

**RONÃ RINSTON AMAURY MENDES**

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS DE SÉRIES  
HETEROSCEDÁSTICAS USANDO PROJETO DE EXPERIMENTO DE  
MISTURAS: UMA ABORDAGEM DO *DESIRABILITY* APLICADA A MODELOS  
GARCH**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia  
do Campus de Guaratinguetá, Universidade  
Estadual Paulista, para a obtenção do título de  
Doutor em Engenharia Mecânica na área de  
Gestão e Otimização.

Orientador: Prof. Dr. Messias Borges Silva  
Co-Orientador: Prof. Dr. Pedro Paulo Balestrassi  
Co-Orientador: Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva

Guaratinguetá  
2012

Mendes, Ronã Rinston Amaury

M538c Uma contribuição para a otimização de portfólios de séries heteroscedásticas usando projeto de experimento de misturas: uma abordagem do desirability aplicada a modelos GARCH / Ronã Rinston Amaury Mendes - Guaratinguetá : [s.n.], 2012.

115 f. : il.

Bibliografia: f. 98

Tese (doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.

Orientador: Prof. Dr. Messias Borges Silva

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Paulo de Paiva

Prof. Dr. Pedro Paulo Balestrassi

1. Entropia I. Título

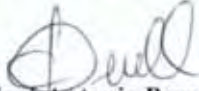
CDU 536.73(043)

**RONÃ RINSTON AMAURY MENDES**

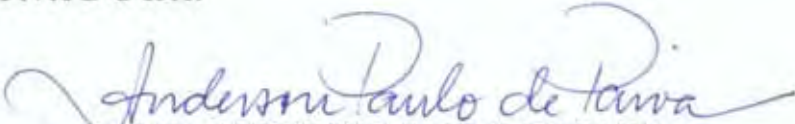
**ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“DOUTOR EM CIÊNCIAS”**

**PROGRAMA: ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA: GESTÃO E OTIMIZAÇÃO**

**APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO**

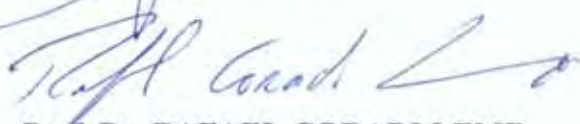
  
**Prof. Dr. José Antonio Perrella Balestieri**  
Coordenador

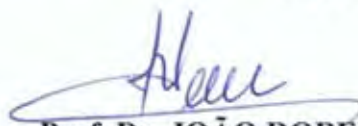
**BANCA EXAMINADORA:**

  
**Prof. Dr. ANDERSON PAULO DE PAIVA**  
Co-Orientador / UNIFEI

  
**Prof.ª Dr.ª MARCELA APARECIDA GUERREIRO  
MACHADO DE FREITAS**  
UNESP-FEG

  
**Prof. Dr. ANTONIO FERNANDO BRANCO COSTA**  
UNESP-FEG

  
**Prof. Dr. RAFAEL CORADI LEME**  
UNIFEI

  
**Prof. Dr. JOÃO ROBERTO FERREIRA**  
UNIFEI

*Novembro de 2012*

**DADOS CURRICULARES****RONÃ RINSTON AMAURY MENDES**

|            |                                                                               |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| NASCIMENTO | 05.11.1971 – Poço Fundo / MG                                                  |
| FILIAÇÃO   | Antônio Levindo Mendes<br>Carmélia Batagini Mendes                            |
| 2005/2006  | Mestrado<br>Engenharia de Produção - Unifei                                   |
| 2003/2004  | Especialização<br>Qualidade & Produtividade - Unifei                          |
| 1997/1998  | Especialização<br>Administração Estratégica de Marketing – Faceca Varginha/MG |
| 1995/1996  | Especialização<br>Gerência de Empresas – Faceca Varginha/MG                   |
| 2004/2007  | Graduação<br>Administração – Faceca Varginha/MG                               |
| 1990/1994  | Graduação<br>Economia – Faceca Varginha/MG                                    |

## DEDICATÓRIA

Aos meus amores:

Claudia, minha esposa,  
que soube me amar, compreender e apoiar diante deste grande desafio.  
Manoela, minha filha,  
oásis de alegria, felicidade e pureza que me fez aprender a amar mais.  
Amo vocês!

Ao meu pai,  
Antônio Levindo Mendes,  
que foi para mim exemplo de dedicação, amor, luta, trabalho e simplicidade.  
Sentirei saudades suas sempre!

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus e a Nossa Senhora Aparecida pela luz e pela proteção em tantas viagens até chegar aqui.

A minha mãe, Carmélia, exemplo de amor, superação e de resignação diante das adversidades e a Maria Aparecida, minha irmã, o carinho e a firme determinação de sempre seguir adiante.

Agradeço aos meus orientadores Profs. Anderson Paulo de Paiva e Pedro Paulo Balestrassi, que foram mais que orientadores, foram grandes amigos nesta caminhada, e que me mostraram muito mais que conhecimentos acadêmicos; mostraram-me como ser um profissional melhor e uma pessoa preparada para o mercado e para a vida com suas palavras e exemplos.

Ao meu também orientador, Prof. Messias Borges Silva, por ter acreditado em mim e no meu trabalho e ter aberto as portas da UNESP. Obrigado pelo apoio e pelo incentivo até chegar aqui.

Aos professores da FEG-UNESP, Profs. Antônio Fernando Branco Costa, Fernando Augusto Silva Marins e Marcela Aparecida G. M. de Freitas, à Secretária Margô e tantos outros que fizeram mais prazerosa a passagem por esta bela instituição.

Aos professores do IEPG da UNIFEI, particularmente os Profs. Carlos Eduardo Sanches da Silva, João Roberto Ferreira, Rafael Coradi Leme e João Batista Turrioni, e outros não citados aqui, mas que foram os grandes mentores e exemplos em quem pude me espelhar e, assim, caminhar até aqui. Muitos destes Mestres, trago comigo com carinho e com gratidão especial, sabendo que só conseguirei retribuir parte do bem que me fizeram através de minhas orações de agradecimento.

Aos meus amigos de longa data Fabrício José Pontes, Paulo Roberto Rodrigues de Souza, Emerson José de Paiva, Harley Venturato e onde incluo novamente o amigo-irmão Anderson Paulo de Paiva. Parte do que sou, devo a vocês. Parte de minha felicidade, também. Perdão pelas falhas e pela imperfeição. Obrigado pela amizade incondicional.

A todos os amigos Nelson Lambert, Neide Pena Cária, Alexandre Moselli, André Tadeu B. Souza, Hugo Ribeiro Junior, Marcelo Bottazzini e tantos outros que deixo de citar aqui por precisar de mais espaço, mas que fazem da minha vida e da vida de minha família, uma vida melhor e mais alegre.

A meu sogro, Manoel Marinho, e minha sogra, Imaculada Conceição, a toda sua família por tantos bons momentos juntos e pela força em seguir adiante. Obrigado por me apoiarem e me suportarem até aqui, principalmente entendendo quando não pude estar nas festas e eventos da família. Obrigado por me receberem tão bem na família.

À agência de apoio e fomento CAPES que patrocinou parte desta tese através do Programa Pró-Engenharias.

A todos vocês aqui citados e aos que não têm o nome escrito aqui, mas fizeram parte desta conquista, meu muito obrigado e que o grande Pai os abençoe sempre!

MENDES, R. R. A. Uma contribuição para a otimização de portfólios de séries heteroscedásticas usando Projeto de Experimento de Misturas: uma abordagem do *Desirability* aplicada a Modelos GARCH. 2012. 108p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

## RESUMO

Esta tese apresenta uma proposta inovadora com base no DOE (*Design of Experiments*) para tratar a otimização de portfólios multiobjetivos utilizando uma abordagem híbrida que combina arranjos de experimentos do tipo Misturas (*Mixture Design of Experiments* – MDE) e funções *Desirability* para se encontrar um portfólio ótimo modelado pelo algoritmo ARMA–GARCH. Neste tipo de estratégia experimental, as proporções investidas em cada ativo do portfólio são tratadas como fatores de um arranjo de misturas adequado para o tratamento de portfólios em geral. Ao invés de utilizar a tradicional programação matemática de portfólios de média variância (MVP), o conceito da função *desirability* é aqui utilizado para resolver problemas de otimização não linear multiobjetiva para a predição de valores condicionais de retorno (média), risco (variância) e entropia com suas respectivas superfícies de resposta estimadas pelo MDE. Para evitar a falta de diversificação dos portfólios, o princípio da Máxima Entropia de Shannon é incorporado ao modelo de otimização. O método fatorial de ajuste da função *desirability* proposto nesta tese aperfeiçoa o desempenho do algoritmo *desirability* conduzindo a uma eficiente alocação dos ativos no portfólio. Esta abordagem também permite a inclusão da aversão ao risco na rotina de otimização e engloba as interações (efeitos não lineares) dos efeitos entre diversos ativos enquanto reduz o esforço computacional requerido para resolver o problema de otimização não linear restrito. Para avaliar a viabilidade proposta, o método foi testado com dados reais de séries semanais do mercado mundial de preços spot de petróleo bruto. Os resultados numéricos demonstram a adequação da proposta.

**PALAVRAS-CHAVE:** Projeto de Experimento de Misturas, Modelos ARMA–GARCH, Otimização de Portfólio Multiobjetivo, Entropia.



MENDES, R. R. A. **A Contribution to Heteroskedastic Series Portfolio's Optimization Using Mixture Design of Experiments: A *Desirability* approach applied to GARCH models.** 2012. 108p. Doctoral Thesis – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

## ABSTRACT

This thesis presents a new Design of Experiments (DOE)–based approach to treat multi-objective portfolio optimization combining Mixture Design of Experiments (MDE) and *Desirability* functions to find an optimal portfolio modeled by ARMA–GARCH algorithm. In this kind of experimental strategy, the design factors are treated as proportions in a mixture system considered quite adequate for treating portfolios in general. Instead of using traditional MVP mathematical programming, the concept of *desirability* function is here used to solve multiobjective nonlinear objective optimization problem for the predicted conditional values of return (mean), risk (variance) and entropy with their respective response surfaces estimated by MDE. To avoid the portfolio's lack of diversity, the principle of Shannon's maximum entropy is embodied in the optimization model. The computer-aided *desirability* tuning method proposed in this paper improves the *desirability* algorithm performance leading to an efficient assets allocation. This approach also allows the inclusion of risk aversion in the optimization routine and encompasses the interaction (nonlinear) effects among the several assets while reduces the computational effort required to solve the constrained nonlinear optimization problem. To assess the proposal feasibility, the method is tested with a real data set formed by weekly world crude oil spot prices. The numerical results verify the proposal's adequacy.

**KEYWORDS:** Mixture design of experiments, ARMA–GARCH models, Multiobjective Portfolio optimizations, Entropy.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                       |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1: Série temporal (Dubai).....                                                                 | 14 |
| Figura 2: Série estacionária. ....                                                                    | 17 |
| Figura 3: Função de autocorrelação.....                                                               | 18 |
| Figura 4: Homo e heteroscedasticidade.....                                                            | 21 |
| Figura 5: Arranjo central composto (CCD) para 2 fatores. ....                                         | 37 |
| Figura 6: Rotacionalidade.....                                                                        | 38 |
| Figura 7: Arranjo do tipo Box–Behnken para três fatores.....                                          | 38 |
| Figura 8: Método fatorial de ajuste da função <i>Desirability</i> .....                               | 54 |
| Figura 9: Série de preços originais – Asia Dubai Fateh. ....                                          | 57 |
| Figura 10: Série de preços originais – China Daqing. ....                                             | 58 |
| Figura 11: Série de preços originais – Indonesia Minas.....                                           | 58 |
| Figura 12: Série de preços originais – Venezuela Tia Juana. ....                                      | 59 |
| Figura 13: Série estacionária – Asia Dubai Fateh. ....                                                | 59 |
| Figura 14: Série estacionária – China Daqing. ....                                                    | 60 |
| Figura 15: Série estacionária – Indonesia Minas.....                                                  | 60 |
| Figura 16: Série estacionária – Venezuela Tia Juana. ....                                             | 61 |
| Figura 17: Função de autocorrelação dos retornos – Asia Dubai Fateh.....                              | 62 |
| Figura 18: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – Asia Dubai Fateh. ....    | 62 |
| Figura 19: Função de autocorrelação dos retornos – China Daqing.....                                  | 63 |
| Figura 20: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – China Daqing.....         | 63 |
| Figura 21: Função de autocorrelação dos retornos – Indonesia Minas. ....                              | 64 |
| Figura 22: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – Indonesia Minas. ....     | 64 |
| Figura 23: Função de autocorrelação dos retornos – Venezuela Tia Juana.....                           | 65 |
| Figura 24: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – Venezuela Tia Juana. .... | 65 |
| Figura 25: Arranjo de Misturas. ....                                                                  | 67 |
| Figura 26: Superfície de resposta do Retorno dos ativos. ....                                         | 69 |
| Figura 27: Gráfico de contorno do Retorno.....                                                        | 69 |
| Figura 28: Superfície de resposta do Risco dos ativos. ....                                           | 70 |
| Figura 29: Gráfico de contorno do Risco. ....                                                         | 70 |

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 30: Superfície de resposta da Entropia.....                            | 71 |
| Figura 31: Contorno da Entropia.....                                          | 71 |
| Figura 32: Superfície de resposta para pesos e importâncias = 1.....          | 75 |
| Figura 33: Contorno do <i>Desirability</i> com peso e importância = 1.....    | 75 |
| Figura 34: Superfície de resposta para pesos e importâncias = 5,05.....       | 76 |
| Figura 35: Contorno do <i>Desirability</i> com peso e importância = 5,05..... | 76 |
| Figura 36: Função <i>desirability</i> em Box–Behnken.....                     | 77 |
| Figura 37: Portfólio ótimo.....                                               | 79 |
| Figura 38: Superfície de resposta do Retorno ótimo.....                       | 79 |
| Figura 39: Contorno do Retorno no portfólio ótimo.....                        | 80 |
| Figura 40: Superfície de resposta do risco ótimo.....                         | 80 |
| Figura 41: Contorno do Risco no portfólio ótimo.....                          | 81 |
| Figura 42: Portfólio antes do método.....                                     | 83 |
| Figura 43: Função <i>desirability</i> em Box–Behnken.....                     | 84 |
| Figura 44: Portfólio ótimo.....                                               | 85 |
| Figura 45: Fronteira Eficiente de Pareto do Portfólio .....                   | 86 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                                                  |    |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1: Sumário estatístico dos retornos dos ativos de petróleo bruto.....     | 61 |
| Tabela 2: Estatística dos testes das séries de retorno dos ativos (lag = 1)..... | 66 |
| Tabela 3: Parâmetros ARMA–GARCH dos ativos. ....                                 | 66 |
| Tabela 4: Previsão um passo à frente usando modelos ARMA–GARCH. ....             | 67 |
| Tabela 5: Matriz de Correlação Condicional.....                                  | 68 |
| Tabela 6: Coeficientes dos modelos de Risco, Retorno e Entropia.....             | 73 |
| Tabela 7: Parâmetros da Função <i>Desirability</i> para o MDE.....               | 74 |
| Tabela 8: Função <i>Desirability</i> , antes da aplicação do método. ....        | 74 |
| Tabela 10: Parâmetros da Função <i>Desirability</i> – RSM .....                  | 77 |
| Tabela 11: Portfólio ótimo.....                                                  | 78 |
| Tabela 12: Função <i>Desirability</i> , antes da aplicação do método. ....       | 82 |
| Tabela 14: Parâmetros da Função <i>Desirability</i> – RSM .....                  | 84 |
| Tabela 15: Portfólio ótimo.....                                                  | 85 |
| Tabela 16: Comparativo entre as aplicações antes do método. ....                 | 87 |
| Tabela 17: Comparativo entre as aplicações depois do método.....                 | 87 |

## LISTA DE QUADROS

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Quadro 1: Objetivos de otimização no Método de Derringer. ....                            | 46 |
| Quadro 2: Relações de importância entre o Alvo e os Limites no <i>Desirability</i> . .... | 46 |

## SUMÁRIO

|         |                                                                 |    |
|---------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 1.      | INTRODUÇÃO.....                                                 | 8  |
| 1.1     | Descrição do Problema .....                                     | 8  |
| 1.2     | Objetivo da Pesquisa.....                                       | 10 |
| 1.3     | Justificativa .....                                             | 11 |
| 1.4     | Contribuições da Pesquisa .....                                 | 11 |
| 1.5     | Delimitação do Tema.....                                        | 12 |
| 1.6     | Método de Pesquisa .....                                        | 12 |
| 1.7     | Estrutura do Trabalho .....                                     | 13 |
| 2.      | SÉRIES TEMPORAIS .....                                          | 14 |
| 2.1     | Considerações Iniciais .....                                    | 14 |
| 2.2     | Caracterização das séries temporais.....                        | 16 |
| 2.2.1   | Estacionariedade das Séries .....                               | 16 |
| 2.2.2   | Séries correlacionadas e autocorrelacionadas .....              | 17 |
| 2.2.2.1 | Função de autocorrelação (ACF).....                             | 18 |
| 2.2.3   | Testes para classificação das séries .....                      | 19 |
| 2.2.3.1 | Teste Q de Ljung-Box .....                                      | 19 |
| 2.2.3.2 | Teste ARCH de Engel .....                                       | 20 |
| 2.2.3.3 | Teste de Jarque-Bera .....                                      | 20 |
| 2.2.4   | Ruído Branco.....                                               | 21 |
| 2.2.5   | Volatilidade .....                                              | 21 |
| 2.3     | Modelos ARCH, ARMA, GARCH e ARMA-GARCH .....                    | 22 |
| 3.      | OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO .....                                   | 25 |
| 3.1     | Modelo de Média-Variância de Markowitz.....                     | 25 |
| 3.2     | Value-at-Risk (VaR) .....                                       | 28 |
| 3.3     | Conditional Value-at-Risk (CVaR) .....                          | 28 |
| 3.4     | Entropia.....                                                   | 29 |
| 4.      | OTIMIZAÇÃO DE MÚLTIPLAS RESPOSTAS.....                          | 34 |
| 4.1     | Metodologia de projeto de experimentos.....                     | 34 |
| 4.2     | Metodologia de Superfície de Resposta.....                      | 35 |
| 4.3     | Arranjos Experimentais para Superfície de Resposta.....         | 36 |
| 4.3.1   | Medidas de Adequação $R^2$ .....                                | 39 |
| 4.4     | Projeto de Experimento de Misturas.....                         | 39 |
| 4.5     | Otimização pelo Método do Gradiente Reduzido Generalizado ..... | 42 |
| 4.6     | O Método <i>Desirability</i> .....                              | 43 |
| 5.      | OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS POR ARRANJO DE MISTURAS .....          | 51 |

|           |                                                                        |    |
|-----------|------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1       | O Método Fatorial de ajuste da função desirability .....               | 53 |
| 6.        | APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....                            | 56 |
| 6.1       | Aplicação do Método com Entropia .....                                 | 56 |
| 6.1.1     | Análise e tratamento das séries temporais.....                         | 56 |
| 6.1.1.1   | Escolha dos ativos para o portfólio.....                               | 56 |
| 6.1.1.2   | Fazer uma previsão do retorno e risco um passo à frente.....           | 66 |
| 6.1.2     | Criação do DOE .....                                                   | 67 |
| 6.1.2.1   | Criar um DOE de misturas para Risco, Retorno e Entropia.....           | 67 |
| 6.1.2.1.1 | Calculando as respostas para o Retorno .....                           | 68 |
| 6.1.2.1.2 | Calculando as respostas para o Risco. ....                             | 69 |
| 6.1.2.1.3 | Calculando as respostas para a Entropia.....                           | 71 |
| 6.1.2.2   | Criar um DOE de superfície de resposta para pesos e importâncias ..... | 72 |
| 6.1.3     | Otimização do MDE.....                                                 | 72 |
| 6.1.3.1   | Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função <i>Desirability</i> .....      | 72 |
| 6.1.3.2   | Calcular o <i>Desirability</i> para a RSM .....                        | 74 |
| 6.1.4     | Otimização da RSM .....                                                | 76 |
| 6.1.4.1   | Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função <i>Desirability</i> .....      | 77 |
| 6.1.4.2   | Obter os pesos e importâncias ótimos .....                             | 77 |
| 6.1.5     | Definir o portfólio ótimo .....                                        | 78 |
| 6.2       | Aplicação do Método, sem Entropia.....                                 | 81 |
| 6.2.1     | Criação do DOE .....                                                   | 81 |
| 6.2.1.1   | Criar um DOE de superfície de resposta para pesos e importâncias ..... | 81 |
| 6.2.2     | Otimização do MDE.....                                                 | 82 |
| 6.2.2.1   | Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função <i>Desirability</i> .....      | 82 |
| 6.2.2.2   | Calcular o <i>Desirability</i> para a RSM.....                         | 82 |
| 6.2.3     | Otimização da RSM .....                                                | 83 |
| 6.2.3.1   | Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função <i>Desirability</i> .....      | 83 |
| 6.2.3.2   | Obter os pesos e importâncias ótimos .....                             | 84 |
| 6.2.4     | Definir o portfólio ótimo .....                                        | 85 |
| 7.        | COMPARATIVO ENTRE AS APLICAÇÕES .....                                  | 87 |
| 8.        | CONCLUSÕES .....                                                       | 89 |
| 9.        | SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS .....                                 | 90 |
|           | Anexo I - Arranjo de Misturas <i>Extreme Vertice</i> .....             | 91 |
|           | Anexo II - Matriz de Entropia. ....                                    | 92 |
|           | Anexo III - Matriz de covariância do risco.....                        | 93 |
|           | Anexo IV - Arranjo Box–Behnken.....                                    | 94 |
|           | Anexo V - Arranjo Box–Behnken para Pesos e Importâncias. ....          | 95 |

|                                                                                       |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Anexo VI – Coeficientes do modelo de Desirability de Box–Behnken, com entropia. ....  | 96 |
| Anexo VII – Coeficientes do modelo de Desirability de Box–Behnken, sem entropia. .... | 97 |
| REFERÊNCIAS .....                                                                     | 98 |



## 1. INTRODUÇÃO

### 1.1 Descrição do Problema

Com sua origem na área econômico-financeira, mais especificamente no mercado de capitais, a busca por portfólios ótimos que consigam ao mesmo tempo propiciar maiores retornos com um nível menor de risco, tem sido alvo de muitas pesquisas desde a década de 1950. Um portfólio é uma carteira que pode conter inúmeros ativos diferentes e que tem como objetivo a maximização do ganho do investidor, buscando, ao mesmo tempo, minimizar seu risco. O início dos estudos sobre portfólios se deu a partir do artigo de Markowitz (1952) com seu método de otimização pela média variância (*Mean-Variance Portfolio – MVP*). Desde então, a formação de portfólios é tratada como uma forma do investidor balancear ou diversificar seus investimentos, onde, através da combinação de diferentes ativos, é possível ao investidor obter uma diluição de seu risco, com certo impacto também de diminuição de seu retorno, deixando-o, assim, menos exposto a perdas que aquele que investiu tudo em um único ativo ou em um portfólio desbalanceado com grande risco ou pouco rentável. O impacto da diminuição do retorno compensa a diluição do risco para o investidor.

A rentabilidade dos investimentos é uma das mais importantes questões na gestão de portfólios e ela também se faz significativa no mercado de energia, no qual o campo de aplicações abrange os preços *spot* ou retornos de ativos de diversas fontes de energia como o petróleo bruto, carvão, gasolina, eletricidade, gás natural, as fontes de energia renováveis, entre outros. Para Delarue *et al.* (2011) e Elton e Gruber (1997), grande parte desses trabalhos inclui em sua análise o conceito de otimização de portfólios de média variância (MVP) de Markowitz (1959), melhor tratado no Capítulo 3, que considera a minimização da variância do portfólio e a maximização do retorno esperado como um critério ideal para escolher ativos que levam a um retorno esperado, mas com menor risco. Esta abordagem tem sido amplamente utilizada e também recebeu modificações de vários pesquisadores para abranger aspectos específicos do gerenciamento de portfólio, como suas vantagens, desvantagens ou deficiências das métricas de risco mais comuns, dentre outras. Assim, uma abordagem confiável, convexa e de fácil minimização das medidas de risco gera interesse e é desejável pelos investidores.

Outro aspecto observado na literatura sobre MVP é o emprego de valores previstos em uma composição de portfólio, principalmente usando modelos autorregressivos de média móvel (*autoregressive moving average* – ARMA) para estimar os retornos, segundo Mohammadi e Su (2010) e modelos autorregressivos condicionais heteroscedásticos generalizados (*generalized autoregressive conditional heteroscedastic* – GARCH) para prever a variação ou a volatilidade do portfólio, conforme Chang *et al.* (2011), Bauwens *et al.* (2010), Higgs (2009), Huang (2008), Huang *et al.* (2009), Varga-Haszonits e Kondor (2007), Yu (2003) ou, segundo Chang *et al.* (2010), em outros casos, usando modelos ARMA–GARCH ou suas variações. Hlouskova *et al.* (2009), por exemplo, empregaram uma previsão ARMA–GARCH para valores trimestrais e mensais, resultando em um portfólio rebalanceado que supera os resultados dos portfólios tradicionais. Estes modelos serão melhor tratados na parte 2 desta pesquisa.

Em Cardoso (2005) vê-se que um modelo ARMA se dá pela junção do termo autorregressivo (AR) com o termo de média móvel (MA). Para Stengel (1986), o termo AR é composto por um processo de primeira ordem com uma variável independente  $x_t$  que tem o seu valor dado em um momento  $t$ . Assim, depende apenas de seu próprio valor no tempo anterior  $t_{-1}$  mais um termo aleatório  $e_t$  (conhecido por ruído branco), não correlacionado com  $x_t$  e com  $(0, \sigma^2)$ . Já o termo MA é composto pela soma ponderada de ruídos anteriores mais um ruído atual. Tomando-se essas previsões de retorno de um portfólio e somando-se as previsões de risco, o gráfico que forma as possibilidades das combinações entre retorno e risco é chamado de fronteira eficiente do portfólio (HUANG, 2008). Essa abordagem é geralmente chamada de Otimização de Portfólio baseada em Previsão.

Tratando o preço spot semanal de petróleo bruto em onze mercados internacionais ao longo do período 1997–2009, Mohammadi e Su (2010) destacam a boa adequação do ajuste de MA (1) – GARCH (1,1) na modelagem e previsão da média condicional e da volatilidade. Chang *et al.* (2011) discutem o uso do GARCH (1,1) para estimar a variância (volatilidade) da previsão de  $t_{+1}$  para um portfólio composto de petróleo bruto, milho e soja. Antes de criar um portfólio, os autores calculam o peso de cada componente no portfólio, assumindo algumas restrições relacionadas aos seus valores mínimos em relação à capacidade de produção. Marimoutou *et al.* (2009) observam que as flutuações do preço do petróleo tem consequências consideráveis sobre a atividade econômica. Para a modelagem deste comportamento os autores consideraram o GARCH (1,1) adequado.

Uma vez que a variância é condicional em um modelo GARCH, espera-se que as correlações também sejam condicionais. Desta forma, como muitos modelos de MVP usam os

termos da covariância ou da correlação na modelagem do risco, a correlação condicional deve ser empregada para estimar com precisão a volatilidade do portfólio. Este é o caso dos portfólios que utilizam a variância condicional do GARCH como medida de risco e de correlação condicional constante (CCC) (Chang *et al.*, 2010; Higgs, 2009; Varga–Haszonits e Kondor, 2007) e a correlação condicional dinâmica (CCD) (Sadorsky, 2012; Bauwens *et al.*, 2010; Gupta e Donleavy, 2009) como uma medida da dependência condicional entre os ativos. Alguns trabalhos também apresentam uma comparação entre CCC e CCD em portfólios que consideram a volatilidade prevista pelos modelos GARCH como uma medida de risco (Asai e McAleer, 2009; Higgs, 2009; Syriopoulos e Roumpis, 2009).

Muitos mercados têm seus preços fixados de acordo com sua demanda, que pode ser com periodicidades desde semanal até mesmo em frações de minutos, tendo cada qual uma volatilidade específica. O registro dessa variação, através de um acompanhamento fiel de seus preços, leva à formação das séries temporais que, em muitos casos, podem ser caracterizadas como séries heteroscedásticas.

Modelar essas séries para a composição de um portfólio de forma que possa representar com o mínimo erro sua variação e, em termos financeiros, o seu retorno, é o grande desafio desde a década de 1950. Desde então, diversos modelos, métodos e técnicas têm surgido, tanto para o arranjo do portfólio quanto para sua otimização. Diante desse cenário, esta tese busca investigar a possível combinação de arranjos de misturas e superfícies de respostas e se elas são possíveis de serem utilizadas na otimização de portfólios de investimentos.

## 1.2 Objetivo da Pesquisa

O objetivo desta tese é apresentar uma proposta inovadora para a otimização de portfólios condicionais multiobjetivos, considerando uma abordagem híbrida que combine arranjos de experimentos do tipo misturas e superfícies de resposta para resolver problemas relacionados a portfólios de investimentos.

De forma complementar e secundária, esta tese busca também contribuir com as seguintes proposições:

- a) encontrar o melhor arranjo de misturas que atenda aos objetivos principais desta tese;
- b) pesquisar o melhor método para a definição dos limites inferiores, superiores e do alvo para o cálculo da função *desirability*, uma função de otimização multiobjetivo;

- c) definir qual o melhor arranjo para a definição dos parâmetros de peso e importância para a composição da função *desirability*;
- d) encontrar uma forma eficiente de proporcionar a diversificação de um portfólio multiobjetivo.

### 1.3 Justificativa

A visão geral da literatura recente sobre otimização de MVP no mercado de energia ou sobre portfólios sugere que uma abordagem adequada para direcionar os profissionais e investidores na obtenção de um portfólio rentável deve:

- a) incluir uma abordagem multiobjetiva convexa de fácil processamento;
- b) incluir um modelo de previsão de valores de risco e retorno;
- c) incorporar um modelo de séries temporais capaz de detectar a volatilidade e a correlação condicional;
- d) promover a diversificação do portfólio;
- e) incorporar algumas métricas de aversão ao risco; e
- f) reduzir o número de iterações e consequentemente o tempo de obtenção do portfólio.

Para Oliveira *et al.* (2011), estes requisitos devem ser alcançados representando o retorno e risco esperados do portfólio pelas superfícies de resposta obtidas através da abordagem de projeto de experimento de misturas (*mixture design of experiment* – MDE) juntamente com uma rotina multiobjetiva como o método de *desirability* (MONTGOMERY, 2009).

### 1.4 Contribuições da Pesquisa

Esta pesquisa tem como intuito contribuir com o aprimoramento do conhecimento sobre otimização de portfólios:

1. através da combinação de arranjos de experimentos de misturas para o tratamento de um portfólio de ativos do mercado de petróleo, abordagem esta que é nova na literatura;
2. apresentando um novo método de obtenção da função *desirability* que diminui o esforço computacional na solução de problemas de otimização não linear restrita e que sugere a eliminação de heurísticas ou, até mesmo, do especialista (*Decision*

*Maker*) em uma fase onde ele se faz imprescindível, que é a fase de escolha dos pesos e importâncias da função *desirability*.

### 1.5 Delimitação do Tema

Em relação ao problema de pesquisa, busca-se:

- a) utilizar apenas ativos ligados ao segmento de petróleo bruto em um período que registrasse a alta volatilidade da crise financeira mundial de 2008;
- b) diversificar o portfólio apenas com as ações do mercado de petróleo, independente de sua correlação;
- c) utilizar apenas séries heteroscedásticas, por representar melhor a complexidade do mercado;
- d) adotar apenas o modelo ARMA–GARCH (p,q) por ser o mais empregado na literatura na modelagem da volatilidade de séries heteroscedásticas;
- e) utilizar o arranjo de experimentos de misturas *extreme vertice*, por modelar problemas com restrições onde a soma das quantidades dos componentes seja igual a 1;
- f) utilizar a superfície de resposta de Box–Behnken por permitir uma eficiente estimação dos coeficientes de primeira e segunda ordem com um número menor de experimentos;
- g) utilizar a função de entropia para a diversificação do portfólio;
- h) restringir-se às funções *Desirability* e o algoritmo gradiente reduzido generalizado (*Generalized Reduced Gradient* – GRG) na otimização do portfólio.

### 1.6 Método de Pesquisa

No cumprimento dos objetivos desta tese, de acordo com Cauchick Miguel *et al.* (2010), a mensuração e análise dos dados respeitará uma abordagem Quantitativa de natureza Aplicada e utilizará o método da Simulação e Modelagem Estocástica, visto que utilizará técnicas matemáticas para descrever o funcionamento de um sistema ou parte dele buscando a melhoria de suas respostas. Quanto aos objetivos, esta pesquisa se classifica como axiomática quantitativa, pois se preocupa em encontrar soluções para o modelo sob estudo e assegurar que tais soluções ajudem a esclarecer sua estrutura.

## 1.7 Estrutura do Trabalho

Esta pesquisa é organizada da seguinte forma: a Seção 2 trata a caracterização das séries temporais mais próximas ao interesse desta tese. Apresenta ainda os modelos ARMA-GARCH e GARCH como uma escolha adequada no tratamento de séries heteroscedásticas, além dos testes de Ljung-Box, Engels e Jarque-Bera, necessários em estudos de séries heteroscedásticas. A Seção 3 trata da otimização de portfólios e apresenta os modelos de otimização de portfólio de média-variância, VaR e CVaR. Trata também da utilização da entropia como estratégia de diversificação de portfólio. A Seção 4 aborda a otimização de múltiplas respostas, tomando como base a combinação de MDE e MSR – Metodologia de Superfície de resposta (RSM – Response Surface Technology), além do emprego do algoritmo GRG e da função *Desirability*. Seção 5 faz uma breve explanação sobre a otimização de portfólios tratados por arranjos de misturas, objeto desta tese, e sobre o método proposto pela pesquisa. A Seção 6 apresenta detalhadamente a aplicação e análise do método através de uma aplicação no setor de petróleo bruto com e sem o uso da entropia na diversificação do portfólio. A Seção 7 traz um comparativo entre os resultados obtidos com e sem entropia. A Seção 8 traz a principal conclusão deste trabalho e, finalmente, a Seção 9 traz algumas sugestões para pesquisas e trabalhos futuros dentro do âmbito desta tese.

## 2. SÉRIES TEMPORAIS

### 2.1 Considerações Iniciais

Desde o surgimento do modelo autorregressivo (AR), de Yule (1927), o processo de predição com base em modelos de séries temporais vem sofrendo contínuos aprimoramentos ao longo dos anos tentando representar cada vez mais a realidade. Assim, muitos destes modelos tentam incluir características que os tornem melhores, como a não-estacionariedade, a autocorrelação residual (processos autorregressivos) e a volatilidade (heteroscedasticidade), como é o caso do Modelo GARCH(p,q) a ser tratado nesta tese.

Coube a Bollerslev (1986) introduzir uma generalização (GARCH) ao modelo ARCH (*Autoregressive Conditional heteroscedasticity* – ARCH), de Engle (1982), mais adequada ao mercado financeiro. A denominação GARCH dada por Bollerslev (1986) é o acrônimo da locução inglesa *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, ou heteroscedasticidade condicional autorregressiva generalizada. Por heteroscedasticidade, entende-se a variação da variância de uma série de dados em determinado período; por condicional, entende-se a dependência das observações atuais em relação às imediatamente anteriores e, por autorregressiva, o mecanismo de retroalimentação que permite a incorporação das observações passadas no comportamento presente da série.

Segundo Montgomery, Jennings e Kulahci (2008), uma série temporal é uma sequência cronológica ou ordenada no tempo de observações de uma variável de interesse (Figura 1).

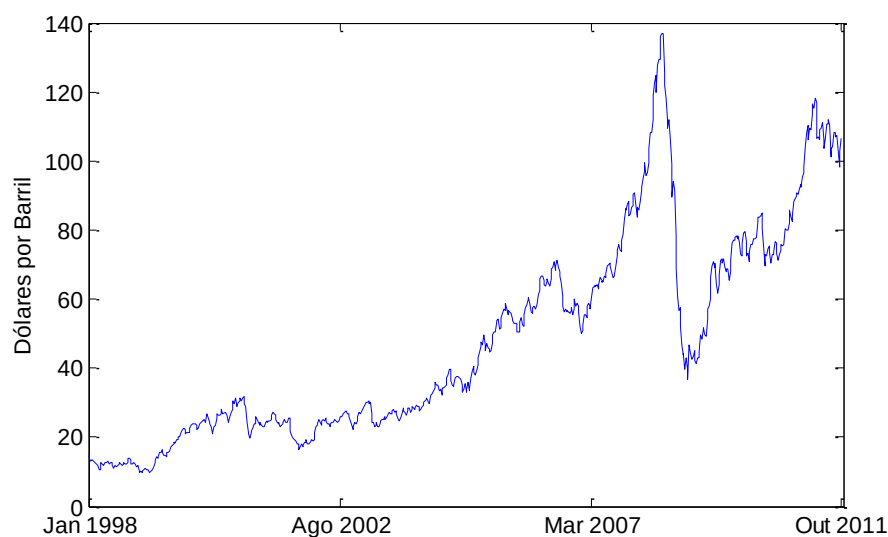


Figura 1: Série temporal (Dubai).

