

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor, o
texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir de
30/10/2021.

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

LUCAS MANGILI ESTEVES

**CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ COM REALIMENTAÇÃO PARCIAL DOS ESTADOS
APLICADO A DIFERENTES SISTEMAS MECÂNICOS**

Ilha Solteira
2020

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

LUCAS MANGILI ESTEVES

**CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ COM REALIMENTAÇÃO PARCIAL DOS ESTADOS
APLICADO A DIFERENTES SISTEMAS MECÂNICOS**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Área de Conhecimento: Automação

Prof. Dr. Rodrigo Cardim
Orientador

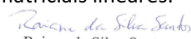
FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

E79c Esteves, Lucas Mangili.
 Controle robusto H^∞ com realimentação parcial dos estados aplicado a
diferentes sistemas mecânicos / Lucas Mangili Esteves. -- Ilha Solteira: [s.n.],
2020
 70 f. : il.

 Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia
de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2020

 Orientador: Rodrigo Cardim
 Inclui bibliografia

 1. Realimentação de posição. 2. Realimentação de velocidade. 3. Controle
 H^∞ . 4. Suspensão ativa. 5. D-estabilidade. 6. Desigualdades matriciais lineares.


Raiane da Silva Santos
Supervisora Técnica de Seção
Seção Técnica de Referência, Atendimento ao usuário e Documentação
Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação
CRB/8 - 9999



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Câmpus de Ilha Solteira

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Controle Robusto Hinf com Realimentação Parcial dos Estados Aplicado a Diferentes Sistemas Mecânicos

AUTOR: LUCAS MANGILI ESTEVES

ORIENTADOR: RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Doutor em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. RODRIGO CARDIM (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO MINHOTO TEIXEIRA (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. JEAN MARCOS DE SOUZA RIBEIRO (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. MÁRCIO ROBERTO COVACIC (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. WALLYSONN ALVES DE SOUZA (Participação Virtual)
Coordenação de Ciências Matemáticas e Naturais / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins - IFTO

Ilha Solteira, 30 de outubro de 2020

*Dedico esta tese à minha família
por todo carinho, amor, compreensão e
apoio que sempre me ofereceram.*

*“Educação é uma descoberta progressiva
de nossa própria ignorância.”*

Voltaire

AGRADECIMENTOS

É com muito carinho que dedico meus sinceros agradecimentos:

À minha família e minha namorada, por todo apoio, companheirismo e amor incondicional;

Ao meu orientador, professor Dr. Rodrigo Cardim, pela oportunidade oferecida, pelos ensinamentos, incentivo, confiança e paciência;

Aos professores do Departamento de Engenharia Elétrica da FEIS-UNESP, em especial ao professor Dr. Marcelo C. M. Teixeira, pelos ensinamentos e sugestões;

Aos meus companheiros do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) que me ajudaram neste trabalho de forma direta ou indireta;

Aos meus amigos, por todo companheirismo e amizade;

À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP) como um todo, local onde estudei durante toda a minha graduação, mestrado e doutorado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Esta tese propõe o projeto e implementação prática de um controle $\mathcal{H}_\infty$ robusto aplicado a alguns sistemas mecânicos (com foco num sistema de suspensão ativa), considerando um único vetor de ganhos de realimentação de estados. Uma característica importante, porém, são as limitações consideradas quanto ao acesso aos estados do sistema. Dois métodos são propostos, um que se utiliza realimentação apenas das variáveis de estado relacionadas às posições do sistema e outro que considera realimentação apenas das variáveis de estado relacionadas às velocidades. A estratégia de controle é baseada em desigualdades matriciais lineares (da sigla em inglês LMI), utilizando também a teoria de $\mathcal{D}$ -estabilidade, que permite ao projetista alocar os autovalores do sistema em malha fechada em uma região do semi-plano complexo negativo, o que, além de garantir a estabilidade, também garante que certos requisitos de desempenho do sistema realimentado sejam atendidos. A motivação do trabalho é obter resultados de controle satisfatórios mesmo com acesso limitado às variáveis de estado, sem a necessidade de qualquer tipo de estimativa das variáveis de estado consideradas inacessíveis. Portanto, os sistemas de controle propostos são opções interessantes como alternativas para o projeto de realimentação de estados de ordem completa para plantas com parâmetros incertos usando apenas realimentação da saída, considerando que não é necessário projetar um observador para estimar qualquer variável de estado da planta. Além disso, são relativamente mais baratos pelo fato de não haver necessidade de se medir todas as variáveis de estado da planta.

