_j}{|\xi - z_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{\xi}{|\xi - z_j|^2} - \sum_{j=1}^n \frac{z_j}{|\xi - z_j|^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\xi \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\xi - z_j|^2} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{|\xi - z_j|^2} z_j.$$

Dividindo ambos os membros por $\sum_{j=1}^n \frac{1}{|\xi - z_j|^2}$, obtemos

$$\xi = \sum_{j=1}^n \frac{\frac{1}{|\xi - z_j|^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{|\xi - z_j|^2}} z_j.$$

Dessa forma, tomemos λ_j números não negativos dados por

$$\lambda_j = \frac{\frac{1}{|\xi - z_j|^2}}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{|\xi - z_j|^2}} > 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Temos que eles satisfazem $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ e $\xi = \sum_{j=1}^n \lambda_j z_j$.

Assim, pelas definições dadas acima, ξ está, portanto, dentro do envoltório convexo $z_1, \dots, z_n$. $\square$

2.5 Teorema Geral do Valor Médio

TEOREMA 2.13 *Sejam f e g funções definidas no intervalo (a, b) tais que*

- 1) $f, g \in C[a, b]$,
- 2) $f, g \in C'(a, b)$ e
- 3) $g' \neq 0, \quad x \in (a, b)$.

Então, existe $\xi \in (a, b)$, tal que

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

2.6 Teorema de Rolle

TEOREMA 2.14 *Sejam $f \in C[a, b]$, com $f(a) = f(b)$ e $f \in C^1(a, b)$. Então, existe $\xi \in (a, b)$ tal que $f'(\xi) = 0$.*

Como corolário imediato do Teorema de Rolle temos,

COROLÁRIO 2.2 *Seja φ uma função tal que $\varphi(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_{n,i})$. Então, $\varphi^{(j)}(x) > 0$ para qualquer $x > x_{n,n}$ e para qualquer j tal que $0 \leq j \leq n$.*



Capítulo 3

A Desigualdade de Duffin e Schaeffer

Introdução

Consideremos a função f contínua em $[-1, 1]$ e a norma uniforme de f dada por

$$\|f\| = \max_{x \in [-1, 1]} |f(x)|.$$

Sabemos dos resultados de A. A. Markov [14] mencionados no Capítulo 1, que se $f(x)$ é um polinômio de grau n tal que $|f(x)| \leq 1$ no intervalo $[-1, 1]$, temos que $|f'(x)| \leq n^2$ em $[-1, 1]$ e o limite para a derivada é atingido pelo polinômio de Chebyshev $T_n(x)$.

Nesse trabalho, Duffin e Schaeffer mostram que se $|f(x)| \leq 1$ apenas nos $n + 1$ pontos $x = \eta_\nu = \cos(\nu\pi/n)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, isto é, nos pontos onde $|T_n(x)|$ atinge seus máximos no intervalo $[-1, 1]$, as conclusões de Markov não mudam.

Ainda nesse trabalho, Duffin e Schaeffer provam as desigualdades de V. A. Markov [15] como consequência de uma desigualdade mais geral relacionada à Interpolação de Lagrange.

Provaremos, inicialmente, alguns resultados para um polinômio modelo $g(z)$. Em seguida, verificaremos que o polinômio de Chebyshev satisfaz todas as exigências desse polinômio $g(z)$ e, por fim substituiremos o polinômio $T_n(x)$ no mesmo.



3.1 Uma Desigualdade da Interpolação

Seja $g(z)$ um polinômio de grau n com n zeros reais e distintos no intervalo (a, b) do eixo real. Podemos então, escrever

$$g(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_{\nu}), \quad c \neq 0 \quad (3.1)$$

e

$$g'(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{g(z)}{z - \lambda_{\nu}}, \quad (3.2)$$

onde λ_{ν} são os zeros de $g(z)$.

Procuramos algum meio para a determinação do máximo da função não analítica

$$M(x) = \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{g(x)}{x - \lambda_{\nu}} \right|.$$

Consideremos o polinômio $g(z)$ com a propriedade adicional

$$|g(x + iy)| \leq |g(b + iy)|; \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty. \quad (3.3)$$

Sujeito à essa última desigualdade, provaremos no Teorema 3.1 que

$$M(x) \leq M(b) = |g'(b)|, \quad a \leq x \leq b.$$

Isso equivale à afirmação que se $f(z)$ é um polinômio qualquer de grau n cuja derivada satisfaz à condição $|f'(x)| \leq |g'(x)|$ nos zeros de $g(x)$, então, considerando as mesmas restrições dadas acima a respeito de $g(z)$, (3.1) e (3.3),

$$|f'(x)| \leq |g'(b)|, \quad a \leq x \leq b. \quad (3.4)$$

A equivalência é uma consequência da fórmula de interpolação de Lagrange (2.15).

De (2.15), temos

$$L_{n-1}(h; x) = \sum_{\nu=1}^n h(x_{\nu}) \frac{\omega(x)}{(x - x_{\nu})\omega'(x_{\nu})},$$

onde $\omega(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$ e $h(x_{\nu}) = L_{n-1}(h; x_{\nu})$ para qualquer $h \in \pi_{n-1}$.

Como $f \in \pi_n$, temos que $f' \in \pi_{n-1}$. Logo, substituindo f' no lugar de h , temos

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^n f'(\lambda_{\nu}) \frac{\omega(z)}{(z - \lambda_{\nu})\omega'(x_{\nu})}.$$



Por (3.1), sabemos que $g = c\omega(z)$, ou seja, $\omega(z) = g/c$. Logo, $g' = c\omega'(z)$ ou, então, $\omega'(z) = g'/c$. Assim, obtemos

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f'(\lambda_\nu)}{g'(\lambda_\nu)} \frac{g(z)}{z - \lambda_\nu}.$$

Dessa forma, como $\frac{|f'(x)|}{|g'(x)|} \leq 1$ nos zeros de $g(x)$, então, se x é qualquer ponto em (a, b) ,

$$\max |f'(x)| = \sum_{\nu=1}^n \left| \frac{g(x)}{x - \lambda_\nu} \right|.$$

Verificaremos também os limites das altas derivadas do polinômio $f(z)$ e para isso, precisamos do seguinte lema:

LEMA 3.1 *Se $g(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_\nu)$, $c \neq 0$, é um polinômio de grau n com n zeros reais e distintos e se $f(z)$ é um polinômio de grau n tal que*

$$|f'(\lambda_\nu)| \leq |g'(\lambda_\nu)|, \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

então, para $k = 1, 2, \dots, n$, devemos ter, nos zeros de $g^{(k-1)}(z)$,

$$|f^{(k)}(z)| \leq |g^{(k)}(z)|. \quad (3.5)$$

Demonstração: Para $k = 1$ temos simplesmente a hipótese do lema. Tomemos, então, $k = 2$. Pela fórmula de interpolação de Lagrange temos,

$$f'(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f'(\lambda_\nu)}{g'(\lambda_\nu)} \frac{g(z)}{(z - \lambda_\nu)},$$

ou seja,

$$\frac{f'(z)}{g(z)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{f'(\lambda_\nu)}{g'(\lambda_\nu)} \frac{1}{z - \lambda_\nu} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta_\nu}{z - \lambda_\nu}, \quad (3.6)$$

onde $\delta_\nu = f'(\lambda_\nu)/g'(\lambda_\nu)$ e, pela hipótese do lema, $|\delta_\nu| \leq 1$.

Diferenciando (3.6) obtemos,

$$\frac{f''(z)g(z) - f'(z)g'(z)}{(g(z))^2} = - \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta_\nu}{(z - \lambda_\nu)^2}$$

Assim, nos zeros de $g'(z)$, ou seja, nos pontos onde $g' = 0$, temos

$$\left| \frac{f''(z)}{g(z)} \right| = \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta_{\nu}}{(z - \lambda_{\nu})^2} \right| \leq \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(z - \lambda_{\nu})^2}. \quad (3.7)$$

A fórmula de interpolação de Lagrange para $g'(z)$ nos dá

$$g'(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{g'(\lambda_{\nu})}{g'(\lambda_{\nu})} \frac{g(z)}{z - \lambda_{\nu}},$$

ou seja,

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(z - \lambda_{\nu})}.$$

Diferenciando essa última expressão, obtemos

$$\frac{g''(z)g(z) - g'(z)g'(z)}{(g(z))^2} = - \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(z - \lambda_{\nu})^2}.$$

Novamente, nos zeros de $g'(z)$ temos,

$$\left| \frac{g''(z)}{g(z)} \right| = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(z - \lambda_{\nu})^2}. \quad (3.8)$$

Das expressões (3.7) e (3.8), temos que

$$\left| \frac{f''(z)}{g(z)} \right| \leq \left| \frac{g''(z)}{g(z)} \right|.$$

Portanto, para $k = 2$, o lema está provado.

A prova para $k > 2$ é por indução. Consideremos o lema válido para $(k - 1)$, ou seja,

$|f^{(k-1)}(z)| \leq |g^{(k-1)}(z)|$ nos zeros de $g^{(k-2)}(z)$. Usando o mesmo argumento anterior para $f^{(k-1)}(z)$ e $g^{(k-1)}(z)$ no lugar de $f'(z)$ e $g'(z)$, obtemos

$$|f^{(k)}(z)| \leq |g^{(k)}(z)| \text{ nos zeros de } g^{(k-1)}(z). \quad \square$$

TEOREMA 3.1 *Seja $g(z)$ um polinômio de grau n com n zeros reais e distintos à esquerda de um ponto b no eixo real, e suponhamos que ele satisfaz à desigualdade*

$$|g(x + iy)| \leq |g(b + iy)|, \quad (3.9)$$

na faixa do plano complexo dada por $a \leq x \leq b, -\infty < y < \infty$.

Então, se $f(z)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais tal que

$$|f'(x)| \leq |g'(x)| \quad (3.10)$$

sempre que $g(x) = 0$, as derivadas de $f(z)$ e $g(z)$ devem satisfazer

$$|f^{(k)}(x + iy)| \leq |g^{(k)}(b + iy)|; \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

Demonstração: Mostremos primeiro que em um ponto fixado $x_1 + iy_1$ na faixa,

$$|f'(x_1 + iy_1)| \leq |g'(b + iy_1)|. \quad (3.12)$$

Consideremos o polinômio dado inicialmente, $g(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_\nu)$, $c \neq 0$, onde supomos c real e um novo polinômio $h(z)$ com o mesmo coeficiente principal de $g(z)$, cujas raízes são obtidas refletindo-se, relativamente a x_1 , as raízes que ficam do lado direito de x_1 , ou seja,

$$h(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \beta_\nu),$$

onde $\beta_\nu = 2x_1 - \lambda_\nu$ se $\lambda_\nu > x_1$ e $\beta_\nu = \lambda_\nu$ se $\lambda_\nu \leq x_1$.

Dessa forma, na reta $z = x_1 + iy$, $-\infty < y < \infty$, devemos ter $|z - \beta_\nu| = |z - \lambda_\nu|$.
Então

$$|h(x_1 + iy)| = |g(x_1 + iy)|. \quad (3.13)$$

Mostremos agora que no ponto $(x_1 + iy_1)$, $|f'(x_1 + iy_1)| \leq |h'(x_1 + iy_1)|$.

Como $h(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \beta_\nu)$, $h'(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{h(z)}{(z - \beta_\nu)}$, ou seja,

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{z - \beta_\nu}. \quad (3.14)$$

Tomemos $f'(z)$ dado pela fórmula de interpolação de Lagrange (3.6), onde $|\delta_\nu| \leq 1$ e comparemos o lado direito das desigualdades (3.6) e (3.14).

Temos então,

$$\left| \frac{f'(x_1 + iy_1)}{g(x_1 + iy_1)} \right| = \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta_\nu}{(x_1 + iy_1 - \lambda_\nu)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{\delta_{\nu}(x_1 - \lambda_{\nu})}{(x_1 - \lambda_{\nu})^2 + (y_1)^2} - i \sum_{\nu=1}^n \frac{y_1 \delta_{\nu}}{(x_1 - \lambda_{\nu})^2 + (y_1)^2} \right| \\
&\leq |\delta_{\nu}| \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{(x_1 - \lambda_{\nu})}{(x_1 - \lambda_{\nu})^2 + (y_1)^2} - i \sum_{\nu=1}^n \frac{y_1}{(x_1 - \lambda_{\nu})^2 + (y_1)^2} \right| \\
&\leq \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{(x_1 - \beta_{\nu})}{(x_1 - \beta_{\nu})^2 + (y_1)^2} - i \sum_{\nu=1}^n \frac{y_1}{(x_1 - \beta_{\nu})^2 + (y_1)^2} \right| \\
&\leq \left| \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{(x_1 - \beta_{\nu} + iy_1)} \right| \\
&= \left| \frac{h'(x_1 + iy_1)}{h(x_1 + iy_1)} \right|,
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é obtida pela expressão $\frac{1}{a+ib} \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$, tomando $a = x_1 - \lambda_{\nu}$ e $b = y_1$. A desigualdade vem do fato de $|\delta_{\nu}| \leq 1$. Podemos também substituir λ_{ν} por β_{ν} , já que, como foi dito, na reta $z = x_1 + iy$ temos $|z - \beta_{\nu}| = |z - \lambda_{\nu}|$ e por fim, utilizamos novamente a expressão dada acima.

Obtemos assim,

$$\frac{|f'(x_1 + iy_1)|}{|g(x_1 + iy_1)|} \leq \frac{|h'(x_1 + iy_1)|}{|h(x_1 + iy_1)|}.$$

Logo, por (3.13), temos $|h'(x_1 + iy_1)| \geq |f'(x_1 + iy_1)|$.

Seja α qualquer constante complexa tal que $|\alpha| < 1$ e $\phi(z) = g(z) - \alpha h(x_1 + z - b)$. Seja Γ uma curva simples fechada que consiste do segmento de reta $z = b + iy$ e da porção do círculo com centro b e raio ρ , o qual fica à direita da reta. As relações (3.9) e (3.13) mostram que sobre o segmento de reta $z = b + iy$ de Γ ,

$$|h(x_1 + iy)| \leq |g(x_1 + iy)| \leq |g(b + iy)|.$$

Então, substituindo $iy = z - b$ temos

$$|h(x_1 + z - b)| \leq |g(z)| \text{ para } z \in b + iy : y \in \mathbb{R}.$$

Como

$$\frac{|g(z)|}{|\alpha h(x_1 + z - b)|} = \frac{|cz^n + \dots|}{|\alpha cz^n|} \rightarrow \frac{1}{|\alpha|} > 1,$$

quando $|z| \rightarrow \infty$, temos que $|g(z)| > |\alpha h(x_1 + z - b)|$.

Se ρ é suficientemente grande, a desigualdade acima é verdadeira para a porção circular de Γ , pois $g(z)$ e $h(z)$ têm o mesmo coeficiente principal. Assim, o Teorema de Rouché (veja o Teorema 2.11), dado no Capítulo 2 (tomando $f = g$ e $g = -\alpha h(z + x_1 - b)$), afirma que $g(z)$ e $\phi(z) = g(z) - \alpha h(z + x_1 - b)$ têm o mesmo número de zeros dentro de Γ .

Como por hipótese $g(z)$ não tem zeros nessa região, implica que $\phi(z)$ também não tem zeros sobre ou à direita da reta $b + iy$. Essa afirmação, de acordo com o Teorema de Gauss-Lucas (veja o Teorema 2.12), implica que $\phi'(z)$ não tem zeros na reta $b + iy$.

Assim, para $|\alpha| < 1$,

$$\phi'(b + iy_1) = g'(b + iy_1) - \alpha h'(x_1 + iy_1) \neq 0.$$

Temos também que

$$\frac{|g'(z)|}{|\alpha h'(z + x_1 - b)|} = \frac{|nz^{n-1} + \dots|}{|\alpha n z^{n-1}|} \rightarrow \frac{1}{|\alpha|} > 1,$$

quando $|z| \rightarrow \infty$, ou seja, $|g'(z)| \geq |\alpha| |h'(x_1 + iy_1)|$, para $|\alpha| < 1$ e $|z| \rightarrow \infty$.

Segue então que $|g'(b + iy_1)| \geq |h'(x_1 + iy_1)| \geq |f'(x_1 + iy_1)|$, onde a última desigualdade foi provada anteriormente.

Isso prova o teorema para $k = 1$.

Vejamos agora o teorema para $k > 1$. Aplicando esse teorema para $k = 1$ quando $f(z)$ é a função $g(z)$, a desigualdade (3.11) mostra que

$$|g'(x + iy)| \leq |g'(b + iy)|; \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty.$$

Vemos, então, que essa função $g'(z)$ satisfaz às exigências impostas nesse teorema para a função $g(z)$, pois além de valer a desigualdade acima, pelo Lema 3.1, $|f''(x)| \leq |g''(x)|$ nos zeros de $g'(x)$. Então, podemos aplicar o teorema para $f'(x)$ ao invés de $f(x)$ no caso $k = 1$, que já mostramos ser verdadeiro. Desse modo, verificamos que

$$|f''(x + iy)| \leq |g''(b + iy)|; \quad a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty,$$

que prova a desigualdade (3.11) para $k = 2$.

Repetindo o mesmo argumento e aplicando o princípio da indução, mostramos a afirmação do teorema para qualquer k inteiro positivo. $\square$

COROLÁRIO 3.1 *Sejam $f(z)$ e $g(z)$ polinômios que satisfazem às exigências do Teorema 3.1, exceto a condição de $f(z)$ ter coeficientes reais. Então, para $k = 1, 2, \dots, n$,*

$$|f^{(k)}(x)| \leq |g^{(k)}(b)|, \quad a \leq x \leq b.$$

Demonstração: Diferenciando $(k-1)$ vezes a expressão $f'(z) = \sum_{\nu=1}^n \frac{f'(\lambda_\nu)}{g'(\lambda_\nu)} \frac{g(z)}{(z-\lambda_\nu)}$, obtemos

$$f^{(k)}(x) = \sum_{\nu=1}^n \delta_\nu \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \frac{g(x)}{x-\lambda_\nu},$$

onde $|\delta_\nu| = \left| \frac{f'(\lambda_\nu)}{g'(\lambda_\nu)} \right| \leq 1$.