Para Alexander (2005, p.344), “a série temporal é um processo de estado contínuo em tempo discreto”. O conjunto dessas observações pode ser definido como  $T = \{t: t_1 < t < t_2\}$ ,

sendo  $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ , e a série dada por  $\{X(t): t \in T\}$ , sendo  $X(t) = \{\dots, x_{(t-1)}, x_t, x_{(t+1)}, \dots\}$ , onde,  $x_{(t-1)}$  corresponde a uma variável específica. A importância do estudo das séries temporais reside no propósito de construir modelos para entender o seu comportamento. Morettin e Toloi (2006) observam que no seu estudo, há o enfoque no domínio temporal (modelos paramétricos) e outro no domínio de frequências (modelos não-paramétricos).

Alexander (2005) ressalta que uma série pode ter seu comportamento influenciado ou até mesmo influenciar outras séries, condicionalmente e, por isso, para se estudar uma série, é necessário estudar também as outras conjuntamente. São as chamadas séries multivariadas, onde,  $k$  variáveis são observadas a cada tempo formando um conjunto  $\{X_{1t}, \dots, X_{kt}, t \in T\}$ .

Morettin e Toloi (2006), em uma abordagem mais completa, salientam que pela análise das séries temporais é possível não só descrever o seu comportamento, como também investigar o seu mecanismo gerador, identificar periodicidades ou tendências e até mesmo fazer previsões de valores futuros da série. Cabe à sua caracterização e modelagem o aprimoramento dos resultados dessas previsões. O tratamento e uso das séries temporais pode ser observado na quase totalidade das áreas e nos mais diversos segmentos, dentre eles o petróleo (MOHAMMADI e SU, 2010), os biocombustíveis (CHANG *et al.*, 2011), a eletricidade (HIGGS, 2009) e os mercados financeiros (WU *et al.*, 2009), medicina, segurança e diversos outros.

Alexander (2005) reforça que o principal objetivo da análise das séries temporais é a busca pelo modelo que melhor represente os dados a serem utilizados na previsão de cenários. Essas previsões se baseiam nessas propriedades estatísticas da série, como sua dinamicidade, condicionalidade, volatilidade e correlação, dentre outras, mostrando seu caráter estocástico. Com sua correlação e com o histórico da série, conforme Morettin e Toloi (2006), é possível prever um novo valor para o instante  $t_{+1}$  através da decomposição da série em um componente determinístico (a previsão) e outro aleatório (erro ou incerteza associados à previsão).

Francq e Zakoian (2010) mostram que a análise de séries temporais repousa sobre importantes conceitos como estacionariedade, autocorrelação, ruídos brancos, inovações, volatilidade e, principalmente, os modelos autorregressivos de média móvel (ARMA). Esses modelos ARMA foram desenvolvidos por Box e Jenkins (1976) com base no modelo autorregressivo (AR) de Yule (1927) e trouxeram diversas contribuições que tornaram a modelagem das previsões mais confiáveis.



Novas e diversas variações do modelo ARMA foram posteriormente apresentadas, como exemplo o modelo integrado (*Autoregressive Integrated Moving Average* – ARIMA) e o fracionado (ARFIMA) de Granger e Joyeux (1980) e Hosking (1981), todos baseados em métodos lineares. Diante de comportamentos das séries incompatíveis com os modelos lineares, como aumento da volatilidade condicional no tempo, foi necessário o surgimento de uma nova família de modelos, agora não-lineares. Dentre os inúmeros modelos não-lineares, a classe de modelos ARCH (*autoregressive conditional heteroscedasticity*), de Engle (1982), modelos esses não-lineares em relação à variância ou risco, é grandemente utilizada em se tratando de séries ligadas ao mercado financeiro. Os modelos GARCH (*generalized ARCH*), que é uma generalização de seu precedente ARCH, proposta por Bollerslev (1986), descrevem, segundo Morettin e Toloí (2006), a volatilidade da série com um número bem menor de parâmetros do que seu precedente ARCH, o que facilita seu emprego e aplicação. São diversas as obras que tratam profunda e exclusivamente a análise de séries temporais. Nesta parte da tese, serão tratadas brevemente algumas dessas características e conceitos.

## 2.2 Caracterização das séries temporais

Para uma eficiente modelagem das séries temporais, faz-se necessária sua caracterização. Por se tratar de séries de ativos financeiros, isto se dá sobre seu retorno  $r_t$ . É comum em finanças utilizar o logaritmo da taxa de retorno para o cálculo de  $r_t$ . Para Francq e Zakoian (2010), considerando o preço de um ativo no tempo como  $p_t$  e  $\varepsilon_t = \log(p_t/p_{t-1})$  como continuamente composto ou logaritmo do retorno (considerado simplesmente retorno). As séries  $(\varepsilon_t)$  são relativamente próximas às séries de variação relativa de preços  $r_t = (p_t - p_{t-1})/p_{t-1}$ , desde que  $\varepsilon_t = \log(1 + r_t)$ . Desta forma, ao contrário dos preços, os retornos dos preços relativos não dependem de uma unidade monetária o que facilita comparações entre os ativos.

### 2.2.1 Estacionariedade das Séries

Para Stengel (1986), um processo estocástico é uma sequência contendo variáveis aleatórias  $x_t$  que se encontram em um espaço qualquer de probabilidades. Um processo estacionário seria, portanto, segundo Makridakis *et al* (1993), aquele em que as características estatísticas de um processo estocástico permanecem constantes, sem alteração no tempo e com seus dados flutuando ao redor de uma média constante.

Para Morettin e Toloi (2006) e Makridakis *et al.* (1998), uma série que não apresenta comportamento explosivo, mas é não-estacionária, é chamada de homogênea quando fica estacionária por certo tempo, flutuando ao redor de um nível, depois muda de nível e flutua ao seu redor e assim por diante, ou muda de inclinação, ou ambas as coisas conjuntamente.

A grande maioria das séries apresenta comportamento com alguma forma de não-estacionariedade. Em relação aos mercados financeiros, os retornos de mercados são considerados estacionários e os preços, não-estacionários (ALEXANDER, 2005).

A Figura 2 apresenta uma série de retornos com os valores de  $r_t$  variando dentro de um limite controlável e ao redor de uma média zero, o que, para Moretin e Toloi (2006) pode ser chamado de processo estacionário, ou seja, que se encontra em uma zona de equilíbrio.

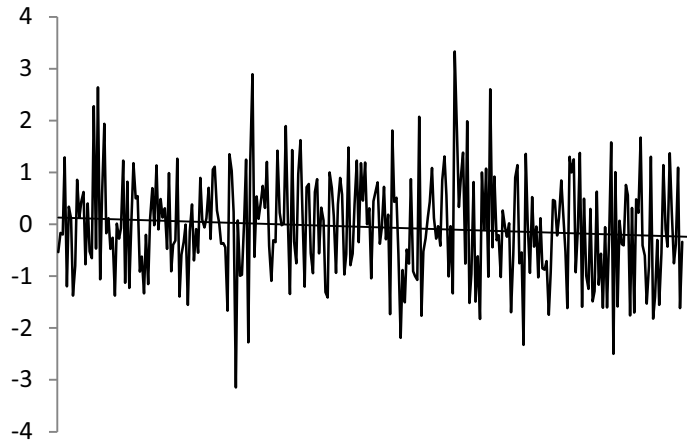


Figura 2: Série estacionária.

### 2.2.2 Séries correlacionadas e autocorrelacionadas

O coeficiente de correlação entre duas variáveis  $X$  e  $Y$  é definido pela equação:

$$\rho_{x,y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]}{\sqrt{E[(X - \mu_x)^2]E[(Y - \mu_y)^2]}} \quad (1)$$

Onde  $\mu_x$  e  $\mu_y$  são as médias das variáveis  $X$  e  $Y$ , respectivamente, assumindo-se que existe correlação. A correlação representa o movimento conjunto entre duas variáveis e mostra que essas variáveis têm uma correlação negativa, positiva ou não são correlacionadas. E essa dependência linear é sempre apresentada no intervalo de  $[-1 \leq \rho_{x,y} \leq +1]$  (MONTGOMERY *et al.*, 2008). Em relação à covariância, a correlação é preferível de ser empregada por ser “uma forma padronizada de covariância independente das unidades de medida” (ALEXANDER, 2005, p.7).

### 2.2.2.1 Função de autocorrelação (ACF)

A autocorrelação, de acordo com Box e Jenkins (1976), é a correlação existente entre dois valores da mesma variável nos instantes  $x_i$  e  $x_{i+k}$ . Sua identificação mais comum se dá pelos gráficos de função de autocorrelação (ACF), que trata dos retornos, e autocorrelação parcial (PACF), que trata dos resíduos quadráticos dos retornos. Demonstra a dependência linear existente na série, representada pelo coeficiente de autocorrelação ( $R_h$ ) que é a razão entre a função de autocovariância ( $C_h$ ) e a função de variância ( $C_o$ ), obtida pela equação (2):

$$R_h = \frac{C_h}{C_o} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (Y_i - \bar{Y})(Y_{i+h} - \bar{Y})}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (2)$$

A Figura 3 mostra um gráfico de ACF onde os valores de lag 1 e 3, fora das duas linhas contínuas de limite, têm uma dependência linear significativa ao nível de 5%.

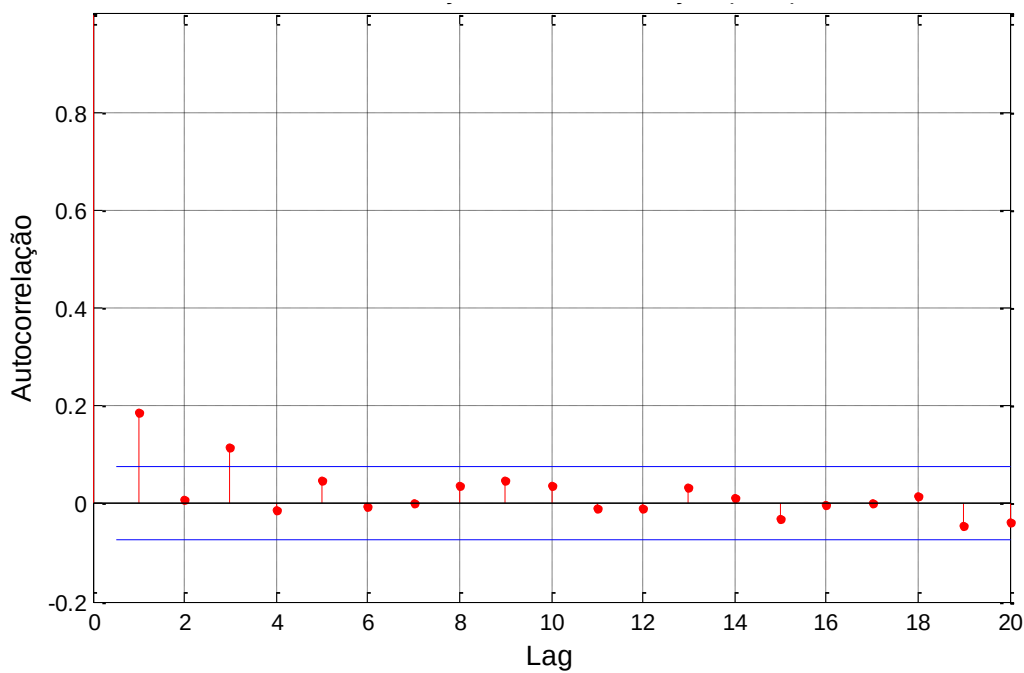


Figura 3: Função de autocorrelação.

Para a interpretação do gráfico, considera-se a hipótese de que todos os coeficientes de correlação são iguais a zero, ou seja, não existe correlação e, portanto, todos os pontos que representam os coeficientes de correlação devem ficar dentro do limite das linhas contínuas de limite superior e inferior.

### 2.2.3 Testes para classificação das séries

É possível quantificar a correlação existente mostrada nos gráficos através dos testes de hipóteses Q de Ljung–Box–Pierce e do teste ARCH, de Engle. O Teste Q de Ljung–Box (1978) é mais usado como um teste de falta de ajuste da previsão aplicado ao ajuste do resíduo. Pode ser usado também como parte da análise de pré-ajuste porque o modelo padrão assume que os retornos são uma constante simples mais um processo de resíduo (também conhecido como *innovation* ou inovação) puro. Sob a hipótese nula da não correlação serial, a estatística do Teste Q é uma distribuição Qui-Quadrado assintótica. O Teste de Engle visa identificar a presença de efeitos ARCH. Sob a hipótese nula de que a série temporal é uma sequência randômica de perturbações gaussianas (a não existência de efeitos ARCH), este teste também é uma distribuição qui-quadrado assintótica.

#### 2.2.3.1 Teste Q de Ljung-Box

O teste Q de Ljung-Box (LJUNG e BOX, 1978), conhecido também por teste de *Portmanteau*, testa se os dados são independentemente distribuídos, segundo uma distribuição  $\chi^2$  com s graus de liberdade. Assim:

$$Q = n(n + 2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{n - k} \quad (3)$$

onde:

n = número de observações;

s = comprimento das defasagens;

k = total de defasagens incluídas (p + q, no caso de modelos ARMA);

$\hat{\rho}_k$  = autocorrelação da amostra no intervalo de defasagem k;

h = número de lags testados.

O teste de Ljung-Box é usado geralmente em modelos ARIMA, mais especificamente aplicado aos resíduos do modelo ajustado ARIMA, mas não na série original. Nesses casos, a hipótese a ser testada é se os resíduos do modelo ARIMA não têm autocorrelação

### 2.2.3.2 Teste ARCH de Engel

O teste ARCH de Engel (1982) investiga a hipótese nula dos resíduos da amostra de uma série temporal serem independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.), não contendo efeitos ARCH e, desta forma, sendo homoscedásticos. Seu cômputo é realizado da seguinte forma:

- a) estimação do modelo inicial pelo método dos mínimos quadrados ordinários (*Ordinary Least Squares* – OLS) obtendo os resíduos  $\hat{u}_t$ .
- b) estimação da equação auxiliar:

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + \dots + \alpha_p \hat{u}_{t-p}^2 + w_t \quad (8)$$

- c) aplicação de um teste-F para testar a significância conjunta de todos os parâmetros dos regressores da equação auxiliar, ou alternativamente, usar a estatística:

$$T \cdot R^2 \sim \chi_p^2 \quad (4)$$

onde:

T = número das observações;

$R^2$  = coeficiente de determinação da regressão auxiliar

p = número dos regressores da equação auxiliar.

- d) rejeição da hipótese nula (a favor do processo ARCH), se  $T \cdot R^2 > \chi_p^2$ .
- e) se existir efeito ARCH, aplicar o método dos mínimos quadrados ponderados (*Generalized Least Squares* – GLS) na estimação do modelo inicial, como feito geralmente no caso de heteroscedasticidade.

### 2.2.3.3 Teste de Jarque-Bera

O teste de normalidade de Jarque-Bera (JARQUE e BERA, 1980), baseia-se nas diferenças entre os coeficientes de curtose e assimetria e testa a hipótese nula de que a amostra foi extraída de uma distribuição normal. Após se calcular a curtose e a assimetria dos resíduos, utiliza-se o teste estatístico (FERREIRA *et al.* 2009):

$$JB = n \left( \frac{S^2}{6} + \frac{(C - 3)^2}{24} \right) \quad (5)$$

onde:

$n$  = número de observações;

$S^2$  = assimetria das observações;

$C$  = curtose das observações.

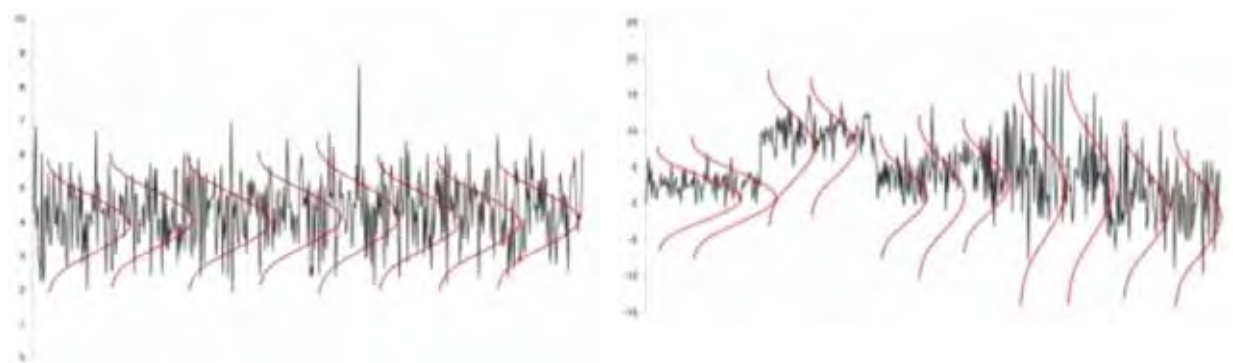
A estatística de Jarque-Bera segue a distribuição qui-quadrado com dois graus de liberdade. Se o valor de JB for muito baixo, aceita-se a hipótese nula de normalidade da distribuição dos erros aleatórios. Se o valor de JB for muito alto, rejeita-se a hipótese de que os resíduos ou erros aleatórios se comportam como uma distribuição normal.

#### 2.2.4 Ruído Branco

O termo de erro é conhecido como “ruído branco” se possui média zero, variância constante e não apresenta correlação serial. Alexander (2005) ressalta que para a definição de um modelo de regressão faz-se necessário assumir que o erro seja um ruído branco. Segundo Tsay (2005), em uma série de ruído branco todos os ACFs são zero ou próximos de zero.

#### 2.2.5 Volatilidade

Segundo Brigham e Ehrhardt (2006) e Alexander (2005), volatilidade e correlação são conceitos que se aplicam apenas aos processos estacionários. A importância da volatilidade se dá porque cabe a ela a representação de certa constância na variância da série no tempo, ou seja, homocedasticidade e estacionariedade, ou a variância variável condicional ao longo do tempo, representando sua heteroscedasticidade e não-estacionariedade, representadas na Figura 4(a) e (b).



a) Homocedasticidade

b) Heteroscedasticidade.

Figura 4: Homo e heteroscedasticidade.  
Fonte: Alexander (2005)

### 2.3 Modelos ARCH, ARMA, GARCH e ARMA-GARCH

Coube a Engle (1982) inovar a sequência dos modelos econométricos tradicionais até então utilizados, que tratavam a variância como constante e trazer à cena o modelo ARCH, que captura a heteroscedasticidade condicional dos retornos financeiros admitindo que a variância condicional de hoje seja a média ponderada dos retornos quadráticos não esperados do passado:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \quad (6)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0 \quad \varepsilon_t | I_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (8)$$

onde  $\varepsilon_t$  é uma sequência de ruído branco com média zero e variância constante  $\sigma_t^2$ . Por isso  $\varepsilon_t$  é chamado de processo heteroscedástico condicional autorregressivo de ordem  $p$ , ARCH( $p$ ).

Para Alexander (2005), a robustez dos modelos GARCH supera o modelo ARCH. O modelo GARCH(1,1), que é o mais utilizado pelo mercado, é equivalente a um modelo ARCH com coeficientes defasados que declinam exponencialmente. Além disso, os modelos de média móvel supõem que os retornos dos ativos são independentes e identicamente distribuídos (i.i.d.). Segundo Montgomery, Jennings e Kulahci (2008, p.355), “na prática, o mercado revela séries temporais que violam esse comportamento dos modelos de regressão padrão.” Modelos de tendência linear ARIMA, largamente utilizados, são incapazes de perceber esse fenômeno. Entretanto, de acordo com Pham e Yang (2010), o modelo ARMA( $r,m$ )–GARCH( $p,q$ ) pode ser estimado para um processo univariado formando uma combinação de um modelo linear para os retornos  $y_t$  com um não-linear para o risco, tal que:

$$y_t = c + \sum_{i=1}^r \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^m \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2) \quad (8)$$

$$\sigma_t^2 = \omega_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (9)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0,1) \quad (10)$$

Considerando-se os retornos dos ativos  $i$  modelados como ARMA(1,1) e com as respectivas variâncias condicionais como um GARCH(1,1), para um dado instante  $t$ , pode-se escrever:

$$y_{i,t} = c + \phi_1 y_{i,t-1} + \theta_1 \varepsilon_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad (11)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = h_{it} = \omega_i + \alpha_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{i,t-1}^2 \quad (12)$$

onde  $h_{it}$  é a variância condicional da volatilidade de  $\varepsilon_t$  para o ativo  $i$  no tempo  $t$ , o coeficiente  $\omega$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são relacionados com as inovações  $\varepsilon_{t-j}^2$ .

Para Alexander (2005), o modelo GARCH dá atenção à variância variável das distribuições condicionais dos retornos. É formado basicamente pelas equações da média e da variância condicionais, que muitas vezes se encontram associadas. A variância condicional dos resíduos,  $\sigma_t^2$  é, por definição:

$$Var_{t-1}(y_t) = E_{t-1}(\varepsilon_t^2) = \sigma_t^2 \quad (13)$$

O termo condicional implica uma dependência explícita de uma sequência de observações passadas. Já o termo incondicional é mais adequado para séries temporais de longo prazo e não assume uma relação de conhecimento do passado.

O modelo padrão do GARCH é simplesmente o modelo de média constante com resíduos gaussianos segundo um GARCH(1,1), assim:

$$y_t = C + \varepsilon_t \quad (14)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2 + \beta_i \sigma_{t-i}^2 \quad (15)$$

$$\omega > 0, \alpha, \beta \geq 0 \quad (16)$$

A média condicional da equação (14) consiste apenas de uma média adicionada de um ruído branco  $\varepsilon_t$ . No modelo da variância condicional da Equação (15), a previsão da variância  $\sigma_t^2$  consiste de uma constante adicionada a uma média ponderada da previsão da variância para o último período  $\sigma_{t-i}^2$  e a perturbação quadrática do último período  $\varepsilon_{t-j}^2$ . Embora as séries de retorno exibam tipicamente fraca correlação, os quadrados dos retornos sempre indicam correlação significativa e persistência. Isto é um indicador de que os dados são bons candidatos a serem modelos GARCH.

Para Francq e Zakoian (2010), se os processos dos retornos forem estacionários, a soma de  $\alpha + \beta$  deve ser menor que 1. Os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são responsáveis pela dinâmica de curto prazo das séries de tempo da volatilidade resultante. O coeficiente de defasagem  $\beta$  refere-se à “persistência” da volatilidade, ou seja, grandes coeficientes de  $\beta$  indicam que os choques da variância condicional levam um longo tempo para desaparecer. Já grandes coeficientes  $\alpha$  do erro significam uma “reação” acentuada da volatilidade aos movimentos do mercado. Assim, se o coeficiente  $\alpha$  é relativamente elevado e o coeficiente  $\beta$  é relativamente baixo, então as volatilidades tendem a ser mais “pontagudas”.



Para Engle (2001), a maior contribuição dos modelos ARCH e GARCH está em proporcionar uma medida da volatilidade, assim como um desvio padrão, que pode ser usada em decisões financeiras ligadas à análise de riscos, seleção de portfólios e precificação de derivativos.

### 3. OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO

O início e desenvolvimento dos modelos de otimização de portfólios se deu na área econômico-financeira. Veio atender à demanda de investidores por estratégias que lhes proporcionassem investir em carteiras que conciliassem ao mesmo tempo retornos crescentes e riscos cada vez menores. A principal vantagem desses modelos está na diversificação ou no balanceamento do portfólio, que proporciona uma diminuição da sua exposição à parte dos riscos envolvidos em uma operação de mercado. Essa parte dos riscos é conhecida, por esse motivo, de risco diversificável (BRIGHAM e EHRHARDT, 2006), comumente eliminado na gestão do portfólio. Como os ativos não se comportam iguais em relação aos seus riscos e retornos, a diversificação se torna uma poderosa estratégia na redução do risco. A diversificação só não consegue reduzir esse risco em um portfólio de correlação perfeitamente positiva, ou seja, quando seu coeficiente de correlação  $r = 1,0$ , porque, neste caso, todos os ativos teriam idêntico comportamento de mercado.

O mercado do petróleo teve seu início na fase conhecida como segunda Revolução Industrial e desde então passou a ter forte influência na economia mundial. Sua abrangência vai desde combustível para veículos até inúmeras matérias-primas para os mais diversos tipos de indústrias. Atualmente, como uma *commodity* da área de energia e com seu preço de mercado definido em bolsa, tem sua comercialização pulverizada em mercados do mundo todo. Por ser um componente interessante na composição de inúmeros portfólios, foi adotado para compor o estudo deste trabalho.

#### 3.1 Modelo de Média-Variância de Markowitz

Foi com sua teoria dos portfólios (*Mean-Variance Portfolio* – MVP) que Harry Markowitz (1952) muda toda a sistemática de análise de investimentos existente até então, levando-o inclusive a ganhar o prêmio Nobel de Economia de 1990. Antes dela, investia-se e calculava-se o risco e o retorno para cada ativo separadamente como se cada um fosse independente, com o foco sempre no maior retorno. Em seu trabalho, observou que tratar conjuntamente o risco e o retorno dos ativos em uma carteira é mais importante do que tratar separadamente e, também, que o risco menor de um ativo pode contribuir com a diminuição do risco total da carteira. Entrava em cena a correlação entre os ativos na composição de um portfólio multiobjetivo de risco e retorno.

De acordo com o teorema fundamental da teoria do portfólio de média variância, de Markowitz (1952), mantendo-se a variância constante, é possível maximizar o retorno esperado e, mantendo o retorno esperado constante, é possível minimizar a variância (ELTON e GRUBER, 1997). Assim, se usa a média dos retornos do período dado para obter o retorno e a variância da distribuição dos retornos para prever o risco. A ideia é que enquanto os investimentos são imprevisíveis e arriscados, a correlação ou a covariância dos retornos dos ativos individuais podem ser usadas para ajudar a proteger o portfólio, criando assim altos retornos com pouco ou nenhum risco adicional (AWERBUCH e BERGER, 2003).

Em uma notação matemática, o retorno da carteira é a soma dos rendimentos individuais ponderados por suas respectivas proporções de investimento, desde que sua dispersão seja normal. Esses retornos seguem uma distribuição de probabilidade cujo termo variância indica quão dispersos estão os possíveis resultados em torno da média: quanto maior a variância, maior a incerteza da rentabilidade ou viabilidade do portfólio. Portanto, a variância da distribuição pode ser usada como uma indicação do risco envolvido no investimento. Pode ser escrita como o valor esperado da combinação linear e envolve um termo de covariância  $\sigma_{ij}$  que mede quanto os retornos de dois ativos estão correlacionados entre si, de acordo com a abordagem do portfólio de média-variância, que estabelece a melhor estratégia para minimizar o risco e maximizar o retorno (BADRI *et al.*, 2007). Considerando a abordagem da média variância de Markowitz escrita como uma forma de otimização multiobjetivo, como sugerido por Anagnostopoulos e Mamanis (2010), tem-se que:

$$\text{Min} \quad \rho(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (17)$$

$$\text{Max} \quad \mu(x) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i \quad (18)$$

$$\text{s.t.:} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n \delta_i \leq K, \quad (20)$$

$$l_i \delta_i \leq x_i \leq u_i \delta_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

$$\delta_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (22)$$

onde  $n$  é o número de ativos incluídos na carteira,  $x_i$  é a proporção de cada ativo  $i$ ,  $\mu_{(x)}$  é o retorno esperado,  $\sigma_{ij}$  é a covariância entre os retornos dos ativos  $i$  e  $j$ ;  $\sigma_{(x)}$  é o risco do

portfólio,  $\delta_i$  é uma variável binária que assume os valores 0 ou 1 se o ativo é escolhido ou não;  $K$  é o número de ativos (ou séries) disponíveis. Tem-se, assim, a modelagem do risco que se deseja minimizar, sujeita às restrições do retorno esperado  $\rho$  pelo investidor, à alocação total do capital e a não existência de valor negativo no portfólio.

O sistema representado pelas equações **Erro! Fonte de referência não encontrada.** até (22) é um exemplo típico de um problema de otimização restrita multiobjetivo, formada, neste caso, por duas funções objetivo através das equações (17) e (18).

Um método bem conhecido para resolver este tipo de problema é combinar estas equações usando o critério de soma ponderada. De acordo com Anagnostopoulos e Mamanis (*op. cit.*), a nova função objetivo, neste caso, poderia ser escrita como:

$$\text{Min} \quad F(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n x_i \mu \quad (23)$$

$$\text{s.t.:} \quad x \in \mathcal{R} \quad (24)$$

onde  $\lambda$  é um coeficiente de compensação que prioriza o valor esperado do retorno ou risco. Os valores de  $\lambda$  podem ser escolhidos de acordo com o nível de aversão ao risco.

Simulando diversos valores para o retorno e colocando-os no eixo das ordenadas e, no eixo das abscissas, colocando os valores do risco, é possível encontrar o ponto de maior retorno e menor risco do portfólio. Conforme Huang (2008), o gráfico que forma o conjunto de possibilidades entre retorno e risco é chamado de fronteira eficiente do portfólio.

Embora o modelo de Markowitz (1952) tenha trazido significativa mudança no ambiente acadêmico e financeiro, aprimoramentos foram necessários para tratar situações e ambientes mais complexos envolvendo investimentos. Sharpe (1964) desenvolveu o Modelo de Precificação de Ativos de Capital (*Capital Asset Pricing Model* – CAPM) simplificando o modelo de Markowitz (1952). Dividiu o risco total do ativo em risco sistêmico e não sistêmico, e chamou de coeficiente beta o risco relevante de uma ação individual, a quantidade de risco com que a ação contribui para o portfólio. Sua contribuição lhe rendeu partilhar o Nobel de Economia de 1990 com Markowitz.

Conforme Brigham e Ehrhardt (2006), o coeficiente beta  $b_i$  compõe-se do termo  $r_{iM}$  que representa a correlação dos retornos esperados das  $i$ -ésimas ações do portfólio e o retorno esperado sobre o mercado;  $s_i$  e  $s_M$  são o desvio-padrão das  $i$ -ésimas ações e do retorno esperado sobre o mercado, conforme Equação (26).

$$b_i = \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \right) r_{iM} \quad (25)$$

Para Oliveira *et al.* (2011), atualmente as principais abordagens para mensuração do risco são: o Value-at-Risk (VaR) e o Conditional Value at Risk (CVaR).

### 3.2 Value-at-Risk (VaR)

Desenvolvido pela equipe financeira do banco americano JP Morgan, traçava as métricas de risco do dia seguinte através da medida conhecida como Valor em Risco (*VaR* – *Value-at-Risk*) ou que sintetizava, em um único número, o risco dos ativos individuais de mercado de interesse do banco e ainda as relações entre os diversos ativos dadas pelas correlações (OLIVEIRA, 2009). Embora o *VaR* informe as perdas que um portfólio está sujeito, sua deficiência está em não informar qual o tamanho dessa perda. Sua evolução, o modelo Valor em Risco Condicional (*CVaR* – *Conditional Value at Risk*) que informa a perda média levando em consideração todos os instantes em que o retorno é inferior ao *VaR* (KROKHMAL, 2002).

De acordo com Hongling (2008), o grau de confiança e o horizonte de tempo são os dois fatores quantitativos necessários para se mensurar o *VaR*. Assim, em um horizonte de tempo qualquer, a função  $f(x,y)$  traz  $x$  representando o retorno do portfólio e  $y$  o seu risco (PEARSON e SMITHSON, 2002; OLIVEIRA *et al.*, 2011). Da mesma forma, a função de densidade de probabilidade de  $y$  é  $p(y)$  que também induz de certa forma o retorno do portfólio  $f(x,y)$ . Escolhendo-se um portfólio qualquer  $x$ , a probabilidade da perda exceder um valor  $v$ , ou seja, o  $VaR_c$ , com  $c$  sendo o grau de confiança, é dada pela função de distribuição cumulativa:

$$\psi(x, v) = \int_{f(x,y) \leq v} p(y) dy = 1 - c \quad (26)$$

onde  $v$  representa um nível de perda superado apenas por  $(1-c)$  % dos casos observados.

### 3.3 Conditional Value-at-Risk (CVaR)

Se o *VaR* consegue informar apenas uma parte da perda que um portfólio está sujeito, o *CVaR* é uma medida que consegue quantificar as perdas que excedem ao *VaR*. Conforme Doud (1998), utilizando-se a mesma equação que definiu o *VaR*,  $f(x,y)$ , se o  $v_c(x)$  representa o

VaR do investimento  $x$ , então o CVaR do investimento a um grau de confiança  $c$ , com  $\theta_c(x)$  representando a perda esperada, então:

$$\theta_c(x) = E[f(x, y) / f(x, y) \geq v_c(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) P[y / f(x, y) \geq v_c(x)] dy \quad (27)$$

Sendo:

$$P[y / f(x, y)] = \begin{cases} \frac{P(y)}{P[f(x, y) \leq v_c(x)]} \\ \text{se... } f(x, y) \leq v_c(x) \\ \text{se... } f(x, y) \geq v_c(x) \end{cases} \quad (28)$$

Onde o termo  $P[f(x, y) \geq v_c(x)]$  indica a probabilidade de perda ser maior que o VaR a um determinado grau de confiança  $c$ , em termos absolutos. Assim:

$$P[f(x, y) \geq v_c(x)] = 1 - c \quad (29)$$

Portanto, o CVaR a um grau de confiança  $c$  é dado por:

$$\theta_c(x) = \frac{1}{1 - c} \int_{f(x, y) \leq v_c(x)} f(x, y) P(y) dy \quad (30)$$

### 3.4 Entropia

Uma das deficiências do MVP de Markowitz (1952) é a geração de portfólios altamente concentrados em alguns poucos ativos com pobre desempenho fora da amostra, o que é uma contradição ao conceito de diversificação (BERA e PARK, 2008). Para resolver o problema da diversificação, muitos autores têm usado a maximização do índice de entropia de Shannon como estratégia para melhorar a diversificação da carteira (JANAL *et al*, 2007; BERA e PARK, 2008).

O índice de entropia de Shannon (1948) é um dos vários índices de diversificação usados para medir a diversificação em dados categóricos. É simplesmente a entropia da informação da distribuição, tratando espécies como símbolos e os tamanhos da respectiva população como uma probabilidade (HICKEY *et al.*, 2010). Diversificação é um conceito que compreende pelo menos três propriedades subordinadas: variedade, equilíbrio, e disparidade (STIRLING, 1994). Variedade se refere ao número de categorias em que a quantidade em questão é particionada. Equilíbrio se refere ao padrão na repartição (espalhamento) dessa quantidade pelas categorias relevantes. Dado o número de categorias, quanto maior o espalhamento, maior a diversificação. Finalmente, a disparidade se refere à natureza e ao grau

em que as próprias categorias são diferentes umas das outras. De acordo com Grubb *et al.* (2006) o índice de Shannon–Weiner foi considerado o mais satisfatório visto que, embora não tenham em conta a disparidade, incorpora os conceitos de variedade e equilíbrio.

O princípio da Máxima Entropia determina a distribuição de probabilidade menos informativa para uma variável aleatória  $X$  dada alguma informação prévia sobre  $X$ . Por exemplo, se a média e a variância de  $X$  estão disponíveis, a distribuição de probabilidade contínua que maximiza a entropia diferencial de Shannon é a distribuição normal. De acordo com Krokmal *et al.* (2011), a entropia diferencial de Shannon pode ser escrita como:

$$S(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t) \log f_X(t) dt \quad (31)$$

Como em um portfólio, os pesos são as proporções,  $f_X(t)$  é uma distribuição de probabilidade discreta e a equação (31) torna-se:

$$S(x) = - \sum_{i=1}^{n+1} f_X(t) \log f_X(t) = - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \log(x_i) \quad (32)$$

onde  $x_i$  são os pesos (ou proporções) escolhidos para cada ativo  $i$ .

A equação (32) é conhecida como índice de Shannon–Weiner (STIRLING, 1994; GRUBB *et al.*, 2006; AWERBUCH *et al.*, 2008; JANSEN e SEEBREGTS, 2010).