Palavras-chave: Realimentação de posição. Realimentação de velocidade. Controle $\mathcal{H}_\infty$. Suspensão Ativa. $\mathcal{D}$ -estabilidade. Desigualdades matriciais lineares.

ABSTRACT

This thesis proposes a new design and practical implementation of a robust $\mathcal{H}_\infty$ control applied to some mechanical systems (focusing on an active suspension system), considering a single state feedback gain vector. An important characteristic, though, is that limitations are considered for the state feedback. Two methods are presented, one that uses feedback only from state variables related to positions of the system and another that uses feedback only from state variables related to velocities. The control strategy is based on linear matrix inequalities (LMIs), using the theory of D-stability, which allows the designer to allocate the closed loop system eigenvalues in a negative complex semi-plane region, which, in addition to ensuring stability, also ensures meeting certain performance requirements of the feedback system. The paper motivation is to provide satisfactory control results even with limited states access, without any kind of estimation of the state variables that are not available. Therefore, the proposed control systems are interesting options as alternative for designing full state feedback for plants with uncertain parameters using only output feedback, considering that it is not needed to build an observer to estimate any plant state variable. Furthermore, they are relatively cheaper because it is not necessary to measure all state variables of the plant.

Keywords: Position feedback. Velocity feedback. $\mathcal{H}_\infty$ Control. Active Suspension. D-stability. Linear Matrix Inequalities.

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

- **LMIs:** *Linear Matrix Inequalities* (Desigualdades matriciais lineares)
- **SLIT:** Sistema Linear Invariante no Tempo.
- **MIMO:** *Multiple-input and multiple-output* (Sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas).
- **SISO:** *Single-input and single-output* (Sistema com uma entrada e uma saída).
- **PO:** Porcentagem de *overshoot*.
- **MS:** Máximo sobressinal.
- **PID:** Proporcional integral derivativo.
- **LPC:** Laboratório de Pesquisa em Controle.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Região $S(\alpha, r, \theta)$ para alocação de autovalores.	24
Figura 2 – Sistema de segunda ordem.	25
Figura 3 – Diagrama de blocos do sistema de controle projetado: Realimentação das posições.	31
Figura 4 – Diagrama de blocos da implementação do sistema de controle projetado: Realimentação das posições.	32
Figura 5 – Modelo esquemático do sistema de pêndulo invertido.	33
Figura 6 – Posição angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição. ..	35
Figura 7 – Velocidade angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição.	36
Figura 8 – Sinal da entrada controlada na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da posição.	36
Figura 9 – Diagrama de blocos do sistema de controle projetado: Realimentação das velocidades.	39
Figura 10 – Diagrama de blocos da implementação do sistema de controle projetado: Realimentação das velocidades.	40
Figura 11 – Posição angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade.	44
Figura 12 – Velocidade angular na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade.	44
Figura 13 – Sinal da entrada controlada na simulação do pêndulo invertido: Realimentação da velocidade.	45
Figura 14 – Sistema de suspensão ativa da marca Quanser®, pertencente ao LPC-FEIS-UNESP.	46
Figura 15 – Modelo esquemático do sistema de suspensão ativa.	47
Figura 16 – Saídas do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das posições.	50
Figura 17 – Entrada controlada do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das posições.	51
Figura 18 – Saídas do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das posições.	51
Figura 19 – Entrada controlada do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das posições.	52