Se x é qualquer ponto do intervalo (a, b) , $f^{(k)}(x)$ atinge seu máximo quando $\delta_\nu = \pm 1$ e como $g'(x) = \sum_{\nu=1}^n \frac{g(x)}{(x-\lambda_\nu)}$ temos

$$|f^{(k)}(x)| \leq \left| \frac{d^{k-1}g'(x)}{dx^{k-1}} \right| = |g^{(k)}(x)| \leq |g^{(k)}(b)|, \quad a \leq x \leq b. \quad \square$$

3.2 Propriedade dos Polinômios de Chebyshev

Como já dissemos, nessa segunda parte mostraremos que os polinômios de Chebyshev $T_n(x)$, satisfazem às condições impostas no teorema acima sobre o polinômio modelo $g(z)$. Tomaremos $a = -1$ e $b = 1$.

Sabemos que os polinômios de Chebyshev, introduzidos na seção 2.1, são polinômios de grau n definidos por $T_n(x) = \cos n\theta$, $x = \cos \theta$ e possuem n raízes reais e distintas em $[-1, 1]$.

Podemos escrever

$$T_n(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \cos \theta_\nu), \quad \theta_\nu = \left(\nu - \frac{1}{2}\right)\pi/n, \quad \nu = 1, \dots, n \quad \text{e} \quad c = 2^{n-1}. \quad (3.15)$$

Para chegar ao nosso objetivo, precisamos dos seguintes lemas:

LEMA 3.2 Seja $\{\alpha_i\}$ a sequência de $2n$ números não negativos e seja $\{\alpha'_i\}$ um rearranjo dessa sequência de acordo com a magnitude,

$$\alpha'_1 \geq \alpha'_2 \geq \dots \geq \alpha'_{2n} \geq 0.$$

Então, se $t \geq 0$,

$$(\alpha_1\alpha_2+t)(\alpha_3\alpha_4+t)\dots(\alpha_{2n-1}\alpha_{2n}+t) \leq (\alpha'_1\alpha'_2+t)(\alpha'_3\alpha'_4+t)\dots(\alpha'_{2n-1}\alpha'_{2n}+t). \quad (3.16)$$

Demonstração: Sejam α_1 e α_3 tão grandes quanto qualquer um dos α . Então,

$$(\alpha_1\alpha_3+t)(\alpha_2\alpha_4+t) - (\alpha_1\alpha_2+t)(\alpha_3\alpha_4+t) = t(\alpha_1 - \alpha_4)(\alpha_3 - \alpha_2) \geq 0,$$

pois $t \geq 0$, $\alpha_1 - \alpha_4 \geq 0$ e $\alpha_3 - \alpha_2 \geq 0$. Daí,

$$(\alpha_1\alpha_3+t)(\alpha_2\alpha_4+t) \geq (\alpha_1\alpha_2+t)(\alpha_3\alpha_4+t).$$

Isso mostra que podemos rearranjar os α de modo que os dois maiores podem ser postos em um mesmo fator sem decrescer (3.16). $\square$

LEMA 3.3 Os polinômios de Chebyshev satisfazem à desigualdade

$$|T_n(x+iy)| \leq |T_n(1+iy)| \text{ para } -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -\infty < y < \infty.$$

Demonstração: Sabemos que

$$T_n(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \cos \theta_\nu), \quad \theta_\nu = (\nu - \frac{1}{2})\pi/n, \quad \nu = 1, \dots, n.$$

Como $z = x + iy$ e $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, temos

$$|(x - \cos \theta_\nu) + iy|^2 = (x - \cos \theta_\nu)^2 + y^2.$$

Assim,

$$|T_n(x+iy)|^2 = c^2 \prod_{\nu=1}^n \{(x - \cos \theta_\nu)^2 + y^2\}.$$

Se $-1 \leq x \leq 1$, podemos escrever $x = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Então,

$$|T_n(x+iy)|^2 = c^2 \prod_{\nu=1}^n [(\cos \theta - \cos \theta_\nu)^2 + y^2].$$

Mas, como $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, então,

$$\begin{aligned} (\cos \theta - \cos \theta_\nu)^2 &= \left(\frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) - (e^{i\theta_\nu} + e^{-i\theta_\nu})}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^2 - 2(e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{i\theta_\nu} + e^{-i\theta_\nu}) + (e^{i\theta_\nu} + e^{-i\theta_\nu})^2] \\ &= \frac{1}{4} (e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + e^{2i\theta_\nu} + e^{-2i\theta_\nu} + 4) + \\ &\quad + \frac{1}{4} [2(-e^{-i(\theta+\theta_\nu)} - e^{i(\theta+\theta_\nu)} - e^{-i(\theta-\theta_\nu)} - e^{i(\theta-\theta_\nu)})]. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que $|z|^2 = z\bar{z}$. Então,

$$|e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2 = (e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu})(e^{-i\theta} - e^{i\theta_\nu}) = 2 - e^{-i(\theta+\theta_\nu)} - e^{i(\theta+\theta_\nu)}$$

e

$$|e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2 = (e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu})(e^{-i\theta} - e^{-i\theta_\nu}) = 2 - e^{-i(\theta-\theta_\nu)} - e^{i(\theta-\theta_\nu)}.$$

Multiplicando ambos, temos,

$$\begin{aligned} |e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2 |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2 &= 4 - 2e^{-i(\theta-\theta_\nu)} - 2e^{i(\theta-\theta_\nu)} - 2e^{-i(\theta+\theta_\nu)} + \\ &\quad + e^{-2i\theta} + e^{-2i\theta_\nu} - 2e^{i(\theta+\theta_\nu)} + e^{2i\theta_\nu} + e^{2i\theta} \\ &= e^{2i\theta} + e^{-2i\theta} + e^{2i\theta_\nu} + e^{-2i\theta_\nu} + 4 + \\ &\quad + 2(-e^{-i(\theta+\theta_\nu)} - e^{i(\theta+\theta_\nu)} - e^{-i(\theta-\theta_\nu)} - e^{i(\theta-\theta_\nu)}). \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos escrever

$$(\cos \theta - \cos \theta_\nu)^2 = \frac{1}{4} |e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2 |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2.$$

Logo,

$$|T_n(x + iy)|^2 = c^2 \prod_{\nu=1}^n \left[\frac{1}{4} |e^{i\theta} - e^{-i\theta_\nu}|^2 |e^{i\theta} - e^{i\theta_\nu}|^2 + y^2 \right]. \quad (3.17)$$

Geometricamente, $e^{\pm i\theta_\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$, representam $2n$ pontos igualmente distribuídos em um círculo unitário. Unindo esses pontos ao ponto $e^{i\theta}$, obteremos $2n$ cordas com o comprimento dados por $|e^{i\theta} - e^{\pm i\theta_\nu}|$. Se θ cresce ou decresce por qualquer múltiplo de $\frac{\pi}{n}$, obtemos um novo conjunto de cordas, mas o total do seu comprimento é o mesmo.

Escolhamos ϕ tal que $\phi = \theta(\text{mod } \frac{\pi}{n})$, $-\frac{\pi}{2n} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2n}$.

Se $x^* = \cos \phi$, então

$$|T_n(x^* + iy)|^2 = c^2 \prod_{\nu=1}^n \left[\frac{1}{4} |e^{i\phi} - e^{-i\theta_\nu}|^2 |e^{i\phi} - e^{i\theta_\nu}|^2 + y^2 \right], \quad (3.18)$$

onde os números $|e^{i\phi} - e^{\pm i\theta_\nu}|$ são simplesmente um rearranjo dos números $|e^{i\theta} - e^{\pm i\theta_\nu}|^2$ que aparecem em (3.17).

Na verdade, estamos aplicando o Lema 3.2 aos produtos em (3.17) e (3.18). Assim, unindo os números $|e^{i\phi} - e^{\pm i\theta_\nu}|$ em (3.18) pela sua magnitude, temos

$$|T_n(x + iy)|^2 \leq |T_n(x^* + iy)|^2.$$

Por construção, $x^* + iy$ fica na faixa $\cos \theta_1 \leq x \leq 1$, onde $\cos \theta_1$ é a maior raiz de $T_n(x)$. Assim, a distância de qualquer raiz a $x^* + iy$ não é maior do que a distância da mesma raiz a $1 + iy$, isto é, para $1 \leq \nu \leq n$,

$$|x^* + iy - \cos \theta_\nu| \leq |1 + iy - \cos \theta_\nu|.$$

Logo, $|x^* - \cos \theta_\nu|^2 + y^2 \leq |1 - \cos \theta_\nu|^2 + y^2$ e portanto, $x^* - \cos \theta_\nu \leq 1 - \cos \theta_\nu$.

Dessa forma, obtemos $c \prod_{\nu=1}^n |x^* + iy - \cos \theta_\nu| \leq c \prod_{\nu=1}^n |1 + iy - \cos \theta_\nu|$.

Logo, de (3.15) temos $|T_n(x^* + iy)| \leq |T_n(1 + iy)|$. $\square$

3.3 As Desigualdades dos Irmãos Markov

Nesta parte, mostraremos alguns resultados para $T_n(x)$ e provaremos a desigualdade de V. A. Markov.

LEMA 3.4 *Seja $f(x)$ um polinômio de grau n satisfazendo $|f(x)| \leq 1$ em $x = \cos(\nu\pi/n)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$. Então,*

$$|f'(x)| \leq n(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$x = \xi_\nu = \cos[(\nu - \frac{1}{2})\pi/n], \quad \nu = 1, \dots, n.$$

A igualdade pode ocorrer apenas se $f(x) = \gamma T_n(x)$, para alguma constante γ , $|\gamma| = 1$.



Demonstração: Vimos em (2.13), que podemos escrever $T'_n = nU_{n-1}$, onde U_{n-1} é o polinômio de grau $n - 1$, chamado polinômio de Chebyshev de segunda espécie.

Temos que

$$U_{n-1} = 2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} [x - \cos(\nu\pi/n)].$$

$$\text{Seja } \psi(x) = (1 - x^2)T'_n(x) = n(1 - x^2)2^{n-1} \prod_{\nu=1}^{n-1} [x - \cos(\nu\pi/n)].$$

Observemos agora que

$$\begin{aligned} (x^2 - 1) &= [(x - \cos(0\pi/n))(x - \cos(n\pi/n))] \\ &= (x - 1)(x + 1), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\psi(x) = (1 - x^2)T'_n(x) = a \prod_{\nu=0}^n (x - \cos(\nu\pi/n)),$$

onde $a = (-1)^{2^{n-1}n}$.

Sabemos que os polinômios de Chebyshev satisfazem à equação diferencial

$$(1 - x^2)T''_n(x) - xT'_n(x) + n^2T_n(x) = 0,$$

por isso podemos escrever,

$$\psi'(x) = -2xT'_n(x) + (1 - x^2)T''_n(x) = -2xT'_n(x) + xT'_n(x) - n^2T_n(x)$$

ou seja,

$$\psi'(x) = -xT'_n(x) - n^2T_n(x).$$

Da fórmula de interpolação de Lagrange, usando $\eta_\nu = \cos(\nu\pi/n)$, temos

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{\psi(x)}{(x - \eta_\nu)}.$$

Diferenciando essa fórmula para $f(x)$ e substituindo o valor de $\psi'(x)$ obtemos,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{(x - \eta_\nu)\psi'(x) - \psi(x)}{(x - \eta_\nu)^2} \\ &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{(x - \eta_\nu)(-xT'_n(x) - n^2T_n(x)) - (1 - x^2)T'_n(x)}{(x - \eta_\nu)^2}. \end{aligned}$$



Nos zeros de $T_n(x)$, isto é, para $x = \xi_\nu$, a última igualdade reduz-se a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{(x - \eta_\nu)(-xT'_n(x)) - (1 - x^2)T'_n(x)}{(x - \eta_\nu)^2} \\ &= -T'_n(x) \sum_{\nu=0}^n \frac{f(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{(1 - x\eta_\nu)}{(x - \eta_\nu)^2}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Seguindo o mesmo caminho, nos zeros de $T_n(x)$, obtemos

$$T'_n(x) = -T'_n(x) \sum_{\nu=0}^n \frac{T_n(\eta_\nu)}{\psi'(\eta_\nu)} \frac{(1 - x\eta_\nu)}{(x - \eta_\nu)^2},$$

como $T_n(\eta_\nu)$ e $\psi'(\eta_\nu)$ tem sinais opostos, pois $\psi'(\eta_\nu) = -xT'_n(\eta_\nu)$, segue que

$$T'_n(x) = T'_n(x) \sum_{\nu=0}^n \left| \frac{1}{\psi'(\eta_\nu)} \right| \frac{(1 - x\eta_\nu)}{(x - \eta_\nu)^2}. \quad (3.20)$$

Agora, por hipótese, $|f(\eta_\nu)| \leq 1$. Comparando então (3.19) e (3.20),

$$|f'(x)| \leq |T'_n(x)|, \text{ sempre que } T_n(x) = 0.$$

A igualdade ocorre apenas se $f(\eta_\nu) = \gamma T_n(\eta_\nu)$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, onde γ é constante, $|\gamma| = 1$. $\square$

TEOREMA 3.2 Se $f(z)$ é um polinômio de grau n com coeficientes reais e se $|f(\eta_\nu)| \leq 1$, $\nu = 0, 1, \dots, n$, então, para $k = 1, 2, \dots, n$,

$$|f^{(k)}(x + iy)| \leq |T_n^{(k)}(1 + iy)|; \quad -1 \leq x \leq 1, \quad -\infty < y < \infty.$$

A igualdade pode ocorrer apenas se $f(z) = \pm T_n(z)$.

Demonstração: Para demonstrarmos esse teorema, vamos recordar rapidamente alguns resultados básicos já vistos neste capítulo.

Lema 3.1: Se $g(z) = c \prod_{\nu=1}^n (z - \lambda_\nu)$ e $|f'(\lambda_\nu)| \leq |g'(\lambda_\nu)|$, então, para $g^{(k-1)}(z) = 0$, temos $|f^{(k)}(z)| \leq |g^{(k)}(z)|$.

Teorema 3.1: Se $|g(x + iy)| \leq |g(b + iy)|$, $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < \infty$ e $|f'(x)| \leq |g'(x)|$, sempre que $g(x) = 0$, então, $|f^{(k)}(x + iy)| \leq |g^{(k)}(b + iy)|$, $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < \infty$.

Lema 3.3: $|T_n(x + iy)| \leq |T_n(1 + iy)|$; $-1 \leq x \leq 1$, $-\infty < y < \infty$.

Lema 3.4: Se $|f(\eta_\nu)| \leq 1$, ou seja, $|f(\eta_\nu)| \leq |T_n(\eta_\nu)|$, $\nu = 1, 2, \dots$, então $|f'(\xi_\nu)| \leq n(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = |T'_n(\xi_\nu)|$ e temos igualdade se $f(x) = \gamma T_n(x)$, $|\gamma| = 1$.

Pela hipótese deste teorema, o polinômio $f(z)$ deve satisfazer

$$|f(\eta_\nu)| \leq 1 = |T_n(\eta_\nu)|, \nu = 0, 1, \dots, n.$$

Então, pelo Lema 3.4, temos $|f'(\xi_\nu)| \leq |T'_n(\xi_\nu)|$, ou seja, o polinômio de Chebyshev satisfaz às exigências do Lema 3.1 e, portanto, $|f^{(k)}(z)| \leq |T_n^{(k)}(z)|$. Então, tomando $k = 1$ e $z = \xi_\nu$, observamos que a segunda exigência do Teorema 3.1 é também satisfeita e a primeira, por sua vez, é satisfeita pelo Lema 3.3. Logo, como consequência, temos

$$|f^{(k)}(x + iy)| \leq |T_n^{(k)}(1 + iy)|, -1 \leq x \leq 1, -\infty < y < \infty. \quad \square$$

TEOREMA 3.3 *Seja $f(z)$ um polinômio de grau n satisfazendo $|f(\eta_\nu)| \leq 1$, $\nu = 0, 1, \dots, n$. Então, para $k = 1, 2, \dots, n$,*

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k - 1)^2)}{1.3.5 \dots (2k - 1)}. \quad (3.21)$$

A igualdade pode ocorrer apenas se $f(z) = \gamma T_n(z)$, $|\gamma| = 1$.

Demonstração: Observemos que esse teorema é uma consequência do Teorema 3.2.

Basta tomarmos $y = 0$. Assim, pelo Teorema 3.2, se $|f(\eta_\nu)| \leq 1$, $\nu = 0, \dots, n$ e, então, $|f^{(k)}(x + iy)| \leq |T_n^{(k)}(1 + iy)|$, $k = 1, \dots, n$. Tomando $y = 0$, temos $|f^{(k)}(x)| \leq |T_n^{(k)}(1)|$. Dessa forma, precisamos apenas mostrar que

$$|T_n^{(k)}(1)| = \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k - 1)^2)}{1.3.5 \dots (2k - 1)}.$$

Diferenciando a equação diferencial

$$(1 - z^2)T_n''(z) - zT_n'(z) + n^2T_n(z) = 0$$

k vezes, obtemos

$$(1 - z^2)T_n^{(k+2)}(z) - (2k + 1)zT_n^{(k+1)}(z) + (n^2 - k^2)T_n^{(k)}(z) = 0.$$

Substituindo $z = 1$ temos

$$(2k + 1)T_n^{(k+1)}(1) = (n^2 - k^2)T_n^{(k)}(1). \quad (3.22)$$

Agora, $T'_n(1) = n^2$ e através da igualdade (3.22), provaremos por indução que $T_n^{(k)}(1)$ é igual ao lado direito de (3.21).