Vários pesquisadores têm usado o índice de entropia de Shannon na tarefa de otimização de portfólios, principalmente considerando a abordagem multiobjetivo (JANAL *et al.*, 2007; AWERBUCH *et al.*, 2008; BERA e PARK, 2008; WU *et al.*, 2009; USTA e KANTAR, 2011). Então, modificando o esquema original de otimização portfólio multiobjetivo para incorporar a entropia de Shannon como uma terceira função objetivo, tem-se:

$$\text{Min} \quad \sigma_{P-GARCH}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 h_{ii} + 2 \left( \sum_{i < j}^n x_i x_j \Psi_{ij,t-1} h_i h_j \right) \quad (33)$$

$$\text{Max} \quad E(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_t \quad (34)$$

$$\text{Max} \quad S(x) = - \sum_{i=1}^{n+1} x_i \log(x_i) \quad (35)$$

$$\text{s.t.} : \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (36)$$

com:

$$y_{i,t} = c + \phi_1 y_{i,t-1} + \theta_1 \varepsilon_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \quad (37)$$

$$\sigma_{i,t}^2 = h_{it} = \omega_i + \alpha_1 \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{i,t-1}^2 \quad (38)$$

Considerando-se as superfícies de resposta estabelecidas para o risco ( $\sigma_t^2$ ), retorno  $E(x)$  e entropia  $S(x)$ , respectivamente  $f_1(\sigma_t^2)$ ,  $f_2[E(x)]$  e  $f_3[S(x)]$ , usando um projeto de experimentos de misturas, as três novas funções objetivo usadas no MVP multiobjetivo podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \{f_1(\sigma_t^2), f_2(E(x)), f_3(S(x))\}_{Portfolio} &= \sum_{i=1}^q \beta_i^* x_i + \sum_{i < j}^q \beta_{ij}^* x_i x_j \\ &+ \sum_{i < j < k}^q \beta_{ijk}^* x_i x_j x_k \end{aligned} \quad (39)$$

Para resolver o referido problema multiobjetivo usando a função *Desirability* de Derringer e Suich (1980), tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & D = \sqrt[3]{[d(f_1)]^{\lambda_1} \times [d(f_2)]^{\lambda_2} \times [d(f_3)]^{\lambda_3}} \\ \text{s.t.:} \quad & d^{n+1}(y_i) \geq D, \quad i = 1, 2, \dots, k \\ & D \geq 0 \\ & x \in \Omega \end{aligned} \quad (40)$$

com:

$$d[f_1(\sigma_p^2)] = \begin{cases} 0 & [f_1(\sigma_p^2)]_i > U_i \\ \left[ \frac{U_i - [f_1(\sigma_p^2)]_i}{U_i - T_i} \right]^w & T_i \leq [f_1(\sigma_p^2)]_i \leq U_i \\ 1 & [f_1(\sigma_p^2)]_i < T_i \end{cases} \quad (41)$$

$$d[f_2(E(x))] = \begin{cases} 0 & [f_2(E(x))]_i < L_i \\ \left[ \frac{[f_2(E(x))]_i - L_i}{T_i - L_i} \right]^w & L_i \leq [f_2(E(x))]_i \leq T_i \\ 1 & [f_2(E(x))]_i > T_i \end{cases} \quad (42)$$



$$d[f_3(S(x))] = \begin{cases} 0 & [f_3(S(x))]_i < L_i \\ \left[ \frac{[f_3(S(x))]_i - L_i}{T_i - L_i} \right]^w & L_i \leq [f_3(S(x))]_i \leq T_i \\ 1 & [f_3(S(x))]_i > T_i \end{cases} \quad (43)$$

onde:  $d^{n+1}(y_i)$  é a função *desirability*  $y_i$  na corrida  $(n+1)^{th}$ ;  $\Omega$  denota os limites inferiores e superiores escolhidos para as proporções de cada contrato;  $L_i$  é a limite inferior do *desirability*;  $T_i$  é o alvo;  $H_i$  é o limite superior,  $w_i$  e  $\lambda$  são os pesos do *desirability* e os coeficientes de importância (aversão ao risco).

Os pesos e os coeficientes de importância ( $w_i, \lambda$ ) podem ser escolhidos de acordo com o interesse do investidor e pode refletir sua aversão a um determinado nível de risco. Como a escolha pode ser considerada arbitrária, propõe-se a realização da abordagem do *desirability* em três fases:

- a) o investidor pode escolher pesos iguais e os coeficientes de importância na primeira execução do método, o que permite ao investidor uma ideia sobre o desempenho do portfólio. Se desejar, o investidor pode usar;
- b) uma análise de sensibilidade de Box–Behnken para pesos e coeficientes. Nesta abordagem, um arranjo de superfície de resposta pode ser usado para avaliar os valores dos pesos e coeficientes de importância que maximizam a função *desirability*;
- c) com pesos e coeficientes ótimos obtidos na fase (b), o investidor executa a função *desirability* novamente.

No contexto da função *desirability*,  $w_i$  é um peso que enfatiza o interesse do operador na otimização, indicando sua preferência pelo alvo ou pelos valores limites. Para a minimização, menos ênfase é colocada no alvo quando o peso é inferior a um. Aceitável é qualquer solução encontrada pelo algoritmo entre o alvo e o limite superior. Um peso igual a um coloca a mesma ênfase sobre o alvo e os limites. Caso contrário, um peso maior do que um, força o algoritmo para encontrar uma solução o mais perto possível do alvo. Para problemas de maximização, a abordagem é semelhante. O coeficiente de  $\lambda$  também desempenha um papel importante no algoritmo e também pode ser visto como uma medida de aversão ao risco. Este coeficiente representa o grau de importância de uma resposta certa; os limites comuns de  $(\lambda_i)$  assume valores entre 1 e 10. Se a superfície de resposta para o risco é definida tão grande quanto desejada pelo investidor, menor aversão é esperada. Valores maiores para o risco e retorno, levam a resultados melhores para o portfólio.

A principal vantagem desta abordagem é a simplicidade de sua execução. Quase todas as operações anteriormente mencionadas podem ser desenvolvidas usando pacotes de softwares estatísticos disponíveis como o Minitab<sup>®</sup>, por exemplo.

#### 4. OTIMIZAÇÃO DE MÚLTIPLAS RESPOSTAS

A complexidade que envolve a grande maioria dos processos e produtos exige que a avaliação de sua qualidade não recaia sobre apenas uma característica funcional (MYERS e MONTGOMERY, 2002). Isto, porque a análise univariada de um experimento que contenha múltiplas respostas pode conduzir a conclusões sem nenhuma lógica (KHURI e CONLON, 1981).

De acordo com Paiva (2006), a grande maioria das pesquisas em otimização que empregam experimentos com múltiplas respostas, tratam essas respostas de forma isolada na fase de construção dos modelos de regressão. Como as respostas podem ser fortemente correlacionadas, esses experimentos podem se mostrar ineficientes.

Além das respostas, os dados multivariados que compõem os experimentos podem apresentar certa dependência, alertam Box *et al.* (1978). Considerando que cada observação possa ser decomposta em um termo correspondente ao valor esperado e outro ao erro aleatório, podem existir três diferentes tipos de dependência: (a) entre valores dos erros individuais, (b) entre os valores esperados das respostas ou (c) entre as respostas.

A utilização de técnicas multiobjetivos leva em conta essas relações possíveis entre as respostas e entre os termos e serão consideradas nas otimizações tratadas nesta tese.

##### 4.1 Metodologia de projeto de experimentos

O Projeto de Experimentos é uma metodologia desenvolvida entre 1920 e 1930 por Fisher, aperfeiçoada logo depois por pesquisadores como Box, Hunter e Taguchi, dentre outros. Seu sucesso se deu após Fisher levá-lo, em 1933, para a Universidade de Londres onde foi aplicado com êxito em experimentos agrícolas e de ciências biológicas. A partir de sua divulgação e dos bons resultados obtidos, foi amplamente empregado na indústria química e de processos nos EUA e Europa a partir da Segunda Guerra mundial.

Diante de um problema, é importante a sistematização de sua solução que, para Montgomery (2009), passa pela identificação e seleção dos fatores, a seleção do modelo que contemple os fatores escolhidos e o planejamento eficiente para a estimação dos efeitos. Além do cuidado em cada uma das fases de um experimento, a aleatorização, a utilização de réplicas e blocagem melhoram significativamente os resultados obtidos. Dentre diversas

possibilidades, o arranjo experimental mais comum é o fatorial completo, para o qual o número de experimentos é igual ao número de níveis experimentais, elevado ao número de fatores. Em se tratando de fatoriais em dois níveis, o número de experimentos ( $N$ ) para se avaliar os  $k$  fatores é dado por  $N = 2^k$ . Seu maior obstáculo se encontra no exponencial crescimento que o número de experimentos pode atingir, podendo tornar-se inviável.

## 4.2 Metodologia de Superfície de Resposta

A Metodologia de Superfície de Resposta (MSR) é uma coleção de técnicas matemáticas e estatísticas que são utilizadas para modelar e analisar problemas onde a resposta de interesse é influenciada por muitas variáveis para alcançar um valor ótimo, onde a forma de relacionamento entre a variável de resposta e as variáveis independentes seja desconhecida (MYERS e MONTGOMERY, 2002). Geralmente, emprega-se um polinômio de baixa ordem para se encontrar uma aproximação razoável para a verdadeira relação entre  $y$  e o conjunto de variáveis para dar início a uma MSR. Supondo que a resposta esperada  $E(Y)$  seja função de  $k$  variáveis preditoras codificadas  $x_1, x_2, \dots, x_k$ , o relacionamento entre  $y$  e as variáveis preditoras pode ser expresso segundo uma expansão em Série de Taylor (Box e Draper, 1987), tal que:

$$E(Y) = \eta = \eta_0 + \sum_{i=1}^k \left[ \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \right]_0 x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left[ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} \right] x_i x_j + \dots + \varepsilon \quad (44)$$

onde o subscrito zero indica a avaliação na origem. Se os termos de alta ordem forem ignorados, a expansão produzirá:

$$\eta = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i \quad (45)$$

Se, em adição, forem mantidos os termos de segunda ordem, a aproximação se tornará:

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i < j} \sum \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (46)$$

Se houver curvatura no processo, então um polinômio de ordem mais alta deve ser utilizado, tal como um modelo de segunda ordem, por exemplo.

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j} \sum \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (47)$$

Segundo Box e Draper (1987) quase todos os problemas de superfície de resposta utilizam um desses dois modelos. Contudo, é improvável que um modelo polinomial seja uma aproximação razoável do modelo real em todo o espaço experimental, mas pelo menos para uma determinada região, ele funcionará muito bem (Montgomery, 2009). Para estimar os parâmetros ( $\beta$ ) do modelo polinomial emprega-se o método dos mínimos quadrados.

Em geral, presume-se que o modelo linear é adequado; porém, na análise se existe ou não falta de ajuste, é preciso utilizar pontos experimentais extras denominados de *Pontos Centrais*. Box *et al.* (1978) explicam que tal procedimento consiste em adicionar ao fatorial completo pontos que sejam intermediários aos níveis dos fatores, tantos pontos centrais quantos forem os  $K$  fatores do experimento. Esses pontos buscam avaliar a existência de curvatura. Se a resposta média dos  $nf$  pontos fatoriais  $\bar{y}_f$  for significativamente diferente da média formada pelos  $nc$  pontos centrais  $\bar{y}_c$ , então, pode-se caracterizar uma região de curvatura significativa. Para Montgomery (2009), a soma de quadrados para curvatura é dada por:

$$SS_{QP} = \frac{(nf \times nc)(\bar{y}_f - \bar{y}_c)^2}{nf + nc} \quad (48)$$

O Erro médio quadrático e o teste de hipótese são respectivamente:

$$MS_e = \frac{SS_e}{nc - 1} = \frac{\sum_{i=1}^{nc} (y_i - \bar{y})^2}{nc - 1} \quad (49)$$

$$H_0 : \sum_{j=1}^k \beta_{jj} = 0 \text{ e } H_1 : \beta_{jj} \neq 0 \quad (50)$$

Se  $SS_{qp}$  for muito maior do que  $MS_e$ , então, haverá evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula de que os coeficientes quadráticos são nulos.

### 4.3 Arranjos Experimentais para Superfície de Resposta

Os dois tipos principais de arranjos experimentais para a coleta de dados na Metodologia de Superfície de Resposta são o arranjo central composto e o Box–Behnken. O arranjo central composto (*Box–Wilson Central Composite Design – CCD*) é uma matriz formada por três grupos distintos de elementos experimentais: um fatorial completo ou

fracionado, um conjunto de pontos centrais e, adicionalmente, um grupo de níveis extras denominados *Pontos Axiais*. Se a distância entre o centro do arranjo e ponto fatorial (+1;-1) for aproximadamente 1 (em módulo), a distância do centro ao ponto axial será maior que a unidade. Esta distância, representada geralmente por  $\alpha$ , depende de certas propriedades desejadas para o experimento e do número de fatores envolvidos (Montgomery, 2009), tal como ilustra a Figura 5. O número de pontos axiais em um CCD é igual ao dobro do número de fatores e representam seus valores extremos. Em função de sua localização, podem ser circunscritos, inscritos ou de face centrada.

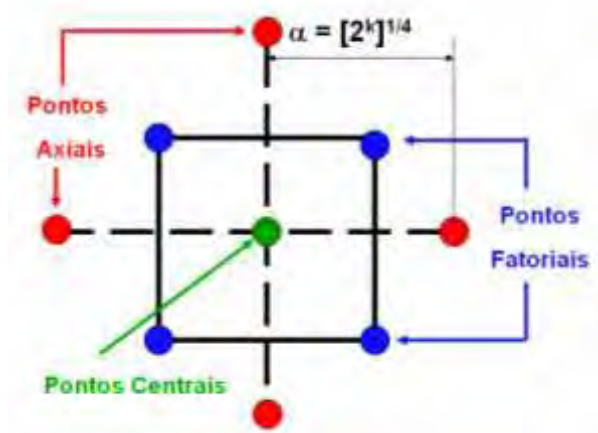


Figura 5: Arranjo central composto (CCD) para 2 fatores.  
Fonte: Paiva (2006)

O Circunscrito (CCC) é o CCD original. Nele, os pontos axiais estão a uma distância  $\alpha$  do centro, baseado nas propriedades desejadas do projeto. Este arranjo requer 5 níveis para cada fator.

O Arranjo inscrito (CCI) é adequado às situações onde os limites especificados não podem ser extrapolados. Neste caso, o CCI utiliza os níveis dos fatores como pontos axiais e cria um fatorial completo ou fracionado dentro desses limites. Um CCI requer 5 níveis.

O arranjo de Face Centrada (CCF) caracteriza-se por dispor os pontos axiais sobre o centro de cada face do espaço fatorial, ou seja,  $\alpha = +1$  ou  $-1$ . Requer 3 níveis para cada fator.

Nos arranjos centrais compostos, a variância predita é constante ao longo da esfera de raio  $\alpha$ , ou seja,  $V[\hat{y}(x)]_{(1)} = V[\hat{y}(x)]_{(2)} = \dots = V[\hat{y}(x)]_{(i)}$  e é definida como:

$$V[\hat{y}(x)] = \sigma^2 x^T (X^T X)^{-1} x \quad (51)$$

Esta propriedade denomina-se *rotacionalidade* (Figura 6). Segundo Box e Draper (1987), para manter a rotacionalidade de um arranjo, o valor de  $\alpha$  depende do número de experimentos ( $k$ ) da porção fatorial do CCD, tal que  $\alpha = (2^k)^{1/4}$ .

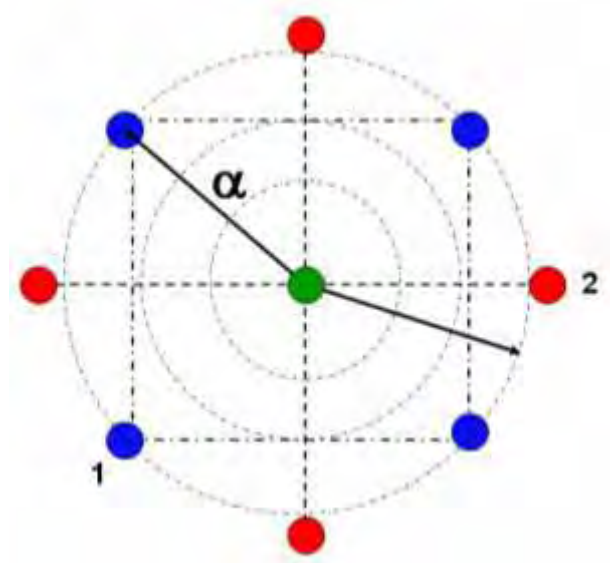


Figura 6: Rotacionalidade  
Fonte: Paiva (2006)

Quando for necessário se empregar um arranjo em blocos,  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha = \left[ k \left( 1 + \frac{n_{s0}}{n_s} \right) / \left( 1 + \frac{n_{c0}}{n_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (52)$$

onde  $n_{s0}$  é o número de pontos centrais presentes na porção axial do arranjo;  $n_s$  é a quantidade restante de pontos da porção axial;  $n_{c0}$  é o número de pontos centrais da porção cúbica do arranjo (fatorial completo) e  $n_c$  é a quantidade restante de pontos da porção cúbica, conforme Box e Draper (1987).

Um arranjo do tipo Box–Behnken (1960) é um modelo quadrático independente que não contém fatoriais completos ou fracionários embutidos. Neste tipo de arranjo, as combinações de fatores são os pontos médios das arestas das faces do espaço experimental  $\Omega$ , além dos pontos centrais, como pode ser visto na Figura 7. Estes arranjos são rotacionáveis e requerem 3 níveis para cada fator.

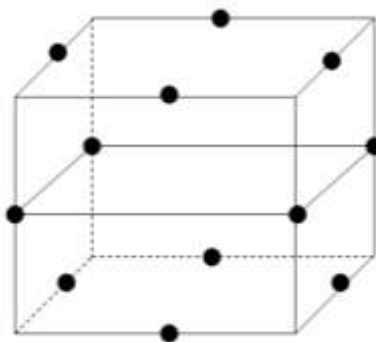


Figura 7: Arranjo do tipo Box–Behnken para três fatores.  
Fonte: Paiva (2006)

### 4.3.1 Medidas de Adequação $R^2$

Para Montgomery (2009) a medida mais comum de adequação de um modelo é o coeficiente de determinação ( $R^2$ ) que representa o percentual de variação na resposta que é explicada pelo modelo construído. Associado a este coeficiente, encontra-se o  $R^2$  ajustado ( $R^2_{adj}$ ), que considera o fato de que  $R^2$  tende a superestimar a quantidade atual de variação contabilizada para a população. A inclusão de muitos termos no modelo de regressão aumenta substancialmente o valor de  $R^2$  e se o modelo recebeu fatores adicionais desnecessários, haverá um incremento em  $R^2$ , sem haver, necessariamente, melhoria de informação na resposta. O valor de  $R^2$  pode ser calculado aplicando-se a equação (53):

$$R^2 = \frac{SQ_M}{SQ_T} = 1 - \frac{SQ_E}{SQ_T} \quad (53)$$

onde  $SQ_T$  é a soma quadrática total,  $SQ_E$  é a soma quadrática do erro e  $SQ_M$  é a soma quadrática dos experimentos.

O coeficiente de determinação ajustado ( $R^2$  ajustado) é uma modificação que considera o número  $p$  de variáveis incluídas no modelo. Observando-se a equação (54), nota-se que o valor ajustado decresce à medida que  $p$  aumenta.

$$R^2_{aj} = 1 - \left( \frac{n-1}{n-p} \right) (1 - R^2) \quad (54)$$

## 4.4 Projeto de Experimento de Misturas

Suponha que os pesos ou quantidades de  $x_i$  do modelo de MVP possam ser considerados proporções de uma mistura cuja a soma dos pesos é unitária ou restrita a um limite específico. Esta distribuição restrita das proporções caracteriza um projeto experimental chamado Projeto de Experimento de Misturas (*Mixture Design of Experiments – MDE*).

Para Myers e Montgomery (2002) e Cornell (2002), os arranjos de misturas clássicos são um tipo especial de superfícies de resposta em que os fatores envolvidos na experimentação são as proporções dos componentes em uma mistura e para o qual a soma deve ser restrita a um determinado valor. A região convexa formada pelos elementos e suas proporções são capazes de estimar a resposta de interesse em função de qualquer mistura obtida pela combinação de cada componente. As relações entre as variáveis de resposta e a proporção relativa dos componentes  $q$  podem ser estabelecidas por um polinômio de grau  $m$ ,



que pode ser uma função linear, quadrática ou cúbica dependendo dos objetivos do interessado. Como principal vantagem, o polinômio é uma função convexa. A equação (55) mostra um exemplo de um polinômio chamado modelo cúbico especial.

$$E(x) = \sum_{i=1}^q \beta_i^* x_i + \sum_{i < j} \sum_{j=1}^q \beta_{ij}^* x_i x_j + \sum_{i < j < k} \sum_{k=1}^q \beta_{ijk}^* x_i x_j x_k \quad (55)$$

Os coeficientes  $\beta_i^*$  mostram como cada componente contribui para a variável resposta;  $\beta_{ij}^*$  indica qual é o efeito combinado dos componentes  $i$  e  $j$ . De fato, para o modelo linear  $\beta_{ij}^* = \beta_0 + \beta_i$  e para o modelo quadrático, é possível escrever:  $\beta_i^* = \beta_0 + \beta_i + \beta_{ii}$  e  $\beta_{ij}^* = \beta_{ij} - \beta_{ii} - \beta_{jj}$ . Estes coeficientes são estimados através do algoritmo dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO).

Quando comparado com a abordagem MVP, é muito simples que as equações de média-variância possam ser escritas como uma superfície de resposta de misturas, em que os montantes de investimento de capital em  $q$  ativos são definidos pelo tipo de arranjo de misturas (CORNELL, 2002; OLIVEIRA *et al.*, 2011). Admite-se que a série de retornos de cada componente  $q$  também seja heteroscedástica, ou seja, seu valor pode ser modelado e previsto por um modelo GARCH. Por isso, algumas modificações nos MVP tradicionais devem ser introduzidas tendo em consideração os aspectos gerais dos modelos ARMA–GARCH. Aqui se considera o modelo ARMA ( $r, m$ ) para o ajuste dos retornos médios e o GARCH ( $p, q$ ) para a variância condicional, como observado em vários trabalhos como Mohammadi e Su (2010), Chang *et al.*, (2010), Hlouskova *et al.*, (2009). De acordo com Sadorsky (2006), há um consenso geral de que o modelo heteroscedástico condicional autorregressivo generalizado (GARCH) supera as técnicas tradicionais como a média móvel, o alisamento exponencial e a regressão linear na tarefa de modelagem e previsão de séries temporais condicionais.

Assim, tomando o termo de covariância de dois ativos de risco  $i$  e  $j$  ( $\sigma_{ij}$ ) escritos em termos de uma covariância condicional quando os retornos dos ativos são heteroscedásticos, pode-se supor que  $\sigma_{ij} = \rho_{ij} \sqrt{h_{ii} h_{jj}}$ , onde  $h_{ii}$  é a variância do ativo  $i$  e  $h_{jj}$  é a variância do ativo  $j$ ;  $\rho_{ij}$  é a correlação condicional. Então, já que a carteira pode ser formada por uma previsão de valores um passo à frente, o risco da carteira pode ser estabelecido usando o conceito de correlação constante (*Constant Conditional Correlation* – CCC) ou dinâmica (*Dynamic*

*Conditional Correlation – DCC* (Bollerslev, 1990; Engle, 2002, Higgs, 2009, Bauwens *et al.*, 2010).

A matriz de variância-covariância condicional pode ser escrita como:

$$H_t = \begin{bmatrix} \sigma_{11,t}^2 & \sigma_{12,t}^2 & \cdots & \sigma_{1n,t}^2 \\ \sigma_{12,t}^2 & \sigma_{22,t}^2 & \cdots & \sigma_{2n,t}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n,t}^2 & \sigma_{2n,t}^2 & \cdots & \sigma_{nn,t}^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\sigma_{ii,t}^2 = h_{it} = \omega_i + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (57)$$

$$\sigma_{ij,t} = \rho_{ij} \sigma_{i,t} \sigma_{j,t} \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j$$

$$H_t = D_t R D_t \quad (58)$$

De acordo com Asai e McAleer (2009) as estruturas CCC e DCC podem ser usadas tanto para fins de determinação do portfólio ótimo quanto para a gestão das estratégias de risco. As volatilidades condicionais a partir dos modelos GARCH multivariados (MGARCH) podem ser usadas para construir os pesos da carteira ótima, conforme Kroner e Ng (1998) e Sadorsky (2012) e seus valores influenciam grandemente o peso ideal. Kroner e Ng (1998) estabeleceram que os pesos ótimos de uma carteira formada por ativos heteroscedásticos podem ser obtidos por:

$$x_{ij,t} = \frac{h_{jj,t} - h_{ij,t}}{h_{ii,t} - 2h_{ij,t} + h_{jj,t}} \quad (59)$$

Pode-se observar que a equação (59) é obtida com a minimização de  $\sum_{i=1}^k x_i^2 h_{ii} + 2 \left( \sum_{i < j}^n x_i x_j h_{ij} \right)$  para apenas dois ativos e com pesos iguais para  $x_i$  e  $x_j = (1-x_i)$ . Uma vez que a variância da série é condicional (ativos heteroscedásticos), a correlação também é condicional. Então, tomando o resíduo padronizado condicional como:

$$u_{it} = \frac{\varepsilon_{it}}{\left( \sqrt{h_{iit}} \right)} \quad (60)$$

a CCC entre um ativo  $i$  e  $j$  em um momento  $t-1$  pode ser escrito de acordo com Higgs (2009) e Bauwens *et al.* (2010) e pode ser determinada como:

$$\Psi_{ij,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M u_{i,t-m} u_{j,t-m}}{\sqrt{\left(\sum_{m=1}^M u_{i,t-m}^2\right) \times \left(\sum_{m=1}^M u_{j,t-m}^2\right)}} \quad (61)$$

Modificando o esquema original de otimização do portfólio multiobjetivo para incorporar os conceitos ARMA–GARCH( $p,q$ ) e DCC, o portfólio heteroscedástico pode ser definido como:

$$\text{Min} \quad \sigma_{P-GARCH}^2 = \sum_{i=1}^k x_i^2 h_{ii} + 2 \left( \sum_{i < j}^n x_i x_j \Psi_{ij,t-1} h_i h_j \right) \quad (62)$$

$$\text{Max} \quad E(x) = \sum_{i=1}^n x_i y_t = \sum_{i=1}^n x_i (\mu + \sqrt{h_{ii}} \varepsilon_t) \quad (63)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (64)$$

As restrições definidas pelas equações (62) a (64) permanecem as mesmas.

Como comentado anteriormente os pesos  $x_i$  do modelo MVP podem ser considerados como proporções de um MDE, como pode ser visto em Oliveira *et al.* (2011). Então, o risco da carteira  $\sigma_{P-GARCH}^2$  e o retorno  $E(x)$  podem ser calculados para cada execução experimental do MDE usando a equação (61). Aplicando o algoritmo MQO aos dados experimentais, é possível obter uma superfície de resposta para as funções objetivo de risco e retorno do portfólio. Estes modelos podem ser genericamente escritos como:

$$\left( \sigma_t^2, E(x) \right)_{\text{Portfolio}} = \sum_{i=1}^q \beta_i^* x_i + \sum_{i < j}^q \beta_{ij}^* x_i x_j + \sum_{i < j < k}^q \beta_{ijk}^* x_i x_j x_k \quad (65)$$

As superfícies de resposta estimadas das equações de média-variância podem agora serem usadas para definir as funções *desirability*, descrita adiante.

#### 4.5 Otimização pelo Método do Gradiente Reduzido Generalizado

A MSR busca encontrar uma condição ótima de operação para um processo. Utiliza, para isso, algoritmos de modelagem empregados para se estabelecer funções de transferência entre os dados e as variáveis de controle experimentais. A obtenção da função de aproximação viabiliza a determinação do ponto de ótimo (PAIVA, 2006). Para Box e Wilson (1951), deve-se atentar para conduzir a otimização experimental de sistemas com uma única variável de

resposta em duas fases: a primeira, que consiste numa sequência de procura linear na direção da máxima otimização e a segunda, conforme Lin e Chou (2002), após detectada a falta de ajuste no modelo de primeira ordem.

O método do Gradiente Reduzido Generalizado (*Generalized Reduced Gradient* – GRG) trata da resolução de problemas de programação não-linear com restrições. Embora o método preveja apenas a utilização de restrições lineares ou não-lineares de igualdade, para casos onde a restrição for de desigualdade, contorna-se o problema introduzindo-se variáveis de folga (restrições do tipo  $\leq$ ) ou variáveis de excesso (restrições do tipo  $\geq$ ).

Segundo Lasdon *et al.* (1978), Nash e Sofer (1996), Del Castillo *et al.* (1993; 1999), Koksoy e Doganaksoy (2003) e Peterson (2004), o GRG é um algoritmo aplicado a problemas de otimização do tipo:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } F_{m+1}(X) \\
 &\text{Sujeito a: } h_i(X) = 0, \quad i = 1, neq, \\
 &\quad 0 \leq h_i(X) \leq ub(n+i), \quad i = neq+1, m, \\
 &\quad lb(i) \leq X_i \leq ub(i), \quad i = 1, n,
 \end{aligned} \tag{66}$$

onde  $X$  é um vetor de  $n$  variáveis. O número de restrições de igualdade ( $neq$ ) pode ser zero. As equações escritas na forma (66) são convertidas em restrições de igualdade adicionando-se variáveis de folga  $X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ , onde:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } F_{m+1}(X) \\
 &\text{Sujeito a: } h_i(X) - X_{n+1} = 0, \quad i = 1, m \\
 &\quad lb(i) \leq X_i \leq ub(i), \quad i = 1, n+m, \\
 &\quad lb(i) = ub(i) = 0, \quad i = n+1, n+neq, \\
 &\quad lb(i) = 0, \quad i = n+neq+1, n+m.
 \end{aligned} \tag{67}$$

Estas duas últimas equações de (67) são os limites para as variáveis de folga. A expressão “gradiente reduzido” significa que o algoritmo GRG é inicializado com a substituição das restrições na função objetivo e de gradientes presentes.

#### 4.6 O Método *Desirability*

Derringer e Suich (1980) criaram uma estratégia eficiente de otimização simultânea para tratar o problema das múltiplas respostas, denominado *Desirability*. Para Van Gysegheem *et al.* (2004), o *Desirability* é um método multicritério capaz de avaliar um conjunto de resposta

simultaneamente, e que permite uma melhor determinação do conjunto de condições para as propriedades estudadas. Separadamente, essas análises, muitas vezes até conflitantes, resultariam em soluções incompatíveis. O método *Desirability* é um dos métodos de programação não-linear utilizados no tratamento de problemas de otimização multiobjetivo com restrições, Algoritmo Genético (ORTIZ *et al.*, 2004), Minimax (POLAK *et al.*, 2010), dentre outros. Sua maior utilização se dá pela facilidade de cálculo em comparação com outros métodos, como os citados anteriormente, por exemplo, que exigem maior esforço e conhecimento matemático ou estatístico. Baseia-se no estabelecimento de um relacionamento entre as respostas e as variáveis independentes, feito utilizando MSR e usando a formulação de Harrington (1965), onde cada uma das respostas do conjunto original é transformada, tal que  $d_i$  pertença ao intervalo  $0 \leq d_i \leq 1$ . O valor de  $d_i$  aumenta quando a  $i$ -ésima resposta se aproxima dos limites impostos.

A desvantagem do método *Desirability*, segundo Khuri e Conlon (1981), é que ao transformar um método multivariado em um univariado a estrutura de variância-covariância das respostas é totalmente ignorada.

Para Ortiz *et al.* (2004), o aumento da não linearidade de  $D$  à medida que se considera um número maior de variáveis de respostas, conduzindo a ótimos locais apenas, mostra outra forma de deficiência do método.

Entretanto, mesmo diante de tais críticas, o método *desirability* é largamente utilizado. Embora não possa ser considerada uma desvantagem, mas uma insuficiência, o método *Desirability* necessita que o analista especifique os valores para alguns parâmetros, como importância e peso. Essa interferência do analista na otimização pode gerar certa incerteza no processo e ser considerada, em alguns casos, como heurística. A utilização de um arranjo de experimentos nesta fase pode ser considerada uma contribuição para a melhoria do método.

Costa *et al.* (2011) fizeram uma revisão da evolução da função *desirability* e identificaram que é possível dividi-la em duas diferentes linhas de raciocínio, uma mais simples e uma mais complexa, com base na sua sofisticação estatística e matemática. Assim, as abordagens mais simples e que exigem menor expertise matemática podem ser facilmente aplicadas usando-se o Microsoft Excel<sup>®</sup>.

Coube a Derringer e Suich (1980) propor um modelo geral de transformação tipo exponencial como funções *desirability* individuais com base nos trabalhos de Harrington (1965). Para se privilegiar o alvo escolhido ( $T$ ) máximo ou mínimo (Nominal-The-Best – NTB), a função *desirability* individual proposta é definida por:

$$d = \begin{cases} \left(\frac{\hat{y} - L}{T - L}\right)^s, & L \leq \hat{y} \leq T \\ \left(\frac{\hat{y} - U}{T - U}\right)^t, & L \leq \hat{y} \leq T \\ \text{senão, } 0 \end{cases} \quad (68)$$

onde  $s$  e  $t$  são os pesos adotados pelo especialista ( $s, t > 0$ ). A função desirability individual transforma a variável de resposta em um valor entre 0 e 1, onde 1 é o desejável e 0 o valor que está fora da zona de interesse.

Já quando se busca um valor que seja maior que o limite inferior (Larger-The-Best – LTB), onde  $\hat{y} > L$ , a função desirability individual define-se por:

$$d = \left\{ \left( \frac{\hat{y} - L}{U - L} \right)^r, L \leq \hat{y} \leq U \right. \quad (69)$$

onde  $r$  é o peso adotado pelo especialista ( $r > 0$ ).

Quando o que se busca é um valor que seja menor do que o limite superior (Smaller-The-Best – STB), onde  $\hat{y} < U$ , a função desirability é obtida por:

$$d = \left\{ \left( \frac{\hat{y} - U}{L - U} \right)^r, L \leq \hat{y} \leq U \right. \quad (70)$$

Coube a Derringer (1994) unir as funções desirability individuais em uma média geométrica ponderada:

$$D = ((d_1)^{w_1} (d_2)^{w_2} \dots (d_k)^{w_k})^{\frac{1}{\sum w_i}} \quad (71)$$

onde  $d_i$  é a função desirability individual ( $i = 1, \dots, k$ );  $w_i$  são os parâmetros ditados pelo especialista. Combinando as respostas transformadas através da média geométrica, encontra-se o índice de avaliação global  $D$ , tal como descreve a equação (71). O índice global  $D$  será maximizado quando todas as respostas se aproximarem o máximo possível de suas especificações. Segundo Osborne et al. (1997) e Rossi (2001), quanto mais próximo de 1 estiver  $D$ , mais próximas as respostas originais estarão dos seus respectivos limites de especificação.

O algoritmo de Derringer e Suich (1980) depende do tipo de otimização desejada para a resposta (maximização, normalização ou minimização), dos limites (valores desejados) e das respectivas importâncias de cada resposta, tal como estabelecido pelos Quadros Quadro 1) e Quadro 2).

Quadro 1: Objetivos de otimização no Método de Derringer.  
Fonte: Paiva (2006)

| Objetivo   | Características                                                                                                                                                                          | Representação Esquemática |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Minimizar  | O valor da função <i>desirability</i> aumenta enquanto que o valor da resposta original se aproxima de um valor alvo mínimo. Abaixo do alvo, $d = 1$ ; acima do limite superior, $d = 0$ |                           |
| Normalizar | Quando a resposta se move em direção alvo, o valor da função <i>desirability</i> aumenta. Acima ou abaixo dos limites, $d = 0$ ; no alvo $d = 1$ .                                       |                           |
| Maximizar  | O valor da função <i>desirability</i> aumenta quando o valor da resposta aumenta. Abaixo do limite inferior, $d = 0$ ; acima do alvo, $d = 1$ .                                          |                           |

Quadro 2: Relações de importância entre o Alvo e os Limites no *Desirability*.  
Fonte: Paiva (2006)

|  |                                                                                                      |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | Se o peso é menor que 1 (valor mínimo é 0,1), então, menos ênfase se dá ao alvo.                     |
|  | Quando o peso é igual a 1, a importância dada ao alvo é igual à importância dada aos limites.        |
|  | Se o peso dado à resposta é maior do que 1 (o valor máximo é 10), então, mais ênfase é dada ao alvo. |

Nota-se que o Método de *Desirability* é uma alternativa considerável para a otimização de portfólios multiobjetivos. Neste contexto, os expoentes  $r$  e  $s$  podem ser considerados como uma espécie de coeficiente de aversão ao risco.

Na literatura, diversos são os aprimoramentos apresentados desde Derringer e Suich (1980). Del Castillo *et al.* (1996) aprimoraram o cálculo de NTB usando uma aproximação polinomial local para eliminar a não diferenciação nos alvos, embora não possa ser aplicado a LTB e STB. Assim, a função *desirability* individual se dá por:

$$d = \begin{cases} a_0 + b_0 \hat{y} & , L < \hat{y} \leq T - \delta \\ f(\hat{y}) & , T - \delta < \hat{y} \leq T + \delta \\ a_1 + b_1 \hat{y} & , T + \delta < \hat{y} \leq U \end{cases} \quad (72)$$

, senão 0.

onde  $f(\hat{y}) = A + B\hat{y} + C\hat{y}^2 + D\hat{y}^3 + E\hat{y}^4$ ,  $\delta = (U - L)/50$  e  $A, B, C, D, E, a_0, b_0, a_1$  e  $b_1$  são constantes.

Wu e Hamada (2000) sugerem uma função *desirability* individual na forma de funções exponenciais. Assim, para as respostas do tipo NTB, a equação utilizada é:

$$d = \begin{cases} \exp(-k_1|\hat{y} - T|^s), & \infty < \hat{y} \leq T \\ \exp(-k_2|\hat{y} - T|^t), & T \leq \hat{y} < \infty \end{cases} \quad (73)$$

onde  $k_i$  é uma constante de escala.

Para as funções *desirability* individuais do tipo STB e LTB, as equações necessárias são, respectivamente:

$$d = \exp(-k_3[\hat{y} - \varphi]^r), \quad \varphi \leq \hat{y} < \infty \quad (74)$$

$$d = \begin{cases} 1 - \frac{\exp(-k_3\hat{y}^r)}{\exp(-k_3L^r)}, & L \leq \hat{y} < \infty \\ 0, & \hat{y} < L \end{cases} \quad (75)$$

onde  $k_i$  é uma constante de escala e  $\varphi$  representa o alvo para as respostas do tipo STB.

Para a otimização, Wu e Hamada (2000) sugerem a otimização global que acaba tendo um número bem maior de parâmetros que o método de Derringer e Suich (1980):

$$D = (d_1)^{w_1} (d_2)^{w_2} \dots (d_k)^{w_k} \quad (76)$$

onde  $0 < w_i < 1$  e  $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1$ .