Figura 20 – Comportamento do sistema de suspensão ativa em implementação prática para uma frequência crescente como entrada no perfil da pista: Realimentação das posições.....	53
Figura 21 – Saídas do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.	55
Figura 22 – Entrada controlada do sistema na simulação da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.	56
Figura 23 – Saídas do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.	57
Figura 24 – Entrada controlada do sistema na implementação prática da suspensão ativa: Realimentação das velocidades.	57
Figura 25 – Comportamento do sistema de suspensão ativa em implementação prática para uma frequência crescente como entrada no perfil da pista: Realimentação das velocidades...	58
Figura 26 – Diagrama de blocos do sistema de controle a ser projetado: Realimentação mista.	60
Figura 27 – Diagrama de blocos do sistema de controle a ser implementado: Realimentação mista.	61

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema de suspensão ativa Quanser.....	48
--	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$ E $\mathcal{D}$-ESTABILIDADE	18
2.1	SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO COM INCERTEZAS	18
2.2	UMA BREVE HISTÓRIA DAS LMIS NA TEORIA DE CONTROLE	20
2.3	CONTROLE ROBUSTO $\mathcal{H}_\infty$	21
2.4	A TEORIA DA $\mathcal{D}$ -ESTABILIDADE	24
3	O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE POSIÇÃO	28
3.1	TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE POSIÇÃO	28
3.2	EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES	33
3.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	37
4	O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE	38
4.1	TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DE VELOCIDADE	38
4.2	EXEMPLO DE APLICAÇÃO DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS VELOCIDADES	43
4.3	CONCLUSÕES PARCIAIS	45
5	SISTEMA DE SUSPENSÃO ATIVA QUANSER®	46
6	SIMULAÇÕES E RESULTADOS PRÁTICOS EM LABORATÓRIO	49
6.1	SUSPENSÃO ATIVA COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES	49
6.2	SUSPENSÃO ATIVA COM REALIMENTAÇÃO DAS VELOCIDADES	54
7	PRETENSÃO PARA PESQUISAS FUTURAS: CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO MISTA	59
8	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A – DEFINIÇÕES DE ALGUMAS MATRIZES ESPECIAIS	68
	APÊNDICE B – ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	69
	APÊNDICE C – COMPLEMENTO DE SCHUR	70

1 INTRODUÇÃO

A análise de estabilidade e o projeto de controladores para sistemas lineares são áreas de pesquisa amplamente exploradas. Este é um campo com inúmeras opções de técnicas de controle, sendo que algumas delas usam uma função de Lyapunov, juntamente com desigualdades matriciais lineares (em inglês, *Linear Matrix Inequalities*, LMIs) para garantir a estabilidade do sistema. Exemplos das principais vantagens do uso de LMIs neste tipo de projeto são a inserção de índices de desempenho (taxa de decaimento, porcentagem de *overshoot*, entre outras) no sistema em questão e o fato de que as LMIs podem ser solucionadas eficientemente em microcomputadores utilizando *softwares* já bastante conhecidos e difundidos, como mostrado em Gahinet *et al.* (1995).

Segundo Chen (1999), as pesquisas e publicações envolvendo a teoria de Lyapunov cresceram muito nas décadas que antecederam seu trabalho, sendo ainda hoje uma teoria muito explorada. Como apresentado em Buzachero (2010), isso abriu um leque muito grande para diversas abordagens, como análise de estabilidade robusta de sistemas lineares (LEITE *et al.*, 2004), controle robusto $\mathcal{H}_2$ (APKARIAN; TUAN; BERNUSSOU, 2001, ASSUNÇÃO; ANDREA; TEIXEIRA, 2007, ROSA FILHO, 2015), controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ (CHILALI; GAHINET, 1996, DE OLIVEIRA *et al.*, 2014), projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a falhas estruturais com realimentação das derivadas dos estados (ASSUNÇÃO; FARIA; TEIXEIRA, 2008), projeto de controladores robustos de sistemas sujeitos a falhas estruturais com realimentação dos estados (PASCOAL; ASSUNÇÃO; TEIXEIRA, 2009) e projeto de controladores baseados em LMIs utilizando realimentação derivativa e sistemas chaveados com estrutura variável (CARDIM, 2009). O projeto de controladores robustos pode ser também aplicado para sistemas não-lineares (SILVA, 2009).