Suponhamos que a igualdade (3.22) vale para $k - 2$. Logo,

$$|T_n^{(k-1)}(1)| = \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-2)^2)}{1.3.5 \dots (2k-3)}.$$

Mostremos que vale para $k - 1$. Substituindo $k = k - 1$ na igualdade (3.22), obtemos

$$(2(k-1) + 1)T_n^{(k)}(1) = (n^2 - (k-1)^2)T_n^{(k-1)}(1)$$

o que implica em

$$|T_n^{(k)}(1)| = \frac{n^2(n^2 - 1^2) \dots (n^2 - (k-1)^2)}{1.3.5 \dots (2k-1)}. \quad \square$$

Capítulo 4

Desigualdades Polinomiais do Tipo Markov na Norma L_2

Introdução

*Seja $p \in \pi_n$ um polinômio de grau n . Consideremos o seguinte problema extremo:
Dada uma norma $\|\cdot\|$, determinar a melhor constante A_n tal que*

$$\|p'\| \leq A_n \|p\|,$$

isto é,

$$A_n = \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p'\|}{\|p\|}. \quad (4.1)$$

Como já mencionamos no Capítulo 1, o primeiro resultado nesse sentido, é a conhecida desigualdade clássica de A. A. Markov, onde ele utiliza a norma uniforme no intervalo $[-1, 1]$. A desigualdade para altas derivadas de p foi descoberta por seu irmão V. A. Markov em 1892. Os resultados de A. A. Markov e V. A. Markov, foram provados no capítulo anterior.

Neste capítulo, daremos a solução do problema extremo dado em (4.1) utilizando a norma L_2 , reduzindo-o a um problema de auto-valores e auto-vetores de matrizes. A ferramenta fundamental para esse objetivo é o Teorema de Rayleigh-Ritz, cujas afirmação e demonstração foram dadas no Capítulo 2.



4.1 Redução da desigualdade de Markov na Norma L_2 para um problema de auto-valores e auto-vetores de matrizes

Seja a norma da função f definida por

$$\|f\|^2 = \int_a^b f^2(t)\omega(t)dt,$$

onde $(a, b) \subset \mathbb{R}$ e $\omega(t)$ é uma função peso.

4.1.1 Redução do problema extremo para o máximo auto-valor de uma dada matriz

Consideremos o problema extremo dado em (4.1).

Seja $p_i(t)$ uma sequência de polinômios ortonormais com respeito à função peso $\omega(t)$ e os elementos $\alpha_{i,j}$ da matriz simétrica $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n,1} & \alpha_{n,2} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

dados por $\alpha_{i,j} = \int_a^b p_i'(t)p_j'(t)\omega(t)dt$.

TEOREMA 4.1 *Para qualquer polinômio $p \in \pi_n$, $\|p'\| \leq \lambda_{\max}(A) \|p\|$, onde $\lambda_{\max}(A)$ é o maior auto-valor da matriz A . Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $p(t) = p^*(t) = \sum_{i=1}^n a_i^* p_i(t)$, onde $[a_1^*, \dots, a_n^*]^t$ é o auto-vetor da matriz A associado ao auto-valor $\lambda_{\max}(A)$.*

Demonstração: Seja $p_n(t)$ uma sequência de polinômios ortonormais de grau n . Pelo Teorema 2.1, esses polinômios são linearmente independentes. Assim, $p_0, \dots, p_n$, formam uma base em π_n . Portanto, pelo Teorema 2.2, existe um único vetor $(a_0, \dots, a_n) \in$

$\mathbb{R}^{n+1}$ tal que o polinômio p pode ser representado de forma única como

$$p(t) = a_0 p_0(t) + \dots + a_n p_n(t) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(t)$$

e, consequentemente,

$$p'(t) = a_0 p'_0(t) + \dots + a_n p'_n(t) = \sum_{i=1}^n a_i p'_i(t).$$

Observemos que $p'_0(t) \equiv 0$, visto que $p_0(t) = c$, onde c é uma constante.

Assim,

$$\begin{aligned} \|p\|^2 &= \int_a^b p^2(t) \omega(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2 \int_a^b p_i^2(t) \omega(t) dt + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \int_a^b p_i(t) p_j(t) \omega(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2, \end{aligned}$$

onde, na segunda igualdade, utilizamos o Lema 2.1 e a última igualdade vem do fato de $p_0, \dots, p_n$ serem ortonormais. Além disso,

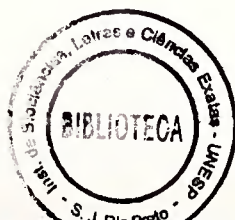
$$\begin{aligned} \|p'\|^2 &= \int_a^b (p'(t))^2 \omega(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \int_a^b (p'_i(t))^2 \omega(t) dt + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \int_a^b p'_i(t) p'_j(t) \omega(t) dt. \end{aligned}$$

Recordando que $\int_a^b [p'_i(t)]^2 \omega(t) dt = \alpha_{i,i}$ e $\int_a^b p'_i(t) p'_j(t) \omega(t) dt = \alpha_{i,j}$, temos

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p'\|^2}{\|p\|^2} \\ &= \max \left\{ \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j} \right) / \sum_{i=0}^n a_i^2 : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Como o numerador não depende de a_0 , o máximo será atingido para $a_0 = 0$, ou seja,

$$A_n^2 = \max \left\{ \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j} \right) / \sum_{i=1}^n a_i^2 : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$



O nosso problema então reduz-se a encontrar o máximo de

$$\left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j} \right\} \quad (4.3)$$

sujeito a $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. Observemos que (4.3) pode ser escrito como $\max \{a^t A a : \langle a, a \rangle = 1\}$, onde A é a matriz dada por (4.2) e o vetor $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz, encontrar o máximo de $a^t A a$; $a = (a_1, \dots, a_n)$ sujeito a $\langle a, a \rangle = 1$, é encontrar o maior auto-valor da matriz A , ou seja,

$$\|p'\|^2 \leq \lambda_{\max}(A) \|p\|^2. \quad (4.4)$$

Além disso, (4.4) reduz-se à igualdade se $p(t) = p^* = \sum_{i=0}^n a_i^* p_i(t)$, onde $[a_0^*, \dots, a_n^*]^t$ é o auto-vetor da matriz A associado ao auto-valor $\lambda_{\max}(A)$. $\square$

Consideremos agora o seguinte problema extremo para as altas derivadas de p :
Determinar a melhor constante $A_{n,k}$ tal que

$$A_{n,k} = \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p^{(k)}\|}{\|p\|}, \quad 1 \leq k \leq n. \quad (4.5)$$

TEOREMA 4.2 *A melhor constante $A_{n,k}$ definida em (4.5) é dada por*

$$A_{n,k} = \sqrt{\lambda_{\max}(B_{n,k})},$$

onde $\lambda_{\max}(B_{n,k})$ é o maior auto-valor da matriz

$$B_{n,k} = \begin{pmatrix} b_{k,k}^{(k)} & b_{k,k+1}^{(k)} & \dots & b_{k,n}^{(k)} \\ b_{k+1,k}^{(k)} & b_{k+1,k+1}^{(k)} & \dots & b_{k+1,n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,k}^{(k)} & b_{n,k+1}^{(k)} & \dots & b_{n,n}^{(k)} \end{pmatrix},$$

cujos elementos são dados por $b_{i,j}^{(k)} = \int_a^b p_i^{(k)}(t) p_j^{(k)}(t) \omega(t) dt$.

O polinômio extremo é $p^*(t) = \sum_{i=k}^n a_i p_i(t)$, onde $[a_k, a_{k+1}, \dots, a_n]^t$ é o auto-vetor de $B_{n,k}$ correspondente ao auto-valor $\lambda_{\max}(B_{n,k})$.

Demonstração: Seja $p \in \pi_n$, um polinômio de grau n . Assim, de maneira análoga ao teorema anterior, p pode ser representado unicamente da forma

$$p(t) = \sum_{i=0}^n a_i p_i(t)$$

e, portanto, $\|p\|^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2$.

Por outro lado, sabemos que $p^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^n a_i p_i^{(k)}(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} \|p^{(k)}\|^2 &= \int_a^b \left(\sum_{i=k}^n a_i p_i^{(k)}(t) \right)^2 \omega(t) dt \\ &= \sum_{i=k}^n a_i^2 \int_a^b (p_i^{(k)}(t))^2 \omega(t) dt + 2 \sum_{k \leq i < j \leq n} a_i a_j \int_a^b p_i^{(k)}(t) p_j^{(k)}(t) \omega(t) dt. \end{aligned}$$

Como $\int_a^b (p_i^{(k)}(t))^2 \omega(t) dt = b_{i,i}^{(k)}$ e $\int_a^b p_i^{(k)}(t) p_j^{(k)}(t) \omega(t) dt = b_{i,j}^{(k)}$, temos,

$$\begin{aligned} A_{n,k}^2 &= \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p^{(k)}\|^2}{\|p\|^2} \\ &= \max \left\{ \frac{\sum_{i=k}^n a_i^2 b_{i,i}^{(k)} + 2 \sum_{k \leq i < j \leq n} a_i a_j b_{i,j}^{(k)}}{a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2} : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Como o numerador não depende de $a_0, \dots, a_{k-1}$, temos que o máximo será atingido para $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$. Assim,

$$A_{n,k}^2 = \max_{a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \frac{\sum_{i=k}^n a_i^2 b_{i,i}^{(k)} + 2 \sum_{k \leq i < j \leq n} a_i a_j b_{i,j}^{(k)}}{a_k^2 + \dots + a_n^2} = \max_{a \in \mathbb{R}} \frac{a^t (B_{n,k}) a}{a^t a},$$

onde $a = [a_k, \dots, a_n]$.

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz,

$$A_{n,k}^2 = \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p^{(k)}\|^2}{\|p\|^2} = \lambda_{\max}(B_{n,k}),$$

ou seja, $\|p^{(k)}\|^2 \leq \lambda_{\max}(B_{n,k}) \|p\|^2$, que se reduz à igualdade se tomarmos $p(t) = p^*(t) = \sum_{i=k}^n a_i^* p_i(t)$, onde $[a_k^*, a_{k+1}^*, \dots, a_n^*]^t$ é o auto-vetor da matriz $B_{n,k}$ correspondente a $\lambda_{\max}(B_{n,k})$. $\square$

Daremos, agora, alguns exemplos dos resultados fornecidos pelos teoremas dados acima.



4.1.2 Casos Particulares

A Desigualdade de Schmidt

Para o problema (4.1), demonstraremos o seguinte resultado de Schmidt [20]:

Seja $(a, b) = (-\infty, \infty)$ e $\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f(t)^2 dt$. Então, a melhor constante em (4.1) é $A_n = \sqrt{2n}$. O polinômio extremo é o polinômio de Hermite H_n .

Vamos determinar a melhor constante A_n tal que

$$\|f'\|^2 \leq A_n^2 \|f\|^2, \quad f \in \pi_n.$$

Seja

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i \frac{H_i(t)}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{i}{2}} \sqrt{i!}},$$

onde $H_i(t)$ é o polinômio de Hermite e a_i os coeficientes. Podemos, assim, representar f como combinação linear única desses polinômios, uma vez que $H_i(t)$ formam base ortogonal.

Chamemos $h_i(t) = H_i(t) / (\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{i}{2}} \sqrt{i!})$. Assim, podemos escrever $f(t) = \sum_{i=0}^n a_i h_i(t)$.

Logo,

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left(\sum_{i=0}^n a_i h_i(t) \right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sum_{i=0}^n a_i^2 h_i^2(t) dt \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2, \end{aligned}$$

pois

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} h_i^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{H_i^2(t)}{\sqrt{\pi} 2^i i!} dt = \frac{\sqrt{\pi} 2^i i!}{\sqrt{\pi} 2^i i!} = 1,$$

e daí,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} h_i(t) h_j(t) dt = \delta_{i,j},$$

onde a primeira igualdade vem da identidade (2.8) dos polinômios de Hermite. Por outro lado,

$$f'(t) = \sum_{i=0}^n a_i h_i'(t).$$

Então,

$$\begin{aligned}\|f'\|^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \left(\sum_{i=0}^n a_i h'_i(t) \right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sum_{i=0}^n a_i^2 (h'_i(t))^2 dt.\end{aligned}$$

Agora, por (2.9),

$$h'_i(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{i}{2}} \sqrt{i!}} H'_i(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{i}{2}} \sqrt{i!}} 2i H_{i-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (h'_i(t))^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{(H'_i(t))^2}{\sqrt{\pi} 2^i i!} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \frac{4i^2}{\sqrt{\pi} 2^i i!} H_{i-1}^2 dt \\ &= \frac{4i^2}{\sqrt{\pi} 2^i i!} \|H_{i-1}\|^2.\end{aligned}$$

Pela identidade (2.8),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} (h'_i(t))^2 dt = \frac{4i^2}{\sqrt{\pi} 2^i i!} \sqrt{\pi} 2^{i-1} (i-1)! = 2i.$$

Portanto, $\|f'\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 2i.$

Podemos agora calcular o valor de A_n^2 .

$$\begin{aligned}A_n^2 &= \max_{f \in \pi_n} \frac{\|f'\|^2}{\|f\|^2} \\ &= \max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 2i / \sum_{i=0}^n a_i^2 : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.\end{aligned}$$

Vemos que o numerador não depende de a_0 . Portanto,

$$\begin{aligned}A_n^2 &= \max \left\{ \sum_{i=1}^n a_i^2 2i / \sum_{i=1}^n a_i^2 : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \max_{a \in \mathbb{R}} \frac{a^t B a}{a^t a},\end{aligned}$$

onde $a = [a_1, \dots, a_n]$.

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz, devemos encontrar o maior auto-valor da matriz diagonal B , com elementos $\{2, 4, 6, \dots, 2n\}$.

Obviamente, o maior auto-valor dessa matriz é $2n$, portanto, $\|f'\|^2 \leq \lambda_{\max}(B) \|f\|^2$, ou seja, $\|f'\|^2 \leq 2n\|f\|^2$.

Além disso, o maior valor de $\|f'\|^2/\|f\|^2$ é atingido se, e somente se, o vetor $[a_1, \dots, a_n]^t = cb_n$, onde b_n é o auto-vetor de B associado a λ_n . Por outro lado, $b_n = [0, 0, \dots, 1]^t$. Assim, a função $f^*(t)$ para a qual temos igualdade é $f^*(t) = cH_n(t)$.

Para o problema (4.5), isto é, para a k -ésima derivada de f , encontramos

$$\|f^{(k)}\|^2 \leq 2^k n(n-1) \dots (n-k+1) \|f\|^2,$$

com igualdade se, e somente se, $f(t) = cH_n(t)$. $\square$

A Desigualdade Clássica de Bernstein

Consideremos agora a desigualdade clássica de Bernstein dada por

$$\sqrt{1-t^2} |p'(t)| \leq n\|p\|_{\infty}, \quad t \in [-1, 1], \quad (4.6)$$

ou, equivalentemente,

$$|p'(t)| \leq n\|p\|_{\infty}/\sqrt{1-t^2}, \quad t \in (-1, 1). \quad (4.7)$$

Para quaisquer pares de números reais $\alpha > -1, \beta > -1$, denotamos por $\omega_{\alpha,\beta}(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$ e $\omega_{\alpha}(t) = t^{\alpha}e^{-t}$ as funções pesos associadas, respectivamente, aos polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}$ e Laguerre $L_n^{(\alpha)}$.

Sejam

$$\begin{aligned} \|f\|_{(\alpha,\beta)} &:= \left(\int_{-1}^1 \omega_{\alpha,\beta}(t) f^2(t) dt \right)^{1/2}, \\ \|f\|_{(\alpha)} &:= \left(\int_0^{\infty} \omega_{\alpha}(t) f^2(t) dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Os resultados que seguem, foram demonstrados em [8].

TEOREMA 4.3 (i) Para $p \in \pi_n$

$$\|\sqrt{1-t^2} p'(t)\|_{(\alpha,\beta)} \leq (n(n+\alpha+\beta+1))^{1/2} \|p\|_{(\alpha,\beta)} \quad (4.8)$$

e vale a igualdade se, e somente se, $p(t) = P_n^{(\alpha,\beta)}(t)$.

(ii) Para $p \in \pi_n$

$$\|\sqrt{t} p'(t)\|_{(\alpha)} \leq n^{1/2} \|p\|_{(\alpha)}, \quad (4.9)$$

onde a igualdade é atingida se, e somente se, $p(t) = L_n^{(\alpha)}(t)$.

Demonstração: (i) Vimos que todo $p \in \pi_n$ pode ser representado unicamente da forma $p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i P_i^{(\alpha,\beta)}(t)$, assim,

$$\|p\|_{(\alpha,\beta)}^2 = \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (P_i^{(\alpha,\beta)})^2 dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \|P_i^{(\alpha,\beta)}\|_{(\alpha,\beta)}^2.$$

Pela identidade (2.2),

$$\|p\|_{(\alpha,\beta)}^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 h_i^{(\alpha,\beta)}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{1-t^2} p'(t)\|_{(\alpha,\beta)}^2 &= \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (\sqrt{1-t^2})^2 (P_i'^{(\alpha,\beta)})^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \int_{-1}^1 (1-t)^{\alpha+1} (1+t)^{\beta+1} (P_i'^{(\alpha,\beta)})^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \int_{-1}^1 (1-t)^{\alpha+1} (1+t)^{\beta+1} (c_i P_{i-1}^{(\alpha+1,\beta+1)})^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 c_i^2 \|P_{i-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}\|_{(\alpha+1,\beta+1)}^2, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vem da identidade (2.1), com $c_i = \frac{i+\alpha+\beta+1}{2}$.