Kim e Lin (2000) propõem maximizar o nível mínimo de satisfação global de todas as respostas, tratando de forma robusta as dependências potenciais entre as variáveis de resposta e considerando certa prioridade relativa entre elas. Assim:

$$d = \begin{cases} \frac{\exp(k) - \exp(k|z|)}{\exp(k) - 1}, & z \neq 0 \\ 1 - |z|, & z = 0 \end{cases} \quad (77)$$

onde  $k$  é uma constante e  $z$  um parâmetro padrão que representa a distância entre a resposta estimada pelo valor alvo em unidades do desvio possível máximo. Assim:

$$d = \begin{cases} \frac{\hat{y} - T}{y^{max} - T} & \text{para NTB} \\ \frac{\hat{y} - y^{min}}{y^{max} - y^{min}} & \text{para STB com } y^{min} \leq \hat{y} \leq y^{max} \\ \frac{y^{max} - \hat{y}}{y^{max} - y^{min}} & \text{para LTB} \end{cases} \quad (78)$$

onde  $y^{max}$  e  $y^{min}$  são as respostas estimadas máximas e mínimas, respectivamente. Para NTB, o intervalo da equação (16) varia de -1 a +1, enquanto as outras de 0 a 1.

Para a maximização do nível mínimo de satisfação, a função composta global é:

$$D = \max \min (d_1, d_2, \dots, d_k) \quad (79)$$

Sua grande desvantagem é que ela só considera a resposta com menor grau de satisfação e ignora o das outras respostas, o que leva decisões errôneas em alguns casos.

Ch'ng *et al.* (2005) sugerem uma função *desirability* individual com base na minimização da média aritmética para encontrar as condições de otimalidade sob a hipótese da normalidade e homogeneidade da variância do erro, como:

$$d = \frac{2\hat{y} - (U + L)}{U - L} + 1 = \frac{2}{U - L}\hat{y} + \frac{-2L}{U - L} = m\hat{y} + c \quad (80)$$

onde  $0 \leq d \leq 2$ . E como critério de otimização, se minimiza uma função composta como:

$$D = \left( \sum_{i=1}^k w_i |d_i - d_i(T_i)| \right) / k \quad (81)$$

onde  $d_i(T_i)$  representa o valor da  $i$ -ésima função *desirability* individual para  $\hat{y}$  igual à resposta alvo ( $\hat{y} = T_i$ );  $w_i$  representa o peso (importância ou prioridade) em concordância com a resposta  $i$ ;  $k$  é o número de respostas e  $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ .

Sua desvantagem está em não considerar as variâncias e correlações existentes entre as respostas.

Wu (2005) propõe uma função *desirability* individual e composta que considera tanto a variância quanto a correlação entre as respostas. Assim:

$$d_{ii} = \exp(-F_i) \quad (82)$$

onde  $F_i = k_i[(\hat{y}_i - T_i)^2 + \sigma_i^2]$ ,  $k_i$  é o coeficiente de perda e  $\sigma_i^2$  o modelo de variância estimado para a  $i$ -ésima resposta ( $y_i$ ). A função *desirability* correlacionada ( $d_{ii}, i \neq j$ ) é definida como:

$$d = \begin{cases} 1 & , F_{ij} < 0 \\ \exp(-F_{ij}) & , F_{ij} \geq 0 \end{cases} \quad (83)$$

onde  $F_{ij} = k_{ij}[\hat{\rho}_{ij}\hat{\sigma}_i\hat{\sigma}_j + (\hat{y}_i - T_i)(\hat{y}_j - T_j)]$ ,  $k_{ij}$  é o coeficiente de perda da correlação e  $\rho_{ij}$  é o coeficiente de correlação das respostas  $y_i$  e  $y_j$ . Como critério de otimização, a equação para maximizar o *desirability* global é:

$$D = \left( \prod_{i=1}^p \prod_{i < j}^p d_{ii} d_{ij} \right)^{1/p} \quad (84)$$

Sua desvantagem se encontra na grande quantidade de parâmetros que o analista precisa assumir para seu cômputo.

Outras abordagens que tratam de forma mais sofisticada o cálculo da função *desirability* podem ser encontradas em Ribardo e Allen (2003), que tratam da interação entre a média e o desvio padrão e seus efeitos na produtividade; Ortiz *et al.* (2004) e Pasandideh e Niaki (2006) que usam o algoritmo genético no seu cômputo; Lee e Kim (2007) que calcula a função *desirability* através da média de seus valores com base em uma distribuição de probabilidades de variáveis de respostas previstas; Das e Sengupta (2010) utilizam uma exponencial negativa para tratar valores da função *desirability* zero ou negativos e, finalmente, He *et al.* (2010) propõem seu cálculo através da utilização da metodologia de superfície de respostas balanceando a qualidade das previsões e seus vieses. Nesta tese, será utilizado como base o método de cálculo de Derringer e Suich (1980).

No cômputo da função *desirability*, de acordo com a aversão ao risco, o grau de importância ( $\lambda_i$ ) das superfícies de risco e retorno, além dos pesos ( $w_i$ ), do alvo desejado ( $T$ ) e dos limites ( $L_i, H_i$ ) devem ser escolhidos. A faixa comum de ( $\lambda_i$ ) e os pesos ( $w_i$ ) comuns pertencem ao intervalo  $[0,1; 10]$ . Obviamente, cada valor diferente de  $\lambda_i$  e  $w_i$  irá conduzir a

diferentes valores de risco e retorno, dependendo da aversão ao risco de cada investidor. No entanto, as influências de  $\lambda_i$  e  $w_i$  podem ser investigadas usando também uma estratégia de DOE, como uma superfície de resposta ou um arranjo fatorial. Nesta pesquisa, será adotado um arranjo de Box–Behnken como uma estratégia de análise de sensibilidade por conter menor número de experimentos. De acordo com Montgomery (2009), Box–Behnken é um arranjo experimental formado pela combinação de  $2^k$  fatoriais com um bloco incompleto, resultando em um arranjo de três níveis que são adequados e suficientes para gerar superfícies de resposta. O número de corridas necessárias é comparativamente bem pequeno e eficiente em termos de propriedades estatísticas de um projeto de experimentos.

Embora existam formas diferentes e mais modernas que calculem a função desirability, adota-se, nesta tese, o modelo tradicional devido ser este o mais empregado na literatura.

## 5. OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIOS POR ARRANJO DE MISTURAS

Em geral, a seleção de um portfólio se baseia na teoria de Markowitz (1952, 1959), conhecido como o pai da moderna teoria de portfólios (*Mean–Variance Portfolio* – MVP) que considera a minimização da variância do portfólio e a maximização do retorno como um critério ideal para escolher ativos que levam a um investimento com maior retorno e com menor risco.

Para Markowitz, em seu teorema fundamental da teoria do portfólio de média variância, mantendo-se a variância constante, é possível maximizar o retorno esperado e, mantendo o retorno esperado constante, é possível minimizar a variância (ELTON e GRUBER, 1997). Assim, se usa a média dos retornos do período dado para obter o retorno e o desvio-padrão para prever o risco. A ideia é que enquanto os investimentos são imprevisíveis e arriscados, o comovimento ou a covariância dos retornos dos ativos individuais podem ser usados para ajudar a isolar o portfólio, criando assim altos retornos com pouco ou nenhum risco adicional (AWERBUCH e BERGER, 2003).

Otimizar um portfólio de forma a obter máxima rentabilidade é um constante desafio tanto para os profissionais da área de finanças (POLAK *et al.*, 2010) como para aqueles que trabalham ligados ao planejamento estratégico de novas tecnologias de geração de energia (ZHU e FAN, 2010), ao mercado de eletricidade (HUISMAN *et al.*, 2009; LIU e WU, 2007; GALVANI e PLOURDE, 2010), aos métodos de tomada de decisão (GREEN *et al.*, 2010) e ao desenvolvimento de produtos (ZAPATA *et al.*, 2008).

No mercado de energia, um campo mais amplo de aplicações inclui os preços *spot* ou retornos de ativos de diversas fontes de energia como o petróleo bruto (CHANG *et al.*, 2011; CHANG *et al.*, 2010; GALVANI e PLOURDE, 2010; LEAN *et al.*, 2010), carvão (WESTNER e MADLENER, 2011; gasolina (ROQUES *et al.*, 2008), (GALVANI e PLOURDE, 2010; GAO e STASKO, 2009), eletricidade (MÖLLER *et al.*, 2011; DELARUE *et al.*, 2011; GALVANI e PLOURDE, 2010; GREEN *et al.*, 2010; HUISMAN *et al.*, 2009; AWERBUCH e BERGER, 2003), gás natural (KHALILPOUR e KARIMI, 2011; GALVANI e PLOURDE, 2010; YU, 2003), as fontes de energia renováveis (MUÑOZ *et al.*, 2009), entre outros.

Para Delarue *et al.* (2011) e Elton e Gruber (1997), grande parte desses trabalhos inclui em sua análise o conceito de otimização de portfólios. Esta abordagem tem sido amplamente utilizada e também recebeu modificações de vários pesquisadores para abranger aspectos específicos do gerenciamento de portfólio, como as propostas por Marimoutou *et al.* (2009) e

Hung *et al.* (2008), que abordam as vantagens, desvantagens ou deficiências das métricas de risco mais comuns, o comportamento de séries temporais que representam o risco e retorno e suas respectivas heteroscedasticidades (CHANG *et al.*, 2010; CHANG *et al.*, 2011; BAUWENS *et al.*, 2010; ANGELIDIS *et al.*, 2004), a convexidade e monotonicidade de medidas de risco ou a sua ausência (CHEN e YANG, 2011; KIBZUN e KUZNETSOV, 2006), a estrutura de otimização multiobjetivo para o risco e as funções de retorno (ANAGNOSTOPOULOS e MAMANIS, 2010 e 2011; USTA e KANTAR, 2011; PINDORIYA *et al.*, 2010; JANAL *et al.*, 2007; AHMED e EL-ALEM, 2005), a diversificação do portfólio e a abordagem de entropia (USTA e KANTAR, 2011; SCHLUETER, 2010; WU *et al.*, 2009; AWERBUCK *et al.*, 2008; BERA e PARK, 2008; JANAL *et al.*, 2007), os algoritmos de otimização diferentes disponíveis para solução de MVP (ANAGNOSTOPOULOS e MAMANIS, 2011; CHANG *et al.*, 2009), a não-normalidade das distribuições de dividendos e a influência da assimetria na alocação de portfólios (BHATTACHARYYA *et al.*, 2011; PINDORIYA *et al.*, 2010). Assim, uma abordagem confiável, convexa e de fácil minimização das medidas de risco é sempre desejável pelo mercado (MURPHY *et al.*, 2005).

Importantes contribuições foram feitas por diversos autores desde Markowitz. A Teoria de Portfólio foi aprimorada, o seu uso foi adotado por muitas áreas de mercado e existem múltiplos modelos de mercado com o intuito de melhorar seus resultados. No mercado de eletricidade é usado para gerenciar um portfólio de contratos com base no perfil de consumo futuro esperado de uma empresa ou um grupo de clientes (HUISMAN *et al.*, 2009). Möller *et al.* (2010) usaram a Teoria de Portfólio para determinar posições estratégicas no mercado de balanço energético e identificar possíveis incentivos econômicos na análise do balanço energético alemão. Roques *et al.* (2008) aplicaram o MVP combinado com simulações de Monte Carlo para identificar uma base ótima de portfólios de geração de carga para grandes geradores de eletricidade nos mercados livres de eletricidade utilizando seus retornos de investimento. Awerbuch e Berger (2003) usaram o MVP para contribuir com o Planejamento e definição de políticas de Eletricidade para a União Europeia para sugerir portfólios diversificados ótimos de geração com o objetivo de minimizar o risco do preço da energia para a sociedade. Também, no mercado de energia, ele é usado para indicar a demanda futura de petróleo bruto, gás natural e gasolina sem chumbo, não conseguindo melhorar o desempenho das ações representativas de energia em termos de retorno ou risco, mas sim diminuindo o nível geral de exposição ao risco suportado pelos investidores passivos (GALVANI e PLOURDE, 2010).

Para Green *et al.* (2010) a desregulamentação em curso do mercado industrial de eletricidade no mundo todo introduziu uma incerteza em um setor da economia que era tradicionalmente regulado pelo Estado. A adoção de métodos financeiros como a análise de séries temporais, otimização de portfólios e análise de opções reais para gerenciar os riscos associados é benéfica. Deveria ser possível identificar áreas nas quais técnicas financeiras contemporâneas já tenham afetado políticas, especialmente em termos de como os projetos são lançados com seu risco protegido. Em outro exemplo, em um estudo com empresas de geração de energia, (LIU e WU, 2007) consideram que certas companhias são desafiadas diante da perspectiva de obter maiores lucros face o risco de perderem dinheiro. É essencial para empresas em um mercado competitivo reconhecer o risco de mercado e gerir tais riscos. A otimização de portfólios é usada para atender a esta necessidade.

### 5.1 O Método Fatorial de ajuste da função *desirability*

O método *desirability* é uma excelente alternativa para problemas de otimização multiobjetivo, mas a definição da maioria de seus parâmetros fica a cargo de um especialista com conhecimento para essa tomada de decisão. Jeong e Kim (2009), reconhecendo que a definição dos valores necessários para se executar a função *desirability* não é uma tarefa trivial, propôs uma abordagem da função interativa (*Interactive desirability function approach* - IDFA) para ajustar os parâmetros de preferência de pesos, importâncias e alvo de forma interativa.

De acordo com Jeong e Kim (*op. cit.*), existem três categorias de articulação da informação preferencial aos tomadores de decisão: escolha prévia, progressiva e posterior. Na escolha prévia, todos os parâmetros da rotina de otimização multiobjetivo precisam ser escolhidos antes de resolver o problema, enquanto que na articulação progressiva, os parâmetros podem ser alterados iterativamente. No método posterior, no entanto, primeiro é necessário encontrar o conjunto de todas as soluções eficientes sem qualquer articulação e depois, o tomador de decisão escolhe a melhor delas.

Assim, ampliando esta ideia para o campo da experimentação, um arranjo DOE poderia ser utilizado para investigar a mudança simultânea de parâmetros do *desirability*. Nesta tese, essa estratégia é chamada de "arranjo fatorial de ajuste da função *desirability*". Seria uma espécie de articulação posterior da preferência do tomador de decisão (Jeong e Kim, *op. cit.*), em que o arranjo de experimentos não necessita de toda a solução viável da preferência posterior, mas apenas algumas combinações. Partindo de uma escolha inicial de parâmetros

de pesos, importância e alvo para o *desirability*, todos os parâmetros de preferência podem ser ajustados simultaneamente, de acordo com um arranjo de superfície de resposta como Box-Behnken. Em cada corrida do arranjo, os valores escolhidos para estes parâmetros podem ser modificados. Se o número de parâmetros se tornar grande (assim como o aumento do número de ativos), uma estratégia de triagem poderia ser utilizada.

No contexto da otimização de portfólios, os parâmetros de pesos e importância da função *desirability* ( $w$  e  $\lambda$ ) nas equações (40) até (43) podem ser escolhidos de acordo com o interesse do investidor e pode refletir sua aversão a um nível de risco determinado. Como a escolha pode ser considerada arbitrária, o método pode ser uma alternativa adequada. Inicialmente, o investidor pode escolher coeficientes de pesos e importâncias iguais na primeira execução do método, o que permite ao investidor alguma ideia sobre o desempenho do portfólio.

Se desejar, o investidor pode usar uma análise de sensibilidade Box-Behnken para pesos e coeficientes. Assim, um arranjo de superfície de resposta pode ser utilizado para avaliar os coeficientes de pesos e importâncias que maximizam a função *desirability*. Com ótimos pesos e/ou coeficientes obtidos antecipadamente, o investidor executa o *desirability* novamente.

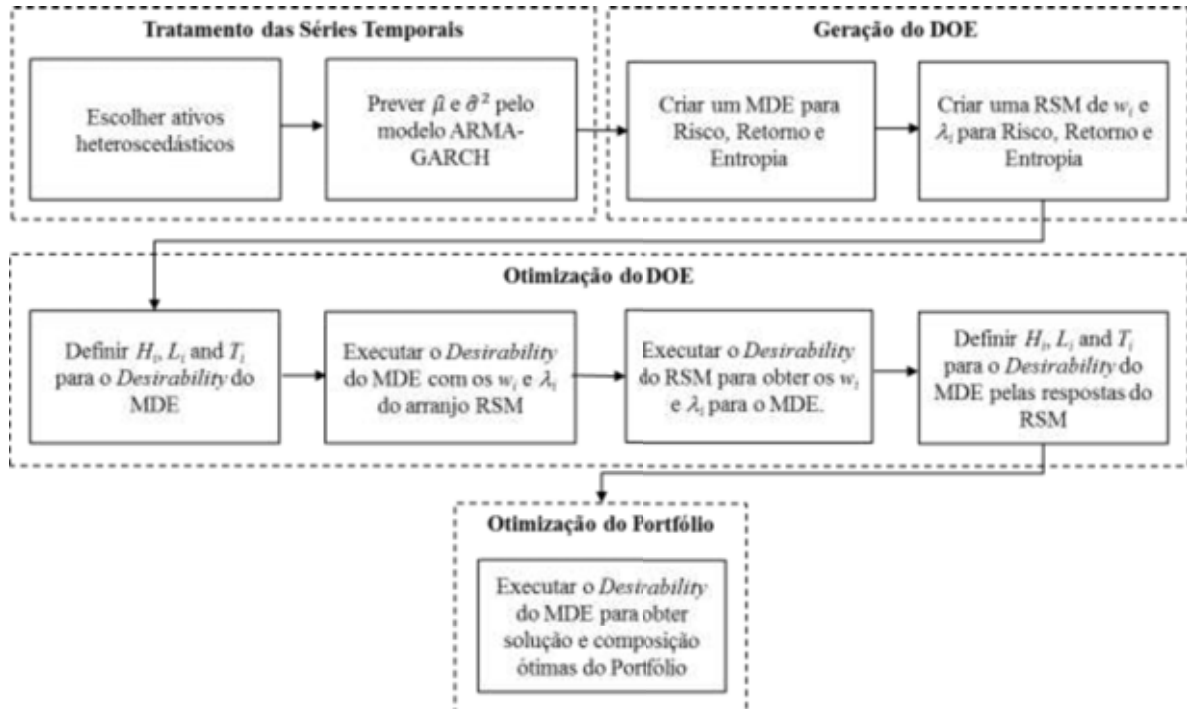


Figura 8: Método fatorial de ajuste da função *Desirability*.

Na Figura 8, tem-se a abordagem apresentada nesta tese que consiste em criar um MDE para valores previstos de ativos de risco, retorno e entropia, otimizando um problema de portfólio multiobjetivo pela função *desirability*. Os parâmetros da função *desirability* podem

ser também adequadamente ajustados utilizando uma estratégia DOE como o método fatorial de ajusta da função *desirability*.

No contexto de uma função *desirability*,  $w$  é um peso que enfatiza o interesse do especialista na otimização, indicando a sua preferência pelo alvo ou pelos valores limites. Para a minimização, menos ênfase é colocada sobre o alvo, quando o peso é menor do que 1. O ideal é que a solução encontrada pelo algoritmo esteja entre o alvo e o limite superior. Um peso igual a 1 coloca a mesma ênfase no alvo e nos limites. Caso contrário, um peso maior do que 1 força o algoritmo para encontrar uma solução tão próxima quanto possível do alvo. Para problemas de maximização, a estratégia é semelhante.

O coeficiente  $\lambda$  também desempenha um importante papel no algoritmo e pode também ser visto como uma medida de aversão ao risco. Este coeficiente representa o grau de importância de certa resposta; a região comum de  $(\lambda_i)$  assume valores entre 1 e 10. Se a superfície de resposta assumida para o risco é tão grande quanto desejado pelo investidor, uma menor aversão é esperada. Amplos valores de risco e retorno levam a resultados melhores para o portfólio. A principal vantagem dessa abordagem é a simplicidade de sua execução. Quase todas as operações anteriormente mencionadas podem ser desenvolvidas usando um software estatístico disponível como Minitab®, por exemplo.



## 6. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo deste capítulo é aplicar passo a passo a proposta de tese de se apresentar uma proposta inovadora para a otimização de portfólios condicionais multiobjetivos, considerando uma abordagem híbrida que combine arranjos de experimentos do tipo misturas para resolver problemas relacionados a portfólios de investimentos. Foi utilizado um estudo de caso considerando a aplicação do método utilizando séries históricas reais provenientes do mercado de petróleo. Foram considerados resultados primeiramente com e, em seguida, sem a utilização da entropia para estudar sua influência na diversificação dos portfólios.

Os ativos que serão utilizados como componentes do arranjo de misturas para testar o método foram extraídos a partir das séries históricas dos preços spot (dólares por barril) semanais do mercado de petróleo bruto (FOB), compreendendo o período de 2 de janeiro de 1998 a 14 de outubro de 2011, obtidos junto à *Energy Information Administration*<sup>1</sup>, totalizando 718 observações para cada ativo.

### 6.1 Aplicação do Método com Entropia

#### 6.1.1 Análise e tratamento das séries temporais

A escolha de séries históricas provenientes do mercado de petróleo atendeu a um dos objetivos da pesquisa de tratar aquelas séries que apresentem comportamento heteroscedástico. A partir da geração de parâmetros ARMA–GARCH para cada uma das séries foi possível se obter uma previsão dos valores um passo a frente para  $\hat{\sigma}_t^2$  e  $\hat{y}_{i,t}$ .

##### 6.1.1.1 Escolha dos ativos para o portfólio.

Foram escolhidas quatro séries de preços de petróleo bruto para servirem como ativos e componentes na formação do portfólio, provenientes de países membros e não membros da Organização dos Países Exportadores de Petróleo (OPEP): Asia Dubai Fateh, China Daqing, Indonesia Minas e Venezuela Tia Juana. Esta escolha se deu por estas séries expressarem o comportamento real de mercado, pela facilidade de acesso a suas bases históricas, pela característica de sua volatilidade, além de outras características das séries atenderem

---

<sup>1</sup> Disponível em: [http://www.eia.gov/dnav/pet/pet\\_pri\\_wco\\_k\\_w.htm](http://www.eia.gov/dnav/pet/pet_pri_wco_k_w.htm)

proximamente às exigências de um modelo GARCH, possibilitando a aplicação do modelo escolhido na tese.

Na escolha das séries para a formação do portfólio, primeiramente buscou-se estudar o comportamento dos fatores de risco e retorno dos preços de cada série, buscando nelas elementos heteroscedásticos, ou seja, características como autocorrelação dos resíduos, não-normalidade, variância variável no tempo, além da dependência condicional das variáveis no tempo.

Partindo-se inicialmente para a análise do ativo Asia Dubai Fateh (Figura 9), analisando a evolução de seus preços históricos, é possível observar o comportamento não linear da série, evidenciado por picos de volatilidade, principalmente pela brusca queda nos seus valores no período conhecido como de crise mundial, no ano de 2008. Esta é uma característica que sinaliza um tipo de série que pode ser mais bem tratada por um modelo GARCH. Entretanto, embora sua representação gráfica demonstre certa volatilidade, é preciso se aprofundar mais no estudo da série utilizando-se de testes específicos para poder caracterizá-la realmente como uma série GARCH.

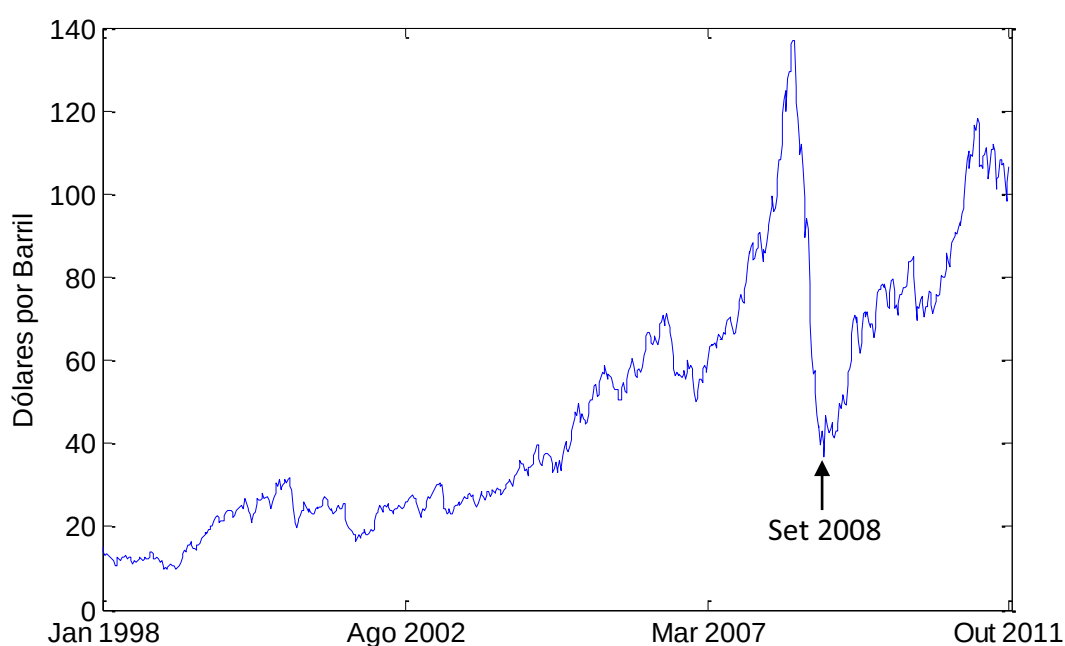


Figura 9: Série de preços originais – Asia Dubai Fateh.

A Figura 10 traz a representação gráfica do ativo China Daqing e mostra que o comportamento do seu preço está muito próximo ao ativo Asia Dubai. Esta proximidade se baseia na sua característica básica de mercado, ou seja, em serem estes ativos uma *commodity*. Seu comportamento no mercado, entretanto, mostra algumas diferenças relacionadas à sua volatilidade condizentes com particularidades relacionadas ao mercado de cada país. A série

apresenta certa tendência linear positiva e pode ser caracterizada como uma série não-estacionária quanto ao nível de inclinação.

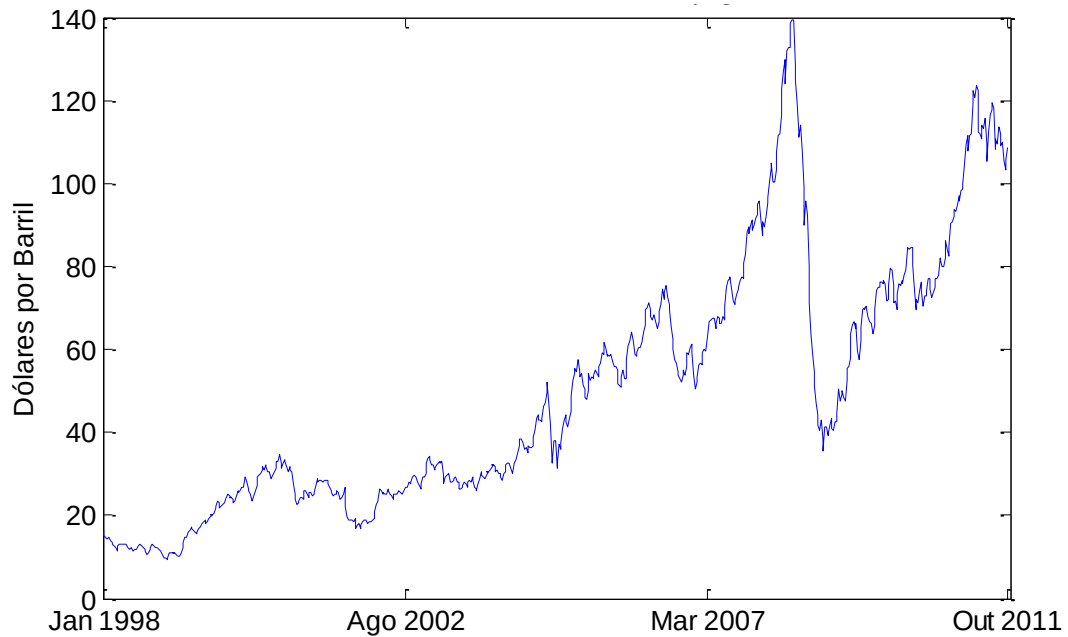


Figura 10: Série de preços originais – China Daqing.

A Figura 11 apresenta a série de preços de mercado do ativo Indonesia Minas, também com comportamento semelhante aos dos outros ativos tratados anteriormente e que compõem o portfólio. A série tem um comportamento não linear com tendência linear positiva. Observando-se todas as séries apresentam comportamento semelhante.

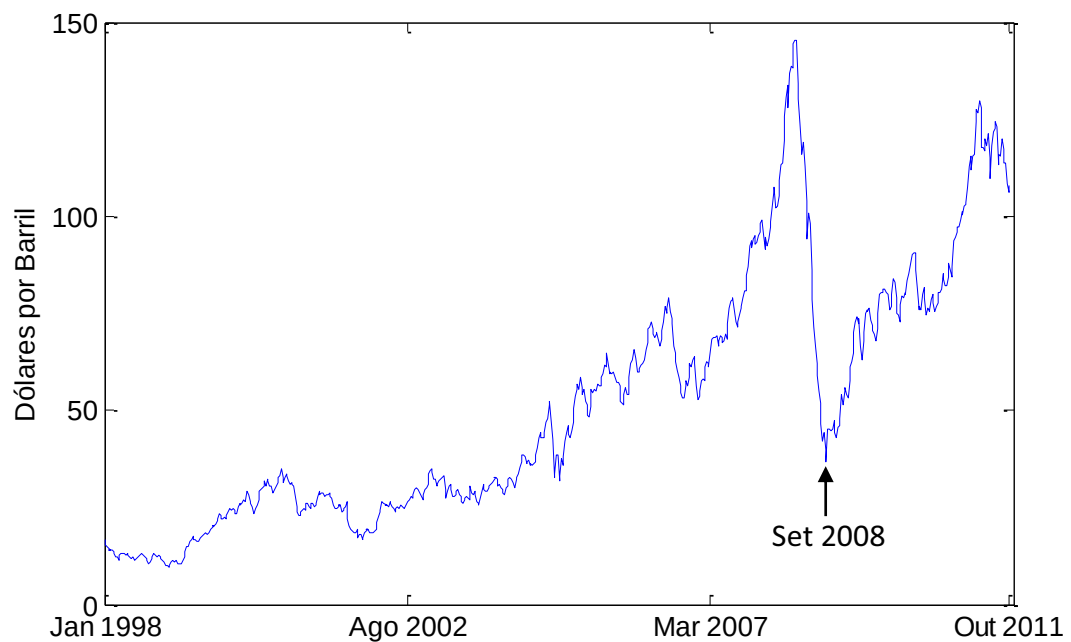


Figura 11: Série de preços originais – Indonesia Minas.

A Figura 12 apresenta a evolução temporal dos preços de mercado do ativo Venezuela Tia Juana.

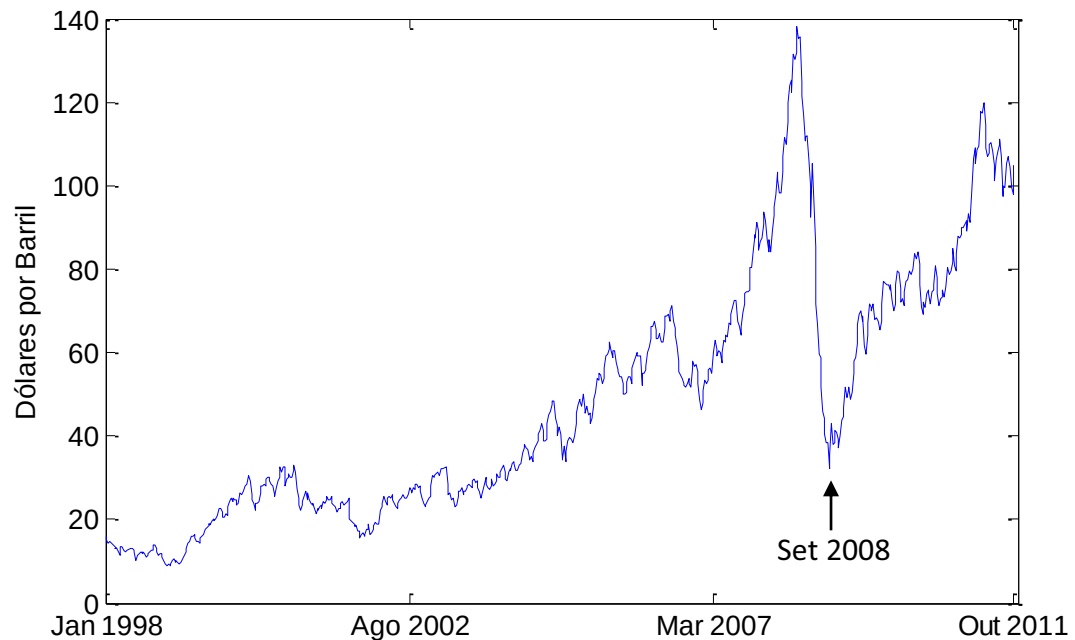


Figura 12: Série de preços originais – Venezuela Tia Juana.

Para o cômputo dos testes e análises estatísticas que tratam da caracterização das séries como heteroscedásticas, a série original sofre uma transformação logarítmica. A Figura 13 mostra a série temporal estacionária dos retornos do ativo Asia Dubai Fateh.

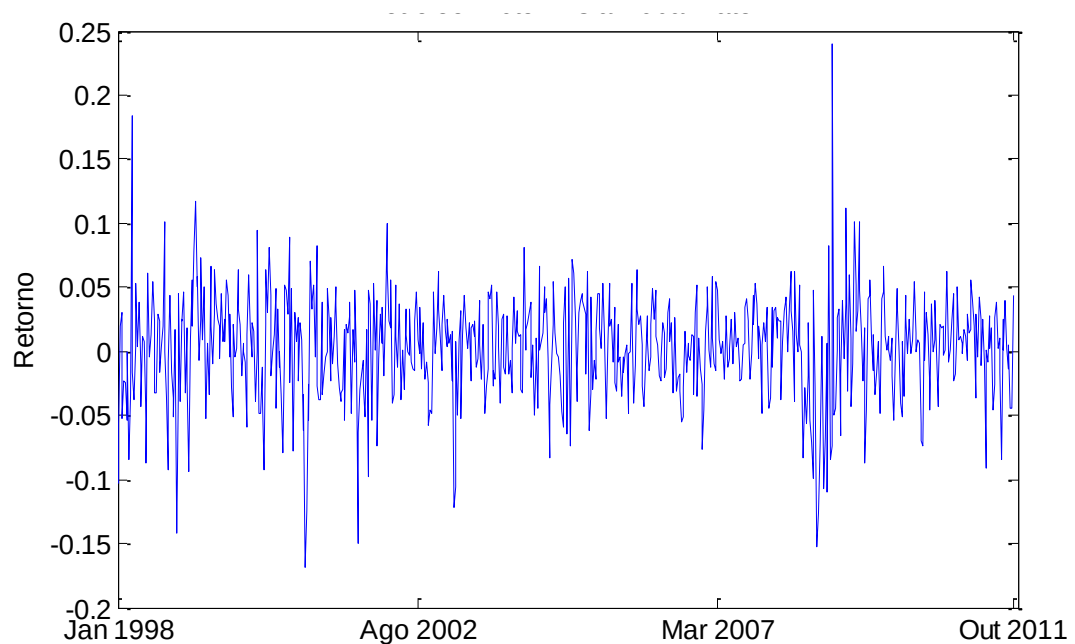


Figura 13: Série estacionária – Asia Dubai Fateh.

A Figura 14 apresenta a série estacionária do ativo China Daqing. A série evidencia seu comportamento não linear.

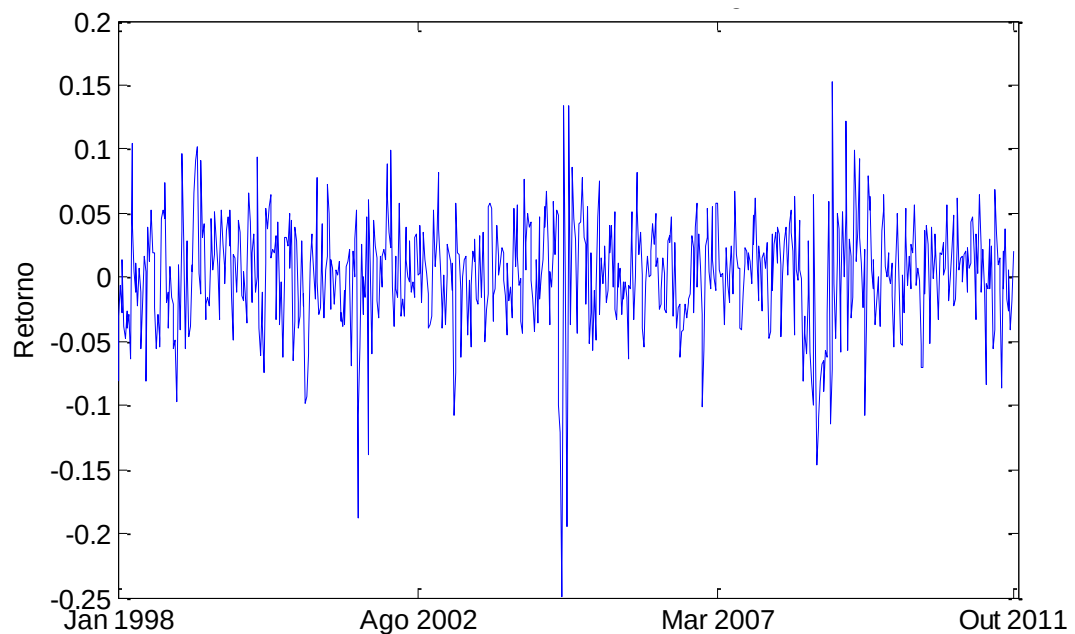


Figura 14: Série estacionária – China Daqing.