O trabalho aqui apresentado, por sua vez, aborda um tema específico, ligado à limitação do acesso às variáveis de estado dos sistemas. Em muitos casos ter-se acesso a todas as variáveis de estado de um sistema é algo bastante complicado. Uma maneira de superar esse problema, aplicada muitas vezes, é usar alguma forma de estimativa para esses estados que são de difícil acesso. Além disso, sabe-se que esta estimativa se torna mais difícil quando a planta possui parâmetros incertos. No entanto, outra alternativa muito interessante é a implementação de uma técnica de controle que não dependa de todos os estados do sistema. Como exemplo, para alguns sistemas mecânicos o vetor de velocidade não é de acesso tão simples, enquanto que em outros casos o problema é ter acesso aos estados das posições. A solução deste problema pode, portanto, ser de grande importância no projeto e implementação

de controle para esta classe de sistemas. Um método para controlar sistemas mecânicos incertos, onde não há necessidade de se medir velocidades, por exemplo, torna as implementações mais baratas, algo que é altamente valorizado.

Em Shin *et al.* (2013) foi realizado um estudo sobre o controle de posição não-linear para motor de passo de ímã permanente usando apenas realimentação de posição, uma vez que em aplicações industriais a medição de velocidade não tem sido amplamente utilizada devido à preocupação com sua resolução ou custo. Em Guerrero *et al.* (2020) os autores apresentam um controle de velocidade para motores CC medindo apenas a posição angular. Avila-Becerril *et al.* (2016) projetaram um controlador dinâmico que é baseado apenas em medições das posições das articulações e juntas para robôs de articulação flexível. Também trabalhando com robôs, Faigl e Cízek (2019) desenvolveram um controle de locomoção adaptável para um tipo de robô com seis membros para percorrer terrenos irregulares, utilizando somente realimentação de posição. Huang e Huang (2019), por sua vez, projetaram um controle adaptativo para robôs baseado em técnica de aproximação de funções (do inglês FAT - *function approximation technique*) apenas com medições de posição. Salam (1987) apresenta um método onde apenas a realimentação da velocidade é necessária para conseguir o controle de para robôs manipuladores. Um estudo que investiga o problema do controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ quantizado para sistemas de suspensão ativa é apresentado em Li, Gao e Liu (2011), enquanto uma abordagem diferente é feita em Sun *et al.* (2014), onde uma técnica de controle tolerante a falhas é proposta para lidar com o problema de falhas desconhecidas do atuador de sistemas de suspensão ativa.

Este trabalho propõe o projeto e a implementação prática de um controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ aplicado a um sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser® (QUANSER, 2009), onde a realimentação de estados é realizada com certas limitações. Em um dos projetos apenas as variáveis de estado das posições são realimentadas, enquanto no outro somente as variáveis de estado das velocidades são utilizadas na realimentação. Em nenhum dos métodos há necessidade de se medir ou estimar as variáveis de estado do sistema que não fazem parte da realimentação. O controle $\mathcal{H}_\infty$ é particularmente interessante por aumentar a capacidade do sistema de rejeitar distúrbios externos e lidar bem com incertezas politópicas presentes nos sistemas apresentados, enquanto a teoria da D-estabilidade, usada na implementação das LMIs, oferece um maior controle sobre o comportamento transitório do sistema. Portanto, os sistemas de controle propostos são opções interessantes como alternativas para o projeto de realimentação de estados de ordem completa para plantas com parâmetros incertos usando apenas realimentação da saída, considerando que não é necessário projetar um observador

para estimar qualquer variável de estado da planta. Além disso, são relativamente mais baratos pelo fato de não haver necessidade de se utilizar sensores para medir todas as variáveis de estado da planta.

O *software* MATLAB[®], o pacote Yalmip (Löfberg, 2004) e o *solver* LMILab foram utilizados para a realização do projeto de controle aplicando as LMIs. O principal objetivo deste trabalho é mostrar que mesmo com um acesso de realimentação de estados limitado (um caso particular de realimentação da saída) é possível obter um desempenho de controle satisfatório para certos sistemas mecânicos.

O trabalho foi dividido da seguinte forma:

No Capítulo 2 apresentou-se a teoria do controle robusto $\mathcal{H}_\infty$ empregado no projeto do controlador, citando suas principais características, vantagens e desvantagens. É apresentada também a teoria da D-estabilidade, deixando claro o objetivo para sua utilização no trabalho.