Usando agora a identidade (2.2) e a relação de recorrência da função gamma dada por $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ temos,

$$\begin{aligned} \|\sqrt{1-t^2} p'(t)\|_{(\alpha,\beta)}^2 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \frac{(i+\alpha+\beta+1)^2}{4} h_{i-1}^{(\alpha+1,\beta+1)} \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (i+\alpha+\beta+1)^2 2^{-2} \frac{2^{\alpha+\beta+3} \Gamma(i+\alpha+1) \Gamma(i+\beta+1)}{(2i+\alpha+\beta+1) \Gamma(i) \Gamma(i+\alpha+\beta+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (i + \alpha + \beta + 1)^2 2^{\alpha+\beta+1} \\
&\quad \times \frac{\Gamma(i + \alpha + 1) \Gamma(i + \beta + 1)}{(2i + \alpha + \beta + 1)(\Gamma(i + 1)/i)(i + \alpha + \beta + 1) \Gamma(i + \alpha + \beta + 1)} \\
&= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 i (i + \alpha + \beta + 1) h_i^{(\alpha, \beta)}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\|\sqrt{1-t^2} p'(t)\|_{(\alpha, \beta)}^2 / \|p\|_{(\alpha, \beta)}^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 i (i + \alpha + \beta + 1) h_i^{(\alpha, \beta)} / \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 h_i^{(\alpha, \beta)}.$$

Chamemos $\alpha_i^2 h_i^{(\alpha, \beta)} = a_i^2$. Então, temos que encontrar

$$\max \left\{ \sum_{i=0}^n a_i^2 i (i + \alpha + \beta + 1) / \sum_{i=0}^n a_i^2 : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Seja $a = [a_0, \dots, a_n]$, então nosso problema se reduz a encontrar o máximo de $a^t C a / a^t a$, onde C é a matriz diagonal com elementos $\{i(i + \alpha + \beta + 1), i = 0, \dots, n\}$.

Logo, pelo Teorema de Rayleigh-Ritz, devemos encontrar o maior auto-valor dessa matriz, que obviamente é dado por $n(n + \alpha + \beta + 1)$, o que implica em

$$\|\sqrt{1-t^2} p'(t)\|_{(\alpha, \beta)}^2 \leq n(n + \alpha + \beta + 1) \|p\|_{(\alpha, \beta)}^2.$$

(ii) Tomemos agora $p \in \pi$ da forma

$$p(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i^{(\alpha)}(t).$$

Então,

$$\begin{aligned}
\|p\|_{(\alpha)}^2 &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (L_i^{(\alpha)}(t))^2 dt \\
&= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_i^{(\alpha)}(t))^2 dt \\
&= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \|L_i^{(\alpha)}\|_{(\alpha)}^2.
\end{aligned}$$

Assim, pela identidade (2.7) dos polinômios de Laguerre,

$$\|p\|_{(\alpha)}^2 = \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 h_i^{(\alpha)}.$$



Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|\sqrt{t}p'(t)\|_{(\alpha)}^2 &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \left[\sum_{i=0}^n \sqrt{t} \alpha_i L_i^{(\alpha)}(t) \right]^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} (L_i^{(\alpha)})^2 dt.\end{aligned}$$

Usando as identidades (2.5), (2.7) e $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ obtemos

$$\begin{aligned}\|\sqrt{t}p'(t)\|_{(\alpha)}^2 &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \int_0^\infty t^{\alpha+1} e^{-t} (-L_{i-1}^{(\alpha+1)})^2 dt \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \|L_{i-1}^{(\alpha+1)}\|_{(\alpha+1)}^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 \Gamma(\alpha+2) \binom{i+\alpha}{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 (\alpha+1) \Gamma(\alpha+1) \frac{(i+\alpha)(i+\alpha-1)\dots(\alpha+2)}{(i-1)!} \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 i \Gamma(\alpha+1) \frac{(i+\alpha)(i+\alpha-1)\dots(\alpha+1)}{i!} \\ &= \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 i h_i^{(\alpha)}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\sqrt{t}p'(t)\|_{(\alpha)}^2 / \|p\|_{(\alpha)}^2 = \sum_{i=0}^n i \alpha_i^2 h_i^{(\alpha)} / \sum_{i=0}^n \alpha_i^2 h_i^{(\alpha)}.$$

De maneira análoga ao item (i), achar o máximo da igualdade acima é encontrar o maior auto-valor da matriz diagonal dada pelos elementos $\{i; i=0, \dots, n\}$, sendo assim,

$$\|\sqrt{t}p'(t)\|_{(\alpha)}^2 \leq n \|p\|_{(\alpha)}^2.$$

Além disso, a igualdade é atingida se, e somente se, $\alpha_0 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$ e α_n é uma constante arbitrária diferente de zero. $\square$

A Desigualdade para os Polinômios de Bessel Generalizados

Os polinômios de Bessel generalizados $y_n(t; \alpha, \beta)$, são caracterizados como polinômios extremos em certas desigualdades do tipo Markov na Norma L_2 . São definidos por



$$y_n(t; \alpha, \beta) := \sum_{k=0}^n (-n)_k (n + \alpha - 1)_k \frac{(-t/\beta)^k}{k!}, \quad (4.10)$$

onde $(a)_0 := 1$, $(a)_k := a(a+1) \cdots (a+k-1)$, $k \geq 1$.

Além disso, satisfazem à seguinte condição de ortogonalidade

$$\int_0^\infty t^{\alpha-2} e^{-\beta/t} y_j(t; \alpha, \beta) y_m(t; \alpha, \beta) dt = \beta^{\alpha-1} \frac{j!}{1-\alpha-2j} \Gamma(2-\alpha-j) \delta_{jm}. \quad (4.11)$$

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup 0$ e $2n < 1 - \alpha$,

$$\|p\|_{\alpha, \pi_n} = \left(\int_0^\infty t^{\alpha-2} e^{-\beta/t} p^2(t) dt \right)^{1/2}. \quad (4.12)$$

Sob essas condições para α, β e n , $\|p'\|_{\alpha+2, \pi_{n-1}}$ está bem definida, pois as desigualdades $2n < 1 - \alpha$ e $2(n-1) < 1 - (\alpha+2)$ são equivalentes.

Os resultados que seguem, foram demonstrados em [2].

Para a norma dada em (4.12), provemos a seguinte desigualdade do tipo Markov para a qual os polinômios de Bessel generalizados são os polinômios extremos:

TEOREMA 4.4 *Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ e $2n < 1 - \alpha$. Para todo $p \in \pi_n$ e qualquer inteiro positivo k , $k \leq n$,*

$$\|p^{(k)}\|_{\alpha+2k, \pi_{n-k}} \leq \left(\frac{n!}{(n-k)!} \prod_{j=1}^k (4 - \alpha - n - 3j) \right)^{1/2} \|p\|_{\alpha, \pi_n}. \quad (4.13)$$

Além disso, para $k = 1, \dots, n$, a igualdade é atingida se, e somente se, p é uma constante múltipla de $y_n(t; \alpha, \beta)$.

Demonstração: Os polinômios de Bessel generalizados de grau n satisfazem à seguinte equação de diferencial de segunda ordem:

$$t^2 y'' + (\alpha t + \beta) y' - n(n + \alpha - 1) y = 0. \quad (4.14)$$

Podemos reescrever a equação acima da forma

$$(t^\alpha e^{-\beta/t} y')' = n(n + \alpha - 1) t^{\alpha-2} e^{-\beta/t} y. \quad (4.15)$$

Desse modo, de (4.10) segue que

$$y'_n(t; \alpha, \beta) = \frac{n(n + \alpha - 1)}{\beta} y_{n-1}(t; \alpha + 2, \beta). \quad (4.16)$$

A fim de demonstrarmos o teorema, provaremos primeiro a desigualdade (4.13) para $k = 1$. Seja p um polinômio de grau n . Considerando as restrições sobre α, β e n , os polinômios $y_0(t; \alpha, \beta), \dots, y_n(t; \alpha, \beta)$ são ortogonais e, assim, formam base em π_n e p pode ser representado unicamente da forma $p(t) = \sum_{j=0}^n a_j \tilde{y}_j(t; \alpha, \beta)$, onde

$$\tilde{y}_j(t; \alpha, \beta) := \left(\frac{1 - \alpha - 2j}{\beta^{\alpha-1} j! \Gamma(2 - \alpha - j)} \right)^{1/2} y_j(t; \alpha, \beta), \quad j = 0, \dots, n$$

são os polinômios de Bessel generalizados ortonormalizados. Dessa forma,

$$\|p\|_{\alpha, \pi_n}^2 = \sum_{j=0}^n a_j^2.$$

Desde que $p'(t) = \sum_{j=1}^n a_j \tilde{y}'_j(t; \alpha, \beta)$ então, de (4.16), temos

$$p'(t) = \sum_{j=1}^n a_j \left(\frac{1 - \alpha - 2j}{\beta^{\alpha-1} j! \Gamma(2 - \alpha - j)} \right)^{1/2} \frac{j(j + \alpha - 1)}{\beta} y_{j-1}(t; \alpha + 2, \beta).$$

Notemos que os polinômios $y_0(t; \alpha + 2, \beta), \dots, y_{n-1}(t; \alpha + 2, \beta)$ são ortogonais em $(0, \infty)$ com respeito à função peso $t^\alpha e^{-\beta/t}$ e a condição $\alpha < 1 - 2n$ é equivalente a $\alpha + 2 < 1 - 2(n - 1)$. Dessa forma, podemos aplicar (4.11) para $\alpha = \alpha + 2$ e $m, j \leq n - 1$.

Assim,

$$\begin{aligned} \|p'\|_{\alpha+2, \pi_{n-1}}^2 &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-\frac{\beta}{t}} \sum_{j=1}^n a_j^2 \frac{1 - \alpha - 2j}{\beta^{\alpha-1} j! \Gamma(2 - \alpha - j)} \frac{j^2(j + \alpha - 1)^2}{\beta^2} (y_{j-1}(t; \alpha + 2, \beta))^2 dt \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \frac{1 - \alpha - 2j}{\beta^{\alpha-1} j! \Gamma(2 - \alpha - j)} \frac{j^2(j + \alpha - 1)^2}{\beta^2} \beta^{\alpha+1} \frac{(j-1)!}{1 - \alpha - 2j} \Gamma(1 - \alpha - j) \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \frac{j^2(j + \alpha - 1)^2(j-1)! \Gamma(1 - \alpha - j)}{j!(1 - \alpha - j) \Gamma(1 - \alpha - j)} \\ &= \sum_{j=1}^n a_j^2 \frac{j^2(1 - \alpha - j)^2(j-1)!}{j(j-1)!(1 - \alpha - j)} \\ &= \sum_{j=1}^n j(1 - \alpha - j) a_j^2. \end{aligned}$$

Temos então,

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p'\|_{\alpha+2, \pi_{n-1}}^2}{\|p\|_{\alpha, \pi_n}^2} \\ &= \max \left\{ \sum_{j=1}^n j(1-\alpha-j)a_j^2 / \sum_{j=0}^n a_j^2 : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Como o numerador não depende de a_0 , o máximo é atingido para $a_0 = 0$. Assim,

$$A_n^2 = \max \left\{ \sum_{j=1}^n j(1-\alpha-j)a_j^2 / \sum_{j=1}^n a_j^2 : a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}. \quad (4.17)$$

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz, achar o máximo de (4.17) é encontrar o maior auto-valor da matriz diagonal A com elementos $\{j(1-\alpha-j), j=1, \dots, n\}$ que obviamente é dado por $n(1-\alpha-n)$.

Assim, temos

$$\|p'\|_{\alpha+2, \pi_{n-1}} \leq (n(1-\alpha-n))^{\frac{1}{2}} \|p\|_{\alpha, \pi_n}.$$

Provamos, então, a desigualdade para $k = 1$.

Da mesma forma, a desigualdade (4.13) pode ser provada para $k = 2, \dots, n$. $\square$

4.1.3 Redução do problema extremo para o mínimo auto-valor de uma dada matriz

Observemos que esses problemas do tipo Markov, ou seja, encontrar a melhor constante $A_{n,k}$ tal que

$$A_{n,k} = \max_{p \in \pi_n} \frac{\|p^{(k)}\|}{\|p\|},$$

é semelhante a resolver o problema da forma

$$A_{n,k} = 1 / \min_{p \in \pi_n} \frac{\|p\|}{\|p^{(k)}\|}.$$

Provaremos o seguinte resultado:

TEOREMA 4.5 *Sejam $q_0, \dots, q_n$ uma sequência de polinômios que satisfazem às seguintes propriedades:*

1) q_i é um polinômio de grau exatamente i .

2) $q_k^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}$ são ortonormais em respeito ao produto interno $\int_a^b f(t)g(t)\omega(t)dt$.

Então,

$$A_{n,k} = \frac{1}{(\lambda_{\min}(C_{n,k}))^{\frac{1}{2}}},$$

$$\text{onde } C_{n,k} = [\alpha_{i,j}]_{i,j=0}^n = \left[\int_a^b q_i(t)q_j(t)\omega(t)dt \right]_{i,j=0}^n.$$

Demonstração: Seja q um polinômio qualquer de grau n , sabemos que existem constantes $a_0, \dots, a_n$ tais que o polinômio q pode ser representado de forma única como combinação linear dos polinômios $q_0, \dots, q_n$, isto é,

$$q(t) = a_0q_0(t) + \dots + a_nq_n(t) = \sum_{i=0}^n a_iq_i(t)$$

e, conseqüentemente,

$$q^{(k)}(t) = a_0q_0^{(k)}(t) + \dots + a_nq_n^{(k)}(t) = \sum_{i=k}^n a_iq_i^{(k)}(t).$$

Observemos que $q_0^{(k)}(t) = \dots = q_{k-1}^{(k)}(t) \equiv 0$, visto que eles são constantes.

Assim,

$$\begin{aligned} \|q\|^2 &= \int_a^b q^2(t)\omega(t)dt \\ &= \sum_{i=0}^n a_i^2 \int_a^b q_i^2(t)\omega(t)dt + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \int_a^b q_i(t)q_j(t)\omega(t)dt. \end{aligned}$$

Lembremos que $\int_a^b q_i^2(t)\omega(t)dt = \alpha_{i,i}$ e $\int_a^b q_i(t)q_j(t)\omega(t)dt = \alpha_{i,j}$. Desse modo, temos

$$\|q\|^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|q^{(k)}\|^2 &= \int_a^b (q^{(k)}(t))^2 \omega(t)dt \\ &= \sum_{i=k}^n a_i^2 \int_a^b (q_i^{(k)}(t))^2 \omega(t)dt + 2 \sum_{k \leq i < j \leq n} a_i a_j \int_a^b q_i^{(k)}(t)q_j^{(k)}(t)\omega(t)dt \\ &= \sum_{i=k}^n a_i^2, \end{aligned}$$

pois, de acordo com a hipótese do teorema, $q_k^{(k)}, \dots, q_n^{(k)}$ são ortonormais.

Logo,

$$\begin{aligned} A_{n,k}^2 &= \max_{q \in \pi_n} \frac{\|q^{(k)}\|^2}{\|q\|^2} \\ &= \max \left\{ \sum_{i=k}^n a_i^2 / \left(\sum_{i=0}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j} \right) : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Esse problema é equivalente a

$$\frac{1}{A_{n,k}^2} = \min \left\{ \left(\sum_{i=k}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j} \right) / \sum_{i=k}^n a_i^2 : a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Obviamente o mínimo é atingido quando $a_0 = \dots = a_{k-1} = 0$, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_{n,k}^2} &= \min \left\{ \left(\sum_{i=k}^n a_i^2 \alpha_{i,i} + 2 \sum_{k \leq i < j \leq n} a_i a_j \alpha_{i,j} \right) / \sum_{i=k}^n a_i^2 : a_k, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \min \frac{a^t C_{n,k} a}{a^t a}, \end{aligned}$$

onde $a = [a_k, \dots, a_n]$.

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz,

$$\frac{1}{A_{n,k}^2} = \lambda_{\min}(C_{n,k}),$$

ou seja,

$$A_{n,k} = \frac{1}{(\lambda_{\min}(C_{n,k}))^{\frac{1}{2}}}. \quad \square$$

4.1.4 Caso Particular

Como exemplo do teorema anterior, demonstraremos o seguinte problema de Turán [24]:

Sejam $(a, b) = (0, \infty)$ e a norma de f dada por

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} f^2(t) dt.$$

Determinar a melhor constante tal que $A_n^2 = \max_{f \in \pi_n} \|f'\|^2 / \|f\|^2$.



Seja f qualquer polinômio de grau n . Definimos as constantes $c_i^{(\alpha)}$, $i = 0, \dots, n$ da forma

$$c_0^{(\alpha)} = (\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{-1}{2}} \text{ e}$$

$$c_i^{(\alpha)} = \left[\Gamma(\alpha + 1) \binom{i + \alpha - 1}{i - 1} \right]^{\frac{-1}{2}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Então, f pode ser escrito unicamente como

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i c_i^{(\alpha)} L_i^{(\alpha-1)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i c_i^{(\alpha)} (L_i^{(\alpha)}(t) - L_{i-1}^{(\alpha)}(t)),$$

onde $L_i^{(\alpha)}(t)$ são os polinômios de Laguerre e a segunda igualdade vem da identidade (2.4). Assim,

$$f'(t) = \sum_{i=1}^n a_i c_i^{(\alpha)} \frac{d}{dt} L_i^{(\alpha-1)}(t) = - \sum_{i=1}^n a_i c_i^{(\alpha)} L_{i-1}^{(\alpha)}(t).$$

Observemos que nossa somatória se inicia para $i = 1$, já que para $i = 0$, por (2.4), ela seria nula. Notemos, também, que a última igualdade da expressão acima vem da relação (2.5).