A Figura 15 apresenta a série estacionária do ativo Indonesia Minas. Assim como os outros gráficos de séries estacionárias, este apresenta características que sinalizam alguma heteroscedasticidade. Isto pode ser visto pela presença de termos significativos nessas séries de retorno e, igualmente, na volatilidade da série temporal original (Figura 11).

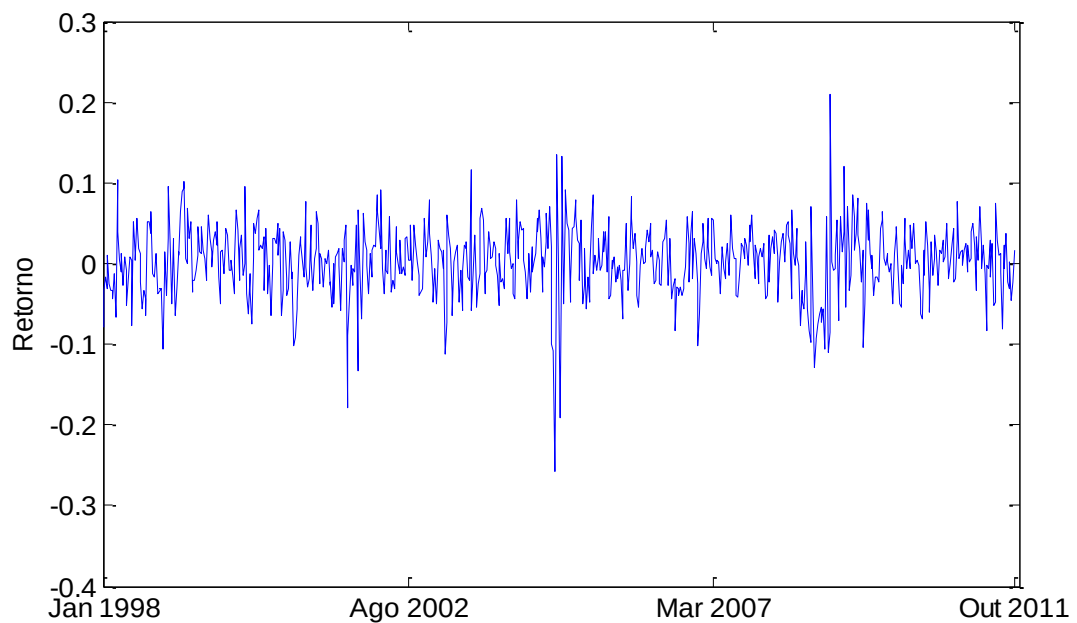


Figura 15: Série estacionária – Indonesia Minas.

A Figura 16 apresenta a série estacionária do ativo Venezuela Tia Juana.

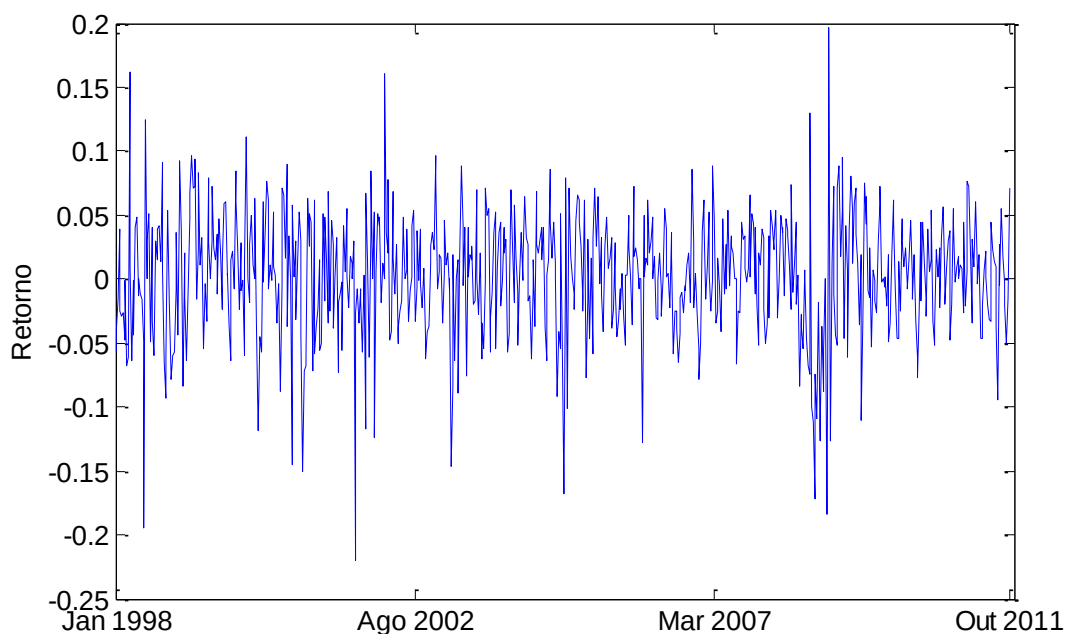


Figura 16: Série estacionária – Venezuela Tia Juana.

A Tabela 1 apresenta um resumo estatístico descritivo da série de retornos. Analisando média e desvio padrão, percebem-se séries que têm muita semelhança no comportamento de seus retornos. Os valores negativos de assimetria revelam grandes probabilidades de queda nos preços dos ativos, enquanto que os altos valores da curtose indicam que esses preços normalmente estão expostos a mudanças extremas. A amplitude das séries reforça essa variação entre os valores mínimos e máximos.

Tabela 1: Sumário estatístico dos retornos dos ativos de petróleo bruto.

| Variável      | Dubai    | China    | Indonésia | Venezuela |
|---------------|----------|----------|-----------|-----------|
| Média         | 0,00279  | 0,00277  | 0,00284   | 0,00269   |
| Desvio Padrão | 0,04148  | 0,04290  | 0,04364   | 0,04852   |
| Máximo        | 0,24007  | 0,15194  | 0,20978   | 0,19694   |
| Mínimo        | -0,16816 | -0,24888 | -0,25799  | -0,21996  |
| Assimetria    | -0,24650 | -0,66846 | -0,51186  | -0,48673  |
| Curtose       | 2,79400  | 2,94339  | 3,13425   | 1,78357   |

A Figura 17 exibe a autocorrelação dos retornos nos lags 1 e 3, denotando a existência de efeitos que justifiquem a adoção de um modelo ARMA (1,3).

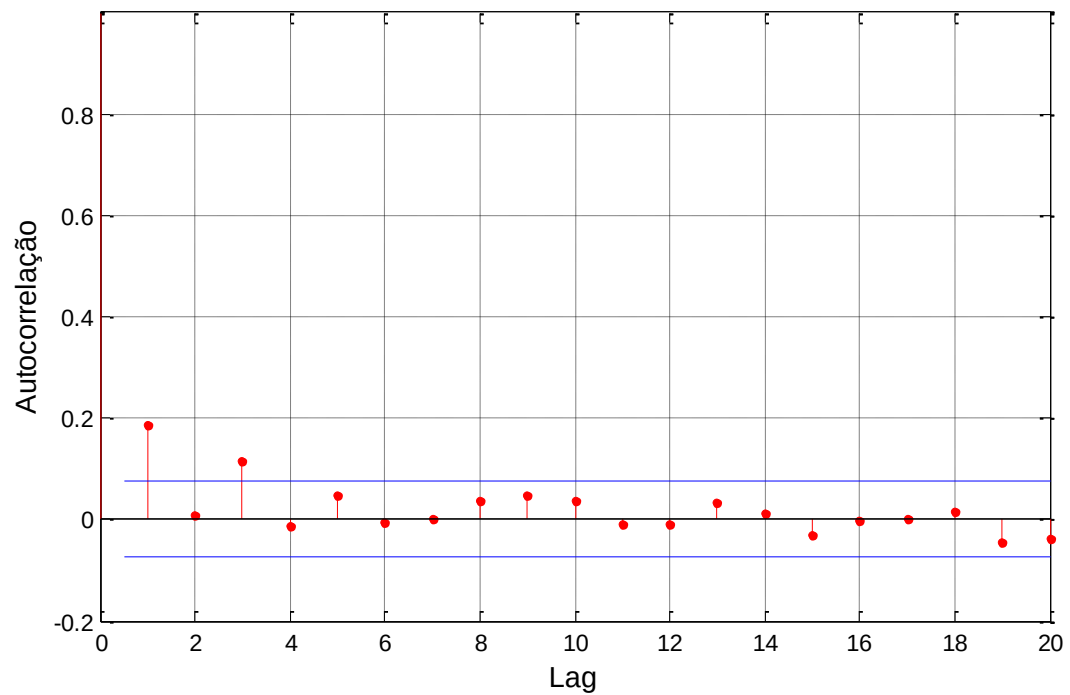


Figura 17: Função de autocorrelação dos retornos – Asia Dubai Fateh.

A autocorrelação dos resíduos quadráticos mostrados na Figura 18 indica heteroscedasticidade, onde a variância do processo apresenta certa correlação e uma estrutura condicional, também denotando a necessidade do uso de um modelo GARCH.

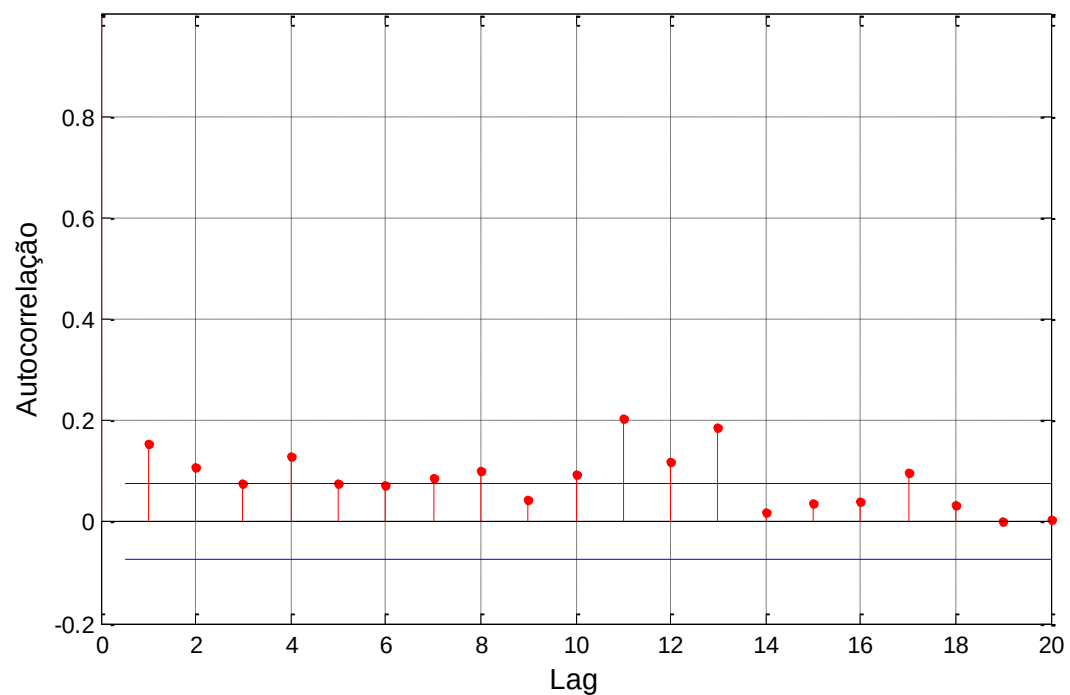


Figura 18: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – Asia Dubai Fateh.

A Figura 19 mostra autocorrelação no seu lag 1 dos retornos do ativo China Daqing, o que pode significar a existência de efeitos que justifiquem a adoção de um modelo ARMA (1).

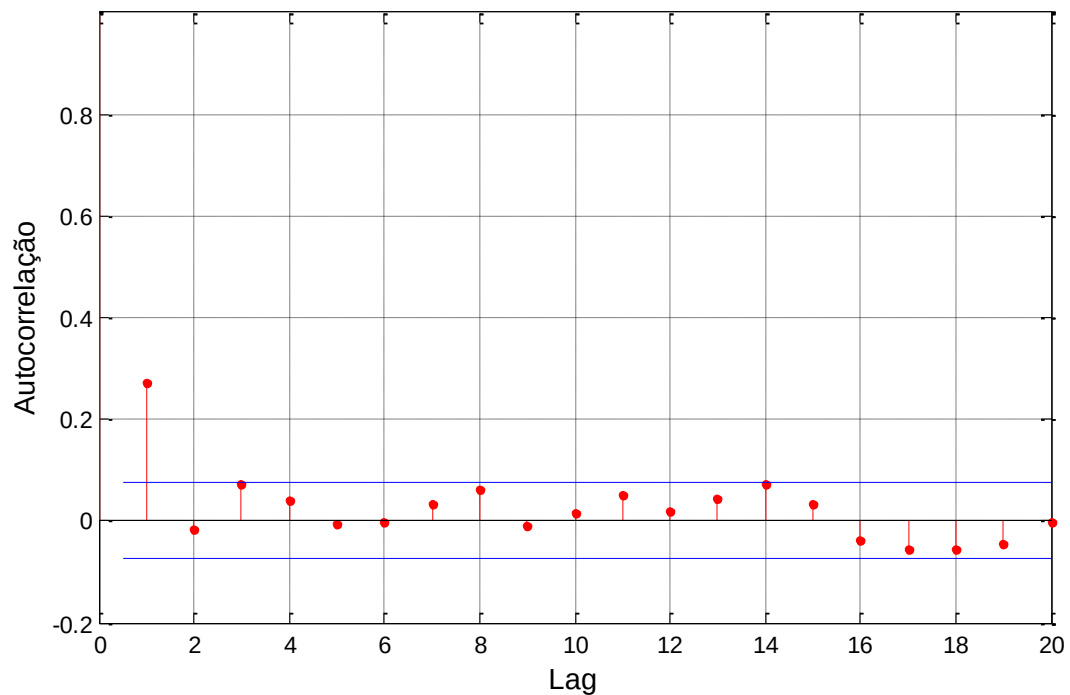


Figura 19: Função de autocorrelação dos retornos – China Daqing.

Na Figura 20, a existência de diversos termos significativos na série dos ativos China Daqing indica a existência de heteroscedasticidade, sugerindo um modelo GARCH.

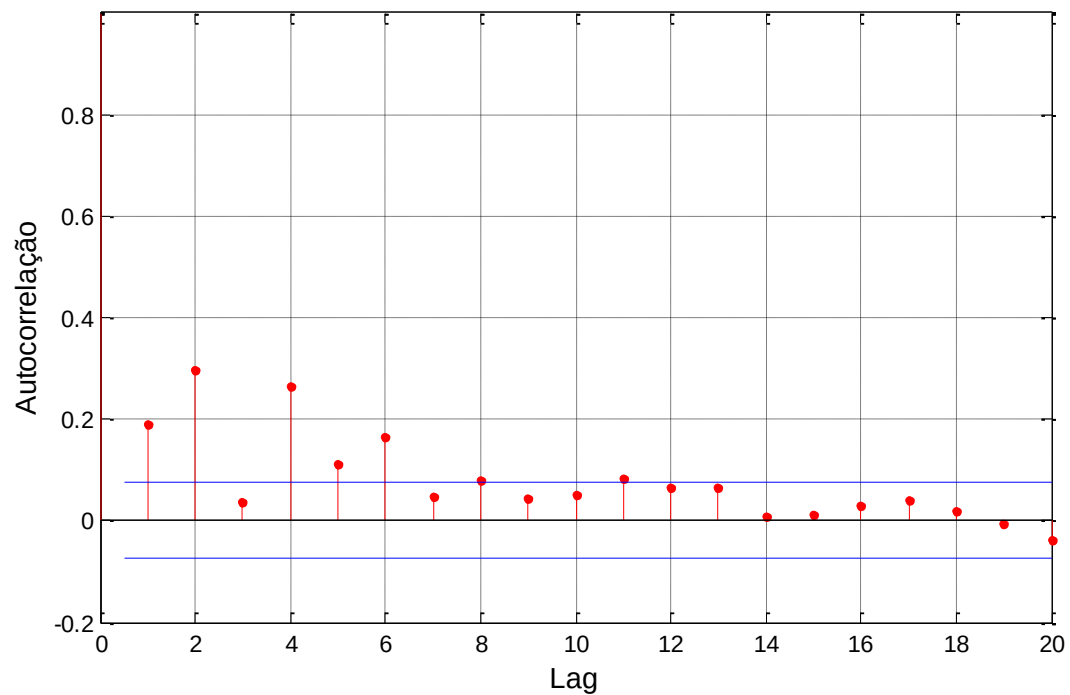


Figura 20: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – China Daqing.



A Figura 21 aponta para a boa adequação de um modelo ideal ARMA para o ativo Indonesia Minas.

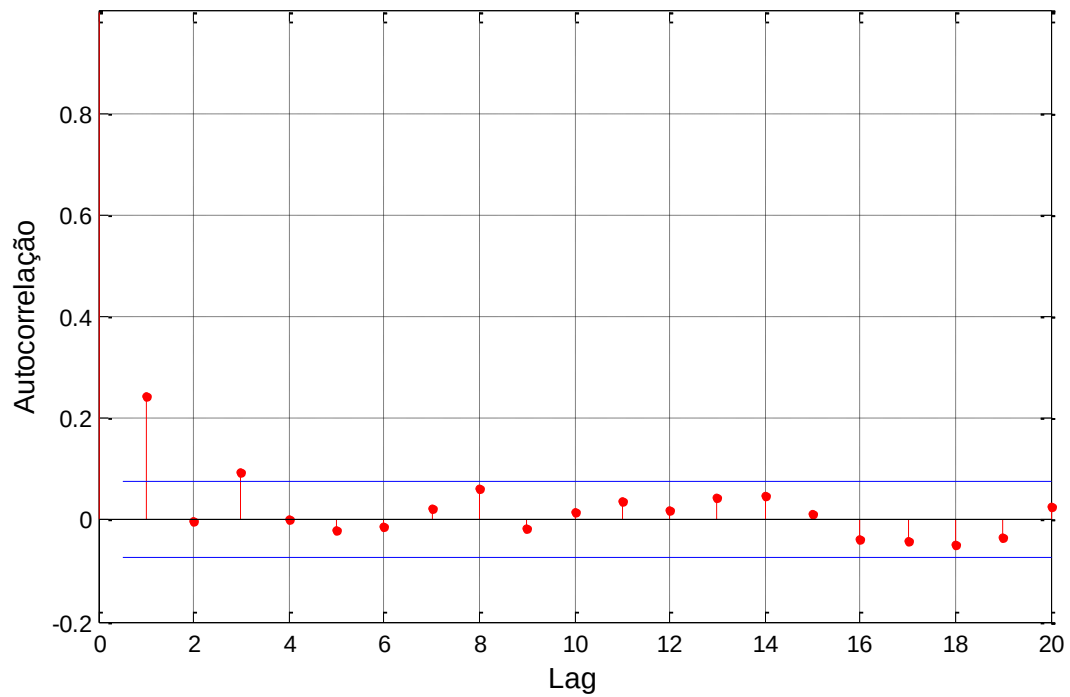


Figura 21: Função de autocorrelação dos retornos – Indonesia Minas.

A heteroscedasticidade do retorno quadrático do ativo Indonesia Minas fica evidente na Figura 22 e denota o uso de um modelo GARCH.

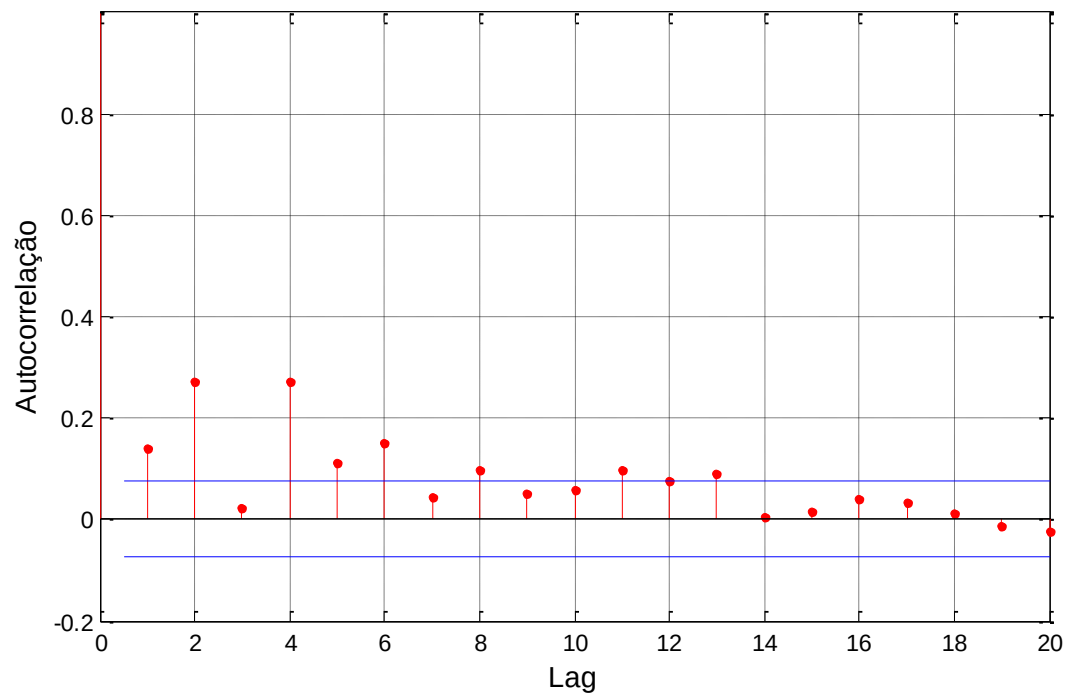


Figura 22: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – Indonesia Minas.

A Figura 23 apresenta dois sinais significativos na série, nos lags 1 e 3, embora, com um fraco lag 8 na autocorrelação de seus retornos.

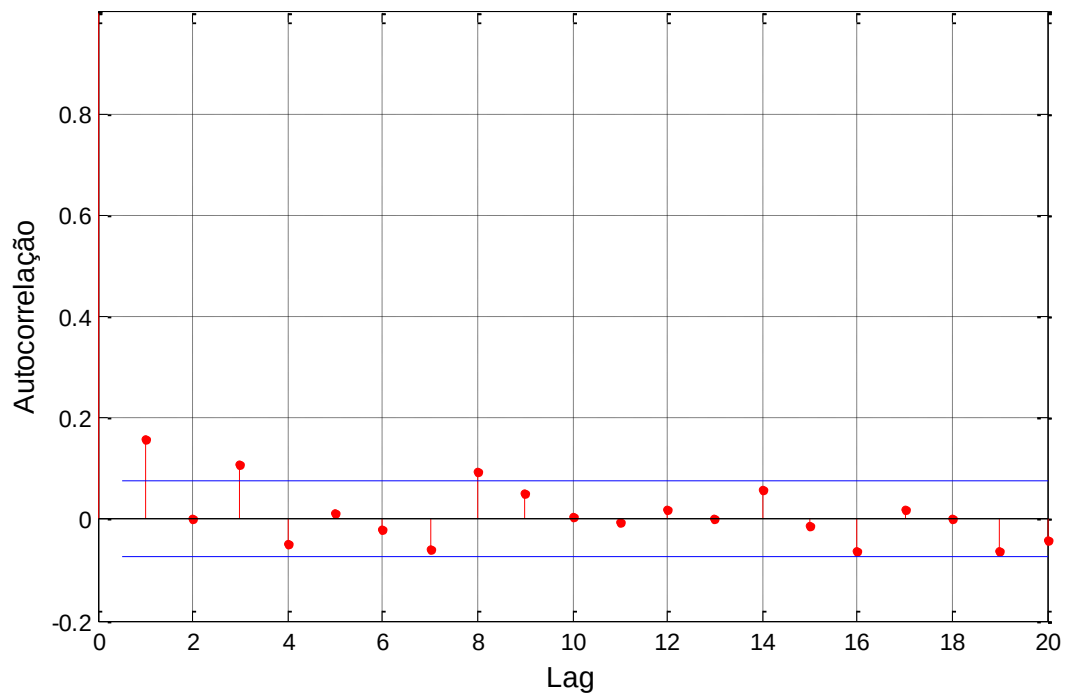


Figura 23: Função de autocorrelação dos retornos – Venezuela Tia Juana.

Já na Figura 24, a autocorrelação do quadrado dos retornos do ativo Venezuela Tia Juana apresenta alguns termos significativos indicando a existência de heteroscedasticidade na série, necessitando também de um modelo GARCH.

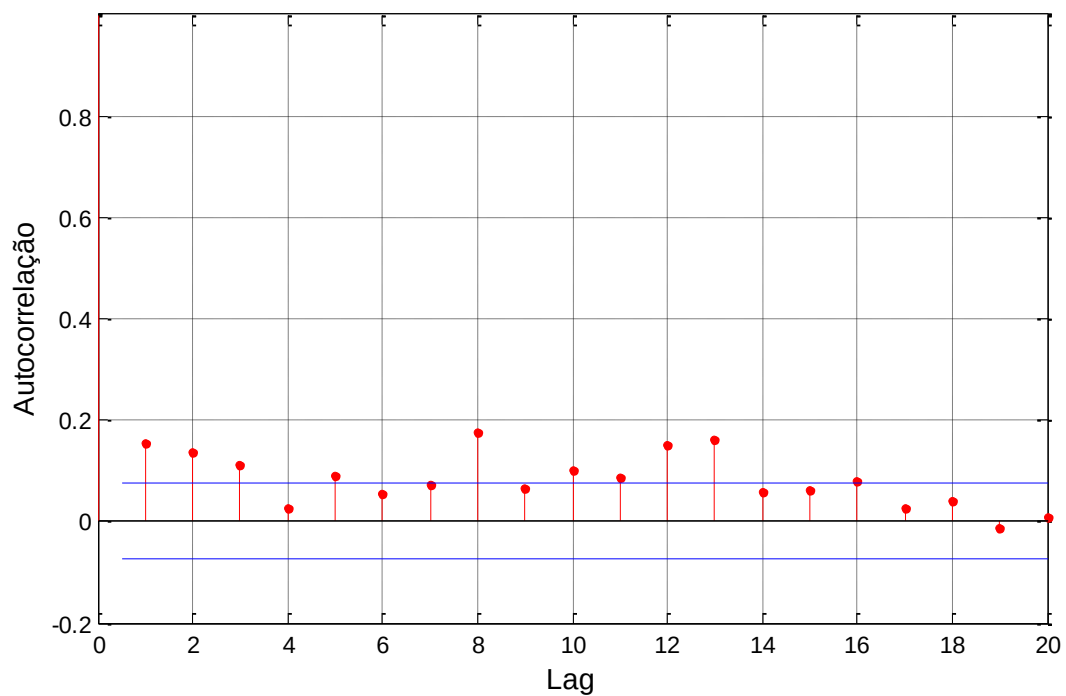


Figura 24: Função de autocorrelação dos resíduos quadráticos dos retornos – Venezuela Tia Juana.

A fim de quantificar a heteroscedasticidade das séries, a Tabela 2 apresenta os testes estatísticos de hipóteses entre as séries com um lag = 1, pois as previsões de risco e retorno trabalham com o espaço de tempo  $t_{+1}$ . O teste de Ljung–Box–Pierce não rejeita a presença de autocorrelação da série de retornos. O teste ARCH de Engle sugere a existência de uma correlação condicional (heteroscedasticidade para os efeitos ARCH) para a série de resíduos. Além disso, o teste de Jarque–Bera mostra que as amostras têm uma distribuição não-normal, visto que seus valores p rejeitaram a hipótese nula de serem normalmente distribuídas.

Tabela 2: Estatística dos testes das séries de retorno dos ativos (lag = 1).

| Testes              | Dubai           | China           | Indonésia       | Venezuela       |
|---------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <b>Ljung–Box</b>    | <b>0,9715</b>   | <b>2,5222</b>   | <b>1,2111</b>   | <b>0,2740</b>   |
| Valor P             | 0.3243          | 0,1123          | 0,2711          | 0,6006          |
| <b>Engle’s ARCH</b> | <b>0,9792</b>   | <b>2,5194</b>   | <b>1,2087</b>   | <b>0,2728</b>   |
| Valor P             | 0,3224          | 0,1125          | 0,2716          | 0,6015          |
| <b>Jarque–Bera</b>  | <b>229,7825</b> | <b>302,1469</b> | <b>313,3920</b> | <b>117,9770</b> |
| Valor P             | 0,001           | 0,001           | 0,001           | 0,001           |

#### 6.1.1.2 Fazer uma previsão do retorno e risco um passo à frente

Utilizando o software Matlab<sup>®</sup>, foram gerados os parâmetros ARMA–GARCH para cada um dos ativos, obtendo-se uma previsão dos valores um passo a frente para  $\hat{\sigma}_t^2$  e  $\hat{y}_{i,t}$  apresentados na Tabela 3, que contém a constante mais os termos ARMA mais uma constante K e os termos que compõem o modelo GARCH.

Tabela 3: Parâmetros ARMA–GARCH dos ativos.

| Parâmetros | Dubai                  | China                  | Indonésia              | Venezuela              |
|------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| C          | 0,006165               | 0,004589               | 0,005042               | 0,005692               |
| AR(1)      | -0,462880              | -0,143180              | -0,150610              | -0,458030              |
| MA(1)      | 0,683240               | 0,434770               | 0,418500               | 0,645900               |
| K          | 5,5192e <sup>-05</sup> | 1,2999e <sup>-04</sup> | 1,4414e <sup>-04</sup> | 9,5695e <sup>-05</sup> |
| GARCH(1)   | 0,886030               | 0,812940               | 0,812030               | 0,902760               |
| ARCH(1)    | 0,078568               | 0,106320               | 0,102760               | 0,053396               |

Neste ponto, adotando um apropriado modelo ARMA–GARCH conforme o comportamento do mercado é possível prever valores para o retorno e a variância para cada um dos ativos, com um passo à frente, conforme apresentado na Tabela 4:

Tabela 4: Previsão um passo à frente usando modelos ARMA–GARCH.

| Parâmetros   | Dubai  | China  | Indonésia | Venezuela |
|--------------|--------|--------|-----------|-----------|
| $\sigma_t^2$ | 0,0360 | 0,0346 | 0,0365    | 0,0432    |
| $y_{i,t}$    | 0,0033 | 0,0094 | 0,0084    | 0,0167    |

Estes valores previstos serão fixos durante os cálculos seguintes.

### 6.1.2 Criação do DOE

Na busca do portfólio ótimo, é preciso preparar um arranjo de misturas onde cada fator ou componente da mistura equivale a um ativo e uma superfície de respostas para tratar as variáveis risco, retorno e entropia variando pesos e importâncias.

#### 6.1.2.1 Criar um DOE de misturas para Risco, Retorno e Entropia

O arranjo de misturas adotado foi o *Extreme Vertice*, conforme Anexo I.

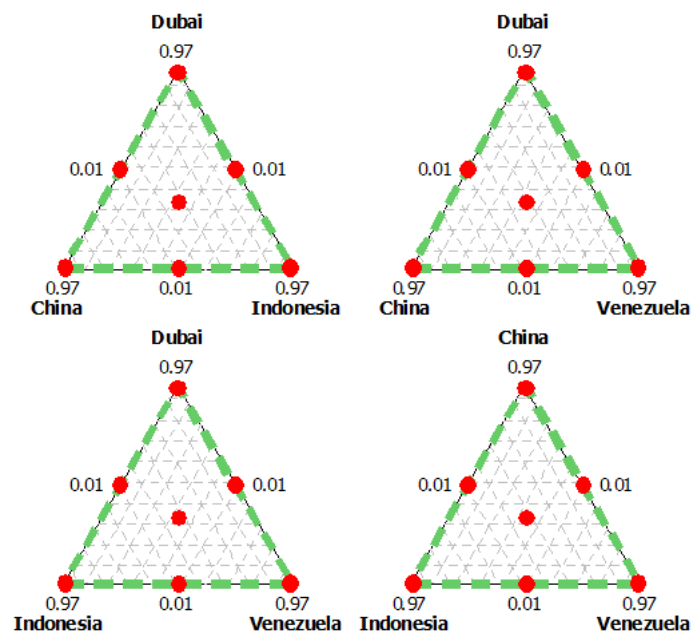


Figura 25: Arranjo de Misturas.

Na composição do arranjo, adotou-se 4 componentes, com grau 3 de arranjo, com aumento de 1 ponto central, 1 ponto axial e 1 réplica, exemplificado na Figura 25, com uma restrição de investimento de não menos que 1% em cada ativo no arranjo.

Para melhorar a diversificação do portfólio, foi adotada a entropia de Shannon, conforme Anexo II. Para seu cômputo, nenhum dos pesos dos componentes no arranjo de misturas pode ter valor igual à zero em qualquer uma das suas linhas e, dessa forma, restrições precisaram ser criadas para cada ativo para que um mínimo de participação pudesse ser incluído no arranjo de misturas. O percentual inferior para a composição do arranjo passou a ser de 1% e o superior a 96%. Esta necessidade de ter que haver uma restrição foi o principal motivo da escolha do arranjo de misturas *Extreme Vertice*.

Para o registro e cômputo de cada uma das respostas para tratamento pelo arranjo, foi necessária a criação de um sistema de matrizes usando os valores previstos de variância e retorno para simular o portfólio de acordo com cada participação do ativo testado para cada linha dada pelo arranjo. Foram gerados os valores para o risco, retorno e entropia para cada experimento.

#### 6.1.2.1.1 Calculando as respostas para o Retorno

A Tabela 5 mostra os valores da matriz de correlação condicional dos retornos entre os ativos. É possível verificar que há uma alta correlação entre todos os elementos.

Tabela 5: Matriz de Correlação Condicional.

|                  | <b>Dubai</b> | <b>China</b> | <b>Indonésia</b> | <b>Venezuela</b> |
|------------------|--------------|--------------|------------------|------------------|
| <b>Dubai</b>     | 1,0000       | 0,8269       | 0,8143           | 0,8012           |
| <b>China</b>     | 0,8269       | 1,0000       | 0,9775           | 0,7559           |
| <b>Indonésia</b> | 0,8143       | 0,9775       | 1,0000           | 0,7411           |
| <b>Venezuela</b> | 0,8012       | 0,7559       | 0,7411           | 1,0000           |

Calculada a matriz de correlação, foi possível simular os valores para a resposta Risco, conforme Anexo I. É possível verificar que há uma alta correlação entre as séries, o que significa que o movimento delas no mercado se dá de forma muito próxima.

A Figura 26 apresenta a superfície de resposta para o retorno dos ativos. Percebe-se que o retorno se acentua à medida que se aproxima do ativo Venezuela e cai à medida que se

aproxima do ativo Dubai. O comportamento linear do retorno se faz evidente, de acordo com Pham e Yang (2010).

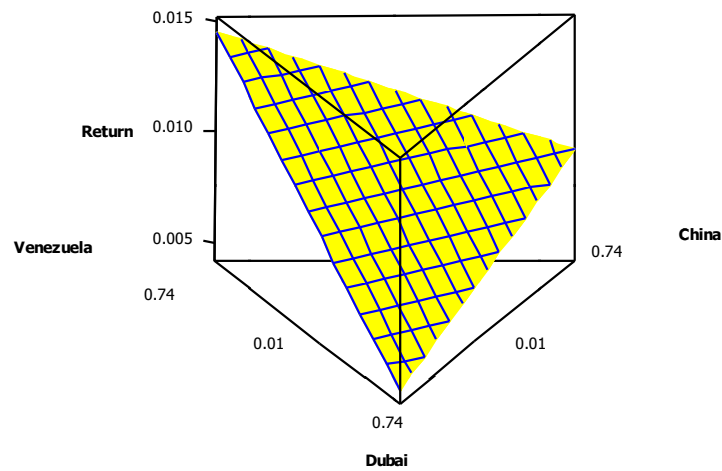


Figura 26: Superfície de resposta do Retorno dos ativos.

Complementarmente à análise da superfície de resposta da Figura 26, a Figura 27 traz o contorno do retorno dos ativos da carteira e mostra que os maiores valores da resposta retorno, que se confirma linear, podem ser encontrados na região mais escura do gráfico, mais próximos aos ativos da Venezuela e o pior retorno mais próximo da região de Dubai.

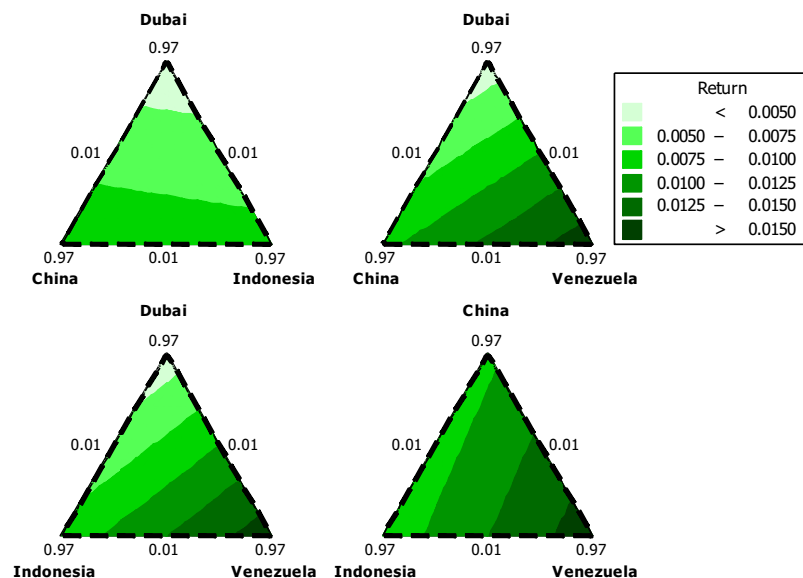


Figura 27: Gráfico de contorno do Retorno.