No Capítulo 3 consta o método do projeto de controle para sistemas mecânicos via realimentação das posições, além de um exemplo de sua aplicação.

No Capítulo 4 é apresentado o método do projeto de controle para sistemas mecânicos via realimentação das velocidades, também com um exemplo de sua aplicação.

No Capítulo 5 consta o modelo e principais características do sistema de suspensão ativa fabricado pela Quanser[®].

No Capítulo 6 apresenta-se todos os resultados obtidos nas simulações (realizadas via o *software* MATLAB) e nas implementações práticas em laboratório.

No Capítulo 7 é introduzida a ideia do controlador misto, que trabalha com a realimentação de uma parcela das variáveis de estado das posições e uma parcela das variáveis de estado das velocidades.

Finalmente, no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões de todas as atividades realizadas no presente trabalho.

8 CONCLUSÃO

Neste trabalho, o projeto de um sinal de controle que depende apenas de alguns elementos do vetor de estados do sistema é a principal característica. Um conjunto de LMIs foi usado para garantir a estabilidade do sistema e ainda assegurar um desempenho mais adequado à dinâmica desejada.

Verificou-se que, apesar das limitações na realimentação do sistema, ambos os métodos propostos (realimentação das posições e das velocidades) apresentaram desempenhos satisfatórios. Para o sistema de suspensão ativa com realimentação das posições constatou-se um considerável máximo sobressinal mesmo no sistema em malha fechada (considerando o perfil de pista como uma onda quadrada), enquanto que no sistema de suspensão ativa com realimentação das velocidades o máximo sobressinal foi bem menor. Porém, os dois sistemas de controle demonstraram uma dinâmica consideravelmente rápida. Para o caso do sistema de suspensão ativa sujeito a um perfil de pista senoidal com frequência variável os dois métodos aplicados à suspensão ativa apresentaram desempenho muito bons e semelhantes, anulando a ressonância característica do sistema em malha aberta por volta do instante de 20 segundos (frequência próxima a 8 Hz). Portanto, os sistemas de controle propostos provaram ser opções interessantes para o projeto de controle de plantas mecânicas com parâmetros incertos usando somente realimentação da saída (apenas realimentação de posições ou apenas realimentação de velocidades), considerando que não é necessário construir um observador para estimar qualquer variável de estado da planta. Além disso, podem ser opções relativamente mais baratas pelo fato de não existir necessidade de se medir todas as variáveis de estado da planta.

Vale destacar que, desde as simulações no sistema do pêndulo invertido até as implementações práticas no sistema de suspensão ativa, foi considerada a existência de incertezas politópicas nos sistemas. Ainda assim, os sistemas de controle superaram tal empecilho e mantiveram um bom desempenho.

O autor não encontrou na literatura uma proposta semelhante relacionada à realimentação de posição ou velocidade em sistemas mecânicos. Em anexo se encontra o artigo do autor que se encontra em estágio final de elaboração e deverá ser submetido em breve a um periódico ainda a ser definido, abordando os sistemas de controle propostos nesta tese.

Um dos possíveis próximos rumos da pesquisa elaborada nesta tese é a possibilidade de se trabalhar com algum tipo controle chaveado, visto que esta é uma opção interessante de controle e o autor já realizou estudos sobre controle chaveado em sistemas dinâmicos em