Sendo assim, utilizando a identidade (2.7) dos polinômios de Laguerre temos

$$\begin{aligned} \|f'\|^2 &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \left(\sum_{i=1}^n a_i c_i^{(\alpha)} L_{i-1}^{(\alpha)}(t) \right)^2 dt \\ &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \sum_{i=1}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 (L_{i-1}^{(\alpha)}(t))^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_{i-1}^{(\alpha)}(t))^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 \|L_{i-1}^{(\alpha)}\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 \Gamma(\alpha + 1) \binom{i + \alpha - 1}{i - 1} \\ &= \sum_{i=1}^n a_i^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, a ortogonalidade dos polinômios de Laguerre, implica em

$$\|f\|^2 = \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} \left(\sum_{i=0}^n a_i c_i^{(\alpha)} (L_i^{(\alpha)}(t) - L_{i-1}^{(\alpha)}(t)) \right)^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_i^{(\alpha)}(t))^2 dt - 2 \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} L_i^{(\alpha)}(t) L_{i-1}^{(\alpha)}(t) dt + \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_{i-1}^{(\alpha)}(t))^2 dt + \\
&\quad + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j c_i^{(\alpha)} c_j^{(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_i^{(\alpha)}(t) - L_{i-1}^{(\alpha)}(t)) (L_j^{(\alpha)}(t) - L_{j-1}^{(\alpha)}(t)) dt \\
&= \sum_{i=0}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 \left(\int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_i^{(\alpha)}(t))^2 dt + \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (L_{i-1}^{(\alpha)}(t))^2 dt \right) + \\
&\quad + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_i a_j c_i^{(\alpha)} c_j^{(\alpha)} \int_0^\infty t^\alpha e^{-t} (-L_i^{(\alpha)}(t) L_{j-1}^{(\alpha)}(t)) dt.
\end{aligned}$$

Observemos que, $L_i L_{j-1} \neq 0$ se, e somente se, $i = j - 1$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 &= a_0^2 (c_0^{(\alpha)})^2 (\|L_0^{(\alpha)}\|^2 + \|L_{-1}^{(\alpha)}\|^2) \\
&\quad + \sum_{i=1}^n a_i^2 (c_i^{(\alpha)})^2 (\|L_i^{(\alpha)}\|^2 + \|L_{i-1}^{(\alpha)}\|^2) \\
&\quad - 2 a_0 a_1 c_0^{(\alpha)} c_1^{(\alpha)} \|L_0^{(\alpha)}\|^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} c_i^{(\alpha)} c_{i+1}^{(\alpha)} \|L_i^{(\alpha)}\|^2.
\end{aligned}$$

Podemos simplificar a expressão acima, notemos ainda que:

$$\begin{aligned}
\|L_{-1}^{(\alpha)}\|^2 &\equiv 0, \\
(\|L_i^{(\alpha)}\|^2 + \|L_{i-1}^{(\alpha)}\|^2) &= \Gamma(\alpha + 1) \left[\binom{i + \alpha}{i} + \binom{i + \alpha - 1}{i - 1} \right], \\
(c_0^{(\alpha)})^2 \|L_0^{(\alpha)}\|^2 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)} = 1, \\
(c_0^{(\alpha)})^2 (c_1^{(\alpha)})^2 \|L_0^{(\alpha)}\|^2 &= \frac{1}{(\Gamma(\alpha + 1))^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{\left[\Gamma(\alpha + 1) \binom{i}{0} \right]^{\frac{1}{2}}} \Gamma(\alpha + 1) = 1, \\
(c_i^{(\alpha)})^2 (c_{i+1}^{(\alpha)})^2 \|L_i^{(\alpha)}\|^2 &= \frac{\Gamma(\alpha + 1) \binom{i + \alpha}{i}}{\left[\Gamma(\alpha + 1) \binom{i + \alpha - 1}{i - 1} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\Gamma(\alpha + 1) \binom{i + \alpha}{i} \right]^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{\binom{i+\alpha}{i}}{\binom{i+\alpha-1}{i-1}} \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\binom{i+\alpha}{i}}{\binom{i+\alpha-1}{i-1}} = \frac{i+\alpha}{i} = 1 + \frac{\alpha}{i}.$$

Usando todas essas relações, obtemos

$$\|f\|^2 = a_0^2 + \sum_{i=1}^n a_i^2 \left(2 + \frac{\alpha}{i}\right) - 2a_0a_1 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{i+1} \left(1 + \frac{\alpha}{i}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$A_n^2 = \max_{f \in \pi_n} \frac{\|f'\|^2}{\|f\|^2} = \max_{a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}} \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{a_0^2 + \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{\alpha}{i}\right) a_i^2 - 2a_0a_1 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{i}\right)^{\frac{1}{2}} a_i a_{i+1}}.$$

Esse problema é equivalente a

$$\frac{1}{A_n^2} = \min_{a_i \in \mathbb{R}} \frac{a_1^2 + \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{\alpha}{i}\right) a_i^2 - 2a_0a_1 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{i}\right)^{\frac{1}{2}} a_i a_{i+1}}{a_1^2 + \dots + a_n^2}. \quad (4.18)$$

Consideremos o numerador do lado direito de (4.18) como $C(a_0, \dots, a_n)$. Observemos que o denominador de (4.18) não depende de a_0 . Daí, o mínimo do quociente (4.18) relativamente a a_0 é atingido no ponto de mínimo relativamente à mesma variável do numerador $C(a_0, \dots, a_n)$.

Desde que $\frac{\partial C}{\partial a_0} = 2a_0 - 2a_1 = 0$ se, e somente se, $a_0 = a_1$, teremos ponto de mínimo com respeito a a_0 para $a_0 = a_1$.

Dessa forma, podemos escrever

$$\frac{1}{A_n^2} = \min_{a_i \in \mathbb{R}} \frac{a_1^2 + \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{\alpha}{i}\right) a_i^2 - 2a_1^2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{\alpha}{i}\right)^{\frac{1}{2}} a_i a_{i+1}}{a_1^2 + \dots + a_n^2} = \min_{a_i \in \mathbb{R}} \frac{a^t B a}{a^t a},$$

onde B é a matriz tridiagonal

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \alpha & -(1 + \frac{\alpha}{1})^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -(1 + \frac{\alpha}{1})^{\frac{1}{2}} & 2 + \frac{\alpha}{2} & -(1 + \frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -(1 + \frac{\alpha}{n-1})^{\frac{1}{2}} & 2 + \frac{\alpha}{n} \end{pmatrix}.$$

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz, $\min_{a_i \in \mathbb{R}} \frac{a^t B a}{a^t a} = \lambda_{\min}(B)$, ou seja, devemos encontrar o mínimo auto-valor da matriz B .

Calculemos então os auto-valores da matriz B . O polinômio característico da matriz B é dado por

$$\Delta_n(t) = \begin{vmatrix} 1 + \alpha - t & -(1 + \frac{\alpha}{1})^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -(1 + \frac{\alpha}{1})^{\frac{1}{2}} & 2 + \frac{\alpha}{2} - t & -(1 + \frac{\alpha}{2})^{\frac{1}{2}} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -(1 + \frac{\alpha}{n-1})^{\frac{1}{2}} & 2 + \frac{\alpha}{n} - t \end{vmatrix}.$$

Utilizando a expansão de um determinante com respeito a última coluna, obtemos:

$$\Delta_n(t) = (2 + \frac{\alpha}{n} - t) \Delta_{n-1}(t) + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{n-1}} A_{n-1,n}(t),$$

onde $A_{n-1,n}$ é o determinante da matriz obtida por B tirando a última coluna e a penúltima linha. Utilizando novamente o desenvolvimento de Laplace para $A_{n-1,n}$ com respeito a última linha, obtemos:

$$A_{n-1,n}(t) = -\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n-1}} \Delta_{n-2}(t).$$

Daí,

$$\Delta_n(t) = (2 + \frac{\alpha}{n} - t) \Delta_{n-1}(t) + \sqrt{1 + \frac{\alpha}{n-1}} \left(-\sqrt{1 + \frac{\alpha}{n-1}} \right) \Delta_{n-2}(t),$$

o que implica na fórmula de recorrência

$$\Delta_0 = 1,$$

$$\Delta_1 = 1 + \alpha - t,$$

$$\Delta_n(t) = (2 + \frac{\alpha}{n} - t) \Delta_{n-1}(t) - (1 + \frac{\alpha}{n-1}) \Delta_{n-2}(t), \quad n = 2, \dots$$



Para $\alpha = 0$ e $t = 2 - 2z$, temos a seguinte relação de recorrência,

$$\Delta_1(z) = 2z - 1,$$

$$\Delta_2(z) = 4z^2 - 2z - 1,$$

$$\Delta_n(z) = 2z\Delta_{n-1}(z) - \Delta_{n-2}(z).$$

Consideremos, agora, os polinômios de Chebyshev de segunda espécie. Como já dito no Capítulo 2, são definidos por:

$$U_n(z) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \theta = \arccos z, \quad \theta \in [0, \pi],$$

e satisfazem à relação de recorrência,

$$2zU_{n-1}(z) = 2 \cos \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin(n\theta + \theta) + \sin(n\theta - \theta)}{\sin \theta} = U_n(z) + U_{n-2}(z).$$

Percebemos que $\Delta_n(z) = U_n(z) - U_{n-1}(z)$, pois

$$\begin{aligned} \Delta_n(z) &= 2z\Delta_{n-1}(z) - \Delta_{n-2}(z) \\ &= 2z(U_{n-1}(z) - U_{n-2}(z)) - (U_{n-2}(z) - U_{n-3}(z)) \\ &= (2zU_{n-1}(z) - U_{n-2}(z)) - (2zU_{n-2}(z) - U_{n-3}(z)) \\ &= U_n(z) - U_{n-1}(z) \\ &= \Delta_n(z). \end{aligned}$$

Dessa forma, $\Delta_n(z) = 0$ se, e somente se, $U_n(z) - U_{n-1}(z) = 0$, isto é, quando

$$\frac{\sin(n+1)\theta - \sin n\theta}{\sin \theta} = 0.$$

Por outro lado, pela relação $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$,

$$\frac{2 \sin \frac{(n+1)\theta - n\theta}{2} \cos \frac{(n+1)\theta + n\theta}{2}}{\sin \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin \theta}.$$

Procuramos a raiz do último produto. Desde que

$$\frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = \frac{1}{\cos \frac{\theta}{2}},$$



as raízes coincidem com as de $(\cos(2n+1)\theta)/2$. Consequentemente,

$$\frac{(2n+1)\theta}{2} = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

o que implica que as raízes são $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}$, $k = 0, \dots, n-1$, isto é, $z_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1}$.

Como tomamos $x = 2 - 2z$, temos que

$$x_k = 2(1 - z_k) = 2 \left(1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n+1} \right) = 4 \left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \right)^2, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

onde nessa última igualdade utilizamos a relação $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Verificamos que $4 \left(\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(2n+1)} \right)^2$ é uma função crescente em $[0, \pi]$. Logo, sua derivada é positiva. Temos, então, que o auto-valor mínimo é encontrado para $k = 0$, ou seja, $x_0 = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

Portanto,

$$\frac{1}{A_n^2} = \min_{a_i \in \mathbb{R}} \frac{\|f\|^2}{\|f'\|^2} = \lambda_{\min}(B) = 4 \left(\sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \right)^2,$$

o que implica em

$$\|f\|^2 \geq 4 \left(\sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \right)^2 \|f'\|^2,$$

ou seja,

$$\|f'\| \leq \left(2 \sin \frac{\pi}{2(2n+1)} \right)^{-1} \|f\|.$$



Capítulo 5

Desigualdades do Tipo Kolmogorov

Introdução

Sejam $0 < j < m \leq n$. Denotamos por $\|\cdot\|$ a norma

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Como já dissemos no Capítulo 1, as desigualdades de Landau e Kolmogorov motivaram Bojanov e Varma a considerar o problema de se obter desigualdades do tipo Kolmogorov que valem para o espaço de polinômios de grau n e para a norma $\|\cdot\|_2$. Bojanov e Varma provaram que a desigualdade

$$\|f^{(j)}\|_2^2 \leq A\|f^{(m)}\|_2^2 + B\|f\|_2^2, \quad (5.1)$$

vale para todo polinômio de grau n se as constantes A e B são apropriadamente escolhidas.

Além de demonstrarmos, neste capítulo, a desigualdade de Bojanov e Varma dada acima, provaremos as desigualdades de Kolmogorov

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2}{A\theta_k + B\mu_k},$$

com algumas constantes θ_k e μ_k , as quais valem para todo polinômio de grau menor ou igual a n . No caso $j = 1$ e $m = 2$, daremos a completa caracterização das constantes positivas A e B . Dessa forma, estaremos provando os Teoremas 1.1 e 1.2.

5.1 A Desigualdade de Bojanov e Varma

O principal resultado a ser provado é o que segue :

TEOREMA 5.1 *Sejam j, m e n números inteiros arbitrários satisfazendo à exigência $0 < j < m \leq n$. Então a desigualdade*

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq A\|f^{(m)}\|^2 + \left[2^j \binom{n}{j} j! - A 2^m \binom{n}{m} m! \right] \|f\|^2 \quad (5.2)$$

vale para todo $f \in \pi_n$ e qualquer A tal que

$$A \leq \frac{j}{m 2^{m-j}} \frac{1}{(n-j) \dots (n-m+1)}.$$

Além disso, obtemos igualdade em (5.2), escolhendo $f = H_n$.

Daremos primeiramente a demonstração feita por Bojanov e Varma. A idéia principal deles, foi baseada nos seguintes lemas:

LEMA 5.1 *Suponhamos que a desigualdade (5.1) vale para $f = H_k$, $k = 0, 1, \dots, n$. Então ela vale para todo $f \in \pi_n$.*

Demonstração: Seja $f(t) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(t)$, onde $H_k(t)$ é o polinômio de Hermite e a_k os coeficientes de f . Como os polinômios $H_k(t)$ formam uma base ortogonal em $(-\infty, \infty)$, podemos representar f de maneira única como combinação linear deles.

Pela consideração (2.9), temos que $\{H_k^{(i)}(t)\}_{k=0}^n$, $0 \leq i < n$, formam sistemas ortogonais em $(-\infty, \infty)$ com relação ao mesmo peso e^{-t^2} .



Então, para $f \in \pi_n$,

$$\begin{aligned}\|f^{(i)}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(\sum_{k=0}^n a_k H_k^{(i)}(t) \right)^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sum_{k=0}^n a_k^2 (H_k^{(i)}(t))^2 dt \\ &= \sum_{k=0}^n a_k^2 \|H_k^{(i)}\|^2,\end{aligned}\tag{5.3}$$

onde a segunda igualdade foi obtida utilizando o Lema 2.1, isto é,

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k H_k^{(i)}(t) \right)^2 dt = \sum_{k=0}^n a_k^2 (H_k^{(i)}(t))^2 + 2 \sum_{0 \leq k < j \leq n} a_k a_j H_k^{(i)}(t) H_j^{(i)}(t),$$

onde a integral da última soma é zero, pois como já dissemos, $\{H_k^{(i)}(t)\}_{k=0}^n$ formam um sistema ortogonal.

Por hipótese, temos que a desigualdade (5.1) vale para $f = H_k$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Então,

$$\|H_k^{(j)}\|^2 \leq A \|H_k^{(m)}\|^2 + B \|H_k\|^2, k = 0, 1, \dots, n.$$

Multiplicando essa igualdade por a_k^2 e somando de 0 até n , obtemos

$$\sum_{k=0}^n a_k^2 \|H_k^{(j)}\|^2 \leq A \sum_{k=0}^n a_k^2 \|H_k^{(m)}\|^2 + B \sum_{k=0}^n a_k^2 \|H_k\|^2.$$

Assim, como $\|f^{(i)}\|^2 = \sum_{k=0}^n a_k^2 \|H_k^{(i)}\|^2$, temos o resultado

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq A \|f^{(m)}\|^2 + B \|f\|^2, f \in \pi_n$$

o que prova o lema. $\square$

Consideremos $\varphi_j(x) = x(x-1)\dots(x-j+1)$.

LEMA 5.2 *Suponhamos que $0 < j < m \leq n$. Então*

$$R(x) = \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(x)}{\varphi_m(n) - \varphi_m(x)}$$

é uma função decrescente de x em $[m-1, n]$.

Demonstração: Primeiramente, vamos mostrar que $R(x) < R(x - \delta)$ para todo $x \in (m - 1, n]$ e para qualquer $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Observemos que para a, b, a_1 e b_1 positivos, a desigualdade $\frac{a + a_1}{b + b_1} > \frac{a}{b}$ vale se, e somente se, $\frac{b}{a} > \frac{b_1}{a_1}$. Esse fato segue das seguintes desigualdades equivalentes:

$$(a + a_1)b > a(b + b_1), \quad ab + a_1b > ab + ab_1, \quad a_1b > ab_1, \quad \frac{b}{a} > \frac{b_1}{a_1}.$$

Dessa forma, escolhendo

$$a = \varphi_j(n) - \varphi_j(x), \quad a_1 = \varphi_j(x) - \varphi_j(x - \delta),$$

$$b = \varphi_m(n) - \varphi_m(x) \quad \text{e} \quad b_1 = \varphi_m(x) - \varphi_m(x - \delta),$$

podemos usar as desigualdades dadas acima, visto que a, b, a_1 e b_1 são positivos (isto vem da definição de $\varphi_j(x)$). Logo, como

$$a + a_1 = \varphi_j(n) - \varphi_j(x - \delta) \quad \text{e} \quad b + b_1 = \varphi_m(n) - \varphi_m(x - \delta),$$

concluimos que $\frac{a + a_1}{b + b_1} = R(x - \delta) > \frac{a}{b} = R(x)$, se $\frac{b}{a} > \frac{b_1}{a_1}$.