#### 6.1.2.1.2 Calculando as respostas para o Risco.

Tomando os valores previstos de variância um passo à frente e os seus desvios padrão correspondentes, foi elaborada uma matriz de covariância, conforme Anexo III. Ela é útil para se chegar aos valores da coluna “Risco”, do Anexo I.

A Figura 28 mostra a superfície de resposta para a resposta risco com seu comportamento não linear. Observa-se que quanto mais próximo do ativo Venezuela, maior o risco da carteira, enquanto que próximo a Dubai esse risco diminui. Tomando esta análise com a feita pelo retorno, percebe-se que quanto maior o retorno, maior o risco e vice e versa.

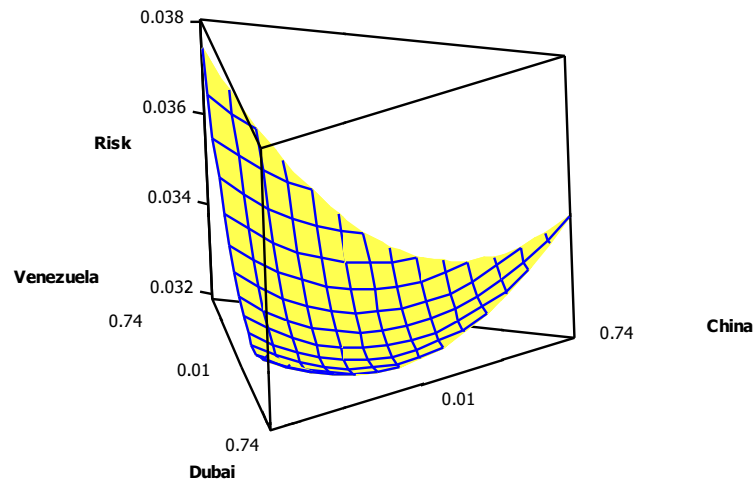


Figura 28: Superfície de resposta do Risco dos ativos.

Na Figura 29, na análise dos contornos gerados pelo arranjo de misturas para a variável risco, os valores mais baixos podem ser encontrados na região mais escura, em uma região quase que equidistante entre China e Dubai, enquanto os piores valores podem ser encontrados na região próxima à Venezuela.

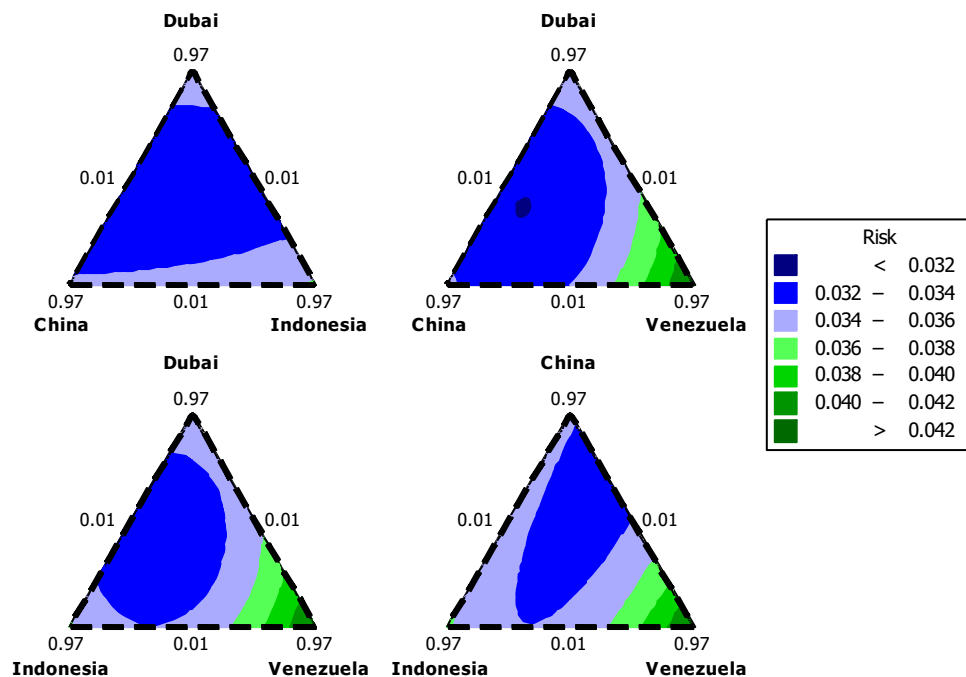


Figura 29: Gráfico de contorno do Risco.

6.1.2.1.3 Calculando as respostas para a Entropia

A Figura 30 mostra a superfície de resposta para a resposta Entropia. Ela confirma o seu objetivo que é buscar um portfólio mais diversificado. Percebe-se que sua função máxima se encontra exatamente no centro entre os ativos, mostrando que o portfólio se encontra bem diversificado.

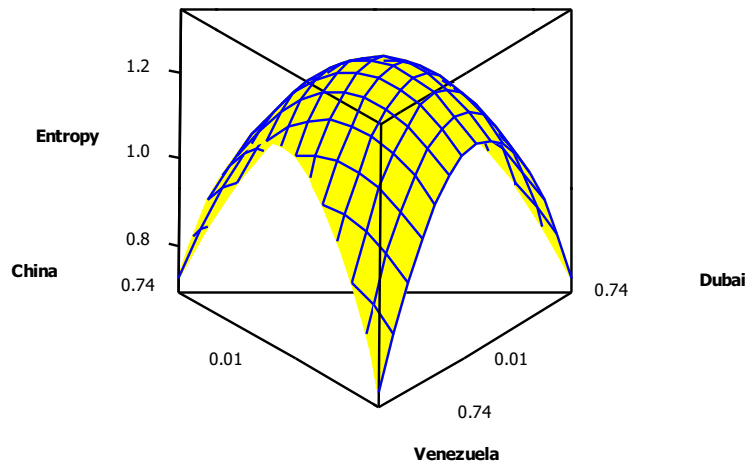


Figura 30: Superfície de resposta da Entropia.

A Figura 31 mostra os gráficos de contorno da resposta não-linear entropia.

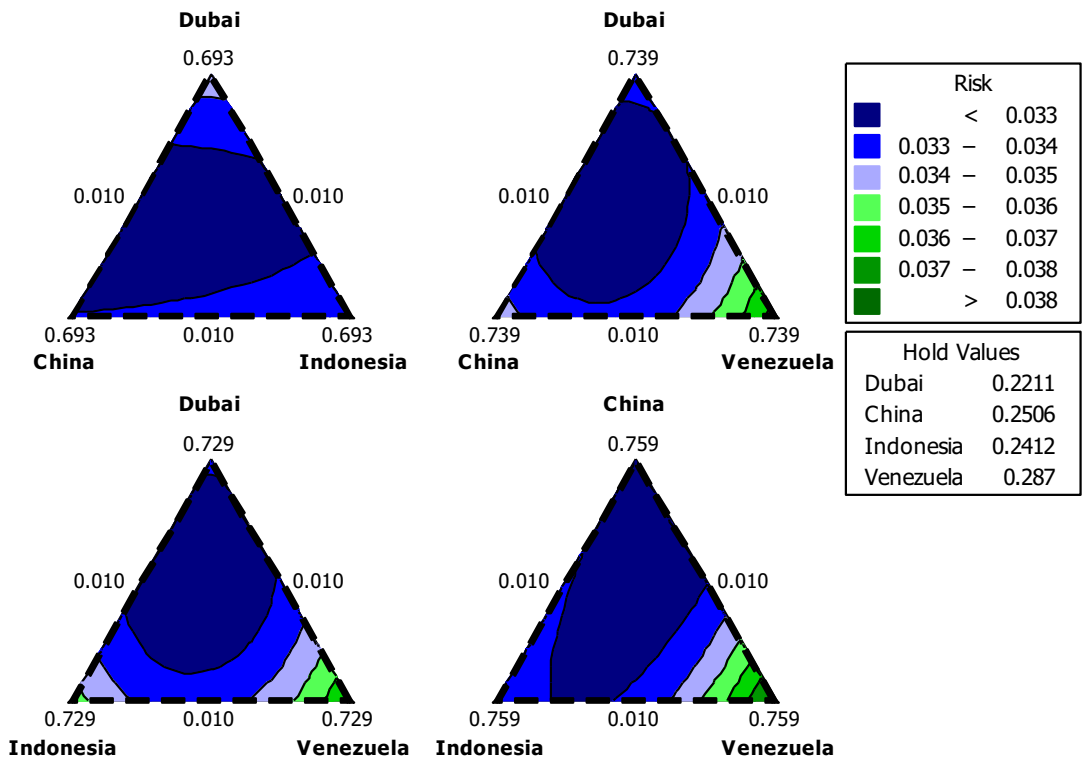


Figura 31: Contorno da Entropia.



### 6.1.2.2 Criar um DOE de superfície de resposta para pesos e importâncias

Qualquer valor aleatório poderia ser testado para simular diferentes pesos e importâncias na geração da função *Desirability* dentro do limite da função. A diferença entre essa escolha, feita por um leigo, e uma melhor fundamentada, feita por um especialista, ou até mesmo por um método livre de heurística, reside no tempo de chegada ao objetivo de otimização da resposta de interesse e pode, muitas vezes, influenciar também na qualidade dessa resposta.

Em busca de pesos ( $w_i$ ) e importâncias ( $\lambda_i$ ) ótimos para obter o máximo da função *Desirability*, esta tese propõe a utilização de uma abordagem sistemática baseada no emprego de um arranjo Box–Behnken para simular vários valores de  $w_i$  e  $\lambda_i$ , conforme Anexo IV. Foi criado um arranjo contendo 6 fatores, sendo eles peso e importância para cada resposta: risco, retorno e entropia e, contendo ainda 1 ponto central, 1 réplica e 1 bloco. Para o intervalo do arranjo, foram definidos valores de 0,1 e 10 que são os valores mínimos e máximos considerados no cômputo da função *Desirability*.

Com os pesos dados pelo Box-Behnken, executou-se a função *desirability* para cada uma das linhas do arranjo e os resultados encontram-se apresentados na coluna “Valor ótimo” do Anexo IV. Cada um desses valores ótimos e sua correspondente estrutura do arranjo, serão utilizados posteriormente pelo *desirability* final para se encontrar o valor ótimo de cada fator.

### 6.1.3 Otimização do MDE

Para dar início ao processo de otimização do portfólio, é preciso definir os parâmetros da otimização, a saber: limites superiores, limites inferiores e alvo. Em relação aos objetivos, foram definidos minimização do risco e maximização do retorno e da entropia.

#### 6.1.3.1 Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função *Desirability*

Foi adotada a média dos valores das respostas do arranjo para os limites inferiores ( $L_i$ ), quando o objetivo for a maximização, e máximos ( $H_i$ ), quando o objetivo for a minimização. Este valor da média foi escolhido após a realização de experimentos utilizando 1º. e 3º. quartis da amostra. Ambos mostraram conter margens muito largas ou muito estreitas entre os limites ou alvo escolhidos, fazendo com que os resultados do *desirability* ficassem muito

baixos. Após se adotar o valor médio da amostra, houve uma melhora significativa nos resultados tratados pela função *desirability*, configurando, assim, uma boa estratégia de espaço amostral para se encontrar os valores ideais à função.

Analisando estatisticamente cada um dos modelos gerados com base no arranjo de misturas do Anexo I e buscando um maior  $R^2$  adj., buscou-se encontrar o modelo adequado para o portfólio de risco, retorno e entropia, conforme Tabela 6. O  $R^2$  adj. de 100% foi obtido devido não se ter adotado réplicas para o experimento.

Tabela 6: Coeficientes dos modelos de Risco, Retorno e Entropia.

| <b>Termo</b>        | <b>Risco</b> | <b>Retorno</b> | <b>Entropia</b> |
|---------------------|--------------|----------------|-----------------|
| Dubai               | 0,0360       | 0,0033         | 0,07919         |
| China               | 0,0346       | 0,0094         | 0,07919         |
| Indonésia           | 0,0365       | 0,0084         | 0,07919         |
| Venezuela           | 0,0432       | 0,0167         | 0,07919         |
| Dubai*China         | -0,01215     | 0,0000         | 3,28484         |
| Dubai*Indonésia     | -0,01338     | 0,0000         | 3,28484         |
| Dubai*Venezuela     | -0,01588     | 0,0000         | 3,28484         |
| China*Indonésia     | -0,00161     | 0,0000         | 3,28484         |
| China*Venezuela     | -0,01926     | 0,0000         | 3,28484         |
| Indonésia*Venezuela | -0,02076     | 0,0000         | 3,28484         |
| $R^2$ adj.          | 100%         | 100%           | 97,49%          |

Utilizando-se o algoritmo dos mínimos quadrados ordinários (OLS), como estratégia de otimização individual para se achar o valor alvo  $T_i$ , chegou-se às funções objetivo para cada uma das respostas:

$$\begin{aligned}
 \{f_1(\sigma_i^2)\}_{portfolio} &= 0,036p_1 + 0,0346p_2 + 0,0365p_3 + 0,0432p_4 - 0,01215p_1p_2 \\
 &\quad - 0,01338p_1p_3 - 0,01518p_1p_4 - 0,00161p_2p_3 - 0,01926p_2p_4 \\
 &\quad - 0,02076p_3p_4
 \end{aligned} \tag{85}$$

$$\begin{aligned}
 \{f_2[E(x)]\}_{portfolio} &= 0,0033p_1 + 0,0094p_2 + 0,0084p_3 + 0,0167p_4
 \end{aligned} \tag{86}$$

$$\begin{aligned}
\{f_3[S(x)]\}_{portfolio} &= 0,07919p_1 + 0,07919p_2 + 0,07919p_3 + 0,07919p_4 \\
&+ 3,28484p_1p_2 + 3,28484p_1p_3 + 3,28484p_1p_4 + 3,28484p_2p_3 \\
&+ 3,28484p_2p_4 + 3,28484p_3p_4
\end{aligned} \tag{87}$$

As funções objetivo (85) a (87) foram obtidas utilizando-se o algoritmo GRG, através da função Solver do Excel<sup>®</sup>. Os valores alvo ( $T_i$ ) para as três respostas, risco, retorno e entropia, em conjunto com os valores limites  $H_i$  e  $L_i$ , são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7: Parâmetros da Função *Desirability* para o MDE

| Parâmetros                       | Risco     | Retorno   | Entropia  | Estratégia |
|----------------------------------|-----------|-----------|-----------|------------|
| Objetivo                         | Minimizar | Maximizar | Maximizar |            |
| Valor Alvo ( <i>target</i> )     | 0,03198   | 0,01634   | 1,31100   | GRG        |
| Limite Superior ( <i>upper</i> ) | 0,03544   |           |           | Média      |
| Limite Inferior ( <i>lower</i> ) |           | 0,00945   | 0,58554   | Média      |

### 6.1.3.2 Calcular o *Desirability* para a RSM

Nesta primeira execução do método, simulando uma situação de ausência de um especialista para ajudar na tomada de decisão na escolha dos adequados coeficientes de peso ( $w_i$ ) e importância ( $\lambda$ ), foi definido o valor 1 para as resposta testadas.

Tabela 8: Função *Desirability*, antes da aplicação do método.

| Limites                    |           |          |         | Previsão |      |      |          |                     |
|----------------------------|-----------|----------|---------|----------|------|------|----------|---------------------|
| Parâmetros                 | Objetivo  | Inferior | Alvo    | Superior | Peso | Imp. | Resposta | <i>Desirability</i> |
| Risco                      | Minimizar |          | 0.03198 | 0.03544  | 1    | 1    | 0.03328  | 0.62484             |
| Retorno                    | Maximizar | 0.00945  | 0.01634 |          | 1    | 1    | 0.01169  | 0.32582             |
| Entropia                   | Maximizar | 0.58554  | 1.31100 |          | 1    | 1    | 1.20194  | 0.84967             |
| <i>Desirability</i> Geral: |           |          |         |          |      |      |          | 0.55719             |

Definidos todos os parâmetros, foi possível a execução da rotina de otimização não linear com base na *Desirability* geral ( $D$ ) para obter a solução viável. Com base nos

parâmetros previamente definidos e sem o apoio de um especialista, a solução viável obtida foi um *Desirability* geral de 55,72%, conforme detalhamento da Tabela 8.

Na sequência, rodou-se um *desirability* para cada linha dada pelo arranjo de Box–Behnken. Assim, para as 54 linhas do arranjo Box–Behnken foi gerada uma *Desirability*, formando uma nova distribuição de valores, dados na Anexo IV - Analisando a superfície de resposta da Figura 32, com todos os pesos e importâncias com valor igual a 1, obtém-se um valor inicial da função *Desirability*:

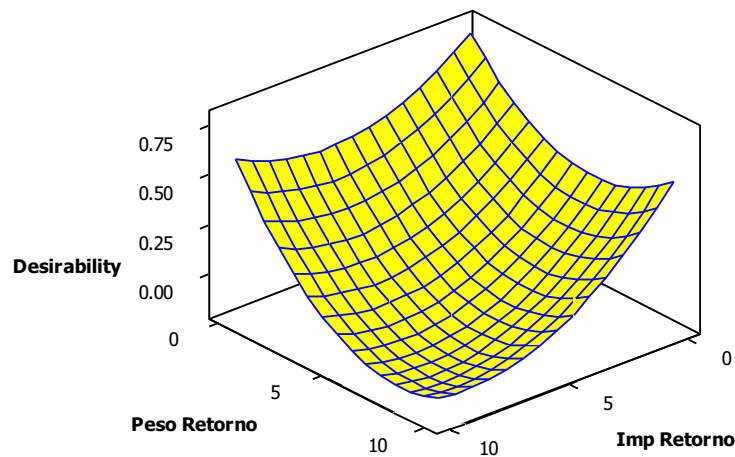


Figura 32: Superfície de resposta para pesos e importâncias = 1.

Também nos contornos da Figura 33 é possível verificar estes primeiros resultados que simulam a ausência de um especialista ou de um método adequado para a tomada de decisão.

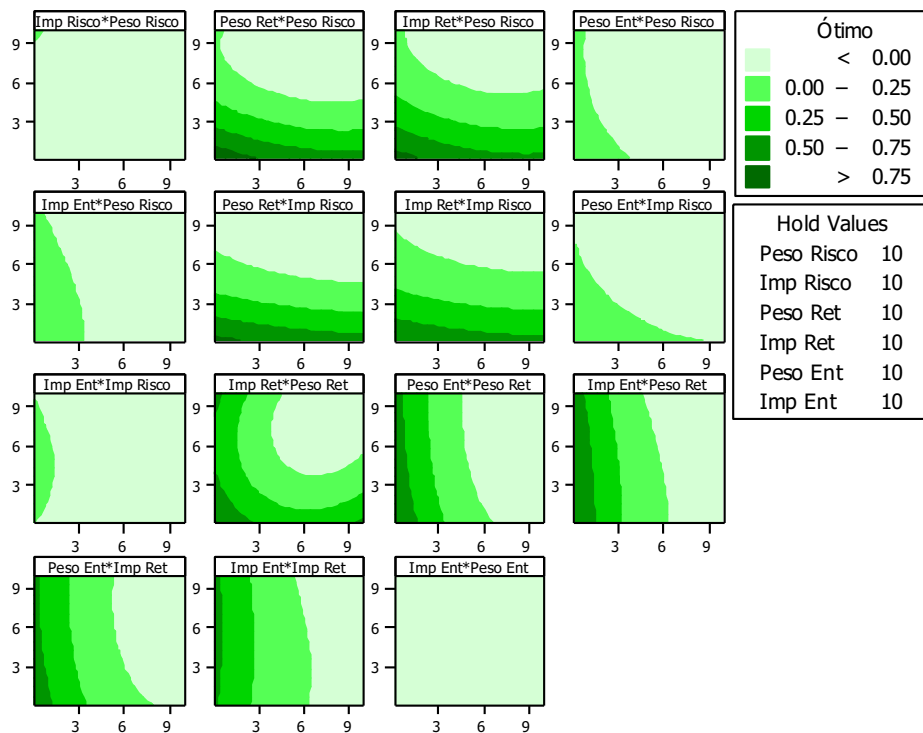


Figura 33: Contorno do *Desirability* com peso e importância = 1.

Na superfície de resposta da Figura 34, onde todos os pesos e importâncias assumem o valor de 5,05, porém, podem ser considerados baixos ou abaixo do que poderia atingir se devidamente tratados os pesos e importâncias.

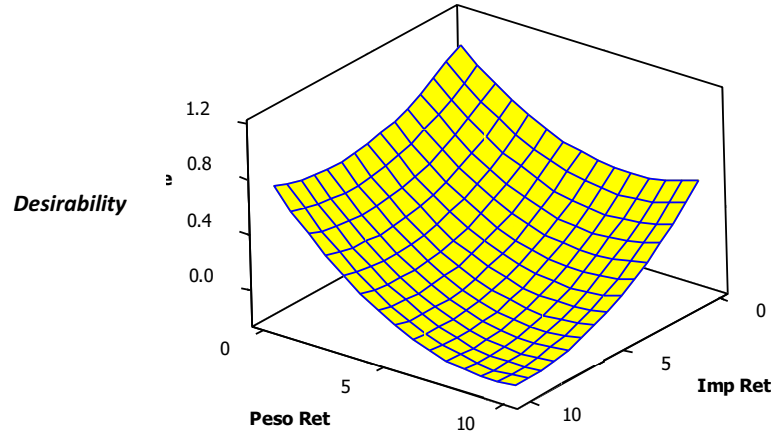


Figura 34: Superfície de resposta para pesos e importâncias = 5,05.

Nos contornos da Figura 35, igualmente, mostra-se os resultados na ausência de um especialista ou de um método adequado para tomada de decisão. É possível visualizar diversas áreas com valores da função *desirability* próximos ou até mesmo abaixo de 0.

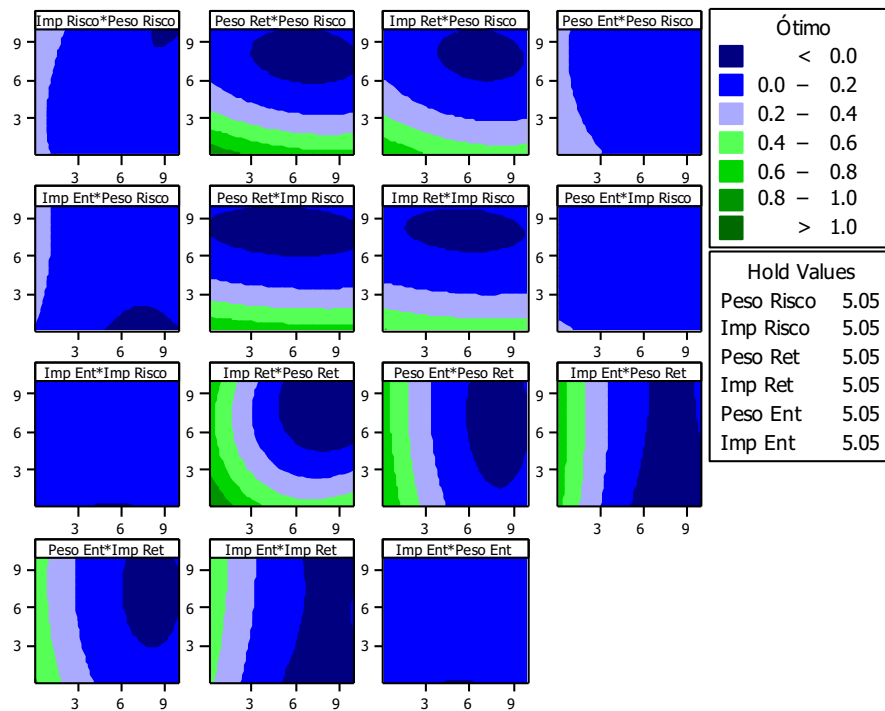


Figura 35: Contorno do *Desirability* com peso e importância = 5,05.

#### 6.1.4 Otimização da RSM

Em continuidade ao processo de otimização do portfólio, é preciso definir os parâmetros da otimização, a saber: limites superiores, limites inferiores e alvo da RSM. Em

relação aos objetivos, foram definidos minimização do risco e maximização do retorno e da entropia.

#### 6.1.4.1 Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função *Desirability*

Para maximizar o *Desirability* e encontrar as combinações ideais dos fatores pesos e importância, adotou-se a média das respostas do arranjo Box–Behnken (Anexo IV - ) como seu limite mínimo e buscou-se o melhor modelo para o *Desirability* (Anexo VI).

Para os valores de peso e importância, foi adotado o valor 1 e utilizando o algoritmo GRG, foi definido o valor alvo (Tabela 9).

Tabela 9: Parâmetros da Função *Desirability* – RSM

| Parâmetros                       | <i>Desirability</i> |
|----------------------------------|---------------------|
| Objetivo                         | Maximizar           |
| Valor Alvo ( <i>target</i> )     | 0,91802             |
| Limite Inferior ( <i>lower</i> ) | 0,33893             |

#### 6.1.4.2 Obter os pesos e importâncias ótimos

Definidos todos os parâmetros, foi possível a execução da rotina de otimização não linear com base na *Desirability* geral ( $D$ ) para obter a solução viável no arranjo Box–Behnken, apresentada na Figura 36.

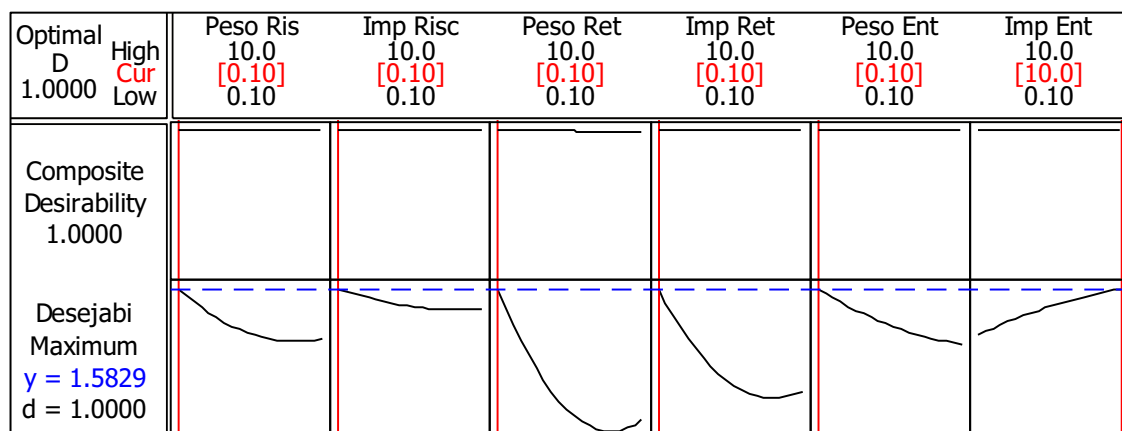


Figura 36: Função *desirability* em Box–Behnken.

Com uma função *desirability* igual a 1, ou seja, com 100% de ótimo, definiu-se o valor de 0,10 para todos os pesos e importâncias, exceto para a importância da entropia que deverá

ser de 10. Estes deverão ser os parâmetros para o *desirability* final junto à MSR, ou seja, para a otimização do portfólio.

### 6.1.5 Definir o portfólio ótimo

No arranjo de misturas, foi executada uma última rotina de otimização, obtendo-se os resultados mostrados na Figura 37. O resultado é o portfólio ótimo com um *desirability* de 99,67%.

Para atender o objetivo desta tese, a Tabela 10 traz uma comparação entre os resultados anteriores, obtidos sem o apoio de um especialista, e após o emprego do método, ampliando em 78,87% os resultados do portfólio.

Tabela 10: Portfólio ótimo.

| Portfólio | Composição |        |        |        | Risco  | Retorno | Entropia | <i>Desirability</i> | Melhoria      |
|-----------|------------|--------|--------|--------|--------|---------|----------|---------------------|---------------|
|           | Dubai      | China  | Indon. | Venez. |        |         |          |                     |               |
| Antes     | 0.0771     | 0.3397 | 0.1798 | 0.4034 | 0.0333 | 0.0117  | 1.2019   | 0.55719             |               |
| Depois    | 0.2211     | 0.2506 | 0.2412 | 0.2870 | 0.0325 | 0.0099  | 1.3073   | 0.99667             | <b>78.87%</b> |

A distribuição percentual anterior dos ativos foi alterada de tal forma que o portfólio ficou mais diversificado com cada ativo participando em torno de 25%, o que pode ser visto também nos resultados da coluna entropia.

O risco, ao mesmo tempo, caiu levemente, juntamente com o retorno, que teve uma queda maior. Entretanto, considerando as restrições do problema e o objetivo conjunto de minimizar o risco e maximizar o retorno e a entropia, a função *desirability* cresceu significativamente, sinalizando um portfólio melhor constituído.

Outra contribuição da entropia se dá em relação à sua contribuição com a redução do risco de liquidez do portfólio. Considerando o risco de liquidez =  $(1/entropia)$  verifica-se uma redução de 7,6% entre o antes e o depois do método. Assim, o risco de liquidez que antes do método estava em 82,79% passou para 76,49% após sua aplicação.

A principal vantagem da aplicação do método é vista na Tabela 11 é a sua diversificação, após o *desirability* encontrar os melhores percentuais de investimento nos ativos. Ao se evitar a concentração de investimentos em um ou outro ativo e distribuir essas aplicações, mantendo-se margens interessantes de retorno e risco, a função de entropia cumpre um importante papel neste portfólio.

A Figura 37 traz a representação gráfica da função *Desirability* e mostra o retorno linear do portfólio ótimo, com os melhores resultados próximo ao ativo Venezuela e os piores próximos a Dubai. Em relação ao risco, os maiores se encontram próximos à Venezuela e os menores próximos à China.

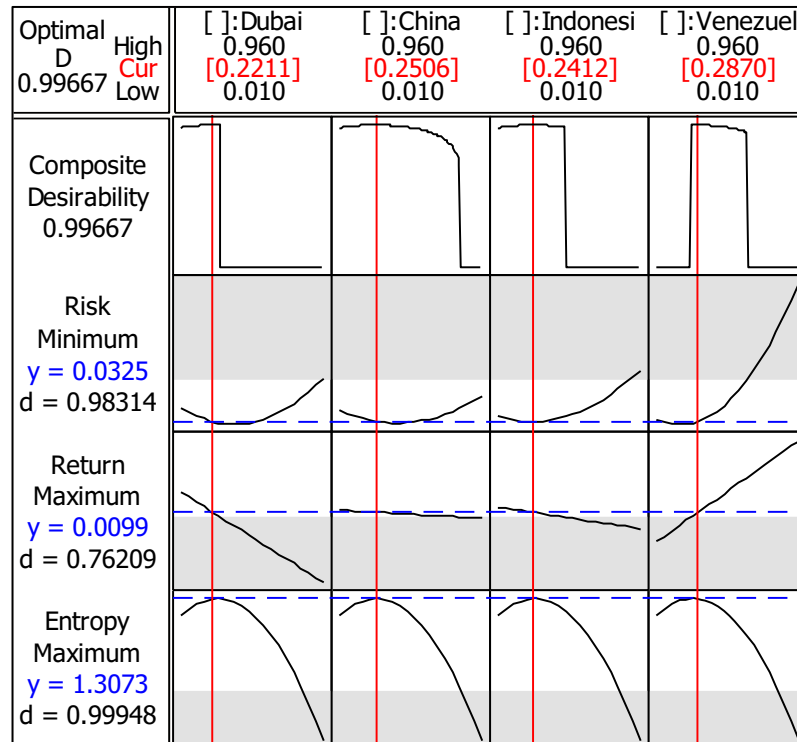


Figura 37: Portfólio ótimo.

A Figura 38 apresenta a superfície linear de resposta do retorno no portfólio ótimo, evidenciando maiores retornos no ativo Venezuela.

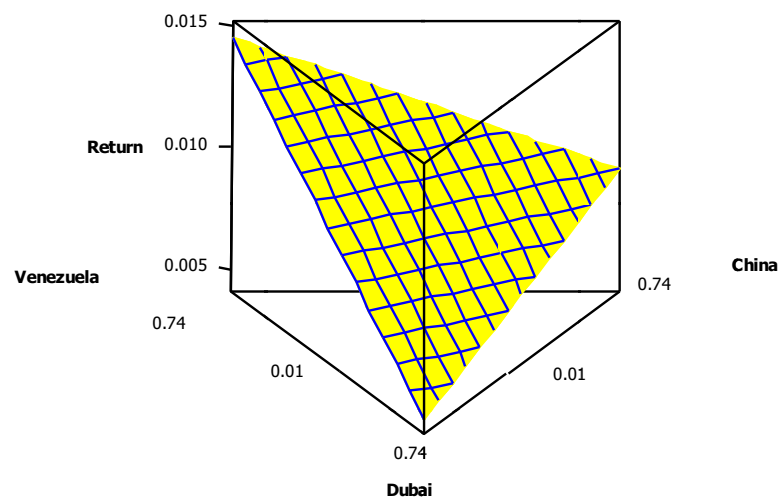


Figura 38: Superfície de resposta do Retorno ótimo.



A Figura 39 mostra o contorno também do retorno no portfólio ótimo. Na região mais escura, a Venezuela, com seu retorno maior e, na mais clara, Dubai com seu retorno menor que os outros ativos.

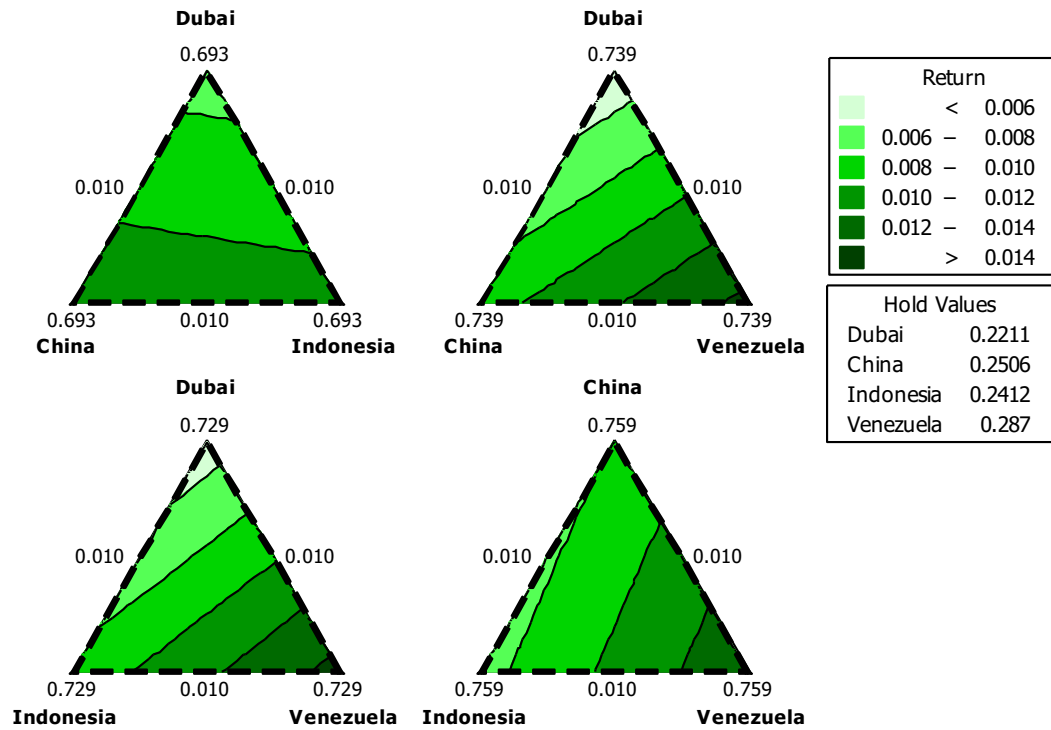


Figura 39: Contorno do Retorno no portfólio ótimo.

A Figura 40 apresenta a superfície de resposta do risco não-linear ótimo, com os menores riscos próximos ao ativo Dubai e os maiores perto da Venezuela.

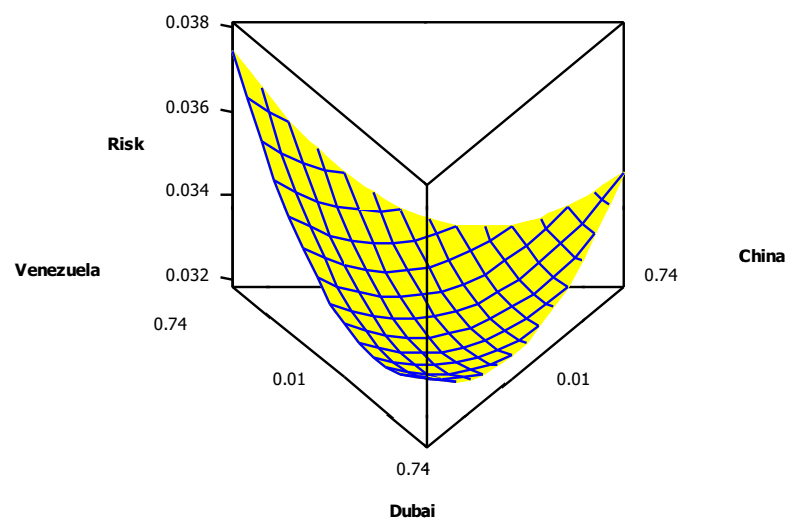


Figura 40: Superfície de resposta do risco ótimo.