Tello (2018). Outra possível continuidade para a pesquisa apresentada é o projeto de um método de controle misto, que funcionaria com acesso parcial às variáveis de estado de posição para realimentação e acesso parcial às variáveis de estado de velocidade, como sugerido no final deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and $\mathcal{H}_2$ synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterizations. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- ASSUNÇÃO, E.; ANDREA, C. Q.; TEIXEIRA, M. C. M. $\mathcal{H}_2$ and $\mathcal{H}_\infty$ -optimal control for the tracking problem with zero variation. **IET Control Theory Applications**, Stevenage, v. 1, n. 3, p. 682–688, 2007.
- ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A.; TEIXEIRA, M. C. M. Controle robusto de sistemas lineares sujeitos a falhas estruturais usando realimentação derivativa. In: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 2008, Presidente Prudente. **Proceedings of the [...]**. Presidente Prudente: [Unesp/FCT], 2008. 6 f.
- AVILA-BECERRIL, S.; LORÍA, A.; PANTELEY, E. **Global position-feedback tracking control of flexiblejoint robots**. 2016 American Control Conference (ACC), Boston, pp. 3008-3013, 2016.
- BARBAZELLI, R. C. **Estudo de funções de lyapunov para a estabilidade de sistemas de potência**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. Philadelphia: SIAM, 1994. 205 p. Studies in Applied Mathematics, SIAM, 15. Disponível em: <https://stanford.edu/~boyd/lmibook/lmibook.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2021.
- BUZACHERO, L. F. S. **Otimização de controladores robustos de sistemas dinâmicos sujeitos a falhas estruturais**. 2010. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2010.
- BUZETTI, A. S.; DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SOUZA, W. A.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Projeto de controle robusto chaveado com falhas nos sensores. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, 12, 2015, Natal. **Anais [...]**. Natal: UFRN, 2015.
- CABELLO, R. V. C. **Projeto de controladores H-infinito de ordem reduzida e compensação de saturação em estruturas flexíveis**. 2014. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.
- CAMATA, R. P.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; BUZARECHO, L. F. S.; ALVES, U. N. L. T.; DE OLIVEIRA, D. R. Implementação de controlador robusto para o sistema ball balancer sujeito a falhas estruturais. In: Anais do CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, 20, 2014, Campina Grande. **Anais [...]**. Campina Grande: UFCG, 2014. p. 4099-4106.

CARDIM, R. **Projeto de controladores baseados em LMIs: realimentação derivativa e sistemas chaveados utilizando estrutura variável**. 2009. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

CHEN, C. **Linear system theory and design**. 3.ed. New York: Oxford, 1999. 352 p. Oxford Series in Electrical and Computer Engineering.

CHILALI, M.; GAHINET, P. $\mathcal{H}^\infty$ design with pole placement constraints: An LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358-367, 1996.

DA SILVA, E. R. P.; FAZZOLARI, H. A.; DE OLIVEIRA, P. C.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; LORDELO, A. D. S. Implementação prática da d-estabilidade robusta via realimentação derivativa em um sistema de suspensão ativa. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE AUTOMAÇÃO INTELIGENTE, SBAI, 11, 2013. **Anais [...]**. 3645, 2013a. Disponível em: <http://www.sbai2013.ufc.br/pdfs/3645.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2020.

DA SILVA, E. R. P.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R. Robust controller implementation via state-derivative feedback in an active suspension system subjected to fault. *In*: CONFERENCE ON CONTROL AND FAULT-TOLERANT SYSTEMS (SysTol), 2013, Nice. **Proceedings of the [...]**. Nice: IEEE, 2013b. p. 752-757.

DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. S.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. Projeto de controle robusto $\mathcal{H}^\infty$ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa. *In*: Anais do XX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 20, 2014, Belo Horizonte. **Anais [...]**. Belo Horizonte, 2014. p. 2194-2201.

DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.; FRANCIS, B. State-space solutions to standard $\mathcal{H}^2$ and $\mathcal{H}^\infty$ control problems. **IEEE Transaction Automatic Control**, Piscataway, v. 34, p. 831-847, 1989.

FAIGL, J.; CÍZEK, P. Adaptive locomotion control of hexapod walking robot for traversing rough terrains with position feedback only. **Robotics and Autonomous Systems**, Amsterdam, v. 116, p. 136–147, 2019.

FARIA, F. A. **Alocação de pólos com realimentação da derivada dos estados usando LMIs**. 2005. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.

FRANCIS, B. **A course in $\mathcal{H}^\infty$ control theory**. New York: Springer-Verlag, 1987. Lecture Notes in Control and Information Sciences, 88.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI control toolbox - for use with MATLAB**. New York: The Math Works Inc, 1995.