Mostremos então que $\frac{b}{a} > \frac{b_1}{a_1}$.

Notemos que $\varphi_m(t) = t(t - 1) \dots (t - m + 1)$ e $\varphi_j(t) = t(t - 1) \dots (t - j + 1)$, ou seja, os zeros de $\varphi_m(t)$ e $\varphi_j(t)$ se situam em $[0, m - 1]$. Então, para $t > m - 1$, temos, pelo Corolário 2.2, que $\varphi'_m(t) \neq 0$ e $\varphi'_j(t) \neq 0$.

Pelo Teorema Geral do Valor Médio (Teorema 2.13) para φ_m e φ_j , obtemos

$$\frac{b}{a} = \frac{\varphi_m(n) - \varphi_m(x)}{\varphi_j(n) - \varphi_j(x)} = \frac{\varphi'_m(\xi)}{\varphi'_j(\xi)},$$

para algum $\xi \in (x, n)$ e

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\varphi_m(x) - \varphi_m(x - \delta)}{\varphi_j(x) - \varphi_j(x - \delta)} = \frac{\varphi'_m(\eta)}{\varphi'_j(\eta)},$$

para algum $\eta \in (x - \delta, x)$.

Como queremos $\frac{b}{a} > \frac{b_1}{a_1}$, temos que ter $\frac{\varphi'_m(\xi)}{\varphi'_j(\xi)} > \frac{\varphi'_m(\eta)}{\varphi'_j(\eta)}$, ou seja, o lema deverá

ser provado se mostrarmos que a razão $r(t) = \frac{\varphi'_m(t)}{\varphi'_j(t)}$ é uma função crescente de t em $(m - 1, n)$.



Visto que

$$\begin{aligned} r'(t) &= \frac{1}{(\varphi_j'(t))^2} (\varphi_m''(t) \varphi_j'(t) - \varphi_m'(t) \varphi_j''(t)) \\ &= \frac{1}{(\varphi_j'(t))^2} \left(\frac{\varphi_m''(t)}{\varphi_m'(t)} - \frac{\varphi_j''(t)}{\varphi_j'(t)} \right) \varphi_m'(t) \varphi_j'(t), \end{aligned}$$

$r'(t)$ deverá ser positiva em $(m-1, n)$ se $\frac{\varphi_m''(t)}{\varphi_m'(t)} > \frac{\varphi_j''(t)}{\varphi_j'(t)}$.

Denotamos por $\{x_{m,i}\}_{i=1}^{m-1}$ e $\{x_{j,i}\}_{i=1}^{j-1}$ os zeros de $\varphi_m'(t)$ e $\varphi_j'(t)$, respectivamente.

Sabemos que

$$\varphi_j'(x) = j(x - x_{j,1}) \dots (x - x_{j,j-1})$$

e

$$\varphi_j''(x) = j \sum_{i=1}^{j-1} \frac{w(x)}{(x - x_{j,i})}.$$

Desse modo,

$$\frac{\varphi_j''(x)}{\varphi_j'(x)} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{x - x_{j,i}}.$$

Analogamente, $\frac{\varphi_m''(x)}{\varphi_m'(x)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{x - x_{m,i}}.$

Do Teorema de Rolle (Teorema 2.14), segue que

$$0 < x_{m,1} < 1 < x_{m,2} < 2 < \dots < m-2 < x_{m,m-1} < m-1$$

e

$$0 < x_{j,1} < 1 < x_{j,2} < 2 < \dots < j-2 < x_{j,j-1} < j-1.$$

Dessa forma, $x_{j,i} < x_{m,i+1}$ para $i = 1, \dots, j-1$ e, então, $t - x_{j,i} > t - x_{m,i+1}$ para $t > m-1$. Consequentemente

$$\frac{1}{t - x_{j,i}} < \frac{1}{t - x_{m,i+1}}, \quad t \in [m-1, n].$$

Além disso, obviamente $\frac{1}{t - x_{m,k}} > 0$, $k = 1, \dots, m-1$, $t \in [m-1, n]$.

Somando essas desigualdades para $i = 1, \dots, j-1$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_j''(t)}{\varphi_j'(t)} &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{t - x_{j,i}} < \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{t - x_{m,i+1}} \\ &< \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{t - x_{m,i}} = \frac{\varphi_m''(t)}{\varphi_m'(t)}. \end{aligned}$$

Dessa forma, mostramos que $r'(t)$ é positiva em $(m-1, n)$, ou seja, a razão $r(t)$ é uma função crescente em $(m-1, n)$ o que implica em $\frac{b_1}{a_1} < \frac{b}{a}$.

Portanto, o lema está provado. $\square$

Daremos agora a demonstração do teorema.

Demonstração: Consideremos $B = 2^j \varphi_j(n) - A 2^m \varphi_m(n)$.

De acordo com o Lema 5.1, é suficiente provar que

$$\|H_k^{(j)}\|^2 \leq A \|H_k^{(m)}\|^2 + B \|H_k\|^2, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (5.4)$$

Pelas propriedades (2.8) e (2.9) dos polinômios de Hermite,

$$\frac{\|H_k^{(j)}\|^2}{\|H_k\|^2} = 2^j k(k-1) \dots (k-j+1) = 2^j \varphi_j(k), \quad (5.5)$$

pois $H'_k = 2kH_{k-1}$, que implica em $H''_k = 2kH'_{k-1} = 2k2(k-1)H_{k-2} = 2^2k(k-1)H_{k-2}$. Desse modo, por indução, temos $H_k^{(j)} = 2^j k(k-1) \dots (k-j+1)H_{k-j}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{\|H_k^{(j)}\|^2}{\|H_k\|^2} &= (2^j k(k-1) \dots (k-j+1))^2 \frac{\|H_{k-j}\|^2}{\|H_k\|^2} \\ &= 2^{2j} (k(k-1) \dots (k-j+1))^2 \frac{\sqrt{\pi} 2^{k-j} (k-j)!}{\sqrt{\pi} 2^k k!} \\ &= 2^j k(k-1) \dots (k-j+1) 2^j k(k-1) \dots (k-j+1) \frac{2^{k-j} (k-j)!}{2^k k!} \\ &= 2^j k(k-1) \dots (k-j+1) \frac{2^j 2^{k-j} k!}{2^k k!} \\ &= 2^j k(k-1) \dots (k-j+1). \end{aligned}$$

Se dividirmos ambos os lados de (5.4) por $\|H_k\|^2$ e inserirmos a expressão dada para B , chegamos à seguinte forma equivalente da desigualdade (5.4):

$$\frac{\|H_k^{(j)}\|^2}{\|H_k\|^2} \leq A \frac{\|H_k^{(m)}\|^2}{\|H_k\|^2} + (2^j \varphi_j(n) - A 2^m \varphi_m(n)) \frac{\|H_k\|^2}{\|H_k\|^2}.$$

Logo, por (5.5),

$$2^j \varphi_j(k) \leq A 2^m \varphi_m(k) + 2^j \varphi_j(n) - A 2^m \varphi_m(n),$$

o que implica em

$$2^j(\varphi_j(k) - \varphi_j(n)) \leq 2^m A(\varphi_m(k) - \varphi_m(n)).$$

Multiplicando ambos os lados por (-1) obtemos,

$$A(\varphi_m(n) - \varphi_m(k)) \leq 2^{j-m}(\varphi_j(n) - \varphi_j(k)). \quad (5.6)$$

Observemos que (5.4) toma essa forma apenas para $k = m, \dots, n$, pois $H_k^{(m)}(t) = 0$, para $k < m$.

De fato, para $x \in (m-1, n)$ e $\varphi_m(n) > \varphi_m(x)$, como os zeros de $\varphi_m(t)$ são os pontos $0, 1, \dots, m-1$, temos que $\varphi_m(n) - \varphi_m(k) > 0$, $k = m, \dots, n-1$. Então, podemos escrever (5.6) como

$$A \leq \frac{1}{2^{m-j}} \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(k)}{\varphi_m(n) - \varphi_m(k)} = \frac{R(k)}{2^{m-j}}, \quad k = m, \dots, n-1. \quad (5.7)$$

Mas, de acordo com o lema anterior, $R(n-1) < R(n-2) < \dots < R(m)$. Assim, (5.7) deverá ser satisfeito para $k = m, \dots, n-1$ se

$$A \leq \frac{R(n-1)}{2^{m-j}}. \quad (5.8)$$

Essa é uma das restrições de A . A desigualdade dada em (5.6) é uma forma equivalente à desigualdade (5.4).

Observemos também que (5.6) e consequentemente (5.4) se tornam igualdade para $k = n$. Dessa forma, A deve satisfazer (5.6) para $k = m, \dots, n-1$.

Vejamos agora o que acontece se $k = 0, \dots, m-1$. Para $k = 0, \dots, j-1$ temos, por (5.4), que $B \geq 0$, visto que $H_k^{(j)} \equiv 0$ e $H_k^{(m)} \equiv 0$, o que implica em

$$B = 2^j \varphi_j(n) - A 2^m \varphi_m(n) \geq 0$$

e, portanto,

$$A \leq \frac{1}{2^{m-j}} \frac{\varphi_j(n)}{\varphi_m(n)}.$$

Para $k = j, \dots, m-1$, temos, por (5.4), $\|H_k^{(j)}\|^2 \leq B \|H_k\|^2$, visto que $H_k^{(m)} \equiv 0$.

Isso implica em

$$B = 2^j \varphi_j(n) - A 2^m \varphi_m(n) \geq \frac{\|H_k^{(j)}\|^2}{\|H_k\|^2} = 2^j \varphi_j(k),$$



o que nos dá a próxima restrição de A ,

$$A \leq \frac{1}{2^{m-j}} \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(k)}{\varphi_m(n)}, \quad k = j, \dots, m-1. \quad (5.9)$$

Desde que, $\varphi_m(m-1) = 0$ e $\varphi_j(k) \leq \varphi_j(m-1)$ se $k \leq m-1$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(k)}{\varphi_m(n)} &= \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(k)}{\varphi_m(n) - \varphi_m(m-1)} \geq \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(m-1)}{\varphi_m(n) - \varphi_m(m-1)} \\ &= R(m-1) \geq R(n-1). \end{aligned}$$

Assim, as restrições (5.9), juntamente com a que corresponde para $k = 0, \dots, j-1$, são mais fracas do que (5.8). Dessa forma, (5.4) deverá valer para cada A satisfazendo à condição

$$A \leq \frac{R(n-1)}{2^{m-j}} = \frac{j}{m2^{m-j}} \frac{1}{(n-j) \dots (n-m+1)},$$

onde a igualdade vem do fato de $R(n-1) = (\varphi_j(n) - \varphi_j(n-1)) / (\varphi_m(n) - \varphi_m(n-1))$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \varphi_j(n) - \varphi_j(n-1) &= n(n-1) \dots (n-j+1) - (n-1) \dots (n-j) \\ &= (n-1)(n-2) \dots (n-j+1) \{n - (n-j)\} \\ &= j(n-1) \dots (n-j+1) \end{aligned}$$

e

$$\varphi_m(n) - \varphi_m(n-1) = m(n-1) \dots (n-m+1).$$

Portanto,

$$R(n-1) = \frac{j(n-1) \dots (n-j+1)}{m(n-1) \dots (n-m+1)} = \frac{j}{m} \frac{1}{(n-j) \dots (n-m+1)}.$$

Temos também,

$$B = 2^j \varphi_j(n) - A 2^m \varphi_m(n) = 2^j \binom{n}{j} j! - A 2^m \binom{n}{m} m!,$$

já que

$$\binom{n}{j} j! = \frac{n!}{j!(n-j)!} j! = n(n-1) \dots (n-j+1) = \varphi_j(n)$$

e

$$\binom{n}{m} m! = n(n-1) \dots (n-m+1) = \varphi_m(n). \quad \square$$

5.2 Casos Particulares

Mencionaremos aqui, alguns casos particulares interessantes da desigualdade (5.2).

1. Escolhendo $A = 0$, a desigualdade (5.2) se torna

$$\|f^{(j)}\| \leq \sqrt{2^j \varphi_j(n)} \|f\|, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade de Schmidt, mencionada no Capítulo 4.

2. Escolhendo $A = \frac{1}{2^{m-j}} R(n-1)$, o qual é o melhor valor possível de A , obtemos,

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{j}{m 2^{m-j}} \frac{1}{(n-j) \dots (n-m+1)} \|f^{(m)}\|^2 + \left\{ 2^j \binom{n}{j} j! - \frac{j}{m} 2^j \binom{n}{j} j! \right\} \|f\|^2,$$

o que implica em

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{j}{m 2^{m-j}} \frac{1}{(n-j) \dots (n-m+1)} \|f^{(m)}\|^2 + 2^j \binom{n}{j} j! \left\{ 1 - \frac{j}{m} \right\} \|f\|^2.$$

3. Tomemos agora $A = \frac{R(n)}{2^{m-j}}$. Tal escolha é aceitável desde que $R(n) < R(n-1)$.

Temos

$$R(n) = \lim_{x \rightarrow n} \frac{\varphi_j(n) - \varphi_j(x)}{\varphi_m(n) - \varphi_m(x)} = \frac{\varphi'_j(n)}{\varphi'_m(n)}$$

e assim,

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \frac{1}{2^{m-j}} \frac{\varphi'_j(n)}{\varphi'_m(n)} \|f^{(m)}\|^2 + \left\{ 2^j \varphi_j(n) - 2^j \varphi_m(n) \frac{\varphi'_j(n)}{\varphi'_m(n)} \right\} \|f\|^2.$$

Desigualdades dessa forma foram obtidas por Varma [25] para $m = 2, 3, 4$.

4. Seja $m = n$. Suponhamos que $f \in \pi_{n-1}$.

Então, $\|f^{(m)}\| = 0$ e para o valor maximal de A , a estimativa (5.4) toma a forma

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq 2^j \varphi_j(n-1) \|f\|^2,$$

a qual é novamente a desigualdade exata de Schmidt para $f \in \pi_{n-1}$.

5.3 Algumas Desigualdades Novas do Tipo Kolmogorov

Daremos aqui a demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2 e mostraremos que os resultados de Varma e o de Bojanov e Varma são casos particulares dos nossos resultados.

Para quaisquer constantes positivas A e B , e números inteiros j, m, n tais que $0 < j < m \leq n$, consideraremos o seguinte problema extremo:

$$\min \left\{ \frac{A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2}{\|f^{(j)}\|^2} : f \in \pi_n, f(x) \neq 0 \right\}, \quad (5.10)$$

onde a função objetiva $F(A, B, f) = (A\|f^{(m)}\|^2 + B\|f\|^2) / \|f^{(j)}\|^2$ depende dos parâmetros $A > 0$ e $B > 0$.

Denotamos por $f_* \in \pi_n$, o polinômio extremo, isto é, o polinômio para o qual o mínimo de $F(A, B, f)$ é atingido. Assim, definimos

$$F(A, B) = F(A, B, f_*) = \min \{F(A, B, f) : f \in \pi_n, f(x) \neq 0\}. \quad (5.11)$$

Então, nossa tarefa será resolver o problema (5.11), isto é, determinar $F(A, B)$ para vários valores de $A > 0$ e $B > 0$. Para o caso geral, ou seja, para quaisquer números inteiros j, m e n onde $0 < j < m \leq n$, segue o Teorema 1.1, bem como o Corolário 1.1.

Para o caso particular $j = 1$ e $m = 2$, segue o Teorema 1.2, onde conseguimos resolver o problema (5.10) completamente, isto é, para quaisquer valores de $A > 0$

e $B > 0$, achamos o valor mínimo da função objetiva $F(A, B, f)$, bem como o polinômio extremo f_* .

Consideremos agora alguns resultados básicos que serão usados nas demonstrações dos Teoremas 1.1 e 1.2.

5.3.1 Alguns Resultados Técnicos

LEMA 5.3 *Sejam $0 < j < m \leq n$. Então, a sequência $\{\mu_i\}$, $i = j, \dots, n$, definida por*

$$\mu_i = \frac{2^{-j}(i-j)!}{i!},$$

é decrescente.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \mu_i - \mu_{i+1} &= 2^{-j} \left(\frac{(i-j)!}{i!} - \frac{(i-j+1)!}{(i+1)!} \right) \\ &= 2^{-j} \left(\frac{(i-j)!(i+1) - (i-j+1)!}{(i+1)!} \right) \\ &= 2^{-j} \frac{(i-j)!}{(i+1)!} ((i+1) - (i-j+1)) \\ &= 2^{-j} \frac{(i-j)!j}{(i+1)!} \geq 0. \quad \square \end{aligned}$$

LEMA 5.4 *Sejam $0 < j < m \leq n$. Então, a sequência $\{\theta_i\}$, $i = m, \dots, n$, definida por*

$$\theta_i = \frac{2^{m-j}(i-j)!}{(i-m)!},$$

é crescente.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \theta_i - \theta_{i-1} &= \frac{2^{m-j}(i-j)!}{(i-m)!} - \frac{2^{m-j}(i-j-1)!}{(i-m-1)!} \\ &= 2^{m-j} \left(\frac{(i-j)!}{(i-m)!} - \frac{(i-j-1)!}{(i-m-1)!} \right) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= 2^{m-j} \left(\frac{(i-j)! - (i-j-1)!(i-m)!}{(i-m)!} \right) \\
&= \frac{2^{m-j}}{(i-m)!} ((i-j)! - (i-j-1)!(i-m)) \\
&= \frac{2^{m-j}(i-j+1)!(m-j)}{(i-m)!} \geq 0. \quad \square
\end{aligned}$$

LEMA 5.5 A sequência $\{S_k\}$, $k = m, \dots, n$, definida por

$$S_k = \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\theta_{k+1} - \theta_k},$$

é decrescente.