A Figura 41 apresenta o risco não-linear do portfólio ótimo, com os menores riscos próximos ao ativo China e os maiores perto da Venezuela.

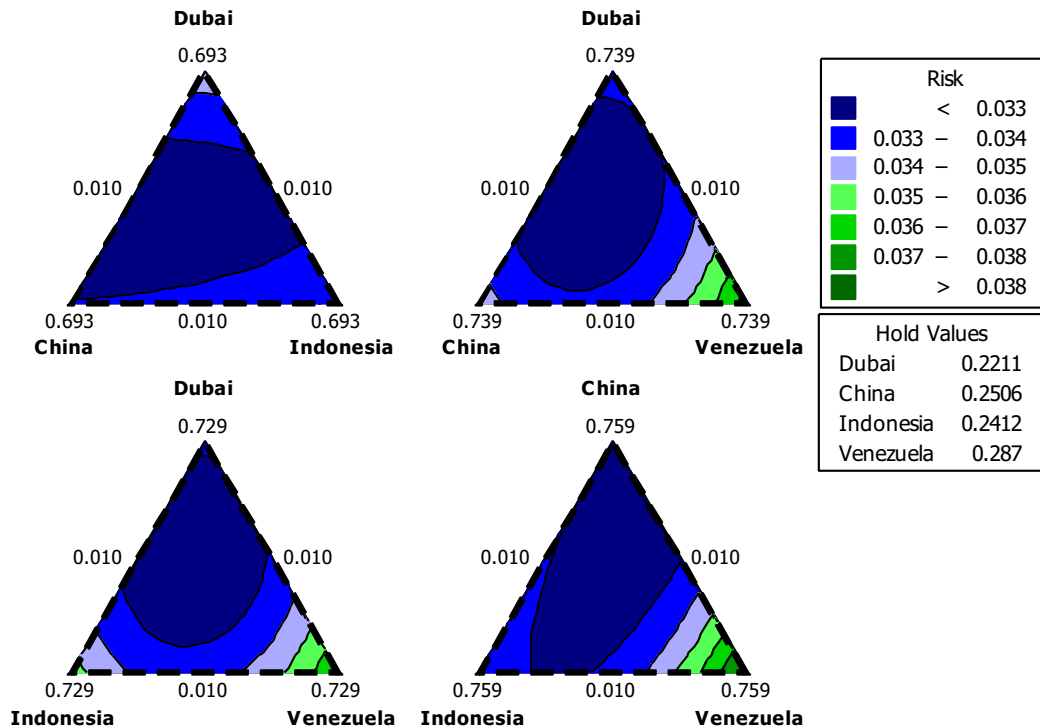


Figura 41: Contorno do Risco no portfólio ótimo.

## 6.2 Aplicação do Método, sem Entropia

Como o estudo foi desenvolvido sobre as mesmas séries, passa-se diretamente para a fase de criação do DOE de superfície de resposta, visto que, todos os passos anteriores são iguais aos já feitos. Como a matriz do DOE de misturas com as respostas Risco e Retorno será a mesma, diversos elementos também serão aproveitados nas fases de otimização seguintes.

### 6.2.1 Criação do DOE

#### 6.2.1.1 Criar um DOE de superfície de resposta para pesos e importâncias

O Anexo V apresenta um arranjo Box-Behnken criado para simular vários valores de pesos ( $w_i$ ) e importâncias ( $\lambda_i$ ) ótimos para obter o máximo da função *Desirability*. Conta em sua estrutura com quatro fatores: peso e importância para as respostas risco e retorno. Os demais fatores mantiveram-se inalterados em relação à MSR do item 6.1.2.2.

## 6.2.2 Otimização do MDE

Os objetivos para a otimização foram mantidos em minimização do risco e maximização do retorno.

### 6.2.2.1 Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função *Desirability*

Para o *desirability*, foram mantidos o alvo e também os limites mínimos e máximos do item 5.1.3.1. Os valores obtidos com a otimização são demonstrados na Anexo V - . O modelo para se gerar o portfólio de risco também foi preservado, com a exclusão da coluna Entropia, e utilizadas as mesmas funções objetivo para risco e retorno.

### 6.2.2.2 Calcular o *Desirability* para a RSM

Simulando-se a ausência de um especialista na tomada de decisão de escolha dos coeficientes de peso ( $w_i$ ) e importância ( $\lambda$ ), utilizou-se o valor 1 para as resposta testadas. Com isso, foi possível a execução da rotina de otimização não linear com base na *Desirability* geral ( $D$ ) para obter a solução viável. Os valores dos limites superior  $H_i$  e inferior  $L_i$  foram mantidos conforme aplicação anterior do método, haja vista que as respostas são as mesmas.

Definidos os parâmetros, foi possível a execução da rotina de otimização com base no *desirability* geral ( $D$ ) para se obter a solução viável. A solução obtida foi um *desirability* geral de 49,23%, conforme Tabela 11.

Tabela 11: Função *Desirability*, antes da aplicação do método.

|                            |           | Limites  |         |          | Previsão |      |          |                     |
|----------------------------|-----------|----------|---------|----------|----------|------|----------|---------------------|
| Parâmetros                 | Objetivo  | Inferior | Alvo    | Superior | Peso     | Imp. | Resposta | <i>Desirability</i> |
| Risco                      | Minimizar |          | 0.03198 | 0.03544  | 1        | 1    | 0.0334   | 0.58245             |
| Retorno                    | Maximizar | 0.00945  | 0.01634 |          | 1        | 1    | 0.0123   | 0.41609             |
| <i>Desirability</i> Geral: |           |          |         |          |          |      |          | 0.49229             |

Definiu-se, utilizando o valor da média, os limites inferiores e superiores para as duas respostas risco e retorno. Utilizando-se o algoritmo GRG, foram adotados os valores alvo para as respostas.

A Figura 42 também demonstra a composição do portfólio ótimo antes da aplicação do método. Evidencia-se a centralização do investimento nos ativos China e Venezuela.

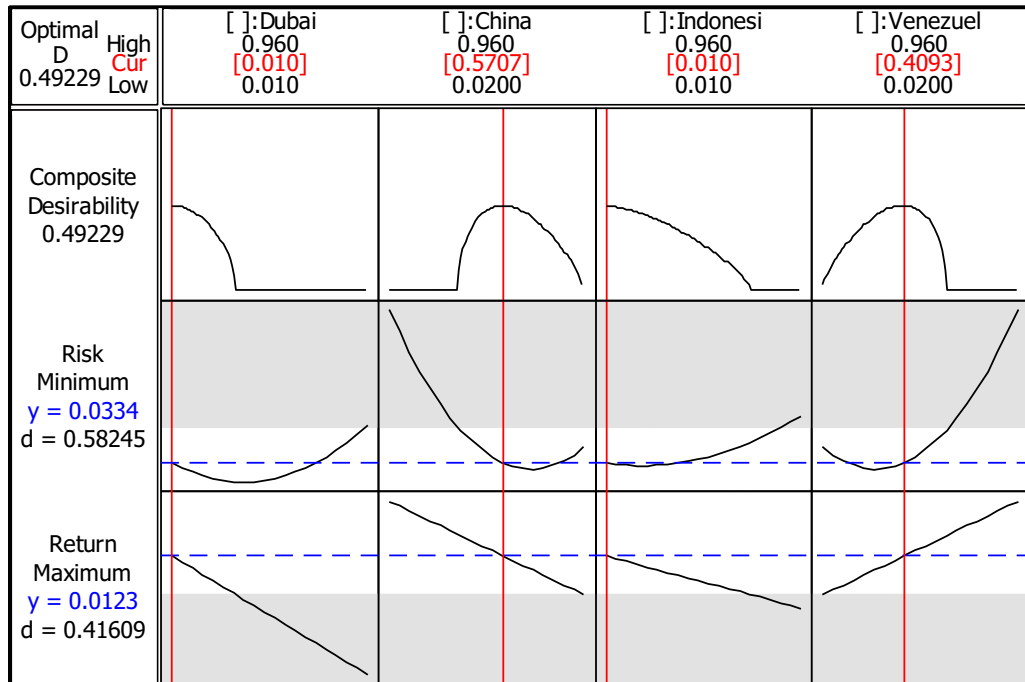


Figura 42: Portfólio antes do método.

Na sequência, rodou-se um *desirability* para cada linha dada pelo arranjo de Box–Behnken. Assim, para as 27 linhas deste arranjo foram computadas as respostas ótimas e registradas, formando uma nova distribuição de valores, dados no Anexo V.

### 6.2.3 Otimização da RSM

Os objetivos para a otimização da RSM foram mantidos em minimização do risco e maximização do retorno.

#### 6.2.3.1 Definir $H_i$ , $L_i$ e $T_i$ da função *Desirability*

Para maximizar o *Desirability* e encontrar as combinações dos fatores com pesos e importâncias ideais, com a média das respostas obtidas no arranjo como seu limite mínimo, e com base no DOE de Box–Behnken do Anexo V - buscou-se o melhor modelo para o *Desirability* da RSM com  $R^2 \text{ adj.} = 86,65\%$ .

A Tabela 12 apresenta o valor alvo =1, definido pelo algoritmo GRG. Para os valores de peso e importância, foi adotado o valor 1 e, para o limite inferior  $L_i$ , utilizou-se a média das respostas.

Tabela 12: Parâmetros da Função *Desirability* – RSM

| Parâmetros                       | <i>Desirability</i> |
|----------------------------------|---------------------|
| Objetivo                         | Maximizar           |
| Valor Alvo ( <i>target</i> )     | 1,00000             |
| Limite Inferior ( <i>lower</i> ) | 0,30294             |

### 6.2.3.2 Obter os pesos e importâncias ótimos

Definidos todos os parâmetros, foi possível a execução da rotina de otimização não linear com base na *Desirability* geral ( $D$ ) para obter a solução viável no arranjo Box–Behnken, apresentada na Figura 43.

Com uma função *desirability* igual a 1, ou seja, com 100% de ótimo, definiu-se o valor de 0,10 para os pesos do risco e retorno e importância do retorno, exceto para a importância do risco que deverá ser de 10. Estes deverão ser os parâmetros para o *desirability* final junto à MSR, ou seja, para a otimização do portfólio.

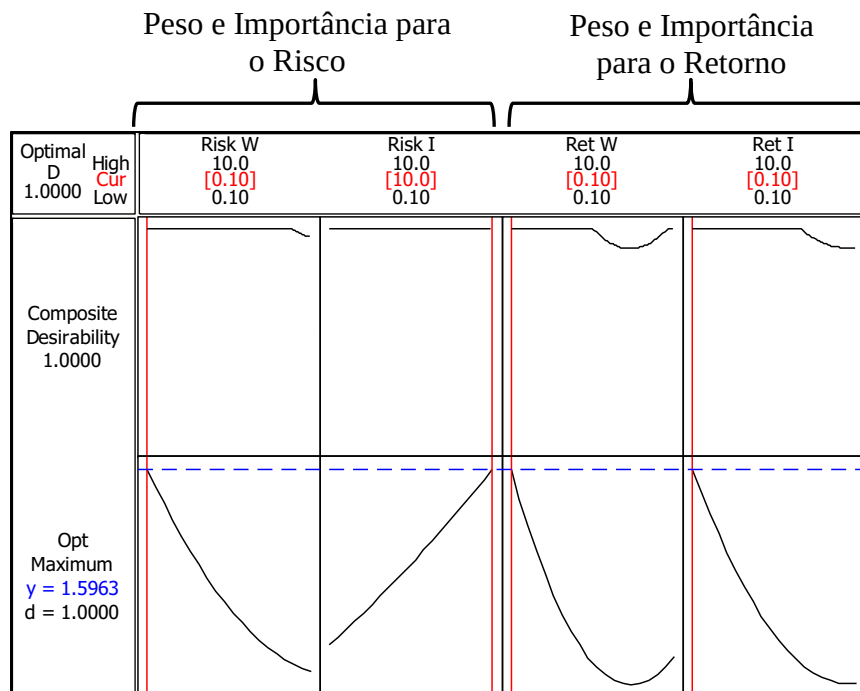


Figura 43: Função *desirability* em Box–Behnken.

### 6.2.4 Definir o portfólio ótimo

No arranjo de misturas, foi executada uma última rotina de otimização com os valores ótimos de peso e importância, obtidos no item 6.2.3.2, obtendo-se os resultados mostrados na Figura 44. O resultado é o portfólio ótimo com um *desirability* de 99,14%. Sem o fator Entropia buscando uma diversificação do portfólio, observa-se uma distribuição entre os ativos, respeitando um mínimo de 0,10% e um máximo de 0,96%, diferente da aplicação anterior.

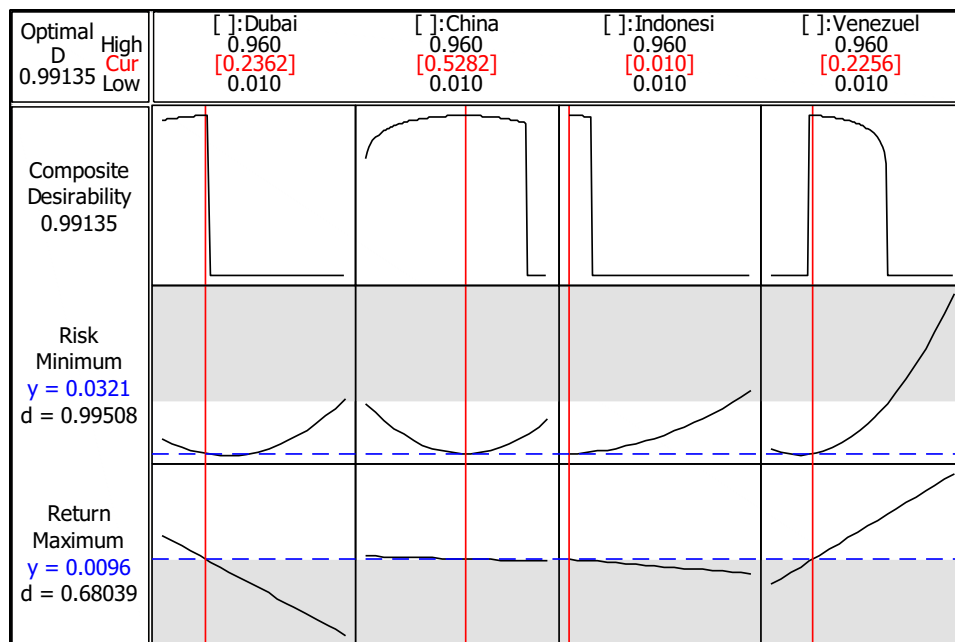


Figura 44: Portfólio ótimo.

A comparação apresentada na Tabela 13 entre os resultados no início desta aplicação do método, simulando a ausência de um especialista, e após o seu emprego, mostra um incremento de 101,38% nos resultados do portfólio.

Tabela 13: Portfólio ótimo.

| Composição |        |        |        |        |        |         |              |                |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|--------------|----------------|
| Portfólio  | Dubai  | China  | Indon. | Venez. | Risco  | Retorno | Desirability | Melhoria       |
| Antes      | 0.0100 | 0.5707 | 0.0100 | 0.4093 | 0.0334 | 0.0123  | 0.49229      |                |
| Depois     | 0.2362 | 0.5282 | 0.0100 | 0.2256 | 0.0321 | 0.0096  | 0.99135      | <b>101,38%</b> |

A modificação na distribuição percentual dos ativos, mesmo sem a Entropia, mostra que o portfólio ficou mais diversificado. O risco caiu levemente, juntamente com o retorno, que teve uma queda maior. Entretanto, considerando as restrições do problema e o objetivo

conjunto de minimizar o risco e maximizar o retorno e a entropia, a função *desirability* cresceu significativamente, sinalizando um portfólio melhor constituído.

A Figura 45 apresenta a fronteira eficiente de Pareto para o portfólio em estudo e mostra os limites de retorno para cada diferente nível de risco.

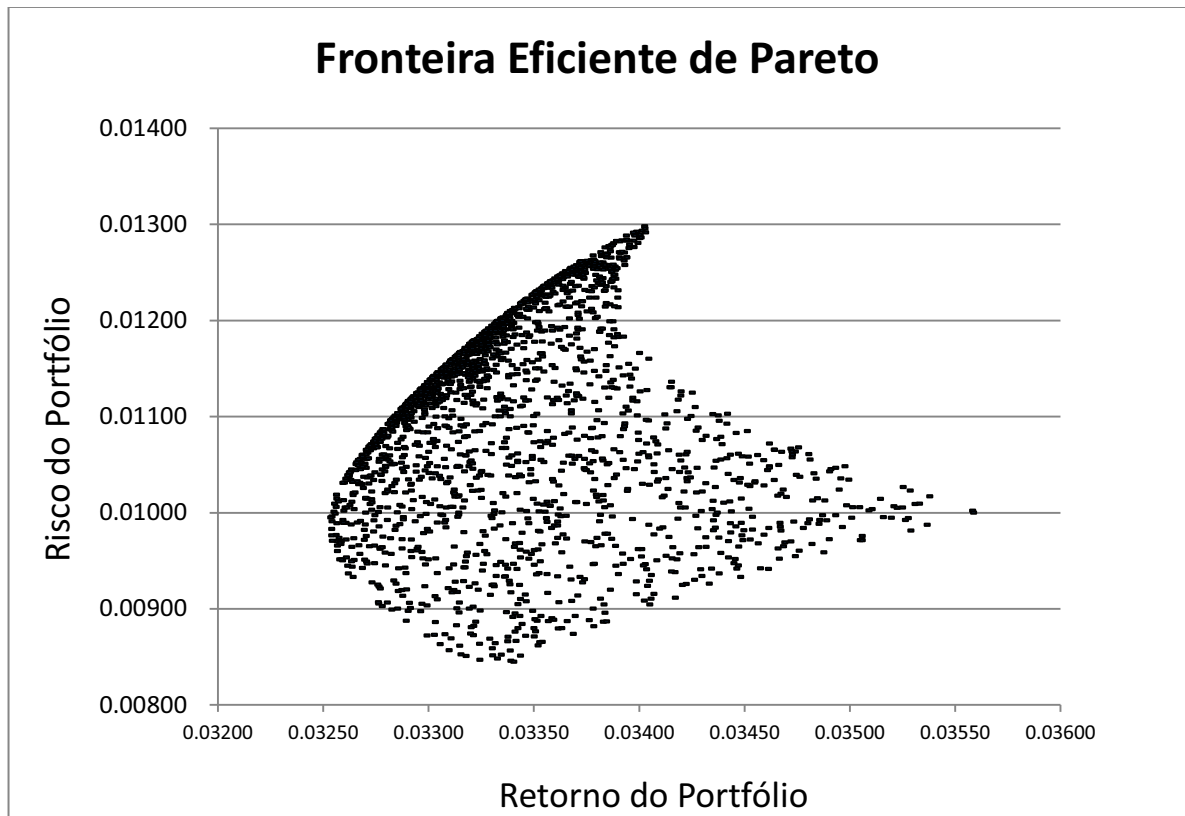


Figura 45: Fronteira Eficiente de Pareto do Portfólio

## 7. COMPARATIVO ENTRE AS APLICAÇÕES

A Tabela 15 representa a união de parte das Tabela 10 e Tabela 13 e apresenta um comparativo entre os resultados antes da aplicação do método fatorial de ajuste da função *desirability* com e sem a função entropia.

Tabela 14: Comparativo entre as aplicações antes do método.

| Portfólio     | Composição    |              |               |             | Risco       | Retorno     | Entropia | <i>Desirability</i> |
|---------------|---------------|--------------|---------------|-------------|-------------|-------------|----------|---------------------|
|               | Dubai         | China        | Indon.        | Venez.      |             |             |          |                     |
| Com Ent       | 0.0771        | 0.3397       | 0.1798        | 0.4034      | 0.0333      | 0.0117      | 1.2019   | 0.55719             |
| Sem Ent       | 0.0100        | 0.5707       | 0.0100        | 0.4093      | 0.0334      | 0.0123      |          | 0.49229             |
| <b>Var. %</b> | <b>-87.03</b> | <b>68.00</b> | <b>-94.44</b> | <b>1.46</b> | <b>0.30</b> | <b>5.13</b> |          | <b>-11.65</b>       |

Primeiramente, na Tabela 14, analisando o portfólio antes da implementação do método, é possível verificar que a função entropia, utilizada para se buscar uma diversificação do portfólio, apresentou sucesso parcial. Verifica-se uma concentração no ativo Venezuela, com 40,34%, Dubai com apenas 7,71%, China com 33,97% e Indonésia com 17,98% de participação. O risco ficou em 3,33% e o retorno de 1,17%. Seu baixo desempenho é refletido na sua função *desirability* que atingiu 49,23%.

Retirando-se a função entropia, verifica-se uma concentração bem maior em dois ativos: 57,07% na China, com crescimento de 68%, e 40,93% na Venezuela, deixando os outros dois ativos, Dubai e Indonésia, com o mínimo de 0,01% cada e com uma queda em suas participações de 87,03% e 94,44%, respectivamente. O risco ficou praticamente no mesmo nível, em 3,34% e o retorno em 1,23%. Já a função *desirability* diminuiu 11,65%, passando de 55,72% para 49,23%.

A Tabela 15, por sua vez, apresenta um comparativo entre as aplicações depois do método.

Tabela 15: Comparativo entre as aplicações depois do método.

| Portfólio     | Composição  |               |               |               | Risco        | Retorno      | Entropia | <i>Desirability</i> | Melhoria       |
|---------------|-------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|----------|---------------------|----------------|
|               | Dubai       | China         | Indon.        | Venez.        |              |              |          |                     |                |
| Com Ent       | 0.2211      | 0.2506        | 0.2412        | 0.2870        | 0.0325       | 0.0099       | 1.3073   | 0.99667             | <b>78.87%</b>  |
| Sem Ent       | 0.2362      | 0.5282        | 0.0100        | 0.2256        | 0.0321       | 0.0096       |          | 0.99135             | <b>101,38%</b> |
| <b>Var. %</b> | <b>6.83</b> | <b>110.77</b> | <b>-95.85</b> | <b>-21.39</b> | <b>-1.23</b> | <b>-3.03</b> |          | <b>-0.53</b>        |                |



Na análise do portfólio após a implementação do método e sem a função entropia, comparando-se a Tabela 14 com a Tabela 15, vê-se que houve uma diversificação um pouco melhor. O ativo Dubai teve um crescimento de 1% para 23,62%; o ativo China decresceu de 57,07% para 52,82%; o ativo Indonésia manteve-se igual em 1%, enquanto que o ativo Venezuela decresceu sua participação de 40,93% para 22,56%. O risco, comparativamente falando, caiu de 3,34% para 3,21% e o retorno de 1,23% para 0,96%, quedas de 3,89% e 21,95% respectivamente. O desempenho da função *desirability* atingiu o percentual satisfatório de 99,13% contra 49,23% anteriores, uma evolução de 101,38%.

Analisando o portfólio com a função entropia, sua diversificação comparativamente é a melhor, onde seus ativos se encontram com percentual de participação entre 22% e 29%. Comparando dentro da mesma Tabela 15, entre os resultados obtidos com e sem entropia, é possível identificar a concentração no ativo China, crescendo 110,77%, quando a função entropia não é utilizada na definição do portfólio. Da mesma forma, o ativo Indonésia é reduzido ao percentual mínimo de 1% da carteira, com uma queda de 95,85%. O ativo Dubai flutuou perto da sua mesma composição, com um acréscimo de 6,83%, enquanto o ativo Venezuela caiu 21,39%. Comparando o risco e o retorno, o portfólio sem entropia é 1,23% menor que o risco com entropia. O retorno com é 3,03% menor que o retorno sem entropia.

Em relação ao desempenho da função *desirability*, o portfólio com entropia é 78,87% maior depois da aplicação do método que antes dele. Já o portfólio sem entropia é 101,38% maior depois da aplicação do método que antes. Comparando, por sua vez, após a aplicação do método, a variação entre o *desirability* sem entropia, com 99,13% de ótimo, é 0,53% menor do que com entropia, com 99,67% de ótimo.

## 8. CONCLUSÕES

A aplicação do método fatorial de ajuste da função *desirability* para tratar a otimização de portfólios multiobjetivos apresentou resultados satisfatórios em relação ao objetivo desta tese.

A utilização do arranjo de Misturas *Extreme Vertice* se mostrou eficiente como uma nova técnica a ser utilizada para compor e tratar portfólios multiobjetivos com restrições e, também, a utilização do arranjo de Superfície de Respostas Box–Behnken possibilitou a eficiente estimação dos coeficientes de primeira e segunda ordem com um número reduzido de experimentos.

O método proposto para sistematizar a parte heurística do cálculo da função *desirability*, que se refere à definição dos seus pesos e importâncias, se mostrou eficiente e de fácil processamento. Após a aplicação do método, sem a utilização da função entropia, o *desirability* atingido foi de 99,13% e com entropia 99,67%, mostrando eficácia na entropia como ferramenta de diversificação em um portfólio multiobjetivo. Igualmente, a utilização do inverso da entropia como indicador de liquidez do portfólio acrescenta nova contribuição à análise do risco do portfólio.

Em comparação com os resultados simulados sem o modelo e sem um especialista, os resultados melhoraram 78,87% com a utilização da função entropia e 101,38% quando não utilizada a função entropia para a diversificação do portfólio. Estes valores denotam que o método contribui para a melhoria da performance do portfólio.

A adoção da média das respostas dos arranjos como valor de limite inferior e superior e a definição do alvo pelo algoritmo GRG para o cálculo da função *desirability*, além de ser de fácil execução, se mostrou eficiente.

A utilização do modelo ARMA–GARCH se mostrou capaz de identificar bem as séries temporais e de caracterizar aquelas com comportamento heteroscedástico. Isto proporcionou a geração das previsões condicionais de retorno e risco para a elaboração do cenário um passo à frente utilizado pelo arranjo de misturas;

Embora os resultados apresentados tenham tratado de um portfólio específico de petróleo bruto, acredita-se que o método seja adequado a qualquer processo que utilize a função *Desirability* para sua otimização.

## 9. SUGESTÕES PARA PESQUISAS FUTURAS

Como sugestões para trabalhos a serem feitos futuramente por pesquisadores, é possível citar:

- o estudo da aplicabilidade deste método a séries que não sejam GARCH, como, por exemplo, com séries sintéticas para maior generalização dos resultados;
- a utilização de Redes Neurais ou outro algoritmo de otimização para tratar as previsões para risco e retorno;
- estudos que aprimorem a estratégia de definição dos valores dos limites mínimos e máximos da função *desirability*;
- desenvolver portfólios com arranjos de misturas utilizando variáveis de processo como cenários para a tomada de decisão;
- Utilizar análises de cluster, PCA ou até mesmo um arranjo de misturas para redução do número de ativos na formação de um portfólio com inúmeros ativos;
- Utilizar o perfil do investidor como variável de decisão e composição do portfólio;

Anexo I - Arranjo de Misturas *Extreme Vertice*.

| N  | Componentes do Portfólio |       |           |           | Variáveis de Resposta |         |          |
|----|--------------------------|-------|-----------|-----------|-----------------------|---------|----------|
|    | Dubai                    | China | Indonesia | Venezuela | Risco                 | Retorno | Entropia |
| 1  | 0,960                    | 0,010 | 0,010     | 0,020     | 0,03558               | 0,00368 | 0,20953  |
| 2  | 0,010                    | 0,960 | 0,010     | 0,020     | 0,03429               | 0,00948 | 0,20953  |
| 3  | 0,010                    | 0,010 | 0,960     | 0,020     | 0,03606               | 0,00853 | 0,20953  |
| 4  | 0,020                    | 0,010 | 0,010     | 0,960     | 0,04221               | 0,01628 | 0,20953  |
| 5  | 0,010                    | 0,020 | 0,010     | 0,960     | 0,04216               | 0,01634 | 0,20953  |
| 6  | 0,010                    | 0,010 | 0,020     | 0,960     | 0,04217               | 0,01633 | 0,20953  |
| 7  | 0,020                    | 0,960 | 0,010     | 0,010     | 0,03429               | 0,00934 | 0,20953  |
| 8  | 0,960                    | 0,020 | 0,010     | 0,010     | 0,03553               | 0,00361 | 0,20953  |
| 9  | 0,020                    | 0,010 | 0,960     | 0,010     | 0,03606               | 0,00839 | 0,20953  |
| 10 | 0,960                    | 0,010 | 0,020     | 0,010     | 0,03554               | 0,00360 | 0,20953  |
| 11 | 0,010                    | 0,020 | 0,960     | 0,010     | 0,03616               | 0,00845 | 0,20953  |
| 12 | 0,010                    | 0,960 | 0,020     | 0,010     | 0,03440               | 0,00939 | 0,20953  |
| 13 | 0,010                    | 0,010 | 0,490     | 0,490     | 0,03453               | 0,01243 | 0,79119  |
| 14 | 0,010                    | 0,490 | 0,010     | 0,490     | 0,03397               | 0,01291 | 0,79119  |
| 15 | 0,010                    | 0,490 | 0,490     | 0,010     | 0,03492               | 0,00892 | 0,79119  |
| 16 | 0,010                    | 0,960 | 0,015     | 0,015     | 0,03435               | 0,00943 | 0,21123  |
| 17 | 0,010                    | 0,015 | 0,960     | 0,015     | 0,03611               | 0,00849 | 0,21123  |
| 18 | 0,010                    | 0,015 | 0,015     | 0,960     | 0,04217               | 0,01633 | 0,21123  |
| 19 | 0,490                    | 0,010 | 0,010     | 0,490     | 0,03538               | 0,00998 | 0,79119  |
| 20 | 0,490                    | 0,010 | 0,490     | 0,010     | 0,03284               | 0,00599 | 0,79119  |
| 21 | 0,960                    | 0,010 | 0,015     | 0,015     | 0,03556               | 0,00364 | 0,21123  |
| 22 | 0,015                    | 0,010 | 0,960     | 0,015     | 0,03606               | 0,00846 | 0,21123  |
| 23 | 0,015                    | 0,010 | 0,015     | 0,960     | 0,04219               | 0,01630 | 0,21123  |
| 24 | 0,490                    | 0,490 | 0,010     | 0,010     | 0,03223               | 0,00647 | 0,79119  |
| 25 | 0,960                    | 0,015 | 0,010     | 0,015     | 0,03555               | 0,00364 | 0,21123  |
| 26 | 0,015                    | 0,960 | 0,010     | 0,015     | 0,03429               | 0,00941 | 0,21123  |
| 27 | 0,015                    | 0,015 | 0,010     | 0,960     | 0,04219               | 0,01631 | 0,21123  |
| 28 | 0,960                    | 0,015 | 0,015     | 0,010     | 0,03553               | 0,00360 | 0,21123  |
| 29 | 0,015                    | 0,960 | 0,015     | 0,010     | 0,03434               | 0,00937 | 0,21123  |
| 30 | 0,015                    | 0,015 | 0,960     | 0,010     | 0,03611               | 0,00842 | 0,21123  |
| 31 | 0,010                    | 0,330 | 0,330     | 0,330     | 0,03341               | 0,01142 | 1,14363  |
| 32 | 0,330                    | 0,010 | 0,330     | 0,330     | 0,03297               | 0,00947 | 1,14363  |
| 33 | 0,330                    | 0,330 | 0,010     | 0,330     | 0,03265               | 0,00979 | 1,14363  |
| 34 | 0,330                    | 0,330 | 0,330     | 0,010     | 0,03264               | 0,00713 | 1,14363  |
| 35 | 0,960                    | 0,013 | 0,013     | 0,013     | 0,03555               | 0,00363 | 0,21189  |
| 36 | 0,013                    | 0,960 | 0,013     | 0,013     | 0,03433               | 0,00940 | 0,21189  |
| 37 | 0,013                    | 0,013 | 0,960     | 0,013     | 0,03609               | 0,00846 | 0,21189  |
| 38 | 0,013                    | 0,013 | 0,013     | 0,960     | 0,04218               | 0,01631 | 0,21189  |
| 39 | 0,250                    | 0,250 | 0,250     | 0,250     | 0,03238               | 0,00945 | 1,38629  |
| 40 | 0,605                    | 0,130 | 0,130     | 0,135     | 0,03282               | 0,00657 | 1,10482  |
| 41 | 0,130                    | 0,605 | 0,130     | 0,135     | 0,03267               | 0,00946 | 1,10482  |
| 42 | 0,130                    | 0,130 | 0,605     | 0,135     | 0,03340               | 0,00899 | 1,10482  |
| 43 | 0,135                    | 0,130 | 0,130     | 0,605     | 0,03532               | 0,01286 | 1,10482  |
| 44 | 0,130                    | 0,135 | 0,130     | 0,605     | 0,03531               | 0,01289 | 1,10482  |
| 45 | 0,130                    | 0,130 | 0,135     | 0,605     | 0,03531               | 0,01289 | 1,10482  |
| 46 | 0,135                    | 0,605 | 0,130     | 0,130     | 0,03266               | 0,00940 | 1,10482  |
| 47 | 0,605                    | 0,135 | 0,130     | 0,130     | 0,03280               | 0,00653 | 1,10482  |
| 48 | 0,135                    | 0,130 | 0,605     | 0,130     | 0,03339               | 0,00892 | 1,10482  |
| 49 | 0,605                    | 0,130 | 0,135     | 0,130     | 0,03281               | 0,00652 | 1,10482  |
| 50 | 0,130                    | 0,135 | 0,605     | 0,130     | 0,03341               | 0,00895 | 1,10482  |
| 51 | 0,130                    | 0,605 | 0,135     | 0,130     | 0,03269               | 0,00942 | 1,10482  |

## Anexo II - Matriz de Entropia.

| $x_1$   | $x_2$   | $x_3$   | $x_4$   | Entropia |
|---------|---------|---------|---------|----------|
| -0.0408 | -4.6052 | -4.6052 | -3.9120 | 0.2095   |
| -4.6052 | -0.0408 | -4.6052 | -3.9120 | 0.2095   |
| -4.6052 | -4.6052 | -0.0408 | -3.9120 | 0.2095   |
| -3.9120 | -4.6052 | -4.6052 | -0.0408 | 0.2095   |
| -4.6052 | -3.9120 | -4.6052 | -0.0408 | 0.2095   |
| -4.6052 | -4.6052 | -3.9120 | -0.0408 | 0.2095   |
| -3.9120 | -0.0408 | -4.6052 | -4.6052 | 0.2095   |
| -0.0408 | -3.9120 | -4.6052 | -4.6052 | 0.2095   |
| -3.9120 | -4.6052 | -0.0408 | -4.6052 | 0.2095   |
| -0.0408 | -4.6052 | -3.9120 | -4.6052 | 0.2095   |
| -4.6052 | -3.9120 | -0.0408 | -4.6052 | 0.2095   |
| -4.6052 | -0.0408 | -3.9120 | -4.6052 | 0.2095   |
| -4.6052 | -4.6052 | -0.7133 | -0.7133 | 0.7912   |
| -4.6052 | -0.7133 | -4.6052 | -0.7133 | 0.7912   |
| -4.6052 | -0.7133 | -0.7133 | -4.6052 | 0.7912   |
| -4.6052 | -0.0408 | -4.1997 | -4.1997 | 0.2112   |
| -4.6052 | -4.1997 | -0.0408 | -4.1997 | 0.2112   |
| -4.6052 | -4.1997 | -4.1997 | -0.0408 | 0.2112   |
| -0.7133 | -4.6052 | -4.6052 | -0.7133 | 0.7912   |
| -0.7133 | -4.6052 | -0.7133 | -4.6052 | 0.7912   |
| -0.0408 | -4.6052 | -4.1997 | -4.1997 | 0.2112   |
| -4.1997 | -4.6052 | -0.0408 | -4.1997 | 0.2112   |
| -4.1997 | -4.6052 | -4.1997 | -0.0408 | 0.2112   |
| -0.7133 | -0.7133 | -4.6052 | -4.6052 | 0.7912   |
| -0.0408 | -4.1997 | -4.6052 | -4.1997 | 0.2112   |
| -4.1997 | -0.0408 | -4.6052 | -4.1997 | 0.2112   |
| -4.1997 | -4.1997 | -4.6052 | -0.0408 | 0.2112   |
| -0.0408 | -4.1997 | -4.1997 | -4.6052 | 0.2112   |
| -4.1997 | -0.0408 | -4.1997 | -4.6052 | 0.2112   |
| -4.1997 | -4.1997 | -0.0408 | -4.6052 | 0.2112   |
| -4.6052 | -1.1087 | -1.1087 | -1.1087 | 1.1436   |
| -1.1087 | -4.6052 | -1.1087 | -1.1087 | 1.1436   |
| -1.1087 | -1.1087 | -4.6052 | -1.1087 | 1.1436   |
| -1.1087 | -1.1087 | -1.1087 | -4.6052 | 1.1436   |
| -0.0408 | -4.3175 | -4.3175 | -4.3175 | 0.2119   |
| -4.3175 | -0.0408 | -4.3175 | -4.3175 | 0.2119   |
| -4.3175 | -4.3175 | -0.0408 | -4.3175 | 0.2119   |
| -4.3175 | -4.3175 | -4.3175 | -0.0408 | 0.2119   |
| -1.3863 | -1.3863 | -1.3863 | -1.3863 | 1.3863   |
| -0.5025 | -2.0402 | -2.0402 | -2.0025 | 1.1048   |
| -2.0402 | -0.5025 | -2.0402 | -2.0025 | 1.1048   |
| -2.0402 | -2.0402 | -0.5025 | -2.0025 | 1.1048   |
| -2.0025 | -2.0402 | -2.0402 | -0.5025 | 1.1048   |
| -2.0402 | -2.0025 | -2.0402 | -0.5025 | 1.1048   |
| -2.0402 | -2.0402 | -2.0025 | -0.5025 | 1.1048   |
| -2.0025 | -0.5025 | -2.0402 | -2.0402 | 1.1048   |
| -0.5025 | -2.0025 | -2.0402 | -2.0402 | 1.1048   |
| -2.0025 | -2.0402 | -0.5025 | -2.0402 | 1.1048   |
| -0.5025 | -2.0402 | -2.0025 | -2.0402 | 1.1048   |
| -2.0402 | -2.0025 | -0.5025 | -2.0402 | 1.1048   |
| -2.0402 | -0.5025 | -2.0025 | -2.0402 | 1.1048   |