GARCÍA, S. D.; PATINO, D. Estimation based on acceleration measures of an active suspension plant. *In*: IEEE COLOMBIAN CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL, CCAC, 2, 2015, Manizales. **Proceedings of the [...]**. Manizales: IEEE, 2015. p. 1-6.

GUERRERO, C.; SANTIBAÑEZ, V.; ARAIZA-OLVERA, Y.; IBARRA-FIGUEROA, E.; PÉREZ-PÉREZ, B. Control of velocity of DC motors by classical and passivity methods measuring only position: theory and experimental comparison. **IEEE Latin America Transactions**, Piscataway, v.18, n. 5, p. 962–970, 2020.

HUANG, A.; HUANG, C. FAT-based robot adaptive control with position measurements only. *In*: CHINESE CONTROL AND DECISION CONFERENCE, 31, 2019, Nanchang. **Proceedings of the [...]**. Nanchang: IEEE, 2019. p. 3516–3520.

JUNG, W.; NOH, I.; KANG, D. The vibration controller design using positive position feedback control. *In*: CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS, 13, 2013, Gwangju. **Proceedings of the [...]**. Gwangju: IEEE, 2013. p. 1721–1724.

LEITE, V. J. S.; MONTAGNER, V. F.; OLIVEIRA, P. J.; OLIVEIRA, R. C. L. F.; PERES, P. L. D. Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.

LI, H.; GAO, H.; LIU, H. Robust quantised control for active suspension systems. **IET Control Theory Application**, Stevenage, v. 15, n. 17, p. 1955–1969, 2011.

LÖFBERG, J. **Yalmip**: a toolbox for modeling and optimization in matlab. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ROBOTICS AND AUTOMATION, **Proceedings of the [...]**. New Orleans: IEEE, 2004.

MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ESTEVES, T. T.; TEIXEIRA, M. C. M. ; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. A. Stabilizability and disturbance rejection with state-derivative feedback. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2010, p. 1-12, 2010.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

PASCOAL, R. M.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Restrição da taxa de decaimento e otimização no projeto de controladores robustos para sistemas sujeitos a falhas. *In*: BRAZILIAN CONFERENCE ON DYNAMICS, CONTROL AND APPLICATIONS, 2009, Bauru. **Anais [...]**. Bauru: UNESP, 2009.

QUANSER. **Active Suspension System - User Manual**. Quanser Consulting Inc., Ontario, Canada, 2009.

ROSA FILHO, J. E. A. **Controle robusto $\mathcal{H}_2$ aplicado ao pêndulo invertido sujeito a incertezas**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Centro de Tecnologia e Urbanismo, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SALAM, F. M. A. Velocity feedback control and the dynamic properties of robot manipulators. *In*: PROCEEDINGS OF THE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 26, 1987, Los Angeles. **Proceedings of the [...]**. Los Angeles: IEEE, 1987. p. 2217–2220.

SAUER, P. W.; PAI, M. A. **Power system dynamics and stability**. New Jersey: PrenticeHall, 1998.

SHIN, D.; KIM, W.; LEE, Y.; CHUNG, C. C. Nonlinear position control for permanent magnet stepper motor using only position feedback. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON CONTROL, AUTOMATION AND SYSTEMS*, 13, Gwangju. **Proceedings of the [...]**. Gwangju: IEEE, 2013.

SILVA, E. R. P. **Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais**. 2009. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**. John Wiley & Sons, 2005.

SOUZA, W. A.; DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; SILVA, L. S. C.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Projeto e implementação de um controlador robusto chaveado utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno. *In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA*, 20, 2014, Belo Horizonte. **Anais [...]**. SBA, 2014. Disponível em: <http://www.swge.inf.br/cba2014/anais/PDF/1569934597.pdf>. Acesso em: 04 jan. 2020.

SUN, W.; PAN, H.; YU, J.; GAO, H. Reliability control for uncertain half-car active suspension systems with possible actuator faults. **IET Control Theory Application**, Stevenage, v. 8, n. 9, p. 746–754, 2014.