Demonstração: Calculemos primeiramente o valor de S_k .

$$\begin{aligned}
S_k &= \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\theta_{k+1} - \theta_k} \\
&= 2^{-m} \left(\frac{(k+1)!(k-j)! - k!(k-j+1)!}{k!(k+1)!} \right) \\
&\quad \left(\frac{(k-m)!(k-m+1)!}{(k-m)!(k-j+1)! - (k-j)!(k-m+1)!} \right) \\
&= 2^{-m} \left(\frac{k!(k-j)!(k+1 - (k-j+1))(k-m)!(k-m+1)!}{k!(k+1)!(k-m)!(k-j)!(k-j+1 - (k-m+1))} \right) \\
&= 2^{-m} \frac{(k-m+1)!}{(k+1)!} \frac{j}{m-j}.
\end{aligned}$$

Calculemos agora $\frac{S_{k+1}}{S_k}$.

$$\begin{aligned}
\frac{S_{k+1}}{S_k} &= \left(2^{-m} \frac{(k-m+2)!}{(k+2)!} \right) \left(\frac{j}{m-j} \right) \left(\frac{(k+1)!(m-j)}{2^{-m}(k-m+1)!j} \right) \\
&= \frac{(k-m+2)!(k+1)!}{(k+2)!(k-m+1)!} \\
&= \frac{(k-m+2)(k-m+1)!(k+1)!}{(k+2)(k+1)!(k-m+1)!} \\
&= \frac{(k-m+2)}{(k+2)} < 1.
\end{aligned}$$

Mostramos então que $\frac{S_{k+1}}{S_k} < 1$, ou seja, S_k é decrescente. $\square$

LEMA 5.6 Para todo $m \in N$, temos que

$$\frac{\theta_m}{\mu_{m-1} - \mu_m} = 2^m \frac{m!(m-j)}{j}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_m}{\mu_{m-1} - \mu_m} &= 2^{m-j} (m-j)! \frac{(m-1)!m!}{2^{-j}((m-j-1)!m! - (m-j)!(m-1)!)} \\ &= 2^m \frac{(m-1)!(m-j)!m!}{(m-1)!((m-j-1)!m - (m-j)!)} \\ &= 2^m \frac{(m-j-1)!(m-j)m!}{(m-j-1)!(m - (m-j))} \\ &= 2^m \frac{m!(m-j)}{j}. \quad \square \end{aligned}$$

LEMA 5.7 Para todo $n \in N$, temos que

$$\frac{\theta_n}{\mu_{n-1} - \mu_n} = 2^m \frac{(n-j)!}{(n-m)!} \frac{(m-1)!n!}{(m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!}.$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_n}{\mu_{n-1} - \mu_n} &= \left(2^{m-j} \frac{(n-j)!}{(n-m)!} \right) / \left(2^{-j} \frac{(m-j-1)!}{(m-1)!} - 2^{-j} \frac{(n-j)!}{n!} \right) \\ &= \left(2^{m-j} \frac{(n-j)!}{(n-m)!} \right) / 2^{-j} \left(\frac{(m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!}{(m-1)!n!} \right) \\ &= 2^{m-j} \frac{(n-j)!}{(n-m)!} 2^j \frac{(m-1)!n!}{(m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!} \\ &= 2^m \frac{(n-j)!}{(n-m)!} \frac{(m-1)!n!}{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}. \quad \square \end{aligned}$$

LEMA 5.8 Sejam $1 \leq j < m < n$. Então,

$$\binom{m}{j} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k}{j-1} = \binom{n}{j}.$$

Demonstração: Provaremos por indução sobre n .

Para $n = m + 1$, temos que mostrar que

$$\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} = \binom{m+1}{j},$$

onde essa igualdade é bem conhecida e pode ser demonstrada como segue:

$$\begin{aligned}\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} &= \frac{m!}{j!(m-j)!} + \frac{m!}{(j-1)!(m-j+1)!} \\ &= \frac{m!}{j!(m-j+1)!}((m-j+1) + j) \\ &= \frac{(m+1)!}{j!(m-j+1)!} \\ &= \binom{m+1}{j}.\end{aligned}$$

Suponhamos que vale para $n = N - 1$. Então, temos que

$$\binom{m}{j} + \sum_{k=m}^{N-2} \binom{k}{j-1} = \binom{N-1}{j}.$$

Mostremos que vale para $n = N$.

$$\begin{aligned}\binom{m}{j} + \sum_{k=m}^{N-2} \binom{k}{j-1} + \binom{N-1}{j-1} &= \binom{N-1}{j} + \binom{N-1}{j-1} \\ &= \binom{N}{j},\end{aligned}$$

onde o resultado da primeira soma é obtida da hipótese e a última igualdade já foi provada para $N = m + 1$. $\square$

LEMA 5.9 Definida a sequência $\{S_k\}$, $k = m, \dots, n$ no Lema 5.5, temos que

$$S_{n-1} < 2^{-m} \frac{(n-m)!}{(n-j)!} \frac{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}{(m-1)!n!},$$

ou seja,

$$2^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} \frac{j}{m-j} < 2^{-m} \frac{(n-m)!}{(n-j)!} \frac{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}{(m-1)!n!}.$$

Demonstração: Pelo Lema 5.8, temos que para todo $m < n$,

$$\binom{m}{j} < \binom{n}{j},$$

que é equivalente a

$$1 < \frac{(m-j)!j!}{m!} \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $m/(m-j)$ obtemos,

$$\frac{m}{m-j} < \frac{(m-j-1)!}{(n-j)!} \frac{n!}{(m-1)!},$$

isto é,

$$\frac{j}{m-j} + 1 < \frac{(m-j-1)!}{(n-j)!} \frac{n!}{(m-1)!}.$$

Podemos concluir então que

$$\frac{j}{m-j} < \frac{(m-j-1)!}{(n-j)!} \frac{n!}{(m-1)!} - \frac{(n-j)!}{(n-j)!}.$$

A multiplicação de ambos os lados da desigualdade por $2^{-m}(n-m)!/n!$, implica em

$$2^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} \frac{j}{m-j} < 2^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} \left\{ \frac{(m-j-1)!}{(n-j)!} \frac{n!}{(m-1)!} - \frac{(n-j)!}{(n-j)!} \right\},$$

que é equivalente à desigualdade

$$2^{-m} \frac{(n-m)!}{n!} \frac{j}{m-j} < 2^{-m} \frac{(n-m)!}{(n-j)!n!} \frac{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}{(m-1)!}$$

e o lema está provado. $\square$

5.3.2 Redução do Problema (5.11) para um Problema de Auto-valores e Auto-vetores de Matrizes

Seja $f \in \pi_n$. Como os polinômios de Hermite são ortogonais, eles formam uma base em π_n . Logo, f pode ser escrita de maneira única como combinação linear destes polinômios, isto é,

$$f(t) = \sum_{i=0}^n a_i c_i H_i(t),$$

onde c_i é uma constante.

Então,

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \left(\sum_{i=0}^n a_i c_i H_i(t) \right)^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^n a_i^2 c_i^2 (H_i(t))^2 dt,$$



onde a última igualdade foi obtida através do Lema 2.1 dado anteriormente. Pela relação dada em (2.8),

$$\|f\|^2 = \sum_{i=0}^n a_i^2 c_i^2 \sqrt{\pi} 2^i i!. \quad (5.12)$$

Agora,

$$f^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^n a_i c_i H_i^{(j)}(t) = \sum_{i=j}^n a_i c_i 2^j i(i-1) \dots (i-j+1) H_{i-j}(t).$$

Logo,

$$\|f^{(j)}\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \sum_{i=j}^n a_i^2 c_i^2 (H_i^{(j)}(t))^2 dt.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} c_i^2 (H_i^{(j)}(t))^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} c_i^2 2^{2j} (i(i-1) \dots (i-j+1))^2 (H_{i-j}(t))^2 dt \\ &= 2^{2j} (i(i-1) \dots (i-j+1))^2 c_i^2 \sqrt{\pi} 2^{i-j} (i-j)! \\ &= \sqrt{\pi} 2^{i+j} \frac{(i!)^{2^*}}{(i-j)!} c_i^2. \end{aligned}$$

Então,

$$\|f^{(j)}\|^2 = \sqrt{\pi} \sum_{i=j}^n 2^{i+j} \frac{(i!)^2}{(i-j)!} a_i^2 c_i^2. \quad (5.13)$$

Tomemos agora c_i , tal que $\|f^{(j)}\|^2 = \sum_{i=j}^n a_i^2$. Logo,

$$c_i = \left(\sqrt{\pi} 2^{i+j} \frac{(i!)^2}{(i-j)!} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad i = j, \dots, n.$$

Consideremos $c_i = 1$, para $i = 0, \dots, j-1$. Dessa forma, temos

$$\|f^{(j)}\|^2 = \sum_{i=j}^n a_i^2.$$

Substituindo o valor de c_i na igualdade (5.12), encontramos

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \sum_{i=0}^{j-1} a_i^2 \sqrt{\pi} 2^i i! + \sum_{i=j}^n (\sqrt{\pi} 2^i i! a_i^2) / \left(\frac{\sqrt{\pi} 2^{i+j} (i!)^2}{(i-j)!} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \sqrt{\pi} 2^i i! a_i^2 + \sum_{i=j}^n \frac{2^{-j} (i-j)!}{i!} a_i^2 \\ &= \sum_{i=0}^n \mu_i a_i^2, \end{aligned}$$

onde

$$\mu_i = \sqrt{\pi} 2^i i!, \quad i = 0, \dots, j-1$$

e

$$\mu_i = \frac{2^{-j}(i-j)!}{i!}, \quad i = j, \dots, n.$$

Para $f^{(m)}$ temos, por (5.13), que

$$\begin{aligned} \|f^{(m)}\|^2 &= \sqrt{\pi} \sum_{i=m}^n 2^{i+m} \frac{(i!)^2}{(i-m)!} a_i^2 c_i^2 \\ &= \left(\sqrt{\pi} \sum_{i=m}^n 2^{i+m} \frac{(i!)^2}{(i-m)!} a_i^2 \right) / \left(\sqrt{\pi} 2^{i+j} \frac{(i!)^2}{(i-j)!} \right) \\ &= \sum_{i=m}^n 2^{m-j} \frac{(i-j)!}{(i-m)!} a_i^2 \\ &= \sum_{i=m}^n \theta_i a_i^2, \end{aligned}$$

onde

$$\theta_i = 2^{m-j} \frac{(i-j)!}{(i-m)!}, \quad i = m, \dots, n.$$

Dessa forma, o problema dado em (5.11) se reduz a

$$\min \left\{ \left(\sum_{i=0}^{m-1} B\mu_i a_i^2 + \sum_{i=m}^n (A\theta_i + B\mu_i) a_i^2 \right) / \sum_{i=j}^n a_i^2 : a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vemos que o denominador não depende de $a_0, \dots, a_{j-1}$. Assim, colocando qualquer variável, só teremos um aumento de nossa função. Portanto, o mínimo dessa função será atingido quando $a_0 = \dots = a_{j-1} = 0$, isto é,

$$F(A, B) = \min \left\{ \sum_{i=j}^{m-1} B\mu_i a_i^2 + \sum_{i=m}^n (A\theta_i + B\mu_i) a_i^2 : a_j, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\},$$

sujeito a $\sum_{i=j}^n a_i^2 = 1$.

Seja $a = (a_j, \dots, a_n)$. Dessa forma, o nosso problema se reduz a determinar o mínimo de $a^t C a$, sujeito a $\langle a, a \rangle = 1$, onde C é a matriz diagonal com elementos

$$\text{diag}(B\mu_j, B\mu_{j+1}, \dots, B\mu_{m-1}, A\theta_m + B\mu_m, \dots, A\theta_n + B\mu_n).$$



Seja a sequência $\{\gamma_k\}_{k=j}^n$ definida por

$$\gamma_k = B\mu_k, \quad k = j, \dots, m-1$$

e

$$\gamma_k = A\theta_k + B\mu_k, \quad k = m, \dots, n.$$

Pelo Teorema de Rayleigh-Ritz (Teorema 2.7), $F(A, B)$ é igual ao mínimo dos auto-valores de C , isto é,

$$F(A, B) = \min \{\gamma_j, \dots, \gamma_{m-1}, \gamma_m, \dots, \gamma_n\}.$$

Além disso, se $F(A, B) = \gamma_k$, o polinômio extremo f_* para o qual $F(A, B) = F(A, B, f_*)$, é dado por $f_*(x) = cH_k(x)$, onde c é uma constante não nula.

5.3.3 Demonstração do Teorema 1.1

Como já dissemos, nossa tarefa é encontrar

$$\min \{\gamma_j, \dots, \gamma_n\}.$$

Pelo Lema 5.3, μ é decrescente. Logo, temos que, na primeira subsequência

$$\{B\mu_j, \dots, B\mu_{m-1}\},$$

o mínimo auto-valor é $B\mu_{m-1}$. Devemos agora achar o mínimo da segunda subsequência $\{A\theta_m + B\mu_m, \dots, A\theta_n + B\mu_n\}$ e comparar com o outro já calculado.

Consideremos $\gamma_k = A\theta_k + B\mu_k$, $k = m, \dots, n$. Investigaremos primeiro a monotonicidade da sequência $\{\gamma_k\}_{k=m}^n$.

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = A(\theta_{k+1} - \theta_k) - B(\mu_k - \mu_{k+1})$$

e então, $\gamma_{k+1} - \gamma_k \geq 0$ se, e somente se, $A(\theta_{k+1} - \theta_k) \geq B(\mu_k - \mu_{k+1})$, ou seja, $\frac{A}{B} \geq \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\theta_{k+1} - \theta_k} = S_k$, onde a igualdade vem do Lema 5.5. Ainda no Lema 5.5, mostramos que S_k é decrescente. Logo, se

$$\frac{A}{B} \geq S_m, \text{ então } \gamma_{k+1} - \gamma_k \geq 0,$$



o que implica que γ_k é crescente e, portanto, $\gamma_{\min_{m \leq k \leq n}} = \gamma_m$. Dessa forma, devemos comparar

$$\min_{j \leq k \leq n} \gamma_k = \min \{ \gamma_{m-1}, \gamma_m \},$$

onde $\gamma_k = B\mu_k$, $k = j, \dots, m-1$. Se

$$\frac{A}{B} \leq S_{n-1}, \text{ então } \gamma_{k+1} - \gamma_k \leq 0,$$

o que implica que γ_k é decrescente e, portanto, $\gamma_{\min_{m \leq k \leq n}} = \gamma_n$ e assim, devemos que comparar

$$\min_{j \leq k \leq n} \gamma_k = \min \{ \gamma_{m-1}, \gamma_n \}.$$

Vejam os casos onde $\frac{A}{B} \geq S_m$. A fim de compararmos γ_{m-1} e γ_m , isto é, $B\mu_{m-1}$ e $A\theta_m + B\mu_m$, observemos que $\gamma_{m-1} < \gamma_m$ se $(\mu_{m-1} - \mu_m)/\theta_m < \frac{A}{B}$ e $\gamma_{m-1} \geq \gamma_m$ caso contrário.

Pelo Lema 5.6, temos que $\frac{\theta_m}{\mu_{m-1} - \mu_m} = 2^m \frac{m!(m-j)}{j}$ e sabemos que $S_m < 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)}$, uma vez que $S_m = \frac{2^{-m}}{(m+1)!} \frac{j}{(m-j)} < 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)}$ implica na condição $m > 0$.

Temos dessa forma dois resultados:

(1) Se

$$\frac{A}{B} \geq S_m \text{ e } \frac{A}{B} > 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)},$$

então

$$B\mu_{m-1} < A\theta_m + B\mu_m \text{ e, portanto, } F(A, B) = \gamma_{m-1}.$$

(2) Se

$$\frac{A}{B} \geq S_m \text{ e } \frac{A}{B} < 2^{-m} \frac{j}{m!(m-j)},$$

então

$$B\mu_{m-1} > A\theta_m + B\mu_m \text{ e, portanto, } F(A, B) = \gamma_m.$$

Esses dois casos, correspondem às afirmações (iii) e (ii) do teorema.

Consideremos agora o caso onde $\frac{A}{B} \leq S_{n-1}$.

A fim de compararmos γ_{m-1} e γ_n , isto é, $B\mu_{m-1}$ e $A\theta_n + B\mu_n$, notemos que $\gamma_{m-1} < \gamma_n$

se $(\mu_{m-1} - \mu_n)/\theta_n < \frac{A}{B}$ e $\gamma_{m-1} \geq \gamma_n$, caso contrário.