## Anexo III - Matriz de covariância do risco.

| $x_1^2r_1$ | $x_2^2r_2$ | $x_3^2r_3$ | $x_4^2r_4$ | $x_1x_2\text{Corr}$ | $x_1x_3\text{Corr}$ | $x_1x_4\text{Corr}$ | $x_2x_3\text{Corr}$ | $x_2x_4\text{Corr}$ | $x_3x_4\text{Corr}$ |
|------------|------------|------------|------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 0.03318    | 0.00000    | 0.00000    | 0.00002    | 0.00028             | 0.00028             | 0.00061             | 0.00000             | 0.00001             | 0.00001             |
| 0.00000    | 0.03189    | 0.00000    | 0.00002    | 0.00028             | 0.00000             | 0.00001             | 0.00033             | 0.00056             | 0.00001             |
| 0.00000    | 0.00000    | 0.03364    | 0.00002    | 0.00000             | 0.00028             | 0.00001             | 0.00033             | 0.00001             | 0.00057             |
| 0.00001    | 0.00000    | 0.00000    | 0.03981    | 0.00001             | 0.00001             | 0.00061             | 0.00000             | 0.00028             | 0.00028             |
| 0.00000    | 0.00001    | 0.00000    | 0.03981    | 0.00001             | 0.00000             | 0.00030             | 0.00001             | 0.00056             | 0.00028             |
| 0.00000    | 0.00000    | 0.00001    | 0.03981    | 0.00000             | 0.00001             | 0.00030             | 0.00001             | 0.00028             | 0.00057             |
| 0.00001    | 0.03189    | 0.00000    | 0.00000    | 0.00056             | 0.00001             | 0.00001             | 0.00033             | 0.00028             | 0.00000             |
| 0.03318    | 0.00001    | 0.00000    | 0.00000    | 0.00056             | 0.00028             | 0.00030             | 0.00001             | 0.00001             | 0.00000             |
| 0.00001    | 0.00000    | 0.03364    | 0.00000    | 0.00001             | 0.00057             | 0.00001             | 0.00033             | 0.00000             | 0.00028             |
| 0.03318    | 0.00000    | 0.00001    | 0.00000    | 0.00028             | 0.00057             | 0.00030             | 0.00001             | 0.00000             | 0.00001             |
| 0.00000    | 0.00001    | 0.03364    | 0.00000    | 0.00001             | 0.00028             | 0.00000             | 0.00067             | 0.00001             | 0.00028             |
| 0.00000    | 0.03189    | 0.00001    | 0.00000    | 0.00028             | 0.00001             | 0.00000             | 0.00067             | 0.00028             | 0.00001             |
| 0.00000    | 0.00000    | 0.00876    | 0.01037    | 0.00000             | 0.00014             | 0.00016             | 0.00017             | 0.00014             | 0.00708             |
| 0.00000    | 0.00831    | 0.00000    | 0.01037    | 0.00014             | 0.00000             | 0.00016             | 0.00017             | 0.00703             | 0.00014             |
| 0.00000    | 0.00831    | 0.00876    | 0.00000    | 0.00014             | 0.00014             | 0.00000             | 0.00834             | 0.00014             | 0.00014             |
| 0.00000    | 0.03189    | 0.00001    | 0.00001    | 0.00028             | 0.00000             | 0.00000             | 0.00050             | 0.00042             | 0.00001             |
| 0.00000    | 0.00001    | 0.03364    | 0.00001    | 0.00000             | 0.00028             | 0.00000             | 0.00050             | 0.00001             | 0.00042             |
| 0.00000    | 0.00001    | 0.00001    | 0.03981    | 0.00000             | 0.00000             | 0.00030             | 0.00001             | 0.00042             | 0.00042             |
| 0.00864    | 0.00000    | 0.00000    | 0.01037    | 0.00014             | 0.00014             | 0.00760             | 0.00000             | 0.00014             | 0.00014             |
| 0.00864    | 0.00000    | 0.00876    | 0.00000    | 0.00014             | 0.00710             | 0.00016             | 0.00017             | 0.00000             | 0.00014             |
| 0.03318    | 0.00000    | 0.00001    | 0.00001    | 0.00028             | 0.00043             | 0.00046             | 0.00001             | 0.00000             | 0.00001             |
| 0.00001    | 0.00000    | 0.03364    | 0.00001    | 0.00000             | 0.00043             | 0.00001             | 0.00033             | 0.00000             | 0.00042             |
| 0.00001    | 0.00000    | 0.00001    | 0.03981    | 0.00000             | 0.00001             | 0.00046             | 0.00001             | 0.00028             | 0.00042             |
| 0.00864    | 0.00831    | 0.00000    | 0.00000    | 0.00702             | 0.00014             | 0.00016             | 0.00017             | 0.00014             | 0.00000             |
| 0.03318    | 0.00001    | 0.00000    | 0.00001    | 0.00042             | 0.00028             | 0.00046             | 0.00001             | 0.00001             | 0.00000             |
| 0.00001    | 0.03189    | 0.00000    | 0.00001    | 0.00042             | 0.00000             | 0.00001             | 0.00033             | 0.00042             | 0.00000             |
| 0.00001    | 0.00001    | 0.00000    | 0.03981    | 0.00001             | 0.00000             | 0.00046             | 0.00001             | 0.00042             | 0.00028             |
| 0.03318    | 0.00001    | 0.00001    | 0.00000    | 0.00042             | 0.00043             | 0.00030             | 0.00001             | 0.00000             | 0.00000             |
| 0.00001    | 0.03189    | 0.00001    | 0.00000    | 0.00042             | 0.00001             | 0.00000             | 0.00050             | 0.00028             | 0.00000             |
| 0.00001    | 0.00001    | 0.03364    | 0.00000    | 0.00001             | 0.00043             | 0.00000             | 0.00050             | 0.00000             | 0.00028             |
| 0.00000    | 0.00377    | 0.00397    | 0.00470    | 0.00010             | 0.00010             | 0.00010             | 0.00378             | 0.00319             | 0.00321             |
| 0.00392    | 0.00000    | 0.00397    | 0.00470    | 0.00010             | 0.00322             | 0.00345             | 0.00011             | 0.00010             | 0.00321             |
| 0.00392    | 0.00377    | 0.00000    | 0.00470    | 0.00318             | 0.00010             | 0.00345             | 0.00011             | 0.00319             | 0.00010             |
| 0.00392    | 0.00377    | 0.00397    | 0.00000    | 0.00318             | 0.00322             | 0.00010             | 0.00378             | 0.00010             | 0.00010             |
| 0.03318    | 0.00001    | 0.00001    | 0.00001    | 0.00037             | 0.00038             | 0.00041             | 0.00001             | 0.00001             | 0.00001             |
| 0.00001    | 0.03189    | 0.00001    | 0.00001    | 0.00037             | 0.00001             | 0.00001             | 0.00044             | 0.00037             | 0.00001             |
| 0.00001    | 0.00001    | 0.03364    | 0.00001    | 0.00001             | 0.00038             | 0.00001             | 0.00044             | 0.00001             | 0.00038             |
| 0.00001    | 0.00001    | 0.00001    | 0.03981    | 0.00001             | 0.00001             | 0.00041             | 0.00001             | 0.00037             | 0.00038             |
| 0.00225    | 0.00216    | 0.00228    | 0.00270    | 0.00183             | 0.00185             | 0.00198             | 0.00217             | 0.00183             | 0.00184             |
| 0.01318    | 0.00058    | 0.00062    | 0.00079    | 0.00230             | 0.00232             | 0.00259             | 0.00059             | 0.00051             | 0.00052             |
| 0.00061    | 0.01266    | 0.00062    | 0.00079    | 0.00230             | 0.00050             | 0.00056             | 0.00273             | 0.00239             | 0.00052             |
| 0.00061    | 0.00058    | 0.01336    | 0.00079    | 0.00049             | 0.00232             | 0.00056             | 0.00273             | 0.00051             | 0.00241             |
| 0.00066    | 0.00058    | 0.00062    | 0.01581    | 0.00051             | 0.00052             | 0.00259             | 0.00059             | 0.00230             | 0.00232             |
| 0.00061    | 0.00063    | 0.00062    | 0.01581    | 0.00051             | 0.00050             | 0.00249             | 0.00061             | 0.00239             | 0.00232             |
| 0.00061    | 0.00058    | 0.00067    | 0.01581    | 0.00049             | 0.00052             | 0.00249             | 0.00061             | 0.00230             | 0.00241             |
| 0.00066    | 0.01266    | 0.00062    | 0.00073    | 0.00239             | 0.00052             | 0.00056             | 0.00273             | 0.00230             | 0.00050             |
| 0.01318    | 0.00063    | 0.00062    | 0.00073    | 0.00239             | 0.00232             | 0.00249             | 0.00061             | 0.00051             | 0.00050             |
| 0.00066    | 0.00058    | 0.01336    | 0.00073    | 0.00051             | 0.00241             | 0.00056             | 0.00273             | 0.00049             | 0.00232             |
| 0.01318    | 0.00058    | 0.00067    | 0.00073    | 0.00230             | 0.00241             | 0.00249             | 0.00061             | 0.00049             | 0.00052             |
| 0.00061    | 0.00063    | 0.01336    | 0.00073    | 0.00051             | 0.00232             | 0.00054             | 0.00284             | 0.00051             | 0.00232             |
| 0.00061    | 0.01266    | 0.00067    | 0.00073    | 0.00230             | 0.00052             | 0.00054             | 0.00284             | 0.00230             | 0.00052             |



## Anexo V - Arranjo Box–Behnken para Pesos e Importâncias.

| N  | Peso Risco | Importância Risco | Peso Retorno | Importância Retorno | <i>Desirability</i> |
|----|------------|-------------------|--------------|---------------------|---------------------|
| 1  | 0.10       | 0.10              | 5.05         | 0.10                | 0.10672             |
| 2  | 10.00      | 0.10              | 5.05         | 0.10                | 0.05783             |
| 3  | 0.10       | 10.00             | 5.05         | 0.10                | 0.37706             |
| 4  | 10.00      | 10.00             | 5.05         | 0.10                | 0.01913             |
| 5  | 0.10       | 0.10              | 5.05         | 10.00               | 0.80932             |
| 6  | 10.00      | 0.10              | 5.05         | 10.00               | 0.40804             |
| 7  | 0.10       | 10.00             | 5.05         | 10.00               | 0.73584             |
| 8  | 10.00      | 10.00             | 5.05         | 10.00               | 0.00254             |
| 9  | 5.05       | 0.10              | 0.10         | 5.05                | 0.87024             |
| 10 | 5.05       | 10.00             | 0.10         | 5.05                | 0.42280             |
| 11 | 5.05       | 0.10              | 10.00        | 5.05                | 0.19410             |
| 12 | 5.05       | 10.00             | 10.00        | 5.05                | 0.00860             |
| 13 | 5.05       | 0.10              | 0.10         | 5.05                | 0.87024             |
| 14 | 5.05       | 10.00             | 0.10         | 5.05                | 0.74484             |
| 15 | 5.05       | 0.10              | 10.00        | 5.05                | 0.00831             |
| 16 | 5.05       | 10.00             | 10.00        | 5.05                | 0.00860             |
| 17 | 5.05       | 5.05              | 0.10         | 0.10                | 0.93158             |
| 18 | 5.05       | 5.05              | 10.00        | 0.10                | 0.64471             |
| 19 | 5.05       | 5.05              | 0.10         | 10.00               | 0.08691             |
| 20 | 5.05       | 5.05              | 10.00        | 10.00               | 0.00084             |
| 21 | 5.05       | 5.05              | 0.10         | 0.10                | 0.02791             |
| 22 | 5.05       | 5.05              | 10.00        | 0.10                | 0.64471             |
| 23 | 5.05       | 5.05              | 0.10         | 10.00               | 0.08691             |
| 24 | 5.05       | 5.05              | 10.00        | 10.00               | 0.02791             |
| 25 | 0.10       | 5.05              | 5.05         | 0.10                | 0.02791             |
| 26 | 10.00      | 5.05              | 5.05         | 0.10                | 0.02791             |
| 27 | 0.10       | 5.05              | 5.05         | 10.00               | 0.02791             |



Anexo VI – Coeficientes do modelo de Desirability de Box–Behnken, com entropia.

| <b>Termo</b>                              | <b><i>Desirability</i></b> |
|-------------------------------------------|----------------------------|
| Constante                                 | 0.05216                    |
| Peso Risco                                | -0.09492                   |
| Importância Risco                         | -0.02591                   |
| Peso Retorno                              | -0.33861                   |
| Importância Retorno                       | -0.25486                   |
| Peso Entropia                             | -0.04629                   |
| Importância Entropia                      | 0.03357                    |
| Peso Risco*Peso Risco                     | 0.10003                    |
| Importância Risco*Importância Risco       | 0.03781                    |
| Peso Retorno*Peso Retorno                 | 0.28307                    |
| Importância Retorno*Importância Retorno   | 0.20539                    |
| Peso Entropia*Peso Entropia               | 0.04349                    |
| Importância Entropia*Importância Entropia | -0.02455                   |
| Peso Risco*Importância Risco              | -0.07168                   |
| Peso Risco*Peso Retorno                   | 0.05126                    |
| Peso Risco*Importância Retorno            | 0.04317                    |
| Peso Risco*Peso Entropia                  | 0.00597                    |
| Peso Risco*Importância Entropia           | 0.00407                    |
| Importância Risco*Peso Retorno            | 0.03390                    |
| Importância Risco*Importância Retorno     | 0.02587                    |
| Importância Risco*Peso Entropia           | 0.01372                    |
| Importância Risco*Importância Entropia    | -0.02110                   |
| Peso Retorno*Importância Retorno          | -0.11315                   |
| Peso Retorno*Peso Entropia                | 0.01582                    |
| Peso Retorno*Importância Entropia         | 0.01046                    |
| Importância Retorno*Peso Entropia         | 0.00810                    |
| Importância Retorno*Importância Entropia  | -0.02799                   |
| Peso Entropia*Importância Entropia        | -0.04380                   |
| R <sup>2</sup> adj.                       | 90,41%                     |

## Anexo VII – Coeficientes do modelo de Desirability de Box–Behnken, sem entropia.

| <b>Termo</b>                            | <b><i>Desirability</i></b> |
|-----------------------------------------|----------------------------|
| Constante                               | 0.02791                    |
| Peso Risco                              | -0.11773                   |
| Importância Risco                       | 0.05536                    |
| Peso Retorno                            | -0.35177                   |
| Importância Retorno                     | -0.17726                   |
| Peso Risco*Peso Risco                   | 0.11379                    |
| Importância Risco*Importância Risco     | 0.02125                    |
| Peso Retorno*Peso Retorno               | 0.30520                    |
| Importância Retorno*Importância Retorno | 0.17859                    |
| Peso Risco*Importância Risco            | -0.07726                   |
| Peso Risco*Peso Retorno                 | 0.05020                    |
| Peso Risco*Importância Retorno          | 0.06548                    |
| Importância Risco*Peso Retorno          | 0.03142                    |
| Importância Risco*Importância Retorno   | -0.16895                   |
| Peso Retorno*Importância Retorno        | -0.08301                   |

## REFERÊNCIAS

- AHMED, E.; EL-ALEM, M. On multiobjective optimization in portfolio management. **Applied Mathematics and Computation**, v.167, pp.616-621, 2005.
- ALEXANDER, C. **Market Models – A guide to financial data analysis**. Chichester-UK: John Wiley & Sons, 2005.
- ANAGNOSTOPOULOS, K. P.; MAMANIS, G. A portfolio optimization model with three objectives and discrete variables. **Computers & Operations Research**, v.37, pp.1285-1297, 2010.
- \_\_\_\_\_. The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: a experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms. **Expert Systems with Applications**, v.38, pp.14208-14217, 2011.
- ANGELIDIS, T.; BENOS, A.; DEGIANNAKIS, S. The use of GARCH models in VaR estimation. **Statistical Methodology**, v.1, pp.105-128, 2004.
- ASAI, M.; McALEER, M. The structure of dynamic correlations in multivariate stochastic volatility models. **Journal of Econometrics**, v.150, pp.182-192, 2009.
- AWERBUCH, S.; BERGER, M. **Applying portfolio theory to EU electricity planning and policy-making**. IEA/EET Working Paper, 2003.
- \_\_\_\_\_; JANSEN, J.C.; BEURKENS, L. **The role of wind generation in enhancing Scotland's energy diversity and security: a mean-variance portfolio optimization of Scotland's generating mix**. Analytical Methods for Energy Diversity & Security, pp.139-150, 2008.
- BADRI, A.; JADID, S.; RASHIDINEJAD, M.; MOGHADDAM, M.P. Optimal bidding strategies in oligopoly markets considering bilateral contracts and transmissions constraints, **Electric Power System Research**, doi:10.1016/j.epr.2007.09.003, 2007.
- BAUWENS, L.; OMRANE, W.B.; RENGIFO, E. Intradaily dynamic portfolio selection. **Computational Statistics and Data Analysis**, v.54, pp.2400-2418, 2010.
- BERA, A.K.; PARK, S.Y. Optimal portfolio diversification using the maximum entropy principle. **Econometric Reviews**, v.27, pp.484-512, 2008.
- BHATTACHARYYA, R., KAR, S., MAJUMDER, D.D. Fuzzy mean-variance-skewness portfolio selection models by interval analysis. **Computers & Mathematics with Applications**, v.61, pp.126-137, 2011.
- BOLLERSLEV, T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. **Journal of Econometrics**, v.31, pp.307-27, 1986.

\_\_\_\_\_, T. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: a multivariate generalized ARCH model. **Review of Economics and Statistics**, v.72, pp.498-505, 1990.

BOX, G.E.P.; BEHNKEN, D.W. Some new three-level designs for the study of quantitative variables, **Technometrics**, v.2, pp.455-475, 1960.

\_\_\_\_\_; DRAPER, N.R. **Empirical model-building and response surfaces**, Wiley, New York, 1987.

\_\_\_\_\_; HUNTER, W.G.; HUNTER, J.S. **Statistics for experimenters**, John Wiley & Sons, New York, 1978.

\_\_\_\_\_; JENKINS, G.: **Time series analysis, forecasting and control**. Holden-Day, San Francisco, 1976.

\_\_\_\_\_; WILSON, K.B. On the experimental attainment of optimum conditions, **Journal of the Royal Statistical Society**, Series B, v.13, n.1, pp.1-45, 1951.

BRIBHAM, E.; EHRHARDT, M.C. **Administração Financeira: Teoria e Prática**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

CARDOSO, M.M. **Simulação de modelos GARCH para séries temporais univariadas de demanda de energia elétrica para consumidores livres em regime de curto prazo**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 175p. 2005.

CAUCHICK MIGUEL, P.A. (Organizador). **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão de operações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2010.

CHANG, C.L.; McALEER, M.; TANSUCHAT, R. Analyzing and forecasting volatility spillovers, asymmetries and hedging in major oil markets. **Energy Economics**, v.32, pp.1445-1455, 2010.

CHANG, T.H.; SU, H.M.; CHIU, C.L. Value-at risk estimation with the optimal dynamic biofuel portfolio. **Energy Economics**, v.33, pp.264-272, 2011.

CHANG, T.J.; YANG, S.C.; CHANG, K.J. Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. **Expert Systems with Applications**, v.36, pp.10529-10537, 2009.

CHEN, Z.; YANG, L. Nonlinearly weighted convex risk measure and its application. **Journal of Banking & Finance**, v.35, pp.1777-1793, 2011.

CH'NG, C.; QUAH, S.; LOW, H. A new approach for multiple-response optimization. **Quality Engineering**, v.17, n.4, pp.621-626, 2005.

CORNELL, J.A. **Experiments with mixtures: designs, models and the analysis of mixture data**. 3 Ed., John Wiley & Sons, New York, NY, 2002.

COSTA, N.R.; LOURENÇO, J.; PEREIRA, Z.L. Desirability function approach: a review and performance evaluation in adverse conditions. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**. v.107, pp.234-244, 2011.

DAS, P.; SENGUPTA, S. Composite *desirability* index in cases of negative and zero *desirability*. **Journal of Management Research**, v.10, n.1, pp.25-38, 2010.

DEL CASTILLO, E.; MONTGOMERY, D.C. A nonlinear programming solution to the dual response problem. **Journal of Quality Technology**, v.28, n.2, pp.331-336, 1993.

\_\_\_\_\_; MONTGOMERY, D.C.; McCARVILLE, D. Modified desirability functions for multiple response optimization. **Journal of Quality Technology**, v.28, n.3, pp.337-345, 1996.

\_\_\_\_\_; FAN, S.K.; SEMPLE, J. Optimization for dual response systems: a comprehensive procedure for degenerate and nondegenerate problems. **European Journal of Operational Research**, v.112, n.1, pp.174-186, 1999.

DELARUE, E.; DE JOHGHE, C.; BELMANS, R.; D'HAESELEER, W. Applying portfolio theory to the electricity sector: Energy versus power. **Energy Economics**, v.33, pp.12-23, 2011.

DERRINGER, G. A balancing act: optimizing a product's properties. **Quality Progress**. v.27, n.6, pp.51-58, 1994.

\_\_\_\_\_; SUICH R., Simultaneous optimization of several response variables. **Journal of quality Technology**, v.12, pp.214-219, 1980.

DOUD, K. **Beyond Value at Risk**. John Wiley & Sons, 1998.

ELTON, E.J.; GRUBER, M.J. Modern portfolio theory, 1950 to date. **Journal of Banking & Finance**, v.21, pp.1743-1759, 1997.

ENGLE, R.F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation. **Econometrica**, v.50, pp.987-1008, 1982.

\_\_\_\_\_. GARCH(1,1): the use of ARCH/GARCH models in applied econometrics. **Journal of Economic Perspectives**. V.15, n.4, pp.157-168, 2001.

\_\_\_\_\_. Dynamic conditional correlation: a sample class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. **Journal of Business and Economic Statistics**, v.20, pp.339-350, 2002.

FERREIRA, D.P.F.; MICHALSKI, R.L.X.N.; CASTRO, A.O.S. **Metodologia para expressão da incerteza na medição de isolamento sonoro**. Cadernos do IME – Série Estatística. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ. v.26, pp.1-13, 2009.

FRANCQ, C. ZAKOIAN, J.M. **Garch models: structure, statistical inference and financial applications**. UK: John Wiley & Sons, 2010.

GALVANI, V.; PLOURDE, A. Portfolio diversification in energy markets. **Energy Economics**, v.32, pp.257-268, 2010.

GAO, H.O.; STASKO, T.H. Diversification in the driveway: mean-variance optimization for greenhouse gas emissions reduction from the next generation of vehicles. **Energy Policy**, v.37, pp.5019-5027, 2009.

GRANGER, C.; JOYEUX, R. An introduction to long-memory time series models and fractional differencing. **Journal of Time Series Analysis**, v.1, pp.15-29, 1980.

GREEN, R.; HOBBS, B.; OREN, S.; SIDDIQUI, A. Policymaking benefits and limitations from using financial methods and modeling in electricity market. **Energy Economics**, v.32, pp.749-750, 2010.

GRUBB, M.; BUTLER, L.; TWOMEY, P. Diversity and security in UK electricity generation: The influence of low-carbon objectives. **Energy Policy**, v.34, pp.4050-4062, 2006.

GUPTA, R.; DONLEAVY, G.D. Benefits of diversifying investments into emerging markets with time-varying correlations: An Australian perspective. **Journal of Multinational Financial Management**, v.19, pp.160-177, 2009.

HARRINGTON, E., The desirability function. **Industrial Quality Control**, v.21, n.10, pp.494- 498, 1965.

HE, Z.; WANG, J.; OH, J.; PARK, S. Robust optimization for multiple responses using response surface methodology. **Applied Stochastic Models in Business and Industry**. v.26, n.2, pp.157-171, 2010.

HICKEY, E.A.; CARLSON, J.L.; LOOMIS, D. Issues in the determination of the optimal portfolio of electricity supply options. **Energy Policy**, v.38, pp.2198-2207, 2010.

HIGGS, H. Modelling price and volatility inter-relationships in the Australian wholesale spot electricity markets. **Energy Economics**, v.31, pp.748-756, 2009.

HLOUSKOVA, J.; SCHMIDHEINY, K.; WAGNER, M. Multistep predictions for multivariate GARCH models: Closed form solution and the value for portfolio management. **Journal of Empirical Finance**, v.16, pp.330-336, 2009.

HONGLING L.; CHUANWEN, J.; YAN, Z. A review on risk-constrained hydropower scheduling in deregulated power market. **Renewable and Sustainable Energy Reviews**, v.12, n.5, pp. 1465-1475, 2008.

HOSKING, J.: Fractional differencing. **Biometrika**, v.68, n.1, pp.165-176, 1981.

HUANG, J.J.; LEE, K.J.; LIANG, H.; LIN, W.F. Estimating value at risk of portfolio by conditional copula-GARCH method. **Insurance: Mathematics and Economics**, v.45, pp.315-324, 2009.

HUANG X., Portfolio selection with a new definition of Risk, **European Journal of Operational Research**, no. 186, pp.351-357, 2008.

HUISMAN, R.; MAHIEU, R.; SCHLICHTER, F. Electricity portfolio management: Optimal peak/off-peak allocations. **Energy Economics**. v.31, n.1, pp.169-174, 2009.

HUNG, J.C.; LEE, M.C.; LIU, H.C. Estimation of value-at-risk for energy commodities via fat-tailed GARCH models. **Energy Economics**, v.30, pp.1173-1191, 2008.

JANAL, P.; ROY, T.K.; MAZUMDER, S.K. Multi-objective mean-variance-skewness model for portfolio optimization. **Advanced Modeling and Optimization**, v.9, pp.181-193, 2007.

JANSEN, J.C., SEEBREGTS, A.J. Long-term energy services security: what is it and how can it be measured and valued? **Energy Policy**, v.38, pp.1654-1664, 2010.

JARQUE, C.M.; BERA, A.K. Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial Independence of regression residuals. **Economics Letters**. v.6, n.3, pp.255-259, 1980.

JEONG, I-J.; KIM, K-J. An interactive desirability function method to multiresponse optimization. **European Journal of Operational Research**, v.195, pp.412-426, 2009.

KHALILPOUR, R.; KARIMI, I.A. Investment portfolios under uncertainty for utilizing natural gas resources. **Computers & Chemical Engineering**, v.35, pp.1827-1837, 2011.

KHURI, A.I., CONLON, M. Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions. **Technometrics**, v.23, n.4, pp.363-375, 1981.

KIBZUN, A.I., KUZNETSOV, E.A. Analysis of criteria VaR and CVaR. **Journal of Banking & Finance**, v.30, pp.779-796, 2006.

KIM, K.-J.; LIN, D. Simultaneous optimization of multiple responses by maximizing exponential *desirability* functions. **Applied Statistics**, series C, v.49, pp.311-325, 2000.

KÖKSOY, O., DOGANAKSOY, N. Joint Optimization of Mean and Standard Deviation Using Response Surface Methods. **Journal of Quality Technology**, v.35, n.3, pp.37-334, 2003.

KROKHMAL, P.; PALMQUIST, J.; URYASEV, S. Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk objective and constraints spot prices. **The Journal of Risk**, vol.4, n.2, 2002.

\_\_\_\_\_; ZABARANKIN, M.; URYASEV, S. Modeling and optimization of risk. **Surveys in Operations Research and Management Science**, v.16, pp.49-66, 2011.

KRONER, K.F.; NG, V.K. Modeling asymmetric movements of asset prices. **Review of Financial Studies**, v.11, pp.817-844, 1998.

LASDON, L.S.; WARREN, A.D.; JAIN, A.; RATNER, M. Design and testing of a generalized reduced gradient code for nonlinear programming, **ACM Transactions on Mathematical Software**, v.4, n.1, pp.34-50, 1978.

LEAN, H.H.; McALEER, M.; WONG, W.K. Market efficiency of oil spot and futures: a mean-variance and stochastic dominance approach. **Energy Economics**, v.32, pp.979-986, 2010.

LEE, M.-S.; KIM, K.-J. Expected desirability function: consideration of both location and dispersion effects in desirability function approach. **Quality Technology Quantitative Management**, v.4, pp.365-377, 2007.

LIN, J.F.; CHOU, C.C. The response surface method and the analysis of mild oxidational wear. **Tribology International**, v.35, pp.771-785, 2002.

LIU, M.; WU, F.F. Portfolio optimization in electricity markets. **Electric Power Systems Research**, v.77, n.8, pp.1000-1009, 2007.

LJUNG, G.M.; BOX, G.E.P. On a measure of lack of fit in time series models. **Biometrika**, v.65, n.2, pp.297-303, 1978.

MAKRIDAKIS, S.G. *et al.* The M-2 competition: a real-time judgmentally based forecasting study, **International Journal of Forecasting**, v.9, pp.5-23, 1993.

\_\_\_\_\_; WHEELWRIGHT, S.C.; HYNDMAN, R.J. **Forecasting: methods and applications**. 3.ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.

MARIMOUTOU, V.; RAGGAD, B.; TRABELSI, A. Extreme value theory and value at risk: application to oil market. **Energy Economics**, v.31, pp.519-530, 2009.

MARKOWITZ, H. Portfolio selection. **Journal of Finance**, v.7, pp.77-91, 1952.

\_\_\_\_\_, H. **Portfolio selection: efficient diversification of investments**. Wiley, New York, 1959.

MOHAMMADI, H.; SU, L. International evidence on crude oil price dynamics: applications of ARIMA-GARCH models. **Energy Economics**, v.32, pp.1001-1008, 2010.



MÖLLER, C.; RACHEV, S.T.; FABOZZI, F.J. Balancing energy strategies in electricity portfolio management. **Energy Economics**, v.33, pp.2-11, 2011.

MONTGOMERY, D.C. **Design and analysis of experimentes**. 5 Ed. John Wiley & Sons, 2009.

\_\_\_\_\_; JENNINGS, C.L.; KULAHCI, M. **Introduction to time series analysis and forecasting**. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2008.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.C. **Análise de séries temporais**. São Paulo, Edgard Blücher: 2006.

MUÑOZ, J.I.; DE LA NIETA, A.A.S.; CONTRERAS, J.; BERNAL-AGUSTÍN, J.L. Optimal investment portfolio in renewable energy: the Spanish case. **Energy Policy**, v.37, pp.5273-5284, 2009.

MURPHY, T.E.; TSUI, K.L.; ALLEN, J.K. A review of robust design methods for multiple responses, **Research in Engineering Design**, v.15, pp.201-215, 2005.

MYERS, R.H.; MONTGOMERY, D.C. **Response surface methodology**. 2 Ed., John Wiley & Sons, New York, NY, 2002.

NASH, S.G., SOFER, A. **Linear and nonlinear programming**, 1 Ed., McGraw-Hill Companies, Inc., 692p., 1996.

OLIVEIRA, F.A. **Estratégia de comercialização de energia elétrica através da otimização de portfólios de contratos utilizando projetos de experimentos de misturas**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 140p. 2009.

\_\_\_\_\_; PAIVA, A.P.; LIMA, J.W.M.; BALESTRASSI, P.P.; MENDES, R.R.A. Portfolio optimization using mixture design of experiments: scheduling trades within electricity markets. **Energy Economics**, v.33, pp.24-32, 2011.

ORTIZ, F. Jr.; SIMPSON, J.R.; PIGNATIELLO, J.J.Jr.; HEREDIA-LANGNER, A. A genetic algorithm approach to multiple-response optimization. **Journal of Quality Technology**, v.36, n.4, pp.432-450, 2004.

OSBORNE, D.M.; ARMACOST, R.L.; PET-EDWARDS, J. State of the art in multiple response surface methodology. **IEEE International Conference on Computational Cybernetics and Simulation**, v.4, pp.3833-3838, 1997.

PAIVA, A.P. **Metodologia de superfície de resposta e análise de componentes principais em otimização de processos de manufatura com múltiplas respostas correlacionadas**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 229p. 2006.

PASANDIDEH, S.; NIAKI, S. Multi-response simulation optimization using genetic algorithm within desirability function framework. **Applied Mathematics Computation**. v.175, n.1, pp.366-382, 2006.

PEARSON, N.D.; SMITHSON, C. VaR: the state of play. **Review of Financial economics**. v.11, pp.175-189, 2002.

PETERSON, J.J. A posterior predictive approach to multiple response surface optimization. **Journal of Quality Technology**, v.36, n.2, pp.139-153, 2004.

PHAM, H.T.; YANG, B.S. Estimation and forecasting of machine health condition using ARMA/GARCH model. **Mechanical Systems and Signal Processing**. v.24, pp.546-558, 2010.

PINDORIYA, N.M.; SING, S.N.; SINGH, S.K. Multi-objective mean-variance-skewness model for generation portfolio allocation in electricity markets. **Electric Power Systems Research**, v.80, pp.1314-1321, 2010.

POLAK, G.G.; ROGERS, D.F.; SWEENEY, D.J. Risk management strategies via minimax portfolio optimization. **European Journal of Operational Research**. v.207, n.1, pp.409-419, 2010.

RIBARDO, C.; ALLEN, T. An alternative desirability function for achieving 'Six Sigma'. **Quality and Reliability Engineering International**. v.19, n.3, pp.227-240, 2003.

ROQUES, F.A.; NEWBERY, D.M.; NUTTALL, W.J. Fuel mix diversification incentives in liberalized electricity markets: a mean-variance portfolio theory approach. **Energy Economics**. v.30, pp.1831-1849, 2008.

ROSSI, F. Blending response surface methodology and principal components analysis to match a target product. **Food Quality and Preference**, v.12, pp.457-465, 2001.

SADORSKY, P. Modeling and forecasting petroleum futures volatility. **Energy Economics**. v.28, pp.467-488, 2006.

\_\_\_\_\_. Correlations and volatility spillovers between oil prices and the stock prices of clean energy and technology companies. **Energy Economics**. v.34, n.1, pp.248-255, 2012.

SCHLUETER, S. A long-term/short-term model for daily electricity prices with dynamic volatility. **Energy Economics**. v.32, pp.1074-1081, 2010.

SHANNON, C.E. A mathematical theory of communication. **Bell System Technical Journal**. v.27, pp.379-423 and pp.623-656, (July and October), 1948.

SHARPE, W.F. Capital asset prices: a theory of market equilibrium under conditions of risk. **Journal of Finance**, v.19, n.3, pp.425-442, 1964.

STENGEL, Robert F. **Stochastic optimal control: theory and application**. 1st. ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1986.

STIRLING, A. Diversity and ignorance in electricity supply investment. **Energy Policy**, v.22, pp.195-216, 1994.

SYRIOPOULOS, T.; ROUMPIS, E. Dynamic correlations and volatility effects in the Balkan equity markets. **Journal of International Financial Markets, Institutions & Money**. v.19, pp.565-587, 2009.

TSAY, R. **Analysis of financial time series**. 2 Ed., Wiley-Interscience, 2005.

USTA, I.; KANTAR, Y. M. Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. **Entropy**, v.13, pp.117-133, 2009.

VAN GYSEGHEM, E. *et al.* Selection of reversed-phase liquid chromatographic columns with diverse selectivity towards the potential separation of impurities in drugs. **Journal of Chromatography A**. v.1042, n.1-2, pp. 69-80, 2004.

VARGA-HASZONITS, I.; KONDOR, I. Noise sensitivity of portfolio selection in constant conditional correlation GARCH models. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v.385, pp.307-318, 2007.

WESTNER, G.; MADLENER, R. Development of cogeneration in Germany: a mean-variance portfolio analysis of individual technology's prospects in view of the new regulatory framework. **Energy**. v.36, pp.5301-5313, 2007.

WU, F.C. Optimization of correlated multiple quality characteristics using desirability function. **Quality Engineering**. v.17, n.1, pp.119-126, 2005.

\_\_\_\_\_; HAMADA, M. **Experiments: planning, analysis and parameter design optimization**. Wiley-Interscience, New York, 2000.

WU, Z.W.; SONG, X.F.; XU, Y.Y.; LIU, K. A note on a minimax rule for portfolio selection and equilibrium price system. **Applied Mathematics and Computation**. v.208, pp.49-57, 2009.

YU, Z. A spatial mean-variance MIP model for energy market risk analysis. **Energy Economics**. v.25, pp.255-268, 2003.

YULE, G. On a method of investigating periodicities in disturbed series with special reference to wolfer's sunspot numbers. **Philosophical Transactions of the Royal Society**. Series A, v.226, pp.267-298, 1927.

ZAPATA, J.C.; VARMA, V.A.; REKLAITIS, G.V. Impact of tactical and operational policies in the selection of a new product portfolio. **Computers and Chemical Engineering**. v.32, n.1-2, pp.307-319, 2008.

ZHU, L.; FAN, Y. Optimization of China's generating portfolio and policy implications based on portfolio theory. **Energy**. v.35, n.3, pp.1391-1402, 2010.