TELLO, I. F.Y.; ESTEVES, L. M.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M. ; ASSUNÇÃO, E.; DE OLIVEIRA, D. R.; ALVES, U. N. L. T. Robust $\mathcal{H}^\infty$ switched state-feedback control of uncertain linear systems. *In: IFAC SYMPOSIUM ON ROBUST CONTROL DESIGN, ROCOND2018*, 9, p. 67-72, 2018.

YAKUBOVICH, V. A. **Solution of certain matrix inequalities encountered in non-linear control theory**. **Soviet Mathematike**, Dokl., v. 5, p. 652-656, 1964.

YAKUBOVICH, V. A. The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems, I, II, III. **Automation and Remote Control**, New York, v. 25/26, n. 4, p. 905-917, 577-592, 753-763, 1967.

YAKUBOVICH, V. A. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. **Soviet Mathematike**, Dokl, v. 3, p. 620-623, 1962.

ZAMES, G. Feedback of optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transaction on Automatic Control**, Piscataway, v. 26, n. 2, p. 301–320, 1981.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. **Essentials of robust control**. New York: Prentice Hall, 1998.

APÊNDICE A – Definições de algumas matrizes especiais

- Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é simétrica se $A^T = A$.
- Uma matriz quadrada $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é hermitiana se $A^* = A$, sendo que $A^* = (\bar{A})^T$. Os elementos de $\bar{A}$ são os conjugados dos números complexos dos elementos correspondentes em A .
- Uma matriz A simétrica é positiva definida se $x^T A x > 0, \forall x \neq \mathbb{0}$. O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e x^T por x^* .
- Uma matriz A simétrica é positiva semidefinida se $x^T A x \geq 0, \forall x \neq \mathbb{0}$. O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e x^T por x^* .
- Uma matriz A simétrica é negativa definida se $x^T A x < 0, \forall x \neq \mathbb{0}$. O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e x^T por x^* .
- Uma matriz A simétrica é negativa semidefinida se $x^T A x \leq 0, \forall x \neq \mathbb{0}$. O caso complexo é análogo, bastando trocar simétrica por hermitiana e x^T por x^* .

APÊNDICE B – Estabilidade de Lyapunov

Nos sistemas não-lineares, a estabilidade global nem sempre ocorre. Em geral, apenas um conjunto de condições iniciais, contido no espaço $\mathbb{R}^n$, origina trajetórias que convergem para o ponto de equilíbrio estável x_0 . Matematicamente, esse conjunto é denominado área de atração ou região de estabilidade (BARBAZELLI, 2005).

Além de estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio, o Método de Lyapunov fornece uma maneira de se estimar a região de estabilidade. A Estabilidade do sistema é determinada usando funções ditas de Lyapunov definidas no espaço de estados considerando seu sinal e o de sua derivada temporal (BARBAZELLI, 2005).

O teorema de Lyapunov para sistemas autônomos (SAUER; PAI, 1998) é apresentado a seguir. Estuda-se a estabilidade da origem sem perda de generalidade, visto que é possível transformar o problema de um ponto de equilíbrio qualquer em um problema em que o ponto de equilíbrio esteja na origem através de uma translação.

Teorema B1. *Considerando-se um sistema dinâmico $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $f(0) = 0$ (a origem é ponto de equilíbrio). Se existe uma função escalar $V(x)$ positiva definida, isto é, $V(x) > 0$, com derivada $\dot{V}(x) < 0$, então o sistema é assintoticamente estável em torno de $x = 0$. Caso tenha-se que $V(x) > 0$ e $\dot{V}(x) \leq 0$, a origem é ponto de equilíbrio estável.*

APÊNDICE C – Complemento de Schur

O Complemento de Schur é um método que possibilita converter um conjunto de inequações não-lineares (convexas) em LMIs (GAHINET *et al.*, 1995; CARDIM, 2009).

A ideia básica é que a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (\text{C.1})$$

sendo que $Q(x) = Q(x)^T$, $R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$ têm uma dependência afim de x , é equivalente ao conjunto de inequações (C.2) e ao conjunto de equações (C.3).

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) > 0. \quad (\text{C.2})$$

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x) R(x)^{-1} S(x)^T > 0. \quad (\text{C.3})$$

Maiores detalhes sobre o Complemento de Schur podem ser encontrados em Boyd *et al.* (1994).