Pelo Lema 5.7, temos que

$$\frac{\theta_n}{\mu_{m-1} - \mu_n} = 2^m \frac{(n-j)!}{(n-m)!} \frac{(m-1)n!}{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}$$

e, pelo Lema 5.9, obtemos $S_{n-1} < 2^{-m} \frac{(n-m)!}{(n-j)!} \frac{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}{(m-1)n!}$. Assim, podemos concluir o seguinte resultado:

Se

$$\frac{A}{B} \leq S_{n-1} \text{ e } \frac{A}{B} < 2^{-m} \frac{(n-m)!}{(n-j)!} \frac{((m-j-1)!n! - (n-j)!(m-1)!)}{(m-1)n!},$$

então

$$B\mu_{m-1} > A\theta_n + B\mu_n \text{ e portanto } F(A, B) = \gamma_n.$$

Isso corresponde à afirmação (i) do teorema. $\square$

5.3.4 Demonstração do Corolário 1.1

Sejam

$$\alpha = \frac{A}{A2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}} \quad (5.14)$$

e

$$\beta = \frac{B}{A2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}}. \quad (5.15)$$

Desde que

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{A2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}}{A},$$

então,

$$\frac{1}{\alpha} = 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + \frac{B}{A}2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}. \quad (5.16)$$

Por outro lado, a restrição para $\frac{A}{B}$ dada em (1.4), é obviamente equivalente á desigualdade

$$\frac{B}{A} \geq 2^m \frac{n!}{(n-m)!} \frac{m-j}{j}. \quad (5.17)$$

Assim, por (5.16) e (5.17), temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha} &\leq 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + 2^m n!((n-m)!)^{-1}(m-j)(j)^{-1}2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1} \\ &= 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1}(1 + (m-j)(j)^{-1}) \\ &= 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1}mj^{-1}.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\alpha \leq \frac{(n-m)!j}{2^{m-j}(n-j)!m}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}2^j \binom{n}{j} j! - \alpha 2^m \binom{n}{m} m! &= 2^j \binom{n}{j} j! - \frac{A 2^m \binom{n}{m} m!}{A 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B 2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}} \\ &= \frac{2^j n!((n-j)!)^{-1} 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} A}{A 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B 2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}} \quad (5.18) \\ &\quad + \frac{(-2^m n!((n-m)!)^{-1} A) + B 2^j n!((n-j)!)^{-1} 2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}}{A 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B 2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}} \\ &= \frac{B}{A 2^{m-j}(n-j)!((n-m)!)^{-1} + B 2^{-j}(n-j)!(n!)^{-1}} \\ &= \beta.\end{aligned}$$

Então, por (5.14), (5.15) e (5.18), temos que (1.5) reduz-se a

$$\begin{aligned}\|f^{(j)}\|^2 &\leq \alpha \|f^{(m)}\|^2 + \beta \|f\|^2 \\ &= \alpha \|f^{(m)}\|^2 + \left\{ 2^j \binom{n}{j} j! - \alpha 2^m \binom{n}{m} m! \right\} \|f\|^2.\end{aligned}$$

Recordando, temos que a restrição do Teorema 1.1(i), dada por (1.4), equivale a

$$\alpha \leq \frac{(n-m)!j}{2^{m-j}(n-j)!m}$$

e a desigualdade dada em (1.5), é equivalente a

$$\|f^{(j)}\|^2 \leq \alpha \|f^{(m)}\|^2 + \left\{ 2^j \binom{n}{j} j! - \alpha 2^m \binom{n}{m} m! \right\} \|f\|^2.$$

Dessa forma, demonstramos o corolário. $\square$

5.3.5 Demonstração do Teorema 1.2

Desde que $j = 1$ e $m = 2$, temos que determinar

$$\min \{B\mu_1, A\theta_2 + B\mu_2, \dots, A\theta_n + B\mu_n\}.$$

Devemos então encontrar o mínimo auto-valor da subsequência

$$\{A\theta_2 + B\mu_2, \dots, A\theta_n + B\mu_n\}$$

e compará-lo com $B\mu_1$.

Recordemos que para $k = m, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \gamma_k &= A\theta_k + B\mu_k \\ &= A2^{m-j} \frac{(k-j)!}{(k-m)!} + B2^{-j} \frac{(k-j)!}{k!} \\ &= 2^{-j} \left(A2^m \frac{(k-j)!}{(k-m)!} + B \frac{(k-j)!}{k!} \right). \end{aligned}$$

Para facilitar nosso trabalho, podemos reduzir o problema à reta onde temos $2^m A + B = 1$, ou seja, $2^m A = 1 - B$, desse modo teremos,

$$\gamma_k = \left((1-B) \frac{(k-j)!}{(k-m)!} + B \frac{(k-j)!}{k!} \right) / 2^j, \quad k = m, \dots, n.$$

Por outro lado,

$$\frac{(k-j)!}{(k-m)!} = (k-j)(k-j+1) \dots (k-m+1)$$

e

$$\frac{(k-j)!}{k!} = \frac{1}{k(k-1) \dots (k-j+1)}.$$



Assim, substituindo os valores de $j = 1$ e $m = 2$ em γ_k , temos

$$\gamma_k = \left(\frac{B}{k} + (1 - B)(k - 1) \right) / 2, \quad k = 2, \dots, n.$$

Seja a função $g(x)$ definida por

$$g(x) = \left(\frac{B}{x} + (1 - B)(x - 1) \right) / 2, \quad 2 \leq x \leq n.$$

Desde que $g(k) = \gamma_k$ para $k = 2, \dots, n$, então nosso problema se reduz a investigar o comportamento de $g(x)$ quando A e B pertencem ao segmento $2^m A + B = 1$, $A, B > 0$.

Note que $2g'(x) = \frac{-B}{x^2} + (1 - B) = 0$ se, e somente se, $x = \pm(B/(1 - B))^{\frac{1}{2}}$ e $g''(x) = \frac{B}{x^3} > 0$ para $x > 0$. Assim, $g(x)$ é convexa e atinge seu ponto de mínimo em $x = (B/(1 - B))^{\frac{1}{2}}$. Podemos então concluir que:

Se $\sqrt{\frac{B}{1-B}} < 2$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_2$,

Se $\sqrt{\frac{B}{1-B}} > n$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_n$,

Se $k \leq \sqrt{\frac{B}{1-B}} < k + 1$, onde $2 \leq k \leq n - 1$, então, $\gamma_{\min} = \min \{\gamma_k, \gamma_{k+1}\}$.

Verifiquemos o mínimo de γ_k e γ_{k+1} .

Sabemos que

$$\gamma_k = \frac{B}{k} + (1 - B)(k - 1) \quad \text{e} \quad \gamma_{k+1} = \frac{B}{k+1} + (1 - B)k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} - \gamma_k &= B \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) + k - (k - 1) - B \\ &= B \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} - 1 \right) + 1 \\ &= \frac{B}{k(k+1)} (k - (k+1) - k^2 - k) + 1 \\ &= 1 - \frac{k^2 + k + 1}{k(k+1)} B. \end{aligned}$$

Observemos que $\gamma_{k+1} < \gamma_k$ se $\frac{k(k+1)}{k^2 + k + 1} < B$ e $\gamma_{k+1} \geq \gamma_k$, caso contrário. É claro que se $B = \frac{k(k+1)}{k^2 + k + 1}$, então $\gamma_k = \gamma_{k+1}$.



Chamemos $y = \left(\frac{B}{1-B}\right)^{\frac{1}{2}}$ para $0 \leq B \leq 1$. Se $B = k(k+1)/(k^2+k+1)$, o ponto de mínimo de $g(x)$ é

$$y_k = \sqrt{\left(\frac{k(k+1)}{k^2+k+1}\right) / \left(1 - \frac{k(k+1)}{k^2+k+1}\right)} = \sqrt{k(k+1)},$$

onde $k < y_k < k+1$.

Desde que a função $g(x)$ é convexa, então $\gamma_{\min} = \gamma_{k+1}$ se, e somente se, $y_k < y < y_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-2$. Por outro lado, a desigualdade $y_k < y < y_{k+1}$ é equivalente a

$$\frac{k(k+1)}{k^2+k+1} < B < \frac{(k+1)(k+2)}{k^2+3k+3}.$$

De fato, a equivalência é vista pela sequência das seguintes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned} y_k &< y < y_{k+1}, \\ \sqrt{k(k+1)} &< \sqrt{\frac{B}{1-B}} < \sqrt{(k+1)(k+2)}, \\ k(k+1)(1-B) &< B < (k+1)(k+2)(1-B), \\ \frac{k(k+1)}{1+k(k+1)} &< B < \frac{(k+1)(k+2)}{1+(k+1)(k+2)}, \\ \frac{k(k+1)}{k^2+k+1} &< B < \frac{(k+1)(k+2)}{k^2+3k+3}. \end{aligned}$$

Vamos comparar, em cada um dos casos, γ_{k+1} com o auto-valor $\gamma_1 = B\mu_1 = \frac{B}{2}$.

Para $B \in (0, \frac{6}{7})$, devemos comparar os auto-valores γ_1 e γ_2 . Desde que $\gamma_1 = B\mu_1 = \frac{B}{2}$ e $\gamma_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} + (1-B)\right)$,

$$\begin{aligned} \gamma_2 - \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{B}{2} + 1 - B - B\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2}B\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que:

Se $B \in (0, \frac{2}{3})$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_1$,

Se $B = \frac{2}{3}$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_1 = \gamma_2$,

Se $B \in (\frac{2}{3}, \frac{6}{7})$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_2$.



Tomemos agora k , um intervalo qualquer tal que $2 \leq k \leq n$ e seja

$$B \in \left(\frac{k(k+1)}{k^2+k+1}, \frac{(k+1)(k+2)}{k^2+3k+3} \right) = \Delta_k.$$

Desde que

$$\gamma_{k+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{k+1} + (1-B)k \right),$$

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} - \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{B}{k+1} - B + (1-B)k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(B \left(\frac{1}{k+1} - 1 - k \right) + k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(B \frac{1 - (k+1)^2}{k+1} + k \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} \left\{ B \left(1 - (k+1)^2 \right) + k(k+1) \right\}. \end{aligned}$$

Assim, $\gamma_{k+1} < \gamma_1$ se, e somente se, $B(1 - (k+1)^2) + k(k+1) < 0$, ou seja, se e somente se, $(k+1)/(k+2) < B$.

Sabemos que

$$B \in \left(\frac{k(k+1)}{k^2+k+1}, \frac{(k+1)(k+2)}{k^2+3k+3} \right).$$

Verifiquemos se $\frac{k+1}{k+2} < \frac{k(k+1)}{k^2+k+1}$. Temos que $\frac{k+1}{k+2} < \frac{k(k+1)}{k^2+k+1}$ se, e somente se, $k^2+k+1 < k^2+2k$, que equivale a $1 < k$.

Mostramos assim que $\frac{k+1}{k+2} < B$ e, portanto, $\gamma_{\min} = \gamma_{k+1}$.

Finalmente, para

$$B \in \left(\frac{n(n-1)}{n^2-n+1}, 1 \right),$$

vamos comparar os auto-valores γ_1 e γ_n . Desde que $\gamma_n = \frac{1}{2} \left(\frac{B}{n} + (1-B)(n-1) \right)$,

$$\begin{aligned} \gamma_n - \gamma_1 &= \frac{1}{2} \left(B \left(\frac{1}{n} - 1 - (n-1) \right) + (n-1) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(B \frac{1-n^2}{n} + \frac{n(n-1)}{n} \right). \end{aligned}$$

Assim, $\gamma_n < \gamma_1$ se, e somente se, $\frac{n(n-1)}{n} < \frac{B(n^2-1)}{n}$, ou seja, se, e somente se, $\frac{n}{n+1} < B$.

Sabemos que $B \in \left(\frac{n(n-1)}{n^2-n-1}, 1 \right)$. Verifiquemos que

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{n^2-n-1}.$$

Temos que $\frac{n}{n+1} < \frac{n(n-1)}{n^2-n-1}$ se, e somente se, $n^2-n-1 < n^2-1$ que equivale a $-n < 0$. Mostramos assim que $\frac{n}{n+1} < B$, o que implica em $\gamma_{\min} = \gamma_n$.

As restrições $B \in \Delta_k$ podem ser equivalentemente transformadas em restrições para $\frac{A}{B}$. Recordemos que todas as considerações têm sido feitas sobre a restrição $2^m A + B = 1$, ou seja, sobre $\frac{A}{B} = 2^{-m} \left(\frac{1}{B} - 1 \right)$, como $m = 2$, obtemos $\frac{A}{B} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B} - 1 \right)$.

Sabemos que

$$\frac{k(k+1)}{1+k(k+1)} < B < \frac{(k+1)(k+2)}{1+(k+1)(k+2)},$$

o que implica em

$$\frac{1+(k+1)(k+2)}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{B} < \frac{1+k(k+1)}{k(k+1)},$$

que é equivalente a

$$\frac{1}{(k+1)(k+2)} + 1 < \frac{1}{B} < \frac{1}{k(k+1)} + 1.$$

Dessa forma, subtraindo 1 da desigualdade acima e multiplicando por $\frac{1}{4}$, obtemos

$$\frac{1}{4} \frac{1}{(k+1)(k+2)} < \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B} - 1 \right) < \frac{1}{4} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Portanto, temos os seguintes resultados:

Se $\frac{1}{4} \frac{1}{(k+1)(k+2)} < \frac{A}{B} < \frac{1}{4} \frac{1}{k(k+1)}$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-2$;

Se $\frac{1}{8} < \frac{A}{B} < \infty$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_1$;

Se $0 < \frac{A}{B} < \frac{1}{4} \frac{1}{n(n-1)}$, então, $\gamma_{\min} = \gamma_n$.

Nossa observação final é que podemos remover a restrição $2^m A + B = 1$ pela seguinte razão:

O lado direito de qualquer das desigualdades (1.8)-(1.12) tem a forma

$$G(A, B) = \frac{A\|f''\|^2 + B\|f\|^2}{A\theta_k + B\mu_k}.$$

Obviamente,

$$G(\alpha A, \alpha B) = G(A, B) \text{ para qualquer } \alpha > 0.$$

Então,

$$\|f'\|^2 \leq G(A, B) \text{ para } 2^m A + B = 1, S_{k+1} < \frac{A}{B} < S_k$$

é equivalente à desigualdade

$$\|f'\|^2 \leq G(\alpha A, \alpha B) \text{ para } \alpha(2^m A + B) = 1, S_{k+1} < \frac{A}{B} < S_k.$$

Em outras palavras, a desigualdade terá a mesma forma em qualquer semi-reta $B = \alpha A$, $\alpha > 0$. Isto significa que podemos retirar a restrição $2^m A + B = 1$. Então, as únicas restrições essenciais serão $S_{k+1} < \frac{A}{B} < S_k$. $\square$

Referências

- [1] C. R. R. ALVES AND D. K. DIMITROV, Landau and Kolmogoroff type polynomial inequalities, *Journal of Inequalities and Applications*, in print.
- [2] E. X. L. ANDRADE, D. K. DIMITROV AND A. S. RANGA, Characterization of generalized Bessel polynomials in terms of polynomials inequalities, *Journal of Math. Analysis and Applications*, **221** (1998), 538-543.
- [3] E. BENGT-OLOV, Some best constants in the Landau inequality on a finite interval, *J. Approx. Theory*, **94** (1998), 420-454.
- [4] S. N. BERNSTEIN, Sur l'ordre de la meilleure approximation des continues par des polinômes de degré donné, *Mém. Acad. Roy. Belgique* (2) **4**(1912), 1-103.
- [5] B. D. BOJANOV, An extension of the Markov inequality, *J. Approx. Theory*, **35**(1982), 181-190.
- [6] B. D. BOJANOV AND A. K. VARMA, On a polynomial inequality of Kolmogorov type, *Proc. Amer. Math. Soc.* **124**(1996), 491-496.
- [7] T. S. CHIHARA, "An Introduction to Orthogonal Polynomial", *Gordon and Breach, Science Publishers, Inc.*, New York, 1978.
- [8] D. K. DIMITROV, Bernstein Inequality in L_2 Norm, *Math. Balkanica (N. S.)*, **7** (1993), 131-136.
- [9] R. J. DUFFIN AND A. C. SCHAEFFER, A refinement of an inequality of the brothers Markoff, *Trans. Amer. Math. Soc.* **50**(1941), 517-528.



- [10] J. HADAMARD, Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées, *Bull. Soc. Math. France* **42** (1914), 68-72.
- [11] G. A. HORN AND C. R. JOHNSON, "Matrix Analysis", *Cambridge Univ. Press*, Cambridge, 1985.
- [12] A. KOLMOGOROFF, On inequalities between the upper bounds of the successive derivatives of an arbitrary function on an infinite interval, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 1-2*, *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1962, 233-243.
- [13] E. LANDAU, Einige Ungleichungen für zweimal differenzierbare Funktionen, *Proc. London Math. Soc. (2)* **13**(1913), 43-49.
- [14] A. A. MARKOV, On a problem of D. I. Mendeleev, *Zap. Imp. Akad. Nauk, St. Petersburg* **62**(1889), 1-24 (in Russian).
- [15] V. A. MARKOV, On functions deviating least from zero in a given interval, *Izdat. Imp. Akad. Nauk*, St. Petersburg 1892 (in Russian) [German transl. *Math. Ann.* **77**(1916), 218-258].
- [16] A. P. MATORIN, On inequalities between the maxima of the absolute values of a function and its derivatives on a half-line, in "Amer. Soc. Trans. Ser. 2", Vol. 8, pp. 13-17, *Amer. Math. Soc.*, Providence, 1958.
- [17] D. MENDELEEV, Investigation of aqueous solutions based on specific gravity, St. Petersburg, 1887 (in Russian).
- [18] G. V. MILOVANOVIĆ, D. S. MITRINOVIĆ AND TH. M. RASSIAS, "Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros", *World Scientific*, Singapore, 1994.
- [19] T. J. RIVLIN, "Chebyshev Polynomials", *John Wiley and Sons, Inc.*, New York, 1990.



- [20] E. SCHMIDT, Über die neibst ihren Abletungen orthogonalen Polynomensysteme und das rugehörige Exstremum, *Math. Ann.* **119**(1943), 165-204.
- [21] I. J. SCHOENBERG AND A. CAVARETTA, Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the halflne, in "Constructive Theory of Functions, Proc. Internat. Conf., Varna, 1970," pp. 297-308, Izdat. Bulgar. Akad. Nauk., Sofia, 1972.
- [22] G. SZEGŐ, "Orthogonal Polynomials", Amer. Math. Soc. Colloq. Public., Vol 23, 4th ed., *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI, 1975.
- [23] E. C. TITCHMARSH, "The Theory of Functions", *Oxford University Press*, London, 1939.
- [24] P. TURÁN, Remark on a theorem of Erhard Schmidt, *Mathematica (2)* **25** (1960), 373-378.
- [25] A. K. VARMA, A new characterization of Hermite polynomials, *J. Approx. Theory* **63** (1990), 1-24.



